PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 77-70

SUR LA THEORIE DES FONCTIONS FINEMENT HOLOMORPHES

par

NGUYEN XUAN LOC

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 77-70

SUR LA THEORIE DES FONCTIONS FINEMENT HOLOMORPHES

par

NGUYEN XUAN LOC

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

SUR LA THEORIE DES FONCTIONS FINEMENT HOLOMORPHES

Nguyen-Xuan-Loc

§0 INTRODUCTION.

En 1970 Fuglede anoncait sa théorie des fonctions finement harmoniques réelles (voir [5a]). Le grand succès de cette théorie à la fois aux points de vues d'extensions des structures mathématiques et d'approfondissement des résultats classiques (voir Bauer [1]) a attiré l'attention des spécialistes de la théorie du potentiel et de la théorie de l'algèbre des fonctions au problème de généralisation de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe aux ensembles finement ouverts du plan complexe (voir par exemple [5b] et [3a] , [3b]).

Rappelons que la topologie fine du plan complexe $\mathbb{C}$ est la topologie la moins fine rendant continus les éléments du cône des fonctions surharmoniques réelles sur $\mathbb{C}$. Cette topologie sur $\mathbb{C}$ est donc très 'discrète' (on peut obtenir, par exemple, un ouvert fin en soustrayant les points de coordonnés rationels d'un ouvert de $\mathbb{C}$), il est ainsi difficile d'imaginer une structure différentielle associée à la topologie fine de $\mathbb{C}$ pour pouvoir définir un '<u>opérateur différentiel fin complexe</u>' comme dans le cas classique de l'opérateur ∂_z pour les surfaces de Riemann.

Dans cet article nous exploitons les outils modernes de la théorie de probabilités, notament les martingales complexes et les intégrales stochastiques complexes pour étudier la théorie des fonctions finement holomorphes. En abordant par cette 'voie de déviation' le problème nous parvenons à introduire une <u>notion d'holomorphie fine</u> plus large que celle de Fuglede (définition 2), à démontrer un <u>théorème du type de Cauchy-Riemann</u> pour l'algèbre des fonctions finement holomorphes (théorème 5) et à montrer l'existence d'un opérateur prolongeant l'opérateur ∂_z aux faisceaux des fonctions finement holomorphes de $\mathbb{C}$ (théorème 8).

Une partie de ce travail a été anoncée dans la prépublication [10].

① REPRESENTATION LOCALE DES FONCTIONS FINEMENT HARMONIQUES COMPLEXES DANS L'ESPACE HILBERTIEN DES PROCESSUS HARMONIQUES.

Nous montrons une version généralisée et approfondie d'un résultat connu de Doob ([4a]) sur la représentation des fonctions harmoniques complexes par des martingales complexes: Toute fonction finement harmonique complexe au sens de Fuglede peut être représentée localement comme la somme de deux intégrales stochastiques complexes orthogonaux (théorème 3). Nous introduisons pour un ouvert fin du plan complexe les algèbres de processus holomorphes et anti-holomorphes au sens de Föllmer ([6]). En injectant les algèbres de processus mentionnés ci-dessus dans l'espace hilbertien réel des martingales à carrés intégrables nous montrons que ces algèbres sont des sous-espaces hilbertiens orthogonaux (proposition 2), nous

---

This work was done while the author was staying at the Université Paris-Sud to learn 'applied statistics'. He is thankful to the team of statisticians at Orsay and specially to Mrs. Cottrell for introducing him to the beautiful language Genstat.

définissons l'espace des processus harmonique comme la somme directe des algèbres de processus holomorphes et anti-holomorphes. Le composé d'une fonction finement harmonique définie sur un ouvert fin de $\mathbb{C}$ avec le mouvement brownien local d'un voisinage fin compact convenable de chaque point de l'ensemble de définition appartient alors à l'espace hilbertien des processus harmoniques associé à ce voisinage.

1.1. Les Intégrales Stochastiques Complexes.

Considérons le mouvement brownien standard du plan complexe $\mathbb{C}$:

$$Z := \left\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, (Z_s = (X_s, Y_s)), P^x(x \in \mathbb{C})\right\}$$

alors Z s'identifie au processus $X+iY$ où :

$$X := \left\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, (X_s), P^x(x \in \mathbb{C})\right\}$$

et

$$Y := \left\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, (Y_s), P^x(x \in \mathbb{C})\right\}$$

sont, pour tout x de $\mathbb{C}$, deux processus de Wiener standards, réels indépendants. Soient P une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et ζ un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tel que $\zeta > 0$ p.s.P. et tel que $E(\zeta) = \int \zeta . dP < +\infty$.

L'intégrale stochastique complexe par rapport au système $\Sigma := (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P, \zeta)$ où :

$$(1) \qquad \begin{cases} \tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_\zeta \\ \tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\zeta \wedge t} & \forall\, t \geq 0 \end{cases}$$

est définie comme suit. Posons d'abord :

$$L^2(\langle X\rangle_\zeta) := L^2(\langle Y\rangle_\zeta) := \left\{ U = (U_s) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ est un processus mesurable de temps de vie } \zeta \\ \text{du système } \Sigma \text{ tel que } E\left(\int_0^\zeta U_s^2 . ds\right) < +\infty . \end{array} \right\}$$

$L^2(\langle X\rangle_\zeta)$ et $L^2(\langle Y\rangle_\zeta)$ sont donc des espaces hilbertiens réels si on les munit du produit scalaire : pour tout couple $U=(U_s)$ et $V=(V_s)$ de $L^2(\langle X\rangle_\zeta)$ (resp. $L^2(\langle Y\rangle_\zeta)$),

$$(U,V)_1 = E\left(\int_0^\zeta U_s . V_s . ds \right)$$

L'intégrale stochastique réel d'un élément $U=(U_s) \in L^2(\langle X\rangle_\zeta)$ (resp. $L^2(\langle Y\rangle_\zeta)$) par rapport au processus $X^\zeta := (X_{\zeta\wedge t})_{t \geq 0}$ (resp. $Y^\zeta := (Y_{\zeta \wedge t})_{t\geq 0}$) sont notés par (voir [9]) :

$$(2) \qquad \begin{array}{l} U.X^\zeta := \left\{ (U.X^\zeta)_t \right\} = \left(\int_0^{\zeta\wedge t} U_s . dX_s \right) \\ (\text{resp. } U.Y^\zeta := \left\{ (U.Y^\zeta)_t \right\} = \left(\int_0^{\zeta\wedge t} U_s . dY_s\right)). \end{array}$$

Rappelons quelques résultats connus des intégrales stochastiques réelles (voir aussi [9]):

a) $U.X^\zeta$ et $U.Y^\zeta$ sont des martingales réelles continues du système Σ, de valeurs nulles au temps $t=0$, de temps de vie ζ et de carrés intégrables.

b) Soit $\langle U.X^\zeta\rangle := (\langle U.X^\zeta\rangle_t)$ (resp. $\langle U.Y^\zeta\rangle := (\langle U.Y^\zeta\rangle_t)$) le processus croissant unique associé à $U.X^\zeta$ (resp. $U.Y^\zeta$) tel que $|U.X^\zeta|^2 - \langle U.X^\zeta\rangle$ (resp. $|U.Y^\zeta|^2 - \langle U.Y^\zeta\rangle$) soit une martingale, alors on a pour tout $t \geq 0$:

$$(3)\quad \begin{cases} \langle U.X^{\zeta}\rangle_t = \int_0^{\zeta\wedge t} U_s^2.ds & \text{p.s.P.} \\ (\text{resp.}\ \langle U.Y^{\zeta}\rangle_t = \int_0^{\zeta\wedge t} U_s^2.ds & \text{p.s.P.}) \end{cases}$$

On en déduit que l'application $\Lambda : U \to U.X^{\zeta}$ (resp. $U \to U.Y^{\zeta}$) définit une isométrie entre l'espace hilbertien $L^2(\langle X\rangle_{\zeta})$ (resp. $L^2(\langle Y\rangle_{\zeta})$) et l'espace des intégrales stochastiques réelles muni de la norme :

$$\|U.X^{\zeta}\|_1 = E(\langle U.X^{\zeta}\rangle_{\zeta})$$
$$(\text{resp.}\ \|U.Y\|_1 = E(\langle U.Y^{\zeta}\rangle_{\zeta})\ ).$$

Notons dans la suite l'espace hilbertien des intégrales stochastiques réelles par rapport à X (resp. Y^{ζ}) par $(\mathcal{J}_{\langle X\rangle_{\zeta}}, \|\ \|_1)$ (resp. $(\mathcal{J}_{\langle Y\rangle_{\zeta}}, \|\ \|_1)$. Posons maintenant :

$$L^2(\langle Z\rangle_{\zeta}) := L^2(\langle X\rangle_{\zeta}) + iL^2(\langle Y\rangle_{\zeta}).$$

L'intégrale stochastique complexe d'un élément $W=U+iV \in L^2(\langle Z\rangle_{\zeta})$ par rapport au processus $Z^{\zeta} := (Z_{\zeta\wedge t})_{t\geq 0}$ est un processus complexe $W.Z^{\zeta} := \{(W.Z^{\zeta})_t\}$ où on a pour tout $t\geq 0$:

$$(4)\quad \begin{cases} (W.Z^{\zeta})_t := \int_0^{\zeta\wedge t} W_s.dZ_s \\ \qquad = \int_0^{\zeta\wedge t} (U_s.dX_s^{\zeta} - V_s.dY_s^{\zeta}) + i\int_0 (U_s.dY_s^{\zeta} + V_s.dX_s^{\zeta}). \end{cases}$$

Soit maintenant $\mathcal{M}^2[0,\zeta[$ l'espace des martingales réelles continues, bornées dans $L^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$, de temps de vie ζ et nulles au temps $t=0$ du système $\Sigma = (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P, \zeta)$.

