UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 161

Propriétés statistiques des séries de Dirichlet et des produits d'Euler

Hervé Queffelec

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

Propriétés statistiques des séries de Dirichlet et des produits d'Euler

H. Queffelec

Il y a en mathématiques plusieurs théorèmes d'existence : ceux liés à la notion de point fixe (théorème des fonctions implicites, solution locale des équations différentielles $y' = f(x,y)$) ou ceux liés à la notion de cardinalité (théorèmes de Chevalley et Warning, de Sylow, existence de nombres réels transcendants) par exemple. Nous nous intéresserons ici exclusivement à deux sortes de théorèmes d'existence : ceux liés au théorème de Baire (méthodes quasi-sûres) et ceux liés à la théorie des probabilités (méthodes presque sûres). Ces deux méthodes ont déjà donné lieu à de nombreux théorèmes : existence de fonctions continues partout sans dérivée, existence de fonctions C^∞ partout non analytiques, existence d'ensembles de Kronecker parfaits (Kaufman) par le quasi-sûr, existence de réels t tels que (t^n) soit équirépartie modulo 1 (Koksma), existence de nombres normaux au sens de Borel, existence d'ensembles de non-synthèse par le presque sûr, etc...
Comme l'observe Rudin dans "Real and Complex Analysis" par ces méthodes on montre souvent qu'un ensemble n'est pas vide en montrant qu'il est très gros : par exemple l'ensemble des t tels que t^n soit équiréparti modulo un n'est pas vide puisque son complémentaire est de mesure nulle ; mais on ne sait "citer" aucun t ayant cette propriété ...

On se propose d'appliquer ces méthodes dans la théorie des séries de Dirichlet

$\sum_1^\infty \frac{a_n(1)}{n^s}$; celles-ci ont été étudiées en détail, par des méthodes sûres, par Harald Bohr qui s'est surtout intéressé à la sommabilité et à la croissance des séries (1) ; Bohr considère les abscisses suivantes (on pose comme d'habitude $s = \sigma + it$) :

abscisse de convergence absolue

$$\sigma_a = \inf\left\{\sigma_o \,\middle|\, \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{n^\sigma} \text{ converge pour } \sigma > \sigma_o\right\} ;$$

abscisse de convergence simple

$$\sigma_s = \inf\left\{\sigma_o \,\middle|\, \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ converge pour } \sigma > \sigma_o\right\};$$

abscisse de convergence uniforme

$$\sigma_u = \inf\left\{\sigma_o \,\middle|\, \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ converge uniformément dans le demi-plan } \sigma > \sigma_o\right\} ;$$

abscisse d'holomorphie
$(\sigma_h \le \sigma_s \le \sigma_u \le \sigma_a)$

$$\sigma_h = \inf\left\{\sigma_o \,\middle|\, \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ se prolonge en une fonction analytique } f(s) \text{ dans le demi-plan } \sigma > \sigma_o\right\}.$$

Il considère aussi la "fonction de Lindelöf" associée $\mathfrak{a}(1)$ et à son prolongement éventuel f(s).

$$\mu(f,\sigma) = \mu(\sigma) = \inf\left\{\xi \ge 0 / f(\sigma+it) = 0(|t|^\xi) \quad \text{quand} \quad |t| \to +\infty\right\}.$$

D'après la théorie des fonctions analytiques, μ est <u>convexe décroissante positive</u> sur $]\sigma_h, +\infty[$; Bohr a démontré qu'inversement toute fonction μ ayant ces propriétés et telle que $\mu' \le -1$ était la fonction de Lindelöf d'une série du type (1). (Théorème 1).

Citons encore un complément donné par Bohr à un théorème de Stieltjes.

<u>Théorème (Bohr-Stieltjes)</u> : soient $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ et $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s}$ deux séries de Dirichlet d'abscisses de convergence simple respectives $\sigma_s(a) \le 0$, $\sigma_s(b) \le 0$; soit

$c = a * b \quad (c_n = \sum_{d/n} a_d b_{\frac{n}{d}})$; alors $\sigma_s(c) \leq \frac{1}{2}$; et c'est la meilleure majoration qu'on puisse donner (cette dernière affirmation étant la contribution de Bohr).

Les constructions de Bohr dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont extrêmement compliquées ; la méthode quasi-sûre les remplace avantageusement dans le théorème 2 et il aurait été souhaitable d'en faire autant avec le théorème 1, malheureusement on n'y est pas parvenu, quoique l'on arrive à des séries de Dirichlet à coefficients ± 1, se prolongeant en des fonctions entières, et dont la fonction de Lindelöf est connue, étant exactement, dans un cas, celle conjecturée pour la série sûre :

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\,\zeta(s)$$

à savoir $\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > 1/2 \\ 1/2-\sigma & \text{si } \sigma \leq 1/2 \end{cases}$ (conjecture de Lindelöf).

I. Ce travail contient d'abord la rédaction détaillée d'une note de J.-P. Kahane [1], avec des prolongements divers ; il s'agit d'étudier les propriétés qs et ps des séries $\sum \frac{\pm 1}{n^s}$ déduites de la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.

II. On étudie ensuite les propriétés qs et ps des produits $\prod_{p \in P} \frac{1}{1 \pm \frac{1}{p^s}}$, déduits de l'expression de ζ sous la forme $\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$.

On rencontre en II des propriétés assez différentes de celles de I.

I

Soit $\Omega = \{-1\ ,\ +1\}^N$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur chaque facteur, et de la probabilité produit de la probabilité de pile ou face sur chaque facteur. On note $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ le "point courant" de Ω, ses composantes

$\varepsilon_n(\omega)$ apparaissent comme des variables de Rademacher indépendantes sur Ω.

Ω est un espace de probabilité : une propriété qui a lieu sur un ensemble de probabilité 1 est dite presque sûre (en abrégé ps).

Ω est un espace topologique compact (donc de Baire) : une propriété qui a lieu sur une intersection dénombrable d'ouverts denses (ensemble de seconde catégorie) est dite quasi-sûre (en agrégé qs).

On s'intéresse aux propriétés ps et qs des séries de Dirichlet :

$$\sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^s} = f(s) \tag{1}$$

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n\left(\frac{1}{(2n+1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right) = g(s). \tag{2}$$

THEOREME A.

1. Les séries (1) ont les propriétés qs suivantes $\sigma_s = \sigma_u = \sigma_h = 1$, la droite $\sigma = 1$ est une coupure pour f.

2. Les séries (1) ont les propriétés ps suivantes $\sigma_u = 1$, $\sigma_s = \sigma_h = \frac{1}{2}$, la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ est une coupure pour f, $\mu(\sigma) = 0$ si $\sigma > \frac{1}{2}$ et plus précisément

$$f(\sigma + it) = O(\log |t|)^{1-\sigma_o} \text{ uniformément quand } |t| \to +\infty \text{ pour } \sigma \geq \sigma_o > \frac{1}{2}.$$

Preuve du théorème A.

1. Il suffit clairement de démontrer que $\sigma = 1$ est qs une coupure pour f, mais ceci va résulter du théorème plus général suivant

THEOREME A_1. Soit $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet à coefficients réels, d'abscisse de convergence simple $\sigma_s = \alpha > -\infty$; alors la série $\sum_1^\infty \varepsilon_n a_n e^{-\lambda_n s}$ admet quasi-sûrement la droite $\sigma_s = \alpha$ comme coupure.

Preuve du théorème A_1.

Soit α_n une suite de ± 1 telle que $\alpha'_n a_n = |a_n|$, et soit $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n, \ldots$ $\ldots) \in \Omega$; la multiplication par α' est un homéomorphisme de Ω, et $(\varepsilon_n \alpha'_n) a_n = \varepsilon_n |a_n|$, donc on peut se limiter à $a_n \geq 0$. D'autre part, l'ensemble des $\omega = (\varepsilon_n)$ pour lesquels $\Re s = \alpha$ n'est pas une coupure peut s'écrire comme

$$\bigcup_{a,r,N} E_{a,r,N}, \quad \text{avec} \quad a = \alpha + it, \quad t \in Q, \quad r \in Q^+, \quad N \text{ entier} \geq 1,$$

et $E_{arN} = \left\{\omega / \Sigma\, \varepsilon_n(\omega)\, a_n\, e^{-\lambda_n s} = f_\omega(s)\right.$ possède un prolongement analytique, toujours noté f_ω, dans le disque $D_{a,r} = \left\{s / |s-a| < r\right\}$, et $\left.|f_\omega| \leq N \text{ sur } D_{ar}\right\}$.

Chaque $E_{a,r,N}$ est fermé, en effet, si $\omega \in \overline{E_{a,r,N}}$, il existe une suite $\omega^i \in E_{a,r,N}$ telle que $\omega^i \to \omega$. Si $f_i(s) = f_{\omega^i}(s)$, $|f_i| \leq N$ sur D_{ar}, donc les f_i forment une famille normale sur D_{ar}, donc quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $f_i \to g$ uniformément sur tout compact de D_{ar}, avec g holomorphe et $|g| \leq N$ sur D_{ar}.

Or, $\omega^i \to \omega \Longleftrightarrow \varepsilon^i_n \to \varepsilon_n$ $\forall n$; mais il est clair que, pour $\Re s > \alpha$, cette convergence entraîne la convergence simple

$$\sum_1^\infty \varepsilon^i_n a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad \text{où} \quad f_i(s) \to f_\omega(s).$$

On a donc $g = f_\omega$ sur $D_{a,r} \cap Rs > 1$, et g définit donc un prolongement $\leq N$ en module de f_ω sur $D_{a,r}$, donc $\omega \in E_{a,r,N}$.

Si un des $E_{a,r,N}$ n'est pas d'intérieur vide,

$$E_{arN} \supset \left\{\varepsilon_{n_1}\right\} \times \ldots \times \left\{\varepsilon_{n_i}\right\} \times \prod_{n \neq n_i} D_n = U$$

avec $D_n = \left\{-1 , +1\right\}$. Soit alors ω' quelconque dans Ω ; pour $Rs > \alpha$, on peut écrire

$$f_{\omega'}(s) = \sum_1^\infty \varepsilon'_n a_n e^{-\lambda_n s} = \underbrace{\sum_{n_i} \varepsilon_n a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{n \neq n_i} \varepsilon'_n a_n e^{-\lambda_n s}}_{= f_\omega(s)\ ,\ \omega \in U} + \underbrace{\sum_{n_i} (\varepsilon'_n - \varepsilon_n) a_n e^{-\lambda_n s}}_{= \text{fonction entière}} .$$

On voit donc que $f_{\omega'}$ admet un prolongement analytique à $D_{a,r}$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que si $|u - t| \leq \varepsilon$, le disque de centre $\alpha + \varepsilon + iu$ et de rayon 2ε soit inclus dans $D_{a,r}$. (Avec $a = \alpha + it$). Pour $t-\varepsilon \leq u \leq t+\varepsilon$, prenons $\varepsilon'_n = \text{sign} \cos \lambda_n u$ et posons $b = \alpha + \varepsilon + iu$, $c = \alpha - \varepsilon + iu$, $f = f_{\omega'}$.

Nous avons

$$f(c) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(c - b)^m}{m!} f^{(m)}(b) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(c-b)^m}{m!} \sum_{n=1}^\infty \varepsilon'_n a_n (-1)^m \lambda_n^m e^{-\lambda_n b}$$

$$f(c) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(2\varepsilon)^m}{m!} \sum_{n=1}^\infty \varepsilon'_n a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon+iu)} \qquad \text{D'où}$$

$$\Re f(c) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(2\varepsilon)^m}{m!} \sum_1^\infty a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon)} |\cos \lambda_n u| .$$

Tous les termes étant positifs, nous pouvons intervertir l'ordre des sommations, et donc

$$Rf(c) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon)} |\cos \lambda_n u| \sum_{m=0}^\infty \frac{(2\varepsilon)^m}{m!} \lambda_n^m$$

$$Rf(c) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha-\varepsilon)} |\cos \lambda_n u| < \infty .$$

Mais nous en déduisons

i) $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha-\varepsilon)} < \infty$

d'après le

LEMME 1. <u>Si</u> $b_n \geq 0$, si $\sum_1^\infty b_n |\cos \lambda_n t| < \infty$, $t \in E$, $m(E) > 0$ (m = <u>mesure de Lebesgue</u>), <u>alors</u> $\sum_1^\infty b_n < \infty$.

C'est tout simplement le fait connu ([2]) qu'un ensemble de mesure positive n'est pas un ensemble de convergence absolue.

