Rémi LANGEVIN
Ecole Normale Supérieure
2, Av. Pozzo di Borgo
92211 SAINT-CLOUD
Tél. 602-41-03 - ch 208

C.A. VINOGRADOV (1

Sur l'intégration des séries entières qui convergent uniformément dans le disque unité.

Le but de ce travail est de préciser quelques résultats de L. CARLESON et W. RUDIN (I) sur l'intégration dans les espaces H^∞ et C_A (pour la définition de H^∞ et C_A cf infra §I.1)

Soit l^1_A l'espace de toutes les fonctions f, analytiques dans le disque unité D et telles que $\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)| < +\infty$ où: $\hat{f}(n) = f^{(n)}(0)/n!$ $(n=0,1,2,\ldots)$,

$E\subset D$, soit $C(E)$ l'espace de toutes les fonctions uniformément continues sur E, soit S l'opérateur de restriction à E.

On sait (2), que $S(l^1_A) = C(E)$ si et seulement si l'ensemble E est fini. La situation change radicalement si l'on étend un peu la classe l^1_A, en la remplaçant par la classe de toutes les fonctions f appartenant à C_A pour lesquelles $\hat{f}(n) = O(1/n)$, $n \longrightarrow \infty$: dans ce cas on peut construire des ensembles dénombrables E, $E\subset D$ tels que toute fonction x de C(E) soit la trace sur E d'une fonction ayant les propriétés énumérées plus haut (cf 2.I, 2.6).

Remarquons aussi que dans les cas d'interpolation que nous considé-rons, nous nous restreignons à des opérateurs linéaires continus.

I Notations et résultats préliminaires

I.1 $\hat{C}$ est le domaine complexe achevé.

$$\mathbb{D} = \{z\in \hat{\mathbb{C}} : |z|<1\}, \quad \bar{\mathbb{D}} = \{z\in\hat{\mathbb{C}} : |z|\leq 1\}.$$

Soit G une région de $\hat{C}$. $C_A(G)$ désigne l'espace de toutes les fonctions analytiques dans G et continues sur $\bar{G}$,* muni de la norme standard:

$$\|f\|_{C_A(G)} = \sup_{z\in G} |f(z)|, \quad f\in C_A(G).$$

Dans le cas G= D nous désignerons aussi $C_A(D)$ par C_A.

C(E) est l'espace de toutes les fonctions définies et continues sur l'ensemble $\bar{E}$ $(\bar{E}\subset\hat{C})$.

$l^\infty(E)$ est l'espace de toutes les fonctions bornées sur E.

H^∞ est l'espace de toutes les fonctions analytiques et bornées sur le disque D, muni de la norme standard.

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|, \quad f\in H^\infty.$$

---

* si $K\subset\hat{C}$, $\bar{K}$ est la cloture de l'ensemble K dans $\hat{C}$.

$\hat{f}(n) = 1/n!f^{(n)}(0)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ où f est une fonction analytique dans un voisinage de 0

<u>I.2 Définition</u> Soit $E\subset D$. On dit (I) qu'un ensemble satisfait aux conditions de CARLESON si : $\delta = \inf_{\xi\in E} \prod_{\substack{\eta\in E\\ \eta\neq\xi}} \left|\frac{\xi-\eta}{1-\bar{\eta}\xi}\right| > 0$

<u>I.3 Lemme.</u> soit E D et $\sup_{z\in E} \frac{|1-z|}{1-|z|} < +\infty$ *

Les affirmations suivantes sont équivalentes:

a) l'ensemble E vérifie les conditions de CARLESON;

b) $\sup_{\substack{\eta,\xi\in E\\ \eta\neq\xi}} \left|\frac{1-\bar{\eta}\xi}{\xi-\eta}\right| < +\infty$

c) $\sup_{\substack{\eta,\xi\in E\\ \eta\neq\xi}} \frac{(1-|\xi|^2)(1-|\eta|^2)}{|\xi-\eta|^2} < +\infty$.

<u>démonstration</u> L'équivalence des affirmations b) et c) découle de l' égalité $\left|\frac{1-\bar{\eta}\xi}{\eta-\xi}\right|^2 = 1 + \frac{(1-|\xi|^2)(1-|\eta|^2)}{|\eta-\xi|^2}$

La démonstration de l'équivalence de a) et b) est faite dans (4) (p. 125).

