UNIVERSITE DE PARIS

Calcul Précisé Sur Les Opérateurs Intégraux - Singuliers

Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris

Par

Alberto - P. CALDERON

Notes par Marc DURAND

Paris 1966

UNIVERSITE DE PARIS

Calcul Précisé Sur Les Opérateurs Intégraux - Singuliers

Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris

Par

Alberto - P. CALDERON

Notes par Marc DURAND

Paris 1966

Les notes recueillies ici ont été prises à une série de cinq conférences que Monsieur Alberto Calderón a données à l'Université de Paris en janvier 1966.

Le temps dont disposait Monsieur Calderón dans ces conférences était trop compté pour qu'il puisse donner les démonstrations correspondantes des théorèmes énoncés, se contentant le plus souvent de quelques indications sur les méthodes de démonstration. Le rédacteur de ce cours a souvent développé ces indications désirant fournir un texte écrit le plus complet possible. Comme Monsieur Calderón n'a pas pu revoir les épreuves de ces notes, celles-ci sont publiées sans que sa responsabilité se trouve engagée.

INTRODUCTION

Les Opérateurs intégraux singuliers, tels qu'ils ont été étudiés depuis une dizaine d'années (voir la bibliographie), étaient définis par des noyaux $k(x,t)$ homogènes de degré $-n$ par rapport à la seconde variable, n étant la dimension de l'espace: l'opérateur était défini par l'application

$$K : f \longmapsto \int k(x,x-y)\, f(y)\, dy$$

Le calcul sur ces opérateurs intégraux singuliers appliqué aux opérateurs différentiels ne permettait de tenir compte que de la partie principale de l'opérateur. Ensuite dans [6] et [8] il a été introduit l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels.

Ces conférences définiront un calcul précisé sur les opérateurs intégraux-singuliers permettant de tenir compte des termes d'ordre inférieur à celui de la partie principale dans les applications aux opérateurs différentiels.

La <u>définition des symboles</u> sera très différente de toutes celles utilisées jusqu'à présent : le symbole d'un opérateur K en un point x sera un opérateur différentiel sur l'espace cotangent au point x. Cette définition rend peut-être plus difficiles les démonstrations des propriétés des opérateurs, mais étant plus riche elle donne de meilleurs résultats dans les applications.

Le premier chapitre contient la théorie des opérateurs intégraux singuliers. On donnera d'abord (n° 1) la définition des opérateurs à l'aide des intégrales singulières et il sera montré le théorème (théorème 1.1.1.) très important pour la pratique affirmant que le noyau est déterminé de manière unique par la donnée de l'opérateur. Dans le n° 2 on définira l'algèbre des symboles comme algèbre d'opérateurs différentiels, tronquée à un certain degré, sur l'espace cotangent. Il sera alors (n° 3) possible d'établir le théorème fondamental (Théorème 1.3.1.) qui affirme que l'ensemble des opérateurs intégraux singuliers ainsi définis est une algèbre involutive et que l'application symbole est un $*$-homomorphisme de cette algèbre dans celle des symboles. Ce théorème permettra donc l'utilisation des symboles dans les applications. On terminera le chapître (n° 4) en donnant quelques résultéts sans démonstration définissant les opérateurs sur une variété compacte C^{∞}.

Le second chapître donne des applications. Le problème est de pouvoir inverser (dans un sens à préciser) les opérateurs intégraux singuliers pour pouvoir résoudre les équations; un problème voisin est celui de définir les conditions pour que ces opérateurs aient un indice. Aussi on étudiera d'abord des opérateurs ayant des propriétés d'ellipticité qui seront données par le symbole. Ensuite (n° 3) des conditions seront cherchées pour qu'un opérateur non-elliptique ait un indice. Ces résultats seront enfin (n° 4) appliqués au cas particulier où l'opérateur envoie $L^2_{-\frac{1}{2}}$ dans L^2. Nous serons amenés dans ce paragraphe à définir un symbole local qui est aussi un opérateur différentiel et permet d'étudier certaines propriétés d'un tel opérateur différentiel.

Jusqu'au n° 4 du chapître 1, nous considérons les espaces de Sobolev $L_s^p(R^n)$ avec s entier et $1 < p < \infty$. Pour $s \geq 0$ ce sont les espaces de fonctions de $L^p(R^n)$ dont les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre s sont dans $L^p(R^n)$. Ils sont munis de la norme

$$\|f\|_{p,s} = \sum_{\alpha \leq s} \|D^\alpha f\|_p$$

pour $s \leq 0$ ce sont les duals forts des L_{-s}^q $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Les $L_s^p(R^n)$ sont des Banach réflexifs (voir par exemple Calderón [1]). Ces espaces ont l'inconvénient d'empêcher souvent l'utilisation de la transformée de Fourier et d'obliger à trouver des démonstrations totalement différentes de celles employées pour les H^s, mais ils permettent de plus nombreuses applications.

Nous considèrerons ensuite les espaces $L_s^p(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est une variété C^∞ compacte.

Nous nous fixons une fois pour toutes deux entiers positifs ou nuls m et r.

Les dérivées seront prises au sens des distributions lorsque ce sera nécessaire sans que cela soit précisé.

Nous définissons la transformée de Fourier de $f(x)$ par :

$$\hat{f}(z) = \int e^{-2i\pi(x,z)} f(x) dx.$$

Nous notons la transformée inverse de Fourier de g par $\check{g}$.

Enfin nous posons $D^\alpha = (\frac{1}{2i\pi})^\alpha (\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$

$$D'^\alpha = (-1)^\alpha D^\alpha .$$

CHAPITRE I

OPERATEURS INTEGRAUX SINGULIERS SUR R^n.

n° 1. DEFINITIONS.

DEFINITION 1.1.1.- Nous appelons $\mathcal{S}_j$ la classe d'opérateurs continus de L^p_s dans L^p_{s+j} avec

$$0 \leqslant j \leqslant r+1 \quad \text{et} \quad -m-r-1 \leqslant s \leqslant s+r+1 \leqslant m+r+1 .$$

Nous munissons $\mathcal{S}_j$ d'une norme $\| \ \|_j$:

$$A \in \mathcal{S}_j \implies \|A\|_j = \sup_{\substack{f \in L^p_s \\ s \in I}} \frac{\|Af\|_{p,s+j}}{\|f\|_{p,s}}$$

où I est l'ensemble de définition de s donné plus haut.

Si $A \in \mathcal{S}_j$ nous dirons qu'il est j-améliorant.

DEFINITION 1.1.2.- Nous appelons $\mathcal{O}_{m,r}$ la classe d'opérateurs K (dits opérateurs intégraux singuliers) de la forme

$K = K_o + K_1 + \ldots + K_r + S$ qui ont les propriétés suivantes :

a) $S \in \mathcal{S}_{r+1}$

b) $K_j f = \int k_j(x, x-y) \, f(y) \, dy$

où l'on définit $k_j(x,z)$ par sa transformée de Fourier :

$\mathcal{F}_z \, k_j(x,z) = k_j(x,\hat{z}) = h_j(x,z)(1-\phi(z))$ avec

(i) $h_j(x,z)$ est une fonction homogène de degré $-j$ en z à support compact comme fonction de x .

(ii) $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha h_j(x,z) \in L^2_{n+(r+1)-j} \quad (1 \leqslant |z| \leqslant 2)$

uniformément en x et pour tout α tel que

$|\alpha| \leq m + 2(r+1) - j$: soit $h_j(x,z) \in B_{m+2(r+1)-j}$

$$(L^2_{n+(r+1)-j} \ (1 \leq |z| \leq 2))$$

(iii) $\phi(z) \in C^\infty_o \ (\mathbb{R}^n)$ et ne dépend que de $|z|$.

(iv) <u>$\phi(z) = 1$ dans la boule de centre</u> 0 <u>et rayon</u> $\rho < 1$ <u>et</u> $0 \leq \phi(z) \leq 1$.

<u>On dira que</u> K_j <u>est de degré</u> j .

<u>Remarques 1.1.1.</u>

a) Pour $j = 0$, $K_o = H_o(1 - \check{\phi}*)$

où $\check{\phi}$ est le Fourier inverse de ϕ .

H_o est un opérateur intégral singulier déjà défini dans Caldéron [2], que nous appellerons <u>opérateur intégral singulier en valeur principale</u> (en v.p.), c'est-à-dire

$$H_o f = \text{v.p.} \int h'_o(x,x-y)\, f(y)dy$$

où $h'_o(x,z) = h_o(x,\check{z})$ et degré $(h'_o) = -n$.

En effet :

$k_o(x,\hat{z}) = h_o(x,z) - h_o(x,z)\,\phi(z)$ où h_o est de degré zéro en z . On a donc bien

$$K_o . = H_o . - H_o[\check{\phi}*.].$$

b) Les K_j sont des opérateurs intégraux ordinaires (si $h_j(x,z)$ est de degré $-j$ en z , $h_j(x,\check{z})$ est de degré $-n+j$), et $\|K\| = \sum_{j=o}^{r} \|K_j\|_j$.

c) La condition sur h_j donne, dans le cas d'une équation aux dérivées partielles, les conditions de régularité sur les coefficients : h_j est une fonction de x dérivable en x $(m+2(r+1)-j)$ fois et chacune de ces dérivées est une fonction de z de classe C^α avec $\alpha < (\frac{n}{2} + r + 1-j)$. Dans la démonstration de la proposition 1.3.2. nous supposerons que $m+2(r+1-j) > n$.

d) $\phi(z)$, qui permet de tronquer h_j à l'origine, est une fonction définie indépendamment de j , donnée une fois pour toutes dans toute la suite du cours.

e) Si l'on considère un opérateur $K : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ (et par densité le résultat sera vrai pour $K : L^p \to L^p$), défini par

$$Kf = \int k(x,x-y)\, f(y)dy$$

tel que $k(x,\hat{z})$ ait un support compact, on a trivialement $k(x,\hat{z}) \leq C(1+|z|^2)^s$ pour tout s réel et donc K est améliorant d'ordre quelconque. Donc une troncature de $h(x,z)$ par une fonction à support compact ne modifie pas essentiellement l'opérateur. Cela nous permettra des identifications utiles par la suite, car nous pouvons négliger les opérateurs dont la transformée de Fourier en z du noyau est à support compact. Si K_1 et K_2 sont congrus modulo un opérateur $(r+1)$-améliorant, nous noterons $K_1 = K_2$.

Nous allons donner un théorème fondamental pour expliciter les opérateurs intégraux singuliers :

THEOREME 1.1.1.- Les $h_j(x,z)$ sont déterminées de manière unique par la donnée de K.

Pour montrer ce théorème donnons d'abord un certain nombre de définitions et de lemmes que nous établirons plus loin.

DEFINITION 1.1.3.- Un opérateur intégral singulier est "simple" si $Kf = \int k(x,x-y)\, f(y)dy$ avec $k(x,z)=a(x)b(z)$.

DEFINITION 1.1.4.- Nous appelons o-symbole d'un opérateur intégral singulier K de degré zéro, $\sigma_o(K)$, ($Kf = \int k(x,x-y)\, f(y)dy$) la fonction $h(x,z)$ définie par $k(x,\hat{z}) = h(x,z)(1-\phi(z))$, homogène de degré zéro en z.

DEFINITION 1.1.5.- Etant donnés K_1 et K_2 de degré zéro, nous appelons self-produit de K_1 et K_2 l'opérateur intégral singulier $K_1 \circ K_2$ tel que

$$\sigma_o(K_1 \circ K_2) = \sigma_o(K_1)\, \sigma_o(K_2).$$

LEMME 1.1.1.- Un opérateur intégral singulier de degré zéro est la somme d'une série d'opérateurs intégraux singuliers simples de degrés zéro :

$$K = \sum_{m=1}^{\infty} A_m K_m \quad \underline{\text{où}} \quad A_m f = a_m(x) f(x)$$
$$K_m f = k_m(x) * f(x)$$

<u>LEMME 1.1.2.- Si</u> K_1K_2 <u>définit le produit de composition (au sens habituel) de deux opérateurs de degré zéro,</u> $K_1 \circ K_2 - K_1K_2$ <u>applique continuement</u> L^p <u>dans</u> L^p_1 , <u>soit</u>

$$\forall f \in L^p, \quad \|(K_1 \circ K_2 - K_1K_2)f\|_{p,1} \leq C\|f\|_p$$

<u>LEMME 1.1.3.- Un opérateur</u> K <u>de degré zéro qui va continuement de</u> L^p_s <u>dans</u> L^p_{s+1} <u>est nul.</u>

<u>Remarque 1.1.2.</u> Ces deux lemmes sont vrais aussi pour des opérateurs en v.p.

<u>Preuve du théorème 1.1.1.</u>

Supposons que $K = K_o + K_1 + \ldots + K_r + S = 0$ et montrons que $h_j(x,z) = 0$ pour tout j .

$$k_j(x,\hat{z}) = \tilde{h}_j(x,z)(1-\phi(z))\ |z|^{-j} \quad \text{où l'on a posé}$$

$\tilde{h}_j(x,z) = h_j(x,z)\ |z|^j$, fonction homogène de degré zéro en z .

Alors pour tout j

$$K_j \cdot = H_j \left[(1-\phi(z))|z|^{-j}\right]^{\vee} * \cdot$$

où H_j est un opérateur intégral singulier en v.p. dont le o-symbole est $\tilde{h}_j(x,z)$.

Par le théorème des multiplicateurs, de L. Hörnander, (voir annexe), nous savons que $\left[(1-\phi(z))\ |z|^{-j}\right]^{\vee} * \cdot$ applique L^p dans L^p_j et comme il s'agit d'une convolution (qui donc commute avec les translations), cet opérateur applique L^p_s dans L^p_{s+j} pour tout s (voir par exemple Calderón [1]) et il n'envoie pas L^p_s dans L^p_{s+j+1} . Par ailleurs H_j applique L^p_s dans L^p_s pour tout s . Donc K_j est j-améliorant.

Soit alors j le plus petit indice tel que $h_j(x,z) \equiv 0$, c'est-à-dire $K_j \neq 0$. Alors $K_j = -(K_{j+1} + \dots + K_r + S)$ et donc $K_j \quad {}_{j+1}$.

Pour tout indice ℓ , $K_\ell = \sum H_\ell \check{\psi}_\ell *$ où $\psi_\ell = [1-\phi(z)]\ |z|^{-\ell}$.
Nous définissons l'opérateur $\check{\chi}_\ell *$ par

$$(\chi_\ell f)^\wedge = \{[1-\phi(z)]\ |z|^{-\ell} + \phi(z)\}\ \hat{f} .$$

Alors $[\psi_\ell - \chi_\ell]^\vee * f = -\check{\phi} * f$ est un opérateur améliorant d'ordre infini.

De plus $\check{\chi}_\ell *$ a un inverse continu de $L^p_{s+\ell}$ dans L^p_s $(\psi_\ell(z) + \phi(z) \neq 0 \ \forall z)$.

Alors $H_j(\check{\chi}_j *) = \sum_{\ell=j+1}^{r} H_\ell(\check{\psi}_\ell *) + S + H_j(\check{\chi}_j * - \check{\phi}_j *)$

et $H_j = \sum_{\ell=j+1}^{r} H_\ell(\check{\psi}_\ell *)(\check{\chi}_j *)^{-1} + S(\check{\chi}_j *)^{-1} + H_j(\check{\chi}_j * - \check{\psi}_j *)(\check{\chi}_j *)^{-1}$

et il est trivial que H_j est 1-améliorant.

Alors par le lemme 1.1.3. $\tilde{h}_j \equiv 0$, $h_j \equiv 0$, $K_j = 0$.

<u>Le théorème est démontré</u>.

Etudions maintenant les lemmes.

<u>LEMME 1.1.1.</u>- Nous ne donnons pas ici sa preuve car ce lemme est un cas particulier de la proposition 1.3.1. que nous établissons plus loin.

<u>LEMME 1.1.2.</u>- Puisque, d'après le lemme précédent, on peut décomposer K_1 et K_2 en séries d'opérateurs simples, il suffit de montrer le lemme pour deux opérateurs simples $K_1 = A_1B_1$ et $K_2 = A_2B_2$, c'est-à-dire

$$K_1 f = \int a_1(x)\ b_1(x-y)\ f(y)dy$$

$$K_2 f = \int a_2(x)\ b_2(x-y)\ f(y)dy$$

Alors $K_1 \circ K_2 - K_1K_2 \simeq A_1[A_2,B_1]B_2$ où $[A_2,B_1] = A_2B_1 - B_1A_2$.

Nous allons montrer que $[A_2,B_1]$ applique continuement L^p dans L^p_1 , c'est-à-dire

$$\forall f \in L^p ,\ \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\ [(A_2B_1 - B_1A_2)f]\right\|_p \leq C\|f\|_p .$$

$$\text{Or } \frac{\partial}{\partial x_i}\ [(A_2B_1 - B_1A_2)f] = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_i}\ B_1 - B_1\ \frac{\partial a_2}{\partial x_i}\right)f + (a_2B_1 - B_1a_2)\ \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Rappelons que $(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} h(x,z) \in L^2_{n+r+1}$ (cf. Définition 1.1.2 (ii)) donc $a_2(x)$ est deux fois dérivable au sens habituel.

Par ailleurs $|b_j(x-y)| \leq c_j |x-y|^{-n}$

$$|\frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x-y)| \leq c_j' |x-y|^{-n-1} \quad (j = 1,2)$$

d'après la décomposition de K_i (voir proposition 1.3.1. formule (*)) Alors on montre sans difficulté (voir exemple Caldéron [1] §8 théorème 4 pour la marche de la démonstration) que

$$\left\| (a_2 B_1 - B_1 a_2) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_p \leq c \|f\|_p .$$

Nous en déduisons que

$$\| \frac{\partial}{\partial x_i} [(A_2 B_1 - B_1 A_2) f] \|_p \leq c \|f\|_p \quad \text{et donc}$$

$$\|(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2) f\|_{p,1} \leq c \|f\|_p .$$

Le lemme est démontré.

LEMME 1.1.3.- Nous savons que K va continuement de L^p_s dans L^p_s. Supposons maintenant que pour toute f dans L^p,

(1) $\|Kf\|_{p,1} \leq A \|f\|_p$ où A est une constante.

Soit $h(x,z)$ le o-symbole de K, de degré zéro en z. Nous appelons $\mathcal{C}$ la classe des o-symboles dont l'opérateur de degré zéro associé vérifie (1).

Trivialement, $\mathcal{C}$ est linéaire. Après avoir montré que $\mathcal{C}$ est un idéal de l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions $h(x,z)$ de degré zéro en z et satisfaisant aux conditions de la définition 1.1.2., nous prouverons que $\mathcal{C}$ est formé de l'unique élément nul (les conditions de régularité sur h permettent de voir facilement que $\mathcal{A}$ est une algèbre).

Soit $h_1(x,z) \in \mathcal{A}$ et K_1 l'opérateur associé. Alors d'après le lemme 1.1.2.