Mais i) contredit la définition de α ; chaque $E_{a,r,N}$ est donc d'intérieur vide. $\cup E_{arN}$ est donc un ensemble de première catégorie, ce qui démontre le théorème A_1. ▨

2. Montrons d'abord que $\sigma_u = 1$ ps. Soit $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers ; les $\log p_\nu$ sont rationnellement indépendants, donc par le théorème de Kronecker [2]

$$\sup_{t\in R} \left| \sum_1^n \varepsilon_\nu e^{it\mathrm{Log}\, p_\nu} \right| = \sum_1^n |\varepsilon_\nu|, \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{C} \text{ quelconques.}$$

Si l'on applique ce résultat aux séries (1) avec $\varepsilon_\nu = \varepsilon_{p_\nu}(\omega)$ et si l'on utilise l'estimation de Bohr [3]

$$\sigma_u(h) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log U_n}{\log n},$$

avec

$$h(s) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_{p_\nu}(\omega)}{p_\nu^s}, \quad \text{et} \quad U_n = \sup_{t\in R} \left| \sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{p_\nu}(\omega)\, e^{it\,\mathrm{Log}\, p_\nu} \right| = n,$$

on trouve $\sigma_u(h) = 1$ sûrement. D'autre part, soit P l'ensemble des nombres premiers, Q l'ensemble des nombres ≥ 1 non premiers, et α un réel tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Admettant provisoirement que toutes les séries considérées convergent p.s. pour $Rs > \frac{1}{2}$, nous avons

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^s} = \sum_p \frac{\varepsilon_n}{n^s} + \sum_Q \frac{\varepsilon_n}{n^s}$$

et introduisons

$$g(s) = \sum_p \frac{\varepsilon_n}{n^s} - \sum_Q \frac{\varepsilon_n}{n^s}.$$

Considérons les évènements :

$$A_\alpha : \sup_{\substack{\sigma\geq\alpha \\ t\in R}} |f(\sigma+it)| = +\infty \qquad B_\alpha : \sup_{\substack{\sigma\geq\alpha \\ t\in R}} |g(\sigma+it)| = \infty \qquad C_\alpha : \sup_{\substack{\sigma\geq\alpha \\ t\in R}} |h(\sigma+it)| = \infty$$

$C_\alpha \subset A_\alpha \cup B_\alpha$ puisque $f + g = 2h$, $P(C_\alpha) = 1$ puisque $C_\alpha = \Omega$.

(D'après un théorème de Bohr, le plus grand demi-plan où une série de Dirichlet est bornée est égal au plus grand demi-plan où elle converge uniformément) et $P(A_\alpha) = P(B_\alpha)$ puisque $-\varepsilon_n$ a même distribution que ε_n (principe de symétrie), donc $P(A_\alpha) \geq \frac{1}{2}$ et comme A_α est un évènement asymptotique, $P(A_\alpha) = 1$ par la loi du zéro-un. Comme ceci a lieu pour tout $\alpha < 1$ et d'après le théorème de Bohr cité plus haut, on a $\sigma_u(f) = 1$ ps. ▨

Avant de démontrer $\sigma_s = \sigma_h = \frac{1}{2}$, rappelons quelques résultats classiques de probabilités.

1. Loi du logarithme itéré [5]. Si $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$, on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1 \quad \text{ps}.$$

2. Théorème des trois séries [5]. Soit u_n une suite de nombres complexes, alors

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n u_n \text{ converge ps} \iff \sum_1^\infty |u_n|^2 < \infty.$$

3. Théorème de la coupure [4]. Soit $\sum_1^\infty X_n(\omega)\, e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet à coefficients indépendants et symétriques (X_n et $-X_n$ équidistribuées) ; alors l'abscisse de convergence simple $\sigma_s(\omega)$ est ps une constante et si $\sigma_s > -\infty$, la droite $\sigma = \sigma_s$ est ps une coupure pour la série.

$\sigma_s = \frac{1}{2}$ ps pour (1) résulte de la loi du logarithme itété, via $\sigma_s = \overline{\lim} \frac{\log|S_n|}{\log n}$, aussi bien que de 2 puisque l'on a :

$$\sum_1^\infty n^{-2\sigma} < \infty \iff \sigma > \frac{1}{2}.$$

$\sigma_h = \frac{1}{2}$ ps résulte de 3. Enfin, 2 démontre les convergences ps admises lors du calcul de σ_u. ▨.

L'estimation de la fonction $\mu(\sigma)$ repose sur le lemme classique suivant (S. Bernstein) dont nous donnons la démonstration pour éviter toute recherche au lecteur.

LEMME 2. Soient $a_1,\dots,a_N \in \mathbb{C}$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N$ des Rademacher indépendantes, et $X = \sum_1^N \varepsilon_n a_n$. Posons $M = \sum_1^N |a_n|^2$, et soit χ un nombre positif ≥ 1. Alors

$$P(|X| > 2\sqrt{M \log \chi}) \leq \frac{4}{\chi}.$$

Preuve. Supposons d'abord les a_n réels, et soit a un nombre réel positif ; nous avons, si $\lambda > 0$,

$$P(X > a) = P(e^{\lambda X} > e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} E(e^{\lambda X}) = e^{-\lambda a} \prod_1^N \operatorname{ch} \lambda a_n,$$

d'où

$$P(X > a) \leq e^{-\lambda a + M\frac{\lambda^2}{2}} \quad ;$$

faisons $\lambda = \frac{a}{M}$, il vient $P(X > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2M}}$. Comme X et $-X$ sont équidistribuées, $P(|X| > a) \leq 2\, e^{-\frac{a^2}{2M}}$. Si $a_n = u_n + iv_n$, $X = U + iV$, avec $U = \sum \varepsilon_n u_n$, $V = \sum \varepsilon_n v_n$, et soit $M_1 = \sum u_n^2 \leq M$, $M_2 = \sum v_n^2 \leq M$. Nous avons

$$P(|X| > a) \leq P(|U| > \frac{a}{\sqrt{2}}) + P(|V| > \frac{a}{\sqrt{2}}) \leq 2\left(e^{-\frac{a^2}{4M_1}} + e^{-\frac{a^2}{4M_2}}\right) \leq 4\, e^{-\frac{a^2}{4M}}.$$

Le lemme 2 en résulte, en faisant $a = 2\sqrt{M \log \chi}$.

Le lemme 2 a pour conséquence le lemme suivant.

LEMME 3. Soient $0 < n_1 < n_2 < \dots$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ des réels, T un réel ≥ 1, et

$$f_j(s) = \sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \frac{\varepsilon_n}{(\alpha_n + \beta)^s} = f_j(\sigma + it).$$

Alors, si $\sigma > \frac{1}{2}$, on a $P(\|f_j\|_{[0,T]} \geq \frac{C}{n_j^{\sigma - 1/2}} \sqrt{\log T n_{j+1}}) \leq \frac{1}{n_j}$ pour tout $j \geq 0$, où C est une fonction de σ, α, β seulement, et où : $\|f_j\|_{[0,T]} = \sup_{0 \leq t \leq T} |f_j(\sigma + it)|$.

Preuve. Soit N un entier à fixer par la suite ; divisons $[0,T]$ en $\left[k\frac{T}{N}, (k+1)\frac{T}{N}\right] = I_k$, $k = 0, \dots, N-1$ et posons $t_k = k\frac{T}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Considérons désormais f_j comme fonction de t seul et écrivons $\|\ \|$ pour $\|\ \|_{[0,T]}$, nous avons

$$(3) \qquad \|f_j\| \leq \sup_k |f_j(t_k)| + \frac{T}{2N}\|f_j'\| .$$

Or $\|f_j'\| \leq \sum_{n_j<n\leq n_{j+1}} (\alpha n+\beta)^{-\sigma}\operatorname{Log}(\alpha n+\beta) \leq \sum_{n_j<n<n_{j+1}} \frac{\operatorname{Log}\gamma + \operatorname{Log} n}{(\alpha n+\beta)^{\sigma}}$,

avec $\gamma = 2\sup(\alpha,\beta)$ (3'). Ou encore

$$\|f_j'\| \leq 2\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}} \sum_{n_j<n\leq n_{j+1}} \frac{\operatorname{Log} n}{n^{\sigma}} \leq \frac{2\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}\operatorname{Log} n_{j+1} \sum_{n_j<n\leq n_{j+1}} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

$$\leq 2\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}\operatorname{Log} n_{j+1}\int_{n_j}^{n_{j+1}} \frac{dt}{t^{\sigma}} \leq 2\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}\operatorname{Log} n_{j+1}\int_{n_j}^{n_{j+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

d'où

$$(4) \qquad \|f_j'\| \leq 4\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}\operatorname{Log} n_{j+1}\sqrt{n_{j+1}} \leq 4n_{j+1}\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}.$$

Soit d'autre part $M = \sum_{n_j< n\leq n_{j+1}} \frac{1}{(\alpha n+\beta)^{2\sigma}} \leq \frac{1}{\alpha^{2\sigma}}\int_{n_j}^{\infty}\frac{dt}{t^{2\sigma}} = \frac{1}{(2\sigma-1)\alpha^{2\sigma}n_j^{2\sigma-1}}$.

D'après le lemme 2, avec χ_j en place de χ, nous avons

$$P\left(|f_j(t_k)| > 2\sqrt{\log\chi_j}\,\frac{1}{\sqrt{2\sigma-1}}\,\alpha^{-\sigma}n_j^{-(\sigma-1/2)}\right) \leq \frac{4}{\chi_j}.$$

Donc

$$(5) \qquad P\left(\sup_k |f_j(t_k)| > 2\sqrt{\log\chi_j}\,\frac{1}{\sqrt{2\sigma-1}}\,\alpha^{-\sigma}n_j^{-(\sigma-1/2)}\right) \leq \frac{4(N+1)}{\chi_j} \leq \frac{8N}{\chi_j}.$$

Soit

$$(5') \qquad C_1 = \sup\left(4\frac{\operatorname{Log}\gamma}{\alpha^{\sigma}}, \frac{2}{\alpha^{\sigma}\sqrt{2\sigma-1}}\right).$$

(3) donne alors, via (4) et (5),

$$\|f_j\| \leq \frac{C_1}{n_j^{\sigma-1/2}}\left[\sqrt{\log\chi_j} + \frac{T}{2N}n_j^{\sigma-1/2}\,n_{j+1}\right],$$

(6) $$\|f_j\| \leq \frac{C_1}{n_j^{\sigma-1/2}} \left[\sqrt{\log \chi_j} + \frac{T}{2N} n_{j+1}^{\sigma+1/2}\right],$$

avec une probabilité $\geq 1 - \frac{8N}{\chi_j}$.

Prenons maintenant $N = \left[\frac{T}{2} n_{j+1}^{\sigma+1/2}\right] + 1$, où ici $[\ ]$ désigne la partie entière, et $\chi_j = 8n_jN$, nous avons, puisque $n_{j+1} \geq 2$: $\chi_j \leq 8Tn_{j+1}^{\sigma+2} \leq (T_{n_{j+1}})^{\sigma+5}$,

(7) $$\|f_j\| \leq \frac{2C_1\sqrt{\sigma+5}}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T\, n_{j+1}}$$

avec une probabilité $\geq 1 - \frac{1}{n_j}$.

D'où le lemme 3, avec

(8) $$C = 2\sqrt{\sigma+5}\, \sup\left(\frac{4\log\gamma}{\alpha^\sigma}, \frac{2}{\alpha^\sigma\sqrt{2\sigma-1}}\right). \blacksquare$$

Revenons à $f(\sigma+it) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^{\sigma+it}}$, $\sigma > \frac{1}{2}$ fixé. Nous avons (on peut supposer $\sigma < 1$ puisqu'il est évident que $\mu(\sigma) = 0$ si $\sigma > 1$)

(9) $$f(\sigma+it) = \varepsilon_1 + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\sigma+it), \quad \text{avec} \quad f_j(\sigma+it) = \sum_{2^j < n \leq 2^{j+1}} \frac{\varepsilon_n}{n^{\sigma+it}}.$$

Appliquons le lemme 3 à f_j, en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $n_j = 2^j$, il vient, en tenant compte du fait que $n_{j+1} = 2n_j$ et en supposant $T \geq 2$ (ce qui entraîne $2n_jT \leq (n_jT)^2$ et donc $\log n_{j+1}T \leq 2\log n_j T$)

(10) $$\|f_j\|_{[0,T]} \leq \frac{C'(\sigma)}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T\, n_j}, \quad \text{avec une probabilité } \geq 1 - 2^{-j}.$$

(10') $C'(\sigma) = \sqrt{2}\, C$, où C est la constante du lemme 3, donnée par (8).

Désignons par A_{jT} l'événement $\|f_j\|_{[0,T]} > \frac{C'(\sigma)}{n_j^{\sigma-1/2}}\sqrt{\log T\, n_j}$. D'après (10), nous avons

$$P(A_{jT}) \leq 2^{-j}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe $\Omega_T \subset \Omega$, $P(\Omega_T) = 1$, tel que si $\omega \in \Omega_T$, toutes les inégalités (10) ont lieu pour $j \geq j_T(\omega)$, où j_T, qui est choisi le plus petit possible, est une variable aléatoire sur Ω. Nous avons

$$(j_T = n_o) = \Big(\bigcap_{k\geq n_o} \overline{A_{kT}}\Big) \cap A_{n_o-1} \quad \text{d'où} \quad P(j_T = n_o) \leq 2^{1-n_o}, \qquad n_o \geq 0.$$

(11) $$E(j_T^2) = \sum_o^\infty n_o^2\, P(j_T = n_o) \;\leq \sum_o^\infty n_o^2\, 2^{1-n_o} = \lambda < \infty.$$

Donnons maintenant à T la suite de valeurs $T_k = e^{n_k} = e^{2^k}$, et posons $j_{T_k} = j_k$, nous avons d'après (11)

$$P(j_k \geq k) = P(j_k^2 \geq k^2) \;\leq \frac{\lambda}{k^2},$$

donc $\Sigma\, P(j_k \geq k) < \infty$, et il existe $S \subset \Omega$, $P(S) = 1$, tel que

(12) si $\omega \in S$, il existe $k_o(\omega)$ entier ≥ 1 tel que pour $k \geq k_o(\omega)$, $j_k(\omega) \leq k$.

