PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

87-02

ANALYSE HARMONIQUE

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES
ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) : 42A36 - 42A61 - 46B20 - 46B25 - 54A25 -

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

87-02

ANALYSE HARMONIQUE

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Analyse harmonique
Groupe de travail sur les espaces de Banach invariants par translation

Myriam Déchamps, Françoise Piquard, Hervé Queffelec

Résumé

Ce tome contient trois exposés, qui sont des rédactions très détaillées de résultats parus ailleurs. Ces résultats se situent à la frontière de l'analyse harmonique et de la géométrie des espaces de Banach, et les rédactions visent à bien éclairer ces deux aspects.

1. Dichotomie du cotype pour les espaces invariants $C_\Lambda(T)$, par P. Prignot, d'après J. Bourgain et V. Milman : soit T le cercle unité, Λ une suite d'entiers et $C_\Lambda(T)$ l'adhérence, pour la norme uniforme, des polynômes trigonométriques à spectre dans Λ ; si $C_\Lambda(T)$ est de cotype q pour un q fini alors Λ est un ensemble de Sidon.

2. Analyticité des algèbres de restriction et solution du problème de la dichotomie dans le cadre des algèbres tensorielles, par L. Rodriguez-Piazza, d'après J. Bourgain : soient E et F deux espaces discrets, $E \subset X \times Y$ et $V_o(E)$ l'algèbre des restrictions à E des éléments de $V_o(X,Y) = c_o(X) \hat{\otimes} c_o(Y)$; alors ou bien $V_o(E) = c_o(E)$, ou bien seules les fonctions analytiques opèrent sur $V_o(E)$.

3. Compacts associés à des sous-espaces de $C(K)$, par A. Gilioli et G. da Roche Filho : soit K un espace compact de Hausdorff, p un point d'accumulation de K et X un sous-espace fermé de $C(K)$; si X ne contient pas c_o alors il existe un voisinage ouvert V de p tel que les normes uniformes sur K et sur $K \setminus V$ soient équivalentes dans X ; l'hypothèse $c_o \not\subset X$ est loin d'être nécessaire.

Abstract

This volume contains three detailed and self contained versions of already published results. These results are related both to harmonic analysis and geometry of Banach spaces and emphasis is put on both aspects in these expository papers.

1. The dichotomy of cotype for translation invariant subspaces of $C(\mathbb{T})$ by P. Prignot, after J. Bourgain and V. Milman : let $\mathbb{T}$ be the unit circle, Λ a sequence of integers and $C_\Lambda(\mathbb{T})$ the uniform closure of the trigonometric polynomials with spectrum in Λ ; if $C_\Lambda(\mathbb{T})$ has cotype q then $(2 \leqslant q < \infty)$ Λ is a Sidon set.

2. Analyticity of restriction algebras and solution of the dichotomy problem for tensor algebras by L. Rodriguez-Piazza, after J. Bourgain. Let X,Y be discrete spaces, $E \subset X \times Y$ and $V_o(E)$ be the restriction algebra of $V_o(X,Y) = c_o(X) \hat{\otimes} c_o(Y)$. Then either $V_o(E) = c_o(E)$ or only analytic functions operate on $V_o(E)$.

3. On compact sets associated to subspaces of $C(K)$ by A. Gilioli and G. da Roche Filho. Let K be a Hausdorff compact set, p an accumulation point of K, X a closed subspace of $C(K)$. Assuming c_o is not isomorphic to a closed subspace of $C(K)$ there exists an open neighborhood V of p such that uniform norms on K and $K \setminus V$ are equivalent for X. The assumption $c_o \not\subset X$ is far from being necessary.

Table des matières

Exposé n° 1
Patrick Prignot

Année 1985-1986

DICHOTOMIE DU COTYPE POUR LES ESPACES INVARIANTS $C_\Lambda(T)$

Résumé.- Soit T le cercle unité, Λ une suite d'entiers et $C_\Lambda(T)$ l'adhérence, pour la norme uniforme, des polynômes trigonométriques à spectre dans Λ. On donne une version détaillée du résultat suivant de J. Bourgain et V. Milman : si $C_\Lambda(T)$ est de cotype q pour un q fini alors Λ est un ensemble de Sidon.

I. INTRODUCTION

Ce travail a pour but la rédaction détaillée de l'article suivant : J. Bourgain et V. Milman Dichotomie du cotype pour les espaces invariants, C. R. Acad. Sc. Paris 300 (1985), 263-266. Le cadre général est le suivant : soit T le tore, groupe abélien compact, $G = \mathbb{Z}$ son dual et une partie $\Lambda \subset \Gamma$. On notera $C_\Lambda(T)$ l'adhérence pour la norme uniforme des polynômes trigonométriques à spectre dans Λ. Peut-on relier des propriétés dites "géométriques" de cet espace de Banach à d'autres propriétés fonctionnelles de cet espace ? L'article examiné apparaît comme l'aboutissement d'une série de questions posées depuis une dizaine d'années et dont nous allons faire un bref historique.

La définition même des ensembles de Sidon (voir Rappels) montre que si Λ est un tel ensemble, alors la transformation de Fourier est un isomorphisme entre $C_\Lambda(T)$ et $\ell^1(\Lambda)$. G. Pisier pose alors naturellement la question suivante : s'il existe un isomorphisme quelconque (i.e. il peut être très différent de l'isomorphisme naturel) entre $C_\Lambda(T)$ et $\ell^1(\Lambda)$ pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, Λ est-il de Sidon ? En 1976, N. Th. Varopoulos répond par l'affirmative avec une preuve qui sera simplifiée par la suite et généralisée par G. Pisier en 1978 sous la forme :

Si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, Λ est de Sidon si et seulement si $C_\Lambda(T)$ est de cotype 2. (Car ℓ^1 est de cotype 2).

La question qui vient donc ensuite est la suivante : si $C_\Lambda(T)$ est de cotype q pour $q > 2$, Λ est-il de Sidon ?

Avant de répondre à cette question, on va penser à un affaiblissement de la notion de cotype 2 : on dira qu'un espace de Banach B a la propriété d'Orlicz si pour toute famille (x_n) de vecteurs de B telle que $\sum_{n\geq 1} \epsilon_n x_n$ converge pour tout choix de signes $\epsilon_n = \pm 1$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2 < +\infty.$$

On voit que si B est de cotype 2, alors il a la propriété d'Orlicz. Par contre la réciproque de cette propriété est toujours non connue, la seule chose qui s'obtienne facilement étant que B a la propriété d'Orlicz entraîne que B est de cotype $2+\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$.

Néanmoins si on prend $B = C_\Lambda(T)$, alors Bourgain en 1983 a montré que la réciproque était vraie, i.e. si $C_\Lambda(T)$ a la propriété d'Orlicz alors Λ est Sidon.

Enfin en 1985, Bourgain et Milman répondent par l'affirmative à la question restée en suspens et montrent que si on impose à $C_\Lambda(T)$ d'être de cotype q pour un q fini, alors $C_\Lambda(T)$ est isomorphe à ℓ^1, c'est-à-dire que Λ est un ensemble de Sidon. En d'autres termes, la propriété de dichotomie suivante est vraie : soit Λ est un ensemble de Sidon, soit $C_\Lambda(T)$ ne possède pas de cotype fini, ce qui signifie que $C_\Lambda(T)$ contient des ℓ^∞_n uniformément, c'est-à-dire :

Il existe $C > 0$ telle que pour tout entier n, il existe

$f_1, \ldots, f_n \in C_\Lambda(T)$ t. q. : $\sup_{1\leq i\leq n} |a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\|_\infty \leq C \sup_{1\leq i\leq n} |a_i|$ pour toute famille $(a_i)_{i\leqslant n}$ de scalaires.

Le but de ce travail est de donner la preuve la plus autonome possible du résultat de Bourgain-Milman. On admettra uniquement les résultats de J. Bourgain sur la caractérisation des ensembles de Sidon qui se présentent comme une démonstration directe de résultats obtenus auparavant par G. Pisier à l'aide de la théorie des séries de Fourier aléatoires et de l'inégalité de Dudley-Fernique. On admettra également le lemme de Slépian tel qu'il est énoncé et démontré dans le livre de J.-P. Kahane. Toutes les autres notions et propositions dont nous aurons besoin seront en principe redémontrées dans le texte.

Pour terminer, il est juste de remarquer que la plupart des résultats sur les Sidon qu'on utilisera ont été obtenus par G. Pisier ; et il en est de même de la plupart des outils (K-convexité, $K(E) \leqslant K.\log(1+d_E)$), l'utilisation intermédiaire de la métrique $d_A(s,t) = \sup_{\gamma\in A} |\gamma(s)-\gamma(t)|$ qui ont été forgés par G. Pisier.

Remarquons enfin que les propriétés démontrées ici dans le cas du Tore T se généralisent de manière évidente à un groupe abélien compact G, en prenant pour Γ le dual de G.

Je profite également de cette introduction pour remercier les personnes qui, tout au long de l'année, m'ont aidé à la rédaction de cet exposé, et particulièrement Mesdames Déchamps, Piquard et Monsieur Queffelec ; qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour m'avoir guidé et pour avoir corrigé au travers d'exposés les imperfections de ce travail.

II. Rappels et notations.

Notations d'analyse harmonique

On rappelle que si $f \in C(T)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{f}(n)$, le n^e coefficient de Fourier de f qui est : $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} dt$. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est l'application :

$$\begin{array}{lcl} C(T) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longrightarrow & (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

On dit alors que $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble de Sidon (on abrègera en disant que Λ est Sidon) s'il existe $C > 0$ telle que pour toute suite finie de scalaires $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ on a :

$$(*) \qquad \sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma| \leqslant C.\|\sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma.\gamma\|_\infty.$$

On notera $S(\Lambda)$ (constante de Sidonicité de Λ) la plus petite constante C qui vérifie (*).

On dira qu'un ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ est quasi-indépendant si la relation $\sum_{\gamma\in\Lambda} \epsilon_\gamma.\gamma = 0$ où pour $\gamma \in A$, $\epsilon_\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ et les $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in A}$ sont presque tous nuls, entraine que pour tout $\gamma \in A$, $\epsilon_\gamma = 0$.

On rappelle qu'un tel ensemble est de Sidon.

Notations de caractère arithmétique.

On notera $|A|$ le cardinal de A pour tout ensemble fini A.

Dans toute la suite, pour faciliter les notations et étant donné que $\Gamma = \mathbb{Z}$, on écrira indifféremment tout caractère sur T, $e^{i\gamma}$ sous la forme $\gamma(.)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ représentera la partie entière de x.

Notations de la géométrie des Banach.

Si E est un espace normé, on notera B_E la boule unité de E et $B(x,\alpha)$ la boule fermée de centre x et de rayon a.

Si maintenant, E et F sont deux espaces de Banach de même dimension (finie), on appelle $d(E,F) = \inf\{\|T\|.\|T^{-1}\|,\ T$ isomorphisme de E sur $F\}$ (distance de Banach-Mazur), $\|T\|$ représentant la normé opérateur. On abrègera $d_E = d(E,\ell^2_{\dim E})$.

On appelle également <u>diamètre arithmétique</u> $n(E)$ de E le nombre : $n(E)$ = le plus petit entier n t. q. il existe un sous-espace V de ℓ^∞_n tel que $d(E,V) \leqslant 2$. Pour $E = C_\Lambda(T)$, on notera $n(\Lambda) = n(E)$.

<u>Notations pour l'entropie</u>.

Si (E,d) est un espace métrique, on notera pour $S \in E$: $N(S,d,\epsilon)$= le plus petit nombre de boules fermées de rayon ϵ pour la distance d nécessaires pour recouvrir S.

Si maintenant E et F sont normés, on appellera <u>nombre d'entropie</u> $e_n(u)$ pour $u : E \longrightarrow F$ opérateur compact : $e_n(u) = \inf\{\epsilon>0/N(u(B_E),\ \|.\|_F,\ \epsilon) \leqslant 2^n\}$. Ce nombre mesure donc le degré de compacité de l'opérateur u.

On définit aussi trois pseudo-métriques sur T et leurs nombres d'entropie correspondants : $(\Lambda \subset \Gamma)$.

$$d_\Lambda(s,t) = \sup_{\gamma\in\Lambda} |\gamma(s) - \gamma(t)| \qquad \text{et} \qquad N(\Lambda,\epsilon) = N(T,d_\Lambda,\epsilon)$$

$$\bar{d}_\Lambda(s,t) = \sup_{\substack{f\in C_\Lambda(T)\\ \|f\|_\infty\leqslant 1}} |f(s)-f(t)| \qquad \text{et} \qquad \bar{N}(\Lambda,\epsilon) = N(T,\bar{d}_\Lambda,\epsilon)$$

$$d_{2,\Lambda}(s,t) = \Big(\sum_{\gamma\in\Lambda} |\gamma(s)-\gamma(t)|^2\Big)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad N_2(\Lambda,\epsilon) = N(T,d_{2,\Lambda},\epsilon)$$

(pour Λ fini).

<u>Notations probabilistes</u>.

Pour $A \subset \Gamma$, on notera $(\epsilon_\gamma)_{\gamma \in A}$ la suite usuelle des variables de Rademacher sur $\{-1,1\}^A$ et $(g_\gamma)_{g \in A}$ une suite de variables gaussiennes $N(0,1)$ indépendantes.

On rappelle que si on prend $A = \mathbb{N}^*$, on dit qu'un espace normé E est de cotype q pour $2 \leqslant q < +\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ t. q. pour toute famille finie $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs de E, on a :

$$(**) \qquad (\sum_{i \in I} \|x_i\|^q)^{1/q} \leqslant C(\int_\Omega \| \sum_{i \in I} \epsilon_i(\omega) x_i \|^2 d\omega)^{1/2}.$$

On notera $C_q(E)$ la plus petite constante C vérifiant (**).

De même, on dit que E est de type p, pour $1 \leqslant p \leqslant 2$, s'il existe une constante $C > 0$ t. q. pour toute famille finie $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs de E, on a :

$$(***) \qquad (\int_\Omega \| \sum_{i \in I} \epsilon_i(\omega) x_i \|^2 d\omega)^{1/2} \leqslant C(\sum_{i \in I} \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

On notera $T_p(E)$ la plus petite constante C vérifiant (***).

Enfin, si E est un espace normé de dimension n, on notera $K(E)$ la constante de K-convexité de E, c'est-à-dire :
$K(E)$ = la plus petite constante $C > 0$ t. q. pour tout entier m :

$$(\int_\Omega \| \sum_{i \in I}^{m} \epsilon_i(\omega) x_i \|^2 d\omega)^{1/2} \leqslant C(\int_\Omega \| \sum_{A \subset \{1,\dots,m\}} w_A(\omega) x_A \|^2 d\omega)^{1/2} \quad \text{où}$$

$w_A(\omega) = \prod_{i \in A} \epsilon_i(\omega)$ (fonctions de Walsh) et pour tout A, $x_A \in E$.

III. Etapes de la démonstration.

Nous allons pour commencer donner une articulation de la preuve en admettant les principaux résultats qui seront démontrés dans la suite du mémoire. Le théorème à montrer est le suivant.

THEOREME (voir [3]).
Soit $2 \leqslant q > +\infty$, alors si $C_\Lambda(T)$ est de cotype q, Λ est Sidon.

<u>Remarque</u>. Si Λ est Sidon, $C_\Lambda(T)$ est isomorphe à ℓ^1 par $\mathcal{F}$ et donc $C_\Lambda(T)$ est trivialement de cotype 2.

<u>Articulation</u>. Supposons donc $C_\Lambda(T)$ de cotype q. La preuve utilise les résultats suivants.

LEMME A
Pour toute partie $\Lambda \subset \Gamma$, $n(\Lambda) \leqslant \bar{N}(\Lambda,\frac{1}{2})$.

THEOREME B
Il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout entier n non nul, l'espace ℓ^1_n contienne des sous-espaces 2-hilbertiens (i.e. leur distance à ℓ^2 est inférieure à 2) de dimension $[\frac{n}{d}]$.

THEOREME C
Soit E un espace de Banach de dimension n, soit $2 \leqslant q < +\infty$ et on suppose $n(E) \geq 2$. Alors :

$$\log_2(n(E)) \geq \beta. \sup_{F \text{ sous-espace de } E} \frac{\dim F}{(\log(1+d_F))^q}.$$

β étant une constante > 0 qui ne dépend que de q et $C_q(E)$.

THEOREME D
Soit $\Lambda \subset \Gamma$, supposons qu'il existe $\delta > 0$ t. q. $\bar{N}(A,\frac{1}{2}) \geq 2^{\delta.|A|}$

pour toute partie finie $A \subset \Lambda$, alors Λ est Sidon et $S(\Lambda) \leqslant \varphi(\frac{1}{\delta})$ où φ est un polynôme universel $(\varphi(x) = C.x^{119})$.

Nous pouvons alors donner la preuve : prenons A finie $\subset \Lambda$. On va essayer d'obtenir une inégalité a priori sur $S(A)$. (A est Sidon car il est fini). Plus précisément on va montrer que $S(A) \leqslant f(q\ ,\ C_q(C_A(T)))$ où f est une fonction croissante par rapport à la deuxième variable. En conséquence $S(A) \leqslant f(q\ ,\ C_q(C_\Lambda(T)))$. D'où

$$S(\Lambda) = \sup_{\substack{A\subset\Lambda \\ A \text{ finie}}} S(A) \leqslant f(q, C_q(C_\Lambda(T))) < +\infty.$$

Pour cela, le théorème B nous donne qu'il existe un sous-espace V de $\ell^1_{|A|}$, 2-hilbertien de dimension $[\frac{|A|}{d}]$. Soit i l'injection canonique de V dans $\ell^1_{|A|}$. Comme A est Sidon, si $\mathfrak{F}$ est l'isomorphisme canonique de $C_A(T)$ sur $\ell^1_{|A|}$, on a

$$\|\mathfrak{F}\| \leqslant S(A) \quad \text{et} \quad \|\mathfrak{F}^{-1}\| = 1.$$

Notons alors $F = \mathfrak{F}^{-1} \circ i(V)$. F est donc un sous-espace de $C_A(T)$ de dimension $[\frac{|A|}{d}]$ tel que $d_F \leqslant \|\mathfrak{F}\|.d_V \leqslant 2S(A)$.

Le théorème C appliqué à $C_A(T)$ donne donc que

$$\log_2(n(A)) \geq \beta(q, C_q(C_A(T))).\frac{\dim F}{(\log(1+d_F))^q}.$$

Or β dépend de manière décroissante de $C_q(E)$ (voir la preuve) et comme $C_\Lambda(T)$ a été supposé de cotype q, $C_q(C_A(T)) \leqslant C_q(C_\Lambda(T))$, d'où

$$\log_2(n(A)) \geq \beta(q, C_q(C_\Lambda(T))).\frac{|A|}{d}.\frac{1}{(\log(1+2S(A)))^q}.$$

Soit encore $\log_2(n(A)) \geq \beta'.\log(1+2S(A))^{-q}.|A|$ où β' est une constante. Le lemme A permet alors d'écrire :

$$n(A) \leqslant (\bar{N}(A,\frac{1}{2})$$

d'où

$$\log_2 \bar{N}(A,\frac{1}{2}) \geq \beta'.\log(1+2S(A))^{-q}.|A| \overset{\text{def}}{=} \delta|A|.$$

Cette inégalité reste vraie si on ramplace A par B quelconque finie $\subset$ A et comme $S(B) \leqslant S(A)$, on a

$$\log_2 \bar{N}(B,\frac{1}{2}) \geq \beta'.\log(1+2S(B))^{-q}.|B| \geq \delta.|B| \quad \text{pour le même } \delta.$$

Par le théorème D, on en déduit que

$$S(A) \leqslant \varphi(\frac{1}{\delta}) = \varphi\left(\frac{\log(1+2S(A))^q}{\beta'}\right).$$

D'où une inégalité a priori du type $S(A) \leqslant C'.\log(1+2S(A))^{119q}$. Par comparaison des croissances des deux fonctions, $S(A)$ reste donc bornée uniformément et ceci est donc vrai pour toute A finie $\subset \Lambda$. Donc Λ est Sidon et $S(\Lambda) = \sup_{\substack{A\subset\Lambda \\ A \text{ finie}}} S(A)$ donne une estimation pour $S(\Lambda)$.

IV. <u>Démonstration du lemme A</u>

LEMMA A. $\forall \Lambda \subset \Lambda, \quad d(\Lambda) \leqslant \bar{N}(\Lambda,\frac{1}{2})$.

<u>Preuve</u>. Notons $m = \bar{N}(\Lambda,\frac{1}{2})$. Par définition, il existe donc un recouvrement de T par des boules $B_i(x_i,\frac{1}{2})$ pour $i \leqslant m$ et la métrique T_Λ. Soit alors $f \in C_\Lambda(T)$, $\|f\|_\infty = 1$. f atteint sa norme sur le compact T en un point $x \in T$. Donc $\|f\|_\infty = |f(x)|$ et $\exists\, x_i$ tel que

$\bar{d}_\Lambda(x,x_i) \leq \frac{1}{2}$.

Soit $\|f\|_\infty = |f(x)| = |f(x_i) + f(x) - f(x_i)|$

$$\leq \sup_{i\leq m} |f(x_i)| + \bar{d}_\Lambda(x,x_i).$$

Soit $\|f\|_\infty \leq \sup_{i\leq m} |f(x_i)| + \frac{1}{2}$.

Par homogénéité, on en déduit que $\forall f \in C_\Lambda(T)$ $\|f\|_\infty \leq \sup_{i\leq m} |f(x_i)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ soit encore $\|f\|_\infty \leq 2 \sup_{i\leq m} |f(x_i)|$.