Posons :

$$H^2[0,\zeta[:= \mathcal{M}^2[0,\zeta[+ i\mathcal{M}^2[0,\zeta[$$

et pour tout couple d'éléments $M = M_1+iM_2$, $N = N_1+iN_2$ de $H^2[0,\zeta[$ appelons par $\langle M_i,N_i\rangle := (\langle M_i,N_i\rangle_t)$ (i=1,2) les uniques processus à variations bornées du système Σ tels que $M_i.N_i - \langle M_i,N_i\rangle$ (i=1,2) sont des martingales. Alors $H^2[0,\zeta[$ muni du produit scalaire :

$$(5)\qquad ((M,N)) = E(\langle M_1,N_1\rangle_{\zeta} + \langle M_2,N_2\rangle_{\zeta})$$

est un espace de Hilbert réel.

La relation (4) nous permet d'injecter l'espace des intégrales stochastiques complexes dans l'espace hilbertien $H^2[0,\zeta[$ et la $\|\cdot\|$-norme de l'intégrale stochastique $W.Z^{\zeta} := \{(W.Z^{\zeta})_t\}$ peut être calculée comme suit :

$$(6)\quad \begin{cases} \|W.Z^{\zeta}\|^2 = ((W.Z^{\zeta}, W.Z^{\zeta})) \\ \qquad = E(\langle U.X^{\zeta}-V.Y^{\zeta}, U.X^{\zeta}-V.Y^{\zeta}\rangle_{\zeta} + \langle U.Y^{\zeta}+V.X^{\zeta}, U.Y^{\zeta}+V.X^{\zeta}\rangle_{\zeta}) \quad \text{d'après (5)} \\ \qquad = 2.E(\int_0^{\zeta} (U_s^2 + V_s^2).ds \\ \qquad = 2.(|U.X^{\zeta}|_1^2 + |V.Y^{\zeta}|_1^2) \quad \text{d'après (3).} \end{cases}$$

1.2. Les Processus Holomorphes et Harmoniques.

Considérons le système $\Sigma = (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P, \zeta)$. Un processus $F = \{(F_t)_{t\geq 0}\}$, continu, adapté à $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$, de temps de vie ζ est appelé <u>holomorphe</u> pour Σ s'il peut être s'écrire sous la forme d'un intégrale stochastique complexe par rapport à Σ, càd, ilexiste un élément $W=U+iV \in L^2(\langle Z\rangle_\zeta)$ tel que $F=W.Z^\zeta$. Nous avons donc :

$$F(t) = \int_0^{\zeta\wedge t} W_s . dZ_s^\zeta \qquad \text{p.s.P. sur } \{t<\zeta\}.^{(1)}$$

où bien d'après (4) :

$$(7)\quad \begin{cases} F(t) = F_1(t) + iF_2(t) \\ \quad = \int_0^{\zeta\wedge t} (U_s.dX_s^\zeta - V_s.dY_s^\zeta) + i\int_0^{\zeta\wedge t} (U_s.dY_s + V_s.dX_s) \qquad \text{p.s.P.} \end{cases}$$

Dans ([6] ,theorem 2.3) Föllmer montrait que l'ensemble $\mathcal{H}[0,\zeta[$ des processus holomorphes du système Σ forme un algèbre. Rappelons que $\mathcal{H}[0,\zeta[$ est un sous-espace de $H^2[0,\zeta[$.

<u>Proposition 1.</u> $\mathcal{H}[0,\zeta[$ muni du produit scalaire $((.,.))$ est un <u>sous-espace fermé</u> de l'espace hilbertien réel $\{H^2[0,\zeta[,((.,.))\}$.

<u>Preuve.</u> Soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{H}[0,\zeta[$. Supposons que les processus $u_n:=\{u_n(t)\}$ $(n=1,2,\dots)$ sont de la forme :

$$u_n(t) = \int_0^{\zeta\wedge t} Y_s^n . dZ_s^\zeta \qquad (n=1,2,\dots)$$

où les $\{Y_s^n\} = \{U_s^n + iV_s^n\} \in L^2(\langle Z\rangle_\zeta)$.

On a d'après (6) :

$$(8)\quad \begin{cases} \lim._{nm} \|u_n - u_m\|^2 = \lim._{nm}(((Y^n-Y^m).Z^\zeta,(Y^n-Y^m).Z^\zeta)) \\ \qquad = 2.\lim._{nm} E(\int_0^\zeta \{|U_s^n - U_s^m|^2 + |V_s^n - V_s^m|^2\} .ds) \\ \qquad = 0. \end{cases}$$

Ainsi (U_s^n) et (V_s^n) sont deux suites de Cauchy dans l'espace hilbertien $L^2(\langle X\rangle_\zeta)$, ils existent donc deux processus $U=(U_s)$ et $V=(V_s)$ tels que (U^n) et (V^n) convergent respectivement vers U et V dans $L^2(\langle Z\rangle_\zeta)$.

On en déduit que $Y=U+iV \in L^2(\langle Z\rangle_\zeta)$ et que si on pose $u = Y.Z^\zeta$ alors $u\in \mathcal{H}[0,\zeta[$ et $\lim._n \|u_n - u\| = 0$.

Considérons de nouveau le mouvement brownien complexe $Z := \{(Z_s)\} = \{(X_s + iY_s)\}$, et notons par $Z^\zeta := (\bar{Z}_s^\zeta)$ le processus défini par : $\bar{Z}_s^\zeta = X_{\zeta\wedge s} - iY_{\zeta\wedge s}$ pour tout $s\geqslant 0$.

Un processus $F' := \{F'(t)\}$ de $H^2[0,\zeta[$ est appelé <u>anti-holomorphe</u> s'il peut s'écrire sous

$$(9)\quad \begin{cases} F'(t) = \int_0^{\zeta\wedge t} W_s . d\bar{Z}_s^\zeta \qquad \text{pour tout } t\geqslant 0, \\ \qquad\qquad \text{avec } W= (W_s^1 + iW_s^2) \in L^2(\langle Z\rangle_\zeta). \end{cases}$$

---

(1) Dans la suite la notation p.s.P. sur $\{t< T\}$ pour un certain temps d'arrêt T de la famille $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ est par abus de language notée seulement par p.s.P.

On en déduit que :

$$F'(t) := F_1'(t) + iF_2'(t) = \int_0^{\xi\wedge t} (W_s^1.dX_s^\xi + W_s^2.dY_s^\xi) + i\int_0^{\xi\wedge t}(W_s^2.dX_s^\xi - W_s^1.dY_s^\xi) \qquad \text{p.s.P.}$$

d'où :

$$(10) \quad \begin{cases} \|F'\|^2 = ((W.Z\ ,W.Z\ )) \\ \quad = 2.(\|W^1.X^\xi\|_1^2 + \|W_s^2.Y^\xi\|_1^2\ ). \end{cases}$$

L'espace des processus anti-holomorphes par rapport au système Σ est noté par $\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$.

Proposition 2. $\mathcal{H}[0,\xi[$ et $\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$ sont deux sous-espaces hilbertiens orthogonaux de $\{H^2[0,\xi[\ ,((.,.))\}$.

Preuve. En utilisant un argument identique à celui de la démonstration de la proposition 1 on peut montrer que $\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$ est un sous-espace hilbertien de $H^2[0,\xi[$.

Soient maintenant $F:=\{F(t)\}\in\mathcal{H}[0,\xi[$ et $F':=\{F'(t)\}\in\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$, il existent donc deux éléments $U=(U_s^1+iU_s^2)$ et $V=(V_s^1+iV_s^2)$ de $L^2(\langle Z\rangle_\xi)$ tels que on a pour tout $t\geqslant 0$:

$$F(t) = (U.Z^\xi)_t = \int_0^{\xi\wedge t} U_s.dZ_s^\xi = \int_0^{\xi\wedge t}(U_s^1 + iU_s^2)(dX_s^\xi + idY_s^\xi)$$

et

$$F'(t) = (V.\overline{Z}^\xi)_t = \int_0^{\xi\wedge t} V_s.d\overline{Z}_s^\xi = \int_0^{\xi\wedge t}(V_s^1 + iV_s^2)(dX_s^\xi - idY_s^\xi\ ).$$

D'après les relations (3), (5), (6) et (10) on a donc :

$$((F,F')) = E(\langle U^1.X_s^\xi - U^2.Y^\xi,\ V^1.X^\xi - V^2.Y^\xi\rangle_\xi) + E(\langle U^1.Y^\xi + U^2.dX^\xi,\ V^1.X^\xi + V^2.Y^\xi\rangle_\xi)$$
$$= E(\int_0^{\xi\wedge t}(U_s^1.V_s^1 - U_s^2.V_s^2).ds\ + E(\int_0^{\xi\wedge t}(U_s^2.V_s^2 - U_s^1.V_s^1).ds\ )$$
$$= 0. \qquad \blacksquare$$

Définition 1. La somme directe $\mathcal{H}[0,\xi[\oplus\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$ de $\mathcal{H}[0,\xi[$ et $\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$ dans $H^2[0,\xi[$, notée par $\{\mathcal{H}^1[0,\xi[\ ,((.,.))\}$, s'appele l'espace des processus harmoniques du système Σ .

Remarque. Getoor et Sharpe considéraient dans ([7]) l'union de $\mathcal{H}[0,\xi[$ et $\overline{\mathcal{H}}[0,\xi[$ et appelaient cet ensemble la classe des martingales conformes du système Σ.

1.3. Représentation Locale des Fonctions Finement Harmoniques Complexes .

Soit $K\subset\mathbb{C}$ un compact du plan complexe, notons par $H_0(K)$ l'espace des fonctions harmoniques complexes dans des voisinages de K et par $H(K)$ la fermeture de la restriction de $H_0(K)$ sur K dans l'espace $C(K)$ des fonctions complexes continues sur K muni de la norme supremum.

Nous pouvons utiliser le théorème de caractérisation ci-dessous de Fuglede pour définir les

les fonctions finement harmoniques complexes.

Théorème d'approximation locale de Fuglede ([5b], théorème 4.1): Soit $u : \mathbf{U} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur un ouvert fin $\mathbf{U}$ du plan complexe. Alors u est finement harmonique dans $\mathbf{U}$ si et seulement si pour tout x de $\mathbf{U}$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbf{U}$ tel que la restriction $(u|V_x)$ de u sur V_x appartient à $H(V_x)$.

