UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

226

Quelques conditions pour l'existence de fonctions pics dans des domaines pseudoconvexes

Monique Hakim et Nessim Sibony

Analyse Harmonique d'Orsay
1977

QUELQUES CONDITIONS POUR L'EXISTENCE DE FONCTIONS PICS DANS DES DOMAINES PSEUDOCONVEXES

Monique Hakim et Nessim Sibony

Let p be a boundary point of a weakly pseudoconvex domain Ω in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary. We give a necessary condition for the existence of a non constant function $f \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$, holomorphic in Ω such that $f(p) = 1$ and $|f| \leq 1$ in $\bar{\Omega} \setminus \{p\}$. The example of Kohn and Nirenberg [4] does not satisfy this condition. In particular this answers to a question of J. J. Kohn : there are no $^\infty$ coordinates relative to which the domain is convex which are holomorphic inside he domain. We also study sufficient conditions for the existence of peak functions.

1. INTRODUCTION.

Soit D un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière $\mathscr{C}^\infty$. On notera A(D) l'algèbre des fonctions holomorphes dans D et continues dans $\bar{D}$. Rappelons qu'on appelle fonction pic de classe $\mathscr{C}^k$ en $z_o \in \partial D$ une fonction $f \in A(D) \cap \mathscr{C}^k(\bar{D})$ telle que $f(z_o) = 1$ et $|f(z)| < 1$ pour $z \in \bar{D} - \{z_o\}$.

Si z_o est un point de stricte pseudoconvexité, on sait [3 ; 6] qu'il existe une fonction pic de classe $\mathscr{C}^\infty$ en z_o. Mais si la forme de Lévi dégénère même en ce seul point, il n'existe déjà plus nécessairement de fonction pic de classe $\mathscr{C}^1$ (voir [2] pour un contre-exemple dû à J. E. Fornaess). On ne connaît toujours pas de contre-exemple pour les fonctions pic continues.

La question se pose donc dans le cas où la forme de Lévi dégénère en un point du bord de savoir reconnaître si oui ou non il existe une fonction pic en ce point. Remarquons que la question est purement locale. En effet, si on sait trouver pour un voisinage V de z_o une fonction $f \in A(V \cap D) \cap \mathscr{C}^k(V \cap \bar{D})$ qui ait un pic en z_o, on peut par un procédé classique (voir remarques finales) en trouver une qui soit dans $A(D) \cap \mathscr{C}^k(\bar{D})$.

Nous étudions ici quelques critères permettant de répondre plus facilement à la question de l'existence d'un tel pic local pour un domaine quelconque à bord $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^n$ et en un point de type fini.

2. UNE CONDITION NECESSAIRE POUR L'EXISTENCE D'UN PIC LOCAL.

NOTATIONS. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et soit p un point du bord. On représente un point de $\mathbb{C}^{n+1}$ par des coordonnées (z,w) où $z = (z_1, \ldots$ $\ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $w \in \mathbb{C}$ et on suppose que les coordonnées ont été choisies en sorte que p soit l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et que D soit défini au voisinage de 0 par

$$\rho(z,w) = \operatorname{Re} w + \varphi(z,w) < 0 \tag{2.1}$$

avec φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'ordre supérieur ou égal à 2 à l'origine. Le plan tangent en 0 est donc $\operatorname{Re} w = 0$.

On supposera de plus dans ce qui suit que le point p est de type fini m. La notion de type d'un point sur le bord d'un domaine est due à J. J. Kohn [5] mais nous n'utiliserons ici de cette définition qu'une formulation géométrique équivalente due à T. Bloom et I. Graham [1].

DEFINITION 1. Un point p de ∂D est dit de <u>type fini</u> m, s'il existe une sous-variété complexe de codimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$ tangente en p à ∂D à l'ordre m et s'il n'en existe aucune qui soit tangente à un ordre supérieur.