<u>I.4 Lemme</u>.5. Soit $E\subset D$, $\sup_{z\in E} \frac{|1-z|}{1-|z|} < +\infty$, et supposons que E vérifie les conditions de CARLESON. alors

$$M = \sup_{|z|=1} \sum_{\xi\in E} \frac{|1-z^2|(1-|\xi|^2)}{|1-\xi z|^2} < +\infty.$$

<u>Démonstration</u> Cette affirmation est démontrée dans (5) (p.37).

<u>I.5</u>. Soit $K\subset D$ et $\sum_{\zeta\in K}(1-|\zeta|) < \infty$. Nous désignerons par les symboles B_ζ et Φ_ζ ($\zeta\in K$) les fonctions définies par les égalités:

$$B_\zeta(z) = \prod_{\substack{\eta\in K\\ \eta\neq\zeta}} \frac{|\eta|}{\eta}\frac{\eta-z}{1-\bar{\eta}z},\quad z\in D,\quad \zeta\in K,$$

$$\Phi_\zeta(z) = \frac{(1-z^2)(1-|\zeta|^2)}{(1-\bar{\zeta}z)^2} B_\zeta(z)\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{(1-\zeta^2)B_\zeta(\zeta)},\quad z\in D,\ \zeta\in K.$$

Remarquons que $\Phi_\zeta(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \eta = \zeta,\ \zeta\in K \\ 0, & \text{si } \eta\in K\setminus\{\zeta\} \end{cases}$

<u>I.6. Lemme</u>. Soit $E\subset D$, $\sup_{z\in E} \frac{|1-z|}{1-|z|} < +\infty$ et supposons que E satisfasse aux conditions de CARLESON. Alors

a) si $(h_\xi)_{\xi\in E}$ est une famille de fonctions analytiques et bornées dans le disque D et telles que $\sup_{\xi\in E} \|h_\xi\|_{H^\infty} < +\infty$ alors la fonction:

$$g(z) = \sum h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|^2)(1-z^2)}{(1-\bar{\xi}z)^2},\quad z\in D, \qquad (I)$$

est analytique dans le disque D et: $\|g\|_{H^\infty} \le M\cdot\sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}$,

---

* Le sens géométrique de cette condition est que l'ensemble E est situé dans un angle de mesure inférieure à Π, de sommet le point z= 1 et de bissectrice $(-\infty,1]$

où M est la constante du lemme I.4.

b) si, de plus $\lim\limits_{\zeta\to 1,\ \zeta\in E}\|h_\zeta\|_{H^\infty} = 0$ et si les vonctions sont continues dans $\overline{D}\setminus(1)$ ($\zeta\in E$), alors la fonction g , donnée par l'égalité (I) est analytique et uniformément continue sur D.

démonstration; cette affirmation découle du lemme I.4.

I.7. Lemme. a) si $f\in H^\infty$ et $\hat{f}(n) = O(1/n)$, $n\to\infty$, alors $\sup\limits_n \|S_n\|_{H^\infty}<+\infty$, où $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}\hat{f}(k)z^k$ ($n= 0,1,2,\dots$);

b) si $f\in C_A$ et si $\hat{f}(n)= O(1/n)$, $n\to\infty$, alors la série de TAYLOR de la fonction f: $f(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)z^n$, converge uniformément sur le disque $\overline{D}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que: $S_n(z)=\sigma_n(z)+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}\hat{f}(k)z^k$,

où $\sigma_n(z)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k(z)$ puis d'employer les hypothèses du lemme à démontrer et les propriétés des moyennes de CESARO des fonctions f:

$$\|\sigma_n\|_{H^\infty}\leqslant\|f\|_{H^\infty} \quad \text{si} \quad f\in H^\infty$$
$$\|f-\sigma_n\|_{H^\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \text{si} \quad f\in C_A$$

I.8. Lemme (M.RIESZ,(6)). Soit

$$G=\{z\in\hat{\mathbb{C}}:|z|<\ \}\cap\{z\in\hat{\mathbb{C}}:\theta_0<\arg(z-1)<2\pi-\theta_0\},$$

où $\gamma_0>1$, $\theta_0\ (0,\ \pi/2)$; On a les propriétés suivantes:

a) Si f est une fonction analytique et bornée dans le domaine G, alors $\hat{f}(n)= O(1/n)$, $n\to\infty$.