Soit d'autre part $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{T_k}$, et $E = A \cap S$. Alors $P(E) = 1$. Soit $\omega \in E$ et soit $t > T_{k_o(\omega)}$; soit d'autre part k l'unique indice tel que :

$$T_{k-1} \leq t \;< T_k = T_{k-1}^2 \leq t^2.$$

On a nécessairement $k > k_o(\omega)$.

D'après (9),

(13) $$|f(\sigma + it)| \leq 1 + \sum_{j<k} |f_j(\sigma + it)| + \sum_{j\geq k} |f_j(\sigma + it)|.$$

<u>Si $j \geq k$,</u> $j \geq j_k$ puisque $k > k_o(\omega)$, mais on peut alors appliquer (10) avec $T = T_k$, puisque $\omega \in \Omega T_k$, d'où :

(14) $$|f_j(\sigma+it)| \leq \|f_j\|_{[0,T_k]} \leq \frac{C'(\sigma)}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_j}.$$

<u>Si $j < k$,</u> on majore $|f_j(\sigma+it)|$ par $\sum_{2^j<n\leq 2^{j+1}} n^{-\sigma}$. (13) donne alors, compte tenu de (14)

(15) $$|f(\sigma + it)| \leq \frac{n_k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + C'(\sigma) \sum_{j\geq k} \frac{1}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_j}.$$

Majorons cette dernière somme en posant $\alpha = \sigma - \frac{1}{2}$, $q = 2^{-\alpha}$, nous avons

$$\sum_{j\geq k} \frac{1}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_j} \;\leq \sum_{j\geq k} \frac{1}{q^{-j}} \big(\sqrt{\log T_k} + j\big) =$$

$$= \sqrt{\log T_k}\ \frac{q^k}{1-q} + \frac{kq^k}{1-q} + \frac{q^{k+1}}{(1-q)^2} \leq 3\sqrt{\log T_k}\, q^k \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Posons

$$(15') \qquad c''(\sigma) = \sup\left(\frac{1}{1-\sigma}, \frac{3c'(\sigma)}{(1-2^{-(\sigma-1/2)})^2}\right) ;$$

(15) devient, compte tenu du fait que $n_k = \log T_k$

$$|f(\sigma+it)| \leq c''(\sigma)\left[(\log T_k)^{1-\sigma} + \frac{\sqrt{\log T_k}}{(\log T_k)^{\sigma-1/2}}\right] = 2\, c''(\sigma)\,(\log T_k)^{1-\sigma},$$

or

$$|f(\sigma+it)| \leq 2c''(\sigma)\,(\log t^2)^{1-\sigma} = 2^{2-\sigma} c''(\sigma)\,(\log t)^{1-\sigma}.$$

Autrement dit : $\omega \in E \Longrightarrow |f(\sigma+it)| \leq c'''(\sigma)\,(\log t)^{1-\sigma}$ dès que $t > T_{k_o(\omega)}$,

et donc $f(\sigma+it) = O((\log t)^{1-\sigma})$ quand $t \to +\infty$; mais comme $f(\sigma - it) = \overline{f(\sigma+it)}$,

on voit que

$$\omega \in E \Longrightarrow f(\sigma+it) = 0\,((\log|t|)^{1-\sigma}) \quad \text{quand} \quad |t| \to +\infty,$$

uniformément quand $\sigma \geq \sigma_o > \frac{1}{2}$.

Comme $P(E) = 1$, ceci achève de démontrer le théorème A.▨.

THEOREME B.

1. <u>Les séries (2) ont les propriétés</u> qs <u>suivantes</u> : $\sigma_u = 1$, $\sigma_s = \sigma_h = 0$, <u>la droite</u> $\sigma = 0$ <u>est une coupure pour</u> f, $\mu(\sigma) = 1 - \sigma$ <u>si</u> $0 < \sigma \leq 1$.

2. <u>Les séries (2) ont les propriétés ps suivantes</u> : $\sigma_u = 1$, $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\frac{1}{2}$. <u>la droite</u> $\sigma = -\frac{1}{2}$ <u>est une coupure pour</u> f, <u>et</u> :

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } -\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \sigma \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

<u>Preuve du théorème B.</u>

1. Soit $u_n(s) = (2n+1)^{-s} - (2n)^{-s}$; la formule de Taylor, appliquée à $f(x) = x^{-s}$, donne

$$u_n(s) = -s(2n)^{-s-1} + s(s+1) \underbrace{\int_0^1 (1-t)(2n+t)^{-s-2}\, dt}_{v_n(s)}$$

$|v_n(s)| \leq n^{-\sigma-2}$. Donc

(16) $$g(s) = \sum_1^\infty \varepsilon_n u_n(s) = \frac{-s}{2^{s+1}} \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^{s+1}} + s(s+1) \sum_1^\infty \varepsilon_n v_n(s).$$

La deuxième série écrite converge absolument pour $\sigma > -1$, et dans la première on reconnaît $f(s+1)$. Le fait que $\sigma_s = \sigma_h = 0$, et que $\sigma = 0$ soit une coupure pour (2) résulte alors du théorème A, 1°). Quant à $\sigma_u = 1$, cela découlera de l'estimation de $\mu(\sigma)$. Auparavant, nous allons introduire, pour une fonction f C^∞ sur $[1, \infty[$, ses différences successives :

$$\Delta_o f(n) = f(n)$$

$$\Delta_1 f(n) = f(n+1) - f(n) = \int_0^1 f'(n+x_1)\, dx_1$$

$$\Delta_2 f(n) = \Delta_1 f(n+2) - \Delta_1 f(n) = f(n+3) - f(n+2) - f(n+1) + f(n) = \iint_{\substack{0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2}} f''(n+x_1+x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$\Delta_3 f(n) = \Delta_2 f(n+4) - \Delta_2 f(n) = f(n+7) - f(n+6) - f(n+5) + f(n+4) - f(n+3) + f(n+2) + f(n+1) - f(n)$$

$$= \iiint_{\substack{0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 0 \leq x_3 \leq 4}} f'''(n+x_1+x_2+x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Et de façon générale :

$$\Delta_p f(n) = \Delta_{p-1} f(n+2^{p-1}) - \Delta_{p-1} f(n) = \int \cdots \int_{\substack{0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ \vdots \\ 0 \leq x_p \leq 2^{p-1}}} f^{(p)}(n+x_1+ \ldots +x_p)\, dx_1 \ldots dx_p$$

(16') $$\Delta_p f(n) = \sum_{n \leq m \leq n+2^p-1} \pm f(m) = \text{somme de } 2^p \text{ termes}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, $f(x) = x^{-s}$, $f^{(p)}(x) = (-1)^p \dfrac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{x^{s+p}}$,

donc

$$(17) \qquad \Delta_p f(n) = (-1)^p \int \cdots \int_{\substack{0\le x_1\le 1\\ \vdots \\ 0\le x_p\le 2^{p-1}}} \frac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{(n+x_1+\ldots+x_p)^{s+p}}\, dx_1 \ldots dx_p .$$

A propos de ces différences successives, nous avons le

LEMME 4. Soit $f(x) = x^{-s}$, $s = \sigma + it$, m un entier ≥ 1, j un entier ≥ 1. Si $0 \leq t\,\dfrac{(2^j-1)}{m} \leq 1$, on a

$$|\Delta_j f(m)| \geq c\,|s(s+1)\ldots(s+j-1)|\,\frac{2^{j\frac{(j-1)}{2}}}{(m+2^j)^{\sigma+j}}$$

avec $c = \cos \frac{1}{2}$.

Preuve. Par (17), nous avons

$$(18) \qquad \frac{(-1)^j \Delta_j f(m)}{s(s+1)\ldots(s+j-1)} = \int \cdots \int_{\substack{0\le x_1\le 1\\ \vdots \\ 0\le x_j\le 2^{j-1}}} \frac{dx_1 \ldots dx_j}{(m+x_1+\ldots+x_j)^{s+j}} = A_{jm} .$$

L'argument θ de l'élément d'intégration est $-t\,\mathrm{Log}(m + x_1 + \ldots + x_j)$; il a donc une variation V en valeur absolue, avec

$$V = t\,\mathrm{Log}\,(m + 1 + 2 + \ldots + 2^{j-1}) - t\,\mathrm{Log}\, m \leq t\,\mathrm{Log}(m+2^j-1) - t\,\mathrm{Log}\, m$$

$$V \leq t\,\mathrm{Log}\,\left(1 + \frac{2^j-1}{m}\right) \leq t\,\frac{2^j-1}{m} \leq 1 .$$

On peut donc trouver un angle α tel que $-\frac{1}{2} \leq \alpha + \theta \leq \frac{1}{2}$ et on a

$$|A_{jm}| \geq \Re(e^{i\alpha} A_{jm}) = \int \cdots \int_{\substack{0\le x_1\le 1\\ \vdots \\ 0\le x_j\le 2^{j-1}}} \frac{\cos(\alpha+\theta)\, dx_1 \ldots dx_j}{(m+x_1+\ldots+x_j)^{\sigma+j}}$$

$$\geq c \int \cdots \int_{\substack{0\le x_1\le 1\\ \vdots \\ 0\le x_j\le 2^{j-1}}} \frac{dx_1 \ldots dx_j}{(m+2^j)^{\sigma+j}} = \frac{c\, 2^{1+2+\ldots+(j-1)}}{(m+2^j)^{\sigma+j}} = \frac{c\, 2^{j\frac{(j-1)}{2}}}{(m+2^j)^{\sigma+j}} .$$

D'où le lemme 3, via 18 ▨

Revenons à l'estimation qs de $\mu(\sigma)$; nous avons

$g(s) = -\sum_1^{\infty} \varepsilon_n \Delta_1 f(2n)$, et d'après (17), $|\Delta_1 f(2n)| \le \frac{|s|}{(2n)^{\sigma+1}}$ donc

$|g(\sigma+it)| \le |s| \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{\sigma+1} n^{\sigma+1}}$, et cette dernière série converge pour $\sigma > 0$, donc on voit que

(19) $$\mu(g \not\!+ 0^+) \le 1.$$

D'autre part

(20) $$\mu(1) = 0$$

par continuité à droite de μ en 1. D'après la convexité de μ, il suffit donc de montrer que $\mu(\frac{1}{2}) \ge \frac{1}{2}$ qs pour avoir le 1) du théorème B.

Soit N un entier ≥ 1, et posons $\Omega_N = \left\{\omega / \left|g_\omega(\tfrac{1}{2}+it)\right| \le \frac{c}{145} |t|^{\frac{1}{2}} \ \forall |t| \ge N\right\}$, où c est la constante du lemme 3 ; $c = \cos \frac{1}{2}$. Ω_N est évidemment fermé dans Ω ; soit d'autre part t réel, avec $|t| \ge N$, et soit $\omega \in \Omega_N$. Si $|t| \le n \le 2|t|$, le lemme 4 entraîne

(21) $$\left|u_n(\tfrac{1}{2}+it)\right| = |\Delta_1 f(2n)| \ge \frac{c|s|}{(2n+1)^{3/2}} \ge \frac{c|t|}{(5|t|)^{3/2}} \ge \frac{c}{12} |t|^{-1/2}.$$

Un des "triants" $[0, \frac{2\pi}{3}]$, $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ contient au moins $|t|/3$ des points $u_n(\frac{1}{2}+it)$ (projetés sur $|z| = 1$) pour $|t| \le n \le 2|t|$; supposons par exemple que $[0, \frac{2\pi}{3}]$ en contient au moins $\frac{|t|}{3}$, soit J leur ensemble ; et soit $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Si $n \in J$, $u_n(\frac{1}{2}+it) = e^{i\theta} \left|u_n(\frac{1}{2}+it)\right|$, avec $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$ et

(22) $$\Re(e^{i\alpha} u_n(\tfrac{1}{2}+it)) = \cos(\alpha+\theta) \left|u_n(\tfrac{1}{2}+it)\right| \le -\frac{1}{2} \frac{c}{12} |t|^{-1/2}, \text{ par (21).}$$

Sur une partie convenable J_ω de J, de cardinal $\ge \frac{|t|}{6}$, $\varepsilon_n(\omega)$ est constant, par exemple $\varepsilon_n = +1$.

