

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 106 74-23

Publications Mathématiques

ORSAY

HOMOTOPIE REGULIERE ET ISOTOPIE

par

V. POENARU

INTRODUCTION

Le principal problème traité dans ce mémoire est le suivant :

Si X, Y sont deux variétés C^∞ , avec $\dim Y > \dim X$ et $f : X \rightarrow Y$ une immersion générique (au bord), quant est-ce que f peut-elle être relevée en un plongement : $X \rightarrow Y \times \mathbb{R}$? X sera supposé, en principe, compact.

Le cas intéressant pour les applications (en particulier pour le groupe Θ_3 de Milnor-Kervaire, comme on le verra plus loin) est celui où f est une homotopie régulière générique

$$\begin{array}{ccc} M \times I & \xrightarrow{\quad} & N \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

qu'il s'agit de relever en une isotopie, dans $N \times \mathbb{R}$, d'où le titre de ce travail.

La solution du problème énoncé sera exprimée en termes de deux invariants, μ_2 , et ν_3 qu'on va définir plus loin.

Avant de donner les énoncés des théorèmes qu'on va démontrer, on va commencer par quelques définitions - (on renvoie le lecteur à [5], pour plus de détails).

Si X, Y sont deux variétés différentiables et $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est une immersion, on dira que f est générique au bord (ou, quelquefois, par abus de langage, générique tout simplement) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $f^{-1}(\partial Y) = \partial X$.
- ii) si $y \in Y - \partial Y$ et $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

alors les sous-espaces vectoriels

$$\text{Tf}(T_{x_1} X), \dots, \text{Tf}(T_{x_k} X) \subset T_y Y$$

sont en position générale. (Je rappelle que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k \subset E$ sont en "position générale" (ou, ont une "intersection régulière") si :

$$\text{codim} \left(\bigcap_1^k F_i \right) = \sum_1^k \text{codim} F_i \quad .)$$

iii) Si $y \in \partial Y$ et x_1, x_2, \dots, x_k sont comme ci-dessus, les sous-espaces vectoriels

$$T_y \partial Y, \text{Tf}(T_{x_1} X), \dots, \text{Tf}(T_{x_k} X) \subset T_y Y$$

sont en position générale. Ceci implique, en particulier, que

$$f|_{\partial X} \in \text{Imm}(\partial X, \partial Y)$$

est, aussi, générique et que f est transversale à ∂Y .

Pour une application quelconque $g : X \rightarrow Y$ on va considérer les point i -tuples de g :

$$M^i(g) \subset X ,$$

et la filtration canonique :

$$X \supset M^2(g) \supset M^3(g) \supset \dots \supset M^i(g) \supset M^{i+1}(g) \supset \dots$$

Pour un ensemble quelconque E , $S^i E$ va désigner la i -ème puissance symétrique de E et par définition :

$$\Sigma^{i+1} E = E \times S^i E = \{ (x_1, \underbrace{(x_2, \dots, x_{i+1})}) \} .$$

On a une projection naturelle

$$\Sigma^{i+1} E \xrightarrow{P_{i+1}} S^{i+1} E = E^{i+1} / S(i+1) ,$$

de même qu'une projection sur le premier facteur

$$\Sigma^{i+1} E \xrightarrow{\pi_{i+1}} E .$$

Dans $\Sigma^i E$ (ou dans $S^i E$, ou dans E^i) on va considérer la "grande" et la "petite" diagonale :

$$\text{diag}_i E \subset \text{Diag}_i E \subset \Sigma^i E .$$

Une application $f : X \rightarrow Y$ induit des applications $f^i : X^i \rightarrow Y^i$, ou $f^i : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i Y$, ou : $f^i : S^i X \rightarrow S^i Y$ à tous les niveaux, et par définition $M_i(f) \subset \Sigma^i X - \text{Diag}_i X$ est :

$$M_i(f) = (f^i)^{-1}(\text{diag}_i Y) - \text{Diag}_i X .$$

[Remarque :

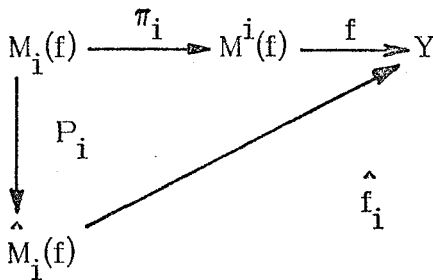
Si $f : X \rightarrow Y$ est une immersion générique , f^i , considérée aux niveaux $X^i, S^i X$ ou $\Sigma^i X$, et restreinte au complémentaire de la grande diagonale de la source, est transversale à la petite diagonale du but.]

On a : $\pi_i(M_i(f)) = M^i(f) \subset X$. On va désigner par $\hat{M}_i(f)$ l'image

$$\hat{M}_i(f) = P_i(M_i(f)) \subset S^i X .$$

Bien entendu, $\hat{M}_i(f)$ peut être définie, aussi, par une formule tout à fait analogue à celle de $M_i(f)$, mais en travaillant au niveau $S^i X$ (et pas $\Sigma^i X$) .

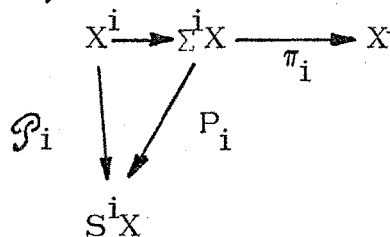
On aura ainsi un diagramme commutatif :



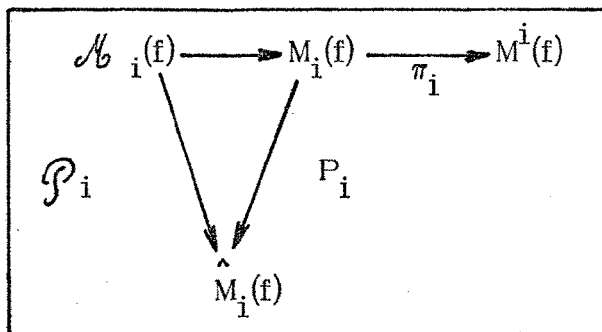
Considérons aussi

$$f^i : X^i \rightarrow Y^i$$

et $\mathcal{A}_i(f) \subset X^i - \text{Diag}_i X$, défini de la même manière que $M_i(f)$. Les projections



induisent un diagramme commutatif, où l'on voit apparaître toutes les différentes sortes de "points multiples", à la fois :



On remarque que \mathcal{P}_i est un revêtement galoisien (de groupe structural $S(i) = \{\text{le groupe des permutations de } i \text{ éléments}\}$).

En particulier \mathcal{A}_i est une $S(i)$ -variété : si l'on pense à l'action naturelle de $S(i)$ sur X^i , alors $\mathcal{A}_i \subset X^i$ est une sous-variété invariante. Dans la mesure où l'action $S(i) \times \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_i$ est fait capital pour ce qui suit, le présent mémoire s'inscrit dans le courant de la topologie différentielle équivariante.

Si $i=2$, $\mathcal{A}_2(f) \equiv M_2(f)$, puisque $\Sigma^2 X \equiv X^2$. Soit :

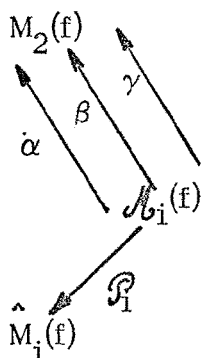
$$J(n) = \{1, 2, \dots, n\}^2 - \text{Diag} \{1, \dots, n\}.$$

Pour chaque $\alpha \in J(i)$ il y a une opération de "dégénérescence", canoniquement définie :

$$d_\alpha : \mathcal{A}_i(f) \rightarrow M_2(f)$$

(si $\alpha = (j, k)$, $d_\alpha(x_1, \dots, x_i) = (x_j, x_k)$).

On considère les systèmes projectifs \mathcal{S}_i :

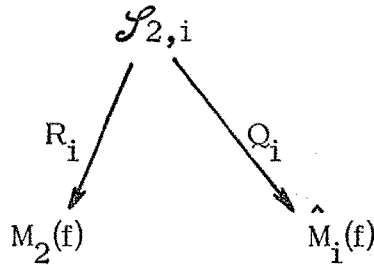


où $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} = \{d_\alpha, \alpha \in J(i)\}$.

On considère la limite projective de ce système :

$$\begin{array}{c} \varprojlim \mathcal{S}_i \hookrightarrow M_2(f) \times \hat{M}_1(f) \times \mathcal{A}_1(f) \\ \downarrow \text{projection} \\ M_2(f) \times \hat{M}_1(f) \end{array}$$

L'image de $\varprojlim \mathcal{S}_i$ dans $M_2(f) \times \hat{M}_1(f)$ sera désignée par $\mathcal{S}_{2,i}$. L'espace $\mathcal{S}_{2,i}$ est muni de projections canoniques :



En termes plus concrets, un point de $\mathcal{S}_{2,i}$ est une paire (y, x) où $y = (x_j, x_k) \in M_2(f)$ et :

- 1) $\pi_2 y \in M^i(f) \subset M^2(f)$.
- 2) $x = \{x_1, \dots, x_i\} \in \hat{M}_1(f)$.
- 3) $\{x_j, x_k\} \subset x = \{x_1, \dots, x_i\}$.

En d'autres termes, si $x \in \hat{M}_1(f)$, la fibre $Q_i^{-1}(x)$, au dessus de $x = \{x_1, \dots, x_i\}$ (ensemble non-ordonné), consiste des $i(i-1)$ éléments de $x \times x - \text{Diag } x$, ou, si l'on veut, des $i(i-1)$ paires orientées (x_j, x_k) , $x_j, x_k \in x$, $j \neq k$.

On voit que $\mathcal{S}_{2,i} = M^{i(i-1)}(Q_i)$.

Si $i=2$, $\mathcal{S}_{2,i} \cong M_2(f)$, $Q_2 \cong P_2$.

Dorénavant on se placera dans le contexte où X, Y sont deux variétés C^∞ et $f : X \rightarrow Y$ une immersion générique. Dans ce cas, on peut faire les remarques suivantes, dont les démonstrations sont des exercices faciles laissés au lecteur.

α) $M^i(f) - M^{i+1}(f)$ est une variété lisse, de bord $\partial M^i(f) = M^i(f) \cap \partial X$. Les points de $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$ sont des singularités de $M^i(f)$. Au voisinage d'un tel point, $M^i(f)$ se présente (à difféomorphisme près) comme une réunion de sous-variétés en position générale

β) $M_i(f)$ (respectivement $\hat{M}_1(f)$, respectivement $\mathcal{A}_1(f)$) est une sous-variété lisse de $\Sigma^i X$ (respectivement de $S^i X$, respectivement de X^i). $\pi_i, P_i, \hat{f}_i, \mathcal{P}_i$ sont des applications C^∞ .

L'application

$$M_i(f) \xrightarrow{\pi_i} X$$

est une immersion générique. Partout où cela a un sens (c'est à dire en dehors de $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$) l'application

$$M_i(f) \xrightarrow{\pi_i} M^i(f)$$

est donc une submersion.

γ) $\pi_i | (M_i(f) - \pi_i^{-1} M^{i+1}(f))$ est une bijection $M_i(f) - \pi_i^{-1} M^{i+1}(f) \xrightarrow{\approx} M^i(f) - M^{i+1}(f)$.

Par contre, π_i fait éclater tous les points de $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$. $(M_i(f) \xrightarrow{\pi_i} M^i(f))$ est donc une résolution des singularités de $M^i(f)$.

δ) Les flèches C^∞ :

$$\begin{array}{ccc} M_i(f) & \xrightarrow{P_i} & \hat{M}_i(f) \\ \mathcal{A}_i(f) & \xrightarrow{\mathcal{P}_i} & \hat{M}_i(f) \\ \mathcal{A}_i(f) & \longrightarrow & M_i(f) \end{array}$$

sont des revêtements.

Si $i=2$, on a $\Sigma^2 X \equiv X^2$, $M_2(f) \subset X^2$ est invariante pour l'action naturelle

$$S(2) \times X^2 \rightarrow X^2,$$

et le revêtement à deux feuilletés :

$$M_2(f) \xrightarrow{P_2} M_2(f)/S(2) \equiv \hat{M}_2(f), \text{ est complètement caractérisé}$$

par une classe de cohomologie :

$$\sigma(f) \in H^1(\hat{M}_2(f), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

On va définir maintenant notre (premier) invariant $\mu_2 = \mu_2(f)$ comme suit. μ_2 sera une fonction :

$$\pi_0(\hat{M}_2(f)) = \{\text{L'ensemble des composantes connexes de } \hat{M}_2(f)\} \xrightarrow{\mu_2} \{0, 1, 2, \dots\}$$

telle que

$$\mu_2[\alpha] = 0 \iff \sigma(\alpha) = 0, \text{ c'est à dire si le revêtement } P_2 \text{ est trivial au-dessus de la composante } \alpha \in \pi_0(\hat{M}_2(f)),$$

et :

$$\mu_2[\alpha] = 1 \iff \text{le revêtement } P_2 \text{ est non-trivial (connexe) au dessus de } \alpha.$$

L'invariant μ_2 possède la propriété suivante :

PROPOSITION 1 : "Soient M, N deux variétés C^∞ , orientables, de dimensions 2 et 3, telles que M est compacte et $\partial M = \emptyset$. Soit

$$\begin{array}{ccc} M \times I & \xrightarrow{f} & N \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

une homotopie régulière générique, et $\alpha \in \pi_0(\hat{M}_2(f))$. Alors $\mu_2(\alpha) = 1$ si et seulement

si α est non-orientable. Dans ce cas, $P_2^{-1}(\alpha) \xrightarrow{P_2} \alpha$ est le revêtement à deux feuillets qui oriente α .

En particulier, $\mu_2(f) = 0$ si et seulement si $\hat{M}_2(f)$ est orientable."

La démonstration de cette proposition sera donnée au chapitre II.

On va définir, maintenant, des invariants $\mu_i = \mu_i(f)$ ($i \geq 2$) qui seront des fonctions:

$$\pi_0(\hat{M}_i(f)) \xrightarrow{\mu_i} N^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

étendant celle que l'on vient déjà de construire. Une légère modification de la définition de μ_3, μ_4, \dots va nous donner les invariants ν_3, ν_4, \dots . Le ν_3 sera notre second invariant (de l'énoncé du théorème principal).

On commence par remarquer que

$\mathcal{S}_{2,i}$ est une sous-variété lisse de $M_2(f) \times \hat{M}_i(f)$, et que

$$\mathcal{S}_{2,i} \xrightarrow{Q_i} \hat{M}_i(f)$$

un revêtement à $i(i-1)$ feuillets.