I.9. Lemme.7: Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'espaces de BANACH vérifiant les conditions:

a) $X_{n+1}\subset X_n$ ($n= 0,1,2,\dots$) et les plongements sont continus

b) X_{n+1} est dense dans X_n ($n= 0,1,2,\dots$)

Soit J un opérateur linéaire borné, envoyant X_0 dans l'espace de BANACH Y. Si $JX_n= Y$ ($n= 0,1,2,\dots$) alors $j(\bigcap\limits_{n\geqslant 0}X_n)= Y$

I.10. Lemme. Soit $\varepsilon\ (0,1]$. Désignons par les symboles α, w, β, ω les fonctions qui vérifient les égalités:

$$\alpha(z)=\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)-z},\ z\in\hat{\mathbb{C}};\quad w(z)=1-\sqrt{1-z},\ z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus[1,\infty];$$

$$\beta(z)=\frac{z}{2-z},\ z\in\hat{\mathbb{C}};\quad \omega(z)=\beta(w(\alpha(z))),\ z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus[1,1+\varepsilon].$$

alors

1° $\omega(\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\})\subset\mathbb{D}$, $\sup\limits_{\substack{z\in\omega(\overline{\mathbb{D}})\\ z\neq 1}}\frac{|1-z|}{1-|z|}<+\infty$.

2° Les affirmations suivantes sont équivalentes:

a) l'ensemble ω (E) ($E \subset \overline{D} \setminus \{1\}$) satisfait aux conditions de CARLESON

b) $\sup\limits_{\substack{\xi,\eta \in E \\ \xi \neq \eta}} \frac{|1-\xi||1-\eta|}{|\xi-\eta|^2} < +\infty .$ (2)

Démonstration.ce lemme est contenu dans le § 3.

I.11. Remarque. Soit $\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ une suite de points de $\overline{D}\setminus\{1\}$ telle que:

$$q = \sup_{k\geq 0} \frac{|1-\xi_{k+1}|}{|1-\xi_k|} < 1. \qquad (3)$$

Alors elle vérifie la condition (2).

En fait, soit $k < m$; alors $\frac{|1-\xi_k||1-\xi_m|}{|\xi_k-\xi_m|^2} \leq \frac{|1-\xi_k|^2}{|(1-\xi_k)-(1-\xi_m)|^2} \leq \frac{1}{(1-|\frac{1-\xi_m}{1-\xi_k}|)^2} \leq \frac{1}{(1-q)^2}$.

remarquons aussi que si l'ensemble . [1] vérifie les conditions (2) on peut le diviser en un nombre fini d'ensembles tels que chacun d'entre eux vérifie la condition (3), cf (5).

§2 Résultats fondamentaux.

2.1. Théorème. Soit un ensemble E, $E \subset \overline{D} \setminus \{1\}$ qui vérifie la condition (2), et P un opérateur linéaire, donné par l'égalité

$$(Px)(z) = \sum_{\xi\in E} x(\xi)\,\Phi_{\omega(\xi)}(\omega(z)), \quad z \in \hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon], \quad x \in l^\infty(E),$$

où ω désigne la même chose que dans le lemme I.10 tandis que est une famille de fonctions définies à l'aide de l'ensemble $K=\omega(E)$ (cf I.5)

Alors pour toute fonction x, $x \in l^\infty(E)$ la fonction Px est analytique et bornée dans $\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon]$,

$$(\hat{P}x)(n) = O(\tfrac{1}{n}), \quad n \to \infty$$

et

$$(Px)(\xi) = x(\xi), \quad \xi \in E. \qquad (4)$$

Démonstration. Soit $K= \omega$ (E), $x \in l^\infty(E)$ et

$$h_\tau(z) = x(\omega^{-1}(\tau))\frac{(1-|\tau|^2)}{(1-\tau^2)B_\tau(\tau)}B_\tau(z), \quad z\in\mathbb{D}, \quad \tau\in K,$$

où ω^{-1} est la fonction inverse de ω . Comme l'ensemble . est contenu dans le disque D, il satisfait aux conditions de CARLESON et $\sup\limits_{z\in K}\frac{|1-z|}{1-|z|} < +\infty$ (cf I.10), ainsi

$$\|h_\tau\|_{H^\infty} \leq \frac{|x(\omega^{-1}(\tau))|}{|B_\tau(\tau)|} \leq \frac{1}{\delta}\sup_{\xi\in E}|x(\xi)| < +\infty, \quad \tau\in K,$$

[1] blanc dans le manuscrit

où δ est la constante des conditions de CARLESON (1.2).