Donc si on considère
$$\begin{array}{ccc} C_\Lambda(T) & \xrightarrow{F} & \ell^\infty_m \\ f & \longrightarrow & (f(x_i))_{i\leq m} \end{array}$$

on a $\sup_{i\leq m} |f(x_i)| \leq \|f\|_\infty \leq 2 \sup_{i\leq m} |f(x_i)|$

d'où $\|F\|.\|F^{-1}\| \leq 2$. Soit $d(\Lambda) \leq m$ par définition de $d(\Lambda)$.

V. Démonstration du théorème B

THEOREME B (voir [12]). Il existe une constante $d > 0$ t. q. pour tout entier $n > 0$, l'espace ℓ^1_n contienne des sous-espaces 2-hilbertiens de dimension $[\frac{n}{d}]$.

Remarque. Il s'agit là d'un cas particulier du théorème de Dvoretzky mais la preuve donnée dans le cas de ℓ^1_n est plus simple que celle du cas général.

<u>Preuve</u>. n étant fixé, on va chercher un sous-espace de base $f_1,\dots,f_m$ sur lequel on a une inégalité du type :

$$(5.1)\qquad K_1\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \Big\|_{\ell^1} \leqslant K_2\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2} \quad \text{pour tout } a = (a_i)_{i\leqslant m} \in \mathbb{R}^m.$$

De plus on aura $K_2/K_1 \leqslant 2$ (en fait la méthode montre qu'on peut prendre $K_2/K_1 \leqslant \sqrt{2}(1+\epsilon)$) et on montrera également qu'on peut prendre $m = [\frac{n}{d}]$ où d est une constante universelle.

Pour cela, on définit des variables de Rademacher indépendantes ϵ_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ sur un espace Ω et on introduit une famille de vecteurs "aléatoires" :si $1 \leqslant i \leqslant m$ et $\omega \in \Omega$,

$f_i(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \epsilon_{ij}(\omega).\frac{e_j}{n}$ où $(e_j)_{j\leqslant n}$ désigne la base canonique de ℓ^1_n (le coefficient $\frac{1}{n}$ est là pour que $\|f_i\|_{\ell^1} = 1$).

Ainsi, on définit un espace $E_\omega = \mathrm{Vect}(f_1(\omega),\dots,f_m(\omega))$ et on va montrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ t. q. E_ω vérifie le théorème. $\forall\, a \in \mathbb{R}^m$, on pose

$S_a(\omega) = \Big\| \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1}$. S_a est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et il s'agit de montrer (5.1) pour un ω-convenable.

On peut déjà normaliser les a et donc supposer que $a \in \mathcal{S}$, sphère unité de $\mathbb{R}^m$ pour la norme ℓ^2. Il faut donc borner $S_a(\omega)$ $\forall\, a \in \mathcal{S}$ pour un $\omega \in \Omega$.

L'idée consiste à appliquer l'inégalité d'Azuma qui dit que S_a est voisine de ES_a (en un sens à préciser) et on peut borner ES_a grâce aux inégalités de Khintchine. (ES_a est essentiellement constant quand $a\in\mathcal{S}$).

THEOREME D'AZUMA (voir [15]). Soit $X_1,\dots,X_n$ variables aléatoires indépendantes intégrables à valeurs dans un Banach B, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1,\dots,X_k)$.

On pose $S = \|\sum_{i=1}^{n} X_i\|$, $M_o = ES$ et $M_k = E(S|\mathcal{F}_k) - M_o$.

Hypothèse : $\forall\, k$, $\|X_k\| \leqslant C_k$ constante et on pose $d_k = M_k - M_{k-1}$.

Conclusion : $\forall\, k$, (5.2) $|d_k| \leqslant 2C_k$ et $P(|S-ES| > t) \leqslant 2 \exp\left(-\dfrac{t^2}{8\sum_{i=1}^{n} C_k^2}\right)$.

Preuve. Montrons d'abord que $|d_k| \leqslant 2C_k$.

Soit dP_{X_k} la loi image de X_k sur B. Elle est portée par $B(0,C_k) = B_k$. Calculons $E(S|\mathcal{F}_k) = E(S|X_1,\dots,X_k)$.

Soit f borélienne bornée sur B^k, $E(E(S|X_1,\dots,X_k) * f(X_1,\dots,X_k)) =$

$$= E(\|X_1,\dots,X_n\| \times f(X_1,\dots,X_k))$$

Vue l'indépendance des $(X_i)_{i\leqslant n}$:

$$= \int_{B^n} \|x_1 + \dots + x_n\| \times f(x_1,\dots,x_k)\, dP_{x_1} \dots dP_{x_n}.$$

Donc $E(S|X_1=x_1,\dots,X_k=x_k) = \displaystyle\int_{B_{k+1}\times\dots\times B_n} \|x_1+\dots+x_k+u_{k+1}+\dots+u_n\|.$

$$dP_{X_{k+1}}(u_{k+1})\dots dP_{X_n}(u_n).$$

D'où $|d_k| = |E(S|X_1=x_1,\dots,X_k=x_k) - E(S|X_1=x_1,\dots,X_{k-1}=x_{k-1})|$

$$\leqslant \left|\int_{B_{k+1}\times\dots\times B_n} dP_{k+1}(u_{k+1})\dots dP_{X_n}(u_n).\int_{B_k} \big|\|x_1+..+x_4+..+u_n\| - \|x_1+..+x_{k-1}+..+u_n\|\big|\, dP_{X_k}(u_k)\right|$$

$$\leqslant \int_{B_{k+1}\times\dots\times B_n} dP_{X_{k+1}}(u_{k+1})\dots dP_{X_n}(u_n).\int_{B_k} \|x_k-u_k\|\, dP_{X_k}(u_k) \leqslant 2C_k.$$

Donc $|d_k| \leqslant 2C_k$.

Pour montrer (5.2), commençons par quelques inégalités immédiates : soit $\lambda > 0$, alors $\forall\, x \in [-1,1]$, $e^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda$.

(en effet, $e^{\lambda x}$ est convexe et $x = \dfrac{1+x}{2}.1+\dfrac{1-x}{2}.(-1)$ donne $e^{\lambda x} \leqslant \dfrac{1+x}{2}e^{\lambda} +$

$\frac{1-x}{2}e^{-\lambda})$. D'autre part un développement en série entière donne

$\operatorname{ch}\lambda \leqslant \exp(\frac{\lambda^2}{2})$. Soit alors X une variable aléatoire centrée $(EX = 0)$.

On suppose $|X| \leqslant C$ alors $\exp(\lambda X) = \exp(\lambda C.\frac{X}{C}) \leqslant \frac{X}{C}\operatorname{sh}\lambda C + \operatorname{ch}\lambda C$ et en

prenant l'espérance $E(\exp(\lambda X)) \leqslant \exp(\frac{\lambda^2 C^2}{2})$.

Montrons alors (5.2) : on a $E(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$ donc par ce qui précède :
$E(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \exp(2.\lambda^2.C_k^2)$ si $k \geq 1$.
Soit $E(\exp(\lambda M_n)) = E(E[\exp(\lambda M_n)|\mathcal{F}_{n-1}]) = E(\exp(\lambda M_{n-1}).E(\exp(\lambda d_n)|\mathcal{F}_{k-1}))$

$$\leqslant \exp(2\lambda^2 C_n^2).E(\exp(\lambda M_{n-1}))$$

d'où par récurrence sur n : $E(\exp(\lambda M_n)) \leqslant \exp(2\lambda^2\sum_{i=1}^{n} C_k^2)$.

Donc $P(|M_n|>t) = P(M_n>t) + P(M_n<-t) = P(\exp(\lambda M_n)>\exp(\lambda t)) + P(\exp(-\lambda M_n) > \exp(\lambda t))$.

Or $P(\exp(\lambda M_n) > \exp(\lambda t)).\exp(\lambda t) \leqslant E(\exp(\lambda M_n)) \leqslant \exp(2\Lambda^2.\sum_{k=1}^{n} C_k^2)$.

En appliquant la même inégalité en remplaçant M_k par $-M_k$:

$$P(|M|_n>t) \leqslant 2\exp(-\lambda t + 2\lambda^2\sum_{k=1}^{n} C_k^2).$$

La valeur de λ qui minimise cette expression est $\lambda = \dfrac{t}{4\sum_{k=1}^{n} C_k^2}$ donc

$P(|M_n| > t) \leqslant 2\exp(-\dfrac{t^2}{8\sum_{k=1}^{n} C_k^2})$. Il ne reste qu'à remarquer que M_n=S-ES.

Revenons au théorème et à (5.1), ici on a

$$S_a(\omega) = \|\sum_{k=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_i \frac{\varepsilon_{ij}(\omega)}{n} e_j\|_{\ell^1}.$$

$= X_{ij} : \Omega \longrightarrow \ell^1_n$.

De plus $\|X_{ij}\|_{\ell^1} \leqslant \dfrac{|a_i|}{n} = c_{ij}$ avec $\sum_{k=1} c_{ij}^2 = \dfrac{1}{n}$.

Donc par le théorème d'Azuma et (5.2) $P(|S_a - ES_a| > t) \leqslant 2\exp(-\dfrac{t^2 n}{8})$ et ceci $\forall\, a \in \mathcal{S}$. Tout le problème consiste alors à globaliser ce résultat sur $\mathcal{S}$ puis à choisir t.

Remarquons d'abord qu'on peut borner ES_a grâce aux inégalités de Khintchine qui donnent, pour tout entier $n > 0$, $x_1, \dots, x_n$ réels :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i x_i\|_2 \leqslant \|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i x_i\|_1 \leqslant \|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i x_i\|_2$$

où $\|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i x_i\|_p = (\int_\Omega |\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i(\omega) x_i|^p d\omega)^{1/p}$. On obtient cette inégalité par Hölder et la constante $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est due à Szarek (voir [16] ou [17]).

D'où ici : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{k=1}^{m} a_i^2)^{1/2} \leqslant ES_a \leqslant (\sum_{k=1}^{m} a_i^2)^{1/2}$ soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant ES_a \leqslant 1$. (5.3)

Pour globaliser maintenant, on aimerait avoir un nombre fini d'éléments de $\mathcal{S}$ (pour savoir majorer la probabilité d'une union) et l'idée est ici d'utiliser un δ-réseau R de $\mathcal{S}$ ont on peut borner le cardinal. Rappelons que R est un <u>δ-réseau</u> de $\mathcal{S}$ si pour tout $x \in \mathcal{S}$, il existe $r \in R$ t. q. $\|x - r\|_{\ell^2} \leqslant \delta$. Ici prenons R égal à un ensemble <u>maximal</u> de points de $\mathcal{S}$ deux à deux à des distances $> \delta$. Ceci implique que R est bien un δ-réseau (car il est maximal).

LEMME (5.4). On a alors $|R| \leqslant \exp(\dfrac{2m}{\delta})$.

<u>Preuve</u>. En effet, par définition, les boules $B(r, \dfrac{\delta}{2})$ sont

disjointes pour $r \in R$. Donc $\bigcup_{r \leqslant R} B(r,\frac{\delta}{2}) \subset B(0,1+\frac{\delta}{2})$ et si V_m est le volume de la boule unité, on a

$(\frac{\delta}{2})^m V_m . |R| \leqslant (1+\frac{\delta}{2})^m . V_m$ soit $|R| \leqslant (1+\frac{2}{\delta})^m \leqslant \exp(\frac{2m}{\delta})$.

On déduit de ce lemme que : $P(\sup_{a \in R} |S_a - ES_a| > t) \leqslant \sum_{a \in R} P(|S_a - ES_a| > t)$

$$\leqslant 2\exp(-\frac{t^2 n}{8}).|R|$$

$$\leqslant 2\exp(\frac{2m}{\delta} - \frac{t^2 n}{8}).$$

Ou encore $\quad P(\sup_{a \in R} |S_a - ES_a| \leqslant t) \geq 1 - 2\exp(\frac{2m}{\delta} - \frac{t^2 n}{8})$. $\quad$ (5.5)

Pour revenir à $\mathcal{S}$, on va utiliser un lemme classique :

LEMME (5.6). Il existe $0 < \delta < 1$ (aussi petit qu'on veut) t. q. pour $t = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ et $\omega \in \Omega$,

(pour tout $a \in R$ $-t+ES_a \leqslant S_a(\omega) \leqslant t+ES_a$) $\Longrightarrow$ (pour tout $a \in \mathcal{S}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\epsilon} \leqslant S_a(\omega) \leqslant 1+\epsilon)$$

où ϵ est choisi de telle sorte que $(1+\epsilon)(\sqrt{2}-\epsilon) \leqslant 2$ et $\epsilon < \sqrt{2}$.

<u>Preuve</u>. Soit $a \in \mathcal{S}$, $\exists\, a^1 \in R$ t. q. $\|a^1 - a\|_{\ell^2} \leqslant \delta$ (R est un δ-réseau). Donc $a = a^1 + \lambda_2 a^2$ où $|\lambda_2| \leqslant \delta$ et $\|a^2\|_{\ell^2} = 1$. On itère le procédé et on obtient par récurrence $a = a^1 + \sum_{j \geq 2} \lambda_j a^j$ où $\forall j$ $|\lambda_j| \leqslant \delta^{j-1}$ et $\|a^j\|_{\ell^2} = 1$, la convergence ayant lieu au sens de la norme $\|.\|_{\ell^2}$ (le reste est en module $\leqslant \delta^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ car $\delta < 1$). Posons alors $t = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, on a $\forall\, a \in R$: $-t+ES_a \leqslant S_a(\omega) \leqslant t+ES_a$

$$\Longrightarrow \ \forall\ a \in R \quad -\frac{\delta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant S_a(\omega) \leqslant \delta+1 \text{ par } (5.3).$$

Soit

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_i f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1} = S_a(\omega) \leqslant \sum_{j\geq 1} \delta^{j-1} . \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_i^j f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1} \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta} \quad \text{car} \quad \forall\ j\ a^j \in R.$$

De même

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_i f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1} \geq \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_i^j f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1} - \Big\| \sum_{j\geq 2} \sum_{i=1}^{m} a_i^j f_i(\omega) \Big\|_{\ell^1} \geq \frac{1-\delta}{\sqrt{2}} - \delta \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Finalement on obtient une expression de la forme

$$f(\delta) \leqslant S_a(\omega) \leqslant g(\delta) \quad \forall a \in \mathcal{S} \quad \text{avec} \quad f(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 1.$$

Donc $\exists\ 0 < \delta < 1$ t. q. $f(\delta) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}-\epsilon}$ et $g(\delta) \leqslant 1+\epsilon$ ce qui donne le lemme.

δ étant fixé ainsi, on a $P(\sup\limits_{a\in R} |S_a - ES_a| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \geq 1 - 2\exp(\frac{2m}{\delta} - \frac{n\delta^2}{16})$ par (5.5).

On choisit alors m pour que $\dfrac{2m}{\delta} - \dfrac{n\delta^2}{16} \leqslant -\ell_n 4$ soit $m = [\frac{n}{d}]$ où d ne dépend que de δ et $P(\sup\limits_{a\in R} |S_a - ES_a| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit qu'$\exists\ \omega \in \Omega$ tel que $\sup\limits_{a\in R} |S_a^{(\omega)} - ES_a| \leqslant \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ et par le lemme (5.6), on en conclut que $\forall\ a \in \mathcal{S}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\epsilon} \leqslant S_a(\omega) \leqslant 1 + \epsilon$, c'est-à-dire comme on l'a déjà vu que l'espace E_ω convient pour le théorème B.

<u>Remarque</u>. De plus, l'espace E_ω convient pour le théorème B avec une probabilité $\frac{1}{2}$ sur ω.

VI. Démonstration du théorème C.

THEOREME C ([7]). Soit E un espace de Banach de dimension n, soit $2 \leqslant q < +\infty$ et on suppose $n(E) \geq 2$. Alors :

$$\log_2 n(E) \geq \beta. \sup_{F \text{ sous-espace de } E} \frac{\dim F}{(\log(1+d_F))^q}.$$

β ne dépend que de q et $C_q(E)$ et comme on l'a dit dans la preuve du théorème principal, il faut en outre vérifier que β dépend de manière décroissante de $C_q(E)$.

Preuve. Ce théorème se déduit de deux autres théorèmes qui sont :

THEOREME (6.1) [7]. Soit E un espace normé de dimension n, soit $2 \leqslant q < +\infty$, alors

$$\log_2 n(E) \geq \beta'.K(E)^{-q}.n$$

$\beta' > 0$ ne dépend que de q et $C_q(E)$ et de manière décroissante de $C_q(E)$.

THEOREME (6.2) [9] ou [10]. E un espace de Banach, alors il existe une constante numérique K :

$$K(E) \leqslant K.\log(1 + d_E).$$

(Ce théorème étant classique nous renvoyons en appendice pour une démonstration abrégée).

On voit alors aisément comment montrer le théorème C. Si F est un sous-espace de E, on a trivialement (en restreignant le plongement) $n(E) \geq n(F)$.

Par le théorème (6.1) appliqué à F :

$$\log_2 n(F) \geq \beta'(q,\ C_q(F)).(\dim F) \geq \beta'(q,\ C_q(E))\ \frac{\dim F}{K(F)^q}.$$

Par le théorème (6.2) on a également

$$\log_2 n(F) \geq \beta'(q,\ C_q(E)).\frac{\dim F}{K^q.\log(1+d_F)^q}.$$

Puis $\log_2 n(E) \geq \log_2 n(F)$ donne finalement que si $\beta = b'.K^{-q}$,

$$\log_2 n(E) \geq \beta. \sup_{F \text{ sous-espace de } E} \frac{\dim F}{\log(1+d_F)^q}.$$

Il reste donc à montrer le théorème (6.1).

<u>Preuve</u>. Notons p t. q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On sait qu'on a une estimation de $T_p(E')$ où E' déssigne le dual de E en fonction de $K(E)$ et $C_q(E)$

$(T_p(E') \leqslant K(E).\ C_q(E)$ exactement).

On a en outre le théorème dû à Maurey suivant.

THEOREME (6.3) ([7]). Si $\dim E = n$, $\log_2 n(E) \geq \delta_p.T_p(E')^{-q}.n$ avec les mêmes notations qu'au théorème (6.1), δ_p étant une constante qui ne dépend que de p.

L'idée est de donner une estimation de $N(u(B_{\ell^1_N}).\|.\|_E,\alpha)$ pour $u : \ell^1_N \longrightarrow E$ opérateur et α bien choisi. Cela revient donc à mesurer le degré de compacité de u. Ensuite en considérant l'injection $j : E \longrightarrow \ell^\infty_N$ avec $N = n(E)$, donnée par les hypothèses et ${}^tj : \ell^1_N \longrightarrow E'$, puis en utilisant le fait qu'on a une estimation de $N(B_E).\|.\|_E,\alpha)$ pour tout espace E de dimension n, on aura le résultat voulu.

LEMME (6.4). Pour tout E de dimension n, $\alpha > 0$

$$\frac{1}{\alpha^n} \leqslant N(B_E,\|.\|_E,\alpha) \leqslant \exp(\frac{2n}{\alpha}).$$

Preuve. On a d'abord si $m = N(B_E, \|.\|_E, \alpha)$ $B_E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$, B_i la boule de rayon α. Soit V_n le volume de B_E, alors $V_n \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(B_i) = m.\alpha^n.V_n$. D'où le résultat. Pour l'autre inégalité, on utilise la même preuve que pour le lemme (5.4) en prenant pour R un ensemble maximal de points de B_E à des distances mutuelles $> \alpha$. On sait alors que $m \leqslant |R|$ et par (5.4) $|R| \leqslant \exp(\frac{2n}{\alpha})$.

LEMME (6.5) (Maurey [7]). Soit E un espace de type p, $N \in \mathbb{N}^*$, on donne $u : \ell_N^1 \longrightarrow E$ un opérateur. On a alors pour tout entier $k > 0$:

$$N(u(B_{\ell_N^1}), \|.\|_E, 2k^{-\frac{1}{q}}.T_p(E).\|u\|) \leqslant (2N)^k.$$

Preuve. L'idée est ici d'approcher $x \in u(B_{\ell_N^1})$ par un ensemble de points dont on contrôle le cardinal. Pour cela on va utiliser le fait que $B_{\ell_N^1}$ a peu de points extrémaux, à savoir $2N$: $(\pm e_i)_{i \leqslant N}$ si $(e_i)_{i \leqslant N}$ désigne la base canonique de ℓ_N^1.

Définissons $x_j = u(e_j) \in E$ et $A = \{\pm x_j, j \leqslant N\}$. On a Card $A \leqslant 2N$ et $u(B_{\ell_N^1})$ est l'enveloppe convexe de A.

Si alors $x \in u(B_{\ell_N^1})$, on peut écrire $x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j$ où pour tout j, $a_j \in A$ et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$. Réécrivons cela en termes probabilistes.

Soit Z une variable aléatoire qui prend la valeur a_j avec probabilité λ_j. Alors on a $EZ = x$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, considérons une suite $Z_1, \ldots, Z_k$ de copies indépendantes de Z. On va utiliser une version quantitative de la loi des grands nombres pour approcher EZ par une somme $\dfrac{Z_1(\omega) + \ldots + Z_k(\omega)}{k}$ pour un ω fixé. Cette somme (finie) prend ses valeurs dans A^k et donc on contrôlera son cardinal. Pour cela, on a besoin d'un lemme.