Maintenant, un revêtement à n feuillets n'est rien d'autre qu'un fibré localement trivial, de fibre $F = \{ \text{l'ensemble discret de cardinalité } n \}$ et de groupe structural $S(n)$.

Par rapport à cette situation générale, on est ici en présence de deux structures supplémentaires :

A) On commence par remarquer que si $x = (x_1, \dots, x_i) \in \hat{M}_i(f)$, le groupe $S(i) = \text{Perm}(x_1, \dots, x_i) = \text{Perm}(x)$, agit canoniquement sur la fibre :

$$Q_i^{-1}(x) = x \times x - \text{Diag } x .$$

Le fibré $\mathcal{S}_{2,i} \xrightarrow{Q_i} \hat{M}_i(f)$ admet $S(i)$ comme groupe structural. On a une réduction de groupe structural :

$$S(i(i-1)) \implies S(i) .$$

B) L'espace total $\mathcal{S}_{2,i}$ est muni de la projection :

$$\mathcal{S}_{2,i} \xrightarrow{R_i} M_2(f) .$$

Ceci induit une relation d'équivalence sur $\mathcal{S}_{2,i}$: Pour $p, q \in \mathcal{S}_{2,i}$ on écrira

$$p \equiv q$$

si $R_i(p)$ et $R_i(q)$ sont dans la même composante connexe de $M_2(f)$.

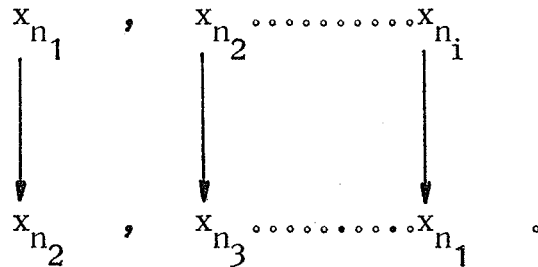
[Dans un langage imagé, notre fibré

$$\mathcal{S}_{2,i} \xrightarrow{Q_i} \hat{M}_i(f) ,$$

dont le groupe structural se réduit comme on vient de le voir, a son espace total traversé par (envoyé dans) l'espace $M_2(f)$, qui lui ne vit plus au dessus de $\hat{M}_i(f)$.

Soit maintenant $x \in \hat{M}_i(f)$ et $G(x) \subset \text{Perm}(x)$

l'ensemble des i-cycles, c'est à dire des permutations du type :



On va désigner par $\mu_{i,x}(f)$ le nombre des sous-ensembles distincts, E , de cardinalité i , contenus dans

$$Q_i^{-1}(x) = x \times x - \text{Diag } x ,$$

et tels que :

- $\alpha)$ Il existe un $y \in x \times x - \text{Diag } x$,

et un

$$g \in G(x) ,$$

tels que :

$$E = \{y, g.y, g^2.y, \dots, g^{i-1}.y\}$$

- $\beta)$ $y \equiv g.y \equiv g^2.y \equiv \dots \equiv g^{i-1}.y$.

Par continuité on voit que $\mu_{i,x}(f)$ ne dépend que de la classe $\alpha \in \pi_0(\hat{M}_i(f))$ contenant x .

Par définition :

$$\mu_i(\alpha) = \mu_i(f)[\alpha] = \mu_{i,x}(f) \in \mathbb{N}^+ .$$

On remarque que pour $i=2$ on retombe sur l'invariant (plus ou moins cohomologique) qu'on a déjà considéré avant. Il n'est pas difficile de voir que l'annulation de tous les $\mu_i(f)$, à la fois, est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'une immersion générique $f : X \rightarrow Y$ se relève en un plongement $X \rightarrow Y \times R$.

On va définir maintenant une nouvelle relation d'équivalence sur $\mathcal{S}_{2,i}$ qu'on désignera par $p \sim q$, (où $p \sim_i q$ si l'on veut préciser que l'on travaille au niveau i -tuple). La relation d'équivalence \sim (en tant que partie de $\mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$) sera caractérisée par les quatre propriétés suivantes :

- a) $p \equiv q \implies p \sim q$.
- b) $(x', x'') \sim (y', y'') \implies (x'', x') \sim (y'', y')$.
- c) Soit $x \in \hat{M}_i(f)$ et $y = (x_r, x_j) \in Q_i^{-1}(x)$.

Soit $g \in S(i)$ un i -cycle tel que :

$$(x_r, x_j) = y \sim g.y \sim g^2.y \sim \dots \sim g^{i-2}.y = (x_j, x_k) .$$

Alors : $(x_r, x_j) \sim (x_r, x_k)$. Si $i=3$, la propriété c) dit tout simplement que :

$$(x_r, x_j) \sim (x_j, x_k) \implies (x_r, x_j) \sim (x_r, x_k) \quad (\text{ici } r \neq j \neq k \neq r) .$$

d) \sim est la plus petite relation d'équivalence sur $\mathcal{S}_{2,i}$ avec les propriétés a), b) c) ci-dessus.

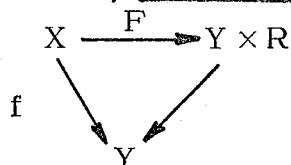
A partir de là, on définit les invariants ν_3, ν_4, \dots de la même manière que l'on a défini les invariants μ_3, μ_4, \dots mais en travaillant avec la relation d'équivalence \sim_3, \sim_4, \dots à la place de la relation d'équivalence \equiv .

Il est manifeste que $\nu_i(f) = 0$ implique que $\mu_i(f) = 0$.

THEOREME 1 : - "Soient X et Y deux variétés C^∞ , et $f: X \rightarrow Y$ une immersion, C^∞ , générique (-au bord). X est supposée compacte et $\dim X < \dim Y$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un plongement C^∞ ,

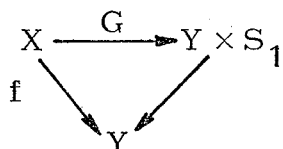
$X \xrightarrow{F} Y \times R$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :



est que $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$ " .

COROLLAIRE 2 : - "Soient X et Y deux variétés C^∞ , avec $\pi_1 X = 0$, et $f: X \rightarrow Y$ une immersion C^∞ générique (- au bord). On suppose $\dim X < \dim Y$ et X compacte.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un plongement $C^\infty, X \xrightarrow{G} Y \times S_1$, tel que le diagramme suivant soit commutatif



est que $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$ " .

La démonstration du théorème 1 et du corollaire seront données au chapitre suivant.

En ce qui concerne le corollaire 2, on remarquera que la conditions de relèvement dans $Y \times S_1$ ne fait intervenir que les points multiples . Si $\pi_1 X \neq 0$ ceci ne sera, en principe, plus vrai.

Soit maintenant Θ_n le groupe de Kervaire-Milnor [2] des classes de h -cobordisme de sphères d'homotopie lisses, orientées, n -dimensionnelles. Pour $n > 3$ ce groupe est fini et plus ou moins calculable . Pour $n=3$ il est totalement inconnu. On va donner un critère suffisant pour que la classe $[\Sigma_3] \in \Theta_3$ d'une sphère d'homotopie Σ_3 soit 0 .

Soit donc Σ_3 une sphère d'homotopie C^∞ , et $f_0, f_1: D_3 \rightarrow \Sigma_3$ deux plongements C^∞ disjoints. Soit $*$ $\in D_3$, le centre de D_3 . D'après le théorème de classification des immersions [1], [6], [3 (pages 8-27)], [4], f_0 et f_1 peuvent être reliées par une homotopie régulière f , dans $\text{Imm}(S_2, \Sigma_3 - f_0(*) - f_1(*))$.

On va supposer f générique, ce qui est, évidemment, toujours possible. Si f était une isotopie, on aurait, trivialement, $\mu_i(f) = 0$, $\nu_j(f) = 0$.

Une réciproque partielle de cette remarque est le résultat suivant :

THEOREME 2 : "Si $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$, alors Σ_3 est h-cobordante à S_3 (c'est à dire que Σ_3 est le bord d'une variété lisse, contractible, de dimension 4)".

La démonstration sera donnée au chapitre II.

Ce mémoire corrige et remplace les pages 61-165 de mon vieux preprint [3].

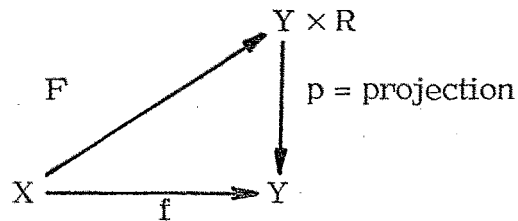
Je remercie H. Hendriks et F. Laudenbach pour les conversations très utiles que j'ai eu avec eux.

CHAPITRE I.- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.-

1.1) LA NECESSITE DES CONDITIONS $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$.

La nécessité de la condition $\mu_2(f) = 0$ résulte du

LEMME 1.1. : "Soient X, Y des variétés lisses (avec $\dim Y > \dim X$) et



un diagramme commutatif tel que :

$$F \in P \ell^\infty(X, Y \times R)$$

$f \in \text{Imm}(X, Y)$, et f est générique.

Dans ces conditions tous les invariants μ_i sont nuls pour f :

$$\mu_i(f) = 0 \quad \forall i \text{ " .}$$

Démonstration : Considérons la projection

$$q : Y \times R \rightarrow R$$

et un point $x = (x_1, \dots, x_i) \in \hat{M}_1(f)$, $x_j \in X$.

F étant un plongement, l'application

$$q \circ F : \{x_1, \dots, x_i\} \rightarrow R$$

est une injection. Si $\mu_{i,x}(f) > 0$, alors, à un changement de notation près, on a :

$$(x_1, x_2) \equiv (x_2, x_3) \equiv \dots \equiv (x_n, x_1) \text{ .}$$

D'autre part, par continuité :

$$(x', x'') \equiv (y', y'') \Rightarrow (q \circ F(x') - q \circ F(x''))(q \circ F(y') - q \circ F(y'')) > 0 \text{ .}$$

Supposons donc, pour fixer les idées, que

$$q \circ F(x_1) > q \circ F(x_2) \text{ .}$$

Ceci entraînerait :

$$q \circ F(x_1) > q \circ F(x_2) > \dots > q \circ F(x_n) > q \circ F(x_1) \text{ ,}$$

d'où une contradiction, e.a.d.s.

LEMME 1.2. : " Si X, Y, f, F sont comme dans le lemme 1, alors $\nu_j(f) = 0$
($j = 3, 4, \dots$). "

Démonstration : On va concevoir une relation d'équivalence sur l'ensemble E comme une partie de E^2 (contenant $\text{diag } E$, symétrique et transitive). L'intersection de deux relations d'équivalence est encore une relation d'équivalence.

Soit $E_i^0 \subset \mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$ (la partie de $\mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$ correspondant à) la relation d'équivalence \equiv . On va construire explicitement la partie $F_i \subset \mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$ correspondant à \sim (ou \sim_i) .

On va construire, inductivement une suite croissante de parties de $\mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$:

$$E_i^0 \subset E_i^1 \subset E_i^2 \subset \dots, \text{ de la manière suivante :}$$

On va donner deux procédés : l'un pour obtenir E_i^{2n} à partir de E_i^{2n-1} ,

l'autre pour obtenir E_i^{2n+1} à partir de E_i^{2n} .

De toute façon, les E_i^m auront les propriétés suivantes :

$\alpha)$ $E_i^m \supset \text{diag } \mathcal{S}_{2,i}$.

$\beta)$ E_i^m est symétrique par rapport à l'involution fondamentale :

$$\mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i} \rightarrow \mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$$

$$(a, b) \rightarrow (b, a) .$$

$\gamma)$ E_i^m possède, aussi, la symétrie suivante : Si $[(x', x''), (y', y'')] \in E_i^m$, alors $[(y', y''), (x', x'')] \in E_i^m$.

En supposant E_i^{2n} déjà construit, on passe à E_i^{2n+1} de la manière suivante :

On considère toutes les situations où il y a un $x \in \hat{M}_i(f)$,

un $z = (x_r, x_j) \in Q_i^{-1}(x) = x \times x - \text{diag } x$, et un i -cycle $g \in S(i)$, tels que :

a) $g^{i-2} \cdot z = (x_j, x_k)$ (ce qui veut dire, tout simplement que : $g^{i-2} x_r = x_j$) .

b) les couples :

$$(z, g \cdot z), (g \cdot z, g^2 \cdot z), \dots, (g^{i-3} \cdot z, g^{i-2} \cdot z) \in \mathcal{S}_{2,i}^2 \text{ sont dans } E_i^{2n} .$$

On ajoute alors à E_i^{2n} les couples de $\mathcal{S}_{2,i}^2$:

$$[(x_r, x_k), (x_r, x_j)], [(x_r, x_j), (x_r, x_k)], [(x_k, x_r), (x_j, x_r)], [(x_j, x_r), (x_k, x_r)]_r .$$

On obtient ainsi notre E_i^{2n+1} . Les propriétés $\alpha), \beta), \gamma)$ sont manifestement satisfaites pour E_i^{2n+1} , une fois qu'elles le sont pour E_i^{2n} .

En supposant E_i^{2n-1} déjà construit, on passe à E_i^{2n} de la manière suivante :
Chaque fois que $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{S}_{2,i}$ sont tels que

$$(X_1, X_2), (X_2, X_3), \dots, (X_{p-1}, X_p) \in E_i^{2n-1},$$

on ajoute à E_i^{2n-1} la paire (X_1, X_p) . On obtient ainsi notre E_i^{2n} (qui aura les propriétés $\alpha), \beta), \gamma)$, si E_i^{2n-1} les a).

On pourra démontrer sans difficultés que $F_i = \bigcup_n E_i^n \subset \mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i}$ est une relation d'équivalence, satisfaisant aux propriétés a), b), c), d) de l'introduction. Ainsi on a construit explicitement la relation d'équivalence \sim (ou, si l'on préfère \sim_i).

Maintenant, à partir du relèvement F on construit $q \circ F : X \rightarrow R$ qui est un plongement pour chaque $\{x_1, \dots, x_i\} = x \in \hat{M}_i(f)$.

Je dis que l'on a :

$$(*) \quad (x', x'') \sim (y', y'') \Rightarrow (q \circ F(x') - q \circ F(x''))(q \circ F(y') - q \circ F(y'')) > 0.$$

On sait déjà que (*) est vraie si

$$[(x', x''), (y', y'')] \in E_i^0,$$

c'est à dire si $(x', x'') \equiv (y', y'')$.