DEFINITION 2. Soit ρ une fonction de la forme (2.1). On dira que ρ est d'<u>ordre fini</u> en 0 s'il existe un polynôme holomorphe P en les variables z_i tel que $P(0) = 0$ et que

$$\rho(z\ ,\ P(z)) = q_s(z) + o(|z|^s) \tag{2.3}$$

avec q_s un polynôme homogène non nul dans $\mathbb{R}^{2n}$, de degré s et vérifiant $q_s(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$. On pourra définir <u>l'ordre</u> de ρ en 0 comme étant le plus petit des entiers s tels que cette condition soit réalisée. Les entiers s vérifiant cette condition sont nécessairement pairs.

Si de plus il existe un polynôme P pour lequel on ait (2.3) avec $q_s(z) > 0$ pour $z \neq 0$, le point z est de <u>strict type fini</u> au sens de R. M. Range.

DEFINITION 3 [7]. Avec les notations ci-dessus, le point 0 est dit de strict <u>type fini</u> s'il existe une fonction h holomorphe dans un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^n$, un entier $\ell > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $h(0) = 0$ et que pour tout $z \in V$, on ait l'inégalité

$$\rho(z\ ,\ h(z)) \geq C\,|z|^{\ell}$$

de type strict de 0 est alors le plus petit entier ℓ tel que cette condition soit réalisée. Un tel entier est nécessairement pair.

Nous renvoyons à [7] pour le rapport entre cette définition et celle donnée par J. J. Kohn dans [5].

THEOREME 1. Soient 0 un point de type fini de ∂D et V un voisinage de 0 dans C^{n+1}. S'il existe une fonction non constante $f \in A(D \cap V) \cap \mathscr{C}^\infty(\bar{D} \cap V)$ telle que $f(0) = 1$ et $|f(z,w)| \leq 1$ pour $(z,w) \in \bar{D} \cap V$, alors ρ est d'ordre fini en 0.

Démonstration. Supposons qu'il existe une telle fonction f et soit $\tilde{f}$ un prolongement $\mathscr{C}^\infty$ de f à V. Soient alors

$$g = \operatorname{Re} \tilde{f} \quad , \quad h = \operatorname{Im} \tilde{f} \quad , \quad w = u + iv .$$

D'après le lemme de Hopf, comme g est une fonction harmonique non constante qui a un maximum en 0 sur $\bar{D} \cap V$, sa dérivée normale $\frac{\partial g}{\partial u}(0)$ est strictement positive. Comme de plus $\bar{\partial} \tilde{f}(0) = 0$, on en déduit que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}(0) = 0$ et que

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}(0) \right|^2 = \left| \frac{\partial g}{\partial u}(0) \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial v}(0) \right|^2 = \text{dét} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} (0) > 0 .$$

Par suite, soit

$$S = \left\{ (z,w) \in V \ ; \ \tilde{f}(z,w) = 1 \right\} .$$

Le théorème des fonctions implicites montre que S est une variété différentiable réelle de dimension $2n$ au voisinage de 0 et qu'il existe une fonction H de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\tilde{f}(z, H(z)) \equiv 1 .$$

En calculant le $\bar{\partial}$ des deux membres et en utilisant la propriété $\bar{\partial}_z \tilde{f}(0) = 0$, on en déduit que

$$\bar{\partial}(\tilde{f}(z \ , \ H(z)))(0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}(0) . \bar{\partial} H(0) = 0 ,$$

d'où $\bar{\partial} H(0) = 0$. Par récurrence, on vérifie facilement que toutes les dérivées $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} H(0)$ où $|\alpha| > 0$ sont nulles. Il suffit en effet de calculer $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} \tilde{f}(z \ , \ H(z))(0)$ et il reste, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}(0) . \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} H(0) = 0$, d'où le résultat. On en déduit que le développement de Taylor à l'ordre m de H est de la forme

(2.4) $$H(z) = P(z) + O(|z|^m),$$

où P est un polynôme holomorphe de degré $\leq m$. Si 0 est un point de type m, on a alors

$$\rho(z,P(z)) = q_s(z) + O(|z|^s)$$

où la partie homogène de plus bas degré non nulle dans le développement de Taylor à l'origine est de degré s avec $s \leq m$. Nous allons montrer que $q_s(z) \geq 0$, ce qui achèvera la démonstration.