LEMME (6.6) [14]. Soit E un espace normé de type p et $Z_1, \ldots, Z_k$ des variables aléatoires indépendantes appartenant à $L^p(E)$. Alors pour tout $k > 0$:

$$E\left\|\sum_{i=1}^{k} (Z_i - EZ_i)\right\| \leqslant 2.T_p(E).\left(\sum_{i=1}^{k} E\|Z_i\|^p\right)^{1/p}.$$

<u>Preuve</u>. Rappelons que par Hölder, E de type p entraîne que :

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega) x_i\right\| d\omega \leqslant T_p(E).\left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Posons alors $X_i = Z_i - EZ_i$, variables aléatoires centrées, indépendantes. Pour $\omega' \in \Omega \times \Omega$, on définit

$$\begin{aligned} U_i(\omega') &= X_i(\alpha) - X_i(\alpha') \quad \text{si} \quad \omega' = (\alpha, \alpha') \\ &= Z_i(\alpha) - Z_i(\alpha'). \end{aligned}$$

On a des variables centrées, indépendantes et symétriques. (Symétrisées des Z_i). Posons pour alléger $\|f\|_p = \left(\int \|f\|^p dP\right)^{1/p}$ et prenons à ω' fixé, $x_i = U_i(\omega')$:

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega) U_i(\omega')\right\| d\omega \leqslant T_p(E).\left(\sum_{i=1}^{k} \|U_i(\omega')\|^p\right)^{1/p}.$$

Intégrons par rapport à ω' :

$$\int\int \|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega)U_i(\omega')\|d\omega\, d\omega' \leqslant T_p(E).\int (\sum_{i=1}^{k} \|U_i(\omega')\|^p)^{1/p}d\omega' .$$

Comme par Hölder $\int f\, d\omega' \leqslant (\int f^p d\omega')^{1/p}$, on a :

$$\int\int \|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega)U_i(\omega')\|d\omega\, d\omega' \leqslant T_p(E).(\sum_{i=1}^{k}\int \|U_i(\omega')\|^p d\omega')^{1/p}$$

soit $$\int\int \|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega)U_i(\omega')\|d\omega\, d\omega' \leqslant T_p(E).(\sum_{i=1}^{k} \|U_i\|_p^p)^{1/p}.$$

D'autre part à ω fixé, $\epsilon_i(\omega).U_i(\omega')$ a même loi que $U_i(\omega')$ (variables symétriques). Donc

$$\int \|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\omega)U_i(\omega')\|d\omega' = \int \|\sum_{i=1}^{k} U_i(\omega')\|d\omega' = \|\sum_{i=1}^{k} U_i\|_1 .$$

Revenons aux variables X_i :

$$\|\sum_{i=1}^{k} X_i(\alpha)\| = \|\int \sum_{i=1}^{k} U_i(\omega')d\alpha'\| \quad \text{car } X_i \text{ est centrée}$$

$$\leqslant \int \|\sum_{i=1}^{k} U_i(\omega')\|d\alpha' \quad \text{et en intégrant en } \alpha :$$

$$\|\sum_{i=1}^{k} X_i\|_1 \leqslant \|\sum_{i=1}^{k} U_i\|_1 \leqslant T_p(E).(\sum_{i=1}^{k} \|U_i\|_p^p)^{1/p} \quad \text{par ce qui précède.}$$

Enfin $$\|U_i\|_p = (\int \|Z_i(\alpha) - Z_i(\alpha')\|^p d\alpha\, d\alpha')^{\frac{1}{p}} \leqslant \int (\|Z_i(\alpha)\|+\|Z_i(\alpha')\|)^p d\alpha d\alpha')^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2\|Z_i\|_p .$$

Soit en regroupant $\|\sum_{i=1}^{k} X_i\|_1 \leqslant T_p(E).2.(\sum_{i=1}^{k} \|Z_i\|_p^p)^{1/p}$.

En revenant aux notations initiales, on a lemme (6.6).

Revenons au lemme (6.5). On en déduit dans le cas qui nous intéresse :

$$E\|Z_1 +\ldots+ Z_k - k.EZ\| \leqslant 2T_p(E).(E\|Z\|^p)^{1/p}.k^{1/p}.$$

D'où

$$E\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i - EZ\| \leqslant 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}(E\|Z\|^p)^{1/p}.$$

Or $EZ = x$ et pour $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = a_j \Longrightarrow \|Z(\omega)\| = \|u(+e_j)\| \leqslant \|u\|$.

D'où

$$E\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i - x\| \leqslant 2T(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|.$$

La variable aléatoire réelle $\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i - x\|$ a donc une espérance

$\leqslant 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|$ donc il existe $\omega \in \Omega$ t. q. sa valeur en ω soit $\leqslant$ au même nombre.

Appelons $z_i = Z_i(\omega)$, il existe donc $(z_1,\ldots,z_k) \in A^k$ t. q.

$$\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i - x\| \leqslant 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|.$$

Posons alors $S_k = \{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i$, pour tout i, $z_i \in A\}$, Card $S_k \leqslant$ Card $A^k \leqslant$

$(2N)^k$ et on vient de voir que $u(B_{\ell^1_N}) \subset \bigcup_{z\in S_k} B(z, 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|)$.

Donc

$$N(u(B_{\ell^1_N}), \|.\|_E , 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|) \leqslant (2N)^k \text{ d'où le lemme (6.5).}$$

<u>Remarque</u>. Dans le langage des nombres d'entropie, ce qu'on vient de voir montre que pour tout entier $n \geq k \log_2(2N)$, on a

$$e_n(u) \leqslant 2T_p(E).k^{-\frac{1}{q}}.\|u\|.$$

Soit

$$\sup_{n\geq 1} n^{\frac{1}{q}} e_n(u) \leqslant C_p.T_p(E).\|u\|.(\log_2 N+1)^{\frac{1}{q}}$$

où C_p ne dépend que de p.

Prouvons maintenant le théorème (6.3).

Soit donc E normé de dimension n, posons pour simplifier $N = n(E)$. Il existe donc un plongement $j \longrightarrow \ell^\infty_N$ tel que $\forall\, x \in E$ $\|x\| \leqslant \|j(x)\| \leqslant 2.\|x\|$. Considérons ${}^t j : \ell^1_N \longrightarrow E'$. On sait déjà que $\|{}^t j\| = \|j\| \leqslant 2$ et en outre on a $B_{E'} \subset {}^t j(B_{\ell^1_N})$.

(en effet, ${}^t j(B_{\ell^1_N})$ est un convexe fermé. Soit alors $\varphi \in B_{E'}$, par Hahn Banach on a

$$\varphi \in {}^t j(B_{\ell^1_N}) \Leftrightarrow \forall\, x \in E \quad \varphi(x) \leqslant \sup_{y\in B_{\ell^1}} \langle {}^t j(y), x\rangle.$$

Or $\sup_{y\in B_{\ell^1_N}} \langle {}^t j(y),x\rangle = \sup_{y\in B_{\ell^1_N}} \langle y,j(x)\rangle = \|j(x)\|$

et de plus $|\varphi(x)| \leqslant \|x\| \leqslant \|j(x)\|$ donc $\varphi(x) \leqslant \sup_{y\in B_{\ell^1_N}} \langle {}^t j(y),x\rangle$.)

Appliquons donc le lemme (6.5) :

$$N(B_E, \|.\|_E, 2k^{-\frac{1}{q}} T_p(E').2) \leqslant N(B_E, \|.\|_E, 2k^{-\frac{1}{q}} T_p(E').\|{}^t j\|)$$

$$\leqslant N({}^t j(B_{\ell^1_N}), \|.\|_E, 2k^{-\frac{1}{q}} T_p(E').\|{}^t j\|)$$

$$\leqslant (2N)^k.$$

Utilisons alors le lemme (6.4) : $\left(\dfrac{1}{4.k^{-1/q}.T_p(E')}\right)^n \leqslant (2N)^k$ (et ceci $\forall\, k > 0$).

Ensuite on choisit k_o tel que $4k_o^{-1/q}\, T_p(E') < \frac{1}{2}$ et $k_o < \alpha_p.T_p(E')^q$.

(Pour cela on prend $k_o > (8T_p(E'))^q$ et $\alpha_p > 8^q$).

On en tire $2^n \leqslant (2N)^{k_o}$ d'où $\log_2 N \geq \dfrac{n}{k_o} - 1$ soit encore si on suppose (ce qui n'est pas restrictif) $N \geq 2$:

$2\log_2 N \geq 1 + \log_2 N \geq \dfrac{n}{\alpha_p} T_p(E')^{-q}$. Il suffit alors de poser $\delta_p = \dfrac{1}{2\alpha_p}$.

Achevons alors la preuve du théorème (6.1). On a dans les hypothèses annoncées

$$\log_2 n(E) \geq n\, \delta_p (T_p(E'))^{-q}.$$

On sait que $T_p(E') \leqslant K(E).C_q(E)$. (Classique, voir [13] par exemple).
D'où

$$\log_2 n(E) \geq n\, \delta_p.K(E)^{-q}.C_q(E)^{-q}.$$

C'est le résultat voulu si on pose $\beta'(q,C_q(E)) = \delta_p\ C_q(E)^{-q}$.

Remarque 1. On voit bien que β et β' dépendent de manière décroissante de $C_q(E)$.

Remarque 2. Si au lieu de prendre $n(E)$, on suppose que E est 2-isomorphe à un sous-espace de ℓ^{∞}_N, on a les mêmes résultats en remplaçant $n(E)$ par N et de même si on suppose que E est C-isomorphe à un sous-espace de ℓ^{∞}_N, on a le même résultat où la constante β' dépend alors de C (à savoir $\beta = \dfrac{C_q(E)^{-q}}{2((4C)^q+1)}$.)

VII. Démonstration du théorème D.

THEOREME D ([2]). Soit $\Lambda \subset \Gamma$, s'il existe $\delta > 0$ t. q. $\bar{N}(A,\frac{1}{2}) \geq 2^{\delta\cdot|A|}$ pour toute partie finie A de Λ. Alors Λ est Sidon et $S(\Lambda) \leqslant \varphi(\frac{1}{\delta})$ où φ est un polynôme universel.

Remarque préliminaire. Au cours de la preuve vont apparaître de nombreuses constantes numériques et de multiples constantes "δ" qui minorent les nombres d'entropie. Pour plus de clarté, on notera les premières C_1, C_2,... et les deuxièmes δ_1, δ_2,... A la fin, on aura ainsi plus facilement la dépendance polynômiale de $S(\Lambda)$ en $\frac{1}{\delta}$.

L'articulation de la preuve est alors la suivante.

On peut déduire le théorème D (Bourgain) du théorème montré auparavant par Pisier qui est l'analogue du théorème D avec les nombres $N(A\ ,\ \delta)$:

THEOREME (7.1) ([6]). s'$\exists\ \delta > 0$ t. q. $N(A,\delta) \geq 2^{\delta|A|}$ pour toute partie finie $A \subset \Lambda$, alors Λ est Sidon et $S(\Lambda) \leqslant \psi(\frac{1}{\delta})$ où ψ polynôme universel.

Il ne reste qu'à montrer le théorème (7.1). Pour ce faire, on montre d'abord grâce à une inégalité du type Sudakov que l'hypothèse entraîne une inégalité du type

$$(7.2) \qquad E\|\sum_{\gamma\in A} g_\gamma\,\gamma\|_\infty \geq \delta.|A|.$$

Puis on globalise à toute suite $(\alpha_\gamma)_{\gamma\leqslant B}$ de scalaires sur une partie convenable $B \subset A$

$$(7.3) \qquad E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma g_\gamma \gamma\|_\infty \geq \delta_1 \sum_{\gamma\in B} a_\gamma|.$$

On peut en outre contrôler $|B|$.
On en déduit la même estimation avec des variables de Rademacher :

$$(7.4) \qquad E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma \epsilon_\gamma \gamma\|_\infty \geq \delta_2 \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|.$$

Enfin on en tire le théorème (7.1) grâce au théorème de caractérisation des Sidon dû à Bourgain :

THEOREME (7.5) (Voir [1]). $\forall\ \lambda \subset \Gamma$ on a équivalence entre :

(i) Λ est Sidon

(ii) $\forall\ p\geq 1$, $\forall (a_\gamma)_{g\in\Lambda}$ suite de scalaires $\|\sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma \gamma\|_p \leqslant C\sqrt{p}\ (\sum|a_\gamma|^2)^{1/2}$

(iii) $\exists\delta>0$, $\forall$ A partie finie de Λ, $\exists$ B quasi indépendant avec $B \subset A$ et $|B| \geq \delta.|A|$.

On a de plus l'information suivante : $\exists\ K_1$, K_2 constantes t. q.

$$\frac{K_1}{S(\Lambda)^2} \leqslant \delta_{(iii)} \leqslant \frac{K_2}{\sqrt{S(\Lambda)}} \text{ et } K_1 \ S(\Lambda)^{1/4} \leqslant C_{(ii)} \leqslant K_2 S(\Lambda).$$

<u>Remarques</u>. On pourra noter que la démonstration du théorème (7.1) n'utilise pas une estimation du type Dudley-Fernique mais seulement du type Sudakov (pour (7.2)). En outre elle repose essentiellement sur des arguments simples d'espaces de Banach (pour (7.3)) et sur des estimations qui découlent soit du principe de contraction (7.4), soit des inégalités de Khintchine pour terminer avec une preuve similaire à celle de Rudin ([11]) pour (i) $\Longrightarrow$ (ii) dans le théorème (7.5).

Comme on le voit, la preuve est assez longue, nous donnerons donc dans ce paragraphe la preuve de (7.1) et dans le paragraphe suivant, on en déduira le théorème D.

On part donc de l'hypothèse qu'$\exists\ \delta > 0$ tel que $N(A,\delta) \geq 2^{\delta \cdot |A|}$ pour toute partie finie $A \subset \Lambda$. L'inégalité de Sudakov donne une estimation de $E\|\sum_{\gamma\in A} g_\gamma \gamma\|_\infty$ en fonction de $N_2(A,\delta')$. Il faut donc dans un premier temps se ramener des nombres $N(A,\delta)$ a des nombres $N_2(A,\delta')$ pour δ' convenable. Posons $n = |A|$.

On va essayer de sa ramener à $\mathbb{C}^n$ sur lequel la distance d_A devient la distance d_∞ $(d_\infty((x_i),(y_i)) = \sup_i |x_i - y_i|)$ et la distance $d_{2,A}$ la distance euclidienne usuelle. Pour comparer alors $N(A,\delta)$ et $N_2(A,\delta')$, il suffit de passer par une estimation de $N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}})$ comme on va le voir.

Pour trouver une telle estimation, on peut passer par les nombres d'entropie (voir [4]) en utilisant le fait que si $I : \ell^2_n \to \ell^\infty_n$ représente l'identité on a

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sqrt{k}\ e_k(I) \leqslant C, \text{ constante numérique.}$$

Ici on va en donner une preuve directe qui est simple et n'utilise que de la combinatoire et des comparaisons de fonctions et qui a été signalée par

G. Pisier.

LEMME (7.6). Pour tout entier $p \leq n$,

$$N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{p}) \leq 2^p . \binom{n+p}{p} \quad \text{où} \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Preuve. Soit $N = N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{p})$, ceci signifie qu'on peut recouvrir $B_{\ell^1_n}$ par N boules pour la métrique d_∞ de rayon $\frac{1}{p}$. Ceci équivaut à recouvrir $p.\,B_{\ell^1_n}$ par des boules de rayon 1, soit $N = N(p.\,B_{\ell^1_n}, d_\infty, 1)$. Posons alors ici, $[x]$ = partie entière de x si $x \geq 0$, (partie entière de x) + 1 si $x < 0$. Ainsi pour tout x, $|[x]| \leq |x|$ et $|x-[x]| \leq 1$. Pour $x \in p.\,B_{\ell^1_n}$, notons $\bar{x} = ([x_1], \ldots, [x_n])$, ce qu'on vient de dire assure alors que $d_\infty(x, \bar{x}) \leq 1$ et $x \in p.\,B_{\ell^1_n} \Rightarrow \bar{x} \in p.\,B_{\ell^1_n}$.

Donc $\bigcup_{x \in p.\,B_{\ell^1_n}} B(\bar{x}, 1)$ (pour la distance d_∞) recouvre $p.B_{\ell^1_n}$.

Il ne reste plus qu'à estimer le cardinal de $\{\bar{x} / x \in p.\,B_{\ell^1_n}\}$. Or cet ensemble représente exactement $\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n / \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq p\} = N'$ et on a alors $N \leq N'$.

Cherchons d'abord le cardinal de $\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n / \sum_{j=1}^{n} k_j \leq p\} = b_p$. ($n$ étant fixé). Posons pour cela $a_p = \mathrm{Card}\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n / \sum_{j=1}^{n} k_j = p\}$.

Alors $b_p = a_o + \ldots + a_p$. Par définition, si $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-n} = \sum_{p=o}^{\infty} a_p x^p \quad \text{donc}$$

$$(1-x)^{-n-1} = (1-x)^{-1}.\sum_{p=o}^{\infty} a_p x^p = (\sum_{k\geq 0} x^k).(\sum_{p\geq o} a_p x^p = = \sum_{p=o}^{\infty} b_p x^p.$$

Comme on sait bien que

$$(1-x)^{-n-1} = 1 + (n+1)x + \ldots + \frac{(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p)(-x)^p}{p!} + \ldots$$

on en déduit que

$$b_p = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p!} = \binom{n+p}{p}.$$

Lorsque ensuite on prend $(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ / $\sum_{j=1}^{n} |k_j| \leqslant p$,

$\exists\ (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) \in \{-1,+1\}^n$ t. q. $(\epsilon_1 k_1,\ldots,\epsilon_n k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j k_j = \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leqslant p$. il ne reste donc plus qu'à dénombrer pour

$(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n$ fixé et $\sum_{j=1}^{n} k_j \leqslant p$, le nombre de choix de signes possibles pour les $(k_j)_{j\leqslant n}$. Une estimation brutale de ce nombre serait 2^n mais elle ne suffit pas pour la suite. Or lorsque $\sum_{j=1}^{n} |k_j| \leqslant p$, il est clair comme $p \leqslant n$, qu'on a au plus p nombres (k_j) qui sont non nuls. On a donc au plus 2^p choix de signes possibles.

Donc finalement $N \leqslant N' \leqslant 2^p \binom{n+p}{p}$.

LEMME (7.7) ([6]). Il existe une fonction $\epsilon \longrightarrow \varphi(\epsilon) > 0$ t. q.

$$N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}}) \leqslant 2^{\varphi(\epsilon).n}$$

et le comportement de φ en 0 est : il existe $K > 0$ t. q. $\varphi(\epsilon) = K\sqrt{\epsilon}$ si $\epsilon < 1$.

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $B_{\ell^2_n} \subset \sqrt{n}.\ B_{\ell^1_n}$.

Donc par homothétie $N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}}) \leqslant N(\sqrt{n}.\ B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}}) = N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n})$.

On peut supposer $0 < \epsilon < 1$ et poser $p = [n\epsilon] + 1 \leqslant n$.

Alors par le lemme (7.6) $N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{p}) \leqslant 2^p . \frac{(n+p)!}{p!\ n!}$.

Remarquons déjà que $\frac{1}{n\epsilon} \geq 1 \Longrightarrow N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant 1$ car $B_{\ell^\infty_n} \subset B_{\ell^1_n}$.

Donc supposons pour l'instant que $\frac{1}{n\epsilon} < 1$. (donc $p \neq 1$).

ϵ étant fixé ainsi pour la suite du calcul, on a par la formule de Stirling :

$$\frac{(n+p!}{n!\ p!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(n+p)^{n+p}}{n^n . p^p} . \frac{\sqrt{2\pi(n+p)}}{2\pi\sqrt{np}}.$$

Donc il existe $C \geq 1$ t. q. $\frac{(n+p)!}{n!\ p!} \leqslant C.\frac{(n+p)^{n+p}}{n^n\ p^p}$ (C constante numérique).

Soit donc $N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant C.2^p.(1+\frac{n}{p})^n \leqslant C.2^p.(1+\frac{n}{p})^p.e^p$.

Or vue la définition de p, on a $e^p \leqslant e.e^{n\epsilon}$ et

$(1 + \frac{n}{p})^p \underset{n\to\infty}{\sim} (1+\frac{1}{\epsilon})^{n\epsilon}$.

Donc finalement il existe $C' \geq 1$ t. q.

$N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant C'.2^{f(\epsilon).n}$ où $f(\epsilon) = \epsilon + \epsilon \log_2 e + \epsilon \log_2 (1+\frac{1}{\epsilon})$.

On vérifie bien que $f(\epsilon) > 0$ pour $\epsilon > 0$ et comme on a pris $0 < \epsilon < 1$, on a la majoration : il existe M constante > 0 t. q. $f(\epsilon) \leqslant M.\sqrt{\epsilon}$.

En outre $C' = 2^{\log_2 C'}$ et $\frac{1}{n\epsilon} < 1$ donc $C' \leqslant 2^{(\log_2 C').n\epsilon}$.

D'où finalement $N(B_{\ell^1_n}, d\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant 2^{n(M\sqrt{\epsilon}+\epsilon \log_2 C')} \leqslant 2^{n.\varphi(\epsilon)}$

avec $\varphi(\epsilon) = K\sqrt{\epsilon}$, K-constante > 0.

Pour finir il suffit de remarquer que si $\frac{1}{n\epsilon} \geq 1$, $N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant 1 \leqslant 2^{\varphi(\epsilon).n}$. Donc dans tous les cas, on a

$N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}}) \leqslant N(B_{\ell^1_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon n}) \leqslant 2^{\varphi(\epsilon).n}$ et le lemme (7.7).