Supposons que (*) soit déjà vraie pour toutes les paires de E_i^{2n} et que $(x_r, x_j), (x_j, x_k)$ soient comme ci-dessus. On voit que sur la droite R , le point $q F(x_j)$ sépare $q F(x_r)$ de $q F(x_k)$, d'où il résulte que :

$$\text{signe}(q F(x_r) - q F(x_k)) = \text{signe}(q F(x_r) - q F(x_j)).$$

Donc (*) est vraie pour les paires de E_i^{2n+1} .

Si (*) est vraie pour toutes les paires de E_i^{2n-1} , elle est clairement vraie pour toutes les paires de E_i^{2n} . Donc, par induction, (*) est vraie.

A partir de là, la démonstration du lemme 1.2. se fait comme celle du lemme 1.1.

LEMME 1.3. : " $\nu_3(f) = 0$ implique que $\nu_4(f) = \nu_5(f) = \dots = 0$ " .

[Ce lemme n'est pas utilisé dans la démonstration du théorème 1.]

Pour prouver le lemme 1.3, on montre d'abord le :

LEMME 1.3.1. : "Soient $y \in \hat{M}_3(f)$ et $z \in \hat{M}_i(f)$, tels que $i > 3$ et que :

$$y = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_i\} = z .$$

Soient $\ell, p, q, r \in \{1, 2, 3\}$. Si :

$$[(x_\ell, x_p), (x_q, x_r)] \in F_i \subset \mathcal{S}_{2,i} \times \mathcal{S}_{2,i} ,$$

alors :

$$[(x_\ell, x_p), (x_q, x_r)] \in F_3 \subset \mathcal{S}_{2,3} \times \mathcal{S}_{2,3} .$$

En d'autres termes :

$$A \sim_i B \implies A \sim_3 B . "$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $[(x_\ell, x_p), (x_q, x_r)] \in E_i^n$ implique que $[(x_\ell, x_p), (x_q, x_r)] \in F_3$ (pour tous les $n \geq 0$).

Maintenant pour simplifier l'écriture, l'appartenance d'une paire à E_i^n (respectivement à F_i) sera désignée par le symbole \sim_i^n (respectivement \sim_i) .

C'est évident que $A \sim_i^0 B \implies A \sim_3 B$.

Supposons que $A \sim_i^{2m} B \implies A \sim_3 B$. On veut montrer la même chose pour $2m+1$.

Supposons donc, que pour une certaine permutation des indices $\pi : (1, \dots, i) \rightarrow (1, \dots, i)$,

on ait

$$(**) \quad (x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}) \sim_i^{2m} (x_{\pi(2)}, x_{\pi(i)}) \sim_i^{2m} \dots \sim_i^{2m} (x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i-3)})$$

(Donc, par notre hypothèse d'induction, on a aussi :

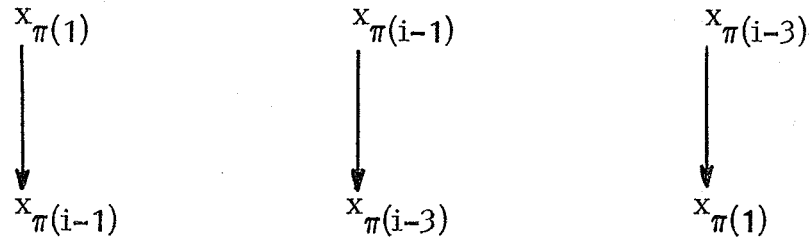
$$(***) \quad (x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}) \sim_3 (x_{\pi(2)}, x_{\pi(i)}) \sim_3 \dots \sim_3 (x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i-3)}) .$$

Le passage $E_i^{2m} \implies E_i^{2m+1}$ consiste, précisément à fabriquer à partir de (**)

la relation :

$$(x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}) \sim_3^{2m+1} (x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-3)}) .$$

On considère maintenant le point triple $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i-3)})$ et la permutation circulaire (3-cycle) :



D'après (***) , on a :

$$(x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}) \sim_3 (x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i-3)}) .$$

Donc :

$$(x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-1)}) \sim_3 (x_{\pi(1)}, x_{\pi(i-3)}) .$$

On a donc :

$$A \sim_i^{2m+1} B \implies A \sim_3 B$$

(à condition que ceci soit déjà vrai au niveau $2m$) .

Supposons maintenant que

$$A \sim_i^{2m+1} B \implies A \sim_3 B .$$

Vu que \sim_3 est une relation d'équivalence et vu la manière dont on passe de E_i^{2m-1} à E_i^{2m} on aura, aussi :

$$A \sim_i^{2m} B \implies A \sim_3 B .$$

Ceci finit la démonstration du lemme 1.3.1.

Le lemme 1.3. peut être démontré, maintenant comme suit :

Supposons que $\nu_i(f) \neq 0$ pour $i > 3$. Ceci veut dire qu'il existe un point i -tuples tel que :

$$(x_1, x_2) \sim_1 (x_2, x_3) \sim_1 \dots \sim_1 (x_i, x_1) .$$

D'après le lemme précédent, on a aussi :

$$(x_1, x_2) \sim_3 (x_2, x_3) \sim_3 \dots \sim_3 (x_i, x_1) ,$$

En particulier :

$$(x_2, x_3) \sim_3 \dots \sim_3 (x_{i-1}, x_i) ,$$

et, à partir de là, on peut déduire que :

$$(x_2, x_3) \sim_3 (x_2, x_4) \sim_3 \dots \sim_3 (x_2, x_i) .$$

Donc :

$$(x_1, x_2) \sim_3 (x_2, x_i) \sim_3 (x_i, x_1) ,$$

d'où $\nu_3(f) \neq 0$. q.e.d.

1.2).- LA SUFFISANCE DES CONDITIONS $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$.-

On va commencer par reformuler notre problème. Considérons les revêtements

$$M_i(f) \xrightarrow{P_i} \hat{M}_i(f) .$$

Par abus de notation, si $x \in \hat{M}_i(f)$,

$$x = (x_1, \dots, x_i) \quad (x_j \in X) ,$$

on va identifier la fibre $P_i^{-1}(x)$ avec l'ensemble $\{x_1, \dots, x_i\}$ (strictement parlant, un point de la fibre est la donnée d'un $x_j \in x$, et de x).

On va considérer les différentes trivialisations possibles du fibré (revêtement)

$$M_i(f) \xrightarrow{\quad} \hat{M}_i(f) ,$$

en supposant, bien entendu, qu'elles existent.

Ce sera commode, dans la suite, de penser à une telle trivialisations comme étant la donnée d'un ordre total (linéaire) sur chaque fibre $P_i^{-1}(x)$, dépendant continuellement de $x \in \hat{M}_i(f)$. On va désigner un tel ordre par $>_x^i$.

Supposons maintenant que $i < j$ et considérons un système projectif analogue à celui que l'on a utilisé pour définir $\mathcal{S}_{2,i}$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M}_i(f) & \longleftarrow & \mathcal{A}_i(f) \\ & & \nearrow d_\alpha \\ & & \nearrow d_\beta \\ & & \nearrow d_\gamma \\ & & \mathcal{A}_j(f) \\ & \longleftarrow & \hat{M}_j(f) \end{array}$$

L'image de la limite projective, dans $\hat{M}_i(f) \times \hat{M}_j(f)$ sera désignée par $\hat{M}_{i,j}(f)$.

On aura une flèche composée :

$$\begin{array}{ccc} \hat{M}_{i,j}(f) \subset \hat{M}_i(f) \times \hat{M}_j(f) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \hat{M}_j(f) \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \xrightarrow{r_{i,j}} & \end{array}$$

En termes plus concrets, un point de $\hat{M}_{i,j}(f)$ est une paire de sous-ensembles de $X : (x,y)$, telle que :

$\alpha)$ $\text{card } x=i$, $\text{card } y=j$.

$\beta)$ $x \subset y$.

$\gamma)$ y correspond à un point j -tuple ; donc x correspond à un point i -tuple (de f) .

Considérons :

$$M_i(f) \times \hat{M}_j(f) \xrightarrow{P_i \times \text{id}(\hat{M}_j)} \hat{M}_i(f) \times \hat{M}_j(f)$$

On va introduire les notations

$$M_i(f) \times_X \hat{M}_j(f) = (P_i \times \text{id})^{-1}(\hat{M}_{i,j}(f)) ,$$

$$P_{i,j} = (P_i \times \text{id}) | M_i(f) \times_X \hat{M}_j(f) .$$

On remarque que

$$M_i(f) \times_X \hat{M}_j(f) \xrightarrow{P_{i,j}} \hat{M}_{i,j}(f)$$

est un revêtement à i feuillets et que, pour chaque $(x,y) \in \hat{M}_{i,j}(f)$, la fibre $P_{i,j}^{-1}((x,y))$, s'identifie, canoniquement, à la fibre $P_i^{-1}(x)$. On va faire constamment cette identification dans la suite .

Enfin, on a un diagramme commutatif (morphisme de fibrés), qui est un monomorphisme sur chaque fibre:

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} M_i(f) \times_X \hat{M}_j(f) & \xrightarrow{R_{i,j}} & M_j(f) \\ \downarrow & & \downarrow P_j \\ \hat{M}_{i,j}(f) & \xrightarrow{r_{i,j}} & \hat{M}_j(f) \end{array}$$

La flèche $R_{i,j}$ est obtenue comme suit :

Un point de $M_i(f) \times_X \hat{M}_j(f)$ consiste en deux sous-ensembles $x, y \subset X$ tels que

- a) $\text{card } x=i$, $\text{card } y=j$ ($j>i$)
- b) dans x un certain point est marqué. Disons que

$$x = \{x_1, (x_2, \dots, x_i)\}$$

- c) $x \subset y$. Disons que :

$$y = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$$

- d) y correspond à un point j -tuple de f (donc x à un point i -tuple).

Par définition :

$$R_{i,j}(x,y) = \{x_1, (x_2, \dots, x_j)\} \in M_j(f) .$$

Le diagramme (1) représente donc, toutes les manières possibles (s'il y en a) de plonger un point i -tuple dans un point j -tuple (Π s'agit du niveau ΣX).

DEFINITION 1 : Un système de trivialisations des fibrés $M_i(f) \xrightarrow{P_i} \hat{M}_i(f)$, $>_x^i$,

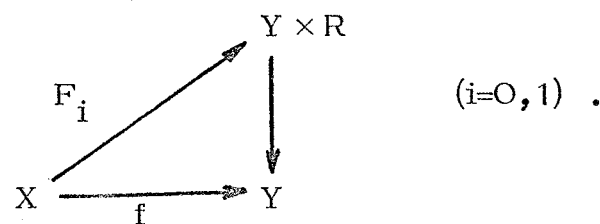
defini pour chaque i , est dit COMPATIBLE, si pour chaque $(x,y) \in \hat{M}_{i,j}(f)$,

l'application :

$$P_i^{-1}(x) \approx P_{i,j}^{-1}(x,y) \xrightarrow{R_{i,j}} P_j^{-1}(R_{i,j}(x,y)) = P_j^{-1}(y)$$

est compatible avec les relations d'ordre $>_x^i$ et $>_y^j$. \square

DEFINITION 2 : Soit $f \in \text{Imm}(X,Y)$, immersion générique, et F_0, F_1 deux relèvements $F_i \in \text{P}\ell(X, Y \times R)$:



Par définition, F_0 et F_1 sont EQUIVALENTS, s'il existe une isotopie C^∞ :

$$H_t \in \text{Diff}(Y \times R) ,$$

telle que $H_0 = \text{identité}$, telle que

$$\begin{array}{ccc} Y \times R & \xrightarrow{H_t} & Y \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

soit commutatif, telle que au dessus de chaque $y \in Y$ l'orientation de R soit respectée, et telle que

$$H_1 \circ F_0 = F_1 \quad . \quad \square$$

LEMME 1.4. : " Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une immersion générique ($\dim Y > \dim X$) . Il y a une bijection (canonique et naturelle) entre les systèmes de trivialisations compatibles $\{>_X^i\}$ (à isomorphisme près) et les classes d'équivalence de relèvements de f en des plongements $X \rightarrow Y \times R$. "

La démonstration est laissée au lecteur.

On va montrer maintenant que si $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$, on peut construire un système de trivialisations compatibles.

De toute façon $\mu_2(f) = 0$ équivaut à l'existence d'une trivialisations $>_X^2$, au niveau des points doubles.

On a , aussi, le lemme suivant :

LEMME 1.5. : " Un système de deux trivialisations compatibles, au niveau des points doubles et triples : $\{<_X^2, <_Y^3\}$, se prolonge, d'une manière unique, en un système compatible $\{<_X^i\}$, défini à tous les niveaux" .

Démonstration : On se fixe sur un $i > 3$. Soit $y = (x_1, \dots, x_i) \in \hat{M}_i(f)$. En choisissant x_a, x_b ($a \neq b, 1 \leq a, b \leq i$) on obtient un $x = (x_a, x_b) \in \hat{M}_2(f)$ et $(x, y) \in \hat{M}_{2,i}(f)$.

Si la relation d'ordre $<_Y^i$ existe, compatible avec $<_X^2$, elle doit satisfaire à

la condition :

$$(F) \quad x_a \underset{y}{\overset{i}{<}} x_b \iff x_a \underset{x}{\overset{2}{<}} x_b ;$$

d'où l'unicité de l'extension .

Supposons maintenant qu'on définit sur $P_i^{-1}(y)$ une relation (c'est à dire une partie de $P_i^{-1}(y) \times P_i^{-1}(y)$), $\underset{y}{\overset{i}{<}}$, par la formule (F) ci-dessus . Il nous faut montrer que $\underset{y}{\overset{i}{<}}$ satisfait aux conditions suivantes :

- 1) $\underset{y}{\overset{i}{<}}$ varie continuellement avec y .
- 2) Si $x', x'' \in P_i^{-1}(y)$, et si $x' \neq x''$, on a, ou bien $x' \underset{y}{\overset{i}{<}} x''$, ou bien $x'' \underset{y}{\overset{i}{<}} x'$ et jamais les deux à la fois.
- 3) $\underset{y}{\overset{i}{<}}$ est transitive.
- 4) Les différents $\underset{x}{\overset{j}{<}}$ forment un système compatible ($j \geq 2$) .

La propriété 2) se voit comme suit : Si $x', x'' \in P_i^{-1}(y)$ et $x' \neq x''$, la paire non-ordonnée $x = (x', x'')$, est un point bien déterminé de $\hat{M}_2(f)$, et $P_2^{-1}(x) = \{x', x''\}$ (c'est à dire l'ensemble x', x'') . On a ou bien $x' \underset{x}{\overset{2}{<}} x''$, ou bien $x'' \underset{x}{\overset{2}{<}} x'$ et jamais les deux à la fois, e.a.d.s.