Soit ω' la suite obtenue en changeant le signe des ε_n exactement sur J_ω. On a

$$f_{\omega'}(\tfrac{1}{2}+it) - f_\omega(\tfrac{1}{2}+it) = -2 \sum_{n\in J_\omega} u_n(\tfrac{1}{2}+it),$$

donc

$$\left|f_{\omega'}(\tfrac{1}{2}+it) - f_\omega(\tfrac{1}{2}+it)\right| \geq 2\left|\Re(e^{i\alpha} \sum_{n\in J_\omega} u_n(\tfrac{1}{2}+it))\right| \geq 2\frac{c}{24}|t|^{-1/2}\frac{|t|}{6} = \frac{|t|^{1/2}}{72}$$

par (22). D'où

$$\left|f_{\omega'}(\tfrac{1}{2}+it)\right| \geq \frac{|t|^{1/2}}{72} - \frac{|t|^{1/2}}{145} > \frac{|t|^{1/2}}{145},$$

donc $\omega' \notin \Omega_N$. Or ω' est arbitrairement voisin de ω, puisqu'il a les mêmes $[|t|]-1$ premières coordonnées que ω, et que $|t|$ est arbitrairement grand. Ceci montre que $\omega \notin \Omega_N^o$, et donc que $\Omega_N^o = \emptyset$. Soit maintenant $A = \bigcup_{N\geq 1} \Omega_N$, et $B = A^c$. B est qs. Si $\omega \in B$,

$$\text{pour tout } N \geq 1, \ \exists t_N, \ |t_N| \geq N \ \text{ tel que } \ \left|g_\omega(\tfrac{1}{2}+it_N)\right| > \frac{c}{145}|t_N|^{1/2},$$

donc

$$\overline{\lim_{|t|\to+\infty}} \frac{\left|g_\omega(\tfrac{1}{2}+it)\right|}{|t|^{1/2}} \geq \frac{c}{145} \quad \text{et} \quad \mu(g_\omega, \tfrac{1}{2}) \geq \tfrac{1}{2}.$$

Via (19) et (20), ceci achève la preuve du 1. du théorème B. ▨

2. Les assertions ps concernant les différentes abscisses découlent du théoreme A et de (16). L'estimation ps de $\mu(\sigma)$ utilisera les deux lemmes suivants :

LEMME 5 (Ingham, [6]). Soit $f(t) = \sum_N^{N'} a_n e^{-i\lambda_n t}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \gamma > 0$ $(N < n \leq N')$. Soit $T = \frac{\pi+\varepsilon}{\gamma} > \frac{\pi}{\gamma}$. Alors

$$\sum |a_n|^2 \leq \frac{a(\varepsilon)}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt$$

où $a(\varepsilon)$ est une fonction de ε telle que $\varepsilon\, a(\varepsilon) \to a > 0$ quand $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$.

LEMME 6. <u>Soit</u> $\sigma > \frac{1}{2}$, $x_1, \ldots, x_p$ <u>des réels avec</u> $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 2, \ldots$

.. $0 \leq x_p \leq 2^{p-1}$, α un entier ≥ 1, T un réel ≥ 1 n_j une suite strictement croissante d'entiers positifs, $f_j(s) = \sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \frac{\varepsilon_n}{(\alpha n+\beta+x_1+\ldots+x_p)^s}$, avec $s = \sigma + it$, $0 \leq t \leq T$. Posons $\|f_j\| = \sup_{\substack{0\leq t\leq T \\ 0\leq x_1\leq 1 \\ \vdots \\ 0\leq x_p\leq 2^{p-1}}} |f_j(t,x_1,\ldots,x_p)|$. Alors

$$P(\|f_j\| \geq \frac{C_2}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log Tn_{j+1}}) \leq \frac{1}{n_j}, \quad \text{avec}$$

(23) $$C_2 = 16\, p^{3/2} \sqrt{\sigma+\tfrac{1}{2}}\, \sup(\frac{4 \log \gamma}{\alpha^\sigma}, \frac{2}{\alpha^\sigma \sqrt{2\sigma-1}}), \quad \text{et} \quad \gamma = 2 \sup(\alpha, \beta+2^p).$$

C'est une généralisation du lemme 3 ; divisons chacun des segments $[0, 2^{q-1}]$ en M_q segments de longueur $\frac{2^{q-1}}{M_q}$, et soit $x_q^{\ell_q} = \ell_q . \frac{2^{q-1}}{M_q}$, $0 \leq \ell_q \leq M_q$, ℓ_q entier, M_q entier qui sera choisi plus tard. Nous avons clairement :

$$|f_j(t, x_1,\ldots,x_p)| \leq \sup_{\ell_1,\ldots,\ell_p} \|f_j(.,x_1^{\ell_1},\ldots,x_p^{\ell_p})\|_{[0,T]} + \sum_{q=1}^{p} \frac{2^{q-1}}{M_q} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_q} \right\|_\infty$$

$$\leq \sup_{\ell_1,\ldots,\ell_p} \| f_j(.,x_1^{\ell_1},\ldots,x_p^{\ell_p})\|_{[0,T]} + \sum_{q=1}^{p} \frac{2^{q-1}}{M_q} \frac{|s|}{\sigma(\alpha n_j)^\sigma}$$

ou encore

(24) $$\|f_j\| \leq \sup_{\ell_1,\ldots,\ell_p} \|f_j(.,x_1^{\ell_1},\ldots,x_p^{\ell_p})\|_{[0,T]} + \frac{4T}{\alpha^\sigma n_j^\sigma} . \sum_{q=1}^{p} \frac{2^{q-1}}{M_q}.$$

D'autre part, pour $\ell_1,\ldots,\ell_p$ fixés, l'inégalité (6) (où on remplace dans l'expression de C_1 la quantité β par $\beta + 2^p$ et N par $[\frac{T}{2} n_{j+1}^{\sigma+1/2}] + 1$, en laissant χ_j variable) donne

$$P(\|f_j(.,x_1{}^1,\ldots,x_p{}^p)\|_{[0,T]} \geq \frac{2C_1 \sqrt{\log \chi_j}}{n_j^{\sigma-1/2}}) \leq \frac{8N}{\chi_j} \leq \frac{8T}{\chi_j} . (n_{j+1})^{\sigma+1/2}.$$

D'où

$$P(\sup_{\ell_1,\ldots,\ell_p} \|f_j(.,x_1^{\ell_1},\ldots,x_p^{\ell_p})\|_{[0,T]} \geq \frac{2C_1 \sqrt{\operatorname{Log} \chi_j}}{n_j^{\sigma-1/2}}) \leq \frac{8T}{\chi_j} (n_{j+1})^{\sigma+1/2} M_1\ldots M_p.$$

Et d'après (24) :

$$(25) \qquad P\left(\|f_j\| \geq \frac{2C_1\sqrt{\log \chi_j}}{n_j^{\sigma-1/2}} + \frac{4T}{\alpha^{\sigma} n_j^{\sigma}} \sum_{q=1}^{p} \frac{2^{q-1}}{M_q}\right) \leq 8T\, \frac{(n_{j+1})^{\sigma+1/2} M_1 \ldots M_p}{\chi_j} .$$

Posons $M_q = \left[2^{q-1}T\right] + 1 \leq 2^q T$ et $\chi_j = 8T(n_{j+1})^{\sigma+1/2}\, T^p\, 2^{p(p+1)/2} . n_j$

(25) devient

$$P\left(\|f_j\| \geq \frac{2C_1\sqrt{\sigma+1/2}}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{(p+1)\log(Tn_{j+1}\, 4^p)} + \frac{4p}{\alpha^{\sigma} n_j^{\sigma}}\right) \leq \frac{1}{n_j} .$$

Puisque $4\alpha^{-\sigma} \leq C_1$, cela donne encore, ~~paèrs~~ après quelques majorations triviales :

$$P\left(\|f_j\| \geq \frac{16p^{3/2}\, C_1 \sqrt{\sigma+1/2}}{n_j^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log Tn_{j+1}}\right) \leq \frac{1}{n_j}$$

d'où le lemme 6 avec $C_2 = 16\, p^{3/2} \sqrt{\sigma+1/2}\; C_1$. $\blacksquare$

A l'aide du lemme 5, montrons que $\mu(0) \geq \frac{1}{2}$ ps. Soit N un entier ≥ 1 et posons $p_N(t) = \sum_{1}^{N} \varepsilon_n u_n(it)$. La distance de deux fréquences consécutives dans p_N est $\log m - \log(m-1) \geq \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2N+1} \geq \frac{1}{3N}$ donc on peut appliquer le lemme 5 avec $\gamma = \frac{1}{3N}$, $T = \frac{2\pi}{\gamma} = 6\pi N$. On aura alors :

$$\Sigma\, |a_n|^2 = 2N \leq \frac{a(\pi)}{2T} \int_{-T}^{T} |p_N|^2 dt \leq a(\pi)\, m_N^2 ,$$

où $m_N = \sup\limits_{|t| \leq 6\pi N} |p_N(t)|$. On a donc

$$(26) \qquad m_N \geq a\sqrt{N} ,$$

où a est une constante universelle. Considérons maintenant

$$g(it) = \sum_{1}^{N} \varepsilon_n u_n(it) + \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n(it)$$

$$\varphi(it) = \sum_{1}^{N} \varepsilon_n u_n(it) - \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n(it).$$

Soit A_N l'événement : $\sup\limits_{|t| \leq 6\pi N} |g(it)| \geq a\sqrt{N}$.

Soit B_N l'événement : $\sup\limits_{|t| \leq 6\pi N} |\varphi(it)| \geq a\sqrt{N}$.

$P(A_N) = P(B_N)$, par symétrie des ε_n. Et $A_N \cup B_N = \Omega$, compte tenu de l'égalité $g + \varphi = 2p_N$, et de (26). Donc, $P(A_N) \geq \frac{1}{2}$ implique $P(\overline{\lim\limits_N}\, A_N) \geq \frac{1}{2}$ et ainsi $P(\mu(0) \geq \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$. D'après la loi du zéro-un (μ est une var asymptotique)

(27) $$\mu(0) \geq \frac{1}{2} \text{ ps}.$$

A l'aide du lemme 6, montrons que $\mu(-\frac{1}{2}+0) \leq 1$ ps. Soit

$$\varphi(t,x) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^s} = \frac{\varepsilon_1}{(2+x)^s} + \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(t,x), \quad \text{avec} \quad \varphi_j(t,x) = \sum_{2^j<n\leq 2^{j+1}} \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^s},$$

$s = \sigma + it$, $1 > \sigma > \frac{1}{2}$ fixé. Reprenons les estimations (13), (14), (15)... du théorème A, où le lemme 6 remplace le lemme 3, et où $\sup\limits_{\substack{0\leq t\leq T_k \\ 0\leq x\leq 1}} |\varphi_j(t,x)|$ remplace $\|f_j\|_{[0,T_k]}$, nous arrivons de façon analogue à

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi(t,x)| = O((\log|t|)^{1-\sigma}) \quad \text{quand} \quad |t| \to +\infty, \text{ ps},$$

c'estù-dire si $\omega \in E$, $P(E) = 1$. Soit alors $\sigma > -\frac{1}{2}$ fixé, et $\omega \in E$. $\exists\, t_o(\omega) \geq 0$ tel que $|t| \geq t_o(\omega)$, $0 \leq x \leq 1$

(28) $$\left| \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^{\sigma+it+1}} \right| \leq C_\sigma (\log|t|)^{-\sigma}.$$

D'autre part,

(29) $$\int_o^1 \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^{\sigma+it+1}}\, dx = \sum_1^\infty \int_o^1 \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^{\sigma+it+1}}\, dx,$$

car si $\sigma > -\frac{1}{2}$, la série $\sum\limits_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{(2n+x)^{s+1}}$ converge ps uniformément pour $0 \leq x \leq 1$, comme on le voit aisément en faisant une transformation d'Abel et en utilisant $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = O(\sqrt{n \log\log n})$ ps. (28) et (29) donnent alors

$$\left|\frac{g(\sigma+it)}{\sigma+it}\right| = \left| \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{\sigma+it}\left[(2n+1)^{-\sigma-it} - (2n)^{-\sigma-it}\right] \right| \leq C_\sigma (\log|t|)^{-\sigma}$$

si $|t| \geq t_o(\omega)$. On en déduit immédiatement $\mu(\sigma) \leq 1$ ps, pour $\sigma > -\frac{1}{2}$, et donc

(30) $$\mu(-\frac{1}{2}+0) \leq 1 \text{ ps}.$$

Pour finir, on remarque que

(31) $$\mu(\sigma) = 0 \quad \text{ps si} \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

En effet, en écrit alors

$$g(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)^s} + \sum_1^{\infty} \frac{-\varepsilon_n}{(2n)^s} = A(s) + B(s),$$

et d'après le lemme 3 on a, si $\sigma > \frac{1}{2}$, $\mu(A,\sigma) = \mu(B,\sigma) = 0$ ps.