En ne se servant que de ce qui a été dit et en adaptant le lemme I.6 on obtient que la fonction g:

$$g(z)=\sum_{\xi\in E} x(\xi)\,\Phi_{\omega(\xi)}(z)=\sum_{\zeta\in K} h_{\zeta}(z)\,\frac{(1-z^2)(1-|\zeta|^2)}{(1-\bar{\zeta}z)^2},\ z\in D,$$

est analytique et bornée dans le disque D. Comme ω est une fonction analytique et uniforme, qui envoie le domaine $\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon]$ sur le disque unité D, et comme $Px=g_0$, la fonction Px est analytique et bornée dans le domaine $\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon]$. Il ne reste qu'à remarquer que la fonction Px vérifie les conditions du lemme I.8 (point (a)). L'égalité (4) est visiblement satisfaite.

<u>2.2 Théorème</u>. Soit un ensemble E, $E\subset\bar{D}\setminus\{1\}$ qui vérifie les conditions (2) et l'opérateur linéaire donné par l'égalité

$$(Rx)(z)=x(1)+\sum(x(\xi)-x(1))\Phi_{\omega(\xi)}(\omega(z)),\ z\in\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon],\ x\in C(E),$$

où ω et $\{\Phi_\zeta\}_{\zeta\in\omega(E)}$ ont le même sens que dans le théorème 2.1.

Si $x\in C(E)$, la fonction Rx est analytique dans $\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon]$ et uniformément continue dans les demi-espaces $C_+=\{z\in\hat{C}: \mathrm{Im}\,z>0\}$ et $C_-=\{z\in\hat{C}: \mathrm{Im}\,z<0\}$ de plus

$$(\hat{R}x)(n)=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty, \tag{5}$$

et $(Rx)(\xi)=x(\xi),\ \xi\in E.$

<u>Démonstration</u>. Si $x\in C(E)$, la fonction

$$g(z)=x(1)+\sum_{\xi\in E}(x(\xi)-x(1))\,\Phi_{\omega(\xi)}(z),\quad z\in D,$$

est analytique et uniformément continue dans D (cf I.6; I.10 et le début de la démonstration du théorème précédent). Il ne reste qu'à remarquer que $Rx=g_0\omega$ et que ω est une fonction analytique uniforme qui envoie le domaine $\hat{C}\setminus[1,1+\varepsilon]$ sur le cercle unité D, et dont de plus les restrictions aux demi-espaces C_+ et C_- ont des prolongements continus respectivement à $\hat{C}_+$ et $\hat{C}_-$. La relation $(\hat{R}x)(n)=O(1/n)$, $n\to\infty$, est une conséquense du lemme I.8. L'égalité (5) est évidement satisfaite.

<u>2.3. Théorème</u>. Soit E un ensemble, E, $E\subset\bar{D}\setminus\{1\}$, QUI vérifie les conditions (2)

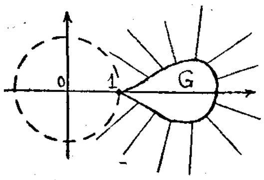

fig 1

Alors pour toute fonction x, $x\in C(E)$, et pour tout domaine connexe G qui vérifie les conditions (cf. fig.1)

$$D\subset\hat{C}\setminus\bar{G},\quad \bar{D}\cap\bar{G}=\{1\},\quad (0,\gamma)\subset G \tag{6}$$

pour tout $\gamma>0$; il existe une fonction f définie dans C, telle que

1)f est analytiqur dans $C \setminus \{1\}$

2) la restiction de la fonction f à l'ensemble $\hat{C} \setminus G$ est continue sur cet ensemble,

3) $f(\xi)=x(\xi)$, $\xi \in E$

Démonstration. Soit $G_n = (\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{G}) \cup \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1 + \frac{\gamma}{n+1}\}$

où G est le domaine qui vérifie les conditions (6). Alors la suite d'espaces $(C_A(G_n))$ est telle que:

a) $C_A(G_{n+1})$ est plongé de façon continue dans $C_A G_n$) (n= 0,1,2,...)

b) $C_A(G_{n+1})$ est dense dans $C_A(G_n)$ (n= 0,1,2,...)

c) où est l'opérateur qui associe à chaque fonction f de $C_A(G_o)$ sa restriction à l'ensemble $\bar{E}$. Les affirmations a) et b) sont évidentes, l'affirmation c) découle du théorème 2.2. A l'aide du lemme I.9 on conclut que $S(\bigcap_{n>0} C_A(G_n)) = C(E)$.