De (2.4), on déduit

$$\rho(z,P(z)) = \rho(z\ ,\ H(z)) + O(|z|^m)$$

donc la partie homogène de degré s du développement de Taylor est la même pour $\rho(z\ ,\ H(z))$. Mais comme S est à l'extérieur du domaine on a $\rho(z\ ,\ H(z)) \geq 0$, donc

$$q_s(z) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \frac{\rho(\lambda z, H(\lambda z))}{\lambda} \geq 0.$$

Exemple 1. Soit Ω le domaine de $\mathbb{C}^2$ étudié par J. T. Kohn et L. Nirenberg dans [4]

$$\Omega = \left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \ ;\ \operatorname{Re} w + |zw|^2 + |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 \operatorname{Re} z^6 < 0\right\}.$$

Le domaine Ω est pseudoconvexe et la forme de Lévi ne dégénère qu'au point 0. Soit P un polynôme d'ordre $r > 0$ en 0

$$P(z) = az^r + O(|z|^r), \qquad a \neq 0.$$

On a alors

$$q_s(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} a\, z^r & \text{si} \quad r < 8 \\ \operatorname{Re} a\, z^8 + |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 \operatorname{Re} z^6 & \text{si} \quad r = 8 \\ |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 \operatorname{Re} z^6 & \text{si} \quad r > 8 \end{cases}$$

et dans tous les cas q_s change de signe au voisinage de 0. On en déduit donc que si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{\Omega}) \cap A(\Omega)$, $f(0) = 1$ et $|f(z,w)| \leq 1$ au voisinage de 0 dans $\bar{\Omega}$ alors f est constante. Il est clair qu'on obtient le même résultat pour $f \in \mathcal{C}^{k}(\bar{\Omega}) \cap A(\Omega)$ avec $k \geq 8$.

Exemple 2. La même méthode appliquée à l'exemple donné par J. E. Fornaess [2] $\Omega_1 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \operatorname{Re} w + |zw|^2 + |z|^6 + t|z|^2 \operatorname{Re} z^4 < 0\right\}$ avec t réel, $1 < t < \frac{9}{5}$, montre qu'il n'existe pas de fonction non constante de $\mathcal{C}^{6}(\bar{\Omega}) \cap A(\Omega)$ tel que $f(0) = 1$ et $|f(z,w)| \leq 1$. Elle donne donc un résultat plus faible en ce qui concerne la régularité que celui de J. E. Fornaess, mais elle donne un renseignement de plus : 0 ne peut pas appartenir à un ensemble pic d'une fonction $\mathcal{C}^6$.

3. QUELQUES CONDITIONS SUFFISANTES POUR L'EXISTENCE DE FONCTIONS PIC.

Il est clair que la condition de la proposition 1 n'est pas suffisante pour qu'il existe une fonction pic. Par exemple, si

$$\rho(z,w) = \operatorname{Re} w + |z_1|^2 - |z_2|^4 \tag{3.1}$$

on a bien $\rho(z,0) = |z_1|^2 + 0(|z|^2)$, mais $\rho(z\ ,\ H(z))$ change de signe au voisinage de 0 pour toute fonction de la forme (2.4) et il n'existe donc pas de fonction pic $\mathcal{C}^{\infty}$.

Nous allons donner quelques conditions suffisantes pour l'existence de fonctions pic. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que D est décrit au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ par une relation du type

$$\rho(z,w) = \operatorname{Re} w + \varphi(z\ ,\ w) < 0$$

où φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'ordre ≥ 2 en 0.