(27), (30) et (31), joints à la convexité de μ, achevent de démontrer le théorème B. ▨

Nous allons maintenant prouver deux théorèmes qui montrent qu'en prenant des différences successives de plus en plus élevées à partir des séries $\sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^s}$, on peut "pousser" σ_h jusqu'à $-\infty$, et obtenir des séries $\sum_1^{\infty} \pm n^{-s}$ pour lesquelles le $\mu(\sigma)$ est bien contrôlé.

THEOREME C. Il existe une série de Dirichlet $\sum_1^{\infty} \pm n^{-s}$, avec les propriétés suivantes : $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\infty$, et $\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > 1 \\ 1-\sigma & \text{si } \sigma \leq 1 \end{cases}$.

Preuve du théorème C. Elle découle des deux lemmes suivants.

LEMME 7. Considérons une série de la forme

(32) $$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \varepsilon_n \, \Delta_j f(u_j, n) \Big),$$

où $\varepsilon_n = \pm 1$, où $\Delta_j f$ désigne les différences j-ièmes associées à la fonction $f(x) = x^{-s}$, les n_j étant une suite strictement croissante d'entiers (avec $n_o = 0$), et les $u_{j,n}$ étant des entiers choisis pour que (32) s'écrive formellement

(32') $$\sum_1^{\infty} \pm n^{-s}.$$

Alors, pour tout choix des ε_n et des n_j, on a, pour (32')

$$\sigma_s = 0, \quad \sigma_h = -\infty, \quad \mu(\sigma) = \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad \sigma > 1 \\ \leq 1-\sigma & \text{si} \quad \sigma \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Le prolongement analytique de (32') est défini par (32) ; montrons que (32) est une fonction entière ; soit $S_j = \sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \varepsilon_n \Delta_j f(u_j, n)$; nous avons, d'après (17)

$$|S_j| \leq \sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \frac{|s(s+1)\dots(s+j-1)|2^{j^2/2}}{(u_j,n)^{\sigma+j}} \leq |s(s+1)\dots(s+j-1)|2^{j^2/2} \sum_{\ell=1}^{n_{j+1}-n_j} \frac{1}{(\ell 2^j)^{\sigma+j}},$$

puisque $u_j, n_j+1 = 1 + n_1 + 2(n_2-n_1) + \dots + 2^{j-1}(n_j - n_{j-1}) \geq 1+1+2+\dots+2^{j-1} = 2^j$,

et qu'ensuite les $u_{j,n}$ varient de 2^j quand n varie de 1. D'où :

$$|S_j| \leq |s(s+1)\dots(s+j-1)|2^{-j^2/2}\, 2^{-j\sigma}\, \pi^2/6, \quad \text{dès que} \quad j+\sigma \geq 2.$$

Donc, (32) est une fonction entière, et $\sigma_h = -\infty$.

Soit maintenant p un entier ≥ 0, et supposons $\sigma > -p$; écrivons (32) sous la forme :

$$\sum_{j\leq p}(\quad) + \sum_{j\geq p+1}(\quad) = S_1 + S_2,$$

et intéressons-nous seulement à S_2, S_1 n'influant pas sur le $\mu(\sigma)$; or, dans S_2, chaque Δ_j se casse en 2^{j-p-1} différences $\Delta^k_{p+1} f(\lambda_{k,j})$ $(1 \leq k \leq 2^{j-p-1})$.

D'après (17), nous avons

$$\left|\Delta^k_{p+1} f(\lambda_{k,j})\right| \leq \frac{|s(s+1)\dots(s+p)|}{(\lambda_{k,j})^{\sigma+p+1}}\, 2^{\frac{p(p+1)}{2}},$$

d'où

$$(33) \quad |S_2(\sigma+it)| \leq |s(s+1)\dots(s+p)|2^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{k,j} \frac{1}{(\lambda_{k,j})^{\sigma+p+1}} \leq |s(s+1)\dots$$
$$\dots(s+p)|2^{\frac{p(p+1)}{2}} \zeta(\sigma+p+1),$$

puisque les $\lambda_{k,j}$ sont deux à deux distincts. Par (33) $\mu(\sigma) \leq p+1$ si $\sigma > -p$.

D'autre part, il est évident que $\mu(\sigma) = 0$ si $\sigma > 1$ $(\sigma_s \leq 1)$. La convexité de μ entraîne alors les inégalités annoncées. Reste à montrer que $\sigma_s = 0$.

(32') s'écrit : $\sum_1^\infty \frac{\alpha_n}{n^s}$, avec $\alpha_n = \pm 1$. Considérons, pour $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, une somme partielle $s_N = \sum_1^N \frac{\alpha_m}{m^s}$.

Soit j_o le plus petit indice tel que N figure dans S_{j_o}, et j_o étant ainsi fixé, soit n_o le plus petit indice $> n_{j_o}$ tel que N figure dans les indices de $\varepsilon_{n_o} \Delta_{j_o} f(u_{j_o,n_o})$; on va montrer que $S_o + \ldots + S_{j_o} - s_N \to 0$ quand $N \to +\infty$, ce qui démontrera bien $\sigma_s = 0$, d'après $\sigma_h = -\infty$. Or

$$S_o + \ldots + S_{j_o} - s_N = \sum_{n_o < n \leq n_{j_o+1}} \varepsilon_n \Delta_{j_o} f(u_{j_o,n}) + R(s) = R_o(s) + R(s).$$

On voit facilement, en utilisant (17) et les minorations de $u_{j_o,n}$, que $R_o(s) \to 0$ quand $N \to \infty$; $R(s)$ représente, au signe près, les termes qui restent dans $\Delta_{j_o} f(u_{j_o,n_o})$ quand on a épuisé les indices jusqu'à N ; soit M le nombre de termes restants ; écrivons $M = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots + 2^{p_k}$, avec $p_1 > \ldots > p_k \geq 0$, et $p_1 \leq j_o$, puisque $M \leq 2^{j_o}$.

Groupons les M termes de $R(s)$, à partir de la droite, en 2^{p_1} termes, puis 2^{p_2} termes, etc.... nous obtenons au signe près des différences d'ordre p_1, p_2, etc..., soit $R(s) = \pm \Delta_{p_1} \pm \ldots \pm \Delta_{p_k}$, avec, si m_i est le premier indice apparaissant dans Δ_{p_i}, et utilisant (17)

$$|\Delta_{p_i}| = |\Delta_{p_i} f(m_i)| \leq \frac{|s(s+1)\ldots(s+p_i-1)|}{m_i^{\sigma+p_i}} 2^{p_i^2/2}.$$

Puisque, $m_i \geq u_{j_o}$ et $n_{j_o} + 1 \geq 2^{j_o}$

$$|\Delta_{p_i}| \leq 2^{-j_o\sigma} |s(s+1)\ldots(s+p_i-1)| 2^{-p_i^2/2},$$

d'où

$$|R(s)| \leq 2^{-j_o\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} |s(s+1)\ldots(s+n-1)| 2^{-n^2/2} = c(s)\, 2^{-j_o\sigma}.$$

Comme $\sigma > 0$, $R(s) \to 0$ quand N, et donc j_o, tend vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration du lemme 7. ∎

LEMME 8. <u>Dans la série</u> (32) <u>du lemme</u> 7, <u>choisissons par récurrence les</u> n_j <u>de façon que le premier bloc</u> Δ_j <u>démarre à l'indice</u>

$$u_{j,n_j+1} = m_j = 1 + (n_1-n_o) + 2(n_2-n_1) + \ldots + 2^{j-1}(n_j - n_{j-1}) = 2^{j^4}\, 2^j \ ;$$

<u>pour un tel choix des</u> n_j, <u>on a quasi-sûrement en</u> ε_n

(34) $$\mu(0) \geq 1.$$

Preuve. Remarquons que pour choisir n_{j+1}, les précédents étant choisis, on est amené à résoudre l'équation

$$2^j(n_{j+1} - n_j) = 2^{(j+1)^4}\, 2^{j+1} \qquad - 2^{j^4}.2^j$$

qui a bien une solution en nombre entier n_{j+1}. On va montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(0) \geq 1-\varepsilon$ qs. Le lemme 8 s'ensuivra. Soit, pour $\varepsilon > 0$

$$\Omega_N = \left\{\omega \,\middle|\, |f_\omega(it)| \leq \gamma\, |t|^{1-\varepsilon} \quad \forall |t| \leq N\right\}$$ N entier ≥ 1, γ constante, à fixer plus tard, f_ω désignant la somme de (32). Ω_N est évidemment fermé ; montrons qu'il est d'intérieur vide. Posons <u>$t = t_j = 2^{j^4}$</u>, j étant tel que $t \geq N$ et considérons dans (32) la somme

$$\sum_{n_j<n\leq n_{j+1}} \varepsilon_n\, \Delta_j f(u_{j,n}), \quad j \text{ étant fixé.}$$

Le premier bloc, $\Delta_j f(m_j)$ démarre à un indice tel que $t\,\frac{2^j}{m_j} = 1$, les suivants à des indices m_j' tels que $t.\frac{2^j}{m_j'} \leq 1$; on peut donc leur appliquer le lemme 4, et obtenir la minoration

si $n_j < n \leq n_{j+1}$, $$|\Delta_j f(u_{j,n})| \geq c.\, |s(s+1)\ldots(s+j-1)|\, \frac{2^{j(j-1)/2}}{(u_{j,n}+2^j)^j} \quad \text{ou}$$

$$|\Delta_j| \geq c.\frac{t^j\, 2^{j(j-1)/2}}{(u_{j,n}+2^j)^j} \qquad \text{puisque} \quad \sigma = 0.$$

Le nombre de différences Δ_j est $n_{j+1} - n_j = \dfrac{m_{j+1} - m_j}{2^j} = 2.2^{(j+1)^4} - 2^{j^4} \geq 2^{j^4} = t.$

Pour la ℓ-ième différence $\Delta_j f(u_{j,n})$ $(n = n_j + \ell)$, on a :

$u_{j,n} + 2^j = m_j + \ell.2^j \leq 2m_j$ si $\ell \leq 2^{j^4} = t$. Considérons seulement les t

premières différences Δ_j, pour lesquelles on a donc la minoration :

$$\left|\Delta_j f(u_{j,n})\right| \geq \frac{c\, t^j\, 2^{j(j-1)/2}}{(2m_j)^j} > c\,\frac{t^j\, 2^{-j}}{(t2^j)^j} \geq c.2^{-2j^2} \quad \text{ou}$$

$$\left|\Delta_j f(u_{j,n})\right| \geq c.2^{-2\sqrt{\frac{\log t}{\log 2}}} \geq t^{-\varepsilon} \quad \text{pour } j \text{ assez grand.}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{n_j < n \leq n_j + t} \left|\Delta_j f(u_{j,n})\right| \geq t^{1-\varepsilon}$. Un argument déjà vu dans la preuve du théorème B.1) (cf. (21), (22) ...) montre qu'il existe ω', avec $\varepsilon_n(\omega') = \varepsilon_n(\omega)$ si $n \leq n_j$ tel que

$$\left|f_{\omega'}(it) - f_\omega(it)\right| \geq \frac{1}{6}\, t^{1-\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad t = t_j.$$

D'où

$$\left|f_{\omega'}(it)\right| \geq \left(\frac{1}{6} - \gamma\right) t^{1-\varepsilon} > \gamma t^{1-\varepsilon} \quad \text{si} \quad \gamma < \frac{1}{12} \quad \text{(il suffit de prendre } \gamma \text{ ainsi).}$$

On a donc $\omega' \notin \Omega_N$, et $\Omega_N^o = \emptyset$.

On a prouvé $\mu(0) \geq 1-\varepsilon$ qs, $\forall\, \varepsilon > 0$, et en faisant décroître ε vers 0 "le long d'un dénombrable", on a $\mu(0) \geq 1$ qs. ▨

Les lemmes 7 et 8, joints à la convexité de μ, entraînent le théorème C.

Le théorème C était de nature quasi-sûre ; voici maintenant un théorème presque sûr qui correspond à une conjecture célèbre de Lindelöf [7], citée page 2.

THEOREME D. <u>Il existe une série de Dirichlet</u> $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$, <u>avec les propriétés suivantes</u> : $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\infty$, <u>et</u>

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \underline{\text{si}} \quad \sigma > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma & \underline{\text{si}} \quad \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

LEMME 9. Posons $n_o = 0$, et $n_j = e^{j \log j} = j^j$ si $j \geq 1$; considérons la fonction

(35) $$F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \varepsilon_n \Delta_j f(2^j n - \mu_j') \Big) ,$$

où les entiers $\mu_j' \geq 0$ sont choisis de façon que (35) s'écrive formellement

(35') $$\sum_1^{\infty} \pm n^{-s}, \quad \text{avec toujours} \quad f(x) = x^{-s}.$$

Alors, on a ps en ε_n, pour (35')

$$\sigma_s = 0, \quad \sigma_h = -\infty, \quad \text{et} \quad \mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Preuve. En fait, lemme 9 contient évidemment le théorème D ; le lemme 9 s'appuiera lui-même sur le lemme suivant.