Ainsi il existe une suite de fonctions $(u_n) \subset H_0(V_x)$ telle que (u_n) converge uniformément vers u sur V_x $(u_n \rightrightarrows u)$; nous appelons par abus de language, dans la suite, le triplet associé à u au point x de U l'ensemble $\{(u_n), x, V_x\}$.

Soient x un point de $\mathbb{C}$ et V_x un voisinage fin compact de x. Notons dans la suite par τ_x le temps de sortie du mouvement brownien complexe $Z = (Z_s)$ de V_x. Considérons enfin le système $\sum_x := (\Omega, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t, P^x, \tau_x)$ et notons par $H_x^2[0,\tau_x[$ (resp. $\mathcal{H}_x[0,\tau_x[$, $\bar{\mathcal{H}}_x[0,\tau_x[$ et $\mathcal{H}_x^1[0,\tau_x[$) l'espace hilbertien réel des martingales complexes continues, bornées dans $L^2(\Omega, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}, P^x)$, nulles au temps $t=0$ (resp. l'espace hilbertien des processus holomorphes, anti-holomorphes et harmoniques complexes) du sytème $\sum_x$.

Théorème 3. Soit $u : \mathbf{U} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur un ouvert fin du plan complexe. Alors u est finement harmonique dans $\mathbf{U}$ si et seulement si pour tout point x de U il existe un voisinage fin compact V_x de x dans U tel que le processus $(u \circ Z^{\tau_x} - u(x))$ appartient à $\mathcal{H}_x^1[0,\tau_x[$.

Preuve. a) $(\Rightarrow)$.

Supposons que u est finement harmonique dans $\mathbf{U}$. D'après le théorème d'approximation locale de Fuglede il existe, pour tout x de U, un triplet $\{(u_n), x, V_x\}$ associé à u au point x. La formule d'Ito appliquée à chaque fonction harmonique u_n $(n=1,2,\dots)$ donne :

Pour tout $t \geq 0$:

$$(11)\qquad u_n \circ Z_t^{\tau_x} - u_n \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \frac{\partial u_n}{\partial x}(Z_s^{\tau_x}).dX_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} \frac{\partial u_n}{\partial y}(Z_s^{\tau_x}).dY_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x.$$

Soient ∂_z et $\partial_{\bar z}$ deux opérateurs différentiels définies dans un voisinage de V_x p

$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, alors (11) est équivalent à :

$$(12)\qquad u_n \circ Z_t^{\tau_x} - u(x) = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\bar z} u_n(Z_s^{\tau_x}).d\bar{Z}_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x.$$

Ainsi la relation (12) montre que pour chaque $n=1,2\dots$ le processus $(u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x))$ appartient à $\mathcal{H}_x^1[0,\tau_x[$. D'autre part si on note $u_n := u_n^1 + iu_n^2$ $(n=1,2,\dots)$ alors les formules (6) et (10) donnent :

$$\| u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\|^2 = \|\partial_z u_n(Z^{\tau_x}).Z^{\tau_x}\|^2 + \|\partial_{\bar z} u_n(Z^{\tau_x}).\bar{Z}^{\tau_x}\|^2$$

$$= \frac{1}{2}.E\Big(\int_0^{\tau_x} \Big|\frac{\partial u^1_n}{\partial x} + \frac{\partial u^2_n}{\partial y}\Big|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds + \int_0^{\tau_x} \Big|\frac{\partial u^2_n}{\partial x} - \frac{\partial u^1_n}{\partial y}\Big|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds \Big) + \ldots.$$

$$\frac{1}{2}.E\Big(\int_0^{\tau_x} \Big|\frac{\partial u^1_n}{\partial x} - \frac{\partial u^2_n}{\partial y}\Big|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds + \int_0^{\tau_x} \Big|\frac{\partial u^1_n}{\partial y} + \frac{\partial u^2_n}{\partial x}\Big|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds \Big)$$

$$= E\Big(\int_0^{\tau_x} \Big\{\Big(\frac{\partial u^1_n}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u^1_n}{\partial y}\Big)^2\Big\} (Z_s^{\tau_x}).ds + \int_0^{\tau_x} \Big\{\Big(\frac{\partial u^2_n}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u^2_n}{\partial y}\Big)^2\Big\} (Z_s^{\tau_x}).ds \Big).$$

Puisque u_n converge uniformément vers u sur V_x on en déduit de la formule ci-dessus que $\|(u_n - u_m).Z^{\tau_x} - (u_n - u_m)(x)\|^2 \longrightarrow 0$ quand $m,\ n \longrightarrow \infty$. Ainsi $\Big\{\frac{\partial u^1_n}{\partial x}(Z^{\tau_x})\Big\}$ (resp. $\Big\{\frac{\partial u^1_n}{\partial y}(Z^{\tau_x})\Big\}$, $\Big\{\frac{\partial u^2_n}{\partial x}(Z^{\tau_x})\Big\}$, $\Big\{\frac{\partial u^2_n}{\partial y}(Z^{\tau_x})\Big\}$) est une suite de Cauchy dans $L^2(\langle Z\rangle_{\tau_x})$, donc converge dans le même espace vers le processus $\{u^1_x(s)\}$ (resp. $\{u^1_y(s)\}$, $\{u^2_x(s)\}$, $\{u^2_y(s)\}$). On a donc finalement :

$$u\circ Z_t^{\tau_x} - u(x) = \int_0^{\tau_x\wedge t} \Big\{\frac{1}{2}(u^1_x(s) + u^1_y(s)) + \frac{i}{2}(u^2_x(s) - u^1_x(s))\Big\}.dZ_s^{\tau_x} + \ldots.$$
$$\int_0^{\tau_x\wedge t} \Big\{\frac{1}{2}(u^1_x(s) - u^2_y(s)) + \frac{i}{2}(u^2_x(s) + u^1_y(s))\Big\}.d\overline{Z}_s^{\tau_x}.$$

Ce qui montre en même temps que le processus $\{u\circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ appartient à $\mathcal{H}^1_x[0, \tau_x[$ et la suite $\{u_n\circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\}$ converge vers $\{u\circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ dans le même espace.

b) ($\Leftarrow$).

Supposons maintenant que pour tout x de $\mathbb{U}$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ tel que $(u\circ Z^{\tau_x} - u(x))$ appartient à $\mathcal{H}^1_x[0,\tau_x[$. L'intégrale stochastique $(u\circ Z^{\tau_x} - u(x))$ est à fortiori une martingale complexe uniformément intégrable du système $\sum_x$, il est donc clair d'après le théorème d'arrêt de Doob que u satisfait à la propriété de la moyenne pour une base de voisinages fins de x dans V_x. Il reste à montrer que u est finement continue dans $\mathbb{U}$. Pour cela considérons d'abord une fonction réelle $w : \mathbb{U} \to \mathbf{R}$ telle que :

$$w\circ Z_t^{\tau_x} - w\circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x\wedge t} u_s.dX_s \qquad \text{p.s.}P^x. \quad \text{pour tout } x \in V_x ,$$

où $u = (u_s) \in L^2(\langle X\rangle_{\tau_x})$. Si on pose :

$$\overline{w}(x) = \text{lim.sup.fine}_{y\in V_x, y\to x} w(y),$$

alors d'après un résultat connu de Doob ([4b]) on a :

$$\begin{cases} \overline{w}(Z_0) = \text{lim.sup}_{t\downarrow 0} w\circ Z_t^{\tau_x} & \text{p.s.}P^x. \\ \quad = \text{lim.sup.}_{t\downarrow 0}\Big(u\circ Z_0^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x\wedge t} u_s.dX_s^{\tau_x}\Big) & \text{p.s.}P^x. \\ \quad = w(Z_0) & \text{p.s.}P^x. \end{cases}$$

ce qui entraine que w est finement semi-continue supérieurement (s.c.s.) dans l'intérieur fin de V_x.

Si on pose $u = u_1 + iu_2$ alors d'après ce qui précède la fonction u_1 (resp. u_2) est finement s.c.s. dans $\mathbb{U}$ et satisfait à la propriété de la moyenne au voisinage fin de tout point x de

$\mathcal{U}$, donc u_1 (resp. u_2) est finement hypoharmonique dans $\mathcal{U}$. Puisque toute fonction finement hypoharmonique dans $\mathcal{U}$ y est finement continue (voir par exemple [5a]) on en déduit que la fonction complexe $u = u_1 + iu_2$ est aussi finement continue dans $\mathcal{U}$.

Remarques. 1) Föllmer a donné dans [6] une démonstration du résultat suivant de Doob :

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit x un point de $\mathcal{U}$. Alors une fonction complexe continue dans $\mathcal{U}$, $u : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, est harmonique dans $\mathcal{U}$ si et seulement si le processus $\{u \circ Z^{\tau_{\mathcal{U}}} - u \circ Z_0\}$ est une martingale complexe du système $\Sigma' := (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P^x; \zeta_{\mathcal{U}})$, càd, pour tout ouvert relativement compact W de $\mathcal{U}$ le processus $\{u \circ Z^{\tau_W} - u \circ Z_0\}$ est une martingale uniformément intégrable du système Σ' (x_o est un point fixe de $\mathcal{U}$).
D'autre part on sait qu'une fonction complexe finement harmonique dans le domaine complexe $\mathcal{U}$ y est harmonique (voir [5b], theorem 2.2), on voit ainsi que dans ce cas particulier le théorème 3 ci-dessus donne une représentation locale (via la topologie fine) d'une fonction harmonique dans l'espace hilbertien des processus harmoniques du système Σ'_x $(x \in \mathcal{U})$ tandis que le théorème de Doob procure d'une représentation globale de ce même fonction dans l'espace des martingales complexes.

2) La démonstration mentionnée ci-dessus de Föllmer est basée essentiellement sur la 'propriété différentielle' suivante : On peut appliquer la formule d'Ito à la fonction u puisque u comme une fonction continue et vérifiant la propriété de la moyenne dans $\mathcal{U}$ appartient à la classe $C^2(\mathcal{U})$. Remarquons que ce propriété est intrinsèquement lié à la topologie complexe de $\mathbb{C}$ et n'a pas de sens pour les fonctions définies dans un ouvert fin de $\mathbb{C}$.