(2) $\|(K \circ K_1 - KK_1) f\|_{p,1} \leq A \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p$

(A désigne diverses constantes).

De plus $\|K_1K\, f\|_{p,1} \leq A\, \|Kf\|_{p,1}$ et d'après (1)

(3) $\|K_1K\, f\|_{p,1} \leq A\, \|f\|_p$. En appliquant (2) nous obtenons

$\|(K\circ K_1)f\|_{p,1} \leq A\, \|f\|_p$ (Nous mettons indifféremment $K \circ K_1$ ou $K_1 \circ K$ car ils sont définis par le même o-symbole). Nous en déduisons que $hh_1(x,z) = h_1h(x,z) \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est bien un idéal de $\mathcal{A}$.

Fixons alors x en un point x_o de $\mathbb{R}^n$. Soit u une rotation de $\mathbb{R}^n$ autour de x_o . Nous notons

$f_u(x) = f \circ u(x)$; $h_u(x,z) = \sigma_o(K_u)$ où K_u est l'image de K par la rotation u .

Nous avons évidemment

$h_u(x,z) = h[u(x),\, u(z+x_o) - x_o]$. Alors

$\left[\frac{\partial}{\partial x} f\right]_u = \frac{\partial}{\partial x} f_u$; $K_uf_u = [Kf]_u$, d'où nous obtenons

$\|K_uf_u\|_{p,1} = \|(Kf)_u\|_{p,1} = \|Kf\|_{p,1} \leq A\|f\|_p = A\|f_u\|_p$

car la rotation conserve les normes. Donc si $h \in \mathcal{C}$, alors pour toute rotation u , $h_u \in \mathcal{C}$.

Supposons maintenant que $h(x_o,z)$ ne soit pas identiquement nul en z . Il existe un nombre fini de rotations u_k telles que, en prenant sur la sphère de centre x_o et rayon 1, une partition de l'unité C^∞ $(\chi_k)_k$, associée à ces rotations en un sens évident,

$$g(x,z) = \sum_k h_{u_k}(x,z)\, \chi_k(x,z) \Longrightarrow g(x_o,z) \neq 0 \quad \forall z .$$

Soit alors $a(x) \neq 0$ une fonction de $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support petit autour de x_o (de sorte que $g(x,z) = 0 \Longrightarrow a(x) = 0$).

Posons $g_1(x,z) = a(x)\, g^{-1}(x,z)$ lorsque $a(x) \neq 0$

$= 0$ lorsque $a(x) = 0$.

Alors $g_1 \in \mathcal{A}$ et donc $g_1g \in \mathcal{C}$. Or $g_1g = a(x)$.

Nous en déduisons :

$\forall f \in L^p$, $\|a(x)f\|_{p,1} \leq A\|f\|_p$.

donc $a(x) \equiv 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Alors $h(x_0,z)$ est nul identiquement en z et puisque x_0 est arbitrairement choisi, $h(x,z) \equiv 0$, donc $K = 0$.

Le lemme 1.1.3. est donc démontré et <u>le théorème 1.1.1. est ainsi totalement établi.</u>

Donnons enfin une nouvelle définition des opérateurs intégraux singuliers.

<u>DEFINITION 1.1.6.</u>- Nous appelons J l'opérateur (d'intégration) défini par sa transformée de Fourier :

$(Jf)^{\wedge} = \psi(x)\,\hat{f}(x)$ où $\psi(x)$ a les propriétés

(i) $\psi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et ne dépend que de $|x|$

(ii) $\psi(x) > 0$ et $\psi(x) = |x|^{-1}$ pour $|x| \geq \rho$ (cf. définition 1.1.2.)

Alors d'après le théorème des multiplicateurs (voir Annexe), J applique continuement L^p_s dans L^p_{s+1} et cela pour tout s puisqu'il s'agit d'une vraie convolution.

De plus $(J^k f)^{\wedge} = \psi^k\,\hat{f}$ et

$K_\ell f = (H_\ell\, J^\ell) f$ où H_ℓ est un opérateur intégral singulier de degré zéro de o-symbole $\tilde{h}'_\ell(x,z)$.

<u>En effet</u> :

La fonction associée à K_ℓ (cf. Définition 1.1.2.) est $h_\ell(x,z)(1-\phi(z))$.

Celle associée à $H_\ell\, J^\ell$ est $\tilde{h}'_\ell(x,z)(1-\phi(z))\,\psi^\ell(z)$.

Posons $\tilde{\psi}^\ell(z) = \psi^\ell(z)|z|^\ell$, alors

$\tilde{h}'_\ell(1-\phi)\psi^\ell = \tilde{h}'_\ell(x,z)|z|^{-\ell}\tilde{\psi}^\ell(z)(1-\phi(z))$ où $\tilde{h}'_\ell(x,z)$ et $\tilde{\psi}_\ell(z)$ sont homogènes de degré zéro en z pour $|z| \geq \rho$.

Alors en posant $\tilde{h}'_\ell(x,z) = \dfrac{\tilde{h}_\ell(x,z)}{\tilde{\psi}^\ell(x,z)}$ $(\tilde{h}_\ell(x,z) = h_\ell(x,z)|z|^{+\ell})$,

On a l'égalité des fonctions associées à K_ℓ et à $H_\ell\, J^\ell$, ces deux opérateurs sont donc égaux.

Nous pouvons donc écrire les opérateurs de $\mathcal{O}_{m,r}(\mathbb{R}^n)$ comme des polynômes d'opérateurs intégraux J avec des hypothèses de différentiabilité sur les o-symboles des coefficients H_ℓ :

$$K = \sum_{\ell=0}^{r} H_\ell \, J^\ell + S$$

avec $S \in \mathcal{S}_{r+1}$

et $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \, h'_\ell(x,z) \in L^2_{n+(r+1)-\ell} \quad (1 \leq |z| \leq 2)$

uniformément en x et pour $|\alpha| \leq m + 2(r+1) - \ell$.

n° 2. LES SYMBOLES.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$, m et r étant déjà fixés dans l'introduction, soit $\ell \geq r + \frac{n}{2}$ un entier.

DEFINITION 1.2.1.- Etant donné un opérateur différentiel $\sum a_{\alpha,i}(x,z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^k$, $z \in V$, tel que les $a_{\alpha,i}(x,z)$ soient homogènes de degrés $d_{\alpha,i}$ (entiers non positifs) en z , nous appelons poids du terme $a_{\alpha,i}(x,z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$ le nombre positif

$$w_{\alpha,i} = |\alpha| - d_{\alpha,i}.$$

Nous considérons les opérateurs $\sum\limits_{w \leq r} a_{\alpha,i} \, (x,z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$ tels que les $a_{\alpha,i}$ soient des fonctions homogènes en z de degrés non positifs entiers $d_{\alpha,i}$, vérifiant $(\frac{\partial}{\partial x})^\beta \; a_{\alpha,i} \; (x,z) \in L^2_{\ell-w+|\alpha|} \; (1 \leq |z| \leq 2)$ uniformément en x et pour $|\beta| \leq m-w$: $a_{\alpha,i} \in B_{m-w} \; (L^2_{\ell-w+|\alpha|} \; (1 \leq |z| \leq 2))$.

Remarquons que $-w + |\alpha| = d_{\alpha,i}$ ne dépend que du degré d'homogénéité de $a_{\alpha,i}$ (et non de $|\alpha|$).

Dans B_{m-w} nous définissons la norme

$$\|a_{\alpha,i}\| = \sup_{\substack{x \\ |\beta| \leq m-w}} \|(\frac{\partial}{\partial x})^\beta \, a_{\alpha,i}(x,z)\|_{L^2_{\ell-w+|\alpha|}} \quad (1 \leq |z| \leq 2)$$

et nous prenons comme norme des opérateurs différentiels

$$\Big\| \sum_{w\leq r} a_{\alpha,i}(x,z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \Big\| = \sum_{\alpha,i} \| a_{\alpha,i} \|$$

DEFINITION 1.2.2.- Etant donnés deux opérateurs différentiels P_1 et P_2 définis comme ci-dessus, on définit leur produit P_1P_2 comme le produit ordinaire de deux opérateurs dans lequel on supprime les termes de poids $> r$.

La classe d'opérateurs ainsi définie sera notée $\mathcal{L}^{(r)}_{m,\ell}$.

On a alors la

Proposition 1.2.1. $\mathcal{L}^{(r)}_{m,\ell}$ est une algèbre de Banach non commutative.

Preuve.

Il est tout d'abord évident que c'est une algèbre non commutative.

Considérons le sous-espace vectoriel $E_{\alpha_1,i}$ d'opérateurs différentiels qui s'écrivent

$$L_{\alpha_1,i} = a_{\alpha_1,i}(x,z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 \text{ et } i \text{ fixés,}$$

de poids fixé $w_1 = |\alpha_1| - d_{\alpha_1,i} \leq r$.

Un tel espace est trivialement un Banach et $\mathcal{L}^{(r)}_{m,\ell} = \bigoplus_{\text{finie}} E_{\alpha_1,i}$

la somme étant topologique.

$\mathcal{L}^{(r)}_{m,\ell}$ est donc un Banach.

Pour montrer que le produit est continu composons deux éléments de deux $L_{\alpha,i}$ quelconques :

$$P = a\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \quad (d^\circ_z(a) = d)$$

$$Q = b\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta} \quad (d^\circ_z(b) = \delta)$$

$$PQ = \sum_{\gamma} \frac{\alpha!}{\gamma!\,\alpha-\gamma!}\, a\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\gamma} b\right]\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha+\beta-\gamma}$$ d'après la formule

de Leibniz. Il suffit alors d'écrire les normes pour constater trivialement la continuité de la multiplication.

La proposition est démontrée.

Cas particuliers.

1°) $r = 0$. Alors $w = 0$ et $|\alpha| = 0$.

$\mathcal{A}^{(o)}_{m,\ell}$ est l'algèbre de toutes les fonctions homogènes de degré zéro en z et appartenant à $B_m(L^2(1 \leq |z| \leq r))$.

2°) Soit $s < r$. L'ensemble des termes de $\mathcal{A}^{(r)}_{m,\ell}$ qui sont sommes d'éléments de poids $\geq s$ forment un idéal bilatère $\mathfrak{J}^s$ de l'algèbre (la vérification est immédiate). Nous avons les isomorphismes

$$\mathcal{A}^{(s-1)}_{m,\ell} \simeq \mathcal{A}^{(r)}_{m,\ell}/_{\mathfrak{J}^s} \quad \text{et en particulier}$$

$$\mathcal{A}^{(o)}_{m,\ell} \simeq \mathcal{A}^{(r)}_{m,\ell}/_{\mathfrak{J}^1}$$

DEFINITION des symboles 1.2.3.- Etant donné un opérateur K de $\mathcal{O}_{m,r}$, nous lui associons un élément $\sigma(K) \in \mathcal{A}^{(r)}_{m+2(r+1),n+(r+1)}$ de la manière suivante :

Soit $h(x,z) = \sum_{j=o}^{r} h_j(x,z)$ où les $h_j(x,z)$ sont les fonctions associées aux K_j dans la définition 1.1.2.

Nous développons $h(x+u,z)$ en "série de Taylor" autour de x jusqu'au poids r

$$h(x+u,z) = \sum_{|w| \leq r} \frac{1}{\alpha!} u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h(x,z) + F(r,x,z,h).$$

Nous remplaçons dans cette expression les puissances u^α de u par $D^\alpha = \left(\frac{-1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$ et nous obtenons par définition

$$\underline{\sigma(K) = \sum_{|w| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha [h_\alpha(x,z).]}$$

où $h_\alpha(x,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h(x,z) = \sum_{j=o}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h_j(x,z).$

D'après les hypothèses de différentiabilité, on vérifie sans peine que

$$\sigma(K)\in\mathcal{L}^{(r)}_{m',\ell'} \quad \text{où} \quad m' = m + 2(r+1)$$
$$\ell' = n + r + 1 .$$

n° 3. THEOREME FONDAMENTAL. Théorème 1.3.1.

(i) $\mathcal{O}_{m,r}$ est une algèbre fermée pour l'adjonction, qui est une involution continue.

(ii) L'application $K \mapsto \sigma(K)$ est un $*$-homomorphisme de $\mathcal{O}_{m,r}$ dans $\mathcal{L}_{m+2(r+1),n+(r+1)}$, de noyau $\mathcal{S}_{r+1}$

(iii) Si $K = \sum_{j=o}^{r} K_j + S$, alors la norme de K_j dans $\mathcal{S}_j$ vérifie l'inégalité

$$\|K_j\|_j \leq C(p,m,n,r,\phi)\ \|\sigma(K)\|$$

où la norme de $\sigma(K)$ est prise dans $\mathcal{L}_{m+2(r+1),n+(r+1)}$.

Remarque. En général l'application σ n'est pas surjective. Nous verrons plus loin (théorème 1.3.2.) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $\mathcal{L}_{m+2(r+1),n+(r+1)}$ soit un symbole.

La démonstration va consister à développer chaque K_j en série d'opérateurs simples (voir définition 1.1.3.) et à montrer le théorème pour de tels opérateurs.

Pour alléger la démonstration nous considérerons que $K = K_j$ est un opérateur j-améliorant $(0 \leq j \leq r)$ et nous ne mettrons pas cet indice j.

Proposition 1.3.2.- Il existe une série d'opérateurs simples A_qK_q $\left(A_qK_q\, f = \int a_q(x)\, k_q(x-y)\, f(y)dy\right)$ de degré j, telle que :

1) $\sum A_qK_q$ est normalement convergente dans $\mathcal{S}_j$.

2) $\sum \sigma(A_q K_q)$ <u>est normalement convergente dans</u> $\mathcal{S}_{m+r+1,r+\frac{n}{2}}$ <u>et convergente dans</u> $\mathcal{S}_{m+2(r+1),n+r+1}$

3) $\sum A_q K_q$ <u>est convergente dans</u> $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

<u>Et $K = \sum A_q K_q$</u> .

<u>Démonstration.</u>

1.3.2.1. <u>Développement en série de $h(x,z)$.</u>

$h(x,z)$ est homogène de degré $-j$ en z . Nous étudions $\tilde{h}(x,z) = h(x,z)\,|z|^j$, c'est-à-dire $h(x,z)$ définie sur la sphère $\sum = \{z|\ |z| = 1\}$. Soit $(\eta_\nu)_\nu$ une partition C^∞ de l'unité sur $\sum$ associée à un recouvrement <u>fini</u> ouvert $\{\mathcal{U}_\nu\}_{\nu=1}^{\nu=\lambda}$ de cette sphère tel qu'on puisse définir des cartes $(\mathcal{O}_\nu, f_\nu)$ où les $\mathcal{O}_\nu$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$ et les f_ν des C^∞ difféomorphismes de $\mathcal{O}_\nu$ sur $\mathcal{U}_\nu$. Nous écrivons $\tilde{z}$ les points de $\mathcal{O}_\nu$ et soit $|z| = 1$. Pour tout ν , $(\eta_\nu h) \circ f_\nu$ est développable en série de Fourier (en prolongeant cette fonction par zéro hors de $\mathcal{O}_\nu$) et :

$$(\eta_\nu h) \circ f_\nu = \sum_q a_q^\nu(x)\, e^{iq\omega\tilde{z}} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,\lambda)$$

où $q = (q_1,\ldots,q_{n-1})$ et $q\tilde{z} = q_1\tilde{z}_1 + \ldots + q_{n-1}\tilde{z}_{n-1}$.

Pour ν donné, $(\eta_\nu h) \circ f_\nu$ est une fonction périodique en chaque variable, nous considérons la plus grande de ces périodes, soit ω_ν , et $\omega = \max_{\nu=1,\ldots,\lambda} \omega_\nu$. ω dépend des supports des η_ν .

Nous en déduisons en renumérotant $(\sum |q_i| = |q|)$

$$\eta_\nu h = ((\eta_\nu h) \circ f_\nu) \circ f_\nu^{-1} = \sum_{|q|=1}^{\infty} a_q^\nu(x)\, \phi_q^\nu(z) \qquad (|z| = 1)$$

En prolongeant $\Phi_q^\nu(z)$ à tout l'espace par homogénéité (de sorte qu'elle soit homogène de degré $-j$), nous avons

$$(*) \qquad |(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha \ \Phi_q^\nu(z)| \leq C(|q|\omega)^{|\alpha|}|z|^{-j-|\alpha|}$$

Puisque $h(x,z) = \sum_{\nu=1}^{\lambda} h \, \eta_\nu$ nous obtenons

$$h(x,z) = \sum_{\nu,q} |z|^{-j} \ a_q^\nu(x) \ \Phi_q^\nu(z) = \sum_{|q|=1}^{\infty} a_q(x) \ \Phi_q(z)|z|^{-j}$$

où Φ_q a les mêmes propriétés que Φ_q^ν.

Nous appelons A_q l'opérateur de multiplication par $a_q(x)$ et K_q l'opérateur défini par

$$(K_q \ f)\hat{} = \Phi_q(z)(1-\phi(z))\hat{f} \ .$$

1.3.2.2. <u>Montrons que</u> $\sum A_q K_q$ <u>est normalement convergente dans</u> $\mathcal{S}_j$.

Nous voulons majorer $\|A_q K_q\|_j \leq C \sup_{x,|\alpha|\leq j} |D^\alpha \ a_q(x)| \ \|K_q\|_j$.

Si l'on pose $\tilde{\Phi}_q(z) = \Phi_q(\frac{z}{|z|})$

$$(K_q f)\hat{} = \tilde{\Phi}_q(z) \ [(1-\phi(z)) \ |z|^{-j} \ \hat{f}] \ .$$

Puisque $[(1-\phi(z))|z|^{-j}]^\vee *\cdot$ est une vraie convolution et d'après le théorème des multiplicateurs (voir annexe et Calderón [1]), cet opérateur applique L_k^p dans L_{k+j}^p pour tout k et sa norme est bornée indépendamment de q.

Majorons maintenant la norme de $\tilde{\Phi}_q^\vee *$, opérant de L_{k+j}^p dans L_{k+j}^p :

Par construction $\tilde{\Phi}_q$ est une fonction C^∞ de z et donc d'après le théorème des multiplicateurs $\tilde{\Phi}_q \in \mathfrak{M}_p^p$ lorsqu'on désigne d'une manière générale par $\mathfrak{M}_p^{p'}$ l'espace des fonctions $g(z)$ telles que $\check{g}(z) *\cdot$ soit une convolution de L^p dans $L^{p'}$. Finalement $\tilde{\Phi}_q^\vee *\cdot$ applique continuement L_k^p dans L_k^p pour tout k et a la même norme dans $\mathcal{L}(L_k^p, L_k^p)$

que dans $\mathcal{L}(L^p,L^p)$ (voir Calderón [1]). Si $[\frac{n}{2}+1]$ désigne la partie entière de $(\frac{n}{2}+1)$, soit $N_q = \sup\limits_{\substack{|\alpha|\leq[\frac{n}{2}+1] \\ z\in\Sigma}} |D^\alpha \Phi_q|$.