LEMME 10. Soient $0 \leq p \leq j$ des entiers positifs, β un entier tel que $0 \leq \beta \leq 2^j$, $\sigma > -p + \frac{1}{2}$, et posons

$$F_{j,p}(s) = \sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \varepsilon_n \Delta_p f(2^j n + \beta - \mu_j') ;$$

alors

(36) $$P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|F_{j,p}(\sigma+it)|}{|s(s+1) \ldots (s+p-1)|} \geq C(j,p,\sigma) \frac{1}{n_j^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log T_{n_{j+1}}} \Big) \leq \frac{1}{n_j} ,$$

avec

(36') $$C(j,p,\sigma) = 16 . 4^{\sigma} \sqrt{\sigma+j+1}\; j^{3/2}\, 2^{2p-j\sigma-jp+p^2/2} \sup \left[4(j+2) , \frac{1}{\sqrt{2(\sigma+p)-1}} \right].$$

Preuve. Soit ν_j le plus petit entier tel que $2^j \nu_j \geq \mu_j'$ et écrivons, si $n_j < n \leq n_{j+1}$, $2^j n - \mu_j' = 2^j(n-\nu_j) + \rho_j$ avec $0 \leq \rho_j \leq 2^j$. Nous avons

(37) $$F_{j,p}(s) = \sum_{n_j - \nu_j < n \leq n_{j+1} - \nu_j} \varepsilon_n \Delta_p f(2^j n + \beta + \rho_j).$$

Introduisons

$$G_{j,p}(s) = \sum_{n_j-\nu_j<n\le n_{j+1}-\nu_j} \frac{\varepsilon_n}{(2^j n+\beta+\rho_j+x_1+\ldots+x_p)^{s+p}},\ \text{avec}\ 0\le x_1\le 1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ 0\le x_p\le 2^{p-1}.$$

D'après le lemme 6, et avec ses notations, il existe $E\subset\Omega$, $P(E)\ge 1-\frac{1}{n_j}$, tel que si $\omega\in E$,

$$\|G_{j,p}\| \le \frac{C_2}{(n_j-\nu_j)^{\sigma+p-1/2}}\sqrt{\log T\, n_{j+1}}, \tag{38}$$

avec $C_2 \le 16 j^{3/2}\sqrt{\sigma+j+1}\ 2^{-j(\sigma+p)} \sup\left[4(j+2)\ \frac{1}{\sqrt{2(\sigma+p)-1}}\right]$.

D'autre part, nous avons $\mu_j' = 2^j(n_j+1)-2^{j-1}(n_j-n_{j-1})-\ldots-2(n_2-n_1)-(n_1-n_o)-1$,

ou

$$\mu_j' = 2^j+2^{j-1}n_j+2^{j-2}n_{j-1}+\ldots+2n_2+n_1-1,$$

donc

$$\nu_j < \frac{\mu_j'}{2^j}+1 \le 2+\frac{n_j}{2}+\frac{n_j-1}{4}+\ldots+\frac{n_1}{2^j} \le \frac{3}{4}\,n_j$$

pour j assez grand. (38) s'écrit alors :

$$\|G_{j,p}\| \le \frac{4^{\sigma+p-1/2}\,C_2}{n_j^{\sigma+p-1/2}}\ \sqrt{\log T\, n_{j+1}}. \tag{39}$$

Si $\omega\in E$. Intégrons maintenant (39), $\omega\in E$ et $0\le t\le T$ étant fixés, par rapport à $dx_1\ldots dx_p$, $0\le x_1\le 1,\ \ldots,\ 0\le x_p\le 2^{p-1}$, il vient d'après (17)

$$\left|(-1)^p \sum_{n_j<n\le n_{j+1}} \frac{\varepsilon_n}{s(s+1)\ldots(s+p-1)}\,\Delta_p f(2^j n+\beta-\mu_j')\right| \le \frac{4^{\sigma+p-1/2}C_2}{n_j^{\sigma+p-1/2}}\,2^{p^2/2}\sqrt{\log T\, n_{j+1}}.$$

D'où le lemme 10, avec

$$C(j,p,\sigma) = 16.4^{\sigma}\ \sqrt{\sigma+j+1}\ j^{3/2}\ 2^{2p-j\sigma-jp+p^2/2}\ \sup\left[4(j+2),\frac{1}{\sqrt{2(\sigma+p)-1}}\right].\ \blacksquare$$

Revenons à la preuve du lemme 9 ; tout d'abord, on a sûrement $\sigma_s=0$, $\sigma_h=-\infty$, d'après le lemme 7, valable pour tout choix des ε_n et des n_j $(u_{j,n}=2^j n-\mu_j')$.

Reste à prouver qu'on a ps

1. $\mu(0)\ge\frac{1}{2}$
2. $\mu(-p+\frac{1}{2})\le p$ pour tout entier $p\ge 0$.

1. Soit N un entier ≥ 1, très grand, soit j_o le plus petit indice tel que N figure dans

$$(40) \qquad \sum_{n_{j_o} < n \leq n_{(j_o+1)}} \varepsilon_n \Delta_{j_o} f(2^{j_o} n - \mu'_{j_o})$$

et j_o étant ainsi fixé, soit n_o le plus petit entier tel que N figure dans $\varepsilon_{n_o} \Delta_{j_o} f(2^{j_o} n_o - \mu'_{j_o})$; ce dernier bloc commence à l'indice $2^{j_o} n_o - \mu'_{j_o} \leq N$ et finit à l'indice $2^{j_o} n_o - \mu'_{j_o} + 2^{j_o} - 1 \leq 2N$. En effet, nous avons $2^{j_o} \leq j_o^{j_o} = n_{j_o} \leq \ell_{j_o}$ si ℓ_{j_o} est le premier indice où commence (40) et $\ell_{j_o} \leq N$. Par conséquent, si on pose

$$p_N(t) = \sum_{j<j_o} \Big(\sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \varepsilon_n \Delta_j f(2^j n - \mu'_j) \Big) + \sum_{n_{j_o} < n \leq n_o} \varepsilon_n \Delta_{j_o} f(2^j n - \mu'_j) ,$$

les "fréquences" apparaissant dans p_N sont au plus égales à $2N$. Le lemme 5, le "principe de symétrie" et la loi du zéro-un donnent alors

$$\mu(0) \geq \frac{1}{2} \text{ ps.}$$

2. Soit p un entier ≥ 0 et supposons $\sigma > -p + \frac{1}{2}$ fixé. Ecrivons (35) sous la forme

$$F(s) = \sum_{j<p} \Big(\sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \Big) + \sum_{j \geq p} \Big(\sum_{n_j < n \leq n_{j+1}} \Big) = S_1 + S_2 .$$

La somme finie S_1 n'a aucune influence sur $\mu(\sigma)$, on peut se borner à estimer S_2.

Nous avons :

$$S_2 = \sum_{n_p < n \leq n_{p+1}} \varepsilon_n \Delta_p + \sum_{n_{p+1} < n \leq n_{p+2}} \varepsilon_n (\Delta_p^1 + \Delta_p^2) + \sum_{n_{p+2} < n \leq n_{p+3}} \varepsilon_n (\Delta_p^1 + \Delta_p^2 + \Delta_p^3 + \Delta_p^4)$$

$$+ \ldots + \sum_{n_{p+\ell} < n \leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n (\Delta_p^1 + \ldots + \Delta_p^{2^\ell}) + \ldots$$

où à la ℓ-ième étape $\Delta_p^1, \ldots, \Delta_p^{2^\ell}$ désignent, au signe près, les différences d'ordre p obtenues en coupant en 2^{ℓ} morceaux la différence d'ordre $p+\ell$.

De façon précise, on a

$$\sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n \Delta_{p+\ell} f\left[2^{p+\ell} n - \mu'_{p+\ell}\right] = \Delta_p^1 + \ldots + \Delta_p^{2^{\ell}},$$

avec

$$\Delta_p^m = \alpha_m \Delta_p f\left[2^p(2^{\ell} n + m - 1) - \mu'_{p+\ell}\right], \quad 1 \leq m \leq 2^{\ell}$$

où les signes $\alpha_m = \pm 1$ ne dépendent que de p et ℓ, et sont donc indépendants de n.

Donc

$$\left|\sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n \Delta_{p+\ell} f\left[2^{p+\ell} n - \mu'_{p+\ell}\right]\right| = \left|\sum_n \varepsilon_n \sum_m \alpha_m \Delta_p^m f\right|$$

$$= \left|\sum_m \alpha_m \sum_n \varepsilon_n \Delta_p^m f\right| \leq \sum_{m=1}^{2^{\ell}} \left|\sum_n \varepsilon_n \Delta_p^m f\right|$$

$$= \sum_{m=1}^{2^{\ell}} \left|\sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n \Delta_p f\left[2^p(2^{\ell} n + m - 1) - \mu'_{p+\ell}\right]\right|.$$

Appliquons maintenant le lemme 10 aux sommes entre deux barres, avec $j = p+\ell$, $\beta = 2^p(m-1) \leq 2^j$, il vient

$$(41) \qquad P\left(\left\|\sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \frac{\varepsilon_n \Delta_p f\left[2^p(2\ \ n+m-1)-\mu'_{p+\ell}\right]}{s(s+1)\ldots(s+p-1)}\right\|_{[0,T]} \geq \frac{C(j,p,\sigma)}{n_j^{\sigma+p-1/2}}\sqrt{\log T n_{j+1}}\right) \leq \frac{1}{n_j}.$$

Soit $E_{\ell,m}$ l'événement ci-dessus, et $F_{\ell} = \bigcup_{m=1}^{2^{\ell}} E_{\ell,m}$. Nous avons

$$P(E_{\ell,m}) \leq \frac{1}{n_{p+\ell}}, \quad P(F_{\ell}) \leq \frac{2^{\ell}}{n_{p+\ell}} \quad \text{et donc} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} P(F_{\ell}) < \infty$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli (T et p étant fixés) il existe $\Omega_T(p) = \Omega_T$, $P(\Omega_T) = 1$ tel que si $\omega \in \Omega_T$, toutes les inégalités contraires à (41) ont lieu pour $p+\ell \geq j_T(\omega)$, où j_T est choisi le plus petit possible et est une var. On a, comme pour (11) :

(42) $$E(j_T^2) = \lambda < \infty, \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante universelle.}$$

Donnons maintenant à T la suite de valeurs $T_k = e^{n_k}$, et remarquons que

$T_{k+1} \leq T_k^{6k}$ (p reste fixé).

Soit $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{T_k}$, S un ensemble, avec $P(S) = 1$, tel que si $\omega \in S$, il existe $k_o(\omega)$ entier ≥ 1 tel que pour $k \geq k_o(\omega)$ $j_{T_k}(\omega) \leq k$, et soit $E = A \cap S$ (la dépendance de E par rapport à p est sous-entendue). $P(E) = 1$. Soit $\omega \in E$, posons $t > T_{k_o}(\omega)$, et soit k l'unique entier tel que (nécessairement $k \geq k_o(\omega)$)

$$T_{k-1} \leq t < T_k.$$

Nous avons, avec $s = \sigma + it$

$$S_2(s) = \sum_{p+\ell<k} \; \sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n \Delta_{p+\ell} f\left[2^{p+\ell} n - \mu'_{p+\ell}\right] + \sum_{p+\ell\geq k} \; \sum_{n_{p+\ell}<n\leq n_{p+\ell+1}} \varepsilon_n (\Delta_p^1 + \dots + \Delta_p^{2^\ell})$$

$$S_2 \quad = \quad S_3 \quad + \quad S_4.$$

Posons

$$U = \frac{S_3}{s(s+1)\dots(s+p-1)},$$

$$V = \frac{S_4}{s(s+1)\dots(s+p-1)}.$$

Une majoration sûre des différences Δ_p est, d'après (17)

$$\left|\frac{\Delta_p f(\nu)}{s(s+1)\dots(s+p-1)}\right| \leq \frac{2^{p^2/2}}{\nu^{\sigma+p}}, \quad \text{d'où}$$

$$|U(s)| \leq 2^{p^2/2} \sum_{0<p+\ell<k} \sum_{m=1}^{2^\ell} \frac{1}{n_{p+\ell}^{\sigma+p}} \leq 2^{p^2/2} \sum_{0<\ell<k} \frac{2^\ell}{n_\ell^{\sigma+p}} \leq 2^{p^2/2} \sum_{0<\ell<k} \frac{1}{n^{\sigma+p-1}}$$

(43) $$|U(s)| \leq \frac{2^{p^2/2}}{|\sigma+p-2|} n_k^{-\sigma-p+2} = 0(\log T_k)^{-\sigma-p+2}.$$

D'autre part, $p+\ell \geq k \Longrightarrow p+\ell \geq j_{T_k}$, donc tous les $(E_{\ell,m})^c$, $1 \leq m \leq 2^\ell$, ont lieu, donc

$$|V(s)| \leq \sum_{p+\ell \geq k} \sum_{m=1}^{2^\ell} \frac{C(p,p+\ell,\sigma)}{n_{p+\ell}^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_{p+\ell+1}}.$$