- 1) résulte de la continuité de $\underset{x}{\overset{2}{<}}$, et de la trivialité locale de toute la situation.

Démonstration de 3) : On se donne trois éléments distincts de $\{x_1, \dots, x_i\}$, disons x_1, x_2, x_3 , et il faut montrer que si $x_1 \underset{y}{\overset{i}{<}} x_2$ et $x_2 \underset{y}{\overset{i}{<}} x_3$, on a, aussi $x_1 \underset{y}{\overset{i}{<}} x_3$. Soient x', x'', x''' les points doubles (au niveau de $\hat{M}_2(f)$), correspondant, respectivement, à $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)$.

Ce que l'on veut montrer c'est que :

$$x_1 \underset{x'}{\overset{2}{<}} x_2 \text{ et } x_2 \underset{x''}{\overset{2}{<}} x_3, \text{ entraînent que :}$$

$$x_1 \underset{x'''}{\overset{2}{<}} x_3 .$$

On peut considérer (au niveau $\hat{M}_3(f)$), le point triple $z = (x_1, x_2, x_3)$. Notre hypothèse c'est qu'il existe un ordre total $\underset{z}{\overset{3}{<}}$ sur $P_3^{-1}(z) = \{x_1, x_2, x_3\}$, avec lequel $\underset{x'}{\overset{2}{<}}$, $\underset{x''}{\overset{2}{<}}$ et $\underset{x'''}{\overset{2}{<}}$ sont compatibles. Ceci implique exactement ce que l'on veut.

Remarquons que les points 2) et 3) impliquent déjà que $\underset{y}{\overset{i}{<}}$ est un ordre total (linéaire).

Démonstration de 4) : Il faut montrer que si l'on a un point i -tuple contenu dans un point j -tuple ($j > i$) :

$$\underbrace{\{x_1, \dots, x_i\}}_x \subset \underbrace{\{x_1, \dots, x_j\}}_y$$

et si $1 \leq a, b \leq i$, $a \neq b$ alors :

$$x_a \prec_x^i x_b \iff x_a \prec_y^i x_b .$$

Ceci est évident vu que les deux relations \prec_x^i , \prec_y^j au niveau de $z = (x_a, x_b)$, proviennent de \prec_z^2 . Le lemme 1.5. est ainsi démontré ; la démonstration du théorème 1 sera ainsi terminée, une fois qu'on aura prouvé le lemme suivant :

LEMME 1.6. : " Si $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$, on peut construire un système de deux trivialisations compatibles entre elles : $\{ \prec_x^2, \prec_y^3 \}$ " .

1.3.- DEMONSTRATION DU LEMME 1.6 : (LABYRINTHES).-

On commence par la définition suivante :

DEFINITION 3 : Un labyrinthe est une application

$$(L) \quad L \xrightarrow{P} K$$

munie des propriétés et des structures supplémentaires suivantes :

- 1) P est surjective et K est connexe.
- 2) K est obtenu de la manière suivante :

On se donne un ensemble fini \hat{M}_3 , un polyèdre de dimension 1 (graphe), compact, \hat{M}_2 , la décomposition de \hat{M}_2 en composantes connexes

$$\hat{M}_2 = \hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_p ,$$

les bouts libres de $\hat{\alpha}_i : \partial \hat{\alpha}_i \subset \hat{M}_3$ (ou une partie de l'ensemble de ces bouts, désignée, par abus de notation de la même façon), et des applications :

$$\hat{\psi}_i : \partial \hat{\alpha}_i \rightarrow \hat{M}_3 .$$

Alors K est la réunion des $\hat{M}_3, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ où il est entendu que chaque $x \in \partial \hat{\alpha}_i$ est identifié à $\hat{\psi}_i(x) \in \hat{M}_3$. On écrira, par abus de notation :

$$K = \hat{M}_2 \cup \hat{M}_3.$$

3) Soit $P^{-1} \hat{M}_3 = M_3$. Pour chaque $x \in \hat{M}_3$, la fibre $P^{-1}(x) \subset M_3$ consiste exactement de trois points, disons

$$P^{-1}(x) = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

On va désigner dans la suite :

$$P|_{P^{-1}(\hat{M}_3)} \text{ par } P_3.$$

4) On se donne des revêtements à deux feuillets :

$$\alpha_i \xrightarrow{P_i} \hat{\alpha}_i,$$

et par définition :

$$M_2 = \alpha_1 + \dots + \alpha_p.$$

On peut donc considérer le revêtement à deux feuillets :

$$\begin{array}{c} M_2 \\ \downarrow P_2 = p_1 + \dots + p_k \\ \hat{M}_2 \end{array}$$

Pour chaque $y \in \partial \hat{\alpha}_i$, on considère $p_i^{-1}(y) \subset \partial \alpha_i$ et on se donne une injection :

$$\psi_i : p_i^{-1}(y) \rightarrow P_3^{-1}(\hat{\psi}_i(y)).$$

Alors, L est la réunion de M_3 et de $M_2 = \{\text{réunion disjointe des } \alpha_i\}$, où il est entendu que chaque $M_2 \ni z \in p_i^{-1}(y)$, ($y \in \partial \hat{\alpha}_i$) est identifié à $\psi_i(z) \in M_3$.

On écrira, par abus de notation :

$$L = M_2 \cup M_3$$

5) Enfin : $P = P_2 \cup P_3$. \square

DEFINITION 4 : Le labyrinthe

$$L \xrightarrow{P} K$$

est, par définition, relevable si l'une des deux conditions équivalentes, suivantes,

est satisfaite :

4-A) Il existe un plongement :

$$\Lambda : \bar{L} \longrightarrow K \times R$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & K \times R \\ & \nearrow \Lambda & \downarrow \text{proj.} \\ L & \xrightarrow{P} & K \end{array}$$

4-B) Il existe des trivialisations compatibles de $M_2 \xrightarrow{P_2} \hat{M}_2$, $M_3 \xrightarrow{P_3} \hat{M}_3$

Ces trivialisations compatibles pourront être considérées (comme avant), comme étant des relations d'ordre (compatibles) $>_x^2$, $>_y^3$. \square

DEFINITION 5. - On attache au labyrinthe (L) l'ensemble

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(L) = \bigcup_{x \in \hat{M}_3} (P_3^{-1}(x) \times P_3^{-1}(x) - \text{diag } P_3^{-1}(x)).$$

Sur \mathcal{S} on va considérer la relation d'équivalence \sim , qui est, par définition,

la plus petite relation d'équivalence, (sur \mathcal{S}), satisfaisant à 5-1,2,3 ci-dessous :

5-1) $(x', x'') \sim (y', y'') \implies (x'', x') \sim (y'', y')$.

5-2) Soient $z_0, z_1 \in \partial \hat{\alpha}_i$ et $(x_0, y_0) = p_i^{-1}(z_0)$, $(x_1, y_1) = p_i^{-1}(z_1)$, tels que

il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I \times \{0, 1\} & \xrightarrow{Z} & \alpha_i \\ \downarrow & & \downarrow p_i \\ I & \xrightarrow{Z} & \hat{\alpha}_i \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

a) $z(0) = z_0$, $z(1) = z_1$.

b) $Z(0, 0) = x_0$, $Z(0, 1) = y_0$, $Z(1, 0) = x_1$, $Z(1, 1) = y_1$.

c) Z est un monomorphisme sur chaque fibre $t \times \{0, 1\}$.

Dans ces conditions :

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) .$$

5-3) Soient $(x_1, x_2, x_3) = P_3^{-1}(x)$, tels que $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_3)$. Alors :
 $(x_1, x_3) \sim (x_1, x_2)$.

Par définition, la plus petite relation d'équivalence satisfaisant aux conditions 5-1), 5-2), seulement, sera désignée par \equiv . \square

On introduira les notations suivantes :

$$\mathcal{S}(x) = P_3^{-1}(x) \times P_3^{-1}(x) - \text{diag } P_3^{-1}(x) ,$$

$$\hat{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{S}(x)/S(2) = \mathcal{S}(x) \text{ symétrisé} ,$$

et :
$$\hat{\mathcal{S}} = \cup \hat{\mathcal{S}}(x) .$$

DEFINITION 6.- On va associer au labyrinthe (L) deux invariants :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{S}} \cup (\pi_0(\hat{M}_2) = \{\hat{\alpha}_i\}) & \xrightarrow{\mu_2} & \{0, 1\} \\ \hat{M}_3 & \xrightarrow{\nu_3} & \{0, 1\} \end{array}$$

définis comme suit :

$$\mu_2(\hat{\alpha}_i) = 0 \iff \text{le revêtement } p_i : \alpha_i \rightarrow \hat{\alpha}_i \text{ est trivial} .$$

Si $\{x_1, x_2\}$ est la paire x_1, x_2 non-ordonnée, et (x_1, x_2) la paire ordonnée correspondante, alors :

$$\mu_2(\{x_1, x_2\}) = 1 \iff (x_1, x_2) \equiv (x_2, x_1) .$$

Si $x \in \hat{M}_3$ alors $\nu_3(x) = 1$ si et seulement si, à un changement de notation (permutation) près, la fibre $P_3^{-1}(x) = (x_1, x_2, x_3)$ a la propriété que :

$$(x_1, x_2) \sim (x_2, x_3) \sim (x_3, x_1) . \square$$

Le principal résultat sur les labyrinthes, nécessaire pour ce travail, est le suivant :

LEMME 1.7.- : "Soit $(L) : L \xrightarrow{P} K$ un labyrinthe tel que $\mu_2(L) = \nu_3(L) = 0$.

Alors (L) est relevable."

Démonstration : Si $\hat{M}_3 = \emptyset$ le lemme est évident.

Supposons maintenant que $\hat{M}_3 \neq \emptyset$ et qu'il existe un $x \in \hat{M}_3$, $P_3^{-1}(x) = (x_1, x_2, x_3)$, avec

$$(x_1, x_2) \sim (x_2, x_3) .$$

Le fait que $\nu_3(L) = 0$, implique, donc, que les seules relations \sim qui existent sur $\mathcal{Y}(x) = P_3^{-1}(x) \times P_3^{-1}(x) - \text{diag } P_3^{-1}(x)$ sont exactement les suivantes :

$$(*) \quad \begin{cases} (x_1, x_2) \sim (x_2, x_3) \sim (x_1, x_3) \text{ et :} \\ (x_2, x_1) \sim (x_3, x_2) \sim (x_3, x_1) . \end{cases}$$

Le lecteur remarquera que toute relation supplémentaire détruirait la condition $\nu_3 = 0$.

On va modifier le labyrinthe (L) au voisinage de $(x, P_3^{-1}(x))$, pour obtenir un nouveau labyrinthe :

$$(L') \quad L' \xrightarrow{P'} K'$$

de la manière suivante : la partie \hat{M}_2' (le \hat{M}_2 de L') est obtenue à partir de \hat{M}_2 en identifiant tous les $y \in \partial\hat{\alpha}_i$, $z \in \partial\hat{\alpha}_j$; qui ont la propriété :

$$\hat{\psi}_i(y) = \hat{\psi}_j(z) = x \in \hat{M}_3 .$$

La partie \hat{M}_3' est $\hat{M}_3' = \hat{M}_3 - (x)$, et $M_3' = M_3 - P_3^{-1}(x)$.

Enfin M_2' est obtenu à partir de M_2 de la manière suivante : chaque fois que y, z sont comme ci-dessus et que $p_i^{-1}(y) = (y', y'')$, $p_j^{-1}(z) = (z', z'')$ et que, dans $P_3^{-1}(x) \times P_3^{-1}(x) - \text{diag } P_3^{-1}(x)$ on a :

$$\psi_i(y', y'') = (\psi_i y', \psi_i y'') \approx (\psi_i z', \psi_i z'') = \psi_i(z', z'') ,$$

on identifie y' à z' et y'' à z'' . (voir la fig.1.1. ci-dessous).

Je dis que les choses suivantes arrivent : I) Si (L') est relevable, (L) est relevable.

$$\text{II) } \mu_2(L') = \nu_3(L') = 0 .$$

Je laisse I) et $\nu_3(L') = 0$ au lecteur (qui remarquera que, par le passage de L à L' , la relation \sim , au niveau de L' est la même que \sim au niveau de L).

Quand au point $\mu_2(L^1) = 0$ il se voit comme suit :

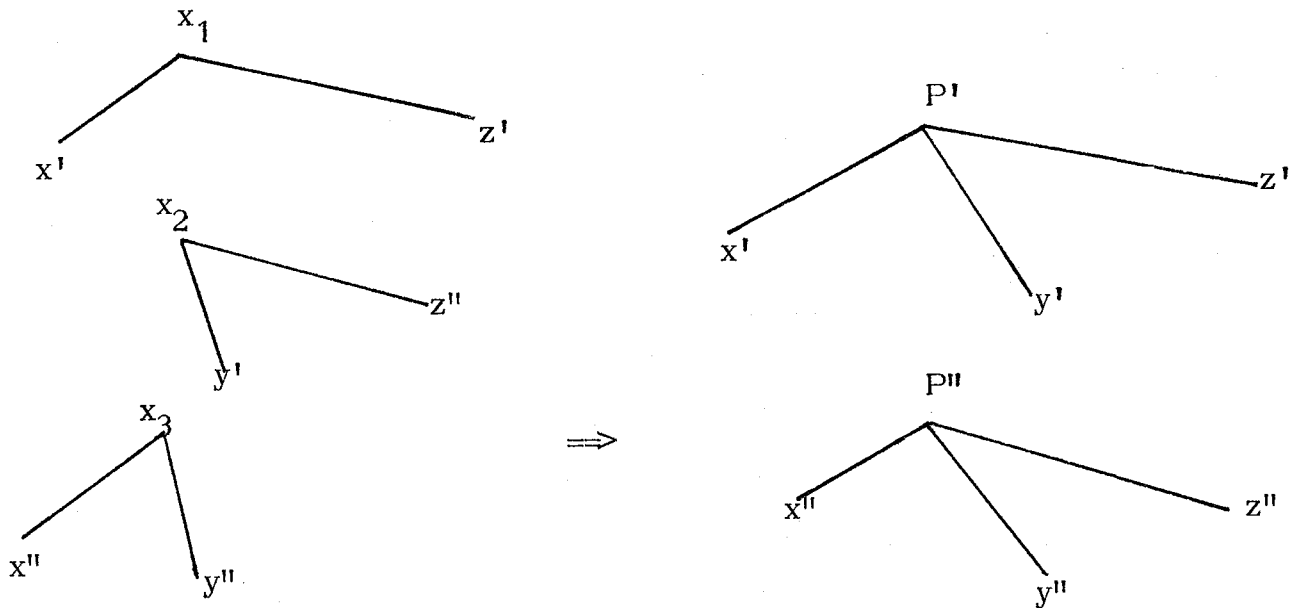


figure 1.1

Soit $\hat{\alpha}(\alpha)$ la composante de $M_2^1(\hat{M}_2^1)$ qui contient x . Pour montrer que $\mu_2(L^1) = 0$ il faut voir d'abord que le revêtement à 2 feuillets $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ est trivial. Il est sûrement trivial une fois que l'on a enlevé les points P^1, P'' (fig. 1.1). Pour qu'il soit non-trivial, il faudrait donc qu'il existe un monomorphisme fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 I \times \{0, 1\} & \xrightarrow{Z} & \alpha \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{z} & \hat{\alpha}
 \end{array}$$

tel que $z(0)=z(1)=p(P^1)=p(P'') \in \hat{\alpha}$ et que $Z(0,0) = z(1,1) = P^1, Z(0,1) = Z(1,0) = P''$.