Si l'on écrit $L_p^p(\tilde{\Phi}_q^\vee * \cdot)$ la norme de cet opérateur dans $\mathcal{L}(L^p,L^p)$, nous avons (voir Annexe, formule (*))

$$L_p^p(\tilde{\Phi}_q^\vee * \circ) \leq C\, N_q \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Il faut maintenant majorer $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \sup\limits_x |a_q(x)| N_q = \mathcal{S}$.

Nous savons que $(\eta_\nu h(x,z)) \circ f_\nu \in B_{m+2(r+1)-j}(L^2_{n+(r+1)-j}(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $\nu = 1,2,\ldots,\lambda$ et qu'elle a un support compact en $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Soit U un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, si $f \in L^2_k(U)$ et si son développement en série de Fourier est $\sum a_q \Phi_q$, alors l'application $T : f \longrightarrow (a_q |q|^k)$ de $L^2_k(U)$ dans ℓ^2 est continue. Nous en déduisons

$$\exists\, M \text{ tel que } \sum |a_q^\nu |q|^s|^2 < M \quad \text{pour } s = n + r + 1-j$$

Par ailleurs

$$\sum |a_q^\nu |q|^t| \leq \sum |a_q^\nu| |q|^{t+\frac{n-1}{2}+\varepsilon} |q|^{-\frac{n-1}{2}-\varepsilon}$$

Par la relation de Cauchy-Schwartz nous obtenons

$$\sum |a_q^\nu |q|^t| \leq \sum |a_q^\nu|^2 \, |q|^{2t+(n-1)+2\varepsilon} \quad \sum |q|^{-(n-1)-2\varepsilon}$$

Or $\sum |q|^{-(n-1)-2\varepsilon} < C$ (C étant une constante)

donc

la série $\sum |a_q^\nu|\, |q|^t$ est convergente lorsque

$t + \frac{n-1}{2} + \varepsilon \leq n + r + 1-j$, soit

$t < \frac{n+3}{2} + r-j$.

Finalement nous obtenons que la série

$$\sup_{\substack{x \\ |\alpha|\leq j}} \sum_q |D^\alpha a_q(x)|\, N_q \quad \text{est convergente.}$$

Remarquons que, le nombre de termes α tels que $|\alpha| \leq j$ étant fini, on peut prendre le sup sur les α ou sommer sur les α).

Soit $b_q(x) = \sum_\alpha D^\alpha a_q(x) N_q$.

Vues les conditions sur $h(x,z)$ et puisque $|\alpha| \leq j$, on a trivialement

$$\sup_x \sum_q |(\frac{\partial}{\partial x})^\beta b_q(x)| < \infty, \ (\frac{\partial}{\partial x})^\beta b_q(x) \text{ étant continue,}$$

pour tout $|\beta| \leq n$.

Supposons alors que $n = 1$:

$b_q(y) = b_q(x) + \int_x^y b_q'(t)dt$ et donc si y est tel que $|y-x|$ soit maximum,

$$\sup_y |b_q(y)| \leq |b_q(x)| + \int_x^y |b_q'(t)| \, dt$$

et $\sum_q \sup_y |b_q(y)| \leq \sum_q |b_q(x)| + \int_x^y \sum_q |b_q'(t)| \, dt < +\infty$.

On démontre alors par récurrence, en utilisant le fait que $|\beta| \leq n$, que dans l'espace à n dimensions

$$\sum_q \sup_x |b_q(x)| < \infty .$$

Donc $\sum A_q K_q$ est normalement convergente dans $\mathcal{D}_j$.

1.3.2.3. <u>Montrons que</u> $\Sigma\, \sigma(A_q K_q)$ <u>est normalement convergente dans</u> $\mathcal{E}_{m+r+1, r+\frac{n}{2}}$

$$\sigma(A_q K_q) = \sum_{\omega \leq r} \frac{1}{\alpha!} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha a_q(x) \, D^\alpha \, \phi_q(\frac{z}{|z|}).$$

Nous savons que $\sigma(A_q K_q) \in \mathcal{E}^{(r)}_{m+2(r+1), n(r+1)}$ et que les séries dérivées par rapport à z du développement de $h(x,z)$ sont convergentes dans $\ell^\infty(x,\Sigma)$ uniformément en x , les dérivées étant prises jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2}$. D'autre part, d'après l'hypothèse, nous avons

$$(\frac{\partial}{\partial x})^\beta h(x,z) \in L^2_{n+r+1-j}(\Sigma) \quad \text{pour } |\beta| \leq m+2(r+1)-j .$$

Donc les séries de la forme

$$\sum \sup_x \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta a_q(x)\right| \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\gamma \Phi_q(z) \quad \text{sont convergentes}$$

dans

$$L^2(\Sigma) \quad \text{pour} \quad |\beta| \leq m+2(r+1)-j$$
$$|\gamma| \leq \frac{n}{2}+r-j \ .$$

Nous en déduisons immédiatement la convergence normale de $\sum \sigma(A_q K_q)$ dans l'espace $\mathcal{L}^{(r)}_{m'',\ell''}$, où $m'' = m+2(r+1)$ et $\ell'' = \frac{n}{2} + r$, quel que soit le degré d'homogénéité $-j$ de $h(x,z)$ $(0 \leq j \leq r)$ que l'on s'est fixé.

Nous en déduisons la convergence de $\sum \sigma(A_q K_q)$ dans $\mathcal{L}^{(r)}_{m'',\ell''}$.

Chaque $\sigma(A_q K_q)$ appartient à l'algèbre fermée $\mathcal{L}^{(r)}_{m'',\ell'}$ $(\ell' = n+r+1)$, donc $\sum \sigma(A_q K_q)$ converge dans cette algèbre.

Il est de plus, évident qu'elle converge vers $\sigma(K)$.

1.3.2.4. <u>Montrons que</u> $\sum A_q K_q$ <u>est convergente dans</u> $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

Ceci est évident puisque la convergence normale dans $\mathcal{S}_j$ entraîne la convergence de la série, et cela pour tout p, $1 < p < \infty$, donc en particulier dans $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

1.3.2.5. <u>Montrons que</u> $K = \sum A_q K_q$.

Dans $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ on a $\sum A_q K_q = K'$.

Etudions le cas où h est de degré zéro en z :

Si f et $\hat{f}$ sont dans $L^2 \cap L^1$ (un tel ensemble de fonctions f est dense dans L^2), et en appliquant le théorème de la convergence dominée, de Lebesgue,

$$A_q K_q f = \int e^{2i\pi(x,z)} a_q(x)\ \Phi_q(z)(1-\phi(z))\hat{f}(z)dz$$
$$\sum A_q K_q f = \int e^{2i\pi(x,z)} h(x,z)(1-\phi(z))\hat{f}(z)dz$$

d'où $\sum A_q K_q f = Kf + S = K'$ où S est améliorant.

Alors $\sum A_q K_q = K + S$. Mais nous avons

$$\sigma(\sum A_q K_q) = \sigma(K)$$

Donc $\sigma(K+S) = \sigma(K)$ et S est $(r+1)$-améliorant.

Donc $\sum A_q K_q = K$, à un opérateur (r+1) améliorant près.

La convergence est alors immédiate lorsque h est de degré -j . Les opérateurs intégraux singuliers appartiennent à $\bigcap_{1<p<\infty} \mathcal{L}(L^p,L^p)$ et puisque L^p_k est dense dans $L^p_{k'}$ pour $k' \leq k$, on a finalement que $\sum A_q K_q = K$ dans $\mathcal{O}_{m,r}$.

<u>La proposition est démontrée.</u>

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 1.3.1.. Pour cela nous utiliserons les développements en séries définis dans la proposition 1.3.1.

1.3.1.1. <u>Le noyau de l'application</u> σ <u>est</u> $\mathcal{S}_{r+1}$

Ce résultat est évident.

1.3.1.2. $\mathcal{O}_{m,r}$ <u>est une algèbre et</u> σ <u>est un homomorphisme</u> d'algèbres.

Considérons les deux opérateurs

$$\mathcal{H} = \sum A_q H_q$$

$$\mathcal{K} = \sum B_q K_q$$

et leur produit $\mathcal{H}\mathcal{K} = \sum_{q,q'} A_q H_q B_{q'} K_{q'}$.

Nous définissons $\mathcal{L}$ par la relation

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{H})\,\sigma(\mathcal{K}) \text{ , soit } \mathcal{L} = \mathcal{H} \circ \mathcal{K} \text{ .}$$

En explicitant $\mathcal{L}$ nous allons montrer que

$$\mathcal{L} - \mathcal{H}\mathcal{K} \in \mathcal{S}_{r+1}$$

Pour établir cela nous ne raisonnerons que sur un seul terme de chaque somme :

soient H dont le o-symbole est de degré -j , K dont le o-symbole est de degré $-k$, A et B les opérateurs de multiplication par $a(x)$ et $b(x)$. Nous considérons que

$$\mathcal{H} = AH \quad \text{et} \quad \mathcal{K} = BK$$

Nous allons modifier les opérateurs pour que le nouvel opérateur produit soit de la forme $ABHK$, qui appartient à $\sigma_{m,r}$ de façon triviale et dont on a finalement le symbole.

En explicitant H on obtient

$$Hf = \psi * f \quad \text{où} \quad \psi = [\phi(\frac{z}{|z|})|z|^{-j}(1-\phi(z))]^{\vee}$$

Nous définissons H' par

$$H'f = \psi' * f \quad \text{où} \quad \psi' = (\psi\phi)(x).$$

Alors $(H - H')f = [\phi(\frac{z}{|z|})|z|^{-j}(1-\phi(z))]^{\vee}(1-\phi) * f$

Nous devons montrer le

<u>LEMME 1.3.1.</u>- $H-H' \in \mathcal{S}_{r+1}$ <u>et</u> $\|H-H'\|_{\mathcal{S}_{r+1}} \leq CN$ <u>où</u> C <u>ne dépend que de</u> p <u>et</u> $N = \sup\limits_{\substack{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}+1] \\ |z|=1}} |D^{\alpha}\phi|$.

Soit $\gamma(z) = \phi(\frac{z}{|z|})$

Nous avons $\gamma|z|^{-j} \in L^2_{n+r+1-j}(\Sigma)$. Nous en déduisons

$$\gamma|z|^{-j}(1-\phi) \in L^2_{n+r+1-j}(B) \quad \text{où } B \text{ est une boule}$$

compacte autour de l'origine.

Alors $\Delta^q[\gamma(1-\phi)|z|^{-j}] \in L^2(B)$ pour $2q \leq n+r+1-j$.

Le degré de cette fonction étant $-(2q+j)$ assez loin de l'origine,

$|z|^s \Delta^q[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}] \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si $2q + j-s > \frac{n}{2}$.

Par transformation de Fourier nous obtenons

$D^s\{|x|^{2q}[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, où D^s est une dérivation en x d'ordre s .

Il est alors trivial que

$D^s\{|x|^{2q}[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee(1-\phi)\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Appliquons la dérivation D^s à ce produit entre accolades, nous obtenons à la suite de raisonnements élémentaires

$|x|^{2q} D^s\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]\ (1-\phi)\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

De plus

$$D^s\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee(1-\phi)\} = D^s\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\}(1-\phi) + \sum_{|\alpha|<s} D^\alpha\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\}\ \phi_\alpha$$

où les ϕ_α sont des fonctions C^∞ à support dans une petite couronne. Comme $D^\alpha\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\} \in L^2$ les fonctions sous le signe $\sum$ sont dans L^1 ; puisque la couronne est compacte. Soient ψ_α ces fonctions. Par la relation de Cauchy-Schwartz, il vient

$$\|D^s\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee(1-\phi)\}\|_{L^1}$$
$$\leq \|\ |x|^{2q} D^s\{[\tilde{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\}\sqrt{1-\phi}\|_{L^1}\ \||x|^{-2q}\sqrt{1-\phi}\|_{L^2} +$$
$$+ \sum_{|\alpha|<s}\|\psi_\alpha\|_{L^1}$$

Nous avons $\|\ |x|^{-2q}\ \sqrt{1-\phi}\|_{L^2} < C$ pour $2q > \frac{n}{2}$.

La première norme du second membre est bornée si $2q-s > \frac{n}{2} - j$.

Finalement :

$$D^s\{[\hat{\phi}(1-\phi)|z|^{-j}]^\vee\ (1-\phi)\} = D^s\ \chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

où nous appelons $\chi(x)$ l'expression entre accolades.

Si nous choisissons $q = [\frac{1}{2}(n+r+1-j)]$ (partie entière) nous obtenons

$$s < 2q + j - \frac{n}{2} = [\frac{n}{2} + r + 1]\ ,\ \text{soit}\ s \leq r+1\ .$$

<u>Remarque.</u> Il existe une difficulté pour $n=1$ et $(n+r+1-j)$ impair, mais elle n'est pas essentielle : il suffit par exemple

de travailler avec l'opérateur de dérivation dont la transformée de Fourier est $(1+|z|)^q$.

Finalement nous obtenons

$$\| D^s[(H-H')f] \|_p = \| [D^s(\psi(1-\phi))] * f \|_p \leq \| D^s(\psi(1-\phi) \|_1 \; \|f\|_p$$

pour $s \leq r+1$.

Donc $(H-H')$ applique continuement L^p_s dans L^p_{s+r+1} pour tout s (car c'est une vraie convolution).

Il nous suffit donc de montrer que

$$\underline{\mathcal{L} - \mathcal{H}' \mathcal{K} \in \mathcal{S}_{r+1}}$$

où $\mathcal{H}' = AH'$.

Nous développons d'abord $b(y)$ en série autour de x :

$$b(y) = \sum_{|\alpha| \leq r+1-k-j} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha(x)(y-x)^\alpha + r(x,x-y)$$

où $b_\alpha(x) = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha b(x)$. Posons $r+1-k-j = \rho$.

Nous supposons $k+j < r+1$, sinon le problème est résolu.

Nous définissons l'opérateur H_α par :

$$(H_\alpha f)^\wedge = D^\alpha\{\tilde{\phi}(z)|z|^{-j} (1-\phi(z)) * \hat{\phi}\} \hat{f}$$

où $|\alpha| < \rho$ et $D^\alpha = (\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial z})^\alpha$.

Nous avons par ailleurs :

$$H'B\, f = \psi' * \{\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} b_\alpha(x)(y-x)^\alpha f(y) + r(x,x-y)\, f(y)\}$$

soit encore

$$H'B\, f = \sum_{|\alpha| \leq \rho} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha(x) \int (y-x)^\alpha \psi'(x-y)f(y)dy + \int r(x,x-y) \psi'(x-y)f(y)dy$$

En définissant l'opérateur B_α par

$$B_\alpha f = b_\alpha(x)\, f(x)$$

nous obtenons alors

$$\sum_{|\alpha| < \rho} \frac{1}{\alpha!} B_\alpha H_\alpha = \sum_{|\alpha| < \rho} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha(x) [(-z)^\alpha \psi' * f] = H'B - R$$

où $Rf = \sum_{|\alpha|=\rho} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha \int (y-x)^\alpha \psi'(x-y)\, f(y)dy + \int r(x,x-y)\psi'(x-y)\, f(y)dy.$

Nous obtenons

$$AH'BK = A(\sum_{|\alpha|<\rho} \frac{1}{\alpha!} B_\alpha H_\alpha)K + ARK$$

Nous allons alors montrer les deux lemmes suivants :

LEMME 1.3.2.- ARK est $(r+1)$-améliorant.

LEMME 1.3.3.- $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(AH')\,\sigma(BK)$

si $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|<\rho} A \frac{1}{\alpha!} B_\alpha H_\alpha K$

Avant de montrer le premier de ces deux lemmes nous allons établir le résultat suivant :

LEMME 1.3.4.- Soit $\partial^\alpha T$ l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha T - T(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$. Si T et $\partial^\alpha T$ appliquent continuement L^p_s dans $L^p_{s+r+1-k}$ pour $-(r+1-k) \leq s \leq s+r+1-k \leq r+1-k$ et $|\alpha| \leq m+k$, alors T est $(r+1-k)$-améliorant, c'est-à-dire il applique continuement L^p_s dans L^p_{s+r+1} pour $-m-r-1 \leq s \leq s+r+1 \leq$ $\leq m+r+1$.

Preuve. Par hypothèse on a $\partial^\alpha T : L^p_s \longrightarrow L^p_{s+r+1-k}$ pour $-(r+1-k) \leq s \leq 0$. Soit $g \in L^p_{s-|\alpha|}$; alors g_o et g_β étant dans L^p et L^p_s, $g = g_o + \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} (\frac{\partial}{\partial x})^\beta g_\beta$ (voir par exemple Lions [1]). Donc

$$Tg = Tg_o + \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} T(\frac{\partial}{\partial x})^\beta g_\beta = Tg_o + \sum_{|\beta|\leq\alpha} (\frac{\partial}{\partial x})^\beta (Tg_\beta) - \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} (\partial^\beta T)g_\beta$$

D'après l'hypothèse sur T et $\partial^\beta T$ ($|\beta| \leq m+k$) pour tout β, $|\beta| \leq |\alpha|$, on a :

$$Tg_o \in L^p_{r+1-k} \subset L^p_{s+r+1-k-|\alpha|}$$

$$Tg_\beta \in L^p_{s+r+1-k} \quad \text{et donc} \quad (\frac{\partial}{\partial x})^\beta (Tg_\beta) \in L^p_{s+r+1-k-|\alpha|}$$

$$(\partial^\beta T)g_\beta \in L^p_{s+r+1-k} \subset L^p_{s+r+1-k-|\alpha|}$$

Donc $Tg \in L^p_{s+r+1-k-|\alpha|}$ et $T : L^p_s \longrightarrow L^p_{s+r+1-k}$

pour $-m-r-1 \leq s \leq s+r+1-k \leq r+1-k$.

Soit d'autre part $f \in L^p_{s+|\alpha|}$ $(|\alpha| \leq m+k$ et $-(r+1-k) \leq s \leq 0)$

$$(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (Tf) = T(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f + (\partial^\alpha T)f$$

$$T(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f \in L^p_{s+r+1-k}$$

$$(\partial^\alpha T)f \in L^p_{s+r+1-k}$$

Donc $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (Tf) \in L^p_{s+r+1-k}$.

Finalement on a :

$$T : L^p_s \longrightarrow L^p_{s+r+1-k}$$

pour $-m-r-1 \leq s \leq s+r+1 \leq m+r+1$.

<u>Le lemme 1.3.4. est démontré.</u>

<u>Preuve du lemme 1.3.2.</u> Il suffit d'établir que R et $\partial^\beta R$ sont $(r+1-k)$-améliorants pour $-(r+1-k) \leq s \leq 0$ et $|\beta| \leq m+k$.