D'après (36'), à σ et p fixés, on a :

$$C(p,p+\ell,\sigma) = 0(\ell^3\ 2^{-\ell(\sigma+p)}),$$

donc

$$|V(s)| \leq \sum_{p+\ell \geq k} \mu \frac{2^\ell\ \ell^3\ 2^{-\ell(\sigma+p)}}{n_{p+\ell}^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_{p+\ell+1}}$$

où μ est une constante ne dépendant que de σ et p. Ou encore

(44) $$|V(s)| \leq \sum_{\ell \geq k} \mu \frac{2^\ell\ \ell^3}{(n_\ell)^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log T_k\, n_{\ell+1}}.$$

La présence de $n_\ell = \ell^\ell$, et le fait que l'on ait $\sigma + p - \frac{1}{2} > 0$ font converger la série suffisamment vite pour que le somme écrite soit de l'ordre du premier terme. On a donc

$$|V(s)| \leq \nu \frac{2^k\, k^3}{n_k^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log T_k n_{k+1}} \qquad (\nu = \nu(\sigma,p)).$$

Vu que $n_k = \log T_k$, cela conduit à une estimation $V(s) = O(\log T_k)^\beta$, avec $\beta > 0$ ne dépendant que de σ et p. D'où, d'après (43)

$$(U+V)(\sigma+it) = 0(\log T_k)^\delta \quad \text{pour un certain } \delta > 0.$$

Mais $T_{k-1} \leq t < T_k \leq T_{k-1}^{6(k-1)} \leq t^{6(k-1)}$ implique $\log T_k \leq 6(k-1)\log t \leq 6 \log t \log\log t$. D'où; si $\omega \in E$, $(U+V)(\sigma+it) = 0(\log|t|\log\log|t|)^\delta$ quand $|t| \to +\infty$. Comme $S_2 = \dfrac{U+V}{s(s+1)\ldots(s+p-1)}$, on a

$$\mu(F,\sigma) \leq p \quad \text{si} \quad \omega \in E = E(p), \quad \text{et si} \quad \sigma > -p + \frac{1}{2}.$$

Si $\mathcal{E} = \bigcap_{p=0}^{\infty} E(p)$, $P(\mathcal{E}) = 1$,

et finalement si $\omega \in \mathcal{E}$, $\mu(F,\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ceci achève la démonstration du théorème D. ▨.

Indiquons pour finir comment la théorème B, 1) permet de retrouver la contribution de Bohr au théorème 2 ; soit $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$ une série de Dirichlet avec $\sigma_s = 0$, et

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > 1 \\ 1-\sigma & \text{si } \sigma \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{soit } f(s) \text{ sa somme ;}$$

$f(s) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^s}$; avec les notations du théorème 2, prenons $a_n = b_n = \varepsilon_n$ et soit $c = a * b$. Si $1 > \sigma > \sigma_s(c)$, $\sum_1^\infty \frac{c_n}{n^s} = f^2(s)$, donc $\mu(\sum \frac{c_n}{n^s}, \sigma) = 2(1-\sigma)$, mais d'autre part suivant un résultat connu, $\mu(\sum \frac{c_n}{n^s}, \sigma) \leq 1$. On en déduit

$$2(1-\sigma_s(c)) \leq 1, \quad \text{d'où} \quad \sigma_s(c) \geq \frac{1}{2},$$

et donc $\sigma_s(c) = \frac{1}{2}$ d'après le résultat de Stieltjes.

Ceci achève la première partie. ∎

II

Soit $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant, et soit $(\varepsilon_{p_n})_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes ; on définit une variable aléatoire ε_n pour tout entier $n \geq 1$ en posant :

(i) $$\varepsilon_n = (\varepsilon_{p_1})^{\alpha_1} \ldots (\varepsilon_{p_k})^{\alpha_k}, \quad \text{si} \quad n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $n \longrightarrow \varepsilon_n(\omega)$ est donc une fonction strictement multiplicative sur N, à valeurs ± 1. On a le lemme suivant

LEMME. <u>Si</u> q <u>et</u> q' <u>sont deux entiers quadratfrei distincts</u>, ε_q <u>et</u> $\varepsilon_{q'}$ <u>sont deux variables de Rademacher indépendantes</u>.

Preuve. D'abord, ε_q et $\varepsilon_{q'}$ sont deux Rademacher, comme produit de Rademacher indépendantes ; de plus, on peut écrire $q = rs$, $q' = rt$ avec $(s,t) = 1$. Donc $\varepsilon_q = \varepsilon_r \varepsilon_s$ et $\varepsilon_{q'} = \varepsilon_r \varepsilon_t$.

D'autre part

$(s,t) = 1 \Longrightarrow \varepsilon_s$ et ε_t indépendantes $\Longrightarrow \varepsilon_r \varepsilon_s$ et $\varepsilon_r \varepsilon_t$ indépendantes. ∎

Considérons alors les deux "produits d'Euler" suivants :

(1) $$\prod_{1}^{\infty} \frac{1}{1 - \varepsilon_{p_n} p_n^{-s}} = F(s)$$

(2) $$\prod_{1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_{p_n} p_{2n-1}^{-s}}{1 - \varepsilon_{p_n} p_{2n}^{-s}} = G(s)$$

et soit

(3) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^s} = f(s)$$

où les ε_n sont définis par i) ; enfin, si h est une fonction holomorphe dans un demi-plan, on pose, pour σ fixé,

$$\begin{cases} \lambda(h,\sigma) = \lambda(\sigma) = \inf\left\{\xi \geq 0 \;\middle|\; h(\sigma+it) = O(e^{|t|^{\xi}}) \text{ quand } |t| \to +\infty\right\} \\ \mu(h,\sigma) = \mu(\sigma) = \inf\left\{\xi \geq 0 \;\middle|\; h(\sigma+it) = O(|t|^{\xi}) \text{ quand } |t| \to +\infty\right\} \end{cases}$$

μ n'est autre que la fonction de Lindelöf associée à h.

Nous avons les résultats suivants.

THEOREME 1. <u>Le produit infini et la série qui définissent</u> F <u>et</u> f <u>sont</u> ps <u>convergents pour</u> $\Re s > \frac{1}{2}$ <u>et on a</u>

$$F(s) = f(s) \quad \text{si} \quad \Re s > \frac{1}{2}.$$

Preuve. Remarquons d'abord que l'énoncé donne un exemple d'une série de Dirichlet à coefficients ± 1, d'abscisse de convergence simple $\frac{1}{2}$, qui possède un produit d'Euler "jusqu'à $\frac{1}{2}$."

Cela dit, vu l'indépendance des ε_{p_n} et la relation

$$\log(1 - \varepsilon_{p_n} p_n^{-s}) = -\varepsilon_{p_n} p_n^{-s} + O(p_n^{-2\sigma})$$

la convergence ps du produit pour $\sigma > \frac{1}{2}$ est évidente. D'autre part, l'égalité

$$F(s) = f(s)$$

a lieu pour $\Re s > 1$ pour des raisons de convergence absolue ; il suffit donc de montrer que la série (3) converge ps pour $\Re s > \frac{1}{2}$.

Soit Q l'ensemble des nombres quadratfrei ; d'après le théorème de Menchoff [8] la série $\sum_{q \in Q} \frac{\varepsilon_q}{q^s}$ converge ps pour $\Re s > \frac{1}{2}$, puisque les ε_q sont des variables orthogonales d'après le lemme. Soit donc A un ensemble de probabilité 1 tel que

$$\omega \in A \Longrightarrow \sum_{q\in Q} \frac{\varepsilon_q(\omega)}{q^s} \text{ converge pour } \Re s > \frac{1}{2}.$$

Montrons que $\omega \in A \Longrightarrow \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^s}$ converge pour $\Re s > \frac{1}{2}$. Il suffit de supposer $s > \frac{1}{2}$; nous avons alors, si $N < M$ sont des entiers

$$\sum_{N\leq n<M} \frac{\varepsilon_n}{n^s} = \sum_{N\leq m^2 q<M} \frac{\varepsilon_q}{m^{2s}q^s} = \sum_{\substack{N\leq m^2 q<M \\ q\geq\sqrt{N}}} \frac{\varepsilon_q}{m^{2s}q^s} + \sum_{\substack{N\leq m^2 q<M \\ q<\sqrt{N}}} \frac{\varepsilon_q}{m^{2s}q^s} = S_1 + S_2.$$

Pour tout entier m, l'ensemble des $q\in Q$ tels que $N \leq m^2 q < M$, et $q \geq \sqrt{N}$, est soit vide soit un intervalle I_m dans les quadrafrei. On a donc :

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} \Big(\sum_{q\in I_m} \frac{\varepsilon_q}{q^s}\Big).$$

Comme $I_m \subset [\sqrt{N}, +\infty[$, la somme entre parenthèse est $o(1)$ quand $N \to +\infty$, et donc $S_1 \to 0$ quand $N \to +\infty$. On a de même

$$S_2 = \sum_{m\geq N^{1/4}} \frac{1}{m^{2s}} \sum_{q\in J_m} \frac{\varepsilon_q}{q^s}$$

où J_m désigne l'intervalle $[1, \sqrt{N}[\cap [\frac{N}{m^2}, \frac{M}{m^2}[$ dans les quadrafrei ;
$\sum_{q\in J_m} \frac{\varepsilon_q}{q^s} = 0(1)$ quand $N \to \infty$ et donc $S_2 \to 0$ quand $N \to \infty$. Ceci démontre le théorème 1. ∎

THEOREME 2.
1) <u>La droite</u> $\Re s = 1$ <u>est quasi-sûrement une coupure pour</u> F.

2) <u>La droite</u> $\Re s = \frac{1}{2}$ <u>est presque sûrement une coupure pour</u> F <u>et on a</u> ps

$$\mu(F, \sigma) = 0 \ \underline{\text{si}}\ \ \sigma > \frac{1}{2}.$$

THEOREME 3. <u>La droite</u> $\Re s = 0$ <u>est quasi-sûrement une coupure pour</u> G <u>et on a</u> qs : $1 \geq \lambda(g,\sigma) \geq 1 - \sigma$ <u>si</u> $\sigma > \frac{1}{2}$.

Preuve du théorème 2.

Le 1) est facile ; si on pose $F_\omega(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \varepsilon_{p_n}(\omega)\, p_n^{-s}}$, l'ensemble $\mathfrak{R}$ des points réguliers de $\sigma = 1$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{R} = \cup\, E_{arN}\,, \quad \text{avec}$$

$E_{arN} = \Big\{\omega \,\big|\, f_\omega$ possède un prolongement analytique borné par N dans $|s-a| < r$, avec $a = 1 + it$, $t \in Q$, $r \in Q^+$, N entier $\geq 1\Big\}$.

Chaque E_{arN} est fermé (familles normales) ; si l'un d'eux, avec $a = 1 + it_o$, n'était pas d'intérieur vide, on en déduirait que pour toute suite ε_n de ± 1 $F_\omega(s)$ aurait un prolongement borné dans $|s-a| < r$ et en particulier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(t_o \log p_n)|}{p_n} < \infty$; mais alors $\sum \frac{2\cos^2(t_o \log p_n)}{p_n} < \infty$, ou $\sum \frac{1 + \cos(2t_o \log p_n)}{p_n} < \infty$ alors que $\sum \frac{\cos(2t_o \log p_n)}{p_n}$ converge et que $\sum \frac{1}{p_n} = +\infty$ (cf Titchmarsch, theory of Riemann zêta function).

2) Le produit infini converge presque sûrement pour $\Re s > \frac{1}{2}$ puisque $\sum \frac{1}{p_n^{2\sigma}} < \infty$ et $\sum \frac{\varepsilon_n}{p_n^s}$ converge presque sûrement. D'autre part

$+ \log F(s) = -\sum \log(1 - \varepsilon_n p_n^{-s}) = \sum \left(\frac{\varepsilon_n}{p_n^s} + \frac{1}{p_n^{2s}} + 0(p_n^{-3s})\right)$, ou

$\log F(s) = \sum \frac{\varepsilon_n}{p_n^s} + \sum \frac{1}{p_n^{2s}} + R(s)$, avec $R(s)$ analytique pour $\Re s > \frac{1}{3}$, donc régulière au voisinage de $\Re s = \frac{1}{2}$, $\sum \frac{1}{p_n^{2s}}$ essentiellement égale à $\log \zeta(2s)$, donc régulière au voisinage de tout point de $\Re s = \frac{1}{2}$, sauf $\frac{1}{2}$ lui-même.

$\sum \frac{\varepsilon_n}{p_n^s}$ pour laquelle tout point de $\Re s = \frac{1}{2}$ est ps une coupure, puisque les ε_n sont indépendantes.

Donc si $\Re s = \frac{1}{2}$ et si $s \neq \frac{1}{2}$, s est un point singulier pour $\log F(s)$. Comme les points singuliers forment un ensemble fermé, $\Re s = \frac{1}{2}$ est ps une coupure pour $\log F(s)$.