On peut relire ceci au niveau (L) (détails laissés au lecteur) comme étant le fait d'ajouter une relation supplémentaire à $(*)$, ce qui est impossible.

Pour finir la démonstration de $\mu_2(L^1)=0$, il faudrait voir, encore que

$$\mu_2(\hat{\mathcal{F}}^1) = 0.$$

Il est commode pour cela de penser à la relation d'équivalence \equiv , d'une manière un peu différente. On considère le revêtement à 2 feuillets :

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_2 = \alpha_1 + \dots + \alpha_1 + \dots + \alpha_p & & & & & & \\
 \downarrow P_2 & \downarrow P_1 & & \downarrow P_i & & & \downarrow P \\
 \hat{M}_2 = \hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_p & & & & & &
 \end{array}$$

et l'ensemble des fibres $P_2^{-1}(x) = (x_1, x_2)$ (ensembles ordonnés, donc $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$).

On écrira $(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)$ chaque fois qu'on peut passer de (x_1, x_2) à (y_1, y_2) par un nombre fini de pas qui sont, ou bien du type 5-2, définition 5, ou bien du type :

$\psi_i(x_1, x_2)$ identique à $\psi_j(y_1, y_2)$ dans un certain $P_3^{-1}(z)$. La condition $(\mu_2(\hat{\mathcal{F}})=0)$ & $(\mu_2(\pi_0 \hat{M}_2)=0)$ veut dire, exactement, qu'il n'existe pas de chaîne :

$$(x_1, x_2) \equiv \dots \equiv (x_2, x_1) \text{ (dans } M_2 \xrightarrow{P_2} \hat{M}_2 \text{)} .$$

Maintenant, si $\mu_2(\hat{\mathcal{F}}') \neq 0$, on aurait, alors, sûrement une chaîne :

$$(P', P'') \equiv \dots \equiv (P'', P') \text{ (dans } M_2' \xrightarrow{P_2'} \hat{M}_2' \text{)} .$$

Mais, à partir de $p \equiv q \implies p \sim q$ ceci, aussi, introduit une relation supplémentaire parmi les (*). Donc $\mu_2(\hat{\mathcal{F}}') = 0$.

En appliquant suffisamment de fois l'opération précédente, on peut donc supposer, dès le début, sans perte de généralité, que dans notre labyrinthe, la condition suivante est satisfaite :

(Γ) Il n'y a pas de $x \in \hat{M}_3$ avec $P_3^{-1}(x) = (x_1, x_2, x_3)$ et $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_3)$.

Dans ces conditions, en se référant à la définition 5, la relation d'équivalence \sim est tout simplement la plus petite relation d'équivalence satisfaisant à 5-1, 5-2 (donc \sim et \equiv sont identiques). En particulier, on n'aura jamais $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$. $((x_1, x_2) \equiv (x_2, x_1))$. Supposons donc que pour un certain $x \in \hat{M}_3$, on a $(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_3)$.

On voit facilement que les seules relations qui vont exister, dans la fibre respective, seront

(**) $(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_3)$ et $(x_2, x_1) \equiv (x_3, x_1)$.

On va modifier le labyrinthe (L), au voisinage de $(x, P_3^{-1}(x))$, pour obtenir un nouveau labyrinthe

(L'') $L'' \xrightarrow{P''} K''$

de la manière suivante :

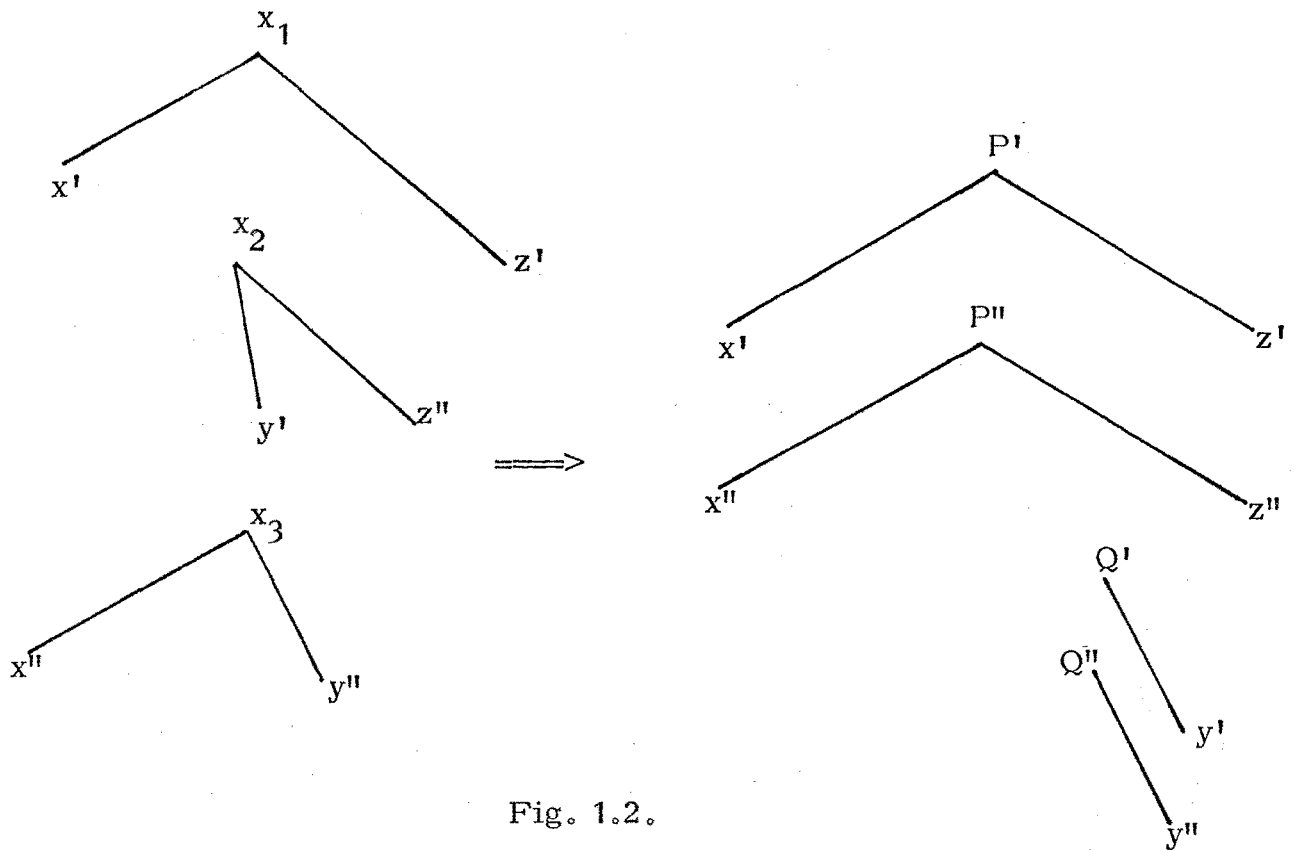


Fig. 1.2.

On pose $\hat{M}_3'' = \hat{M}_3 - (x)$, $M_3'' = M_3 - P_3^{-1}(x)$. \hat{M}_2'' est obtenu à partir de \hat{M}_2 , en identifiant tous les $y \in \partial\hat{\alpha}_i$, $z \in \partial\hat{\alpha}_j$ tels que $\hat{\psi}_i(y) = \hat{\psi}_j(z) = x$ et $\hat{\psi}_i(P_i^{-1}(y))$ (respectivement $\hat{\psi}_j(P_j^{-1}(z))$) sont l'une des paires (x_1, x_2) , (x_1, x_3) .

On construit M_2'' comme dans la figure 1.2.

On a : III) Si (L'') est relevable, (L) est relevable.

IV) $\mu_2(L'') = \nu_3(L'') = 0$.

V) La condition (Γ) est satisfaite pour le labyrinthe (L'') .

On laisse au lecteur le soin de démontrer ces assertions.

On peut donc toujours ramener au cas où le labyrinthe (L) possède la propriété (que l'on va appeler Π) qu'il n'y a pas d'autre relation $(x_i, x_j) \sim (x_\ell, x_h)$ (au niveau de chaque $\mathcal{S}(x)$), que les relations triviales, du type

$$(x_i, x_j) \sim (x_i, x_j) .$$

On va définir maintenant le NERF du labyrinthe (L) de la manière suivante :

$N(L) = \{ \text{le nerf de } (L) \}$ est un graphe obtenu de la manière suivante : on remplace chaque $\hat{\alpha}_i$ par un point : $[\hat{\alpha}_i]$, et chaque $x \in \hat{M}_3$ par un arbre $[x]$ avec un seul point de ramification, ayant exactement le même nombre d'arrêtes qu'il y a de points distincts $y \in \partial\alpha_1 + \dots + \partial\alpha_p$ tels que $\hat{\psi}_i(y) = x$. On recolle les $[x]$, $[\hat{\alpha}_i]$

de la manière évidente.

On peut faire les remarques suivantes :

R₁) K connexe implique N(L) connexe.

R₂) Si $\mu_2(L) = 0$ et N(L) est contractible, alors (L) est relevable.

Supposons maintenant que (L) satisfait aux conditions $\mu_2(L) = 0$ et π .

Supposons, aussi qu'on se donne un cycle non trivial du nerf N(L), comme dans la figure 1.3.

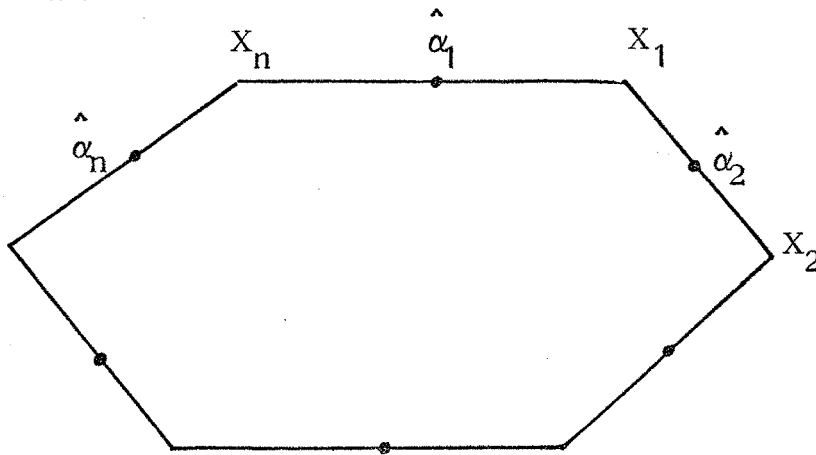


Fig. 1.3 (On lira $[X]$, $[\alpha]$, ...)

Dans cette figure $X_i \in \hat{M}_3$, et dans $\hat{\alpha}_i$ on a $y_i, z_i \in \partial \hat{\alpha}_i$ avec

$$\hat{\psi}_i(y_i) = X_{i-1}, \quad \hat{\psi}_i(z_i) = X_n \quad \text{et}$$

$$\hat{\psi}_i(z_i) = X_i.$$

Pour que la condition π puisse être vraie, il faut que, au niveau L

la figure 1.3 devienne la figure 1.4. [Dans cette figure, les trois points qui remplacent X_i sont les trois points de $P_3^{-1}(X_i)$, e;a.d.s.]

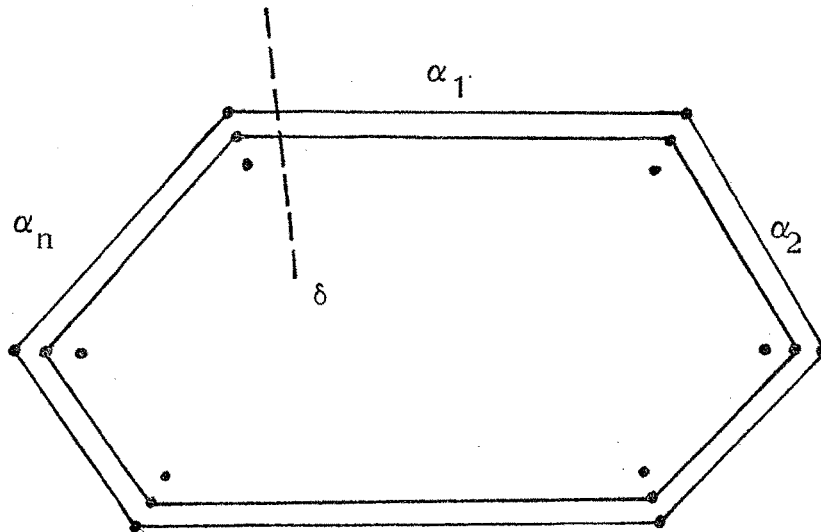


Fig. 1.4.

Maintenant, on peut couper $\alpha_1(\hat{\alpha}_1)$, par le trait δ (figure 1.4) très près de X_1 .

On obtient ainsi un nouveau labyrinthe

$$(L''') \quad L''' \xrightarrow{P'''} K''' .$$

On vérifie sans peine que (L''') relevable $\implies (L)$ relevable, que $\mu_2(L''') = 0$ et que L''' satisfait, aussi, à la condition Π . En plus, $N(L''')$ possède moins de cycles que $N(L)$.

On peut donc se ramener au cas où $N(L)$ est un arbre, e.a.d.s. Le lemme 1.7 est démontré.

1.4.- FIN DE LA DEMONSTRATION DU LEMME 1.6.-

On commence par le

LEMME 1.8. - "Si $\mu_2(f) = \mu_3(f) = 0$ le fibré (revêtement à trois feuillets) :

$$M_3(f) \xrightarrow{P_3} \hat{M}_3(f)$$

est trivialisable".