Nous notons $r_\beta(x,z) = (\frac{\partial}{\partial x})^\beta r(x,z)$ et nous remarquons que $\frac{\partial}{\partial x} r(x,x-y) = \frac{\partial}{\partial x} r(x,z) - \frac{\partial}{\partial z} r(x,z)$ où $z = x-y$.

Alors on voit sans difficulté que

$$(\partial^\beta R)f = \sum_{|\alpha|=\rho} \frac{1}{\alpha!} b_{\alpha+\beta} \int (y-x)^\alpha \psi'(x-y)f(y)dy + \int r_\beta(x,x-y)\psi'(x-y) f(y)dy$$

Puisque $|\alpha| = r+1-k-j$ et que $b(x)$ est dérivable jusqu'à l'ordre $m+2(r+1)-k$, alors $\partial^\beta R$ est définie pour $|\beta| \leq m+r+j$ et donc pour tout j et tout k fixés à

l'avance $\partial^{\beta}T$ est définie pour $|\beta| \leq m+k$ (nous avons supposé $k+j < r+1$, sinon le problème est résolu).
$\psi'(x-y)$ étant à support compact, pour prouver la régularité des opérateurs, il suffira de les considérer lorsque $|x-y| \to 0$.

Nous allons donc étudier le comportement de
$I = (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} \int r(x,x-y)\ \psi'(x-y)\ f(y)dy$ lorsque $|x-y| \to 0$, $|\alpha| \leq r+1-k$ et $|\beta| \leq m+k$, car l'opérateur défini par la première intégrale dans l'expression de $(\partial^{\beta}R)f$ est trivialement $(r+1-k)$-améliorant.

Nous pouvons introduire la dérivation sous le signe somme de I car nous allons montrer la convergence absolue dans l'expression ainsi obtenue.

D'après la remarque faite au début de la preuve de ce lemme sur $\frac{\partial}{\partial x} r(x,x-y)$ et la formule de Leibniz, nous obtenons facilement

$$(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} r_{\beta}\psi' = \sum_{\delta+\gamma=\alpha} C_{\delta,\gamma}\ [(\frac{\partial}{\partial x})^{\delta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma}\ r_{\beta}(x,z)]\psi' + r_{\beta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha}\psi'(z)$$

où $C_{\delta,\gamma}$ est une constante dans laquelle se trouvent les coefficients de la forme $\frac{1}{\delta!}$, $\frac{1}{\gamma!}$, etc...

Alors $I = J_1 + J_2$ où

$$J_1 = \sum_{\delta+\gamma=\alpha} C_{\delta,\gamma} \int [(\frac{\partial}{\partial x})^{\delta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma} r_{\beta}(x,z)]\ \ \psi'(x-y)f(y)dy$$

$$J_2 = \int r_{\beta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha}\ \psi'(x,z)f(y)dy\ ,\ \text{où}\ \ z = x-y\ .$$

1.3.2.1. Etude de J_2.

$$\psi'(x-y) = 0\ (|x-y|^{-n+j})$$

$$r_{\beta}(x,x-y) = \sum_{|\alpha|=\rho+1} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{\rho} b_{\alpha,\beta}(x+t(y-x))(y-x)^{\alpha}\ dt$$

où $b_{\alpha,\beta}(x+t(y-x)) = (\frac{\partial}{\partial x})^{\beta} b_{\alpha}(x+tz)$ avec $z = y-x$

donc

$r_{\beta}(x,x-y) = O(|x-y|^{r+2-k-j})$ puisque $b_{\alpha,\beta}$ est borné.

Alors $r_{\beta}(x,z)(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha} \psi'(z) = O(|z|^{-n+r+2-k-|\alpha|})$.

a) $\underline{f \in L^p}$. On a immédiatement

$|J_2| < \infty$ pour $|\alpha| < r+2-k$

b) $\underline{f \in L^p_s}$, $\underline{s > 0}$.

En remarquant que $\frac{\partial}{\partial z} r_{\beta}(x,x-y) = - \frac{\partial}{\partial y} r_{\beta}(x,x-y)$ et que $\psi'(x-y)$ est à support compact, on peut écrire

$$J_2 = \sum_{\substack{|\alpha'| \leq |s| \\ |\gamma| \leq |\alpha'|}} C_{\gamma} \int (\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha-\alpha'} \psi'(x,z)(\frac{\partial}{\partial y})^{\gamma} r_{\beta}(x,x-y)(\frac{\partial}{\partial y})^{\alpha'-\gamma} f(y)dy ,$$

en utilisant des intégrations par parties et la formule de Leibniz.

$(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha-\alpha'} \psi'(\frac{\partial}{\partial y}) r_{\beta} = O(|z|^{-n+r+2-k+|\alpha'-\alpha-\gamma|})$

Donc $|J_2| < \infty$ pour $|\alpha| < r+2-k+ |\alpha'-\gamma|$; mais $|\alpha'- \gamma|$ peut-être nul, donc pour $|\alpha| < r+2-k$ et l'opérateur sera $(r+1-k)$-améliorant si s n'est pas négatif.

c) $\underline{f \in L^p_s}$, $\underline{s < 0}$.

Alors $f = f_o + \sum_{|\gamma| \leq s} (\frac{\partial}{\partial x})^{\gamma} f_{\gamma}$ où f_o et f_{γ} sont dans L^p .

$$J_2 = \int r_{\beta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha} \psi' f_o(y)dy + \sum_{|\gamma| \leq |s|} \int r_{\beta}(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha}\psi'(\frac{\partial}{\partial y})^{\gamma} f_{\gamma}(y)dy$$

La première intégrale a déjà été majorée en a). Pour la seconde on peut faire plusieurs intégrations par parties et appliquer la formule de Leibniz, pour obtenir

$$|J_2| \leq \sum_{|\gamma| \leq |s|} \int |(\frac{\partial}{\partial y})^\gamma \; [r_\beta (\frac{\partial}{\partial y})^\alpha \; \psi'] \; f_\beta(y)| dy$$

Le noyau est $O(|z|^{-n+r+2-k-|\alpha+\gamma|})$.

Et donc $|J_2| < \infty$ pour $|\alpha| < r+2-k-|s|$.

L'opérateur est donc $(r+1-k)$-améliorant si

$|s| < r+2-k$ soit $-(r+1-k) \leq s \leq 0$.

1.3.2.2. <u>Etude de</u> J_1 .

On applique exactement la même méthode que pour J_2 et on obtient les mêmes résultats.

Finalement nous avons montré que R et $\partial^\alpha R$ sont $(r+1-k)$-améliorants pour $|\alpha| \leq m+k$ et $f \in L^p_s$ avec $-(r+1-k) \leq s \leq 0$. En appliquant le lemme 1.3.4., en remarquant que K est k-améliorant et que A est o-améliorant, nous obtenons que ARK est $(r+1)$-améliorant.

<u>Le lemme 1.3.2. est démontré.</u>

<u>Preuve du lemme 1.3.3.</u>

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|<\rho} \frac{1}{\alpha!} AB_\alpha H_\alpha K \text{ , donc}$$

$\sigma(\mathcal{L}) = \sum \frac{1}{\alpha!} (ab_\alpha)_\beta \frac{1}{\beta!} D'^\beta [h_\alpha k.]$ avec $h_\alpha = D^\alpha h$ et

$(ab_\alpha)_\beta = (\frac{\partial}{\partial x})^\beta (ab_\alpha)$; soit en utilisant la formule de Leibniz:

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|<\rho \\ \gamma \leq \beta \\ \delta \leq \beta}} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!} \frac{\beta!}{\delta!(\beta-\delta)!} \; a_\gamma \; b_{\alpha+\beta-\gamma} D'^{\delta+\alpha} h [D'^{\beta-\delta}(k)]$$

Par ailleurs

$$\sigma(AH)\,\sigma(BK) = \sum_{|\alpha'+\beta'|<\rho} \frac{1}{\alpha'!} \frac{1}{\beta'!} a_{\alpha'} \, b_{\beta'} \, D'^{\alpha'} [h(D'^{\beta'}(k.))]$$

soit en appliquant la formule de Leibniz

$$\sigma(AH)\,\sigma(BK) = \sum_{\substack{|\alpha'+\beta'|<\rho \\ \gamma'\leq\alpha'}} \frac{1}{\alpha'!}\,\frac{1}{\beta'!}\,\frac{\alpha'!}{\gamma'!(\alpha'-\gamma')!}\,a_{\alpha'}\,b_{\beta'}\left[D'^{(\alpha'-\gamma')}h\right]\left[D'^{(\beta'+\gamma')}(k.)\right]$$

Nous faisons les changements de coefficients suivants :

$\alpha' = \mu' + \nu' - \tau'$ $\qquad\qquad \alpha = \alpha$

$\beta' = \tau'$ $\qquad\qquad \beta = \mu + \nu - \alpha$

$\gamma' = \nu' - \tau'$ $\qquad\qquad \gamma = \mu + \nu - \tau$

$\delta = \mu - \alpha$

Nous obtenons alors

$$\sigma(\mathscr{L}) = \sum_{\substack{\alpha\leq\mu \\ \alpha\leq\tau \\ |\mu+\nu|<\rho \\ \tau\leq\mu+\nu}} (-1)^{\alpha}\,\frac{1}{\alpha!(\tau-\alpha)!}\,\frac{(\mu+\nu-\alpha)!}{(\mu+\nu-\tau)!(\mu-\alpha)!\,\nu!}\,a_{\mu+\nu-\tau}\,b_{\tau}\,[D'^{\mu}h][D'^{\nu}k.]$$

$$\sigma(AH)\,\sigma(BK) = \sum_{\substack{|\mu'+\nu'|<\rho \\ \tau\leq\nu}} \frac{1}{\tau'!\,\mu'!(\nu'-\tau')!}\,a_{\mu'+\nu'-\tau'}\,b_{\tau'}\,[D'^{\mu'}h][D'^{\nu'}k.]$$

Choisissons $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$, $\tau' = \tau \leq \nu$ et montrons que les coefficients numériques sont égaux, soit

$$\sum_{\substack{\alpha\leq\mu \\ \alpha\leq\tau}} (-1)^{\alpha}\,\frac{1}{\alpha!(\tau-\alpha)!}\,\frac{(\mu+\nu-\alpha)!}{(\mu+\nu-\tau)!(\mu-\alpha)!\,\nu!} = \frac{1}{\tau!\,\mu!(\nu-\tau)!} \quad ; \ \tau \leq \nu$$

soit encore

$$\sum_{\substack{\alpha\leq\mu \\ \alpha\leq\tau}} (-1)^{\alpha}\,\frac{\tau!}{\alpha!(\tau-\alpha)!}\,\frac{(\mu+\nu-\alpha)!}{(\mu-\alpha)!\,\nu!} = \frac{(\mu+\nu-\tau)!}{\mu!(\nu-\tau)!} \quad ; \ \tau \leq \nu$$

Pour montrer ce résultat nous allons utiliser des séries formelles. Calculons d'abord

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{\tau\leq\nu} \frac{(\mu+\nu-\tau)!}{\mu!(\nu-\tau)!}\,x^{\mu}\,y^{\nu}\,z^{\tau}$$

Un développement de Taylor donne d'abord

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} C^{\mu}_{\mu+(\nu-\tau)}\,x^{\mu} = (1-x)^{-(\nu-\tau+1)}$$

Considérons alors la somme :

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\nu} (1-x)^{-(\nu-\tau+1)} y^{\nu} z^{\tau} .$$

Posons $\nu' = \nu - \tau$ et nous obtenons

$$S = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\nu'=0}^{\infty} (1-x)^{-(\nu'+1)} y^{\nu'} (yz)^{\tau} = \frac{1}{1-(x+y)} \frac{1}{1-yz}$$

puisque nous avons le produit de deux séries géométriques.

Nous calculons maintenant la série formelle obtenue en multipliant le terme de gauche par $x^{\mu} y^{\nu} z^{\tau}$ et en sommant :

$$S' = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\nu} \sum_{\substack{\alpha \leq \mu \\ \alpha \leq \tau}} (-1)^{\alpha} C_{\tau}^{\alpha} C_{\mu+\nu-\alpha}^{\nu} x^{\mu} y^{\nu} z^{\tau}$$

Posons $\mu-\alpha = \mu'$, $\tau-\alpha = \tau'$, $\nu-\tau = \nu'$ et arrangeons la somme :

$$S' = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} (xyz)^{\alpha} \sum_{\tau'=0}^{\infty} C_{\tau'+\alpha}^{\alpha} (yz)^{\tau'} \sum_{\nu'=0}^{\infty} y^{\nu'} \sum_{\mu'=0}^{\infty} C_{\mu'+\nu'+\tau'+\alpha}^{\mu'} x^{\mu'}$$

Soit alors :

$$S' = \frac{1}{1-x} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} \left(\frac{xyz}{1-x}\right)^{\alpha} \sum_{\tau'=0}^{\infty} C_{\tau'+\alpha}^{\tau'} \left(\frac{y\,z}{1-x}\right)^{\tau'} \sum_{\nu'=0}^{\infty} \left(\frac{y}{1-x}\right)^{\nu'}$$

Finalement nous obtiendrons :

$$S' = \frac{1}{1-(x+y)} \frac{1}{1-yz} .$$

Donc $S' = S$ et nous pouvons identifier les termes, l'inégalité cherchée est établie pour $\tau \leq \nu$.

Pour $\nu < \tau \leq \mu + \nu$ un calcul similaire montre que tous les termes de $\sigma(\mathscr{L})$ s'annulent.

Nous avons donc l'égalité cherchée pour les indices simples, mais nous avons seulement utilisé la formule de Taylor et les séries géométriques (formellement), donc le résultat est trivialement vrai pour les multi-indices.

<u>Le lemme 1.3.3. est démontré.</u>

Nous avons donc démontré que $\mathcal{H} \circ \mathcal{K} - \mathcal{H}\mathcal{K} \in \mathcal{S}_{r+1}$.

Nous en tirons immédiatement plusieurs conséquences :

1) $\mathcal{O}_{m,r}$ est une algèbre.

En effet si $\mathcal{H} \in \mathcal{O}_{m,r}$ et $\mathcal{K} \in \mathcal{O}_{m,r}$, alors

$$\mathcal{H}\mathcal{K} = \mathcal{H} \circ \mathcal{K} + S_{r+1} \quad \text{où} \quad \mathcal{H} \circ \mathcal{K} \in \mathcal{O}_{m,r}$$
$$\text{et} \quad S_{r+1} \in \mathcal{S}_{r+1}$$

2) σ est homomorphisme d'algèbre.

1.3.1.3. $\mathcal{O}_{m,r}$ est fermée pour l'adjonction et $\sigma(K^*) = [\sigma(K)]^*$

En effet soit l'opérateur K défini par

$Kf = a(x) \quad \{[\Phi(z)(1-\phi)]^{\vee} * f\}$. Un calcul élémentaire montre que $K^*f = \overline{[\Phi(1-\phi)]^{\vee}} * \bar{a} f$.

L'application $f \to \bar{a} f$ est définie par l'opérateur $\bar{A} \in \mathcal{O}_{m,r}$, et $g \to \overline{[\Phi(1-\phi)]^{\vee}} * g$ est définie par $\bar{H} \in \mathcal{O}_{m,r}$. Nous avons $K^* = \bar{H}\bar{A}$ et

$$\sigma(\bar{A}) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} \bar{a}_\alpha(x) D^\alpha$$

$$\sigma(\bar{H}) = \bar{\Phi}(z)$$

Alors $\sigma(K^*) = \sigma(\bar{H})\,\sigma(\bar{A}) = \sum_{|w| \le r} \frac{1}{\alpha!} \bar{a}_\alpha(x)\,\bar{\Phi}(z) D^\alpha$

ou encore

$$\sigma(K^*) = \sum (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \overline{a_\alpha(x)\ \Phi(z) D^\alpha} = [\sigma(K)]^*$$

Puisque $\bar{H}$ et $\bar{A}$ sont dans $\mathcal{O}_{m,r}$, $K^* \in \mathcal{O}_{m,r}$ et σ est un $*$-homomorphisme. Il est enfin évident que l'adjonction est une involution continue.

Il reste à montrer

1.3.1.4. $\|K_j\|_j \le C\|\sigma(K)\|$ si $K = \sum_{j=0}^{r} K_j + S$, $S \in \mathcal{S}_{r+1}$.

Soit $K = a(x)\{[\phi(z)(1-\phi)]^{\vee} * \cdot\}$ avec $\phi(z)$ homogène de degré $-j$.

Vue la définition de $\|\sigma(K)\|$ donnée après la définition 1.2.1. ($\sigma(K) \in \mathcal{A}_{m+2(r+1),n+r+1}$) et la majoration de K donnée dans la démonstration de la proposition 1.3.1., il est évident que si $\|\sigma(K)\|$ converge vers zéro, $\|K_j\|_j$ converge alors vers zéro.

Le théorème fondamental est établi.

Nous allons maintenant donner une condition pour qu'un opérateur σ soit un symbole.

THEOREME 1.3.3.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur $\sigma(x,z) \in \mathcal{A}^{(r)}_{m',\ell'}$, ($m' = m+2(r+1)$ et $\ell' = n+r+1$) soit le symbole d'un opérateur K de $\mathcal{O}_{m,r}$, est que pour tout

$j = 1, 2, \ldots, n$ on ait

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x,z) = +2\pi i\, [z_j, \sigma]$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $[A,B] = AB - BA$.

Démonstration.

Nous notons $D^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$

$$D^{\alpha+\varepsilon_k} = D_k D^\alpha \quad \left(D_k = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_k}\right)$$

avec une définition analogue pour $D^{\alpha-\varepsilon_j}$.

Nous allons tout d'abord établir

1.3.3.1. $[z_j, D^\beta] = -\frac{\beta_j}{2\pi i} D^{\beta-\varepsilon_j}$. En effet :

$$D^\beta(z_j f) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha z_j \frac{\beta!}{\beta-\alpha!} D^{\beta-\alpha} f = z_j D^\beta f + \frac{1}{2\pi i} \beta_j D^{\beta-\varepsilon_j} f$$

où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Nous en déduisons

$$[z_j, D^\beta] f = -\frac{\beta_j}{2\pi i} D^{\beta-\varepsilon_j} f \quad ; \quad |z_j, D'^\beta| = \frac{\beta_j}{2\pi i} D'^{\beta-\varepsilon_j}$$

et le premier résultat est ainsi établi.

Nous écrivons l'opérateur σ :

$$\sigma(x,z) = \sum_{|\alpha|\leq r-j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \left[a_\alpha(x,z)\right]$$

en supposant pour simplifier que les a_α sont homogènes de degré $-j$ en z (sinon il faut considérer les sommes de telles expressions).

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma(x,z)$ soit un symbole est évidemment que :

$$\exists\, a(x,z) \text{ telle que } \forall\alpha,\ |\alpha|\leq r-j,\ a_\alpha(x,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a(x,z)$$

(nous ne parlons pas des conditions de régularité qui sont acquises si $\sigma(x,z)$ est dans $\mathcal{A}^{(r)}_{m',\ell'}$).