2 UNE THEORIE DE FONCTIONS FINEMENT HOLOMORPHES.

Nous introduisons une notion d'holomorphie fine (définition 2), notre définition donne une classe de fonctions finement holomorphes dans un ouvert fin du plan complexe plus large que celle de Fuglede (voir [5c]). En injectant l'espace des fonctions finement holomorphes dans l'algèbre des processus holomorphes nous obtenons un théorème du type de Cauchy-Riemann pour cet espace de fonctions (théorème 5). Ce théorème nous permet d'identifier l'espace des fonctions finement holomorphes dans un ouvert fin $\mathcal{U}$ du plan complexe avec l'algèbre de fonctions $\vartheta(\mathcal{U})$ introduit récement par Debiard et Gaveau ([3a]). D'autre part nous montrons par une méthode constructive l'existence pour tout ouvert fin $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ d'un opérateur linéaire $\partial_{\mathcal{U}} : \mathcal{D}(\partial_{\mathcal{U}}) \subset \vartheta(\mathcal{U}) \longrightarrow \vartheta(\mathcal{U})$ d'un sous-espace de $\vartheta(\mathcal{U})$ dans $\vartheta(\mathcal{U})$ tel que $\partial_{\mathcal{U}}$ s'identifie à l'opérateur différentiel complexe classique $\partial_z := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ lorsque $\mathcal{U}$ est un ouvert complexe.

2.1. Quelques Définitions Préliminaires.

La caractérisation d'une fonction finement harmonique complexe par des processus harmoniques énoncée dans le théorème 3 du paragraphe précédent nous suggère la définition ci-dessous d'une fonction finement holomorphe. C'est une généralisation de la notion d'holomorphie complexe car nous verrons qu'une fonction définie sur un ouvert complexe est finement holomorphe dans cet ouvert si et seulement si elle y est holomorphe.

Définition 2. Soit $\mathbb{U}$ un ouvert fin du plan complexe $\mathbb{C}$. Une fonction $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est appelée finement holomorphe dans $\mathbb{U}$ si pour tout point x de $\mathbb{U}$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ tel que $(u \circ Z^{\tau} - u(x))$ appartient à $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$.

Il s'ensuit de la définition que la classe des fonctions finement holomorphes dans $\mathbb{U}$ forme un espace vectoriel complexe, nous la notons par $\mathcal{H}_f(U)$.

Considérons maintenant un voisinage fin compact V_x d'un point x de $\mathbb{C}$. Nous notons respectivement par $R_o(V_x)$ et $R(V_x)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans les voisinages de V_x et la fermeture de la restriction de $R_o(V_x)$ sur V_x dans l'espace $C(V_x)$ des fonctions complexes continues sur V_x muni de la norme supremum.

Pour chaque élément $u \in R_o(V_x)$ on note par $F_u := \{F_u(t)\}$ le processus défini par :

$$F_u(t) = \int_0^{\tau_x \wedge t} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \text{ et pour tout } t \geq 0.$$

Rappelons que τ_x dénote le temps de sortie du mouvement brownien complexe pour l'ensemble V_x.

Il est clair que F_u est un processus holomorphe du système $\Sigma_x = \{\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P^x, \tau_x\}$ pour tout u de $R_o(V_x)$, par conséquent la classe de processus $\{F_u \mid u \in R_o(V_x)\}$ forme un sous-espace de $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$.

Définition 3. Le complété de l'espace $\{F_u \mid u \in R_o(V_x)\}$ pour la norme $\| \ \|$ est noté par $\mathcal{R}(V_x)$. $\mathcal{R}(V_x)$ est donc un sous-espace fermé de $\{\mathcal{H}_x[0, \tau_x[, ((.,.))\}$.

Proposition 4. Supposons que V_x possède une base de voisinages composée de domaines simplement connexes alors l'espace $\mathcal{R}(V_x)$ s'identifie au complété dans $\{\mathcal{H}_x[0, \tau_x[, ((.,.))\}$ du sous-espace des processus holomorphes de la forme $(u \circ Z^{\tau_x} - u(x))$ où $u \in R_o(V_x)$.

Preuve. Soit $u \in R_o(V_x)$. Il existe un voisinage ouvert simplement connexe U de V_x tel que u est holomorphe dans U, par conséquent ilexiste une fonction v holomorphe dans U telle que $\partial_z v = u$ dans le même voisinage.

D'après ([6], theorem 12.1) on a pour tout $t \geq 0$:

$$(13) \quad \begin{cases} v \circ Z_t^{\tau_x} - v \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z v(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} & \text{p.s.} P^x. \\ \qquad = \int_0^{\tau_x \wedge t} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} & \text{p.s.} P^x. \end{cases}$$

Les processus $(v \circ Z^{\tau_x} - v(x))$ et F_u sont donc indistinguables pour le système Σ_x.

Réciproquement si $v \in R_o(V_x)$ on peut toujours écrire d'après la première égalité de (14) que $(v \circ Z^{\tau_x} - v(x)) = F_u$ avec $u = \partial_z v$.

Remarque. Supposons que nous avons un ouvert fin $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ tel que chaque point x de U possède une base de voisinages fins compacts $\mathcal{V}_x$ vérifiant les conditions de la proposition 4. Soit maintenant $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie dans $\mathbb{U}$ telle que pour tout point x de U il existe un élément V_x de $\mathcal{V}_x$ tel que $(u \circ Z^{\tau_x} - u(x)) \in \mathcal{R}(V_x)$, alors d'après la proposition 4 on peut trouver une suite $(u_n) \subset R_0(V_x)$ telle que :

$$(u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)) \longrightarrow (u \circ Z^{\tau_x} - u(x)) \qquad \text{dans } \mathcal{H}_x[0, \tau_x[.$$

On peut donc penser que la propriété ci-dessus est plus naturelle que celle utilisée dans la définition 2 pour définir une notion d'holomorphie fine mais malheureusement il est facile de voir que tout point x du plan complexe possède un voisinage fin compact violant les hypothèses de la proposition 4. En effet considérons une suite d'éléments de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ convergeant vers 0, le complémentaire de cette suite est donc un voisinage fin de 0 qui contient un voisinage fin compact V_0 de 0. Il est impossible d'exprimer V_0 comme l'intersection d'une famille de domaines simplement connexe. Nous verrons dans la suite que c'est cette propriété topologique de la topologie fine qui créa la différence, au point de vue de 'différentiation stochastique', entre la théorie des fonctions holomorphes et la théorie des fonctions finement holomorphes.

Considérons de nouveau un ouvert fin $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$ et soit $V_x \subset \mathbb{U}$ un voisinage fin compact d'un point x de $\mathbb{U}$. Posons :

$$H_1(V_x) := \left\{ u : W \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} - \text{ u est finement continue dans un certain ouvert fin } W \supset V_x \\ - \; u \circ Z^{\tau_x} \in L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x}) . \end{array} \right\}$$

et

$$H_1^{loc}(\mathbb{U}) := \left\{ u : \mathbb{U} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} - \text{ u est finement continue dans } \mathbb{U}. \\ - \; \forall x \in U, \; \exists V_x \text{ tel que } u \in H_1(V_x). \end{array} \right\}$$

Dans la suite nous notons par $H_f(\mathbb{U})$ l'espace des fonctions finement harmoniques complexes dans U, rappelons que d'après le théorème d'approximation locale de Fuglede il existe pour toute fonction $f \in H_f(\mathbb{U})$ et pour tout point x de $\mathbb{U}$ un triplet $\{(f_n), x, V_x\}$ associé à f au point x (voir 1.1.3.).

La définition ci-dessous généralise celle de l'opérateur $\partial_{\bar z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ du plan complexe aux ouverts fins.

Définition 4. L'opérateur $\bar\partial_{\mathbb{U}} : \mathcal{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}}) \longrightarrow H_1^{loc}(\mathbb{U})$ est un opérateur linéaire ayant pour domaine de définition $\mathcal{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}}) \subset H_f(U)$ et pour l'ensemble de valeurs un sous-espace de $H_1^{loc}(\mathbb{U})$.

$$(14) \qquad \mathcal{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}}) := \left\{ f \in H_f(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g \in H_1^{loc}(\mathbb{U}) : \text{pour } \forall x \in \mathbb{U} \text{ il existe un triplet } \{(f_n), x, V_x\} \\ \text{associé à f au point x tel que la suite } (\partial_{\bar z} f_n \circ Z^{\tau_x}) \\ \text{converge vers } g \circ Z^{\tau_x} \text{ dans } L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x}). \end{array} \right\}$$

La valeur $\bar\partial_{\mathbb{U}} f$ de l'opérateur $\bar\partial_{\mathbb{U}}$ au point $f \in \mathcal{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}})$ est par définition la fonction g de $H_1^{loc}(\mathbb{U})$ définie par la relation (14) : $\bar\partial_{\mathbb{U}} f = g$.