2.4 Remarque (I) Il est clair que dans le théorème 2.3 le domaine G peut être choisi tel que toutes les fonction f, $f \in C(\hat{C} \setminus \bar{G})$, vérifient les conditions: $\hat{f}(n)=O(1/n)$ et que la série de TAYLOR de la fonction f converge uniformément dans le disque $\bar{D}$. (cf I.7 et I.8).

(II) Les théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 sont les meilleurs possibles: soit $\lim_n \lambda_n = 0$, $\lambda_n > 0$ X_λ l'espace de toutes les fonctions f telles que

$$f \in C_A \quad \hat{f}(n) = O\left(\frac{\lambda_n}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Dans ces conditions il est facile de montrer que S(X)= C(E), Card E= ∞

Nous énonçons les résultats qui suivent sans démonstration.

2.5. Théorème. Soit E un ensemble quelconque, inclu dans le cercle unité et ayant un nombre fini de points d'accumulation. Alors il existe un opérateur linéaire et continu envoyant C(E) dans C_A, et vérifiant les conditions:

$$(\widehat{Rx})(n) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$
$$(Rx)(\xi) = x(\xi), \ \xi \in E, \ x \in C(E)$$

& 2.6. Théorème. Soit E un sous ensemble fermé du cercle unité, E_o l'ensemble de tous les points isolés de l'ensemble E, $E_1 = E \setminus E_o$. Alors pour toute fonction x, $x \in \ell^\infty(E)$ il existe une fonction f, $f \in H^\infty$, telle que

a) f est analytiquement prolongeable suivant tous les chemins d'un voisinage de l'ensemble ;

b) $f(\xi) = x(\xi)$, $\xi \in E_o$,

c) $\hat{f}(n) = O(1/n)$, $n \to \infty$.

§ 3. Démonstration du lemme 1.10.

La propriété dont nous avons besoin découle de I.3. et des trois lemmes suivants.

3.1 Lemme. soit $w(z)= 1-\sqrt{1-z}$, $z \in \bar{D}$. Alors $w(\bar{D} \setminus (1)) \subset D$ et $|1-z| \leq 4(1-|z|)$, $z \in w(\bar{D})$

Démonstration. Soit $z \in \bar{D}$; alors $(1-z) = |1-z| e^{i\alpha}$ où $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ et $|1-z|^2 - 2|1-z| \cos\alpha + 1 = |z|^2 \leq 1$,

c'est à dire $|1-z| \leq 2\cos\alpha$, $z \in \bar{D}$. (7)

De plus, en utilisant (7) on obtient

$$1-|w(z)|^2 = (1-|1-\sqrt{1-z}|^2) = 1-(1-2|1-z|^{1/2}\cos\tfrac{\alpha}{2} + |1-z|) =$$

$$= |1-z|^{1/2}(2\cos\tfrac{\alpha}{2} - |1-z|^{1/2}) \geq |1-z|^{1/2}(2\cos\tfrac{\alpha}{2} - \sqrt{2\cos\alpha}) =$$

$$= \frac{|1-z|^{1/2}(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha)}{2\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}} \geq 2|1-z|^{1/2}\frac{1}{2+\sqrt{2}} \geq \frac{|1-w(z)|}{2} \geq 0, \quad z \in \bar{D}$$

Par conséquend $|w(z)|<1$ si $z \in \bar{D} \setminus \{1\}$ et $|1-w(z)| \leq 4(1-|w(z)|)$, $z \in \bar{D}$.

3.2 Lemme Soit w la fonction du lemme 3.1. Alors

$$\frac{1}{16}\frac{|1-\xi||1-\eta|}{|\xi-\eta|^2} \leq \frac{(1-|w(\xi)|^2)(1-|w(\eta)|^2)}{|w(\xi)-w(\eta)|^2} \leq 64\left(1+\frac{\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}}{|\xi-\eta|}\right)^2, \quad (8)$$

$\eta, \xi \in \bar{D} \setminus \{1\}$, $\xi \neq \eta$.

démonstration. Soit $\xi, \eta \in D$, on peut trouver alors $t, s \in (-\pi/2, \pi/2)$ tels que $1-\xi = |1-\xi| e^{it}$, $1-\eta = |1-\eta| e^{is}$. comme $w(z)= 1-\sqrt{1-z}$ on a $(1-w(\xi)) = |1-\xi|^{1/2} e^{i\frac{t}{2}}$, $(1-w(\eta)) = |1-\eta|^{1/2} e^{i\frac{s}{2}}$.