LEMME (7.8) ([6]). $\forall\ \epsilon,\epsilon' > 0$, $N(A,2\epsilon) \leqslant N_2(A,\epsilon\epsilon'\sqrt{n}).N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon'\sqrt{n}})$.

<u>Preuve</u>. Prenons $m = N_2(A,\epsilon\epsilon'\sqrt{n})$. Par définition, il existe m boules $(B_i)_{i\leqslant m}$ de centres $(x_i)_{i\leqslant m}$ dans l'espace métrique (T,d_2,A) de rayon $\epsilon\epsilon'\sqrt{n}$ qui recouvrent T.

Donc $\forall\ t \in T$, $\exists\ x_i$ t. q. $(\sum_{\gamma\in A} |\gamma(t) - \gamma(x_i)|^2)^{1/2} \leqslant \epsilon\epsilon'\sqrt{n}$.

Posons alors $M_t = (\gamma(t))_{\gamma\in A} \in \mathbb{C}^n$ (si $n = |A|$), on se ramène à $\ell^2_n(\mathbb{C})$ par :

$$\|M_t - M_{x_i}\|_{\ell^2_n} = (\sum_{\gamma\in A} |\gamma(t) - \gamma(x_i)|^2)^{1/2} \leqslant \epsilon\epsilon'\sqrt{n}.$$

Donc en transposant, on en déduit que les boules euclidiennes

$B'_i(M_{x_i},\epsilon\epsilon'\sqrt{n})$ recouvrent $\underline{M} = \{M_t/t\in T\}$. Si on fait une translation, on sait par le lemme (7.7) que $B_{\ell^2_n}(M_{x_i},1)$ est recouverte par

$k = N(B_{\ell^2_n}, d_\infty, \frac{1}{\epsilon'\sqrt{n}})$ boules pour la distance d_∞ de rayon $\frac{1}{\epsilon'\sqrt{n}}$.

Donc par homothétie (de rapport $\epsilon\,\epsilon'\sqrt{n}$), $\forall i$ B'_i est recouverte par k

boules pour d_∞ de rayon $\epsilon\,(\frac{\epsilon\,\epsilon'\sqrt{n}}{\epsilon'\sqrt{n}})$. Ainsi M est recouvert par mk

boules $(B''_j)_{j\leqslant mk}$ de centres A_j et de rayon ϵ (pour la distance d_∞ sur $\mathbb{C}^n$).
Soit alors $t\in T$, $\exists\, A_j$ t. q. $d_\infty(M_t,A_j)\leqslant\epsilon$. Notons
$\mathcal{E}_j = \{t\in T/d_\infty(M_t,A_j)\leqslant\epsilon\}$ et si $\mathcal{E}_j\neq\emptyset$, on choisit $t_j\in\mathcal{E}_j$. Alors
$d_\infty(M_t,M_{t_j})\leqslant d_\infty(M_t,A_j)+d_\infty(A_j,M_{t_j})\leqslant 2\epsilon$. De plus $d_\infty(M_t,M_{t_j}) = d_A(t,t_j)$.
Donc les mk boules (au maximum) de centres t_j et de rayon 2ϵ pour d_A recouvrent T. Soit $N(A,2\epsilon)\leqslant mk$. Ce qui est bien (7.8).

Revenons alors au théorème (7.1). On a par le lemme (7.8) :

$$2^{\delta\cdot n} = 2^{\delta\cdot|A|}\leqslant N(A,\delta)\leqslant N_2(A,\frac{\delta\epsilon'}{2}\sqrt{n}).N(B_{\ell^2_n},d_\infty,\frac{1}{\epsilon'\sqrt{n}}).$$

$$\leqslant N_2(A,\frac{\delta\epsilon'}{2}\sqrt{n}).2^{\varphi(\epsilon')\cdot n}\quad\text{par le lemme (7.7).}$$

On peut alors choisir ϵ' fonction de δ $(\epsilon' = \frac{\delta^2}{4K^2})$ pour que

$\varphi(\epsilon').n\leqslant\frac{\delta}{2}n$ et $0<\epsilon'<\frac{1}{2}$. (au besoin en diminuant δ).

Avec ce choix : $2^{\frac{\delta}{2}n}\leqslant N_2(A,\frac{\delta\epsilon'}{2}\sqrt{n})$. Deduisons-en (7.2).

LEMME (7.9). Soit $(g_\gamma)_{\gamma\in A}$ une suite de gaussiennes <u>réelles</u> $N(0,1)$ sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, alors on a :

$$\exists\ \beta > 0 \text{ numérique, } E\|\sum_{\gamma\in A} g_\gamma\ \gamma\|_\infty \geq \beta.\sup_{\epsilon>0} \epsilon \sqrt{\log N_2(A,\epsilon)} \quad \text{(Sudakov).}$$

Pour montrer ce résultat, on utilise le lemme classique de Slépian et la minoration de Sudakov pour un vecteur gaussien réel centré. Commemnçons par rappeler le premier résultat.

LEMME DE SLEPIAN (Voir [18] pour la preuve). Considérons $(X_1,\ldots,X_N)$ et $(Y_1,\ldots,Y_N)$ deux vecteurs gaussiens réels centrés. Supposons que $\forall\ i \neq j\ \ E(X_i - X_j)^2 \geq E(Y_i - Y_j)^2$. Alors

$$2E(\sup_{i\leqslant N} X_i) \geq E(\sup_{i\leqslant N} Y_i).$$

On en déduit :

MINORATION DE SUDAKOV (7.10). Soit $(X_1,\ldots,X_N)$ un vecteur gaussien réel centré. Alors

$$\exists\ \beta > 0 \qquad E(\sup_{i\leqslant N} X_i) \geq \beta \sqrt{\log N} \times \inf_{i\neq j} \|X_i - X_j\|_2.$$

Bien entendu $\|X_i - X_j\|_2 = (E(X_i - X_j)^2)^{1/2}$.

Preuve. Posons en notant $x = \inf_{i\neq j} \|X_i - X_j\|_2$, $Y_i = x.\frac{g_i}{\sqrt{2}}$ où les $(g_i)_{i\leqslant N}$ sont des gaussiennes réelles $N(0,1)$ indépendantes.
Alors $(Y_i - Y_N)$ est un vecteur gaussien réel centré et

$$\forall\ i \neq j \qquad E(Y_i - Y_j)^2 = x^2 \leqslant E(X_i - X_j)^2.$$

Donc par le lemme de Slépian, $2E(\sup_{i\leqslant N} X_i) \geq \frac{x}{\sqrt{2}} E(\sup_{i\leqslant N} g_i)$.

Il ne reste donc plus, si on pose $X = \sup_{i\leqslant N} g_i$ qu'à estimer $E(X)$.

Pour cela, rappelons que le théorème de Fubini permet de dire que si Y est une variable positive alors $EY = \int_0^\infty P(Y > t)dt$.

Ecrivons ici $X = X^+ - X^-$ où $X^+ = \sup(X,0)$ et $X^- = \sup(-X,0)$.

Alors $EX = EX^+ - EX^- = \int_0^\infty P(X^+>t)dt - \int_0^\infty P(X^->t)dt$.

Or $\forall\, t > 0$, $P(X^+>t) = P(X>t)$ et $P(X^->t) = P(X<-t)$.

Donc $EX = \int_0^\infty P(X>t)dt - \int_0^\infty P(X<-t)dt$.

On voit apparaître ici la fonction de queue de la gaussienne $N(0,1)$:
$r(t) = P(g_1 > t)$ et

$$\forall\, t > 0,\quad r(t) = \int_t^\infty e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}-vt}dv \quad \text{si} \quad v = u - t.$$

Cherchons à encadrer $r(t)$. Trivialement la formule ci-dessus donne
$r(t) \leqslant e^{-t^2/2}$. D'autre part

$$r(t) \geq e^{-t^2/2}\int_0^1 \exp(-\frac{v^2}{2} - vt)\frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \geq C.e^{-t^2/2}.\frac{1-e^{-t}}{t} \quad \text{où} \quad C > 0.$$

$$\text{Soit finalement} \quad \forall\, t > 1,\quad r(t) \geq C'\,\frac{e^{-t^2/2}}{t} \quad \text{où} \quad C' > 0.$$

On a alors $\int_o^\infty P(X>t)dt \geq t_o P(X>t_o)$ $\forall t_o > 0$ car $P(X > t)$ décroit avec t

$$\begin{aligned}
&\geq t_o[1-P(X\leqslant t_o)] = t_o[1-(P(g_1\leqslant t_o))^N] \text{ vue l'indépen-ce}\\
&\geq t_o[1-(1-r(t_o))^N]\\
&\geq t_o[1-\exp(-Nr(t_o))].
\end{aligned}$$

Donc pour $t_o > 1$: $\quad \geq t_o[1-\exp[-N\frac{c'}{t_o}.e^{-t_o^2/2}]]$.

Posons alors $t_o = \sqrt{2\delta \log N}$ où $\frac{1}{2\log 2} < \delta < 1$ (Ce qui assure pour $N \geq 2$ que $t_o > 1$). (Remarquons que pour $N = 1$, (7.10) est trivial).

$$\text{Alors} \quad \int_o^\infty P(X>t)dt \geq \sqrt{2\delta \log N}(1 - \exp(- N\frac{c'}{\sqrt{2\delta \log N}}N^{-\delta})).$$

Comme $\delta < 1$, l'exponentielle tend vers 0 quand $N \longrightarrow +\infty$ donc $\exists\, \lambda>0$ t.q.

$$\int_o^\infty P(X>t)dt \geq \lambda \sqrt{\log N} \text{ pour } N \geq N_o.$$

En outre $\int_o^\infty P(X<-t)dt = \int_o^\infty (P(g_1\leqslant -t)]^N dt = \int_o^\infty P(g_1\geq t)^N dt = \int_o^\infty r(t)^N dt$.

D'où

$$\int_o^{\infty} P(X<-t)dt \leqslant \int_o^{\infty} e^{-N\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2N}}.$$

Donc $\exists\, N_1$ t. q. $\forall\, N \geq N_1$ $\displaystyle\int_o^{\infty} (P(X<-t)dt \leqslant \frac{\lambda}{2}\sqrt{\log N}$ et alors pour

$$N \geq \sup(N_o, N_1) \quad , \quad E(X) \geq \frac{\lambda}{2}\sqrt{\log N.}$$

Si maintenant $N \leqslant \sup(N_o, N_1)$, alors

$$E(\sup_{i\leqslant N} g_i) \geq E(\sup(g_1, g_2)) = \int\int_{\mathbb{R}^2} \sup(x,y).e^{-\frac{x^2}{2}}.e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx\, dy}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\int_{x\geq y} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 0.$$

Donc pour $N \leqslant \sup(N_o, N_1)$, il existe $\mu > 0$ t. q.

$$\forall\, N \geq 2,\ E(\sup_{i\leqslant N} g_i) \geq \mu.\sqrt{\log N.}$$

En revenant au début, on a donc (7.10) avec $\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \inf(\mu, \dfrac{\lambda}{2})$.

Montrons alors la minoration (7.9).

Posons pour simplifier $f(t,\omega) = \sum_{\gamma\in A} g_\gamma(\omega)e^{i\gamma t}$ et donc $\gamma(t) = e^{i\gamma t}$.

$$\text{Alors } d_{2,A}(s,t) = (\sum_{\gamma\in A} |e^{i\gamma t} - e^{i\gamma s}|^2)^{1/2} = \Big[\sum_{\gamma\in A} (\cos\gamma t - \cos\gamma s)^2 + (\sin\gamma t - \sin\gamma s)^2\Big]^{1/2}.$$

Il s'agit d'évaluer $E\|f\|_{\infty}$.

Prenons $\epsilon > 0$ fixé. Considérons $t_1,\dots,t_N$ un ensemble maximal de points distants deux à deux de plus de ϵ pour $d_{2,A}$. Comme on l'a déjà vu, $T \subset \bigcup_{j \leq N} B(t_j, \epsilon)$ pour $d_{2,A}$ et donc $N \geq N_2(A, \epsilon)$.

Introduisons pour se ramener à un vecteur gaussien réel, g'_γ et g''_γ deux copies indépendantes de g_γ pour $\gamma \in A$ et $\forall\ t \in T$, $X_t(\omega, \omega') = \sum_{\gamma \in A} g'_\gamma(\omega) \cos \gamma t + \sum_{\gamma \in A} g''_\gamma(\omega') \sin \gamma t$. $(g'_\gamma(\omega,\omega') = g_\gamma(\omega)$ et $g''_\gamma(\omega,\omega') = g_\gamma(\omega'))$

On a donc $X_t(\omega, \omega') = \Re e\, f(t, \omega) + \Im m\, f(t, \omega')$.

D'où $\sup_{t \in T} X_t(\omega, \omega') \leq \sup_{t \in T} |f(t,\omega)| + \sup_{t \in T} |f(t, \omega')|$ et en intégrant par rapport à ω et ω' :

$$E(\sup_{t \in T} X_t) \leq E\|f\|_\infty + E\|f\|_\infty \leq 2E\| \sum_{\gamma \in A} g_\gamma\, \gamma\|_\infty.$$

Appliquons alors (7.10). On a

$$E(\sup_{t \in T} X_t) \geq E(\sup_{i \leq N} X_{t_i})$$

et $E(X_{t_i} - X_{t_j})^2 = \sum_{\gamma \in A} (\cos \gamma t_i - \cos \gamma t_j)^2 + \sum_{\gamma \in A} (\sin \gamma t_i - \sin \gamma t_j)^2$ vue l'indépendance de g'_γ et g''_γ donc

$E(X_{t_i} - X_{t_j})^2 = (d_{2,A}(t_i, t_j))^2 \geq \epsilon^2$ si $i \neq j$.

Donc par (7.10) (comme ici $\forall\ i$ X_{t_i} est bien réel)

$$E(\sup_{t \in T} X_t) \geq E(\sup_{i \leq N} X_{t_i}) \geq \beta \sqrt{\log N} \inf_{i \neq j} \|X_{t_i} - X_{t_j}\|_2$$

$$\geq \beta \sqrt{\log N}\, \epsilon \geq \beta \sqrt{\log N_2(A, \epsilon)}.\epsilon.$$

Finalement $\forall\ \epsilon > 0$ $E\|\sum_{\gamma \in A} g_\gamma\, \gamma\|_\infty \geq \frac{\beta}{2}\, \epsilon \sqrt{\log N_2(A, \epsilon)}$ soit (7.9).

Appliquons le lemme (7.9) :

$$\mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A} g_\gamma.\gamma\|_\infty \geq \beta \sup_{\epsilon>0} \epsilon\sqrt{\log N_2(A,\epsilon)} \geq \beta.\frac{\delta\epsilon'}{2}\sqrt{n}.(\log N_2(A,\frac{\delta\epsilon'\sqrt{n}}{2}))^{1/2}.$$

D'après ce qui précède

$$\geq \beta.\frac{\delta\epsilon'\sqrt{n}}{2}[\log(2^{2^{\frac{\delta}{2}n}})]^{1/2} = \beta.\frac{\delta\epsilon'\sqrt{n}}{2}.(\frac{\delta}{2}n)^{1/2}(\log 2)^{1/2}$$

soit $\geq \delta_1.n$

et $\exists\, c_1 > 0$:
$$\delta_1 = \beta.\frac{\delta}{2}.\frac{\delta^2}{4K^2}.\sqrt{\frac{\delta}{2}}.\sqrt{\log 2} = c_1\delta^{\frac{7}{2}}.$$

On obtient en conclusion une inégalité du type (7.2). (Rappelons que $n = |A|$).

Poursuivons suivant le schéma proposé en globalisant pour une suite de scalaires suivant un argument d'espaces de Banach.

Considérons le Banach $E = \mathbb{R}^A$ muni de la norme $\|(a_\gamma)_{\gamma\in A}\|_E = \mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A} a_\gamma g_\gamma \gamma\|_\infty$. Si $(f_\gamma)_{\gamma\in A}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^A$, on a

$\|f_\gamma\|_E = \mathbb{E}\|g_\gamma\gamma\|_\infty = \mathbb{E}|g_\gamma| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = d$. Posons alors $e_\gamma = \frac{f_\gamma}{d}$, on a une base normée de E. ($\|e_\gamma\|_E = 1$). En outre si $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in A} \in \{-1,1\}^A$, on a

$\|(\epsilon_\gamma a_\gamma)_{\gamma\in A}\|_\epsilon = \mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A}\epsilon_\gamma g_\gamma a_\gamma.\gamma\|_\infty = \mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A} g_\gamma.a_\gamma.\gamma\|_\infty$ car les variables g_γ sont symétriques, $= \|(a_\gamma)_{\gamma\in A}\|_E$.

On dit alors que la base $(e_\gamma)_{\gamma\in A}$ est <u>1-inconditionnelle</u>.

L'hypothèse (7.2) donne alors $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\|_E \geq \frac{\delta_1}{d}.n$.

Soit alors $\varphi \in E'$ (dual de E), $\|\varphi\| = 1$ et $\langle\varphi, \sum_{\gamma\in A} e_\gamma\rangle =$

$\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\|_E \geq \frac{\delta_1}{d}|A|$.

LEMME (7.11) [6]. Soit $(e_\gamma)_{\gamma\in A}$ suite normée et 1-inconditionnelle dans E Banach réel et $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \geq \mu.|A|$. Alors $\exists\, B \subset A$, $|B| \geq \frac{\mu}{2}|A|$ t. q. $\forall\, (a_\gamma)_{\gamma\in B}$ scalaires on a

$$\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma e_\gamma\| \geq \frac{\mu}{2} \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|.$$

<u>Preuve</u>. Elle utilise le lemme facile suivant :

LEMME (7.12). Dans un Banach E muni d'une base $(e_i)_{i\leqslant n}$ normée et 1-inconditionnelle :

(i) si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $|x_i| \leqslant \|x\|$ $\forall\, i$.

(ii) $(e_i^*)_{i\leqslant n}$ la base duale est aussi normée et 1-inconditionnelle.

<u>Preuve</u>. Posons $y = \sum_{j\neq i} x_j e_j - x_i e_i$.
Alors $\|y\| = \|x\|$ car $(e_i)_{i\leqslant n}$ est 1-inconditionnelle et $2x_i e_i = x-y$.
Soit $2|x_i| \leqslant 2\|x\|$ et $|x_i| \leqslant \|x\|$.
En outre, $\forall i$, $\langle e_i^*, e_i\rangle = 1$ donc $\|e_i^*\| \geq |\langle e_i^*, e_i\rangle| \geq 1$.

Puis $\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $|e_i^*(x)| = |x_i| \leqslant \|x\|$ par le (i) donc $\|e_i^*\| = 1$.

Enfin

$$\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i e_i^*\| = \sup_{\|\sum_{i=1}^{n} b_i e_i\|\leqslant 1} |\langle \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i e_i^*, \sum_{i=1}^{n} b_i e_i\rangle| = \sup_{\|\sum_{i=1}^{n} b_i e_i\|\leqslant 1} |\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i b_i|$$

$$= \sup_{\|\sum b_i e_i\| \leqslant 1} |\langle \sum a_i e_i^*, \sum b_i \epsilon_i e_i \rangle|$$

$$= \sup_{\|\sum b_i e_i\| \leqslant 1} |\langle \sum a_i e_i^*, \sum b_i e_i \rangle| \quad \text{car} \quad (e_i)_{i \leqslant n} \quad \text{est}$$

1-inconditionnelle.

$$= \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\| \quad \text{d'où (ii).}$$

Si alors (pour le lemme (7.11)), on décompose $\varphi = \sum_{\gamma \in A} \varphi_\gamma . e_\gamma^*$, par le lemme (7.12) on a $|\varphi_\gamma| \leqslant \|\varphi\| \leqslant 1$ et d'autre part $\langle \varphi, \sum_{\gamma \in A} e_\gamma \rangle = \sum_{\gamma \in A} \varphi_\gamma \geq \mu . |A|$. Posons $B = \{\gamma \in A \mid f_\gamma \geq \frac{\mu}{2}\}$, alors

- $\| \sum_{\gamma \in B} a_\gamma e_\gamma \| = \| \sum_{\gamma \in B} |a_\gamma| \, e_\gamma \|$ car $(e_\gamma)_{\gamma \in A}$ est 1-inconditionnelle et (a_γ) réels.

$$\geq \langle \varphi, \sum_{\gamma \in B} |a_\gamma| e_\gamma \rangle \quad \text{car} \quad \|\varphi\| \leqslant 1$$

$$\geq \sum_{\gamma \in B} |a_\gamma| . \ \varphi_\gamma \geq \frac{\mu}{2} \sum_{\gamma \in B} |a_\gamma| .$$

- $\mu . |A| \leqslant \sum_{\gamma \in A} \varphi_\gamma \leqslant \sum_{\gamma \in B} \varphi_\gamma + \sum_{\gamma \in A-B} \varphi_\gamma \leqslant |B| + \frac{\mu}{2}|A-B|$ car $|\varphi_\gamma| \leqslant 1$.

$$\leqslant |B| + \frac{\mu}{2}|A| \quad \text{et} \quad |B| \geq \frac{\mu}{2}|A| \quad \text{d'où le lemme (7.11).}$$

En revenant aux gaussiennes, on a donc avec les mêmes notations :

$\exists \ B \subset A$, $|B| \geq \frac{\delta_1}{2d}|A|$ $(\mu = \frac{\delta_1}{d})$, t. q. $\forall \ (a_\gamma)_{\gamma \in B}$ suite de scalaires :

$$\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma e_\gamma\|_E \geq \frac{\delta_1}{2d} \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|.$$

Ou encore

$|B| \geq \delta_2 |A|$ et $E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma g_\gamma \gamma\|_\infty \geq \delta_3 \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|$ avec $\delta_2 = \dfrac{\delta_1}{2d} = \dfrac{c_1}{2d}\,\delta^{7/2}$ et

$$\delta_3 = \frac{\delta_1}{2} = \frac{c_1}{2}\,\delta^{7/2}.$$

Soit (7.3).