Remarques. 1) Si $f \in \mathscr{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}})$ alors la valeur $\bar\partial_{\mathbb{U}} f = g$ est indépendante de la classe des triplets associés à f en chaque point de $\mathbb{U}$. En effet soit x un point quelconque de $\mathbb{U}$ et et soient g_1 et g_2 deux fonctions de $H_1^{loc}(\mathbb{U})$ et de plus soient $\{(f_n^1), x, V_x\}$, $\{(f_n^2), x, V_x\}$ deux triplets associés à f au même point x tels que :

$$(15) \qquad \begin{cases} \partial_{\bar z} f_n^1 \circ Z^{\tau_x} \to g_1 \circ Z^{\tau_x} & \text{dans } L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x}) \\ \partial_{\bar z} f_n^2 \circ Z^{\tau_x} \to g_2 \circ Z^{\tau_x} & \text{dans } L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x}). \end{cases}$$

On a d'une part :

$$\partial_{\bar z}(f_n^1 - f_n^2) \circ Z^{\tau_x} \to (g_1 - g_2) \circ Z^{\tau_x} \quad \text{dans } L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$$

et d'autre part :

$$(f_n^1 - f_n^2) \circ Z_t^{\tau_x} - (f_n^1 - f_n^2) \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\bar z}(f_n^1 - f_n^2) \circ Z_s^{\tau_x} . d\bar Z_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z (f_n^1 - f_n^2) \circ Z_s^{\tau_x} . dZ_s^{\tau_x}$$

et comme la suite $(f_n^1 - f_n^2)$ converge uniformément sur V_x vers 0 on déduit des formules (6) et (10) que les suites de processus $\{\partial_z (f_n^1 - f_n^2) \circ Z^{\tau_x}\}$ et $\{\partial_{\bar z}(f_n^1 - f_n^2) \circ Z^{\tau_x}\}$ convergent vers 0 dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$. On a donc :

$$(g_1 - g_2) \circ Z^{\tau_x} = 0 \ \text{ dans } L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x}), \text{ càd, } E_x\left(\int_0^{\tau_x} |g_1 - g_2|^2 \circ Z_s^{\tau_x} . ds\right) = 0.$$

Par conséquent g_1 et g_2 sont égales dans un ensemble finement dense de l'intérieur fin de V_x pour tout point x de $\mathbb{U}$, d'autre part puisque g_1 et g_2 sont finement continues dans $\mathbb{U}$ ils sont donc identiques.

2) Dans le cas particulier où l'ouvert fin $\mathbb{U}$ est un ouvert complexe $H_f(\mathbb{U})$ coïncide avec l'espace $H(\mathbb{U})$ des fonctions harmoniques complexes dans $\mathbb{U}$ (voir [5b], théorème 2.2). Ainsi pour toute $f \in H(\mathbb{U})$ et pour tout point x de $\mathbb{U}$ on peut choisir $\{(f), x, V_x\}$ comme un triplet associé à f au point x avec V_x une boule fermée de centre x contenue dans $\mathbb{U}$. La remarque 1 montre en même temps que $f \in \mathscr{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}})$ et $\bar\partial_{\mathbb{U}} f = \partial_{\bar z} f$, ainsi dans le cas d'un ouvert complexe l'opérateur $\bar\partial_{\mathbb{U}}$ s'identifie avec la restriction de $\partial_{\bar z}$ (la domaine de définition de $\partial_{\bar z}$ est $C^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{U})$) sur l'espace des fonctions harmoniques complexes dans $\mathbb{U}$.

3) Soit $f \in H_f(\mathbb{U})$ où $\mathbb{U}$ est un ouvert fin de $\mathbb{C}$. Alors pour tout triplet $\{(f_n), x, V_x\}$ associé à f au point x de $\mathbb{U}$ on peut utiliser les mêmes arguments de la remarque 1 pour montrer que $(\partial_{\bar z} f_n \circ Z^{\tau_x})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$: cette suite converge donc vers un processus $Y = \{(Y_s)\}$ dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$. Debiard et Gaveau affirmaient dans ([3b], théo. 6.2) qu'il existe une fonction g <u>définie presque partout</u> pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{U}$ telle que Y et $g \circ Z^{\tau_x}$ sont indistinguables pour les systèmes $\sum_x^1$ $(x \in U)$. On peut donc définir $\bar\partial_{\mathbb{U}} f = g$, cependant l'inconvénient de cette définition de l'opérateur $\bar\partial_{\mathbb{U}}$ vient du fait que l'ensemble exceptionnel cité plus haut dépend de la fonction donnée f et c'est pour cette raison que nous avons restreint le domaine de définition de $\bar\partial_{\mathbb{U}}$ à $\mathscr{D}(\bar\partial_{\mathbb{U}}) \subset H_f(\mathbb{U})$ afin de pouvoir formuler un théorème du type de Cauchy-Riemann pour les fonctions finement holomorphes (voir aussi l'appendice).

2.2. Le Théorème de Cauchy-Riemann Pour Les Fonctions Finement Holomorphes.

Théorème 5. Soit $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ et soit $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie dans $\mathbb{U}$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) u est finement holomorphe dans $\mathbb{U}$.

(b) Pout tout point x de $\mathbb{U}$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ tel que

$$(u \circ Z^{\tau_x} - u(x)) \in \mathcal{R}(V_x)$$

(c) u appartient au domaine de définition $\mathcal{D}(\bar{\partial}_{\mathbb{U}})$ de $\bar{\partial}_{\mathbb{U}}$ et $\bar{\partial}_{\mathbb{U}} u = 0$.

Preuve. Nous montrons l'équivalance de (a), (b) et (c) dans l'ordre suivant :
(a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(a)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(a).

Supposons que u est finement holomorphe dans $\mathbb{U}$, càd, $u \in \mathcal{H}_f(\mathbb{U})$. D'après la définition 2 ils existent, pour tout x de $\mathbb{U}$, un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ et un processus $Y = \{(Y_s)\} \in L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$ tels que : Pout tout $t \geqslant 0$,

$$u \circ Z_t^{\tau_x} - u \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} Y_s . dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \tag{16}$$

u est finement harmonique dans $\mathbb{U}$ d'après le théorème 3, il s'ensuit du théorème d'approximation locale de Fuglede qu'il existe pour tout x de $\mathbb{U}$ un triplet $\{(u_n), x, V_x\}$ associé à u au point x. On a donc pour n=1,2,... et pour tout $t \geqslant 0$:

$$u_n \rightrightarrows u \text{ sur } V_x \text{ et,}$$

$$u_n \circ Z_t^{\tau_x} - u_n \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\bar{z}} u_n(Z_s^{\tau_x}).d\bar{Z}_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x.$$

On conclut d'une part que la suite des processus harmoniques $\{u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\}$ converge vers $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ dans $\mathcal{H}_x^1[0, \tau_x[$ et d'autre part que, comme une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_x[0, \tau_x[$), la suite de processus holomorphes $\left\{\int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x}\right\}$ (resp. anti-holomorphes $\left\{\int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\bar{z}} u_n(Z_s^{\tau_x}).d\bar{Z}_s^{\tau_x}\right\}$) converge dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_x[0, \tau_x[$) vers un processus holomorphe (resp. anti-holomorphe) de la forme $\left\{\int_0^{\tau_x \wedge t} Y_1(s).dZ_s\right\}$ (resp. $\left\{\int_0^{\tau_x \wedge t} Y_2(s).d\bar{Z}_s\right\}$) où $Y_1 = \{Y_1(s)\} \in L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$ (resp. $Y_2 = \{Y_2(s)\} \in L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$).

On a donc pour tout $t \geqslant 0$:

$$u \circ Z_t^{\tau_x} - u \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} Y_1(s).dZ_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} Y_2(s).d\bar{Z}_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \tag{17}$$

Mais la décomposition du processus harmonique $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ en la somme de sa partie holomorphe et anti-holomorphe est unique d'après la définition 1, en comparant les relations (16) et (17) on obtient les assertions suivantes :

(a)$\Rightarrow$(c). Puisque Y_2 doit être indistinguable du processus nul dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$, on déduit de la définition 4 que $u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}_{\mathbb{U}})$ et $\bar{\partial}_{\mathbb{U}} u = 0$ car le processus $Y_2 = \{Y_2(s)\}$ est la limite dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$ de la suite de processus $\{\partial_{\bar{z}} u_n(Z^{\tau_x})\}$.

(a)$\Rightarrow$(c). Il est clair que $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ est la limite dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$ de la suite de processus holomorphes $\{\partial_z u_n \circ Z^{\tau_x}_{\cdot} Z^{\tau_x}\}$, il suffit donc de montrer que $\partial_z u_n$ appartient à $R_o(V_x)$

$(n = 1,2,\dots)$, mais ceci est trivial car u_n est harmonique dans un voisinage de V_x donc :

$$\partial_{\bar z}(\partial_z u_n) = \partial_z(\partial_{\bar z} u_n) = \Delta_2 u_n = 0 \qquad (n = 1,2,\dots).$$

D'après le théorème de Cauchy-Riemann $\partial_z u_n$ $(n = 1,2,\dots)$ est holomorphe dans un certain voisinage de V_x.

<u>(b)$\Rightarrow$(a).</u> Cet implication est triviale car pour tout voisinage fin compact V_x de x dans U $\mathcal{R}(V_x)$ est un sous-espace hilbertien de $\{\mathcal{H}_x[0,\tau_x[,((.,.))\}$

<u>(c)$\Rightarrow$(a).</u> Soit u un élément de $\mathcal{D}(\bar\partial_U)$ tel que $\bar\partial_U u = 0$. Puisque u est finement harmonique dans U il existe, pour tout point x de U, un triplet $\{(u_n),x,V_x\}$ associé à u au point x. La formule d'Ito appliquée à chaque élément de la suite de fonctions harmoniques complexes (u_n) donne pour tout $t \geq 0$:

$$(18) \qquad u_n\circ Z_t^{\tau_x} - u_n\circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x\wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x\wedge t} \partial_{\bar z} u_n(Z_s^{\tau_x}).d\bar Z_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}P^x.\ (n = 1,2,\dots)$$

On a donc d'après (10) :

$$(18') \qquad \left\| \partial_{\bar z} u_n\circ Z^{\tau_x}.\bar Z^{\tau_x}\right\|^2 = 2\left(\left\|\partial_{\bar z} u_n^1\circ Z^{\tau_x}\right\|_1 + \left\|\partial_{\bar z} u_n^2\circ Z^{\tau_x}\right\|_1 \right)$$

où u_n^1 et u_n^2 $(n = 1,2,\dots)$ sont les parties réelles et imaginaires de u_n $(n = 1,2,\dots)$.

Puisque $\bar\partial_U u = 0$, càd, le second menbre de (18') converge vers 0 quand n tend vers infini, on en déduit que la suite des processus anti-holomorphes $\{\partial_{\bar z} u_n\circ Z^{\tau_x}.\bar Z^{\tau_x}\}$ converge vers zéro dans $\mathcal{H}_x[0,\tau_x[$.