PROPOSITION 2. Supposons qu'il existe une fonction h holomorphe dans un voisinage U de 0 de $\mathbb{C}^n$ telle que $h(0) = 0$ et que $\rho(z\ , h(z)) > 0$ pour $z \in U$, $z \neq 0$. Alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et une fonction f continue dans $\bar{D} \cap V$, holomorphe dans $D \cap V$ telle que $f(0) = 1$ et $|f(z,w)| < 1$ pour $(z,w) \in \bar{D} \cap V - \{0\}$.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que $h'(0) = 0$. En faisant le changement de coordonnée de w en $w + h(z)$, on peut supposer que $h = 0$. L'équation de ∂D est alors de la forme

(3.2) $$\rho(z,w) = \text{Re } w \quad \varphi(z,w)$$

où φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, d'ordre z en 0, vérifiant $\varphi(z,0) > 0$ pour $z \neq 0$, au voisinage de 0. Développons φ en 0 par rapport à $u = \text{Re } w$, on a

(3.3) $$\varphi(z,w) = \varphi(z,\ iv) + u.o(z,w).$$

Par ailleurs

(3.4) $$\varphi(z,iv) = \varphi(z,0) + v\ \varepsilon(z,v)$$

et

(3.5) $$\varepsilon(z,v) = \varepsilon(z,0) + \alpha v + v.o(z,v).$$

On développe encore $\eta(z) = \varepsilon(z,0)$ à l'ordre 2, on obtient

(3.6) $$\eta(z) = \alpha_o(z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |z_i|^2 + o|z|^2$$

avec $\alpha_o(z) = \text{Re } P_o(z)$ et $P_o(z)$ un polynôme holomorphe de degré ≤ 2 vérifiant $P_o(0) = 0$. D'où finalement

(3.7) $$\rho(z,w) = \text{Re } w(1 + o(z,w)) + \text{Im } w \left[\alpha_o(z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |z_i|^2 + \alpha v + o|z|^2 + v\ o(z,w)\right] + \varphi(z,0).$$

Faisons alors le changement de variables de (z,w) en (z,w_1) avec

$$w_1 = w(1 - iP_o(z)), \tag{3.8}$$

il vient,

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_1(1 + o(z,w))$$
$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w_1(1 + o(z,w))$$
$$\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w . \operatorname{Re} P_o(z) = \operatorname{Re} w_1(1 + o(z,w)).$$

D'où en oubliant l'indice 1 de w_1, le domaine D est défini au voisinage de 0 par une relation du type

$$\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w \left[(\alpha+o(z,w)\operatorname{Im} w + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + o(z,w)|z_i|^2\right] + \varphi(z,0)(1+o(z,w)) < 0. \tag{3.9}$$

Comme $\varphi(z,0) \geq 0$, on en déduit que D est contenu au voisinage de 0 dans le domaine D_1 défini par

$$\operatorname{Re} w - A(\operatorname{Im} w)^2 - B|v||z|^2 < 0 \tag{3.10}$$

où A et B sont des constantes réelles, avec $B > 0$, convenablement choisies. Il suffit alors de prouver qu'il existe une fonction pic pour D_1 en 0. Mais pour r assez petit, la projection sur la droite complexe $z = 0$ de $D_1 \cap B(0,r)$ (où $B(0,r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r de $\mathbb{C}^{n+1}$) est contenue dans le domaine Δ_r défini par

$$\Delta_r = \left\{w \; ; \; |w| < r^2 \text{ et } u < Av + B|v|\right\}. \tag{3.11}$$

On peut trouver une représentation conforme f de $\overline{\Delta}_r$ sur $|w-1| \leq 1$ qui envoie le point 0 au point 1. La fonction f a alors un pic au point 0 sur $\overline{D}$, ce qui achève la démonstration.

Si le point 0 est d'ordre strict fini $2k$ (définition 3), en procédant de la même façon, on peut gagner un peu de régularité pour la fonction pic ainsi trouvée.