Passons alors aux variables de Rademacher. (7.4). Pour passer des gaussiennes aux Rademacher, on peut penser à utiliser le principe de contraction qui dit :

Principe de contraction (voir [5]). Soit $\eta_1,\dots,\eta_n$ variables réelles, indépendantes et symétriques sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ t. q. $\forall i\ |\eta_i| \leqslant \lambda\in\mathbb{C}$. Alors

$$\forall\, x_1,\dots,x_n \in B \text{ Banach},\quad \int \|\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\omega)x_i\|_\infty d\omega \leqslant \lambda.\int \|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(\omega)x_i\|_\infty d\omega.$$

Mais ici, le problème est que les (g_γ) sont symétriques mais non bornées. Pour cela, on tronque les variables : soit $u > 0$, posons $g_\gamma = g'_\gamma + g''_\gamma$ où $g'_\gamma = g_\gamma.1_{\{|g_\gamma|\leqslant u\}}$ et $g''_\gamma = g - g'_\gamma$. Alors

$$\delta_2.\sum_{\gamma\in B} |a_\gamma| \leqslant E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma g_\gamma \gamma\|_\infty \leqslant E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma g'_\gamma \gamma\|_\infty + E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma g''_\gamma \gamma\|_\infty$$

$$\leqslant u.\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma \epsilon_\gamma \gamma\|_\infty + \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|.E|g''_\gamma|.$$ (Contraction et inégalité triang.)

Or $\forall\, \gamma \in B$ $\quad E|g''_\gamma| = \displaystyle\int_u^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, x \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}).$

Donc $E|g''_\gamma| \leqslant \frac{\delta_2}{2} \Leftrightarrow \exp(-\frac{u^2}{2}) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,\delta_2 \Leftrightarrow u^2 \geq 2\log(\frac{2\sqrt{2}}{\delta_2\sqrt{\pi}})$.

Si $\frac{2\sqrt{2}}{\delta_2\sqrt{\pi}} < 1$ c'est toujours vrai, sinon comme $\log x \leqslant x^2$ pour $x \geq 1$, il suffit de prendre

$$u = \sqrt{2}.\frac{2\sqrt{2}}{\delta_2\sqrt{\pi}} \text{ pour que } \exp(-\frac{u^2}{2}) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,\delta_2 .$$

Donc pour cet u choisi :

$$\delta_2 . \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma| \leqslant u\, E\| \sum_{\gamma\in B} a_\gamma \epsilon_\gamma \gamma \|_\infty + \frac{\delta_2}{2} \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma| .$$

Soit enfin

$$\frac{1}{2u}\,\delta_2 . \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma| \leqslant E\| \sum_{\gamma\in B} a_\gamma \epsilon_\gamma \gamma \|_\infty \text{ ou encore}$$

$$E\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma \epsilon_\gamma \gamma \|_\infty \geq \delta_4 . \sum_{\gamma\in B} |a_\gamma| \quad (7.4) \quad \text{pour} \quad \delta_4 = \frac{\delta_2}{2u} \geq C_3 . \delta^7$$

C_3 constante numérique > 0.

On en déduit finalement le théorème (7.1) grâce aux équivalences de Bourgain et par une inégalité du type de celle de Rudin classiquement : (Voir [11]).

Soit $\forall\, \omega \in \Omega$, $f_\omega(t) = \sum_{\gamma\in B} \epsilon_\gamma(\omega) a_\gamma \gamma(t)$ pour $t \in T$.

Définissons la forme linéaire : $(f_\omega)_{\omega\in\Omega} \xrightarrow{L} \sum_{\gamma\in B} a_\gamma$.

$\forall\, (a_\gamma)_{\gamma\in B}$, $(f_\omega)_{\omega\in\Omega} \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(T))$.

L est ainsi définie sur le sous-espace de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(T))$ engendré par les fonctions $\epsilon_\gamma.\gamma$. Par le résultat (7.4), on a $\|L\| \leq \frac{1}{\delta_4}$.

Donc par Hahn-Banach, L se prolonge à $L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(T))$ tout entier (où $\Omega = \{-1,1\}^B$) avec $\|L\| \leq \frac{1}{\delta_4}$.

Or comme Ω est un ensemble fini, $L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(T))' = L^\infty(\Omega,\mathcal{A},P,\underbrace{M(T)}_{\text{mesures sur } T})$

D'où il existe une famille $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$, $\mu_\omega \in M(T)$ t. q. :

$$\|L\| = \sup_\omega \|\mu_\omega\| \leq \frac{1}{\delta_4} \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma\in B} a_\gamma = L(f_\omega) = \int_\Omega \langle \mu_\omega, f_\omega\rangle d\omega \quad \text{où}$$

$$\langle \mu_\omega, f_\omega\rangle = \int f_\omega(-t)\,d\mu_\omega(t).$$

Prenons alors la fonction $f(t) = \sum_{\gamma\in B} a_\gamma.\gamma(t) \in C(T)$, (a_γ) suite de réels. Montrons d'abord que $f = \int_\Omega \mu_\omega * f_\omega\, d\omega$ (la convolution ayant lieu dans T). En effet, pour tout $t \in T$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mu_\omega * f_\omega\, d\omega &= \int_\Omega \left(\int_T f_\omega(t-x)\,d\mu_\omega(x)\right)d\omega \\ &= \int_\Omega \left(\int_T \sum_{\gamma\in B} \epsilon_\gamma(\omega)\,a_\gamma\gamma(t-x)\,d\mu_\omega(x)\right)d\omega.\end{aligned}$$

Or $\gamma(t-x) = \gamma(t).\gamma(-x)$ soit $= \sum_{\gamma\in B} \gamma(t).\int_\Omega\left(\int_T \epsilon_\gamma(\omega)\,a_\gamma\gamma(-x)\,d\mu_\omega(x)\right)d\omega.$

$$\begin{aligned}&= \sum_{\gamma\in B} \gamma(t).\int_\Omega \langle \mu_\omega, \epsilon_\gamma(\omega)\,a_\gamma\gamma|\rangle d\omega. \\ &= \sum_{\gamma\in B} \gamma(t).a_\gamma = f(t).\end{aligned}$$

D'où $\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} = \left\|\int_\Omega \mu_\omega * f_\omega\, d\omega\right\|_p^p \leq \int_\Omega \|f_\omega * \mu_\omega\|_p^p\, d\omega$

$$\leq \int_\Omega \|f_\omega\|_p^p.\|\mu_\omega\|\, d\omega \leq \left(\frac{1}{\delta_4}\right)^p.\int_\Omega \|f_\omega\|_p^p\, d\omega.$$

Soit encore, $\int_\Omega \|f_\omega\|_p^p\, d\omega = \int_\Omega \left(\int_T \left|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma\epsilon_\gamma(\omega)\gamma(t)\right|^p \frac{dt}{2\pi}\right)d\omega.$

A t fixé, on peut appliquer l'inégalité de Khintchine : il existe une constante $K > 0$:

$$\int_\Omega \|f_\omega\|_p^p d\omega \leqslant \int_T \frac{dt}{2\pi}[(K\sqrt{p})^p(\sum_{\gamma\in B} |a_\gamma\gamma(t)|^2)^{p/2}] = (K\sqrt{p})^p(\sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|)^{1/2}.$$

D'où

$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{\delta_4}.K\sqrt{p}\ (\sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|^2)^{1/2}$, et finalement pour tout $p \geq 1$, pour tous $(a_\gamma)_{\gamma\in B}$ réels, $\|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma\gamma\|_p \leqslant \frac{K}{\delta_4}\sqrt{p}.(\sum_{\gamma\in B} |a_\gamma|^2)^{1/2}$. (analogue au (ii) du théorème (7.5)).

On passe à cette inégalité pour $f(t) = \sum_{\gamma\in B} a_\gamma.\gamma(t)$, $(a_\gamma)_{\gamma\in B}$ complexes, classiquement en prenant $g(t) = \frac{f(t)+\overline{f(-t)}}{2} = \sum_{\gamma\in B} b_\gamma.\gamma(t)$ et $h(t) = \frac{f(t) - \overline{f(-t)}}{2i} = \sum_{\gamma\in B} c_\gamma\gamma(t)$ où b_γ et c_γ sont alors des réels.

On en déduit par le théorème (7.5) que B est Sidon (évident car il est fini) et que de plus $S(B) \leqslant \frac{C_4}{\delta_4^4}$, C_4 constante.

Mais il faut remarquer que pour conclure, on a besoin d'une information sur $S(A)$ pour toute partie A finie $\subset \Lambda$. Il suffit pour revenir à A de repasser par le théorème (7.5). En effet on déduit de ce qui précède que $\exists\ \delta_5 > 0$ et $\exists\ C$ quasiindépendant, $C \subset B$ et $|C| \geq \delta_5|B|$ avec en outre $\delta_5 \geq \frac{K_1}{S(B)^2} \geq \frac{K_1}{C_4^2}\delta_4^8$. En revenant à Λ, pour toute partie finie A de Λ, on vient de voir qu'$\exists\ C \subset A$ quasiindépendant avec $|C| \geq \delta_5|B| \geq \delta_5.\delta_2|A|$. Donc par le théorème (7.5), Λ est Sidon et on a

$$S(\Lambda) \leqslant K_2^2.(\delta_5.\delta_2)^{-2} \leqslant K_2^2.(\frac{K_1}{C_4^2}.\delta_4^8.\delta_2)^{-2}.$$

Or δ_4 est en δ^7 et δ_2 est en $\delta^{7/2}$ donc :

finalement $\exists\, C > 0$ t. q. : $S(\Lambda) \leqslant \dfrac{C}{\delta^{119}}$. CQFD pour le théorème (7.1).

VIII. **Démonstration du théorème D** (suite).

Il ne reste donc plus qu'à montrer que le théorème (7.1) $\Longrightarrow$ théorème D.

Preuve. On suppose donc que $N(A,\frac{1}{2}) \geq 2^{\delta|A|}$ pour toute partie finie A de Λ. Il faut donc pouvoir passer de $\bar{N}(A,\alpha)$ à $N(A,\alpha')$ pour se ramener au théorème (7.1), ce qui revient à savoir comparer les distances d_A et $\bar{d}_A$.

On a d'abord trivialement $d_A \leqslant \bar{d}_A$.

D'autre part soit $f \in C_A(T)$, alors $f = \sum\limits_{\gamma\in A} \hat{f}(\gamma).\gamma$ car A est fini.

Prenons $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Donc pour tous $x,y \in T$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{\gamma\in A} |\hat{f}(\gamma)|.\sup_{\gamma\in A}|\gamma(x) - \gamma(y)|$$

$$\leqslant S(A).d_A(x,y).$$

D'où
$$\bar{d}_A(x,y) \leqslant S(A).d_A(x,y).$$

(Ceci montre que si Λ est Sidon, d_Λ et $\bar{d}_\Lambda$ sont équivalentes).
De plus cette inégalité entraîne immédiatement que :

$$\bar{N}(A,\frac{1}{2}) \leqslant N(A,\frac{1}{2S(A)}).$$

On en déduit que $N(A, \dfrac{1}{2S(A)}) \geq 2^{\delta.|A|}$.
Plus généralement, si $B \subset A$, on a $S(B) \leqslant S(A)$ et
$N(B, \dfrac{1}{2S(A)}) \geq N(B, \dfrac{1}{2S(B)}) \geq 2^{\delta.|B|}$. On a alors besoin d'un lemme :

LEMME (8.1) (Bourgain [2]). Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\log_2 N(A,\frac{1}{20}) \geq \frac{\log_2 N(A,\epsilon)}{\log_2 (\frac{2}{\epsilon})}.$$

<u>Preuve</u>. Comme $d_A \geq 2$, pour tout $\alpha > 1$, $N(A,\alpha) \in \{1,2\}$.

Posons $N = [\log_2 (\frac{2}{\epsilon})]$, alors $N(A,\epsilon) \leqslant \prod_{j=1}^{N} \frac{N(A,2^{j-1}\epsilon)}{N(A,2^{j}\epsilon)}$ $(N(A,2^N\epsilon) \in \{1,2\}$ car $2^N\epsilon > 1)$. Donc

$$\log_2 N(A,\epsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \log_2 \frac{N(A,2^{j-1}\epsilon)}{N(A,2^{j}\epsilon)}.$$

Soit j_o tel que si $\ell = 2^{j_o - 1}\epsilon$, $\log_2 \frac{N(A,\ell)}{N(A,2\ell)}$ soit maximal dans cette somme, alors

$$\log_2 N(A,\epsilon) \leqslant N.\log_2 \frac{N(A,\ell)}{N(A,2\ell)} \text{ et } \ell = 2^{j-1}\epsilon \text{ donne } \epsilon \leqslant \ell \leqslant 1.$$

Considérons alors E un ensemble maximal de points de T : $(x_i)_{i \leqslant m}$ distincts et distants deux à deux d'au moins ℓ pour la distance d_A.

On a déjà vu qu'alors $T \subset \bigcup_{i \leqslant m} B(x_i,\ell)$ et donc $\log_2 N(A,\epsilon) \leqslant$ $N \log_2 \frac{N(A,\ell)}{N(A,2\ell)} \leqslant N.\log_2 \frac{m}{N(A,2\ell)}$.
Prenons E_2 un ensemble de cardinal $N(A,2\ell) = \{y_j\}_{j \leqslant N(A,2\ell)}$ tel que $T \subset \bigcup_j B(y_j,2\ell)$. $\forall\, y \in E_2$, appelons $e_y = \{x \in E \mid d_A(x,y) \leqslant 2\ell\}$.

On a alors $E = \bigcup_{y \in E_2} e_y$. D'où $\sum_{y \in E_2} |e_y| \geq m$.

Prenons $y_o \in E_2$ tel que $|e_{y_o}|$ soit maximal, alors $m \leqslant |E_2|\,|e_{y_o}| =$

$N(A,2\ell).|e_{y_o}|$. D'où $\log_2|e_{y_o}| \geq \log_2 \dfrac{m}{N(A,2\ell)} \geq \dfrac{\log_2 N(A,\epsilon)}{N} \geq \dfrac{\log_2 N(A,\epsilon)}{\log_2(\frac{2}{\epsilon})}$.

En outre $\forall\, x,y \in e_{y_o} \subset E$, $\ell \leqslant d_A(x,y) \leqslant 4\ell$.

On va maintenant dilater e_{y_o} pour obtenir un réseau de pas $\frac{1}{20}$.
Pour cela si $\gamma \in \Gamma$, $x,y \in T$, on a l'inégalité suivante :

(8.2) $\quad |\gamma(kx) - \gamma(ky)| \geq \frac{2}{\pi} k |\gamma(x) - \gamma(y)|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $|\gamma . \frac{k(x-y)}{2}| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(En effet, $\Delta = \dfrac{|\gamma(kx) - \gamma(ky)|}{|\gamma(x) - \gamma(y)|} = \left|\dfrac{e^{ik\gamma x} - e^{ik\gamma y}}{e^{i\gamma x} - e^{i\gamma y}}\right|$ si on écrit $\gamma(t) = e^{i\gamma t}$.

$$= \left|\frac{\sin(k\gamma\frac{(x-y)}{2})}{\sin(\gamma\frac{(x-y)}{2})}\right|.$$ En échangeant au besoin x et y, on peut supposer $\gamma(x-y) > 0$, vue l'hypothèse $0 < \gamma . \frac{k(x-y)}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc

$$\Delta = \frac{\sin(k\gamma\frac{x-y}{2})}{\sin(\gamma\,\frac{x-y}{2})} \geq \frac{\frac{2}{\pi}(k\frac{\gamma(x-y)}{2})}{\gamma(\frac{x-y}{2})} = \frac{2}{\pi}\, k).$$

Or on sait que $\ell \leqslant d_A(x,y) \leqslant 4\ell$, donc $\exists\, \gamma \in A$ t. q. $\ell \leqslant |\gamma(x) - \gamma(y)| \leqslant 4\ell$ $(x,y \in e_{y_o})$. Prenons $k = [\frac{1}{10\,\ell}]$ alors $|\gamma(x) - \gamma(y)| = 2 \sin \frac{\gamma(x-y)}{2}$ (en échangeant au besoin x et y) et

$4\ell \geq 2 \sin \frac{\gamma(x-y)}{2} \geq 2.\frac{2}{\pi}\,\frac{\gamma(x-y)}{2}$ donc $\frac{\gamma(x-y)}{2} \leqslant \pi\ell$.

Soit $k\frac{\gamma(x-y)}{2} \leqslant \pi k\ell \leqslant \frac{\pi}{10} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc (8.2) s'applique et

$|\gamma(kx) - \gamma(ky)| \geq \frac{2}{\pi}.\frac{1}{10\ell}|\gamma(x) - \gamma(y)| \geq \frac{2}{10\pi}\pi > \frac{1}{10}$. On en déduit si $P = \{kx\ ,\ x\in e_{y_0}\}$ que $|P| = |e_{y_0}|$ et $\forall\ kx\ ,\ ky \in P,\ d_A(kx,ky) > \frac{1}{10}$.

Considérons alors F un ensemble de points (z_i) de cardinal $N(A,\frac{1}{20})$ tel que $T \subset \bigcup_i B(z_i\ ,\ \frac{1}{20})$. $\forall\ kx \in P,\ \exists\ z_i$ t. q. $d_A(kx,z_i) \leqslant \frac{1}{20}$. Comme les éléments de P sont distants d'au moins $\frac{1}{10}$, l'application $kx \in P \longrightarrow z_i$ est injective et donc $N(A,\frac{1}{20}) \geq |P|$ soit

$$\log_2 N(A,\frac{1}{20}) \geq \frac{\log_2 N(A,\epsilon)}{\log_2(\frac{2}{\epsilon})}.$$

On a donc montré le lemme (8.1).

Prenons alors $\epsilon = \frac{1}{2S(A)}$, $\log_2 N(B,\frac{1}{20}) \geq \frac{\log_2 N(B,\frac{1}{2S(A)})}{\log_2(4S(A))} \geq \frac{\delta}{\log_2(4S(A))}.|B|$.

Posons $\delta' = \frac{\delta}{\log_2(4S(A))}$

<u>1er cas</u> : si $\delta' > \frac{1}{20}$, alors $\log_2(4S(A)) \leqslant 20\delta \leqslant \frac{M}{\delta^{119}}$ où $M = 20\delta^{120}$ et une constante.

<u>2ème cas</u> : si $\delta' \leqslant \frac{1}{20}$, on a $\log_2 N(B,\delta') \geq \log_2 N(B,\frac{1}{20}) \geq \delta'.|B|$.
Ceci est vrai $\forall$ B fini $\subset$ A, par le théorème (7.1), on en déduit donc que

$$S(A) \leqslant \psi(\frac{1}{\delta'}) = \frac{C}{(\delta')^{119}}.$$

Ou encore $S(A) \leqslant C.\frac{(\log_2(4S(A)))}{\delta^{119}}$.

On en déduit nécessairement (par comparaison de croissance) que $S(A)$

reste bornée par $K < +\infty$. Soit donc $S(A) \leqslant C.\dfrac{\log_2(4K)^{119}}{\delta^{119}} \leqslant \dfrac{M'}{\delta^{119}}$ pour M' constante. Comme la majoration est uniforme en A et la même dans les deux cas, on en déduit bien le théorème E, à savoir que Λ est Sidon et $S(\Lambda) \leqslant \varphi(\frac{1}{\delta})$ où $\varphi(x) = C'x^{119}$ (car $S(\Lambda) \leqslant \sup_{A \text{ finie} \subset \Lambda} S(A)$).

Remarque : à la fin de cette démonstration, on a été obligé de passer par $S(A)$ car on ne savait pas a priori que Λ était de Sidon, donc que $S(\Lambda)$ existait.

IX. Appendice

THEOREME (6.2) [9]. Soit E un espace normé de dimension finie, alors :

$$K(E) \leqslant K \log(1 + d_E).$$

Preuve : on a d'abord besoin d'un lemme.

LEMME (9.1). Soit $P(t) = \sum_{j=0}^{m} x_j t^j$ où $x_j \in E$. On suppose que si $|t| \leqslant \frac{1}{2}$, $\|P(t)\| \leqslant A$. Alors $\|x_1\| \leqslant 2A.m$.

Preuve : le cas scalaire est bien connu. En effet on a l'inégalité de Bernstein : soit Q polynôme trigonométrique de degré m, alors si pour tout t $|Q(t)| \leqslant A$, on a $|Q'(t)| \leqslant m.A$ pour tout t (Voir [19] par exemple).

Supposons donc que $R(t) = \sum_{j=0}^{m} c_j t^j$ où $c_j \in \mathbb{R}$ alors si $Q(t) = R(\cos t)$,
on a $\sup_t |Q(t)| \leqslant \sup_{|t|\leqslant 1} |R(t)|$ et si ce sup $\leqslant A$, alors
$Q'(t) = -\sin t.R'(\cos t)$ donne $|c_1| = |R'(0)| = |-Q'(\frac{\pi}{2})| \leqslant mA$.