D'autre part pour tout couple d'entiers m et n on a d'après (18) :

$$\left\|\partial_z(u_m - u_n)\circ Z^{\tau_x}.Z^{\tau_x}\right\|^2 \leq \left\|(u_m - u_n)\circ Z^{\tau_x} - (u_m - u_n)\circ Z_0^{\tau_x}\right\|^2$$

$$\leq 2.\sup\{|(u_n - u_m)(x)| \mid x \in V_x\},$$

par conséquent $\{\partial_z u_n\circ Z^{\tau_x}.Z^{\tau_x}\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_x[0,\tau_x[$ (on peut même dire dans $\mathcal{R}(V_x)$ car $\partial_{\bar z}(\partial_z u_n) = \Delta_2 u_n = 0$ dans un voisinage de V_x); il existe donc un élément $Y = \{(Y_s)\} \in L^2(\langle Z\rangle_{\tau_x})$ tel que la relation (18) devient pour tout $t \geq 0$:

$$u\circ Z_t^{\tau_x} - u\circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x\wedge t} Y_s.dZ_s \qquad \text{p.s.}P^x.$$

lorsque n tend vers ∞, càd,

$$\{u\circ Z^{\tau_x} - u(x)\} \in \mathcal{H}_x[0,\tau_x[.$$

<u>Remarques.</u> 1) Supposons maintenant que U est un ouvert complexe, alors d'après la remarque 2 de la définition 4 l'opérateur $\bar\partial_U$ n'est autre que la restriction de l'opérateur différentiel $\partial_{\bar z}$ sur l'espace $H(U)$ des fonctions harmoniques complexes dans U, ainsi l'équivalence $\{(a)\Leftrightarrow(c)\}$ du théorème 5 montre qu'une fonction complexe dans U est finement holomorphe si et seulement si elle est holomorphe dans U. De plus l'équivalence $\{(a)\Leftrightarrow(b)\}$ du même théorème donne une caractérisation de l'holomorphie d'une fonction définie dans U par l'approximation locale dans les espaces $\mathcal{R}(V_x)$ $(x \in U)$.

D'autre part en combinant le théorème avec la remarque de la proposition 4 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6. Soit $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie dans un ouvert complexe $\mathbb{U}$. Alors u est holomorphe dans $\mathbb{U}$ si et seulement si pour tout point x de $\mathbb{U}$ ils existent un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ et une suite de fonctions $(u_n) \subset R_o(V_x)$ tels que :

(19) $\{u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\}$ converge vers $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$ lorsque $n \to \infty$.

2) Fuglede a introduit dans [5c] la notion d'holomorphie fine suivante :

Définition. Soit $\mathbb{U}$ un ouvert fin du plan complexe $\mathbb{C}$. Une fonction complexe $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est appelée finement holomorphe au sens de Fuglede si pour tout x de $\mathbb{U}$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$ tel que $(u|V_x) \in R(V_x)$.

Il est clair qu'une fonction finement holomorphe au sens de Fuglede dans $\mathbb{U}$ y est donc finement holomorphe au sens de la définition 2. En effet soit (u_n) une suite de $R_o(V_x)$ telle que (u_n) converge uniformément vers u sur V_x, alors la formule (13) donne pour $n = 1,2,\ldots$:

$$u_n \circ Z_t^{\tau_x} - u_n \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x.$$

par conséquent la suite de processus $\{u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\}$ converge vers $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ dans $\mathcal{R}(V_x)$.

On en déduit que $u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}_{\mathbb{U}})$ et $\bar{\partial}_{\mathbb{U}} u = 0$ mais la réciproque est loin d'être vraie comme nous montrons dans la suite, ainsi l'algèbre des fonctions holomorphes au sens de Fuglede est trop 'étroit' pour qu'on puisse énoncer un théorème du type de Cauchy-Riemann.

Supposons que $u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}_{\mathbb{U}})$ et $\bar{\partial}_{\mathbb{U}} u = 0$, d'après le théorème 5 b) ils existent, pour tout $x \in \mathbb{U}$, un voisinage fin compact $V_x \subset \mathbb{U}$ de x et une suite de fonctions $(v_n) \subset R_o(V_x)$ tels que la suite de processus $\{v_n \circ Z^{\tau_x} . Z^{\tau_x}\}$ tend vers $\{u \circ Z^{\tau_x} - u(x)\}$ dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$. On se demande d'abord si u satisfait à une propriété plus faible que celle utilisée dans la définition de Fuglede, notament on cherche pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $u_n \in R_o(V_x)$ telle que les processus $\{u_n \circ Z^{\tau_x} - u_n(x)\}$ et $\{v_n \circ Z^{\tau_x} . Z^{\tau_x}\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ sont indistinguables dans $\mathcal{H}_x[0, \tau_x[$.

D'autre part pour toute fonction $v \in R_o(V_x)$, il exite d'après le théorème de Runge une suite de fonctions rationnelles (w_m) avec pôles en dehors de V_x, convergeant uniformément vers v sur V_x. Supposons que $w_m := P_m/Q_m$ $(m=1,2,\ldots)$ où P_m et Q_m sont des polynômes complexes, alors on peut écrire :

(20) $$w_m := A_o(z) + \sum_{j=1}^{k} A_j \{(z - a_j)^{-1}\}$$

où $A_o, A_1, \ldots, A_k$ sont des polynômes avec A_i $(1 \leq i \leq k)$ n'ayant pas de termes constant et où a_i $(1 \leq i \leq k)$ sont les pôles distincts de $Q_m(z)$. Dans la formule (20) on voit que les intégrales complexes de la forme :

$$\oint^{z} \frac{1}{(w - a_j)}.dw \qquad (j = 1,2,\ldots) \qquad z \in V_x$$

ne peuvent être approximés uniformément sur V_x par des fonctions de $R_o(V_x)$.
Dans une communication personnelle Fuglede nous a demandé s'il est possible de construire une fonction appartenant à $\mathcal{H}_f(U)$ et ne vérifiant pas les conditions de sa définition, quoique la réponse est affirmative d'après ce qui précède nous n'avons pas de 'solution constructive' pour ce problème.

3) Soit $u \in H_f(U)$ une fonction finement harmonique complexe dans l'ouvert fin U. Supposons que pour tout x de U il existe un triplet $\{(u_n), x, V_x\}$ associé à u au point x tel que la suite de processus complexes $\{\partial_{\bar{z}} u_n \circ Z^{\tau_x}\}$ converge vers 0 dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$, alors on voit immédiatement que $u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}_U)$ et $\bar{\partial}_U u = 0$. Cette remarque nous permet d'identifier l'espace $\mathcal{H}_f(U)$ des fonctions finement holomorphes dans U avec l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ introduit dans [3a] par Debiard et Gaveau.

2.3. L'Opérateur Différentiel Complexe Fin d'un Ouvert Fin.

Soit U un ouvert fin du plan complexe $\mathbb{C}$. Dans le cas particulier où U est un ouvert du plan complexe l'opérateur différentiel complexe $\partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ est par définition un opérateur linéaire sur l'algèbre des fonctions holomorphes dans U qui associe à toute fonction holomorphe u sa différentiel complexe $\partial_z u$. Notons l'algèbre des fonctions finement holomorphes dans U par $\mathcal{H}_f(U)$ (voir définition 2), nous construisons dans ce paragraphe un opérateur linéaire ∂_U de domaine de définition un sous-algèbre de $\mathcal{H}_f(U)$, noté par $\mathcal{D}(\partial_U)$ et de valeurs dans $\mathcal{H}_f(U)$ tel que si U se réduit à un ouvert complexe alors ∂_U s'identifie à ∂_z (théorème 8).
Il est intéressant à noter que $\mathcal{D}(\partial_U)$ contient l'algèbre des fonctions finement holomorphes au sens de Fuglede (corollaire 9) et que nous ne savons pas si $\mathcal{D}(\partial_U)$ est identique à $\mathcal{H}_f(U)$ ou non. Dans §2.4. nous abordons quelques questions relatifs à ce problème.

<u>Lemme 7.</u> Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une fonction finement holomorphe dans un ouvert fin U du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit $\{(u_n), x, V_x\}$ un triplet associé à la fonction u au point x de U. Alors sont équivalents :

(a) La suite de nombres complexes $\{\partial_z u_n(x)\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$,

(b) La suite de processus $\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \circ Z^{\tau_x}\right\}$ est de Cauchy dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$.

De plus si $\lim_n \partial_z u_n(y)$ existe pour chaque point y de l'intérieur fin de V_x alors la fonction :

$$w(y) = \lim_n \partial_z u_n(y)$$

peut être définie indépendamment du triplet $\{(u_n), x, V_x\}$ associé à u au point x.

<u>Preuve.</u> a) Soit $\{(u_n), x, V_x\}$ un triplet associé à u au point x de U. Puisque pour $n = 1,2,\dots$ $u_n \in H_o(V_x)$, on a d'après la formule d'Ito :

$$(21) \qquad u_n \circ Z_t^{\tau_x} - u_n \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} + \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\bar{z}} u_n(Z_s^{\tau_x}).d\bar{Z}_s^{\tau_x} \quad \text{p.s. } P^x. \ (\forall t \geq 0).$$

D'autre part puisque $\{\partial_z u_n\} \subset R_0(V_x)$ $(n = 1,2,\dots)$ on a d'après (13) :

$$\partial_z u_n(Z_s^{\tau_x}) = \partial_z u_n(Z_0^{\tau_x}) + \int_0^{\tau_x \wedge t} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}(Z_u^{\tau_x}).dZ_u^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}P^x. \quad (\forall s \geq 0).$$

La formule (2) devient :

$$(21')\quad u_n\circ Z_t^{\tau_x} - u_n\circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x\wedge t} \partial_z u_n(Z_0^{\tau_x}).dZ_s + \int_0^{\tau_x\wedge t} dZ_s^{\tau_x} \int_0^{\tau_x\wedge t} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}(Z_u^{\tau_x}).dZ_u^{\tau_x} \;\dots\dots$$

$$+\int_0^{\tau_x\wedge t} \partial_{\bar z} u_n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}P^x. \quad (t \geq 0).$$

Si nous posons :

$$\begin{cases} \partial_z u_n(Z_0\;) = \partial_z u_n(x) = a_n + ib_n & \text{p.s.}P^x.\ (n = 1,2,\dots) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}n\circ Z_s^{\tau_x} = M_n^1(s) + i M_n^2(s) & (n = 1,2;\dots) \end{cases}$$