Considérons l'expression

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x,z) = \sum_{|\alpha|\leq r-j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} a_\alpha(x,z).$$

Si σ est un symbole $\frac{\partial}{\partial x_j} a_\alpha = a_{\alpha+\varepsilon_j}$ $(|\alpha+\varepsilon_j| \leq r-j)$.

Dans ce cas nous écrivons la dérivée formelle de σ par rapport à x_j :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x,z) = \sum_{|\alpha|\leq r-j-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha a_{\alpha+\varepsilon_j}(x,z)$$

Remarquons qu'il n'y a pas de terme complémentaire car nous dérivons dans $\mathcal{A}^{(r)}_{m',\ell'}$ et nous considérons donc que $a_\beta = 0$ pour $|\beta| > r-j$.

En posant $\beta = \alpha + \varepsilon_j$ nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x,z) = \sum_{0<|\beta|\leq r-j} \frac{\beta_j}{\beta!} D^{\beta-\varepsilon_j} a_\beta(x,z)$$

soit encore

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma = \sum_{|\beta|\leq r-j} + \frac{2\pi i}{\beta!} [z_j, D^\beta]\, a_\beta(x,z)$$

en utilisant la formule (1.3.3.1) et en remarquant que $[z_j, D^o] = 0$.

Finalement $\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma = + 2\pi i\ [z_j, \sigma]$.

Réciproquement si cette égalité est vérifiée, alors pour tout α , $|\alpha| \leq r-1$, $a_{\alpha+\varepsilon_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_\alpha$, d'où l'on déduit l'existence de la fonction $a(x,z)$ telle que

$$a_\alpha(x,z) = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha\ a(x,z).$$

Le théorème 1.3.3. est établi.

Remarque. Etant donné $u \in T_x(\mathbb{R}^n)$, nous savons qu'on peut considérer z comme un vecteur de $T^*_x(\mathbb{R}^n)$, espace cotangent en x à $\mathbb{R}^n$. Alors si nous définissons la forme linéaire $\ell_u(z) = \langle u,z\rangle$ et si $\langle d\sigma , u\rangle$ désigne la dérivée (formelle) de σ dans la direction u , la condition de la proposition s'exprime :

$$\forall\ u \in T\ ,\ \langle\ d\sigma\ ,\ u\ \rangle\ = + 2\pi i\ [\ell_u(z)\sigma - \sigma\ell_u(z)]\ .$$

n° 4. OPERATEURS INTEGRAUX SINGULIERS SUR UNE VARIETE COMPACTE C^∞ .

Le symbole d'un opérateur intégral singulier K est un opérateur différentiel

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha !}\ D'^\alpha[a_\alpha(x,z).]$$

opérant pour chaque x sur les fonctions de z . On peut considérer l'espace $T_x(\mathbb{R}^n)$ tangent à $\mathbb{R}^n$ au point x , et l'espace cotangent au même point $T^*_x(\mathbb{R}^n)$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

$\sigma(K)$ est pour chaque x un opérateur qui appartient à $\mathcal{A}^{(r)}_{m',\ell'}\ (T^*_x(\mathbb{R}^n))$, ce qui définit la régularité en x.

Si l'on trouve des expressions invariantes par difféomorphismes, il est naturel d'étendre la définition des opérateurs intégraux singuliers et des symboles aux variétés.

1.4.1. Théorèmes d'invariance.

Soient K un opérateur de $\sigma_{m,r}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, δ un difféomorphisme C^∞ de $\mathcal{O}_2$ sur $\mathcal{O}_1$, ϕ une fonction C^∞ à un support compact contenu dans $\mathcal{O}_1$. Il est alors possible de montrer le

THEOREME 1.4.1.1.- *Etant donnés* K, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, δ *et* ϕ *définis ci-dessus, il existe un opérateur* B *de* $\sigma_{m,r}(\mathbb{R}^n)$ *à support dans* $\mathcal{O}_2$, *tel que*

$$(\phi K(\phi f))\circ\delta = (\phi\circ\delta)\, B((\phi f)\circ\delta)$$

Remarque 1.4.1.1. Ce résultat exprime que localement $\sigma_{m,r}(\mathbb{R}^n)$ est invariant par difféomorphisme.

Remarque 1.4.1.2. *Si* ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont deux fonctions de* $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ *à supports disjoints,* $\phi_1 K\phi_2$ *est un opérateur* $(r+1)$-*améliorant*.

En effet : $\sigma(\phi_1 K\phi_2) = \sigma(\phi_1)\,\sigma(K)\,\sigma(\phi_2)$

Or $\sigma(\phi_1) = \sum \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \phi_1\, D'^\alpha$

$\sigma(\phi_2) = \sum \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \phi_2\, D'^\alpha$

sont définis sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ mais nuls respectivement en dehors de $T^*(\mathcal{O}_1)$ et $T^*(\mathcal{O}_2)$ en désignant par $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts disjoints contenant les supports de ϕ_1 et ϕ_2.

Nous en déduisons immédiatement que

$\sigma(\phi_1 K \phi_2) = 0$ et donc l'opérateur est $(r+1)$-améliorant

<u>THEOREME 1.4.1.2.- Soient</u> $\mathcal{O}_1$ <u>et</u> $\mathcal{O}_2$ <u>deux ouverts de</u> $\mathbb{R}^n$ δ <u>et</u> δ' <u>deux difféomorphismes</u> C^∞ <u>de</u> $\mathcal{O}_2$ <u>sur</u> $\mathcal{O}_1$ <u>ayant un contact d'ordre</u> $(r+1)$ (<u>les dérivées coïncident jusqu'à l'ordre</u> r) <u>en</u> x_o, <u>point quelconque de</u> $\mathcal{O}_2$. <u>Soient</u> K <u>et</u> ϕ <u>définis comme précédemment.</u>

B <u>et</u> B' <u>étant les opérateurs définis par</u>

$$(\phi K(\phi f)) \circ \delta = (\phi \circ \delta)\, B((\phi f) \circ \delta)$$

$$(\phi K(\phi f)) \circ \delta' = (\phi \circ \delta')\, B'((\phi f) \circ \delta'),$$

<u>alors les symboles de ces deux opérateurs sont égaux en</u> x_o :

$$\underline{\sigma(B)(x_o) = \sigma(B')(x_o)}$$

Le résultat est trivial lorsqu'on part du théorème 2.2.1. et que l'on considère que les symboles sont de poids r. Les symboles de B et B' sont liés par des relations faisant intervenir les dérivées de δ et δ' jusqu'à un ordre inférieur ou égal à r.

1.4.2. <u>Définition des opérateurs intégraux singuliers sur une variété</u> C^∞ <u>compacte de dimension</u> n.

Etant donnée une telle variété $\mathcal{M}$, soient les espaces $L^p_k(\mathcal{M})$ ($1 < p < \infty$ et $-\infty < k < +\infty$) (pour leur définition voir par exemple Seeley [1]). Soit K un opérateur continu de $L^p_k(\mathcal{M})$ dans $L^p_k(\mathcal{M})$ pour tout entier vérifiant
$-m-r-1 \leq k \leq k+r+1 \leq m+r+1$. Soit $(U_i, \delta_i)_{i \in I}$ une famille de cartes de $\mathcal{M}$ et $(\phi_i)_{i \in I}$ une famille

de fonctions telles que pour tout i , $\phi_i \in C_o^\infty(U_i)$.

Nous pouvons alors donner la

DEFINITION 1.4.2.1.- L'opérateur continu K de $L_k^p(\mathcal{M})$ dans $L_{k'}^p(\mathcal{M})$ est un opérateur de $\mathcal{O}_{m,r}(\mathcal{M})$ si et seulement si, pour la famille $(U_i,\delta_i)_{i\in I}$ de cartes et la famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fonctions associées l'opérateur B défini par

$$(\phi_i K(\phi_i f)) \circ \delta_i = (\phi_i \circ \delta_i) B((\phi_i f) \circ \delta_i) \quad \forall\, i \in I \quad \forall\, f \in L_k^p(\mathcal{M})$$

est un opérateur de $\mathcal{O}_{m,r}(\mathbb{R}^n)$.

D'après le théorème 1.4.3., cette propriété est indépendante de la famille de cartes choisie ainsi que des ϕ_i .

1.4.3. Etude des symboles.

Considérons les espaces tangent et cotangent $T(\mathcal{M})$ et $T^*(\mathcal{M})$ à la variété compacte de dimension n , $\mathcal{M}$. Notons $\mathcal{J}^r(\mathcal{M}) = \bigcup_x \mathcal{J}_x^r(\mathcal{M})$ le fibré de tous les r-jets de difféomorphismes locaux de $T_x(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{M}$ qui transportent o_x , origine de $T_x(\mathcal{M})$, en x (nous identifions les difféomorphismes qui ont un contact d'ordre $r+1$). Soit p_x un élément de $\mathcal{J}_x^r(\mathcal{M})$ et considérons deux difféomorphismes δ_1 et δ_2 de p_x ; δ_1 et δ_2 ont un contact d'ordre $r+1$ en x . Alors $\delta_2^{-1} \circ \delta_1$ est un difféomorphisme de $T_x(\mathcal{M})$ dans lui-même qui a un contact d'ordre $r+1$ avec l'identité à l'origine o_x .

Soit K un opérateur de $\mathcal{O}_{m,r}(\mathcal{M})$. Le symbole de K est une section de classe C^{m+r+2} du fibré localement trivial $\mathrm{Diff}(T^*(\mathcal{M}))$ des opérateurs différentiels agissant pour chaque x sur les fonctions définies sur $T^*_x(\mathcal{M})$. Dans une carte de $\mathcal{M}$, $\sigma(K)$ se lit comme le symbole de l'opérateur B, image de K sur la carte. D'après le théorème 1.4.1.2. l'expression dans les coordonnées du symbole de K, qui par construction dépend du difféomorphisme δ envoyant $T_x(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}$ localement, ne dépend que de p_x, et non pas de δ_1 et δ_2 éléments de p_x.

Le symbole n'est pas invariant mais ne dépend que des éléments de $\mathfrak{J}^r(\mathcal{M})$.

CHAPITRE II

APPLICATIONS.

n° 1. INTRODUCTION.

Soit $\mathcal{M}$ une variété compacte C^∞ de dimension n. Nous notons Λ l'opérateur de différentiation fractionnaire habituel, écrit formellement $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ où Δ désigne le Laplacien.

Si $P(x,D)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre k et à coefficients dans $C^{m+2(r+1)}(\mathbb{R}^n)$, il existe K dans $\mathcal{O}_{m,r}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$P(x,D) = K\,\Lambda^k .$$

Les critères de solvabilité des équations intégrales seront donc utiles à la théorie des équations aux dérivées partielles. Nous étudierons alors la possibilité d'inverser les opérateurs K, dans un sens à préciser et les conditions pour que K ait un indice, ce qui est évidemment lié à la question précédente.

Nous appliquerons enfin nos résultats au cas d'un opérateur allant de $L^2_{-\frac{1}{2}}$ (espace à définir exactement) dans L^2.

Dans tout le chapitre nous posons $\underline{m' = m+2(r+1)}$

$\underline{\ell' = n+r+1}$

n° 2. OPERATEURS ELLIPTIQUES.

<u>DEFINITION 3.2.1.- Nous appellerons q-symbole de</u> K <u>l'opérateur</u> $\sigma_q(K)$ <u>déduit de</u> $\sigma(K)$ <u>en annulant tous les termes de poids strictement supérieur à</u> q.

DEFINITION 3.2.2.- L'opérateur K est "elliptique" si et seulement si son o-symbole $\sigma_o(K)$ est strictement positif (il est évident que $\sigma_o(K)$ est une fonction) :

$$\sigma_o(K) \geq \varepsilon > 0 .$$

Nous avons alors le théorème fondamental d'inversion d'un opérateur :

THEOREME 3.2.1.- Si l'opérateur K de $\mathcal{O}_{m,r}$ est elliptique, $\sigma(K)$ a un inverse dans $\mathcal{S}^{(r)}_{m',\ell'}$ qui est le symbole d'un opérateur K_1 de $\mathcal{O}_{m,r}$ tel que :

(i) $\sigma(K_1)\,\sigma(K) = 1$

(ii) $K_1 K = 1 + R$ où $R \in \mathcal{A}_{r+1}$

(iii) K est un opérateur à indice de L^p_k dans L^p_k .

Nous rappelons qu'un opérateur K a un indice $\chi(K)$ si son noyau est de dimension finie et son image de codimension finie. On a alors :

$$\chi(K) = \dim \operatorname{Ker}(K) - \dim \operatorname{coker}(K)^{(1)}$$

Avant d'établir le théorème nous allons montrer trois lemmes. Dans les deux premiers nous étudions un sous-ensemble A de $L^p_k(\mathcal{M})$ pour affirmer qu'il est compact. Il suffit alors de considérer A dans les cartes, ou que $L^p_k(\mathcal{M})$ est l'ensemble des fonctions de $L^p_k(\mathbb{R}^n)$ dont le support est contenu dans un compact fixe $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^n$; cela permet d'utiliser la translation sans difficulté et donne un sens clair aux deux énoncés.

LEMME 3.2.1. Si A est un ensemble borné de distributions dans $L^p_{k+1}(\mathcal{M})$ (k entier quelconque) et si τ_h désigne l'opérateur de translation par h , alors pour $\phi \in A$ $(\tau_h\phi - \phi)$ tend vers zéro dans $L^p_k(\mathcal{M})$ uniformément par rapport à ϕ dans A , lorsque h tend vers zéro.

---

(1) cf: Exposé n° 12 de [4], par Grisvard

Démonstration.

Nous la ferons en divisant en deux cas :

a) $k \geq 0$. Alors

$$\|\tau_h\phi - \phi\|_{p,k} = \sum_{|\ell|\leq k} \|(\frac{\partial}{\partial x})^{\ell} [\phi(x+h) - \phi(x)]\|_p \text{ .}$$

Mais puisque $\phi \in L^p_{k+1}$

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})^{\ell} [\phi(x+h) - \phi(x)]\|_p \leq c|h| \sum_i \|(\frac{\partial}{\partial x})^{\ell+\varepsilon_i} \phi(x)\|_p$$

où $(\frac{\partial}{\partial x})^{\ell+\varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial x})^{\ell}$ et $|h|$ est la longueur du vecteur h et $c = c(n)$ pour une telle inégalité, voir par exemple Schwartz [1] tome II).

Nous en déduisons que

$$\|\tau_h\phi - \phi\|_{p,k} \leq c|h| \, \|\phi\|_{p,k+1}$$

où c ne dépend que de la dimension n de l'espace. Comme A est borné nous obtenons finalement

$$\|\tau_h\phi - \phi\|_{p,k} \leq c'|h| \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

b) $k < 0$. Nous allons raisonner par dualité en nous appuyant sur le fait que L^p_k est réflexif pour tout k dans Z . Alors pour tout k entier les pôlaires des voisinages de zéro dans L^p_k forment un système fondamental de parties bornées du dual L^q_{-k} $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et réciproquement(1) Pour simplifier la rédaction nous dirons qu'une partie bornée est le pôlaire d'un voisinage de zéro au lieu de dire qu'elle est contenue dedans, et de même pour les voisinages de zéro. De plus L^p_k est le dual fort de L^q_{-k} pour tout k entier, et L^p_s est dense dans $L^p_{s-s'}$ pour tout s' positif ou nul et tout p $(1 < p < \infty)$. Nous pouvons voir ces

---

(1) Voir Bourbaki : "Espaces vectoriels topologiques" tome II, Chapitre IV, § 3 (Paris, Hermann, 1964)

correspondances sur le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L^p_{k+1} & \xrightarrow{\subset} & L^p_k \\ \downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow \\ L^q_{-k-1} & \xleftarrow{\supset} & L^q_{-k} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des injections continues et les flèches verticales mettent en correspondance chaque espace avec son dual.

Soit maintenant A un borné de L^q_{-k}. Nous voulons montrer l'affirmation suivante :

$$(*) \quad \begin{cases} \forall\, V(o) \subset L^q_{-k-1}\,,\ \exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tel que} \\ |h| \leq \varepsilon \Longrightarrow (\tau_h\phi - \phi) \in V \qquad \forall\, \phi \in A\,, \end{cases}$$

où $V(o)$ est un voisinage de zéro.

$V(o)$ est le pôlaire d'un borné W de L^p_{k+1} donc la propriété $(*)$ peut s'écrire :

$$(*\,*) \quad \begin{cases} \forall\, W \subset L^p_{k+1}\,,\ W \text{ borné, } \exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tel que} \\ |h| \leq \varepsilon \Longrightarrow \sup\limits_{f \in W} |<\tau_h\phi - \phi, f>| \leq 1 \quad \forall\, \phi \in A \end{cases}$$

Remarquons alors que :

$$(\mathrm{I}) \quad <\tau_h\phi - \phi, f> = <\phi, \tau_{-h}f - f>$$

et d'après le résultat obtenu pour $k \geq 0$ et puisque W borné dans L^p_{k+1} est aussi borné dans L^p_k, nous avons :

$$(*') \quad \begin{cases} \forall\, V'(o) \subset L^p_k\,,\ V'(o) \ \text{ voisinage de zéro,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tel que} \\ |h| \leq \varepsilon \Longrightarrow (\tau_{-h}f - f) \in V'\,,\ \forall\, f \in W\,. \end{cases}$$

Ceci est en particulier vrai pour $V' = A^o$ (A^o est le pôlaire de A), alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $|h| < \varepsilon$, pour $f \in W$ et $\phi \in A$ quelconques

$$\sup_{f\in W} |< \tau_{-h} f - f , \phi >| \leq 1$$

et en appliquant l'égalité (I) la relation (* *) est établie.

<u>Le lemme est démontré.</u>

Nous donnons comme second lemme l'application du théorème de Rellich à notre problème.

<u>LEMME 3.2.2.</u> <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble</u> A <u>de fonctions de</u> $L^p_k(\mathcal{U})$ <u>soit relativement compact dans</u> $L^p_k(\mathcal{U})$ <u>est que</u> A <u>soit borné dans</u> $L^p_k(\mathcal{U})$ <u>et que</u> $(\tau_h\phi - \phi)$ <u>tende vers zéro dans</u> $L^p_k(\mathcal{U})$ <u>uniformément par rapport à</u> ϕ <u>dans</u> A, <u>lorsque</u> h <u>tend vers zéro.</u>

Ce théorème est classique, nous n'en donnerons pas la démonstration, mais nous ferons la

<u>Remarque 3.2.1.</u> La compacité de $\mathcal{U}$ a permis de supprimer la condition d'approximation sur A par multiplication. De plus les L^p_k sont des Banach réflexifs invariants par translation ce qui permet de remplacer l'approximation par convolution à l'aide de l'approximation par translation.