Si maintenant on ne connaît que $\sup_{|t|\leqslant\frac{1}{2}} |R(t)| \leqslant A$, en considérant $R(\frac{t}{2})$
on obtient par ce qui précède : $|c_1| \leqslant 2mA$.
En prenant maintenant $P(t)$, via le théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x_1) = \|x_1\|$. En considérant le polynôme
$R(t) = \sum_{j=0}^{m} \varphi(x_j)t^j$ et en lui appliquant ce qui précède, on montre que

$$\|x_1\| = |\varphi(x_1)| \leqslant 2mA.$$

Considérons alors n entier fixé, $(x_A)_{A\subset\{1,\dots,n\}} \in E$ et
$f(\omega) = \sum_A w_A(\omega).x_A$. Supposons que $\|f\|_2 = \|f\|_{L^2(B)} = 1$.

En convolant f avec le produit de Riesz $R_\omega(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + t\varepsilon_j(\omega))$, on aboutit clairement à :

$$\|\sum_A t^{|A|} w_A(\omega)x_A\|_2 \leqslant 1 \qquad (|t| \leqslant 1).$$

Ensuite en passant par le cas hilbertien, on obtient :

pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ $\qquad \|\sum_{|A|=k} w_A x_A\|_2 \leqslant d_E$.

(En effet soit $\ell^2 \xrightarrow{u} E \xrightarrow{u^{-1}} \ell^2$, on a alors :
$(h_A) \rightarrow (x_A) \rightarrow (h_A)$

$$\|\sum_{|A|=k} w_A x_A\| = \|\sum_{|A|=k} w_A u(h_A)\|_2 \leqslant \|u\|.\|\sum_{|A|=k} w_A h_A\|_2 = \|u\|.(\sum_{|A|=k} \|h_A\|^2)^{1/2}$$

$$\leqslant \|u\|.(\sum_A \|h_A\|^2)^{1/2} = \|u\|.\|\sum_A w_A h_A\|_2 = \|u\|.\|\sum_A w_A u^{-1}(x_A)\|_2$$

$$\leqslant \|u\|.\|u^{-1}\|.\|\sum_A w_A x_A\|_2 .$$

On peut alors prendre la borne inférieure suivant u qui est d_E. Ceci permet d'avoir les estimations suivantes : soit $1 \leqslant m \leqslant n$ et $|t| \leqslant \frac{1}{2}$ alors

$$\|\sum_{|A|>m} t^{|A|} w_A x_A\|_2 \leqslant \sum_{k>m+1} |t|^k \|\sum_{|A|=k} w_A x_A\|_2 \leqslant d_E . \frac{1}{2^m}$$

et $$\|\sum_{|A|\leqslant m} t^{|A|} x_A w_A\|_2 \leqslant \sum_A t^{|A|} w_A x_A\|_2 + \sum_{|A|>m} t^{|A|} x_A w_A\|_2$$

$$\leqslant 1 + d_E 2^{-m}.$$

Par le lemme (9.1), on en déduit que $\|\sum_{|A|=1} w_A x_A\|_2 \leqslant 2m(1 + d_E 2^{-m})$.

Soit encore :

$$\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\|_2 \leqslant 2m(1 + d_E 2^{-m}).$$

En prenant 2^m de l'ordre de d_E on aboutit à $\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\|_2 \leqslant K.\log(1 + d_E)$. Par homogénéité sur $\|\sum_A w_A x_A\|_2$, on en déduit que :

$$K(E) \leqslant K \log(1 + d_E).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURGAIN, J. Sidon sets and Riesz products. Ann. Inst. Fourier 35 (1985), 137-148.

[2] BOURGAIN, J. Sur les ensembles d'interpolation pour les mesures discrètes. C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983), 149-151.

[3] BOURGAIN, J. et MILMAN, V. Dichotomie du cotype pour les espaces invariants. C. R. Acad. Sc. Paris 300 (1985), 263-266.

[4] CARL, B. Entropy numbers of diagonal operators with an application to Eigenvalue problems. J. Approx. Theory 32 (1981), 135-150.

[5] MARCUS-PISIER Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Ann. Math. Studies 101 (1981), Princeton Univ. Press.

[6] PISIER, G. Conditions d'entropie et caractérisation arithmétique des ensembles de Sidon. Torino/Milano, Modern Topics in Harmonic Analysis, Juin 1982, Institut di Alta Math.

[7] __________ Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1980-81, Ec. Polytechnique, Palaiseau, Exposé n° V.

[8] __________ Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977-1978, Ec. Polytechnique, Palaiseau.

[9] __________ Séminaire d'analyse fonctionnelle 1980-81. Ec. Polytechnique, Palaiseau, exposé n° 5.

[10] __________ Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert. Ann. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), 69-90.

[11] RUDIN, W. Trigonometric series with gaps. J. Math. Mech. 9 (1960), 203-227.

[12] SCHECHTMAN, G. Random embeddings of euclidean spaces in sequence spaces. Isräel J. Math. 40 (1981), 187-192.

[13] SEMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Ecole Polytechnique, Palaiseau. 1980-81, exposé n° 2.

[14] SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-74, Ec. Polytechnique, Paris, exposé n° 3.

[15] STOUT Almost sure convergence.

[16] SZAREK On the best constant in the Khinchine Inequality. Studia Math. 58 (1976), 197-208.

[17] HAAGERUP Les meilleures constantes de l'inégalité de Khintchine. C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 259-262.

[18] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Cambridge Studies in Advanced Math. 5.

[19] LORENTZ Approximation of functions.

Exposé n° 2 Année 1985-86
Luis Rodriguez-Piazza

<u>ANALYTICITE DES ALGEBRES DE RESTRICTION ET SOLUTION DU PROBLEME DE LA DICHOTOMIE DANS LE CADRE DES ALGEBRES TENSORIELLES</u>

(d'après J. Bourgain)

<u>Résumé</u>.- Dans les deux premiers chapitres on rappelle des outils d'analyse harmonique concernant l'analyticité des algèbres de restriction des algèbres de groupe. Dans les deux derniers, on détaille le résultat suivant de J. Bourgain : soit $E \subset X \times Y$ et $V_o(E)$ l'algèbre des restrictions à E des éléments de $V_o(X,Y) = c_o(X) \hat{\otimes} c_o(Y)$, alors ou bien $V_o(E) = c_o(E)$, ou bien $V_{\wedge}(E)$ est analytique.

<u>Introduction</u>.

Ce travail est une version détaillée de l'article de Jean Bourgain "On the dichotomy problem for tensor algebras" ([B]). Dans cet article on résout par l'affirmative le problème de la dichotomie pour les algèbres tensorielles $V_o(X,Y) = c_o(X) \hat{\otimes} c_o(Y)$: si E est une partie de $X \times Y$, et $V_o(E)$ est l'algèbre des restrictions à E des éléments de $V_o(X,Y)$, on a la dichotomie suivante : ou bien $V_o(E) = c_o(E)$, ou bien $V_o(E)$ est analytique. On rappelle qu'une algèbre de fonctions A est dite analytique si toute fonction F, définie sur $[-1,1]$ et qui opère sur A ($F \circ f$ appartient à A pour toute f de A), est analytique en 0.

A la fin des années soixante, Varopoulos introduit les algèbres tensorielles en analyse harmonique. Dans ce cadre, on donne, dans le chapitre I, un résultat (Corollaire 1.3) qui permet de voir les algèbres $V_o(X,Y)$ comme certaines algèbres de restriction des algèbres de Fourier. Le résultat de Bourgain est donc une réponse dans un cadre particulier à la conjecture de la dichotomie :

Soient G un groupe abélien localement compact, Γ son dual, et E un sous-ensemble fermé de Γ. Soit $A(\Gamma)$ l'lagèbre de Fourier de Γ, c'est-à-dire, l'algèbre des transformées de Fourier des éléments de

$L^1(G)$, et soit $A(E)$ l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A(\Gamma)$, munie de la norme quotient. La conjecture de la dichotomie est alors la suivante : ou bien $A(E)$ est une algèbre analytique, ou bien E est un ensemble de Helson $(A(E) = C_o(E))$. Dans le cas où G est compact, Γ est discret et un ensemble de Helson est appelé un ensemble de Sidon.

Il est facile de voir que les fonctions analytiques opèrent sur $A(\Gamma)$ (théorème de Wiener-Levy). Les réciproques de ce théorème, établies d'abord pour le tore, puis dans le cas général, sont dues à Helson, Kahane, Katznelson et Rudin, à la fin des années cinquante : si Γ est infini, $A(\Gamma)$ est analytique. Si E est un ensemble de Helson, les fonctions continues opèrent sur $A(E)$, et par conséquent $A(E)$ n'est pas analytique. Lorsque E n'est pas un ensemble de Helson, il n'y a pour le moment que des réponses partielles au problème de la dichotomie. Le travail de Bourgain exposé ici constitue une réponse complète pour une classe particulière d'algèbres de restriction.

La preuve de l'analyticité de $A(\Gamma)$ repose fortement sur la croissance exponentielle de la fonction suivante, définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\sigma_\Gamma(t) = \sup\{\|\exp(it\,\Phi)\| : \Phi \in B(\Gamma),\ \|\Phi\| \leq 1,\ \Phi(\Gamma) \subset \mathbb{R}\}$$

où $B(\Gamma)$ est l'algèbre des transformées de Fourier des mesures complexes régulières définies sur G. Dans le chapitre II, on démontre, dans le cas où G est compact, que ce type de croissance, pour la fonction analogue σ_E, assure aussi l'analyticité de l'algèbre de restriction $A(E)$ (Théorème 2.3).

Dans le chapitre III on donne une condition suffisante, due à Bourgain, pour l'analyticité de $A(E)$ (Proposition 3.1). On fait aussi le lien entre cette condition et le fait que l'espace $C_E(G)$ contient des ℓ^∞_n uniformément. Dans [BM], Bourgain et Milman ont démontré que si E n'est pas Sidon, $C_E(G)$ contient des ℓ^∞_n uniformément (dichotomie du cotype) ; mais, dans leur démonstration, ces ℓ^∞_n ne sont pas construits explicitement, ils apparaissent à travers des arguments banachiques. Un des intérêts de la méthode utilisée dans le travail exposé ici est celui d'exhiber des ℓ^∞_n engendrées par n translatées d'une même fonction de $C_E(G)$. On conclut ce chapitre par une application aux ensembles qui contiennent des progressions arithmétiques arbitrairement longues (Proposition 3.7).

La proposition 3.1 et une caractérisation combinatoire précise, due à Varopoulos, des ensembles de V_o-interpolation permettent à Bourgain de conclure la preuve du résultat annoncé au début de cette introduction.

Cette preuve est détaillée dans le dernier chapitre (Théorème 4.1).

Chapitre I

ALGEBRES TENSORIELLES ET ALGEBRES DE FOURIER

Dans ce chapitre on rappellera les définitions les plus importantes, on fixera les notations, et on établira le lien entre les algèbres tensorielles et les algèbres de Fourier.

Si X est un ensemble on notera $|X|$ son cardinal. Si $E \subset X$, χ_E sera la fonction indicatrice de E. On notera $\ell^\infty(X)$ l'algèbre de Banach de toutes les fonctions définies sur X, à valeurs complexes et bornées, munie de la norme $\| \ \|_\infty$ $(\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\})$, et de l'addition et du produit ponctuels.

Une <u>algèbre de fonctions sur X</u> sera une sous-algèbre $S(X)$ de $\ell^\infty(X)$ munie d'une norme $\| \ \|_{S(X)}$ d'algèbre de Banach. Puisque pour tout $x \in X$ l'application $f \to f(x)$ est un caractère de l'algèbre $S(X)$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{S(X)}$, pour $f \in S(X)$ (voir [L], p. 69). Un exemple d'algèbre de fonctions est $c_o(X)$, le sous-espace fermé de $\ell^\infty(X)$ des fonctions nulles à l'infini :

$$f \in c_o(X) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad |\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}| < +\infty.$$

Si E est un sous-ensemble de X et $S(X)$ est une algèbre de fonctions, on notera $S(E)$ l'ensemble des restrictions à E des éléments de $S(X)$:

$$S(E) = \{f|_E : f \in S(X)\}.$$

$S(E)$ est une algèbre de fonctions sur E si elle est munie de la norme quotient :

$$\|g\|_{S(E)} = \inf\{\|f\|_{S(X)} : f|_E = g\}, \qquad g \in S(E).$$

On appelera $S(E)$ l'algèbre de restriction de $S(X)$ à E. $S(E)$ est isométrique canoniquement à l'algèbre quotient de $S(X)$ par l'idéal $I(E)$:

$$I(E) = \{f \in S(X) : f(x) = 0, \ \forall x \in E\}.$$

Si $F \subset E$, l'algèbre de restriction de $S(E)$ à F est $S(F)$.

Soient $S(X)$ et $T(Y)$ deux algèbres de fonctions ; si $f \in S(X)$ et

$g \in T(Y)$, on note $f \otimes g$ la fonction définie sur $X \times Y$ par $f \otimes g(x,y) = f(x)g(y)$. Le produit tensoriel $S(X) \otimes T(Y)$ est le sous-espace vectoriel de $\ell^{\infty}(X \times Y)$ engendré par les fonctions $f \otimes g$, $f \in S(X)$, $g \in T(Y)$. On définit la norme suivante sur $S(X) \otimes T(Y)$:

$$(1)\quad \|h\|_{S\otimes T} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_S \, \|g_n\|_T \ : \ \{f_n\} \subset S(X),\ \{g_n\} \subset T(Y),\right.$$

$$\left. h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n(x,y) \ \ \forall (x,y) \in X \times Y\right\}$$

$h \in S(X) \otimes T(Y)$.

Le complété de $S(X) \otimes T(Y)$ pour cette norme s'identifie à l'algèbre de fonctions sur $X \times Y$ formée des fonctions h qu'on peut écrire :

$$h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n(x,y) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

où $\{f_n\}$ est une suite dans $S(X)$, et $\{g_n\}$ est une suite dans $T(Y)$ vérifiant $\sum \|f_n\|_S \|g_n\|_T < +\infty$. La norme des éléments du complété est définie par la même formule (1) ci-dessus.

Si $S(X)$ ou $T(Y)$ a la propriété d'approximation, ce complété va être isométrique au produit tensoriel projectif de $S(X)$ et $T(Y)$; et on le notera $S(X) \hat{\otimes} T(Y)$ (voir [DU] pour la définition du produit tensoriel projectif d'espaces de Banach). Les algèbres qu'on va considérer, $c_o(X)$, $\ell^{\infty}(X)$ et $A(E)$ (définie ci-dessous), ont la propriété d'approximation. Dans le cas de $A(E)$, c'est une conséquence de l'existence d'identités approchées à spectre fini. Dans ce contexte on notera $V(X,Y) = \ell^{\infty}(X) \hat{\otimes} \ell^{\infty}(Y)$, et $V_o(X,Y) = c_o(X) \hat{\otimes} c_o(Y)$. Si E est un sous-ensemble de $X \times Y$, $V(E)$ et $V_o(E)$ seront les algèbres de restriction correspondantes.

Rappelons brièvement quelques notations et propriétés d'analyse harmonique :

G : groupe abélien compact (g.a.c.)

$C(G)$: espace de Banach des fonctions continues de G en $\mathbb{C}$ muni de la norme $\| \ \|_{\infty}$.

M(G) : espace de Banach des mesures complexes régulières sur G muni de la norme variation totale des mesures. Il s'identifie au dual de C(G) par la dualité :

$$\langle \mu, f \rangle = \int_G f(-t)\; d\mu(t) \qquad f\in C(G),\ \mu\in M(G).$$

f_z : ($f\in C(G)$, $z\in G$) fonction translatée de f par z, définie pour $t\in G$ par $f_z(t) = f(t-z)$.

m_G : mesure de Haar normalisée de G

$L^1(G)$: espace de Banach $L^1(m_G)$.$L^1(G)$ et M(G) sont des algèbres de Banach pour la convolution.

$\mathbb{T}$: le tore, groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ou groupe additif $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$.

Γ ou $\hat{G}$: groupe dual de G, le groupe des homomorphismes continus de G sur $\mathbb{T}$.

Pol(G) : algèbre des polynômes trigonométriques, les fonctions qu'on peut écrire comme $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \gamma$, où les a_γ sont des nombres complexes, nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

$\hat{\mu}, \hat{f}$: ($\mu\in M(G)$, $f\in L^1(G)$) transformées de Fourier de μ et f, fonctions définies sur Γ par :

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-t)\; d\mu(t) \qquad \hat{f}(\gamma) = \int_G f(t)\; \gamma(-t)\; d\mu_G(t).$$

A(F) , B(F) : les algèbres suivantes de fonctions sur Γ :

$A(F) = \{\hat{f} : f\in L^1(G)\}$, avec la norme $\|\hat{f}\|_{A(F)} = \|f\|_{L^1(G)}$

$B(\Gamma) = \{\hat{\mu} : \mu\in M(G)\}$, avec la norme $\|\hat{\mu}\|_{B(\Gamma)} = \|\mu\|_{M(G)}$.

On a $B(\Gamma) \subset \ell^\infty(\Gamma)$ et $A(\Gamma) \subset c_o(\Gamma)$.

A(E) , B(E) : ($E\subset\Gamma$) algèbre de restriction à E de A(F) et B(F).

$C_E(G)$, $Pol_E(G)$: ($E \subset \Gamma$) espaces des éléments de C(G) et Pol(G) à spectre dans E ; c'est-à-dire, dont les transformées de Fourier s'annulent hors de E. $C_E(G)$ est un sous-espace fermé de C(G) invariant par translation (si $f \in C_E(G)$ et $z \in G$, alors $f_z \in C_E(G)$).

Le dual de $C_E(G)$ s'identifie isométriquement à $B(E)$.

D : groupe à deux éléments ; $D = \{-1,1\}$ muni de la multiplication

D^n : $(n\in\mathbb{N})$ groupe des n-uples d'éléments de D

D^∞ : groupe de Cantor, le groupe produit d'une infinité dénombrable de copies de D, avec la topologie produit.

ϵ_i : $(i \in \mathbb{N})$ i-ième projection de D^∞ ; c'est la fonction $\epsilon_i : D^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$\epsilon_i(x) = x_i \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in D^\infty .$$

$\hat{D}^\infty$: groupe des fonctions de Walsh, le groupe dual de D^∞. Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ on pose $w_A = \prod_{i\in A} \epsilon_i$ $(w_\emptyset \equiv 1)$; alors

$$\hat{D}^\infty = \{w_A : A \subset \mathbb{N},\ |A| < +\infty\}.$$

I : suite de Rademacher, le sous-ensemble de $\hat{D}^\infty$ $\{\epsilon_i = i\in\mathbb{N}\}$.

On peut se poser la question suivante : si $S(X)$ est une algèbre de fonctions et $E \subset X$ quand a-t-on l'égalité algébrique $S(E) = \ell^\infty(E)$ ou $S(E) = c_o(E)$? C'est le problème de l'interpolation. Si on a une de ces égalités algébriques, le théorème du graphe fermé entraîne l'existence d'une constante $k(E)$ telle que pour toute $f \in S(E)$:

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{S(E)} \leqslant k(E)\|f\|_\infty.$$

Ainsi, on dira qu'un ensemble $E \subset X \times Y$ est un <u>ensemble de V_o-interpolation</u> si $V_0(E) = c_o(E)$. Si G est un g.a.c., Γ son dual et $E \subset \Gamma$, on dira que E est un <u>ensemble de Sidon</u> si $A(E) = c_o(E)$. Pour les ensembles de Sidon on a la proposition suivante (voir [R], th. 5.7.3).

PROPOSITION 1.1.

Soit $E \subset \Gamma = \hat{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $A(E) = c_o(E)$ (E est de Sidon)

(2) $B(E) = \ell^\infty(E)$

(3) Si $f\in C_E(G)$, alors $\hat{f} \in \ell^1(E)$

(4) Il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in Pol_E(G)$:

$$\|\hat{P}\|_1 \leqslant C\|P\|_\infty.$$

Appliquons cette proposition pour démontrer que le sous-ensemble $I = \{\epsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de Sidon dans $\hat{D}^{\infty}$. Démontrons qu'on vérifie (4) : soit $P \in Pol_I(D^{\infty})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des scalaires (α_i) tels que :

$$p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \epsilon_i .$$

On peut choisir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in D^{\infty}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) \in D^{\infty}$, de façon que :

$$Re(\alpha_i x_i) = |Re(\alpha_i)| \quad , \quad Im(\alpha_i y_i) = |Im(\alpha_i)| \quad i = 1, \ldots, n.$$

Alors on a :

$$\|\hat{P}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |Re(\alpha_i)| + |Im(\alpha_i)| =$$

$$= Re(P(x)) + Im(P(y)) \leqslant |P(x)| + |P(y)|$$

$$\leqslant 2\|P\|_{\infty}.$$

Ce qui démontre que I est un ensemble de Sidon dans $\hat{D}^{\infty}$.

Pour conclure ce chapitre on va établir un rapport entre des algèbres de Fourier et des algèbres tensorielles. Soient G_1 et G_2 deux g.a.c., Γ_1 et Γ_2 leurs duaux respectifs. $G = G_1 \times G_2$ est un g.a.c., et son dual est le groupe $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

PROPOSITION 1.2.
Si $E_1 \subset \Gamma_1$ et $E_2 \subset \Gamma_2$, on a :

$$A(E_1 \times E_2) = A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$$

et cette égalité algèbrique est aussi une isométrie.