Alors les formules (4) et (6) donnent d'une part :

$$\|a_n - M_n^1(s)\|_1^2 = E_x\left(\int_0^{\tau_x} |a_n - M_n^1(s)|^2.ds\right)$$

$$= |a_n|^2.E_x(\tau_x) + \|M_n^1(s)\|_1^2 - 2.a_n.E_x\left(\int_0^{\tau_x} M_n^1(s).ds\right)$$

et

$$\|b_n - M_n^2(s)\|_1^2 = E_x\left(\int_0^{\tau_x} |b_n - M_n^2(s)|^2.ds\right)$$

$$= |b_n|^2.E_x(\tau_x) + \|M_n^2(s)\|_1^2 - 2.b_n.E_x\left(\int_0^{\tau_x} M_n^2(s).ds\right)$$

et d'autre part puisque u_n converge uniformément vers u sur V_x, $\{\partial_{\bar z} u_n\circ Z^{\tau_x}\}$ converge vers $\{0\}$ dans $L^2(\langle Z\rangle_{\tau_x})$ lorsque n tend vers ∞, on en déduit que :

(a_n) et (b_n) sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\{M_n^1(s)\}$ et $\{M_n^2(s)\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\langle X\rangle_{\tau_x})$, càd, (a) est équivalente à (b).

b) Soit V_x^f l'intérieur fin de V_x. Supposons qu'ils existent deux triplets $\{(u_n^1),x,V_x\}$, $\{(u_n^2),x,V_x\}$ associés à u au même point x tels que :

$$(22)\quad \begin{cases} \lim_n \partial_z u_n^1(y) \text{ existe et égale à } w_1(y) \text{ pour tout } y \text{ de } V_x^f \\ \text{et} \\ \lim_n \partial_z u_n^2(y) \text{ existe et égale à } w_2(y) \text{ pour tout } y \text{ de } V_x^f\,. \end{cases}$$

Alors w_1 et w_2 sont identiques dans V_x^f s'ils sont finement continues dans cet ensemble. En effet pour tout $y \in V_x^f$ on peut considérer $\{(u_n^1),y,V_x\}$ et $\{(u_n^2),y,V_x\}$ comme deux triplets associés à u au même point y, d'autre part on sait déjà que (voir la partie (a)$\Rightarrow$(c) de la démonstration du théorème 5) les deux processus $\{\partial_z u_n^1\circ Z^{\tau_x}.Z^{\tau_x}\}$ et $\{\partial_z u_n^2\circ Z^{\tau_x}.Z^{\tau_x}\}$ convergent dans $\mathcal{H}_y[0,\tau_x[$ vers la mme limite $\{u\circ Z^{\tau_x} - u\circ Z_0^{\tau_x}\}$ ce qui revient à dire que les deux processus $\{\partial_z u_n^1\cdot Z^{\tau_x}\}$ et $\{\partial_z u_n^2\circ Z^{\tau_x}\}$ ont même limite dans $L_y^2(\langle Z\rangle_{\tau_x})$, càd :

$$\lim_n E_y\Big(\int_0^{\tau_x} |\partial_z(u_n^1 - u_n^2)|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds \Big) = 0 \qquad (\forall\, y \in V_x^f)$$

Ce qui entraine d'après (22) que :

$$E_y\Big(\int_0^{\tau_x} |w_1 - w_2|^2 (Z_s^{\tau_x}).ds \Big) = 0 \qquad (\forall\, y \in V_x^f)$$

Par conséquent w_1 et w_2 sont égales dans un ensemble finement dense dans V_x^f, comme ces deux fonctions sont finement continues dans V_x^f, elles sont identiques.

Il suffit de montrer maintenant que si $\{(u_n), x, V_x\}$ est un triplet associé à u au point x tel que $\lim_n \partial_z u_n(y) = w(y)$ existe pour tout y de V_x^f alors $w(y)$ est finement continue dans V_x^f. Laissons $t \geqslant 0$ fixe et faisons n tendant vers l'infini dans (21') nous obtenons la relation :

$$E_y(u{\circ}Z_t^{\tau_x} - u{\circ}Z_0^{\tau_x} ;\ t < \tau_x) = w(y).E_y(Z_t^{\tau_x} - Z_0^{\tau_x} ;\ t < \tau_x) + E_y(F(t, \ ) ;\ t < \tau_x) \quad (\forall\, y \in V_x^f)$$

où $F(t, \ ) = \int_0^{\tau_x \wedge t} dZ_s \int_0^{\tau_x \wedge s} Y(u).dZ_u$.

D'autre part nous savons que les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} y \longrightarrow E_y(u{\circ}Z_t^{\tau_x} - u{\circ}Z_0^{\tau_x} ;\ t < \tau_x) \\ y \longrightarrow E_y(Z_t^{\tau_x} - Z_0^{\tau_x} ;\ t < \tau_x) \\ y \longrightarrow E_y(F(t, \ ) ;\ t < \tau_x) \end{cases}$$

sont finement continues dans V_x^f, ce qui entraine que $w(y)$ est aussi finement continue dans V_x^f.

<u>Théorème 8.</u> Soit $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ une fonction finement holomorphe dans l'ouvert fin $\mathbb{U}$.

Supposons que pour tout point x de $\mathbb{U}$ il existe <u>un triplet</u> $\{(u_n), x, V_x\}$ associé à u au point x tel que :

(23) $\qquad \lim_n \partial_z u_n(y)$ existe pour tout y appartenant à l'intérieur fin de V_x.

Alors il existe une et une seule fonction finement holomorphe $\partial_{\mathbb{U}} u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ dans $\mathbb{U}$ telle que : Pour tout point y de $\mathbb{U}$ et pour tout triplet $\{(u_n), y, V_y\}$ associé à u au point y on a,

$$(24)\ \begin{cases} u{\circ}Z_t^{\tau_x} - u{\circ}Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_y \wedge t} \partial_{\mathbb{U}} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}\ P^y. \quad (\forall t \geqslant 0) \\ \text{et} \\ \lim_m \dfrac{u{\circ}Z^{\tau_x}(\tau_m) - u{\circ}Z_0^{\tau_x}}{Z_{\tau_m}^{\tau_x} - Z_0^{\tau_x}} = \partial_{\mathbb{U}} u(Z_0) \qquad \text{p.s.}\ P^y. \end{cases}$$

où τ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ sont les temps de sortie du mouvement brownien Z d'une suite de voisinages fins compacts de y décroissante vers y.

Preuve. D'après la 2^{è} partie du lemme 7, nous pouvons définir

$$\lim_n \partial_z u_n(x) := \partial_z u\,(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{U},$$

et la fonction $\partial_z u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ ainsi définie est indépendante de la classe de triplets associée à chaque point x de $\mathbb{U}$. Soit $\{(u_n), x, V_x\}$ un triplet associé à u au point x de $\mathbb{U}$, d'une part puisque $\partial_z u_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ est holomorphe dans un certain voisinage de V_x (car $\partial_{\bar{z}}(\partial_z u_n) = \Delta_z u_n = 0$ dans un voisinage de V_x) on a d'après (13) :

$$(25) \qquad \partial_z u_n \circ Z_t^{\tau_x} - \partial_z u_n \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} n(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \qquad (\forall t \geq 0)$$

De plus on sait qu'en faisant n tendant vers l'infini le premier menbre de (25) converge p.s.P^x. vers :

$$\partial_z u \circ Z_t^{\tau_x} - \partial_z u \circ Z_0^{\tau_x}$$

tandis que le second menbre de (25) converge vers $\int_0^{\tau_x \wedge t} V_s.dZ_s$ avec $V = \{V_s\} \in L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$ d'après le lemme 7 b) (car $\lim_n \partial_z u_n(x)$ existe), on a donc finalement :

$$\partial_z u \circ Z_t^{\tau_x} - \partial_z u \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} V_s.dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \quad (\forall t \geq 0),$$

càd $\partial_z u$ est finement holomorphe dans $\mathbb{U}$.

Montrons maintenant que $\partial_{\mathbb{U}} u$ est la fonction finement holomorphe unique vérifiant la relation (24). Soit $\{(u_n), x, V_x\}$ un triplet associé à u au point x de $\mathbb{U}$, alors d'après la démonstration du théorème 5 (partie (a)$\Rightarrow$(c)) on sait que la suite de processus holomorphes $\{\partial_z u_n \circ Z^{\tau_x}.Z^{\tau_x}\}$ converge vers $\{u \circ Z^{\tau_x} - u \circ Z_0^{\tau_x}\}$ dans $\mathcal{H}_x^{2}[0, \tau_x[$ et d'autre il est clair que la suite de processus $\{\partial_z u_n \circ Z^{\tau_x}\}$ converge vers $\partial_{\mathbb{U}} u \circ Z^{\tau_x}$ dans $L^2(\langle Z \rangle_{\tau_x})$, ce qui donne enfin (24) :

$$u \circ Z_t^{\tau_x} - u \circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\mathbb{U}} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.} P^x. \qquad (\forall t \geq 0)$$

S'il existe une autre fonction finement holomorphe w définie dans $\mathbb{U}$ et vérifiant (24) alors puisque à fortiori tous les deux fonctions w et $\partial_{\mathbb{U}} u$ sont finement continues dans $\mathbb{U}$ on peut utiliser le même argument de la remarque 1 de la définition 4 pour montrer que w et ∂ u sont identiques.

Soit maintenant (r_m) une suite de nombres réels strictement décroissante vers 0. Notons par $B(y, r_m)$ $(m = 1,2,\ldots)$ la suite de boules fermées de centre y et de rayon r_m, par $\tau_m (m = 1,2,\ldots)$ la suite de temps de sortie du movement brownien pour le voisinage fin compact $B(y, r_m) \cap V_y$ $(m = 1,2,\ldots)$ de y. D'une part la fonction $|\partial_{\mathbb{U}} u|^2 : V_x \to R_+$ est continue et d'autre part elle satisfait aussi à la relation :

$$\|\partial_{\mathbb{U}} u \circ Z^{\tau_x}\|_1^2 = \int_{V_x} u(y,z).|\partial_{\mathbb{U}} u|^2(z).dz < +\infty,$$

où $u(y,z)$ est la fonction de Green de l'ouvert fin V_y^f.