De façon plus précise, on a le résultat :

PROPOSITION 3. Si 0 est un point d'ordre strict fini $2k$, il existe une fonction pic local de classe $\mathscr{C}^{1+\varepsilon}$ et si $k = 1$ ou 2 il existe une fonction pic holomorphe au voisinage de 0.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction holomorphe h au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et une constante positive C_o telle que

$$\rho(z\ ,\ h(z)) \geq C_o\ |z|^{2k}, \tag{3.12}$$

en faisant encore le changement de variable de w en $w + h(z)$, on peut supposer que

$$\rho(z,w) = \operatorname{Re} w + \varphi(z,w) \tag{3.13}$$

avec φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$, d'ordre ≥ 2 en 0 et $\varphi(z,0) \geq C_o |z|^{2k}$.

En reprenant les calculs déjà faits pour démontrer la proposition 2, on trouve après (3.9) que D est contenu dans un domaine D_1 défini par

$$\operatorname{Re} w - A(\operatorname{Im} w)^2 - B\,|\operatorname{Im} w|\,|z|^2 + C|z|^{2k} \leq 0. \tag{3.14}$$

Etudions alors le contour de la projection de D_1 sur la droite $z = 0$; on trouve

$$u = \sup_{|z|} \left(Av^2 + B\,|v|\,|z|^2 - C\,|z|^{2k}\right) \tag{3.15}$$

le sup étant pris pour z dans un voisinage de 0, ou encore en posant $t = |z|^2$

$$u = \sup_{0 \leq t \leq t_o} \left(Av^2 + B\,|v|\,t - C\,t^k\right)$$

où t_o est une constante qui dépend du voisinage choisi. On peut toujours, en changeant au besoin la coordonnée z et le voisinage de 0, supposer que $t_o = 1$ et que $B|v| < k\,C$. On étudie alors les variations à v fixé de

$$y(t) = Av^2 + B|v|t - C\,t^k$$
$$y'(t) = B|v| - k\,C\,t^{k-1}$$

si $k = 1$, le maximum est Av^2. Si $k \geq 2$, $y'(0) = B|v| > 0$ et y' change de signe pour $B|v| = k\,C\,t^{k-1}$, on a donc pour contour la courbe d'équation

$$u = A + C(k-1)\,t_1^k$$
$$t_1 = \left(\frac{B|v|}{C^k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

c'est-à-dire une équation de la forme

$$u = Av^2 + D|v|^{\frac{k}{k-1}}. \tag{3.17}$$

Si $k = 2$, l'équation (3.17) est celle d'une parabole

$$u = A_1 v^2.$$

Si $A_1 \leq 0$, on a $\operatorname{Re} w \leq 0$ et la fonction $\exp(w)$ a un pic en 0. Si $A_1 > 0$, on a aussi au voisinage de 0

$$u \leq A_1(u^2 + v^2)$$

qui représente l'extérieur d'un contour circulaire. On trouve alors facilement par représentation conforme une fonction pic holomorphe au voisinage. Il suffit de prendre $\exp(\frac{w}{A_1 w - 1})$. Si $k > 2$, la courbe limite (3.12) est toujours de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ en 0 et analytique ailleurs. Transformons par représentation conforme f le domaine

$$\Delta_r = (u < Av^2 + D|v|^{\frac{k}{k-1}}) \cap (|w| < r)$$

en le disque $|w+1| < 1$, en sorte que f qui se prolonge continûment jusqu'au bord, vérifie $f(0) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ en 0 car il en est ainsi de la fonction de Green du domaine Δ_r. La fonction $\exp f$ est une fonction pic de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$.