Avant de démontrer cette proposition, on va en déduire une conséquence importante. Si on suppose que chaque E_i est un ensemble de Sidon dans Γ_i, $i = 1, 2$, on a $c_o(E_i) = A(E_i)$ et les normes sont équivalentes ; donc $V_o(E_1, E_2)$ est égale à $A(E_1 \times E_2)$ et les normes sont équivalentes. Donc, si $E \subset E_1 \times E_2$, il est clair que les algèbres de restriction $V_o(E)$ et $A(E)$ coïncident, et en ce qui concerne l'interpolation on a :

COROLLAIRE 1.3.
Soient $E_1 \subset \Gamma_1$ et $E_2 \subset \Gamma_2$ deux ensembles de Sidon, et soit $E \subset E_1 \times E_2$. Alors $A(E) = V_o(E)$, et E est un ensemble de Sidon si et seulement s'il est un ensemble de V_o-interpolation.

Preuve de la proposition 1.2.

On va la faire en deux parties : d'abord dans le cas $E_i = \Gamma_i$, ensuite dans le cas général.

1) $A(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = A(\Gamma_1) \hat{\otimes} A(\Gamma_2)$:

Pour abréger, on écrira $\|f\|_A = \|f\|_{A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)}$, et

$\|f\|_{\otimes} = \|f\|_{A(\Gamma_1)\hat{\otimes}A(\Gamma_2)}$. Si f appartient à $A(\Gamma_1) \hat{\otimes} A(\Gamma_2)$, alors il existe deux suites $\{f_n\} \subset L^1(G_1)$, et $\{g_n\} \subset L^1(G_2)$, telles que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 \|g_n\|_1 < +\infty \qquad \text{et}$$

$$f(\gamma_1,\gamma_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n \otimes \hat{g}_n(\gamma_1,\gamma_2) \qquad (\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pose $h_n(x,y) = f_n \otimes g_n(x,y)$, on a évidemment :

$$h_n \in L^1(G) \qquad \text{et} \qquad \|h_n\|_{L^1(G)} = \|f_n\|_{L^1(G_1)} \cdot \|g_n\|_{L^1(G_2)}.$$

Donc $\sum \|h_n\|_1 < +\infty$, soit $h = \sum_{n+1}^{\infty} h_n \in L^1(G)$, si $(\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma$, on a :

$$\hat{h}(\gamma_1,\gamma_2) = \hat{f}_n(\gamma_1)\ \hat{g}_n(\gamma_2)$$

donc $\hat{h} = \sum \hat{h}_n = f$, et $f \in A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$; par ailleurs :

$$\|f\|_A = \|h\|_{L^1(G)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_n\|_{A(\Gamma_1)} \|\hat{g}_n\|_{A(\Gamma_2)}.$$

Si on prend l'inf pour toutes les représentations de f, on déduira que $\|f\|_A \leqslant \|f\|_\otimes$.

Pour l'autre inclusion et l'inégalité correspondante, soit H le sous-espace vectoriel de $L^1(G)$ engendré par les classes des fonctions $\chi_{A\times B}$, où A et B sont des boréliens de G_1 et G_2 respectivement ; cet espace est dense dans $L^1(G)$, donc l'espace $\hat{H} = \{\hat{h} : h \in H\}$ est dense dans $A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Si $h \in H$ on peut d'écrire :

$$h = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \chi_{A_i \times B_j}$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des scalaires et, $\{A_i\}$ et $\{B_j\}$ sont des partitions finies de G_1 et G_2 respectivement. Mais $\chi_{A_i \times B_j} = \chi_{A_i} \otimes \chi_{B_j}$ et donc :

$$\hat{h} = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \hat{\chi}_{A_i} \otimes \hat{\chi}_{B_j} \in A(\Gamma_1) \otimes A(\Gamma_2).$$

De plus :

$$\|\hat{h}\|_\otimes \leqslant \sum_{i,j} |\alpha_{i,j}| \|\hat{\chi}_{A_i}\|_{A(\Gamma_1)} \|\hat{\chi}_{B_j}\|_{A(\Gamma_2)} =$$

$$= \sum_{i,j} |\alpha_{i,j}| \|\chi_{A_i \times B_j}\|_{L^1(G)} = \|h\|_{L^1(G)} = \|\hat{h}\|_A.$$

Cette dernière égalité a lieu puisque $\{A_i \times B_j\}_{i,j}$ est une partition finie de $G_1 \times G_2$. Par la densité de $\hat{H}$ on conclut que $A(\Gamma_1) \hat{\otimes} A(\Gamma_2) = A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ et $\|f\|_A = \|f\|_\otimes$, pour $f \in A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.

2) $A(E_1 \times E_2) = A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$:

Soient $f \in A(E_1 \times E_2)$ et $\epsilon > 0$; il existe $g \in A(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ telle que

$g|_E = f$ et $\|f\| \leqslant \|g\|_A \leqslant \|f\| + \epsilon$. D'après 1) g peut s'écrire $\sum f_n \otimes g_n$, avec :

$$\{f_n\} \subset A(\Gamma_1) \quad , \quad \{g_n\} \subset (\Gamma_2) \quad , \quad \sum \|f_n\| \|g_n\| < \|g\|_A + \epsilon.$$

Alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n|_{E_1}\|_{A(E_1)} \ \|g_n|_{E_2}\|_{A(E_2)} < \|g\|_A + \epsilon < \|f\| + 2\epsilon$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n|_{E_1} \otimes g_n|_{E_2} (e_1, e_2) = f(e_1, e_2) \qquad\qquad (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2.$$

On en déduit que $f \in A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$, et que :

$$\|f\|_{A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)} \leqslant \|f\|_{A(E_1 \times E_2)}.$$

D'autre part, si $f \in A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ et $\epsilon > 0$, alors on a : $f = \sum f_n \otimes g_n$ avec $\{f_n\}; \subset A(E_1)$, $\{g_n\} \subset A(E_2)$, et

$$\sum \|f_n\|_{A(E_1)} \|g_n\|_{A(E_2)} < \|f\|_\otimes + \epsilon \qquad (\|f\|_\otimes = \|f\|_{A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)}).$$

Quitte à remplacer f_n par $\alpha_n^{-1} f_n$, et g_n par $\alpha_n g_n$, on peut supposer $\|f_n\|_{A(E_1)} = \|g\|_{A(E_2)} = \beta_n$. Pour chaque f_n et g_n il existe $\bar{f}_n$ et $\bar{g}_n$ telles que :

$$\bar{f}_n \in A(\Gamma_1) \qquad \|\bar{f}_n\|_{A(\Gamma_1)} < \beta_n + \epsilon 2^{-n} \qquad \bar{f}_n|_{E_1} = f_n$$

$$\bar{g}_n \in A(\Gamma_2) \qquad \|\bar{g}_n\|_{A(\Gamma_2)} < \beta_n + \epsilon 2^{-n} \qquad \bar{g}_n|_{E_2} = g_n.$$

Donc, $\quad \sum \|\bar{f}_n\| \ \|\bar{g}_n\| < \sum(\beta_n + \epsilon 2^{-n})^2 \leqslant$

$$\sum \beta_n^2 + 2(\sup \beta_n) \sum \epsilon\, 2^{-n} + \sum \epsilon^2\, 2^{-2n} \leqslant$$

$$\|f\|_\otimes + \epsilon + 2(\|f\|_\otimes + \epsilon)^{1/2}\epsilon + \epsilon^2.$$

Alors $h = \sum \bar{f}_n \otimes \bar{g}_n \in A(\Gamma_1) \hat{\otimes} A(\Gamma_2) = A(\Gamma)$; et puisque $h|_E = f$, on déduit que $f \in A(E_1 \times E_2)$ et que :

$$\|f\|_{A(E_1 \times E_2)} \leqslant \|h\|_{A(\Gamma)} \leqslant \|f\|_{\otimes} + \epsilon[1+\epsilon+2(\|f\|_{\otimes}+\epsilon)^{1/2}].$$

On conclut que $A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ et $A(E_1 \times E_2)$ sont des algèbres isométriques. ∎

Chapitre II

ANALYTICITE

Soit $S(X)$ une algèbre de fonctions sur l'ensemble X. Nous nous intéressons au problème suivant : quelles sont les fonctions $F : [-1,1] \to \mathbb{C}$ telles que, pour toute fonction $f \in S(X)$ à valeurs dans $[-1,1]$, la fonction composée $F \circ f$ appartient à $S(X)$? Il est bien connu que si X est un groupe abélien Γ discret et infini, et $S(X)$ est l'une des algèbres de groupe $A(\Gamma)$ ou $B(\Gamma)$, alors toute fonction F ayant la propriété énoncée est analytique au voisinage de l'origine (voir [GM] ou [R]). Ceci nous conduit à adopter la définition suivante.

DEFINITION 2.1.

On dit que la fonction $F : [-1,1] \to \mathbb{C}$ opère sur l'algèbre de fonctions $S(X)$ si pour toute fonction $f \in S(X)$ à valeurs dans $[-1,1]$, $F \circ f \in S(X)$. Une algèbre de fonctions $S(X)$ est dite analytique si toute fonction F définie sur $[-1,1]$ qui opère sur $S(X)$ est analytique au voisinage de zéro.

REMARQUE 1. L'intervalle $[-1,1]$ peut être remplacé par d'autres ensembles comme, par exemple, un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$; dans ce cas, pour les algèbres de groupe, on obtient que les fonctions qui opèrent ne sont plus analytiques, mais réelle-analytiques (voir [R], § 6.9). C'est pourquoi, historiquement, on se restreint à l'intervalle $[-1,1]$. □

REMARQUE 2. Les algèbres $S(X)$ qu'on va étudier et qui ont été définies au chapitre précédent, sont auto-adjointes : pour toute fonction $f \in S(X)$, la fonction conjuguée $\bar{f}$ appartient à $S(X)$. Dans ce cas, la partie réelle $Re(f)$ et la partie imaginaire $Im(f)$ appartiennent aussi à $S(X)$. L'ensemble des fonctions de $S(X)$ à valeurs réelles détermine donc l'algèbre $S(X)$ et ses propriétés ; cet ensemble sera noté $S_{\mathbb{R}}(X)$:

$$S_{\mathbb{R}}(X) = \{f \in S(X) : f(x) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X\}. \qquad \square$$

REMARQUE 3. Dans ce chapitre on établit un critère d'analyticité pour les algèbres de restriction $A(E)$ et $B(E)$. Ce critère est analogue à celui utilisé pour les algèbres de groupe, mais n'est pas en général traité pour les algèbres de restriction, lorsque Γ est discret, dans les ouvrages classiques. □

REMARQUE 4. Si les constantes appartiennent à $S(X)$ et si $S(X)$ est analytique, alors toute F, définie sur $[-1,1]$ et qui opère sur $S(X)$, est analytique sur l'intervalle $[-1,1]$ tout entier. En effet, soit $a \in]-1,1[$; la fonction G définie sur $[-1,1]$ par $G(s) = F(a+s(1-|a|))$ opère sur $S(X)$; G est donc analytique au voisinage de 0, et F l'est au voisinage de a. Si $a = 1$, on prend $G(s) = F(1-s^2)$: G est une fonction paire, définie sur $[-1,1]$, qui opère sur $S(X)$. G est, alors, analytique en 0 et on a :

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{2n}, \qquad |s| < \delta$$

donc

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n, \qquad 0 \leq 1-t < \delta^2$$

c'est-à-dire, on peut prolonger F en fonction analytique au voisinage de 1. De la même façon, pour $a = -1$, on prend $G(s) = F(s^2-1)$. □

REMARQUE 5. Soit F une fonction $F : [-1,1] \to \mathbb{C}$. Si F est bornée, alors F opère sur $\ell^{\infty}(X)$; si $F(0) = 0$ et F est continue en 0, alors F opère sur $c_o(X)$. Donc $\ell^{\infty}(X)$ et $c_o(X)$ ne sont pas des algèbres analytiques. Par conséquent si $E \subset X \times Y$ est un ensemble de V_o-interpolation, l'algèbre $V_o(E)$ n'est pas analytique. Dans le chapitre IV (Théorème 4.1) on démontre une réciproque de ce résultat : si E n'est pas un ensemble de V_o-interpolation, alors $V_o(E)$ est analytique ; on a donc la dichotomie annoncée dans l'introduction : si $E \subset X \times Y$, ou bien E est un ensemble de V_o-interpolation, ou bien $V_o(E)$ est analytique. □

La première partie de la remarque 5 est valable pour les algèbres de restriction des algèbres de groupe ; c'est-à-dire, si $E \subset \Gamma$ est un ensemble de Sidon, alors ni $A(E)$ ni $B(E)$ ne sont des algèbres analytiques ; la réciproque de ce résultat est un problème ouvert. L'analyticité de $A(E)$ et $B(E)$ est liée à la croissance de la fonction σ_E définie ci-dessus :

DEFINITION 2.2.

Soient G un g.a.c., Γ son dual, et E une partie de Γ. On définit la <u>fonction</u> σ_E pour $t \in [0,+\infty[$ par :

$$\sigma_E(t) = \sup\{\|\exp(it\Phi)\| : \Phi \in B_{\mathbb{R}}(E),\ \|\Phi\| \leqslant 1\}$$

où $\exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$, série normalement convergente pour toute $f \in B(E)$.

REMARQUE 6. Pour toute $\Phi \in B_{\mathbb{R}}(E)$ et toute $t \in \mathbb{R}$, on a $\|\exp(it\Phi)\|_\infty = 1$; donc si E est un ensemble de Sidon, alors σ_E est bornée. Dans le prochain chapitre on verra que si E n'est pas Sidon, σ_E n'est pas bornée et sa croissance est au moins linéaire (Proposition 3.6). La démonstration de ce résultat utilisera la dichotomie du cotype ([BM]). □

Le critère d'analyticité qu'on va établir exige une croissance exponentielle de σ_E ; plus précisément, on a le théorème suivant, qui est le résultat fondamental de ce chapitre.

THEOREME 2.3.

Soient G un g.a.c., Γ son dual, et $E \subset \Gamma$. S'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:

$$\sigma_E(t) \geq C_1\, e^{C_2 t},$$

alors $A(E)$ et $B(E)$ sont des algèbres analytiques.

La démonstration de ce théorème, qui occupera le reste de ce chapitre, nécessite quelques résultats préalables comme le lemme suivant.

LEMME 2.4.

Soit $a > 0$. Si $E \subset \Gamma$ n'est pas un ensemble de Sidon, et $F :]-a,a[\to \mathbb{C}$ est une fonction telle que pour toute fonction $f \in B_{\mathbb{R}}(E)$ satisfaisant $\|f\| < a$, on a $F \circ f \in B(E)$, alors F est continue sur $]-a,a[$.

<u>Preuve du lemme 2.4.</u>

Il suffit de démontrer la continuité de F en 0 en supposant $F(0) = 0$. En effet, si $b \in]-a,a[$, il suffit de prendre la fonction $G(s) = F(s+b) - F(b)$ et utiliser que $\|\mathbb{1}\|_{B(E)} = 1$.

Supposons $F(0) = 0$ et que F n'est pas continue en 0 ; il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels vérifiant $|F(a_n)| > \epsilon$ et $|a_n| < a2^{-n}$, pour tout $n \geq 1$. Si E n'est pas de Sidon il existe $D \subset E$ infini et dénombrable tel que $\chi_D \notin B(E)$: en effet, il existe une partie dénombrable E_1 de E qui n'est pas Sidon (Prendre pour E_1 le spectre d'une fonction $f \in C_E(G)$ telle que $\hat{f} \notin \ell^1(E)$, dont l'existence est assurée par la proposition 1.1) ; or, si on peut interpoler toute fonction définie sur E_1 et à valeurs 0 ou 1 par un élément de $B(\Gamma)$, alors E_1 est un ensemble de Sidon (voir [R], théorème 5.7.4) ; d'où l'existence de $D \subset E_1$ tel que $\chi_D \notin B(E)$.

On pose $D = \{x_1, x_2, \dots\}$, et $f_n = \chi_{\{x_n\}}$, pour $n \geq 1$; alors $f_n \in B_{\mathbb{R}}(E)$ et $\|f_n\|_{B(E)} = 1$, $n \geq 1$. Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, f appartient à $B_{\mathbb{R}}(E)$ et $\|f\| < a$; d'après les hypothèses $F \circ f \in B(E)$, en particulier la suite $(F(a_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{C}$, car $F(a_n) = F \circ f(x_n)$, $n \geq 1$. Soit $b \in \mathbb{C}$ un point d'adhérence de la suite $(F(a_n))_{n\geq 1}$; alors $|b| \geq \epsilon$, et quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $|F(a_n) - b| < 2^{-n}$, $n \geq 1$. On a donc $f = \sum a_n f_n \in B_{\mathbb{R}}(E)$ et $\|f\| < a$; $g = \sum (F(a_n) - b) f_n \in B(E)$, et $F \circ f = b\chi_D + g$, ce qui implique que $\chi_D \in B(E)$; cette contradiction démontre le lemme. ∎

Dans le lemme et la remarque qui suivent on établit l'existence d'une identité approchée et son utilisation.

LEMME 2.5.

Soit $\epsilon > 0$, et K une partie finie de Γ. Alors il existe $P \in \mathrm{Pol}(G)$ vérifiant :

1. $\|P\|_{L^1(G)} < 1 + \epsilon$
2. $0 \leqslant \hat{P}(\gamma) \leqslant 1, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma$
3. $\hat{P}(\gamma) = 1, \quad \forall\, \gamma \in K.$

La démonstration de ce lemme, dans le cas général où G est un groupe localement compact, se trouve dans [R] (théorèmes 2.6.1 et 2.6.8). Pour $G = D^{\infty}$ ou $G = \mathbb{T}$ il est très facile de construire ces polynômes.

Pour D^{∞}, prenons $P_n = \prod_{i=1}^{n} (1+\epsilon_i)$, pour $n \geq 1$, on voit aisément que $\|P_n\|_1 = 1$, et que si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ et w_A la fonction de Walsh correspondante, on a :

$$\hat{P}_n(w_A) = 1 \quad \text{si} \quad A \subset \{1,\dots,n\}$$

$$\hat{P}_n(w_A) = 0 \quad \text{si} \quad A \not\subset \{1,\dots,n\}.$$

Par conséquent, pour tout ensemble fini $K \subset \hat{D}^{\infty}$, en prenant n assez grand, P_n vérifie les conditions du lemme pour tout $\epsilon > 0$.

Pour $\mathbb{T}$, on peut prendre une légère perturbation d'un noyau de Féjer. Le N-ième noyau de Féjer F_N est, en notation additive ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), le polynôme :

$$F_N(t) = \sum_{|j| \leqslant N} \left(1-\frac{|j|}{N+1}\right) e^{ijt}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si $K \subset \{-n,\dots,n\}$ et $\epsilon < \frac{n(n+1)}{N}$, le polynôme g_n suivant vérifie les conditions voulues :

$$g_n(t) = F_N(t) + \sum_{|j| \leqslant n} \frac{|j|}{n+1} e^{ijt}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

REMARQUE 7. Soit E un sous-ensemble non vide de Γ, et soit $\mathcal{K}$ la famille de toutes les parties finies non vides de E, ordonnée par inclusion. Pour $K \in \mathcal{K}$ et $\epsilon = 1/|K|$, posons $\psi_K = \hat{P}_K|_E$, où P_K vérifie les conditions du lemme 2.5 ; alors $\psi_K \in A_{\mathbb{R}}(E) \subset B_{\mathbb{R}}(E)$, $1 \leqslant \|\psi_K\| \leqslant 1+1/|K| \leqslant 2$, et ψ_K est à support fini (le support d'une fonction f est l'ensemble $\mathrm{Supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$).

La famille $\{\psi_K , K\in\mathcal{K}\}$ est une famille filtrante telle que : $\psi_K(\gamma) \xrightarrow[\mathcal{K}]{} 1$, pour tout $\gamma \in E$, et $\|\psi_K\|_{B(E)} \xrightarrow[\mathcal{K}]{} 1$. De plus, on a

$\|\psi_K f\|_{B(E)} \xrightarrow[\mathcal{K}]{} \|f\|_{B(E)}$ pour toute fonction $f \in B(E)$. En effet, par le

théorème de Alaoglu, l'ensemble $B = \{g\in B(E) : \|g\| \leqslant 2\|f\|\}$ est compact pour la topologie $w^* = \sigma(B(E)\ , C_E(G))$. Comme la topologie τ_E de la convergence sur E est plus faible que la topologie w^*, ces deux topologies coïncident sur B. Or, $\psi_K f \xrightarrow[\mathcal{K}]{} f$ pour τ_E, donc aussi pour

w^*, d'où $\liminf_{\mathcal{K}} \|\Psi_K f\| \geq \|f\|$. Mais $\|\phi_K\| \xrightarrow[\mathcal{K}]{} 1$, et $\|\Psi_K f\| \leqslant \|f\| \|\phi_K\|$,

donc $\limsup_{\mathcal{K}} \|\Psi_K f\| \leqslant \|f\|$. On conclut que $\|\phi_K f\| \xrightarrow[\mathcal{K}]{} \|f\|$. □

L'usage de l'identité approchée $\{\phi_K\ ,\ K\in\mathcal{K}\}$ et de la topologie τ_E va permettre de démontrer le prochain lemme, qui est la clef de la preuve du théorème 2.3.

LEMME 2.6.