Démonstration : Soit $x \in \hat{M}_3(f)$, $P_3^{-1}(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\varphi : I \rightarrow \hat{M}_3(f)$ une application continue telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = x$.

D'après le théorème du relèvement des homotopies, il existe un monomorphisme fibré unique

$$\begin{array}{ccc} I \times \{x_1, x_2, x_3\} & \xrightarrow{\Phi} & M_3(f) \\ \downarrow & & \downarrow P_3 \\ I & \xrightarrow{\varphi} & \hat{M}_3(f) \end{array}$$

tel que $\Phi(0 \times x_i) = x_i$. Dire que P_3 est trivialisable, équivaut à dire que, chaque fois qu'on a la situation ci-dessus,

$$\{x_1, x_2, x_3\} \xrightarrow{\Phi(1 \times \dots)} \{x_1, x_2, x_3\}$$

est la permutation triviale. Mais, si ce n'est pas le cas, elle est ou bien une permutation circulaire (en contradiction avec $\mu_3 = 0$), ou bien elle est non-triviale, à point fixe, ce qui contredit $\mu_2 = 0$. \square

Puisque $\nu_3(f) = 0$ implique $\mu_3(f) = 0$, on peut donc supposer les différentes composantes connexes de $\hat{M}_3(f)$ munies chacune, séparément, d'un P_3 trivialisé.

On va associer à cette situation un labyrinthe (L) de la manière suivante :

On choisit un point x dans chaque composante connexe de $\hat{M}_3(f)$, et, pour chaque x , on considère $P_3^{-1}(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Dans le labyrinthe que l'on va construire :

$$\hat{M}_3 = \{x\}, \quad M_3 = \{x_i\}.$$

Ensuite, on choisit un point y dans chaque composante connexe de \hat{M}_2 qui touche aux points triples. Pour chaque y , soit $P_2^{-1}(y) = \{y_1, y_2\}$. On dira que " y touche à x ", chaque fois qu'il existe (x_i, x_j) au-dessus de x , dans la même composante connexe de M_2 que (y_1, y_2) . (on ne va pas distinguer entre les manières de toucher données par : $(x_i, x_j) \equiv (y_1, y_2)$ ou $(x_j, x_i) \equiv (y_2, y_1)$).

On va joindre y avec chaque x qu'il touche (et autant de fois qu'il le touche de

manière différente), par un segment. Ceci nous donne un arbre avec point de ramification unique $\hat{\alpha}(y) \ni y$. Les $\hat{\psi}$ sont évidents. $\alpha(y) \xrightarrow{p(y)} \hat{\alpha}(y)$ est forcément le revêtement trivial, et les ψ sont construits canoniquement à partir des relations

$$(x_i, x_j) \equiv (y_1, y_2) ,$$

considérées ci-dessus.

On obtient ainsi un labyrinthe

$$(L) \quad L \xrightarrow{P} K .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés suivantes :

1) Si $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$, alors : $\mu_2(L) = \nu_3(L) = 0$.

2) Si $\mu_2(f) = 0$ et le labyrinthe (L) est relevable, alors au niveau de f on peut construire un système de deux trivialisations compatibles $\{ \langle \frac{2}{x} \rangle , \langle \frac{3}{y} \rangle \}$.

A partir de ces deux remarques et du lemme 1.7., le lemme 1.6. (donc notre théorème 1), se trouve démontré.

1.5.- DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2 :-

Il suffit maintenant de prouver le

LEMME 1.9: - "Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une immersion générique, avec $\pi_1 X = 0$. On peut relever f en un plongement $X \rightarrow Y \times R$ si et seulement si on peut relever f en un plongement $X \rightarrow Y \times S_1$ ".

Démonstration : En considérant $R \subset S_1 = R \cup \infty$ on a un plongement équivariant $Y \times R \subset Y \times S_1$. Donc, si f se relève dans $Y \times R$ il se relève automatiquement dans $Y \times S_1$.

Supposons maintenant qu'on se donne un relèvement (plongement) :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \times S_1 \\ & \nearrow F & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} .$$

On peut considérer le revêtement infini cyclique π :

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \times R \\
 & \nearrow \Phi & \downarrow \pi \\
 X & \xrightarrow{F} & Y \times S_1
 \end{array}$$

X , étant simplement connexe, F se relève dans $Y \times R$ par une flèche Φ comme ci-dessus. Puisque F était un plongement, le relèvement est un plongement, aussi. Ceci finit la démonstration.

1.6 - REMARQUES FINALES .-

Il est clair que l'on peut construire des labyrinthes avec μ_2 et (ou) ν_3 différents de 0. Ceci peut se faire même si on impose que tous les revêtements $\alpha_i \rightarrow \hat{\alpha}_i$ soient triviaux.

On peut construire, aussi, des homotopies régulières génériques

$$\begin{array}{ccc}
 M \times I & \xrightarrow{f} & N \times I \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & I &
 \end{array}$$

(avec $\dim M = 2$, $\dim N = 3$, M fermée, M et N orientables) avec $\mu_2(f)$ et (ou) $\nu_3(f)$ différents de 0.

On peut construire de tels exemples parce que pratiquement tous les labyrinthes abstraits peuvent apparaître dans ce problème géométrique particulier. On laisse au lecteur le soin de préciser cette affirmation. [En un certain sens, le problème de relever les homotopies régulières à fibré normal trivial pour $(\dim 2) \rightarrow (\dim 3)$, est aussi général pour celui traité dans le théorème 1. Ce qui est une autre justification du titre de ce travail] .

Enfin, on peut réaliser des contre-exemples (comme ci-dessus) avec $M = S_2$.

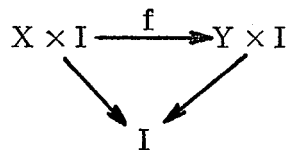
CHAPITRE II.- DEMONSTRATION DU THEOREME 2 ET DE LA PROPOSITION 1.-

2.1. - HOMOTOPIES REGULIERES GENERIQUES :-

Je rappelle la définition :

DEFINITION 2.O. - " Soient X et Y deux variétés, X étant fermée et sans bord.

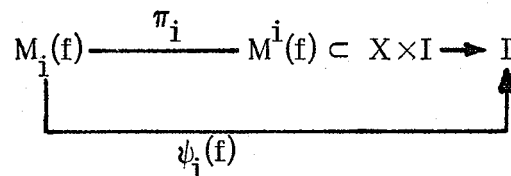
Une homotopie régulière :



est dite générique si :

1°) $f \in \text{Imm}(X \times I, Y \times I)$ est une immersion générique au-bord.

2°) La fonction C^∞ :



ne possède que des points critiques non-dégénérés, tous contenus dans :

$$M_i(f) - \partial M_i(f) - \pi_i^{-1}(M^{i+1}(f)) .$$

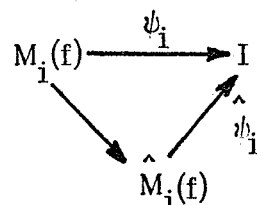
3°) Si $i \neq j$, alors :

$$\{ \text{l'ensemble des valeurs critiques de } \psi_i(f) \} \cap \{ \text{l'ensemble des valeurs critiques de } \psi_j(f) \} = \emptyset .$$

4°) Si $p, q \in M_i(f)$, p et q sont critiques, et $\psi_i(f)(p) = \psi_i(f)(q)$, alors :

$$P_i(f)(p) = P_i(f)(q) \in \hat{M}_i(f)$$

(donc $f\pi_i(p) = f\pi_i(q) \in Y \times I$) . Ceci revient à dire que si l'on considère le diagramme commutatif



les fonctions $\hat{\psi}_i$ sont génériques (\leftrightarrow à points critiques non-dégénérés et à valeurs critiques distinctes) .

Un $t_0 \in I$ qui est valeur critique de l'une des fonctions $\psi_i(f)$ sera appelé niveau critique (ou singulier) de l'homotopie régulière f . Les autres niveaux $t \in I$ (en particulier $0, 1$) seront appelés niveaux réguliers. \square

La théorie de la transversalité montre que si $f_0, f_1 \in \text{Imm}(X, Y)$ sont génériques et régulièrement homotopes, on peut les joindre par une homotopie régulière générique, (voir [5] pour plus de détails).

2.2.- DEMONSTRATION DU THEOREME 2 :-

Le théorème 2 est une conséquence immédiate des lemmes 2.1. et 2.2. ci-dessous.

LEMME 2.1. - "Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse de dimension 3, satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.

Alors il existe un plongement C^∞ :

$$S_3 \xrightarrow{\Phi} \Sigma_3 \times \mathbb{R}$$

qui est une équivalence d'homotopie" .

Démonstration : Soit :

$$\Delta_3 = \Sigma_3 - \text{int } D_3$$

où $D_3 \subset \Sigma_3$ est un 3-disque plongé différemment. La décomposition évidente :

$$\Sigma_3 = \Delta_3 \cup D_3 ,$$

nous donne une présentation :

$$\Sigma_3 \times D_2 = (\Delta_3 \times D_2) + (\text{une anse d'indice 3, } \phi_3) .$$

Ici ϕ_3 est un plongement C^∞ :

$$S_2 \times D_2' \xrightarrow{\varphi_3} \partial(\Delta_3 \times D_2) = \Delta_3 \times S_1 + \partial\Delta_3 \times D_2$$

fabriqué canoniquement à partir de $S_2 \equiv \partial\Delta_3$.

Soit $*$ = le centre de D_2' . En combinant la théorie de la classification des immersions ([6], [1], [4], [3]) et la remarque à la fin du paragraphe précédent avec notre théorème 1 (ou son corollaire 2) , on déduit que la sous-variété

$\varphi_3(S_2 \times (*)) \subset \partial(\Delta_3 \times D_2)$, est non-nouée , c'est à dire que $\varphi_3(S_2 \times (*)) \subset \partial(\Delta_3 \times D_2)$ est le bord d'un disque plongé $D_3 \subset \partial(\Delta_3 \times D_2)$ (d'une manière lisse).

Comme d'autre part $\pi_2(SO(2)) = 0$, on déduit que l'anse φ_3 est triviale , c'est à dire que l'on a un difféomorphisme :

$$\Sigma_3 \times D_2 = (\Delta_3 \times D_2) \# (S_3 \times D_2) .$$

Il existe donc un plongement C^∞ :

$$S_3 \xrightarrow{\varphi} \Sigma_3 \times S_1 = \partial(\Sigma_3 \times D_2)$$

tel que φ induise un isomorphisme au niveau de $\pi_3(S_3) \rightarrow \pi_3(\Sigma_3 \times S_1) = \pi_3(\Sigma_3 \times D_2) = \pi_3(\Sigma_3)$. Le Φ cherché est un relèvement de φ dans le revêtement universel de $\Sigma_3 \times S_1$

LEMME 2.2. - "Soient V_0, V' deux variétés fermées, connexes, lisses, de dimension n
et

$$V_0 \xrightarrow{\Phi} V' \times \mathbb{R}$$

un plongement C^∞ lisse qui soit une équivalence d'homotopie.

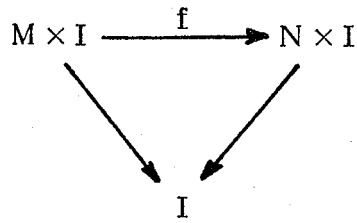
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $V_1 = V' \times t$ ne rencontre pas ΦV_0 , et W la sous-variété compacte (de dimension n+1) de $V' \times \mathbb{R}$, de bord $V_1 \cup \Phi V_0$.

W est un h-cobordisme."

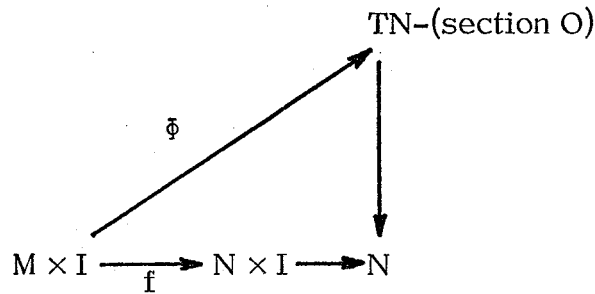
Ceci est une conséquence de manipulations élémentaires de topologie algébrique.

2.3. "COURBES LENTES" sur $M_2(f)$.-

Soient M, N de dimensions 2 et 3 et



une homotopie régulière générique telle que $f|_M$ possède un fibré normal trivial. On va choisir un champ transverse à f c'est à dire une application C^∞ , ϕ :



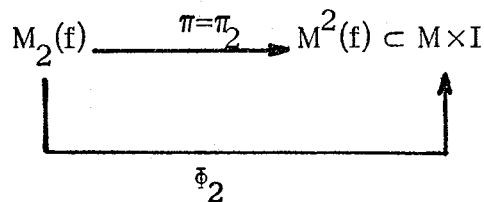
telle que, pour $(x,t) \in M \times I$, $\phi(x,t)$ soit un vecteur (non-nul) de TN , transverse au plan $Tf_t(T_x M) \subset T_{f_t(x)} N$.

On va choisir une fois pour toutes des métriques riemanniennes pour M et I . Ceci donnera des métriques induites sur $M \times I$, $(M \times I)^2$, $M_2(f) \subset (M \times I)^2$. Soit

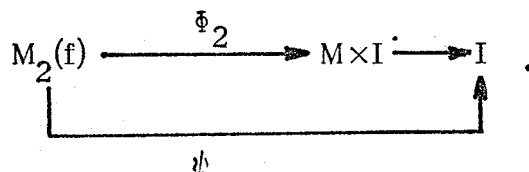
$$(M \times I)^2 \xrightarrow{J} (M \times I)^2$$

l'involution canonique. J est une isométrie, ce qui induit une métrique sur $\hat{M}_2(f) = M_2(f)/S(2) = M_2(f)/J$; (l'unique automorphisme non-trivial du revêtement $M_2(f) \rightarrow \hat{M}_2(f)$ sera donc une isométrie).