Supposons maintenant que $s_o = \frac{1}{2} + it_o$ soit régulier pour F ; F se prolonge analytiquement dans $|s - s_o| < r$; il existe au moins un point s_1 du segment $]s_o - ir , s_o + ir[$ où F ne s'annule pas, puisque les zéros de F sont isolés. Il existe donc r' assez petit tel que F ne s'annule pas dans $|s - s_1| < r'$; donc $\log F$ possède une détermination holomorphe dans ce disque, ce qui signifie que s_1, $\Re s_1 = \frac{1}{2}$, est régulier pour $\log F$, contrairement à ce qu'on a vu avant. D'où la coupure.

D'autre part, pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$, on a une majoration du type :

$$|F(s)| \leq C(\sigma) \exp\left(\left| \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{p_n^s} \right| \right)$$

et on obtient facilement, pour $H(s) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{p_n^s}$ une majoration du type :

$|H(\sigma+it)| \leq D(\sigma)\sqrt{\log |t|}$ pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$; donc $\forall \varepsilon > 0$, pour $|t|$ assez grand, on a : $|H(\sigma+it)| \leq \varepsilon \log |t|$, et $|F(\sigma+it)| \leq C(\sigma) |t|^\varepsilon$, ce qui achève de démontrer le théorème 2.

Preuve du théorème 3. Tout d'abord, on a $G(s) = \prod_1^\infty (1 + u_n(s))$, avec $u_n(s) = \dfrac{\varepsilon_n(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s})}{1 - \varepsilon_n p_{2n}^{-s}}$; d'où pour $\sigma > 0$ une majoration du type :

$$|u_n(\sigma+it)| \leq C(\sigma) |p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s}| \leq C(\sigma) |s| \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} u^{-\sigma-1} du \leq C(\sigma) |s| \frac{(p_{2n} - p_{2n-1})}{p_{2n-1}^{\sigma+1}} .$$

Et la série $\sum_1^\infty \frac{p_{2n} - p_{2n-1}}{p_{2n-1}^{\sigma+1}} < \infty$ pour tout $\sigma > 0$, puisque $\sum_1^\infty \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n \log^\lambda p_n} < \infty$ pour tout $\lambda > 1$ ([9]). Donc la fonction G est sûrement holomorphe pour $\sigma > 0$.

L'étude quasi-sûre de la fonction $\lambda(G,\sigma)$ est basée sur le lemme suivant, dû à

Saffari, et qui sera démontré plus loin.

LEMME (Saffari). Soit J l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ sur le tore, et posons, si $\varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon(t) = N(t \le p \le t^{1+\varepsilon} \mid p^{it} \in J) \text{ ; alors } \varlimsup_{t\to\infty} \frac{N_\varepsilon(t)}{\pi(t^{1+\varepsilon})} \ge \frac{1}{5}$$

(où $\pi(t) = \sum_{p\le t} 1$).

Fixons $\sigma > \frac{1}{2}$; nous avons

$$u_n = \frac{\varepsilon_n(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s})(1 - \varepsilon_n p_{2n}^{-\bar{s}})}{|1-\varepsilon_n p_{2n}^{-s}|^2} = \underbrace{\frac{\varepsilon_n(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s})}{|1-\varepsilon_n p_{2n}^{-s}|^2}}_{v_n} - \underbrace{\frac{p_{2n}^{-\bar{s}}(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s})}{|1 - \varepsilon_n p_{2n}^{-s}|^2}}_{w_n}$$

$|w_n| \ge - p_{2n}^{-\sigma}(p_{2n}^{-\sigma} + p_{2n-1}^{-\sigma})\, C(\sigma)$, avec $C(\sigma) = (1 - 2^{-\sigma})^{-2}$. Donc $\sum_1^\infty |w_n| \ge - D(\sigma)$, fonction uniquement de σ. On voit de même que $\sum_1^\infty |u_n|^2 \ge -D'(\sigma)$. On a

$$|G(s)| = |\prod(1 + u_n)| = \left|e^{\sum_1^\infty u_n}\, e^{\sum_1^\infty O(u_n^2)}\right| \ge e^{\sum_1^\infty \Re u_n}\, e^{-CD'(\sigma)}, \quad \text{ou}$$

$|G(s)| \ge E(\sigma)\exp(\sum_1^\infty \Re u_n) \ge E'(\sigma)\exp(\sum_1^\infty \Re v_n)$, avec $E'(\sigma) > 0$ ne dépendant que de σ.

$$\Re v_n = \frac{1}{|1 - \varepsilon_n p_{2n}^{-s}|^2}\, \varepsilon_n \Re(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s}). \quad \text{Mais}$$

$$p_{2n-1}^{-s} - p_{2n}^{-s} = s\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-s-1}\,dx = s\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma-1} e^{-it\log x}\,dx, \quad \text{d'où :}$$

$$\Re\left[p_{2n-1}^{-s} - p_{2n}^{-s}\right] = \underbrace{\sigma\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma-1}\cos(t\log x)\,dx}_{\alpha_n} + \underbrace{t\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma-1}\sin(t\log x)\,dx}_{\beta_n}$$

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n\alpha_n \ge - \sum_1^\infty |\alpha_n| \ge - \sigma\int_2^\infty x^{-\sigma-1}\,dx = E_1(\sigma). \quad \text{D'où finalement}$$

$$|G(s)| \ge E'(\sigma)\exp(C(\sigma)\, F_1(\sigma) + \sum_1^\infty \varepsilon_n\beta_n) = E''(\sigma)\exp(\sum_1^\infty \varepsilon_n\beta_n).$$

Reste donc à minorer quasi-sûrement la fonction

$$\Phi(s) = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n \beta_n(s).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $t_j \uparrow +\infty$ telle que $N_\varepsilon(t_j) \geq \frac{1}{10}\pi(t_j^{1+\varepsilon})$. (D'après le lemme). à t_j fixé, regardons les $t_j \leq p \leq t_j^{1+\varepsilon}$ tels que p^{it_j} appartienne à J.

$p^{it_j} \in J \Longleftrightarrow \exists\, k$ entier ≥ 0 tel que $\frac{\pi}{4} + 2k.\pi \leq t_j \log p \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, ou

$$a_k = \exp\left(\frac{\pi}{4t_j} + 2k\frac{\pi}{t_j}\right) \leq p \leq \exp\left(\frac{3\pi}{4t_j} + 2k\frac{\pi}{t_j}\right) = b_k.$$

Soit $I_k = [a_k, b_k]$. Les p qui nous intéressent sont ceux qui appartiennent aux $[a_k, b_k]$ pour des indices k tels que $\frac{3\pi}{4t_j} + \frac{2k\pi}{t_j} \leq (1+\varepsilon)\log t_j$, c'est à dire tels que

$$k \leq \frac{(1+\varepsilon)}{2\pi} t_j \log t_j - \frac{3}{8}.$$

Le nombre des intervalles I_k favorables est donc $O(t_j \log t_j)$. Les I_k sont disjoints dans $\mathbb{R}$. On dira qu'un couple (p_{2n-1}, p_{2n}) de nombres premiers est adapté si on a : $p_{2n-1} \in I_k$ et $p_{2n} \in I_k$. (Appartenance à un même intervalle I_k).

On dira au contraire que le couple (p_{2n-1}, p_{2n}) est inadapté si l'on a :

$$p_{2n-1} \in I_k \quad \text{et} \quad p_{2n} \in I_{k+1}.$$

Le nombre de couples inadaptés est au plus égal au nombre d'intervalles I_k, c'est-à-dire que c'est un $O(t_j \log t_j)$.

Le nombre de couples adaptés est donc $\geq \frac{1}{2} N_\varepsilon(t_j) - C\, t_j \log t_j \asymp \frac{t_j^{1+\varepsilon}}{\log t_j} \geq t_j^{1+\varepsilon/2}$ pour t_j assez grand.

Mais si (p_{2n-1}, p_{2n}) est un couple adapté, $x \in [p_{2n-1}, p_{2n}] \Longrightarrow t_j \log x \in J$

$$\Longrightarrow \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma-1} \sin(t_j \log x)\, dx \geq \frac{1}{2} \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma-1}\, dx \geq \frac{1}{2} \frac{p_{2n} - p_{2n-1}}{p_{2n}^{\sigma+1}}$$

$$\geq \frac{1}{p_{2n}^{\sigma+1}} \geq \frac{1}{t_j^{(1+\varepsilon)(1+\sigma)}},$$

d'où $$\beta_n \geq t_j^{-\sigma-\varepsilon(1+\sigma)}.$$

Quasi-sûrement, les termes grands s'additionnent, ce qui donne pour $\Phi(s)$ la minoration qs :

$$\Phi(s) \geq t_j^{1+\varepsilon/2}\, t_j^{-\sigma-\varepsilon(1+\sigma)} = t_j^{1-\sigma+0(\varepsilon)}, \quad \text{et donc}$$

$$\mu(\Phi,\sigma) \geq 1-\sigma+0(\varepsilon) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{d'où quasi-sûrement}$$

$$\mu(\Phi,\sigma) \geq 1-\sigma, \qquad \text{si} \quad \sigma > \tfrac{1}{2}, \quad \text{et donc}$$

$$\lambda(G,\sigma) \geq 1-\sigma \qquad \text{si} \quad \sigma > \tfrac{1}{2}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3, modulo le lemme.

LEMME DE Saffari (preuve). Soit $J_1' \subset \mathcal{J}$, avec une longueur $\lambda\frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{5} < \lambda < 1$, de manière que 5 translatés $J_k' = J_1' e^{-iu_k}$, $1 \leq k \leq 5$, recouvrent le tore T.

Posons $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{N_\varepsilon(t)}{\pi(t^{1+\varepsilon})} = \rho$, et soit $\alpha > 0$.

$\exists\, t_o \mid t \geq t_o \implies \dfrac{N_\varepsilon(t)}{\pi(t^{1+\varepsilon})} \leq \rho + \alpha$, et si a est majoré, $\dfrac{N_\varepsilon(t+a)}{\pi(t^{1+\varepsilon})} \leq \rho + 2\alpha$ pour t assez grand, puisque $\dfrac{\pi\left[(t+a)^{1+\varepsilon}\right]}{\pi(t^{1+\varepsilon})} \to 1$.

Soit alors C une constante > 1 fixée ; pour t assez grand, $t \leq \dfrac{t^{1+\varepsilon}}{C}$ et regardons seulement les nombres premiers p tels que $(1)\; t \leq \dfrac{t^{1+\varepsilon}}{C} \leq p \leq t^{1+\varepsilon}$.

Nous avons alors : $\log p = (1+\varepsilon)\log t - \theta \log C$, avec $0 \leq \theta \leq 1$. Posons aussi $a_k = \dfrac{u_k}{(1+\varepsilon)\log t}$, de manière que $a_k \leq 1$ pour t assez grand. Nous avons

$$p^{ia_k} = e^{i\frac{u_k}{(1+\varepsilon)\log t}\left[(1+\varepsilon)\log t - \theta\log C\right]} = e^{iu_k}\, e^{-i\,u_k\frac{\theta \log C}{(1+\varepsilon)\log t}} = e^{iu_k}\, e^{o(1)}.$$

Soit p vérifiant (1). Nous avons

$$p^{it} \in J_k', \quad \text{pour un} \quad k \in [1,5], \quad \text{ou} \quad p^{it} \in J_1' e^{-iu_k}$$

$$\implies p^{i(t+a_k)} \in J_1' e^{o(1)} \subset J \qquad \text{pour t assez grand.}$$

Donc, $p \in \left\{ t \leq p \leq t^{1+\varepsilon} \mid p^{i(t+a_k)} \in J \right\}$; mais le nombre d'éléments de ce dernier ensemble est $N_\varepsilon(t + a_k) + 0(t^\varepsilon)$, si bien que nous arrivons à l'inégalité

$$\pi(t^{1+\varepsilon}) - \pi\left(\frac{t^{1+\varepsilon}}{C}\right) \leq \sum_{k=1}^{5} N_\varepsilon(t + a_k) + O(t^\varepsilon) \leq 5(\rho + 2\alpha)\, \pi(t^{1+\varepsilon}) + O(t^\varepsilon).$$ En utilisant le théorème des nombres premiers, et en passant à la limite, nous avons $1 - \frac{1}{C} \leq 5(\rho + 2\alpha)$.

Comme $\alpha > 0$ et $C > 1$ sont arbitraires, on an déduit $\rho \geq \frac{1}{5}$. ▨

Bibliographie

[1] KAHANE, J.-P. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276 (1973).

[2] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963.

[3] BOHR, H. A. 17 Dan. Mat. Fys. Medd 25 (1949).

[4] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Heath, 1968.

[5] LOEVE, M. Probability theory.

[6] INGHAM Math. Z. 41 (1936), 367-379.

[7] TITCHMARSCH The theory of the Riemann zêta function.

[8] ZYGMUND, A. Trigonometric series, t. 1. Academic Press.

[9] CRANER, H. Acta Arithmetica 2 (1937), 23-46.