Un argument analogue à celui de la démonstration de ([2], theorem 2) donne :

$$\lim_m \frac{u\circ Z^{\tau_x}(\tau_m) - u\circ Z_0^{\tau_x}}{Z_{\tau_m}^{\tau_x} - Z_0^{\tau_x}} = \lim_m \frac{1}{Z_{\tau_m}^{\tau_x} - Z_0^{\tau_x}} \int_0^{\tau_m} \partial_{\mathbb{U}} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \quad \text{p.s.}P^y.$$

$$= \partial_{\mathbb{U}} u(Z_0^{\tau_x}) = \partial_{\mathbb{U}} u(y) \quad \text{p.s.}P^y.$$

Définition 5. Pour tout ouvert fin $\mathbb{U}$ du plan complexe $\mathbb{C}$, posons :

(26) $$\mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}}) := \left\{ u \in \mathcal{H}_f(\mathbb{U}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Pour } \forall x \in \mathbb{U}, \text{ il existe un triplet } \{(u_n), x, V_x\} \text{ associé} \\ \text{à } u \text{ au point } x \text{ de } \mathbb{U} \text{ tel que } \lim_n \partial u_n(\cdot) \text{ existe dans } V_x^f \end{array} \right\}$$

Alors il existe un opérateur linéaire $\partial_{\mathbb{U}} : \mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}}) \subset \mathcal{H}_f(\mathbb{U}) \longrightarrow \mathcal{H}_f(\mathbb{U})$ de domaine de définition $\mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}})$ et de valeurs dans $\mathcal{H}_f(\mathbb{U})$ tel que :

Pour tout x de $\mathbb{U}$ et pour tout $u \in \mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}})$ il existe un voisinage fin compact V_x de x dans $\mathbb{U}$:

$$u\circ Z_t^{\tau_x} - u\circ Z_0^{\tau_x} = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_{\mathbb{U}} u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}P^x. \qquad (\forall t \geqslant 0)$$

$\partial_{\mathbb{U}}$ s'appele <u>l'opérateur différentiel fin complexe</u> de l'ouvert fin $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$.

<u>Corollaire 9.</u> 1) Toute fonction finement holomorphe au sens de Fuglede dans $\mathbb{U}$ appartient à $\mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}})$.

2) Si $\mathbb{U}$ est un ouvert complexe alors $\partial_{\mathbb{U}}$ s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes dans $\mathbb{U}$ et $\partial_{\mathbb{U}}$ s'identifie à l'opérateur différentiel complexe $\partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial\cdot}{\partial x} - i\frac{\partial\cdot}{\partial y})$ sur $\mathbb{U}$.

3) Supposons que en tout point x de $\mathbb{U}$ il existe une base $\mathcal{V}_x$ de voisinages fins compacts de x dans $\mathbb{U}$ telle que tout élément $V_x \in \mathcal{V}_x$ possède lui-même une base de voisinages composée de domaines simplement connexes , alors $\mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}})$ coïncide avec $\mathcal{H}_f(\mathbb{U})$.

<u>Preuve.</u> Rappelons qu'une fonction complexe $u : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe au sens de Fuglede dans $\mathbb{U}$ si elle est finement harmonique dans $\mathbb{U}$ et si de plus pour tout x de $\mathbb{U}$ il existe un triplet $\{(u_n), x, V_x\}$ avec $(u_n) \subset R_0(V_x)$ associé à u au point x.

D'après le théorème de Hallstrom sur la dérivation par point de l'algèbre de fonction $R_0(V_x)$ ([8], theorem 1) on sait que pour tout point x de V_x^f il existe une constante universelle C_x telle que :

(25) $$|\partial_z v(x)| \leqslant C_x \|v\| \qquad \text{pour toute fonction } v \in R_0(V_x),$$

On en déduit de (25) que $\lim_n \partial_z u_n(y)$ existe pour tout point y de l'ouvert fin V_x^f, càd, la condition (23) du théorème 8 est vérifiée pour la fonction finement holomorphe u.

2) Si l'ouvert fin $\mathbb{U}$ se réduit au cas particulier d'un ouvert complexe, alors d'après le théorème 5 et d'après la remarque 2 de la définition 4 $\mathcal{H}_f(\mathbb{U})$ s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes dans $\mathbb{U}$. D'une part si u est holomorphe dans $\mathbb{U}$ on a d'après (13) pour tout voisinage fin compact V_x d'un point x dans la relation :

$$u\,Z_t - u\,Z_0 = \int_0^{\tau_x \wedge t} \partial_z u(Z_s^{\tau_x}).dZ_s^{\tau_x} \qquad \text{p.s.}P^x. \quad (\forall t \geqslant 0),$$

d'autre part d'après le théorème 8 la fonction $\partial_{\mathbb{U}} u$ est la seule vérifiant la relation ci-dessus on en déduit que $\partial_{\mathbb{U}} u = \partial_z u$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_f(\mathbb{U})$, càd, $\partial_{\mathbb{U}} = \partial_z$.

3) Soit $x \in \mathbb{U}$ et soit $\{(u_n), x, V_x\}$ un triplet associé à u au point x tel que V_x peut s'écrire comme l'intersection d'une famille de domaines simplement connexes. On peut donc supposer que $u_n \in H_o(V_x)$ $(n = 1,2,..)$ et de plus l'ensemble de défintion de chaque fonction u_n est un ouvert simplement connexe . Posons $u_n = u_n^1 + iu_n^2$ où u_n^1 et u_n^2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de u_n. Pour $n = 1,2,...$ appelons par $\tilde{u}_n^1$ et $\tilde{u}_n^2$ les conjugués de u_n^1 et u_n^2 dans leur domaine de définition, alors on a :

$$\begin{cases} w_n^1 = u_n^1 + i\,\tilde{u}_n^1 \in R_o(V_x) & (n = 1,2,...) \\ w_n^2 = u_n^2 + i\,\tilde{u}_n^2 \in R_o(V_x) & (n = 1,2,...) \end{cases}$$

En appliquant le théorème de dérivation par point de Hallstrom aux fonctions w_n^1 et w_n^2 et en remarquant que $|\partial_z u_n(x)| \leqslant |\partial_z w_n^1(x)| + |\partial_z w_n^2(x)|$ nous voyons que $\{\partial_z u_n(x)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

2.4. Quelques problèmes ouverts.

Comme nous avons dit précédemment que nous ne savons pas encore si pour tout l'ouvert fin $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}(\partial_{\mathbb{U}})$ est identique à $\mathcal{H}_f(\mathbb{U})$, nous pensons que ce problème est équivalent aux deux problèmes suivants :

a) Un problème de l'agèbre de fonctions : Le corollaire 9 nous suggère de poser la question suivante : Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact du plan complexe et soit (u_n) une suite de Cauchy de fonctions de $H_o(K)$, existe-il une sous-suite (u_{n_i}) de (u_n) telle que pour tout 'peak-point' y de K la suite $\{\partial_z u_{n_i}(y)\}$ est de Cauchy ?

b) Un problème de la théorie d'opérateurs compacts :D'après le lemme 7 nous pouvons aussi ramener notre problème au suivant : Soit $K \subset \mathbb{C}$ un voisinage fin compact de $\mathbb{C}$ de l'intérieur fin $K^f \neq \emptyset$, soit u(x,y) la fonction de Green de K^f. Pour tout point x de K^f on note par $\| \ \|_x$ la norme sur $R_o(K)$ induite par l'espace hilbertien $L^2(K;\ u(x,z).dz)$.

L'opérateur $\partial_z : R_o(K) \to R_o(K)$ est -il précompact pour la famille de norme $\{\| \ \|_x \mid x \in K^f\}$ càd, pour toute suite $(u_n) \subset R_o(K)$, existe-il une sous-suite (u_{n_i}) de (u_n) telle que $\{\partial_z u_{n_i}\}$ est de Cauchy pour la famille de norme $\{\| \ \|_x \mid x \in K^f\}$?

REFERENCES.

[1] Bauer H., Aspects of modern potential theory, Proc. Inter. Congr. Math. Vancover (1974), t.I, 41-51.

[2] Davis M.H.A., On stochastic differentiation, Theo. Prob. and Appl., vol.20, N° 4, (1975), 869-872.

[3a] Debiard A. et Gaveau G., Potentiel fin et algèbres des fonctions analytiques, I, II, J. Funct. Analysis 16 et 17, (1974), 289-304 et 296-310.

[3b] ----------------------, Différentiabilité des fonctions finement harmoniques, Inventiones Math. 29, (1975), 111-123.

[4a] Doob J.L., Semimartingales and subharmonic functions, T.A.M.S., t77, (1954), 86-121.

[4b] ---------, Applications to analysis of a topological definition of smalless of a set, Bull. Amer. Math. Soc. 72, (1966), 579-600.

[5a] Fuglede B., Fine connectivity and finely harmonic functions, Actes Congr. Internat. Math. Nice, (1970), t.II, 513-519.

[5b] ---------, Fonctions harmoniques et finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier, 4, , (1974), 77-91.

[5c] ---------, Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions, Preprint, Kobenhavns Universitet, (1974).

[6] Föllmer H., Stochastic holomorphy, Math. Ann., t.207, (1974), 245-255.

[7] Getoor R.K. and Sharpe M.J., Conformal martingales, Inventiones Math. 16, (1972), 271-308.

[8] Hallstrom A.P., On bounded point derivations and analytic capacity, J. Funct. Analysis 4 , (1969), 153-165.

[9] Kunita H. and Watanabe S., On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30, (1967), 209-245.

[10] Nguyen-Xuan-Loc, Un théorème du type de Cauchy-Riemann pour les fonctions finement holomorphes, Preprint, (1975), Universität Erlangen-Nürnberg.

Dr. habil. Nguyen-Xuan-Loc
17 Rue Louis Scocard

F-91400 ORSAY

n° d'impression 229

1er trimestre 1977