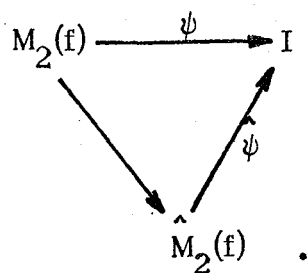
On va désigner par ϕ_2 l'immersion (générique) :



et par ψ la fonction C^∞ :



ψ est J -invariante, ce qui nous permet de définir une fonction $\hat{\psi}$:



DEFINITION 2.1. : Soit $Z = I, R$ ou S_1 . Une courbe C^∞ :

$$\gamma : Z \rightarrow M_2(f)$$

sera dite lente , si les conditions suivantes sont satisfaites :

- a) γ est une immersion ($\iff \phi_2 \circ \gamma : Z \rightarrow M \times I$ est une immersion).
- b) On commence par introduire des notations ; pour $x \in Z$, on considère :

$$\phi_2 \circ \gamma(x) = (y, t) \in M \times I ,$$

$$T_{(y,t)}(M \times I) = T_y M \oplus T_t I \text{ (décomposition orthogonale),}$$

et $\tau \in T_x Z$ un générateur. On demande que le vecteur

$$T_x(\phi_2 \circ \gamma)(\tau) \in T_{(y,t)}(M \times I)$$

ne soit jamais dans $T_t I$ (\iff le plan $N_x \subset T_{(y,t)}(M \times I)$, orthogonal à $T_x(\phi_2 \circ \gamma)(\tau)$, coupe $T_y M \cong T_y M \times t$ transversalement , suivant une droite, qu'on désignera par δ_x). \square

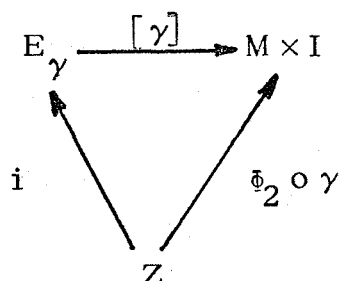
LEMME 2.3. : " Soit :

$$\gamma : Z \rightarrow M_2(f)$$

une courbe lente. Il existe un fibré C^∞ de fibre $[-1, +1]$ (line-bundle), univoquement déterminé par γ :

$$Z \xrightarrow{i} E_\gamma \xrightarrow{p} Z$$

(dont la fibre au-dessus de $x \in Z$ sera désignée par $E_{\gamma,x}$) , et un diagramme commutatif



tel que : 1) $[\gamma] \in \text{Imm}(E_\gamma, M \times I)$

2) Si l'on considère la décomposition $T_{i(x)} E_\gamma = T_x Z \oplus T_{i(x)} E_{\gamma, x}$,

on a :

$$T[\gamma](T_{i(x)} E_{\gamma, x}) = \delta_x \subset T_{(y,t)}(M \times I) . "$$

Ceci est immédiat. On va toujours penser à $E_\gamma([\gamma]E_\gamma)$ comme étant très mince.

DEFINITION 2.2. : Soit V une surface compacte et connexe, munie d'une métrique riemannienne et d'une fonction à points critiques non-dégénérés :

$$\psi : V \rightarrow I$$

(telle que $\psi^{-1}\{0,1\} = \partial V$, et $\partial V \cap \Sigma(\psi) = \emptyset$, où $\Sigma(\psi)$ désigne l'ensemble des points critiques de ψ .)

On suppose I muni, aussi, d'une métrique riemannienne. Pour $z \in V - \Sigma(\psi)$, et $\theta \in T_z V$, on considère les "composantes verticales et horizontales de θ " :

$$v(\theta) = \{\text{la projection orthogonale de } \theta \text{ sur } T\psi^{-1}(z)\} \in T_z V ,$$

et
$$h(\theta) = T_z \psi(\theta) \in T_{\psi(z)} I .$$

Si $\epsilon > 0$, une courbe $C^\infty : \gamma : X \rightarrow V - \Sigma(\psi)$ sera dite ϵ -lente si :

- 1) γ est une immersion.
- 2) Si τ est un générateur de $T_x X$, alors :

$$\|h(T_x \gamma(\tau))\| < \epsilon \|v(T_x \gamma(\tau))\| . \square$$

LEMME 2.4. - " Soient (V, ψ) comme ci-dessus, et $\epsilon > 0$ quelconque. Si $p, q \in V - \Sigma(\psi)$, il existe un arc ϵ -lent

$$I \xrightarrow{\gamma} V$$

qui joint p à q ."

Pour la démonstration il suffit "d'enrouler" $\gamma(I)$ sur V , sans toucher à $\Sigma(\psi)$, "très lentement" (c'est à dire presque parallèlement aux niveaux de ψ), comme

Si ϵ est assez petit, $\bar{\gamma}$ est une immersion".

LEMME 2.6. - " a) $T I \subset T(M \times I)$ est toujours transverse à $T[\gamma]E_\gamma \subset T(M \times I)$.

Donc

$$[\gamma]: E_\gamma \rightarrow M \times I$$

possède un fibré normal trivial.

b) Si ϵ est petit,

$$\bar{\gamma}: E_\gamma \rightarrow N$$

possède un fibré normal trivial".

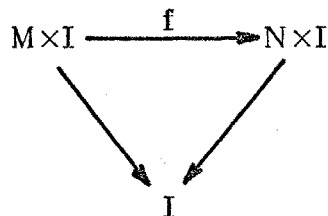
Démonstration : a) résulte tout de suite de la remarque suivante : si d', d'' sont deux droites distinctes de \mathbb{R}^3 , passant par l'origine et D', D'' leurs plans orthogonaux (à l'origine), alors les trois droites $d', d'', D' \cap D''$ ne sont pas dans un même plan.

Pour le point b) il suffit de remarquer que si $x \in i(\gamma) \subset E_\gamma$ et si ϵ est petit, les plans

$$T_x \bar{\gamma}(T_x E_\gamma), T_t (T_y M) \subset T_{\bar{\gamma}(x)} N$$

(où $[\gamma](x) = (y, t) \in M \times I$), sont très proches l'un de l'autre.

LEMME 2.7. - "Soit



une homotopie régulière générique, avec M et N orientables,
 $\dim M = \dim N - 1 = 2$, et $V \subset M_2(f)$, $V' \subset \hat{M}_2(f)$ des composantes
connexes telles que $P_2 V = V'$.

Supposons que :

i) V est invariante pour l'involution canonique $J : (M \times I)^2 \rightarrow (M \times I)^2$.

ii) V est orientable.

Alors V' est non-orientable et

$$V \xrightarrow{P_2|V} V'$$

s'identifie au revêtement à deux feuillets qui oriente V' . En particulier

$$\mu_2(f)[V'] = 1 \text{ " } .$$

Démonstration : On part du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{J} & V \\ \psi \searrow & & \swarrow \psi \\ & I & \end{array}$$

On considère $p, q \in V - \Sigma(\psi)$ tels que $q = J(p)$. On peut unir p et q par un arc ϵ -lent :

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V - \Sigma(\psi) ,$$

tel que au voisinage de $0(1)$; l'image de γ soit contenue dans le ψ -niveau de p (de q).

Soient

$$\tau_0 = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} \in T_p V$$

$$\tau_1 = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=1} \in T_q V .$$

Supposons que J préserve l'orientation (de V) . Alors, du fait que, J et ψ sont compatibles et du fait que l'arc γ est ϵ -lent, on déduit qu'il existe un $\lambda > 0$, tel que $TJ(\tau_0) = \lambda \tau_1$. [Ce fait résulte des remarques suivantes : du fait que V est orientable il résulte une manière cohérente d'orienter les différents niveaux de ψ , de telle façon que cette orientation, plus la direction "horizontale" donne la bonne orientation de V . Ensuite on remarque que si J préserve l'orientation, vu que ψ est une fonction J -invariante, J est compatible, aussi, avec l'orientation des niveaux de ψ , qu'on vient d'introduire . Enfin, une courbe lente est, plus ou moins, une collection de niveaux ou de morceaux de niveaux ; on laisse au lecteur le soin des détails] . On peut donc modifier γ (sans changer ses extrémités, par un petit réparamétrage), de telle façon que $TJ(\tau_0) = \tau_1$.

Donc, la courbe fermée

$$\gamma_1 = \gamma \cup J\gamma \subset V$$

est lisse.

Donc, si on descend γ_1 sur V' , ou si on envoie γ_1 dans N , on peut l'interpréter chaque fois comme une application lisse de source S_1 . E_{γ_1} s'interprète de son côté comme l'espace total d'un "line-bundle" sur S_1 .

Pour $\bar{\gamma}_1 : E_{\gamma_1} \rightarrow N$

on a alors les propriétés suivantes :

- o) E_{γ_1} est l'espace total d'un fibré lisse de fibre R et de base S_1 .
- 1) E_{γ_1} est orientable, N est orientable.
- 2) $\bar{\gamma}_1$ est une immersion générique.
- 3) $M^3(\bar{\gamma}_1) = \emptyset$, $M^2(\bar{\gamma}_1) =$ un cercle unique (la section nulle du fibré).

Il est facile à voir que ces propriétés sont contradictoires. Il s'ensuit que :

$$J : V \rightarrow V$$

renverse l'orientation, d'où notre lemme.

COROLLAIRE 2.7.1. - "Si M, N sont orientables, $\dim M = \dim N - 1 = 2$, et f est une homotopie régulière générique $M \rightarrow N$, alors :

$$\hat{M}_2(f) \text{ orientable} \Rightarrow \mu_2(f) = 0 \text{ " .}$$

En fait, on peut mener cette discussion jusqu'au bout :

LEMME 2.8 - "Si X et Y sont des variétés orientables, et $\phi : X \rightarrow Y$ est une immersion générique, alors $M_2(\phi)$ est orientable."

Démonstration : On a .

$$X \times X - \text{Diag } X \xrightarrow{\phi \times \phi} Y \times Y \leftarrow \text{Diag } Y ,$$

et ϕ générique $\Rightarrow \phi \times \phi$ est transversale sur $\text{Diag } Y$.

Donc le fibré normal de

$$M_2(\varphi) = (\varphi \times \varphi)^{-1} \text{Diag } Y \hookrightarrow X \times X - \text{Diag } X$$

est orientable, e.a.d.s.

En résumé, on a donc la

PROPOSITION 1 : - "Dans les conditions du lemme 2.7. (M,N orientables, dim M=2 e.a.d.s.)

soit $\alpha \in \pi_0(\hat{M}_2(f))$. On a :

$$\mu_2(\alpha) = 1 \iff \alpha \text{ est non-orientable, et si } \mu_2(\alpha) = 1 ,$$

alors

$$P_2^{-1}(\alpha) \xrightarrow{P_2} \alpha$$

s'identifie au revêtement à deux feuillets qui oriente α " !

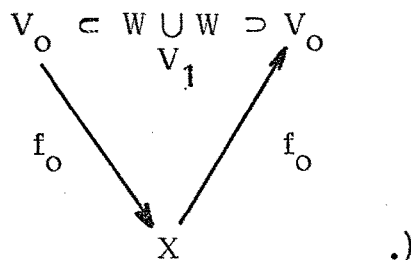
2.5. - QUELQUES PROBLEMES OUVERTS :-

A) Existe-t-il une interprétation cohomologique des invariants μ_i, ν_i ? [7]

pourrait avoir des relations avec ce probleme.

B) Soient $f_0, f_1 \in \text{Imm}(X, Y)$ et $F \in \text{Imm}(X \times I, Y \times I)$, une homotopie régulière générique, reliant f_0 et f_1 , telle que $\mu_2(F) = 0$. Existe-t-il une autre homotopie régulière générique, G , reliant f_0 et f_1 , telle que $\mu_2(G) = \nu_3(G) = 0$?

C) Soit (W, V_0, V_1) un cobordisme, tel qu'il existe une variété X , difféomorphe à V_0, V_1 , deux difféomorphismes $X \xrightarrow{f_i} V_i$ ($i=0,1$) et une homotopie régulière $f_t : X \rightarrow W$ reliant f_0 et f_1 . Considérons le double de $W : 2W = W \cup_{V_1} W$ et l'homotopie régulière $F \in \text{Imm}(X \times I, 2W \times I)$, qui double f_t (et relie les deux flèches :



Existe-t-il une homotopie régulière, G , homotope à F rel le bord, telle que

$$\mu_2(G) = \nu_3(G) = 0 \quad ? \ .$$

D) Si Σ_3 est h-cobordant à S_3 , peut-on trouver un f , comme dans le théorème 2, avec $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$? .

Et enfin, bien entendu :

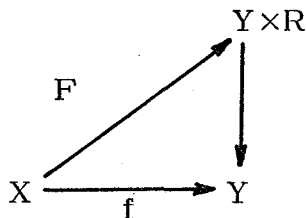
E) Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse. Peut-on trouver un f , comme dans le théorème 2 avec $\mu_2(f) = \nu_3(f) = 0$? .

APPENDICE A : REVÊTEMENTS

Dans ce travail on s'est occupé constamment du cas des immersions (génériques) $f : X \rightarrow Y$, avec $\dim Y > \dim X$. Mais la théorie précédente s'étend tout de suite pour le cas où $\dim X = \dim Y$, $\partial Y = \emptyset$, X est compacte à bord $\neq \emptyset$ et $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ est générique. [Dans cette situation on a une vraie filtration des points multiples de f .]

A part cela, on a le

THEOREME : " Soient X, Y deux espaces connexes et $f : X \rightarrow Y$ un revêtement. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un plongement propre sur chaque fibre, $F : X \rightarrow Y \times \mathbb{R}$ tel que



soit commutatif, est que le revêtement f soit infini cyclique".

$f : X \rightarrow Y$ est dit infini cyclique si :

- a) $\pi_1(X)$ est un sous groupe invariant de $\pi_1(Y)$
- b) $\pi_1(Y)/\pi_1(X) = Z$ (= le groupe cyclique libre).

En d'autres termes un revêtement est infini cyclique s'il est galoisien et son groupe d'automorphismes (Deckbewegungen) est Z] .

Démonstration : - Soit E la droite affine sur laquelle le groupe Z agit par translations et $E_0 \subset E$ un réseau (lattice) fabriqué à partir d'un domaine fondamental. Z agit transitivement sur E_0 . (E_0 est un " Z affine "). Un fibré Z -principal sur Y est (par définition) un fibré localement trivial de base Y , de fibre E_0 et de groupe structural Z .

On a une bijection canonique entre les

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Z-fibrés principaux de base } \\ \text{Y et d'espace total connexe} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{revêtements infinis cycliques} \\ \text{de Y} \end{array} \right\} .$$

Soit donc $X \xrightarrow{F} Y$ un fibré Z-principal obtenu par recollement de cartes

locales : $Y = \bigcup_i V_i$,

$$V_i \cap V_j \xrightarrow{g_{ij}} Z$$

(avec $g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$, $g_{ji}g_{ik} = g_{jk}$, ...).

On peut construire un fibré de base Y et de fibre $E \approx R$ avec les mêmes cartes.