Donnons enfin un troisième résultat :

<u>LEMME 3.2.3.</u> <u>Soient deux espaces de Banach</u> E <u>et</u> F. <u>Soit</u> $u \in \mathcal{L}(E,F)$. <u>Une condition nécessaire et suffisante</u>

pour que u admette un indice est qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $(u \circ v - 1_F)$ et $(v \circ u - 1_E)$ soient des opérateurs compacts.

Rappelons qu'un opérateur est compact s'il applique un borné dans un relativement compact.

Démonstration.

Il est facile de voir qu'un opérateur u de $\mathcal{L}(E,F)$ a un indice si et seulement si il existe v dans $\mathcal{L}(F,E)$ telle que $(u \circ v - 1_F)$ et $(v \circ u - 1_E)$ sont de rang fini. Par ailleurs un opérateur de rang fini est compact, ce qui établit la nécessité de la condition.

Un théorème classique de F. Riesz affirme que si w est un opérateur compact d'un Banach E dans lui-même, alors $(1_E + w)$ admet un indice. Nous avons par ailleurs

$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker}(1_E + w)$ si l'on pose $w = v \circ u - 1_E$

$\operatorname{Im}(1_F + w') = \operatorname{Im}(u \circ v) \supset \operatorname{Im} u$ si l'on pose $w' = u \circ v - 1_F$.

w et w' sont par hypothèse des opérateurs compacts appartenant respectivement à $\mathcal{L}(E,E)$ et $\mathcal{L}(F,F)$. Nous en déduisons que $\dim(\operatorname{Ker} u)$ et $\dim(\operatorname{Im} u)$ sont finies. Il en est trivialement de même pour v.

Donc u et v admettent chacun un indice, la condition est suffisante.

Le lemme 3.2.3. est établi.

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 3.2.1.

Supposons qu'il existe K_1 dans $\mathcal{O}_{m,r}$ tel que

$K K_1 = 1 + R$, $R \in \mathcal{S}_{r+1}$ (i)'

$$\sigma(K)\ \sigma(K_1) = 1 \quad \text{(ii)'}$$

et que (i) et (ii) sont vérifiés.

<u>Etablissons le iii</u>. Nous considérons les deux opérateurs K et K_1 agissant sur L^p_{-m-r-1} (qui contient tous les espaces L^p_k considérés). R est continu, donc borné et d'après les lemmes 3.2.1. et 3.2.2. c'est un opérateur compact. Alors $(KK_1 - 1)$ et $(K_1K - 1)$ sont des opérateurs compacts et d'après le lemme 3.2.3. K et K_1 sont des opérateurs à indice. Le (iii) est établi.

<u>Etablissons (i), (i)', (ii) et (ii)'</u>.

Il s'agit d'abord d'inverser $\sigma(K)$.

Nous allons expliciter un opérateur différentiel $\sigma(K_1)$ tel que $\sigma(K)\ \sigma(K_1) = 1$. Après seulement nous montrerons (ii). Nous supposons que

$$\sigma(K) = \sum_{w \leq r} \frac{1}{\alpha !} D'^{\alpha}\ h_{\alpha}(x,z) \quad \text{et nous posons}$$

$$\sigma(K_1) = \sum_{w \leq r} \frac{1}{\alpha !} D'^{\alpha}\ h^1_{\alpha}(x,z)$$

et nous allons calculer les valeurs de ses diverses composantes homogènes. Alors pour tout opérateur K nous appelons symbole de poids p de K l'opérateur

$$\sigma^p(K) = \sum_{w = p} \frac{1}{\alpha !} D'^{\alpha}\ h_{\alpha}(x,z)$$

Remarquons que cette définition est différente de celle du p-symbole (et n'est pas invariante).

Alors d'après la définition du poids w ,

$$\sigma^p(K)\ \sigma^q(K_1) = \tau^{p+q}$$

où τ^{p+q} est un opérateur différentiel de poids $p+q$.

Si nous désignons pour tout p et tout q σ_o^p le symbole de poids p de K et σ_1^q le symbole de poids q de K_1 , nous obtenons

$$\sigma(K)\,(K_1) = \sigma_o^o\,\sigma_1^o + \left[\sigma_o^o\,\sigma_1^1 + \sigma_o^1\,\sigma_1^o\right] + \dots + \sum_{p+q=r} \sigma_o^p\,\sigma_1^q$$

Il nous reste à calculer de proche en proche les composantes homogènes σ_1^q de $\sigma(K_1)$, étant données les composantes σ_o^p de $\sigma(K)$ et sachant que $\sigma(K)\,\sigma(K_1) = 1$.

Alors puisque $\sigma_o^o = \sigma_o(K) \geq \varepsilon > 0$,

a) $\sigma_1^o = \dfrac{1}{\sigma_o^o}$

b) $\sigma_o^o\,\sigma_1^1 + \sigma_o^1\,\sigma_1^o = 0$, soit $\sigma_1^1 = -\dfrac{1}{\sigma_o^o}\,\sigma_o^1\,\sigma_1^o = -\dfrac{\sigma_o^1}{(\sigma_o^o)^2}$

Nous remarquons que σ_i^o $(i = 0,1)$ est une fonction alors que σ_i^p $(p > 0)$ est un opérateur (c'est pourquoi nous étudions $\sigma(K)$ $\sigma(K_1)$ ici et non pas $\sigma(K_1)$ $\sigma(K)$). Nous allons montrer par récurrence qu'on peut calculer σ_1^p en fonction des σ_o^i $(i = 1, 2, \dots, r)$.

Cette propriété est vraie pour $p = 0$. Supposons la vraie pour $p \leq q-1$. Alors

$$\sigma_1^q = -\frac{1}{\sigma_o^o} \sum_{\ell,\ell'} \sigma_o^\ell\,\sigma_1^{\ell'} \quad \ell \geq 1 \ , \ \ell' \geq 0 \ , \ell + \ell' = q$$

Puisque $\ell \geq 1$, $\ell' \leq q-1$ et $\sigma_1^{\ell'}$ s'exprime en fonction des σ_o^i ; il en est donc de même de σ_1^q . $\sigma(K_1)$ étant défini, l'opérateur K_1 est défini à un $(r+1)$-améliorant près et l'on a les propriétés

(ii') $\sigma(K)\,\sigma(K_1) = 1$

(i') $KK_1 = 1 + R'$ avec $R' \in \mathcal{S}_{r+1}$

En effet 1 est le symbole de l'opérateur identité de $\mathcal{O}_{m,r}$ et pour avoir (i') il suffit donc d'appliquer le théorème 1.3.1.

Montrons maintenant que $K_1K = 1 + R$, $R \in \mathcal{S}_{r+1}$.
Le terme de poids zéro de $\sigma(K_1)$ est $\frac{1}{\sigma_o^o}$. Donc

$$\sigma(K_1)\ \sigma(K) = 1 + L$$

où L est de poids supérieur ou égal à 1 .
Il est évident de plus que tout opérateur différentiel de poids $w \geq p$ qui est un symbole est le symbole d'un opérateur de $\mathcal{S}_p$, et aussi L est évidemment un symbole, delui de $(K_1K - 1)$, et donc $L^p = L\ldots L$ (p fois) est le symbole d'un opérateur de $\mathcal{S}_p$.

Nous baserons notre preuve sur les relations suivantes (triviales par le théorème 1.3.1. et (ii')) :

$$[\sigma(K_1K)]^2 = \sigma(K_1)\ \sigma(KK_1)\ \sigma(K) = \sigma(K_1K)$$

$$[\sigma(K_1K)]^m = \sigma(K_1K)$$

soit $(1+L)^m = 1+L$ (en tant que symboles) pour tout $m \geqslant 1$ entier où l'on a posé $[\sigma(K_1K)]^2 = \sigma(K_1K)\ \sigma(K_1K)$ et ainsi de suite.
Comme pour $m = r+1$, L^m a un poids $w \geqslant r+1$, c'est le symbole d'un opérateur de $\mathcal{S}_{r+1}$ et donc $L^{r+1} = 0$. Il est d'autre part évident que L^p est une fonction linéaire de L^{r+1} . Donc $L = 0$ et $\sigma(K_1)\ \sigma(K) = 1$. On en déduit trivialement que $K_1K = 1 + R$, $R \in \mathcal{S}_{r+1}$.
Les propriétés (i) et (ii) sont établies.
<u>Le théorème 3.2.1. est démontré.</u>

n° 3. Opérateurs dont le o-symbole s'annule en un point.

Il existe (x_0,z_0) tel que $\sigma_0(K)\,(x_0,z_0) = 0$. Nous allons chercher des résultats plus faibles, c'est-à-dire des conditions pour que le noyau de K soit de dimension finie, ou que son image soit fermée, qu'elle soit de codimension finie. Nous restreindrons aussi le domaine de définition, en imposant à l'image d'être dans L^p_{k+r} . Les conditions trouvées ne dépendront que du symbole d'ordre r puisque la différence de deux opérateurs d'ordre r ayant même symbole est régularisante d'ordre $(r+1)$.

Nous trouverons des conditions du type suivant

$$\|Kf\|_p \geq C_1 \|J^r f\|_p - C_2 \|J^{r+1} f\|_p$$

où J^r est l'intégration d'ordre r .

De façon précise

Soit $\bar{A}$ un opérateur de $\mathcal{O}_{m,r}$ tel qu'il existe (x_0,z_0) tel que $\sigma_0(\bar{A})\,(x_0,z_0) = 0$. Nous le restreignons au domaine muni de la topologie induite par L^p_k

$$\mathcal{D} = \{f \mid f \in L^p_k \ ; \ \bar{A}f \in L^p_{k+r}\}$$

et nous appelons A la restriction de $\bar{A}$ à $\mathcal{D}$.

Remarque 3.3.1. $\mathcal{D}(A) \supset L^p_{k+r}$ et L^p_{k+r} est dense dans L^p_k , donc $\mathcal{D}(A)$ est dense dans L^p_k , ce qui permettra de définir l'opérateur adjoint.

Remarque 3.3.2. A est un opérateur fermé.

En effet :

Soit une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f dans L^p_k

et telle que $(Af_n)_n$ converge vers g dans L^p_{k+r} .

Alors $(Af_n)_n$ converge vers g dans L^p_k et puisque A est continu de L^p_k dans L^p_k , $(Af_n)_n$ converge vers Af dans L^p_k . Alors $Af = g$ dans L^p_k et puisque $g \in L^p_{k+r} \subset L^p_k$, on a finalement $Af = g$.

Nous pouvons alors donner les résultats annoncés.

<u>THEOREME 3.3.1.</u>- <u>Etant donnés A défini ci-dessus et les trois affirmations suivantes</u> :

a) $\mathrm{Im}(A)$ <u>est fermé dans</u> L^p_{k+r}

b) $\mathrm{Ker}(A)$ <u>est de dimension finie</u>

c) $L^p_{k+r}/\mathrm{Im}(A)$ <u>est de dimension finie</u>.

<u>Alors</u>

(i) <u>Si a) est vrai pour A , il est vrai pour A^*</u>.

(ii) <u>La conjonction des propriétés a) et b) est équivalente à</u>

$$\exists\, C_1 > 0 \ \underline{\text{et}} \ C_2 > 0 \ \underline{\text{tels que}}$$

$$(*) \qquad \|Af\|_{L^p_{k+r}} \geq C_1 \|f\|_{L^p_k} - C_2 \|f\|_{L^p_{k-r}}$$

(iii) <u>La conjonction de a), b), et c) est équivalente à</u> $\exists\, C_1 > 0$ <u>et</u> $C_2 > 0$ <u>tels que</u>

$(*)$ <u>est vérifiée et</u>

$$(**) \qquad \|A^*f\|_{L^q_{-k}} \geq C_1 \|f\|_{L^q_{-k-r}} - C_2 \|f\|_{L^q_{-k-r-1}}$$

<u>Démonstration</u>.

Posons $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(A)$.

La propriété (i) est un résultat classique d'analyse[(1)]

---

(1) Voir Dunford et Schwartz : "Linear operators" Part 1. Chapitre 6, § 6 (New York Interscience Publishers, 1958)

Montrons le (ii).

(ii_a). Supposons que (*) est vérifiée et montrons que $\mathcal{N}(A)$ est de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{N}(A)$. Alors de (*) on déduit

$$C_1 \|f\|_{L^p_k} \leq C_2 \|f\|_{L^p_{k-r}}$$

Mais par ailleurs on a toujours

$$\|f\|_{L^p_{k-r}} \leq \|f\|_{L^p_k} .$$

donc les deux normes sont équivalentes dans $\mathcal{N}(A)$. De plus d'après les lemmes 3.2.1. et 3.2.2. l'injection de L^p_k dans L^p_{k-r} $(r > 0)$ est complètement continue. Nous en déduisons que la sphère unité de $\mathcal{N}(A)$ L^p_{k-r} est compacte dans L^p_{k-r}, donc $\mathcal{N}(A)$ est de dimension finie.

(ii_b). Supposons que (*) est vérifiée et montrons que Im(A) est fermé.

$\mathcal{N}(A)$ étant de dimension finie et $\mathcal{D}(A)$ localement convexe séparé, il existe un supplémentaire topologique $\mathcal{N}'(A)$ de $\mathcal{N}(A)$ dans $\mathcal{D}(A)$; $\mathcal{N}'(A)$ est fermé. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{N}'(A)$, telle que la suite $(Af_n)_n$ converge vers g dans L^p_{k+r}. Nous allons montrer qu'il existe f dans L^p_k telle que $Af = g$.

<u>Supposons qu'il existe</u> $M > 0$ <u>tel que pour tout</u> n, $|f_n|_{p,k} < M$.

Si $f_m \in \mathcal{D}(A)$ et $f_n \in \mathcal{D}(A)$, alors $(f_m - f_n) \in \mathcal{D}(A)$ et nous appliquons $(*)$ à cette fonction :

$$\|Af_n - Af_m\|_{p,k+r} \geq C_1 \|f_n - f_m\|_{p,k} - C_2 \|f_n - f_m\|_{p,k-r}$$

Puisqu'elle est un borné de L^p_k la suite $(f_n)_n$ est relativement compacte dans L^p_{k-r} $(r > 0)$ et, au besoin en prenant une sous-suite et en renumérotant

$$f_n - f_m \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0$$

dans L^p_{k-r}, ou encore :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que si $m > N$ et $n > N$, alors $\|f_n - f_m\|_{p,k-r} < \varepsilon$.

Par ailleurs d'après l'hypothèse il existe $N' > 0$ tel que si $m > N'$ et $n > N'$, alors $\|Af_n - Af_m\|_{p,k+r} < \varepsilon$.

Nous en déduisons immédiatement que $(f_n)_n$ converge vers une fonction f de L^p_k (L^p_k est complet). Puisque A est fermé, $f \in \mathcal{D}(A)$ et $Af = g$.

<u>Supposons que</u> $(\|f_n\|_{p,k})_n$ <u>n'est pas une suite bornée.</u>

En appliquant le même raisonnement à $h_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|_{p,k}}$ nous montrons que $(h_n)_n$ converge vers $\tilde{h}$ dans $\mathcal{N}'(A)$ et $(Ah_n)_n$ converge vers zéro dans L^p_{k+r}.
Donc $A\tilde{h} = 0$, $\tilde{h}$ est dans $\mathcal{N}(A)$. Mais $\mathcal{N}'(A)$ est fermé, donc $\tilde{h} = 0$, ce qui contredit le fait que $\|h_n\|_{p,k} = 1$.

Nous avons donc montré que Im(A) est fermé.

Montrons la réciproque de (ii).

Nous supposons que Im(A) est fermé dans L^p_{k+r} et que Ker(A) = $\mathcal{N}(A)$ est de dimension finie. Soit B^{-1} l'application de Im(A) dans $\mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}$ réciproque de B qui est l'application de $\mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}$ dans Im(A) obtenue par factorisation de A .

B^{-1} est continue. En effet :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de Im(A) qui converge vers f et telle que si $g_n = B^{-1} f_n$, la suite $(g_n)_n$ converge vers g . Alors $f_n = Bg_n$; $(Bg_n)_n$ converge vers f . Puisque B est obtenue par factorisation de A et que A est fermée, B est fermée, donc g est dans $\mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}$, et $f = Bg$, ou encore $g = B^{-1}f$ et B^{-1} est une application fermée.

Puisque Im(A) est fermée, par le théorème du graphe fermé on obtient la continuité de l'application

$$B^{-1} : \mathrm{Im}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}$$

L'inégalité (*) est vérifiée. En effet

La continuité de B^{-1} entraîne la relation

$$\|B^{-1}g\|_{\mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}} \leq C \, \|g\|_{p,k+r}$$

soit encore

$$\|Af\|_{p,k+r} \geq C \, \|f\|_{\mathcal{D}(A)/_{\mathcal{N}(A)}}$$

et puisque $\mathcal{N}(A)$ est de dimension finie

$$\|Af\|_{p,k+r} \geq C_1 \|f\|_{p,k} - C_2 \|f\|_{p,k-r}$$

où on peut remplacer $\|f\|_{p,k-r}$ par $\|f\|_{p,k-t}$ pour tout $t > 0$.

Le (ii) est établi.

Montrons le (iii).

Puisque $L^p_{k+r}/_{\mathrm{Im}(A)}$ est de dimension finie, le noyau de A^* est de dimension finie d'après les théorèmes classiques sur la dualité. Alors d'après (i) et ce résultat nous pouvons appliquer (*) en utilisant la remarque faite à la fin de la démonstration de (ii), d'où

$$\|A^* f\|_{L^q_{-k}} \geq C_1 \|f\|_{L^q_{-k-r}} - C_2 \|f\|_{L^q_{-k-r-1}}$$

Le théorème est complètement démontré.

n° 4. Etude d'un cas particulier : $\mathcal{D} = \{f \in L^2_{-\frac{1}{2}} \mid \overline{A}f \in L^2\}$ où $\overline{A} \in \mathcal{O}_{m,r}$, $r \geq 1$.

Nous devons d'abord définir $L^2_{-\frac{1}{2}}$, soit d'une manière générale :

DEFINITION 3.4.1. Soit r un nombre réel. Nous appelons L^p_r l'ensemble

$$\{f \mid \exists\ g \in L^p \text{ telle que } (1+|\xi|^2)^{r/2}\,\hat{f} = \hat{g}\}$$

et nous le munissons de la norme $\|f\|_{p,r} = \|g\|_p$.

Nous reprenons la définition 1.1.6. de l'opérateur d'intégration J, soit $J = \tilde{\Lambda}^{-1}$ où $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ et $\tilde{\Lambda}^{-1}$ est l'opérateur Λ^{-1} où l'on a tronqué à l'origine le transformé de Fourier du noyau.

Remarquons que J est un opérateur intégral singulier tel que $\sigma_o(J) = 0$ et $\sigma_1(J)$ est une fonction strictement positive, homogène de degré (-1) ($\sigma_p(K)$ étant le p-symbole de K défini au n°2).