de plus nous avons

$$|w(\xi)-w(\eta)|^2 = \left|\sqrt{1-\xi} - \sqrt{1-\eta}\right|^2 = \frac{|\xi-\eta|^2}{|\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\xi}|^2} = \frac{|\xi-\eta|^2}{|1-\xi|+|1-\eta|+2\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}\cos\frac{s-t}{2}}.$$

en utilisant le fait que $|\frac{s-t}{2}| < \pi/2$ on obtient

$$\frac{|\xi-\eta|^2}{2(|1-\xi|+|1-\eta|)} \leq |w(\xi)-w(\eta)|^2 \leq \frac{|\xi-\eta|^2}{|1-\xi|+|1-\eta|} \leq \frac{|\xi-\eta|^2}{2\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}}. \quad (9)$$

supposons pour plus de précision que $|1-\xi| \leq |1-\eta|$. Alors soit $|1-\xi| \leq \frac{1}{2}|1-\eta|$, soit $\frac{1}{2}|1-\eta| \leq |1-\xi| \leq |1-\eta|$ Dans le premier cas on obtient:

$$|w(\xi)-w(\eta)|^2 \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{4|1-\eta|} = \frac{|\xi-\eta|}{4}\left|1-\frac{1-\xi}{1-\eta}\right| \geq \frac{|\xi-\eta|}{8}, \quad (10)$$

et dans le second $|w(\xi)-w(\eta)|^2 \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{4|1-\eta|} \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{4\sqrt{2|1-\xi||1-\eta|}} \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{8\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}}$. (11)

Maintenant majorons et minorons la quantité $(1-|w(\xi)|^2(1-|w(\eta)|^2)$

$$(1-|w(\xi)|^2)(1-|w(\eta)|^2)\leq 4|1-w(\xi)||1-w(\eta)| = 4\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}, \tag{12}$$

(pour la minoration nous employons le lemme 3.1)

$$(1-|w(\xi)|^2)(1-|w(\eta)|^2)\geq(1-|w(\xi)|)(1-|w(\eta)|)\geq\frac{1}{16}|1-w(\xi)||1-w(\eta)| = \frac{1}{16}\sqrt{|1-\xi||1-\eta|}. \tag{13}$$

L'inégalité (8) s'obtient à partir des inégalités (9), (10), (11), (12), (13)

<u>3.3. Lemme</u>.Soient α et β les fonctions définies dans le lemme I.1o. Si z, a, b, $\in$ D, on a

$$|\alpha(z)|\leq 1, \quad |\beta(z)|\leq|z|, \quad \frac{1}{3}|1-z|\leq|1-\alpha(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}|1-z|, \quad |1-\beta(z)|\leq|1-z|,$$

$$(1-|z|^2)\leq 1-|\beta(z)|^2\leq 4|1-z|, \quad \frac{\varepsilon}{9}|a-b|\leq|\alpha(a)-\alpha(b)|\leq\frac{1}{\varepsilon}|a-b|,$$

$$\frac{2}{9}|a-b|\leq|\beta(a)-\beta(b)|\leq 2|a-b|.$$

<u>Démonstration</u>: é.___nt.

Que N. K. NIKOLSKII recoive ici tous mes remerciments pour l'aide qu'il m'a apporté à mettre en forme l'article (7).

BIBLIOGRAPHIE

1] HOFFMAN K. Espace de BANACH de fonction analytiques, M. IL. 1963.

2] VINOGRADOV S.A.Sur l'interpolation et les zéros de séries entières avec une suite de coefficients D.A.N. SSSR, 1965, 160, N° 2.

3] VINOGRADOV S.A. Les singularités de PELL et les théorèmes d'interpolation de RUDIN-CARLESON pour quelques classes de fonctios analytiques. D.A.N. SSSR, 1968, 178, N°3 P 511-514.

4] NIKOLSKII N.K., PAVLOV B.S. Base de vecteurs propres de contraction complètement non unitaire et fonction caractéristique. Izv. akad. nauk., ser. matem., 1970? 34, N°1, p 90-133

5] VINOGRADOV S.A., Sur l'interpolation de séries entières absolument convergentes sur le bord du disque de convergence. Vesnik L.G.U. ser. matem.1965,2, N°7, p 30-44.

6] LANDAU E. Darstellung und Begrundung einiger zeuer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1916.

7] VINOGRADOV S.A., Zap. nautch. séminarov L.O.M.I., 1970, 19, p 6-54.