X se plonge d'une manière équivariante (et proprement sur chaque fibre) dans l'espace total de ce nouveau fibré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & T \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array} .$$

En considérant Z comme sous-groupe de $R = \{ \text{le groupe } \underline{\text{contractile}} \text{ des translations réelles} \}$ on voit que T est R-trivial, donc X se plonge d'une manière équivariante et proprement sur chaque fibre dans $Y \times R$.

Partons maintenant d'un fibré (à fibre discrète) $X \xrightarrow{f} Y$, tel que X se plonge d'une manière équivariante dans $Y \times R$. On supposera X connexe ; donc $X \xrightarrow{f} Y$ est un revêtement non-trivial. Comme il est facile de voir qu'un revêtement non-trivial à nombre fini de feuilletés ne se plonge pas (d'une manière équivariante) dans $Y \times R$, on peut supposer la fibre infinie. On va supposer le plongement considéré propre sur chaque fibre. On va montrer que $X \xrightarrow{f} Y$ possède une structure de fibré Z principal.

Le plongement $X \xrightarrow{f} Y \times R$ nous permet de mettre un ordre linéaire (isomorphe à l'ordre de Z) sur chaque fibre de X . (On utilise ici la propriété).

Donc chaque fibre est modélisée sur E_0 , et on peut parler de l'action (naturelle) de Z sur les fibres, par translation .

Considérons maintenant un recouvrement ouvert $Y = \bigcup_i V_i$, chaque V_i étant connexe (par arcs) et simplement connexes. On choisit $x_i \in V_i$, un point base $y \in Y$ et des chemins

continus $\Gamma_i \subset Y$ reliant y à x_i .

On veut montrer que $X \xrightarrow{f} Y$ s'obtient à partir de cartes locales $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow Z$ qu'il faut construire. Pour $z \in V_i \cap V_j$ on unit z à $x_i(x_j)$ dans $V_i(V_j)$ par un arc $\gamma_i(\gamma_j)$. En envoyant S_1 dans le chemin $\Gamma_i + \gamma_i^{-1} + \gamma_j + \Gamma_j^{-1}$ de Y , on trouve, par image réciproque de la situation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & & Y \end{array}$$

un revêtement (non-nécessairement connexe) de S_1 , qui se plonge, d'une manière équivariante (et proprement sur chaque fibre) dans $S_1 \times R$. Il est facile de voir qu'un tel revêtement s'obtient à partir d'un $\lambda \in Z$ bien défini, par la translation

$$a \longrightarrow a + \lambda$$

de E_0 . On définit $g_{ij}(z) = \lambda$, e.a.d.s.

On laisse au lecteur le soin de généraliser le théorème ci-dessus pour des line-bundles, de passer du groupe Z au groupe diédral infini, e.a.d.s.

APPENDICE B.- LE "LEMME DE MORSE" POUR LES HOMOTOPIES
REGULIERES GENERIQUES EN CODIMENSION 1.-

Les singularités génériques des homotopies régulières en codimension 1, sont décrites par le lemme suivant :

LEMME : - Soient X, Y , comme dans la définition 2.0 (chapitre II), $\dim X = \dim Y - 1 = n$, et $f: X \times I \rightarrow Y \times I$ une homotopie régulière générique. Soit $\Sigma \subset (0, 1)$ l'ensemble (fini) des niveaux singuliers de f , et $f_t \in \text{Imm}(X, Y)$ la restriction de f au niveau de $t \in I$.

1°) Pour chaque $t_0 \in I - \Sigma$,

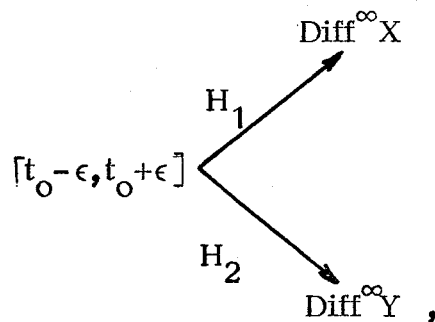
$$f_{t_0} \in \text{Imm}(X, Y)$$

est une immersion générique (tandis que pour $t \in \Sigma$, f_t ne sera jamais générique).

En plus pour

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset I - \Sigma$$

il existe des isotopies à la source et au but :



telles que $H_1(t_0) = \text{id } X$, $H_2(t_0) = \text{id } Y$, H_1 et $H_2 \in C^\infty$,

et :

$$f_t = H_2(t) f_{t_0} H_1(t)$$

(pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$).

2°) Si $t_0 \in \Sigma$ est un niveau critique (ou singulier) de f , il existe des entiers non négatifs : $p = p(t_0)$ (la "multiplicité" de t_0), $\lambda = \lambda(t_0)$ (l'indice de t_0), et un point $y \in Y$ tels que l'on ait :

2-a) $2 \leq p \leq n+2$, $0 \leq \lambda \leq n-p+2$.

2-b)
$$y \in f_{t_0} (M^p(f_{t_0}) - M^{p+1}(f_{t_0})) = f_{t_0} M^p(f_{t_0}) - f_{t_0} M^{p+1}(f_{t_0}) .$$

On va introduire la notation :

$$f_{t_0}^{-1}(y) = \{x^1, \dots, x^p\} , x^i \in X .$$

2-c) La singularité de f au niveau t₀ est concentrée au voisinage du point y .

Ceci veut dire, exactement la chose suivante :

Il existe un ε > 0 , tel que [t₀ - ε , t₀ + ε] ∩ Σ = t₀ , un voisinage de coordonnées

W de y dans Y , des voisinages de coordonnées 2-à-2 disjoints xⁱ ∈ V_i ⊂ X

et une isotopie à la source :

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \xrightarrow{h} \text{Diff } X , h(t_0) = \text{id } X ,$$

tels que, pour t ∈ [t₀ - ε , t₀ + ε]

$$(f_t \circ h(t))^{-1} W = V_1 + \dots + V_p .$$

f_t ∘ h(t) (pour t ∈ [t₀ - ε , t₀ + ε]) , si on le regarde à l'extérieur

des V_i est une homotopie régulière sans niveaux critiques.

2-d) On va introduire des coordonnées X₁, ..., X_{n+1} pour W et des coordonnées

x₁ⁱ, ..., x_nⁱ pour V_i . Après des perturbations par des isotopies à la source et au

but,

$$f_t \circ h(t) | V_1 + \dots + V_p (t \in [t_0 - \epsilon , t_0 + \epsilon])$$

peut être décrite explicitement par les formules suivantes :

Pour i ≤ p-1 :

$$\begin{cases} X_j = x_j^i & \text{si } j < i \\ X_i = 0 \\ X_k = x_{k-1}^i & \text{si } k > i . \end{cases}$$

Pour i=p :

$$\begin{cases} X_j = x_j^p & \text{si } j < p-1 \\ X_{p-1} = (t-t_0) - x_1^p - \dots - x_{p-2}^p - (x_{p-1}^p)^2 - \dots \\ \dots - (x_{p-1+\lambda}^p)^2 + (x_{p+\lambda}^p)^2 + \dots + (x_n^p)^2 \\ X_k = x_{k-1}^p & \text{si } k \geq p . \end{cases} "$$

La démonstration de ce lemme ne sera pas donnée ici .

Une démonstration peut être trouvée dans les pages 28-60 de [3]. Dans un travail ultérieur on va donner une nouvelle démonstration, mise au goût du jour. Ce lemme qui donne la forme canonique des singularités pour les homotopies régulières en codimension 1, est aussi utilisé dans notre mémoire [5].

Dans un travail ultérieur on se propose de donner, aussi, la démonstration du résultat suivant (qui n'a pas de relation directe avec le présent mémoire) :

" Soient X, Y deux variétés C^∞ , de dimension n telles que $\partial Y = \emptyset$, et X est compacte à bord $\partial X \neq \emptyset$.

On se donne une immersion générique

$$F_0 \in \text{Imm}(X, Y),$$

et une homotopie régulière générique

$$\begin{array}{ccc} \partial X \times I & \xrightarrow{f} & Y \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

telle que :

- a) $f_0 = F_0 | \partial X$
- b) f n'admet aucune singularité du type $(p=2, \lambda=2)$.

Alors il existe une homotopie régulière :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & Y \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

qui commence avec le F_0 donné au début, et telle que $F | \partial X \equiv f$.

Remarquons que si l'on spécialise le théorème 3 au cas $\dim X = 2$, $\dim Y = 3$, on trouve exactement les six modèles locaux suivants :

$$(p=2, \lambda=0) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=(t-t_0) + x_2^2 + y_2^2, Y=x_2, Z=y_2 \end{cases}$$

$$(p=2, \lambda=1) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=(t-t_0) - x_2^2 + y_2^2, Y=x_2, Z=y_2 \end{cases}$$

$$(p=2, \lambda=2) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=(t-t_0) - x_2^2 - y_2^2, Y=x_2, Z=y_2 \end{cases}$$

$$(p=3, \lambda=0) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=x_2, Y=0, Z=y_2 \\ X=x_3, Y=(t-t_0) - x_3^2 + y_3^2, Z=y_3 \end{cases}$$

$$(p=3, \lambda=1) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=x_2, Y=0, Z=y_2 \\ X=x_3, Y=(t-t_0) - x_3^2 - y_3^2, Z=y_3 \end{cases}$$

$$(p=4, \lambda=0) \begin{cases} X=0, Y=x_1, Z=y_1 \\ X=x_2, Y=0, Z=y_2 \\ X=x_3, Y=y_3, Z=0 \\ X=x_4, Y=y_4, Z=(t-t_0) - x_4^2 - y_4^2 \end{cases}$$

Remarquons que si le chemin (homotopie régulière) f a une singularité unique, du type (p, λ) , comme ci-dessus, le chemin inverse aura une singularité, unique, (q, μ) , et on écrira, symboliquement $(q, \mu) = (p, \lambda)^{-1}$. (Donc $((p, \lambda)^{-1})^{-1} = (p, \lambda)$).

On vérifie facilement que :

$$(2, 0)^{-1} = (2, 2)$$

$$(2, 1)^{-1} = (2, 1)$$

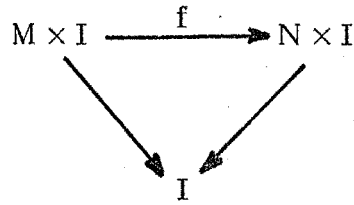
$$(3, 0)^{-1} = (3, 1)$$

$$(4, 0)^{-1} = (4, 0)$$

On peut se poser le problème (local) suivant :

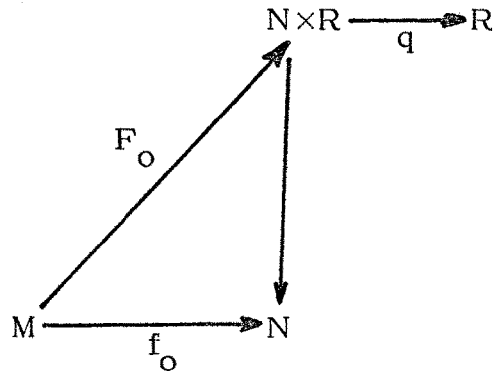
Problème $P(p, \lambda)$: Soient M, N des variétés de dimension 2 et 3 respectivement, M étant fermée, N sans bord (sans hypothèses supplémentaires).

On se donne une homotopie régulière générique

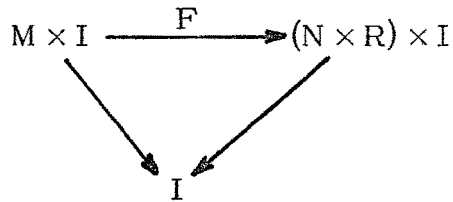


ayant comme seul niveau singulier $t_0 = \frac{1}{2}$, ce niveau singulier étant du type (p, λ) .

Soit $F_0 \in P\ell(M, N \times R)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :



Quelle est l'obstruction pour l'existence d'une isotopie

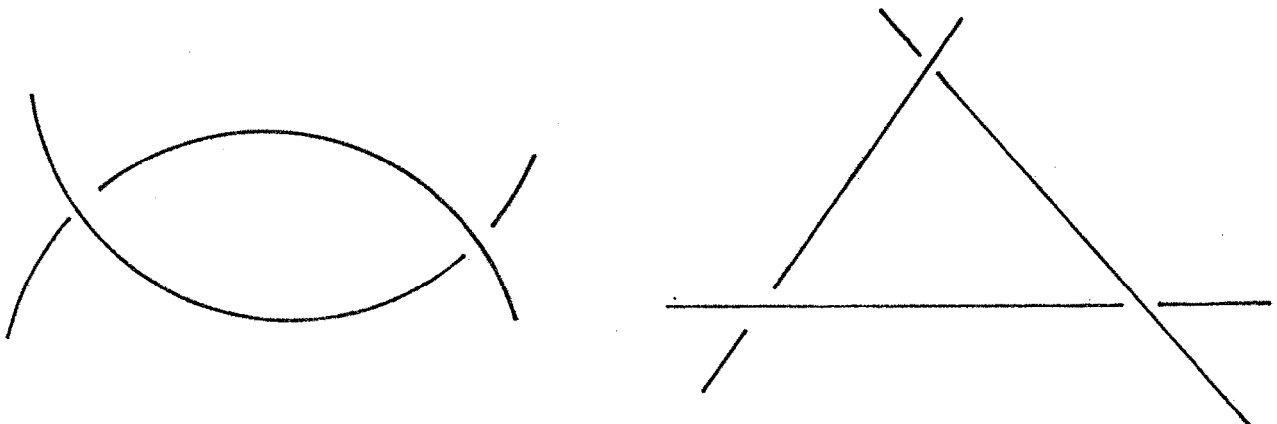


qui prolonge F_0 et recouvre f ?

On peut montrer, sans peine, que les seuls cas où il peut y avoir obstruction sont :

$(p=2, \lambda=1)$ et $(p=3, \lambda=1)$.

Les obstructions sont représentées schématiquement dans les deux figures ci-dessous.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. HIRSCH.- Immersions of manifolds. Trans. Amer. Math. Society
93 (1959) pp.242-276.
- [2] M. KERVAIRE-J. MILNOR.- Groups of homotopy spheres, I. Ann. of
Math. 77 (1963) pp. 504-537.
- [3] V. POENARU.- On regular homotopy and isotopy (preprint)(1965) .
- [4] V. POENARU.- Sur la théorie des immersions , Topology, 1 (1962)
pp. 81-100
- [5] V. POENARU.- Sur la structure des sphères d'homotopie lisses, en
dimension 3 , I (preprint)(1971).
- [6] S. SMALE.- The classification of immersions of spheres in euclidiens
spaces. Ann. of Math., 69 (1959) pp.327-344.
- [7] P. VOGEL.- Thèse (à paraître).

=====