Nous avons de façon immédiate pour $f \in L^2$

$$a \|f\|_{-\frac{1}{2}} \leq (Jf,f) \leq b \|f\|_{-\frac{1}{2}}$$

(Nous ne mettrons plus pour les normes l'indice 2 indiquant qu'elles sont prises dans les espaces L^2 car nous ne considèrerons plus les espaces L^p, $p \neq 2$).

Etant donné $\overline{A} \in \mathcal{O}_{m,r}$, soit A sa restriction à $\mathcal{D}$; A appliquant $L^2_{-\frac{1}{2}}$ dans L^2, le théorème 3.3.1. (ii) permet d'affirmer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau de A, $\mathcal{N}(A)$ soit de dimension finie et que $\operatorname{Im}(A)$ soit fermé, est que

$$(*) \qquad \|Af\|^2 \geq C_1(Jf,f) - C_2 \|f\|^2_{-1}$$

(la démonstration du (ii) se généralise trivialement au cas où r et k ne sont pas entiers).

Nous allons donner un théorème donnant d'autres conditions. Nous l'énonçons sous forme de deux propositions, dont la première est la

<u>Proposition 3.4.1.</u> <u>Une condition suffisante pour que la relation (*) soit vérifiée est que sur les zéros de</u> $\sigma_o(A)$

on ait

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial b^o}{\partial x_j} \frac{\partial a^o}{\partial z_j} - \frac{\partial a^o}{\partial x_j} \frac{\partial b^o}{\partial z_j}\right) > 0$$

où a^o et b^o sont donnés par l'égalité :

$$\sigma_o(A) = a^o(x,z) + ib^o(x,z) \quad a^o \text{ et } b^o \text{ réelles.}$$

Nous donnerons plus loin la réciproque (3.4.2.)

Démonstration.

(*) s'écrit $(A^* Af, f) \geq C_1(Jf,f) - C_2\|f\|^2_{-1}$.

Posons $A = M + iN$ où M et N sont deux opérateurs réels. Alors

$$A^*A = (M^* - iN^*)(M + iN) = M^*M + N^*N + i(M^*N - N^*M)$$

a) Etude du symbole de $A^* A$.

Supposons M et N définis comme suit :

$$Mf \backsim \sum_{i=0}^{r} \int \dot{a}^i(x,x-y)\, f(y)dy$$

$$Nf \backsim \sum_{j=0}^{r} \int \dot{b}^j(x,x-y)\, f(y)dy$$

où $\dot{a}^i(x,\hat{z}) = a^i(x,z)\,(1-\phi(z)),\ d^o(a^i) = -i$

$\dot{b}^j(x,\hat{z}) = b^j(x,z)\,(1-\phi(z)),\ d^o(b^j) = -j$.

Nous obtenons alors :

$$\sigma_1(M) = \sum_{|\alpha|\leq 1-i} \frac{1}{\alpha!} D'^{\alpha}\left[a^i_\alpha(x,z).\right]$$

où $a^i_\alpha(x,z) = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha a^i(x,z)$, $D'^\alpha = (\frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z})^\alpha$

soit :

$$\sigma_1(M) = a^o(x,z) + a^1(x,z) + \sum_{k=1}^{n} D'_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k} a^o(x,z).\right]$$

avec $D'_k = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_k}$

et finalement en ordonnant l'opérateur $\sigma_1(M)$ et en transformant de même l'expression de $\sigma_1(N)$ nous obtenons :

$$\sigma_1(M) = a^o(x,z) + a^1(x,z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_k} a^o(x,z)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} a^o(x,z)\right)D_j^!$$

$$\sigma_1(N) = b^o(x,z) + b^1(x,z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_k} b^o(x,z)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} b^o(x,z)\right)D_j^! .$$

Nous posons pour simplifier

$$u^1 = a^1(x,z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_k} a^o(x,z)\right).$$

$$v^1 = b^1(x,z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_k} b^o(x,z)\right).$$

$$a_j^o = \frac{\partial a^o}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad b_j^o = \frac{\partial b^o}{\partial x_j} \; .$$

d'où finalement

$$\sigma_1(M) = a^o + u^1 + \sum_j a_j^o \, D_j^!$$

$$\sigma_1(N) = b^o + v^1 + \sum_j b_j^o \, D_j^! .$$

Alors d'après le théorème 1.3.1.

$$\sigma_1(M^*) = a^o + \overline{u^1} + \sum_j D_j^! \, [a_j^o .] = \sigma_1(M) - \mathfrak{J}(u^1)$$

où $\mathfrak{J}(u^1)$ est la partie imaginaire de u^1. Nous en déduisons :

$$\sigma_1(M^*) = \sigma_1(M) + \frac{1}{2}(\overline{u^1} - u^1)$$

$$\sigma_1(N^*) = \sigma_1(N) + \frac{1}{2}(\overline{v^1} - v^1)$$

$$\sigma_1(M^*N - N^*M) = \sigma_1(M^*)\,\sigma_1(N) - \sigma_1(N^*)\,\sigma_1(M)$$

soit encore

$$\sigma_1(M^*N-N^*M) = [\sigma_1(M),\ \sigma_1(N)] + \tfrac{1}{2}[(\overline{u^1}-u^1)\sigma_1(N)-(\overline{v^1}-v^1)\sigma_1(M)]$$

Un calcul élémentaire donne

$$\sigma_1(N)\sigma_1(M) = b^o a^o + b^o u^1 + v^1 a^o + v^1 u^1 + \sum_{j=1}^{n} b^o a_j^o D_j' + \sum_{j=1}^{n} b_j^o a^o D_j' + \sum_{j=1}^{n} b_j^o (D_j' a^o)$$

$$\sigma_1(M)\sigma_1(N) = a^o b^o + a^o v^1 + u^1 b^o + u^1 v^1 + \sum_{j=1}^{n} a^o b_j^o D_j' + \sum_{j=1}^{n} a_j^o b^o D_j' + \sum_{j=1}^{n} a_j^o (D_j' b^o)$$

où l'on a supprimé tous les termes de poids > 1.

Par ailleurs, en supprimant toujours ces termes,

$$\tfrac{1}{2}(\overline{u^1} - u^1)\,\sigma_1(N) = \tfrac{1}{2}(\overline{u^1} - u^1)b^o$$

$$\tfrac{1}{2}(\overline{v^1} - v^1)\,\sigma_1(M) = \tfrac{1}{2}(\overline{v^1} - v^1)a^o$$

Nous obtenons en définitive

$$\sigma_1(M^*N - N^*M) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^o \frac{\partial b^o}{\partial z_j} - b_j^o \frac{\partial a^o}{\partial z_j}\right) + \frac{1}{2}\left[(\overline{u^1}-u^1)\,b^o - (\overline{v^1}-v^1)a^o\right]$$

qui est une fonction.

En posant $C = i(M^*N - N^*M)$, nous obtenons

$\sigma_1(C) = c(x,z)$ où $c(x,z)$ est une <u>fonction réelle</u> homogène de degré (-1) en z.

Alors :

$$(A^*Af,\ f) = (M^*Mf,\ f) + (N^*Nf,\ f) + (Cf,\ f)$$

<u>Nous devons maintenant établir le</u>

<u>LEMME 3.4.1.</u> <u>Pour tout</u> λ <u>il existe</u> μ_o <u>tel que</u>

<u>pour tout</u> $\mu \geq \mu_o$ <u>et toute</u> f <u>dans</u> L^2

(R) $\quad (f,f) \geqslant \lambda(Jf, f) - \mu\|f\|^2_{-1}$

<u>Démonstration</u>.

D'après la formule de Parseval et la définition de $\|f\|_{-\frac{1}{2}}$, la relation (R) est équivalente à

$$\int \left[1 + \mu(1+|\xi|^2)^{-1} - \lambda(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}\right] |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant 0$$

Cherchons une condition sur μ et λ pour que l'expression entre crochets, $E(\xi)$, soit positive.

$$E(\xi)\,(1+|\xi|^2) = (1+|\xi|^2) + \mu - \lambda\,(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$\forall\xi, E(\xi) \geqslant 0 \iff \mu \geqslant (\lambda - \sqrt{1+|\xi|^2})\sqrt{1+|\xi|^2}$$

Donc pour $\mu \geqslant \dfrac{\lambda^2}{4}$, $E(\xi) \geqslant 0$ et (R) est vérifiée.

<u>Le lemme est démontré</u>.

b) <u>Condition suffisante pour que (*) soit valide</u>.

Appliquons lellemme précédent aux fonctions Mf et Nf :

$$(M^*Mf, f) \geqslant \lambda(JMf, Mf) - \mu\|Mf\|^2_{-1}$$
$$(N^*Nf, f) \geqslant \lambda(JNf, Nf) - \mu\|Nf\|^2_{-1}$$

où l'on choisit les mêmes constantes pour les deux inégalités.

Alors d'après l'expression de (A^*Af, f) donnée avant le lemme :

$$\|Af\|^2 \geqslant ([\lambda(M^*JM + N^*JN) + C]\, f, f) - \mu\left[\|Mf\|^2_{-1} + \|Nf\|^2_{-1}\right]$$

Mais M et N sont continus de L^2_{-1} dans L^2_{-1}, alors

$$\mu\left[\|Mf\|^2_{-1} + \|Nf\|^2_{-1}\right] \leqslant \nu\|f\|^2_{-1} \quad \text{et}$$

$$\|Af\|^2 \geq ([\lambda(M^*JM + N^*JN) + C]\ f,\ f) - \nu\ \|f\|^2_{-1}$$

Nous posons $E = \lambda(M^*JM + N^*JN) + C$ et calculons son 1-symbole.

$$\sigma_1(E) = \lambda[\sigma_1(M^*)\ \sigma_1(J)\ \sigma_1(M) + \sigma_1(N^*)\ \sigma_1(J)\ \sigma_1(N)]$$
$$+\ c(x,z)$$

Nous savons que $\sigma_1(J) = a|z|^{-1}$ avec $a > 0$.
Du fait que le poids est $w \leq 1$ on obtient de façon immédiate

$$\sigma_1(E) = \{\lambda a[(a^o(x,z))^2 + (b^o(x,z))^2] + \tilde{c}(x,z)\}\ |z|^{-1}$$

où l'on a posé $\tilde{c}(x,z) = c(x,z)\ |z|$, fonction homogène de degré zéro en z.

Nous pouvons alors poser

$E = KJK + S_2$ où $S_2 \in \mathcal{S}_2$ et $K \in \mathcal{O}_{m,o}$
avec $\sigma_o(KK) = \lambda a\ [(a^o)^2 + (b^o)^2] + \tilde{c}$.

En effet si K est défini par cette relation (au signe des coefficients près), $\sigma_1(KJK) = \sigma_1(E)$ et on a bien $E - KJK \in \mathcal{S}_2$.

D'ordinaire il existe λ assez grand pour que $\sigma_o(KK) > 0$, c'est-à-dire que K soit elliptique.
Si $(a^o)^2 + (b^o)^2 = 0$, supposons $\tilde{c}(x,z) > 0$.
Comme $\sigma_o(K)$ est une fonction réelle, il est auto-adjoint et il en est de même de K, opérateur de $\mathcal{O}_{m,o}$; donc $(Ef,\ f) = (JKf,\ Kf) + (S_2 f,\ f)$.

De plus K est elliptique et admet donc un indice.
Donc K est un morphisme strict de $L^2_{-\frac{1}{2}}$ dans $L^2_{-\frac{1}{2}}$,

les normes $\|Kf\|_{-\frac{1}{2}} + \|f\|_{-1}$ et $\|f\|_{-\frac{1}{2}}$ sont équivalentes.

Nous en déduisons :

$$(JKf, Kf) = c' \|Kf\|^2_{-\frac{1}{2}} \geq c\|f\|^2_{-\frac{1}{2}} - c''\|f\|^2_{-1}$$

$$(S_2 f, f) \leq c'''\|f\|^2_{-1} \quad \text{puisque} \quad S_2 \in \mathcal{S}_2 .$$

Finalement

$$\|Af\|^2 \geq (Ef, f) - \nu\|f\|^2_{-1} \geq c\|f\|^2_{-\frac{1}{2}} - c_1\|f\|^2_{-1}$$

La relation cherchée est établie.

Donc si $\sigma_1(C)$ est strictement positif sur les zéros de $\sigma_o(A)$ (ou si A est elliptique) la relation (*) de la proposition 3.4.1. est vérifiée.

La proposition 3.4.1. est démontrée.

Etablissons maintenant la

Proposition 3.4.2.- *Etant données les notations précédentes, une condition nécessaire pour que*

$$(*) \qquad \|Af\|^2 \geq c(Jf, f) - c_1\|f\|^2_{-1}$$

soit vérifiée est que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial b^o}{\partial x_j}\frac{\partial a^o}{\partial z_j} - \frac{\partial a^o}{\partial x_j}\frac{\partial b^o}{\partial z_j}\right) > 0$$

sur les zéros de $\sigma_o(A)$.

L'énoncé signifie qu'une dondition nécessaire est que $\sigma_1(C) \geq 0$ sur les zéros de $\sigma_o(A)$.

Démonstration.

Sur la variété $\mathcal{M}$ prenons un point x_o et un petit voisinage V de x_o qui permette de définir un système de coordonnées locales. Soit alors f une fonction à support dans ce voisinage, disons dans $\{x|\ |x-x_o| \leq 1\}$, telle que $f \in L^2 \cap \mathcal{S}$. Supposons que x_o est à l'origine des coordonnées.

Nous définissons l'application C_s $(0 < s \leq 1)$ par $(C_s f)(x) = f(\frac{x}{s})$.

ν étant un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim \mathcal{U}$),

Nous étudions l'expression

$$B(f) = C_{1/s}\ e^{-2i\pi \frac{1}{s^2}(\nu,x)}\ A\ e^{2i\pi \frac{1}{s^2}(\nu,x)}\ C_s f$$

en définissant A par la relation

$$Af = \int e^{2i\pi(x,\zeta)} h(x,\zeta)(1-\phi(\zeta))\ \hat{f}(\zeta)\ d\zeta\ .$$

Ceci est toujours possible ; par définition

$$Af = \int k(x,x-y)\ f(y)dy\ .$$

Nous définissons $h(x,\zeta)$ par

$$k(x,\hat{z}) = h(x,\zeta)(1-\phi(\zeta))$$

avec les propriétés habituelles sur h et ϕ (nous utilisons ici les lettres grecques pour les transformées de Fourier afin d'éviter toute confusion). Alors puisque f est dans $L^2 \cap \mathcal{S}$, Af a la forme trouvée.

D'autre part $h(x,\zeta) = \sum_{j=0}^{r} h^j(x,\zeta)$ où h^j est homogène en ζ de degré $(-j)$. Alors en posant

$$h^j_{\alpha,\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{\beta} h^j(x,\zeta),$$

nous établissons le

<u>LEMME 3.4.2. L'expression</u> $B(f)$ <u>peut s'écrire</u>

$$B(f) = \sum_{\substack{j=0 \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2r-2j}}^{j=r} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\beta!} h^j_{\alpha,\beta}(o,\nu)\ x^{\alpha} D^{\beta} f + R_s(f).$$

Si en plus des conditions habituelles

$$h^j(x,z) \in B_{m+2(r+1)-j}(L^2_{2r-2j}\ (1 \leq |z| \leq 2)).$$

<u>où pour tout</u> f <u>dans</u> L^2_{2r+1},

$$\|R_s(f)\| \leq c\ s^{2r+1}\ \|f\|_{L^2_{2r+1}}$$

<u>Démonstration.</u>

Nous allons d'abord appliquer A puis faire des développements en séries de Taylor.

Posons $g(x) = e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)}\ f(\frac{x}{s})$

Puisque $[f(\frac{x}{s})]^\wedge = s^n\ \hat{f}(s\zeta)$

$$\hat{g}(\zeta) = \delta_{\nu/s}\ [f(\frac{x}{s})]^\wedge = s^n\ \hat{f}(s\zeta - \frac{\nu}{s}).$$

Appliquons A à $g(x)$:

$$Ag(x) = s^n \int e^{2i\pi(x,\zeta)} h(x,\zeta)(1-\phi(\zeta))\hat{f}[s(\zeta - \frac{\nu}{s^2})]\ d\zeta$$

En posant $\eta = s(\zeta - \frac{\nu}{s^2})$ nous obtenons

$$Ag(x) = \int e^{2i\pi(\frac{x}{s},\eta+\frac{\nu}{s})} h(x,\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2})(1-\phi(\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}))\hat{f}(\eta)d\eta$$

Et finalement

$$C_{1/s} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ Ag(x) = \int e^{2i\pi(x,\eta)} h(xs,\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}) (1-\phi(\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}))\ \hat{f}(\eta)d\eta$$

Remarquons alors que

$$h(xs,\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}) = \sum_{j=0}^{r} s^{2j}\ h^j(xs,\ s\eta + \nu).$$

Considérons un seul élément h^j, développons le en série de Taylor autour de ν et autour de $x = 0$:

$$h^j(sx,s\eta + \nu) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j} \frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\ s^{|\alpha|+|\beta|}\ \eta^\beta x^\alpha (\frac{\partial}{\partial\zeta})^\beta (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha h^j(o,\nu) + R_1 .$$

Nous transportons ces résultats dans l'expression de $B(f)$ et, en appelant $B^j(f)$ le terme déduit de $B(f)$

en annulant h^k pour tout $k \neq j$, nous obtenons :

$$B^j(f)(x) = B_1^j(f)(x) + B_2^j(f)(x) + B_3^j(f)(x)$$

avec

$$B_1^j(f)(x) = \int e^{2i\pi(x,\eta)} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j} \frac{1}{\alpha!\beta!} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \eta^\beta x^\alpha h^j_{\alpha,\beta}(o,\nu) \hat{f}(\eta)d\eta$$

$$B_2^j(f)(x) = -\int e^{2i\pi(x,\eta)} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j} \frac{1}{\alpha!\beta!} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \eta^\beta x^\alpha h^j_{\alpha,\beta}(o,\nu)\phi\left(\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right)\hat{f}(\eta)d\eta$$

$$B_3^j(f)(x) = \int e^{2i\pi(x,\eta)} R_1\left(1-\phi\left(\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right)\right)\hat{f}(\eta)d\eta .$$

Nous obtenons immédiatement

$$B_1^j(f)(x) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\beta!} h^j_{\alpha,\beta}(o,\nu)x^\alpha(D^\beta f)(x)$$

Nous allons majorer les deux autres expressions.

En posant $\gamma(x) = -\int e^{2i\pi(x,\eta)}\eta^\beta\phi\left(\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right)\hat{f}(\eta)d\eta$

on a $B_2^j(f)(x) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} x^\alpha \gamma(x)$

et $\|\gamma\| = \|\eta^\beta\phi\left(\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right)\hat{f}(\eta)\|$ $\qquad (\| \ \| = \| \ \|_{L^2})$.