Remarque 1. Dans la formule (3.6) si tous les coefficients α_i sont nuls, calculons le développement de $\eta(z)$ à l'ordre 4, on obtient

$$(3.6') \qquad \eta(z) = \alpha_o(z) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(z)\,|z_j|^2 + \sum_{i,j} \beta_{ij}\,|z_i z_j|^2 + o(|z|^4)$$

avec

$$\alpha_o(z) = \operatorname{Re} P_o(z) \quad , \quad P_o(0) = 0 \quad \text{et} \quad d^o P_o \leq 4$$

$$\alpha_j(z) = \operatorname{Re} Q_j(z) \quad , \quad Q_j(0) = 0 \quad \text{et} \quad d^o Q_j \leq 2$$

$\beta_{i,j}$ des constantes.

Remarquons que par les changements de variables (z,w) en (z,w_1) avec

$$w_1 = w(1 - i\,Q_j(z))$$

on obtient

$$(\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w.\alpha_j(z))\,|z_j|^2 = \operatorname{Re} w_1 \left[1+o(|z|+(w)|)\right] z_j|^2$$

d'où

$$\operatorname{Im} w.\alpha_j(z)\,|z_j|^2 = \operatorname{Re} w_1 . o(|z|+|w|).$$

On voit alors qu'avec un changement de coordonnée

$$w_1 = w(1 - iP_o(z) - i \sum_{j=1}^{n} Q_j(z)).$$

On obtient le même genre de résultat mais où l'équation (3.14) est remplacée par

$$(3.14') \qquad \rho_1 = \operatorname{Re} w - A(\operatorname{Im} w)^2 - B\,|v|\,|z|^4 + C\,|z|^{2k}.$$

Si les β_i sont tous nuls, on peut encore continuer et finalement on obtient

$$(3.14'') \qquad \rho_1 = \operatorname{Re} w - A(\operatorname{Im} w)^2 - B\,|v|\,|z|^{2h} + C\,|z|^{2k}.$$

On voit alors facilement qu'il existe une fonction pic holomorphe au voisinage si $\frac{k}{k-h} \geq 2$, c'est-à-dire si $2h \geq k$.

Remarque 2. Pour la commodité du lecteur, rappelons comment à partir d'une fonction pic local de classe $\mathcal{C}^k$ définie au voisinage d'un point du bord d'un domaine D pseudoconvexe borné régulier de $\mathbb{C}^n$, on peut construire une fonction pic qui soit dans $A(D) \cap \mathcal{C}^k(\bar{D})$. Soit f définie au voisinage V de $0 \in \partial D$, $f \in A(D \cap V) \cap \mathcal{C}^k(\bar{D} \cap V)$ telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| < 1$ pour $z \in \bar{D} \cap V - \{0\}$. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans V, valant 1 au voisinage de 0. On considère la forme de type (0,1)

$$u = \bar{\partial}\left(\frac{\chi}{f-1}\right)$$

elle est à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. D'après un théorème de J. J. Kohn, il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ tel que $\bar{\partial} g = u$ et en ajoutant à g une constante, on peut supposer que $\operatorname{Re} g > 0$, on voit alors aussitôt que la fonction $h = \exp\left[1/\left(\frac{\chi}{f-1} - g\right)\right]$ est un pic global de la même régularité que f.

Bibliographie

[1] BLOOM, T., GRAHAM, I. A geometric characterization of points of type m on real submanifolds of $\mathbb{C}^n$ (preprint).

[2] FORNAESS, J. E. Peak points on weakly pseudoconvex domains (preprint).

[3] HAKIM, M., SIBONY, N. Frontière de Shilov et spectre de $A(\bar{D})$ pour les domaines faiblement pseudoconvexes. C. R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), 959-962.

[4] KOHN, J. J., NIRENBERG, L. A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function. Math. Ann. 201 (1973), 265-268.

[5] KOHN, J. J. Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two. J. Diff. Geom. 6 (1972), 523-562.

[6] PFLUG, P. Uber polynomiale Funktionen auf Holomorphiegebieten. Math. Z. 139 (1974), 133-139.

[7] RANGE, R. M. Hölder estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ on weakly pseudoconvex domains (to appear in Bull. A.M.S.).