Si $|\eta| < \frac{|\nu|}{2\ s}$ alors $\left|\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right| \geq \frac{|\nu|}{2s^2}$ et pour s assez petit $\left(\frac{\eta}{s}+\frac{\nu}{s^2}\right)$ se trouve hors du support de ϕ . Alors

$$\|\gamma\|^2 \leq \int_{|\eta|>\frac{|\nu|}{2\ s}} (1+|\eta|^2)^{|\beta|}|\hat{f}(\eta)|^2 d\eta$$

$$\|\gamma\|^2 \leq \int_{|\eta|>\frac{|\nu|}{2\ s}} (1+|\eta|^2)^{2r+1}|\hat{f}(\eta)|^2 (1+|\eta|^2)^{|\beta|-2r-1} d\eta$$

$$\leq \left(1+\frac{|\nu|^2}{4\ s^2}\right)^{(|\beta|-2r-1)} \|f\|^2_{2r+1} \leq C\ s^{2(2r+1-|\beta|)}\|f\|^2_{2r+1}$$

Dans L^2_{loc} , et donc dans L^2 puisque la variété $\mathcal{M}$ est compacte, $B_j^2(f)$ est borné par

$$C\ s^{2j+|\alpha|+|\beta|}\|\gamma\| \leq C\ s^{2r+1}\|f\|_{2r+1}$$

où C désigne diverses constantes.

Séparons $B_3^j(f)$ en deux éléments, le premier $B_4^j(f)$ étant obtenu en sommant l'intégrale de $B_3^j(f)$ sur $|\eta| > \frac{|\nu|}{2s}$, le second $B_5^j(f)$ en sommant sur $|\eta| < \frac{|\nu|}{2s}$.

Dans $B_4^j(f)$ nous écrivons

$$R_1 = h^j(sx, -\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}) - \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j} \frac{1}{\alpha!\beta!} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \eta^\beta x^\alpha h^j_{\alpha,\beta}(o,\nu)$$

L'intégrale étant prise sur $|\eta| > \frac{|\nu|}{2s}$ tous les termes issus de la somme de droite se majorent comme pour $B_2^j(f)$ et il en est de même du terme obtenu avec h^j car la fonction à intégrer est tronquée dans une boule entourant l'origine.

$B_4^j(f)$ est donc majorée comme $B_2^j(f)$.

Dans $B_5^j(f)$ nous écrivons

$$R_1 = s^{2r+1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2r-2j+1} \frac{1}{\alpha!\beta!} \eta^\beta x^\alpha h^j_{\alpha,\beta}(\theta s x, \nu + \theta' s \eta)$$

$(o < \theta, \theta' < 1)$.

La majoration est alors immédiate car $\phi(\frac{\eta}{s} + \frac{\nu}{s^2}) = 0$ et $|\nu + \theta' s \eta| > \frac{|\nu|}{2}$.

Le lemme 3.4.2. est démontré.

Avant de démontrer la proposition 3.4.2., nous devons encore donner une définition avec quelques unes de ses propriétés.

DEFINITION 3.4.1. Symbole localisé : Etant donné un opérateur A de $\mathcal{O}_{m,r}$, considérons l'application

$\sigma_\nu : A \to \sigma_\nu(s, x_o, D, A)$ noté plus souvent $\sigma_\nu(A)$ où

$$\sigma_\nu(s,x_o,D,A) = \sum_{\substack{j=0 \\ |\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j}}^{r} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\beta!} h^j_{\alpha,\beta}(x_o,\nu) x^\alpha D^\beta$$

avec les mêmes conditions qu'au lemme 3.4.2. :

L'opérateur différentiel $\sigma_\nu(s, x_o, D, A)$ est le "symbole localisé" de A en x_o.

Remarquons que ν est un vecteur de l'espace cotangent en x_o à la variété $\mathcal{M}$ et que σ_ν est défini seulement au voisinage de x_o . Donnons maintenant la

<u>Proposition 3.4.3. Les symboles localisés en</u> x_o <u>de poids inférieur ou égal à</u> $2r$ (<u>le poids d'un terme étant la puissance</u> $|\alpha|+|\beta|+2j$ <u>de</u> s) <u>forment une algèbre et</u> σ_ν <u>est un</u> $*$-<u>homomorphisme d'algèbres</u>.

<u>Démonstration</u>.

On définit le produit de deux symboles localisés σ_ν et τ_ν comme le produit de composition ordinaire de deux opérateurs différentiels en enlevant les termes de poids $> 2r$. Il est évident qu'on obtient un symbole localisé.

a) <u>Montrons que</u> $\sigma_\nu(A)\ \sigma_\nu(A') = \sigma_\nu(AA')$. En effet

$$B_{AA'}(f) = C_{1/s} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ AA' \circ e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ C_s(f)$$

$$B_A[B_{A'}(f)] = [C_{1/s} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ A \circ e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ C_s] \circ$$

$$\circ [C_{\frac{1}{s}} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ A' \circ e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ C_s](f)$$

On a alors trivialement

$$B_{AA'}(f) = B_A(f)\ B_{A'}(f).$$

Il en est donc de même pour les symboles car les termes restants sont de poids $> 2r$:

$$\sigma_\nu(AA') = \sigma_\nu(A)\ \sigma_\nu(A').$$

b) <u>Montrons que</u> $\sigma_\nu(A^*) = [\sigma_\nu(A)]^*$.

On a d'une part :

$$[\sigma_\nu(A)]^* = \sum_{\alpha,\beta,j} s^{2j+|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\beta!} h^j_{\alpha,\beta}(x_o,\nu)\ D^\beta\ [x^\alpha .]$$

D'autre part :

$$B_{A^*}(f) = C_{\frac{1}{s}} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ A^* \circ e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ C_s(f)$$

$$(B_A)^*(f) \qquad = s^n\ C_{\frac{1}{s}} \circ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ A^* \circ e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)} \circ \frac{1}{s^n}\ C_s(f)$$

car $C^*_s = s^n\ C_{\frac{1}{s}}$ pour tout s .

Nous en déduisons :

$\sigma_\nu(A^*).f = B_{A^*}(f) - R_{A^*}(f) = (B_A)^*(f) - R_{A^*}(f)$

$\sigma_\nu(A^*) = [\sigma_\nu(A)]^* + (R_A)^* - R_{A^*}$,

$(R_A)^*$ et R_{A^*} sont trivialement de poids $> 2r$,

σ_ν est donc bien un $*$-homomorphisme.

<u>La proposition 3.4.3. est démontrée.</u>

Nous pouvons maintenant donner la

<u>Démonstration de la proposition 3.4.2.</u>

L'inégalité (*) peut s'écrire

(*') $([A^*A - cJ + c_1J^2]\ f,\ f) \geq 0$.

Nous allons appliquer (*') à la fonction $e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)}C_s f$.

Nous obtenons après arrangement :

(*") $s^n(C_{\frac{1}{s}}\ e^{-2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)}(A^*A - cJ + c_1J^2)e^{2i\pi\frac{1}{s^2}(\nu,x)}C_s f, f) \geq 0.$

Nous utilisons alors l'expression $B(f)$ trouvée auparavant dans laquelle nous remplaçons $h^j_{\alpha,\beta}$ par $k^j_{\alpha,\beta}$ obtenu de la même façon à partir de l'opérateur $(A^*A - cJ + c_1J^2)$.

La relation (*") s'écrit :

$$\sum_{\substack{j=0 \\ |\alpha|+|\beta|\leq 2r-2j}}^{j=r} s^{2j+|\alpha|+|\beta|}\ \frac{1}{\alpha!\beta!}\ k^j_{\alpha,\beta}(o,\nu)(x^\alpha D^\beta f, f) + (R_s(f), f) \geq 0 .$$

Nous savons que $\|R_s(f)\| \leq a's^{2r+1}\|f\|_{2r+1}$ (a' est une constante).

Soit M la somme dans l'inéquation considérée :

$M \geq -(R_s(f),f)$, soit en utilisant la relation de Cauchy-Schwartz

$M \geq -\|R_s(f)\|\ \|f\| \geq -a's^{2r+1}\|f\|_{2r+1}\ \|f\| \geq a\ s^{2r+1}$

pour toute fonction f dans $L^2_{2r+1}(V)$, avec a constante négative. Nous avons finalement montré que (**) peut s'écrire :

(**) $\sigma_\nu(A^* A - cJ + c_1 J^2)f \geq a\ s^{2r+1}$, a constante négative.

Appliquons ce résultat au cas $r = 1$.

D'après la proposition 3.4.3.,

$$\sigma_\nu[A^* A - cJ + c_1 J^2] = [\sigma_\nu(A)]^* \sigma_\nu(A) - c\sigma_\nu(J) + c_1[\sigma_\nu J]^2$$

$$\sigma_\nu(A) = h^o(o,\nu) + s\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial x_j}(o,\nu)x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial \zeta_j}(o,\nu)\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] + R_1$$

$$\sigma_\nu(J) = s^2/2\pi + R_2$$

$$\sigma_\nu(J^2) = s^4/4\pi^2 + R_3$$

où R_1 est de poids $w > 1$, R_2 de poids $w > 2$ et R_3 de poids $w > 4$ (on peut donc négliger tout de suite $\sigma_\nu(J^2)$.

La relation (**) s'écrit

$$(\sigma_\nu(A)f,\ \sigma_\nu(A)f) \geq c(\sigma_\nu(J)f,\ f) - c_1(\sigma_\nu(J^2)f,f) + a\ s^3 .$$

Alors lorsque $h^o(o,\nu) = 0$

$$s^2 \left\| \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial x_j}(o,\nu)x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial \zeta_j}(o,\nu)D_j\right] f\right\|^2 \geq cs^2\|f\|^2 + a\ s^3$$

et donc lorsque s tend vers zéro (**) est équivalente à

$$\text{(I)}\quad \left\| \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial x_j} x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^o}{\partial \zeta_j} D_j\right] f\right\|^2 \geq c\|f\|^2$$

sur les zéros de $h^o(x,\zeta)$.

D'après les inégalités de Hörmander[1] que l'on adapte sans difficulté au cas présent, cette inégalité est vérifiée si et seulement si

$$\frac{2}{c} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^{o}}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial h^{o}}{\partial \zeta_j}} \geq 1 \quad \text{ou encore}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial b^{o}}{\partial x_j} \frac{\partial a^{o}}{\partial z_j} - \frac{\partial a^{o}}{\partial x_j} \frac{\partial b^{o}}{\partial z_j}\right) > 0 \, .$$

La proposition 3.4.2. est établie.

Nous pouvons donc énoncer le théorème du début du n° 4.

THEOREME 3.4.1.- Les notations étant celles du paragraphe, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{J}(A)$ soit de dimension finie et que $\operatorname{Im}(A)$ soit fermé est que sur les zéros de $\sigma_o(A)$

$$\sigma_1(C) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial b^{o}}{\partial x_j} \frac{\partial a^{o}}{\partial z_j} - \frac{\partial a^{o}}{\partial x_j} \frac{\partial b^{o}}{\partial z_j}\right) > 0 \, .$$

(1) Voir Hörmander "Linar partial differantial operators" Lemma 8.1.3. (Berlin, Springer, 1964).

ANNEXE

Etant donnée une fonction $\Phi(z)$ homogène de degré zéro, provenant du développement en série de Fourier de z de $h(x,z)$, fonction de $B_{m+2(r+1)-j}$ $(L^2_{n+r+1-j}$ $(1 \leq |z| \leq 2))$, nous allons montrer que l'opérateur $(\check{\Phi} *.)$ applique L^p_k dans L^p_k pour tout k et tout p $(1 < p < \infty)$ et que sa norme est majorée par les bornes supérieures des dérivées de Φ jusqu'à l'ordre $[\frac{n}{2} + 1]$ (partie entière de $\frac{n}{2} + 1$).

Nous commençons en donnant quelques définitions et le théorème d'interpolation des opérateurs, de Marcinkiewicz (voir Zygmund [1] ou [2]).

Soit $h(x)$ une fonction ; considérons les nombres b, $1 \leq b < \infty$, et y, $y > 0$.

Nous définissons $E_y[h] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |h(x)| > y\}$ et nous désignons la mesure de Lebesgue de cet ensemble par $\nu(E_y[h])$.

<u>DEFINITION A.1.- L'opérateur de convolution</u> T <u>défini par</u> : $f \longmapsto h = T * f$ <u>est faiblement de type</u> (a,b) <u>si et seulement si</u>

(i) $T * f$ <u>est défini pour toute</u> f <u>dans</u> L^a

(ii) <u>Il existe une constante</u> M <u>telle que pour toute</u> $f \in L^a$

$$\underline{\nu(E_y[h]) \leq \left(\frac{M}{y} \|f\|_a\right)^b}$$

<u>La valeur minima de</u> M <u>est la "norme faible" de</u> T.

DEFINITION A.2.- L'opérateur de convolution T est fortement de type (a,b) si et seulement si

(i) $T * f$ est défini pour toute f dans L^a

(ii) Il existe une constante M' telle que pour toute $f \in L^a$

$$\|h\|_b \leq M' \|f\|_a$$

La valeur minima de M est la "norme" de T.

Dans ce dernier cas on écrit $T \in L_a^b$ et on désigne la norme de T par $L_a^b(T)$.

Remarque. Un opérateur fortement de type (a,b) est faiblement de type (a,b) (mais la réciproque est fausse) et la norme faible est dominée par la norme forte.

THEOREME DE MARCINKIEWICZ.- Soient (α_1, β_1) et (α_2, β_2) deux points d'un triangle, $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ tels que $\beta_1 \neq \beta_2$. Supposons que l'opérateur de convolution T est simultanément faiblement de types $(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})$ et $(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2})$ avec pour normes faibles respectives M_1 et M_2. Alors pour tout (α, β) d'un segment ouvert, soit.

$$\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2 \,,\; \beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2 \quad (0 < t < 1)$$

T est fortement de type $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ et nous avons

$$\|T * f\|_{\frac{1}{\beta}} \leq K\, M_1^{(1-t)}\, M_2^t \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}$$

où K, fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t$ indépendante de f, est borné lorsqu'on fixe les deux points du triangle.

Ce théorème, que nous ne démontrerons pas, non seulement permet d'établir le théorème des multiplicateurs de Hörmander (voir Hörmander [1]), mais il fournit aussi une estimation de la norme, résultat que nous établirons un peu plus loin.

Nous énonçons tout d'abord le

THEOREME DES MULTIPLICATEURS.- Soit $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et supposons que
$$\int_{\frac{1}{2}R<|\xi|<\frac{3}{2}R} |R^{|\alpha|} D^{\alpha} f|^2 \frac{d\xi}{R^n} \leq B^2$$
pour $0 < R < \infty$, $|\alpha| \leq K$ où K est le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{2}n$, et où B est une constante. Alors pour $1 < p < \infty$, $(\check{f}*.)$ applique continuement L^p dans L^p.

Là encore nous renvoyons à la bibliographie (Hörmander [1]) pour la démonstration : l'auteur la fait en considérant des opérateurs agissant sur l'espace $\mathcal{S}$, mais $\mathcal{S}$ étant dense dans L^p pour la norme L^p nous obtenons les mêmes résultats pour $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ par passage à la limite : $T \in L_p^p$. Nous ferons cependant diverses remarques :

a) $L_{\infty}^{\infty} = L_1^1$. Par les théorèmes 2.1. et 2.2. de l'article de L. Hörmander qui permettent une majoration de $\nu(E_y|h|)$, $(\check{f}*.)$ est faiblement de type $(1,1)$ avec une norme majorée par les dérivées de f jusqu'à l'ordre $|\alpha| > \frac{n}{2}$.

b) $(\check{f}*.) \in L_2^2$ et $L_2^2(\check{f}*.) \leq$ cte B, d'après le théorème des multiplicateurs.

c) L'application du théorème d'interpolation permet alors de majorer $L_p^p(\check{f}*.)$ par cte B et où l'on peut, en modifiant au besoin les constantes, remplacer B par

$$\sum_{\alpha} \sup_{\frac{1}{2}<|x|<\frac{3}{2}} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)\right| \qquad \text{avec} \quad |\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}+1\right]$$

<u>Application à l'opérateur</u> $(\check{\Phi} * .)$.

Une application immédiate de ces résultats établit que $\Phi * .$ applique L^p dans L^p et donc L^p_k dans L^p_k pour tout k, puisqu'il s'agit d'une convolution. De plus si N est la borne supérieure, pour $1 \leq |z| \leq 2$, des dérivées de Φ jusqu'à l'ordre $|\alpha| > \frac{n}{2}$,

$(*)$ $L^p_p(\check{\Phi} * .) \leq C\ N$.

De plus la norme de $(\check{\Phi} * .) \in \mathcal{L}(L^p_k, L^p_k)$ est équivalente, pour tout k, à $L^p_p(\check{\Phi} * .)$ (voir Caldéron [1] §7).

<u>Application à l'opérateur d'intégration</u>.

L'opérateur J est défini par

$(Jf)^{\wedge} = \psi(z)\ \hat{f}(z)$ (voir définition 1.1.6.)

Soit $f \in L^p_k$:

$\frac{\partial}{\partial x} Jf = (x\ \psi(x)\hat{f})^{\vee} = (h(x)\hat{f})^{\vee}$

où $h(x)$ est homogène de degré zéro pour $|x| \geq \rho$ et est borné pour $|x| < \rho$. On applique donc le théorème des multiplicateurs et $\frac{\partial}{\partial x} Jf \in L^p_k$.

<u>Donc J applique L^p_k dans L^p_{k+1}</u> .

BIBLIOGRAPHIE (1)

[1] CALDERÓN A.P. "Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas". Universidad de Buenos Aires (1960).

[2] CALDERÓN A.P. "Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations". American Journal of maths. vol. LXXX, n° 1, 1958, pp 16-36.

[3] CALDERÓN A.P. et ZYGMUND A. "Singular integral operators and differential equations". American Journal of Maths, vol. LXXIX, n 4, 1957, pp 901-921.

[4] CARTAN H. et SCHWARTZ L. "Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique". Séminaire Cartan, 16° année, E.N.S. Paris 1965.

[5] HÖRMANDER L. "Estimates for translation invariant operators in L^p spaces". Acta mathematica, n°104, 1960, pp 93-140.

[6] HÖRMANDER L. "Pseudo-differential operators". Communications on pure and applied mathematics, vol. XVIII, 1965, pp 501-517.

[7] HÖRMANDER L. "Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems". Annals of maths. n°83, 1966, pp 129-209.

(1) Pour une bibliographie plus exhaustive, voir : A.P. Calderon "Singular Integrals". Bulletin of the American Mathematical Society. vol.72 n°3, Providence, May 1966.

[8] KOHN J.J. et NIRENBERG L. "An algebra of pseudo-differential operators". Communications on pure and applied mathematics, vol. XVIII, 1965, pp 269-305.

[9] SEELEY R.T. "Singular integrals on compact manifolds". American Journal of maths, n°81, 1959, pp 658-690.

[10] ZYGMUND A. "Trigonometrical series". Cambridge (at the University press) tomes I et II (1959).