Soit $F : [-1,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue en 0, et telle que $F(0) = 0$. Si $F\circ f \in B(E)$ pour toute fonction $f\in A_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $\|f\| < 1$; alors il existe deux nombres positifs M et δ tels que :

$$f\in B_{\mathbb{R}}(E) \quad , \quad \|f\| < \delta \Longrightarrow F\circ f \in B(E) \quad \text{et} \quad \|F\circ f\| \leqslant M.$$

<u>**Démonstration**</u> :

Supposons qu'il existe M et δ vérifiant la condition suivante :

(1) $$f\in A_{\mathbb{R}}(E),\quad |\mathrm{Supp}(f)| < +\infty,\quad \|f\| < \delta \Longrightarrow \|F\circ f\|_{B(E)} \leqslant M.$$

Alors le lemme 2.5 s'en déduit facilement. Soit $f \in B_{\mathbb{R}}(E)$, $\|f\| < \delta$; il existe $K_o \in \mathcal{K}$ tel que pour tout $K \in \mathcal{K}$, $K \supset K_o$, on a $\|f\phi_K\| < \delta$, et d'après (1) $\|F\circ(f\phi_K)\|_{B(E)} \leqslant M$. L'ensemble $B = \{g\in B(E) : \|g\|_{B(E)} \leqslant M\}$ est compact pour la topologie τ_E ; en particulier, il est un sous-ensemble fermé pour τ_E de l'espace de toutes les fonctions définies sur E. Or, $F\circ(f\phi_K) \xrightarrow[\mathcal{K}]{} F\circ f$ pour τ_E, donc $F\circ f \in B$;

c'est-à-dire, $F\circ f \in B(E)$ et $\|F\circ f\|_{B(E)} \leqslant M$.

Montrons (1) par l'absurde. Si cette condition n'est pas satisfaite, on peut construire une suite $\{K_j\}_{j\geq 1}$ de sous-ensembles finis de E, et une suite $\{h_j\}_{j\geq 1}$ de fonctions de $A_{\mathbb{R}}(E)$, à support fini, telles que pour tout $j\in\mathbb{N}$ on ait :

(a) $\mathrm{Supp}(h_j) \subset K_j \subset \mathrm{Supp}(\phi_{K_j}) \subset K_{j+1}$

(b) $\mathrm{Supp}(h_{j+1}) \cap \mathrm{Supp}(\phi_{K_j}) = \emptyset$

(c) $\|h_j\| < 2^{-j}$

(d) $\|F\circ h_j\| \geq j$.

Admettons pour le moment l'existence de ces deux suites et concluons la preuve. La fonction $h = \sum_{j\geq 1} h_j$ appartient à $A_{\mathbb{R}}(E)$ et $\|h\| < 1$, donc $F \circ h \in B(E)$. Posons $g_j = \psi_{K_j} - \psi_{K_{j-1}}$ pour $j \geq 2$, alors $\|g_j(F\circ h)\|_{B(E)} \leqslant 4\|F\circ h\|_{B(E)}$, $j \geq 2$. Or, pour $j \geq 2$, on a $F\circ h_j = g_j(F\circ h)$:

- Si $x \in K_{j-1}$ ou $x \notin \mathrm{Supp}(\psi_{K_j})$, $(F\circ h_j)(x) = g_j(x)\, F(h(x)) = 0$
- Si $x \in \mathrm{Supp}(\psi_{K_j}) \setminus K_{j-1}$, alors d'après (a) et (b), $h(x) = h_j(x)$; si $h_j(x) = 0$, $F(h_j(x)) = g_j(x)F(h(x)) = 0$; si $h_j(x) \neq 0$ et $g_j(x) = 1$, donc $F(h_j(x)) = g_j(x)F(h(x))$.

La suite $(F\circ h_j)_{j\geq 1}$ est donc bornée, ce qui contredit la condition (d), et prouve le lemme.

Il reste à construire les deux suites $(h_j)_{j\geq 1}$ et $(K_j)_{j\geq 1}$ par récurrence. La condition (1) n'est pas satisfaite lorsque $M = 1$ et $\delta = 2^{-1}$, donc il existe une fonction $h_1 \in A_{\mathbb{R}}(E)$, telle que $\|h_1\| < 2^{-1}$, $|\mathrm{Supp}(h_1)| < +\infty$, et $\|F\circ h_1\| < 1$. On pose alors $K_1 = \mathrm{Supp}(h_1)$. Supposons construits $K_1,\ldots,K_j$, et $h_1,\ldots,h_j$ satisfaisant les conditions (a), (b), (c) et (d). Posons $H_j = \mathrm{Supp}(\psi_{K_j})$. F étant continue en 0, il existe $\alpha < 0$ tel que $|F(s)| < 1/|H_j|$ si $|s| < \alpha$. Soit $\delta = \min\{\alpha, (2^{j+1}\|1-\chi_{H_j}\|_{B(E)})^{-1}\}$. La condition (1) n'étant pas vérifiée pour ce δ et $M = j+2$, il existe $g \in A_{\mathbb{R}}(E)$ à support fini telle que $\|g\| < \delta$ et $\|F\circ g\| > j+2$. Prenons $h_{j+1} = g(1 - \chi_{H_j})$; alors h_{j+1} vérifie (b) et (c). De plus,

$$F\circ h_{j+1} = F\circ[(1-\chi_{H_j})g] = (1-\chi_{H_j})F\circ g = F\circ g - \chi_{H_j} F\circ g.$$

Puisque $\|g\| < \delta$, on a $|g(x)| < \alpha$ pour tout $x \in E$, et on déduit que h_{j+1} vérifie (d) car :

$$\|F\circ h_{j+1}\| \geq \|F\circ g\| - \|\chi_{H_j} F\circ g\| \geq$$
$$\geq j + 2 - \sum_{x\in H_j} |F(g(x))| \geq j + 2 - |H_j|\,|H_j|^{-1} = j + 1.$$

Il suffit alors de prendre $K_{j+1} = H_j \cup \mathrm{Supp}(h_{j+1})$ pour garantir (a) et finir la démonstration du lemme.

<u>**Démonstration du théorème 2.3.**</u>

Si la fonction σ_E vérifie l'hypothèse du théorème, elle n'est pas bornée, et E n'est pas un ensemble de Sidon, en particulier E est infini. Si F opère sur $B(E)$, on peut supposer $F(0) = 0$, d'après le lemme 2.4. F est continue en $]-1,1[$. D'autre part, E étant infini, si F opère sur $A(E) \subset c_o(E)$ on a $F(0) = 0$ et F est continue en 0. Dans les deux cas F vérifie l'hypothèse du lemme 2.6 ; elle est donc continue sur $]-\delta,\delta[$ (par le lemme 2.4). En résumé, pour montrer l'analyticité de $A(E)$ et celle de $B(E)$, on doit démontrer l'analyticité en 0 d'une fonction F continue sur $]-\delta,\delta[$, vérifiant $F(0) = 0$ et telle que $\|F\circ f\|_{B(E)} \leqslant M$, pour toute fonction $f \in B_{\mathbb{R}}(E)$, $\|f\| < \delta$.

Soit $0 < \alpha < \delta/e$, posons $F_1(t) = F(\alpha \sin(t))$; F_1 est une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Si $\Phi \in B_{\mathbb{R}}(E)$, $\|\Phi\| \leqslant 1$ et $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|\sin(\Phi+s)\| \leqslant \|\sin \Phi\| + \|\cos \Phi\| \leqslant \sum_{n\geq 0} \frac{\|\Phi\|^n}{n!} \leqslant e$$

d'où $\|\alpha \sin(\Phi+s)\| < \delta$, et par conséquent $\|F_1(\Phi+s)\| \leqslant M$. Considérons la série de Fourier de F_1,

$$F_1(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}_1(n)\, e^{int}.$$

Si on fixe $n\in\mathbb{Z}$ et si K est un sous-ensemble fini de E, on a :

$$\psi_K(x)\, \hat{F}_1(n)\, e^{in\Phi(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_K(x)\, F\, (\Phi(x)+s) e^{-ins} ds.$$

Comme ψ_K est à support fini, la fonction

$$s \in [0,2\pi] \quad \to \psi_K\, F_1(\Phi+s) \in B(E)$$

est continue, et en interprétant l'intégrale précédente comme une intégrale vectorielle on obtient la majoration :

$$|\hat{F}_1(n)|\, \|\psi_K e^{in\Phi}\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi_K\|\ \|F_1(\Phi+s)\| ds \leqslant \|\psi_K\| M \leqslant 2M.$$

En passant à la limite selon $\mathcal{K}$ on a :

$$|\hat{F}_1(n)|\ \|e^{in\Phi}\|_{B(E)} \leqslant 2M.$$

Cette inégalité vaut pour toute fonction $\Phi \in B_{\mathbb{R}}(E)$, satisfaisant $\|\Phi\|\leqslant 1$. D'après la définition de σ_E on obtient :

$$|\hat{F}_1(n)|\ \sigma_E(|n|) \leqslant 2M,$$

et d'après l'hypothèse du théorème :

$$|\hat{F}_1(n)| < \frac{2M}{C_1} e^{-c_2|n|} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Cette majoration assure que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}_1(n)\, e^{ins}$ est absolument et uniformément convergente dans tout sous-ensemble compact du domaine complexe $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < C_2\}$. Cette série définit alors une fonction analytique sur Ω qui coïncide avec F_1 en tout point $z\in\mathbb{R}$. Or, $F(t) = F_1(\arcsin(t/\alpha))$, et F_1 est analytique au voisinage de 0, donc F est aussi analytique au voisinage de 0, et le théorème est démontré.■

Chapitre III

CRITERE D'ANALYTICITE DE BOURGAIN

Le résultat le plus important de ce chapitre est la proposition 3.1, qui donne une condition suffisante pour l'analyticité des algèbres A(E) et B(E) ; ensuite, on verra le rapport entre cette condition et le problème de la dichotomie du cotype ; on conclut par une application de la proposition 3.1 aux ensembles contenant des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

PROPOSITION 3.1. ([B])

Soient G un g.a.c., $E \subset \Gamma = \hat{G}$, et $\ell \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $f \in C_E(G)$, $M > 0$, et $x_1, \dots, x_\ell \in G$ vérifiant :

(1) $f(0) = \|f\|_\infty = 1$

(2) $\left\| \sum_{S \subset \{1,\dots,\ell\}} \left| f_{\sum_{k\in S} x_k} \right| \right\|_\infty \leqslant M.$

Alors il existe deux nombres $C, \delta > 0$, indépendants de G et ℓ, tels que

$$\sigma_E(t) \geq \frac{1}{M} e^{Ct} \qquad \text{si} \quad 0 < t < \delta\ell.$$

D'après cette proposition, et le théorème 2.3, pour démontrer l'analyticité de B(E) et A(E), il suffit de trouver un $M > 0$ pour lequel les hypothèses de 3.1 soient vraies pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 3.2.

Il existe $C_1 > 0$ tel que si U est une algèbre de Banach commutative, $u_1, \dots, u_\ell \in U$, et $\|u_k\| \leqslant 1$, $k = 1,\dots,\ell$, alors on a :

$$\left\|\prod_{k=1}^{\ell}(1+u_k)\right\| \leqslant \left[\exp(C_1\sum_{k=1}^{\ell}\|u_k\|^2)\right]\left[\sup_{S\subset\{1,\dots,\ell\}}\{\|\exp(\sum_{k\in S}u_k)\|\}\right].$$

Preuve du lemme 3.2.

On pose $L = \sup\{\|\exp(\sum_{k\in S} u_k)\| : S \subset \{1,\dots,\ell\}\}$. Soit $\varphi(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1$. Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on a $e^{C_1x^2} \geq \varphi(x) + 1$. Si $y_k = \sum_{n\geq 2} - \frac{u_k^n}{n!}$, $k = 1,\dots,\ell$, on a $\|y_k\| \leqslant \varphi(\|u_k\|)$ et $e^{u_k} = 1 + u_k - y_k$, d'où :

$$\|\prod_{k=1}^{\ell}(1+u_k)\| = \|\prod_{k=1}^{\ell}(e^{u_k}+y_k)\| = \|\sum_{S\subset\{1,\dots,\ell\}}(\exp(\sum_S u_k))(\prod_{k\notin S}y_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_S \|\exp(\sum_S u_k)\| \prod_{k\notin S,1\leqslant k\leqslant\ell}\|y_k\| \leqslant L\sum_S(\prod_{k\in S}\|y_k\|) \leqslant$$

$$\leqslant L\prod_{k=1}(1+\varphi(\|u_k\|)) \leqslant L\exp(C_1\sum_{k=1}^{\ell}\|u_k\|^2).$$ ∎

Démonstration de la proposition 3.1.

Soient ϵ, ϵ' appartenant à D^{ℓ} : $\epsilon = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_\ell)$, $\epsilon'=(\epsilon'_1,\dots,\epsilon'_\ell)$, $\epsilon_k,\epsilon'_k\in\{1,-1\}$, $k = 1,\dots,\ell$. Soient $x_1,\dots,x_\ell$ comme dans l'énoncé. Pour chaque k, $k = 1,\dots,\ell$, on pose :

$$v_k(\epsilon,\epsilon') = \frac{\epsilon_k}{4\ell}\left((1-i\epsilon'_k)\hat{\delta}_{x_k}|_E + (1+i\epsilon'_k)\hat{\delta}_{-x_k}|_E\right) =$$

$$= \frac{\epsilon_k}{2\ell}\,\mathrm{Re}\left((1-i\epsilon'_k)\ \hat{\delta}_{x_k}|_E\right)$$

où δ_x est la mesure de Dirac en x ; $v_k(\epsilon,\epsilon') \in B_{\mathbb{R}}(E)$, et comme

$\|\hat{\delta}_x|_E\|_{B(E)} = 1$, pour x dans G, on a $\|v_k\| \leqslant \frac{1}{\ell}$ $k = 1,\dots,\ell$. Pour tout sous-ensemble S inclus dans $\{1,\dots,\ell\}$ on a $\|\sum_{k\in S} v_k\|_{B(E)} \leqslant 1$, et donc

$$\sigma_E(t) \geq \sup\{\|\exp(it\sum_S v_k)\| : S \subset \{1,\dots,\ell\}\}.$$

Si $0 < t \leqslant \ell$, on peut appliquer le lemme précédent à $u_k = itv_k$, $k = 1,\dots,\ell$, et on en déduit :

$$(3)\qquad \|\prod_{k=1}^{\ell} (1+u_k)\|_{B(E)} \leqslant \sigma_E(t)\exp(C_1 \sum_{k=1}^{\ell} \|itv_k\|^2) \leqslant \sigma_E(t)\ \exp(\frac{C_1 t^2}{\ell}).$$

Pour chaque $S \subset \{1,\dots,\ell\}$ soient : $w_S(\epsilon) = \prod_{k\in S} \epsilon_k$, la fonction de Walsh correspondant à S et $\tau_S(\epsilon')$, une fonction définie sur D avec $|\tau_S(\epsilon')| \leqslant 1$, pour tout $\epsilon' \in D^{\ell}$. D'après la condition (2) de l'énoncé, si on pose $f_S = f_{\sum_{k\in S} x_k}$, on a :

$$M \geq \|\sum_S w_S(\epsilon)\ \tau_S(\epsilon')\ f_S\|_{\infty} \qquad \forall\ \epsilon,\epsilon' \in D^{\ell}.$$

Comme $\sum_S \tau_S w_S f_S \in C_E(G)$, d'après la dualité entre $C_E(G)$ et $B(E)$, et par (3), on a :

$$M\ e^{C_1 t^2/\ell}\sigma_E(t) \geq \left|\langle\prod_{k=1}^{\ell} (1+u_k(\epsilon,\epsilon'))\ ,\ \sum_S w_S(\epsilon)\tau_S(\epsilon')\hat{f}_S\rangle\right|$$

pour tous $\epsilon,\epsilon' \in D^{\ell}$. Si on intégre en ϵ et ϵ' par rapport à la mesure de Haar sur $D^{\ell} \times D^{\ell}$, on en déduit :

$$(4)\qquad M\ e^{C_1 t^2/\ell}\sigma_E(t) \geq \left|\int_{D^{\ell}} d\epsilon' \int_{D^{\ell}} \langle \prod_{k=1}^{\ell} (1+u_k), \sum_S w_S\tau_S\hat{f}_S\rangle d\epsilon\right| = A.$$

Pour chaque $S \subset \{1,\dots,\ell\}$ et $\epsilon' \in D^{\ell}$, soit $\mu_S(\epsilon')$, la mesure appartenant à $M(G)$, définie par :

$$\mu_S(\epsilon') = \mathop{*}_{k\in S} \left\{\frac{it}{4\ell}[(1-i\epsilon_k')\ \delta_{x_k} + (1+i\epsilon_k')\delta_{-x_k}]\right\}$$

où on prend la convolution sur G ; alors on a

$\prod_{k=1}^{\ell} (1+u_k(\epsilon,\epsilon')) = \sum_S w_s(\epsilon)\widehat{\mu_s(\epsilon')}|_E$. Puisque $\mu_s(\epsilon')$ ne dépend pas de ϵ,

et que $\{w_s\}_s$ est une base orthonormale de $L^2(D^\ell)$, on a :

$$(5) \qquad A = \left|\int_{D^\ell} (\sum_S \langle\mu_s(\epsilon'),\tau_s(\epsilon')f_s\rangle) d\epsilon'\right| =$$

$$= \left|\sum_S \int_{D^\ell} \langle\mu_s(\epsilon')\ \tau_s(\epsilon'),f_s\rangle d\epsilon'\right| = \left|\sum_S \langle I_s,f_s\rangle\right|$$

où $I_s = \int \tau_s(\epsilon')\ \mu_s(\epsilon')d\epsilon' \in M(G)$. Si on choisit la fonction

$\tau_s(\epsilon') = \prod_{k\in S} \left(\frac{1-i\epsilon_k'}{i\sqrt{2}}\right)$, qui satisfait $|\tau_s| = 1$, on a :

$$\tau_s\mu_s = \left(\frac{t}{4\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \underset{k\in S}{*} (1-i\epsilon_k')[(1-i\epsilon_k')\delta_{x_k} + (1+i\epsilon_k')\ \delta_{-x_k}] =$$

$$= \left(\frac{t}{4\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \underset{k\in S}{*} [-2i\epsilon_k'\delta_{x_k} + 2\delta_{-x_k}] =$$

$$= \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \sum_{T\subset S} (-i)^{|T|}\ w_T(\epsilon')(\underset{k\in T}{*}\ \delta_{x_k}) * (\underset{k\in S\setminus T}{*}\ \delta_{-x_k}).$$

Comme $\int w_T(\epsilon')d\epsilon'$ vaut 0 si $T \neq \emptyset$, et 1 si $T \neq \emptyset$,

$$I_s = \int \tau_s(\epsilon')\ \mu_s(\epsilon')d\epsilon' = \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \underset{k\in S}{*}\ \delta_{-x_k} = \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \delta_{-\sum_{k\in S} x_k}$$

et donc,

$$\langle I_s,f_s\rangle = \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|} \langle\delta_{-\sum_{k\in S} x_k}, f_{\sum_{k\in S} x_k}\rangle = \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\ \ell}\right)^{|s|}$$

puisque $\langle\delta_{-y},f_y\rangle = \int f_y(-t)\ \ \delta_{-y}(t) = f_y(y) = f(0) = 1$. En revenant à (5) on obtient :

$$A = \sum_{S\subset\{1,\ldots,\ell\}} \left(\frac{t}{2\sqrt{2}\,\ell}\right)^{|S|} = \left(1 + \frac{t}{2\sqrt{2}\,\ell}\right)^{\ell}.$$

Il existe $C_2>0$, tel que $\log(1+\frac{x}{2\sqrt{2}\,\ell}) \geq C_2 x$ pour tout $x\in[0,1]$, d'où $A \geq \left(e^{C_2 t/\ell}\right)^{\ell} = e^{C_2 t}$ pour $0 < t < \ell$. D'après (4),

$$M\,\sigma_E(t)\,e^{C_1 t^2/\ell} \geq e^{C_2 t}.$$

Choisissons $\delta < 1$, tel que $C = C_2 - \delta C_1$ soit positif, on obtiendra, pour $0 < t < \delta\ell$:

$$\sigma_E(t) \geq \frac{1}{M}\,e^{(C_2 - C_1 t/\ell)t} \geq \frac{1}{M}\,e^{Ct}$$

ce qui démontre la proposition. ∎

Si X et Y sont deux espaces de Banach isomorphes, on définit la distance de Banach-Mazur entre X et Y par :

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ isomorphisme}\}.$$

On notera ℓ_n^∞ l'espace de Banach $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|\alpha\|_{\ell_n^\infty} = \max\{|\alpha_i| : i = 1,\ldots,n\}$, où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.

DEFINITION 3.3.

Soient $M \geq 1$, et X un espace de Banach ; on dit que X contient des ℓ_n^∞ M-uniformément, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un sous-espace $X_n \subset X$ de dimension n tel que $d(\ell_n^\infty, X_n) \leqslant M$. On dira que X contient des ℓ_n^∞ uniformément, si X contient des ℓ_n^∞ M-uniformément pour un certain M.

Dans [MP], Maurey et Pisier ont démontré que X contient des ℓ_n^∞ uniformément si et seulement si X n'a pas de cotype fini ; dans [BM], Bourgain et Milman démontrent que si $E \subset \Gamma$ n'est pas un ensemble de Sidon, alors $C_E(G)$ n'a pas de cotype fini, et donc il contient des ℓ_n^∞ uniformément. Les hypothèses qui dans la proposition 3.1 servent à démontrer l'analyticité de $A(E)$ et $B(E)$, servent aussi à démontrer l'existence de ℓ_n^∞ uniformes très particuliers dans $C_E(G)$: l'espace

X_n de la définition 3.3 va être l'espace engendré par n translatées d'une même fonction $f \in C_E(G)$. Plus précisément, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4.

Soient $m \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$, $f \in C_E(G)$, et $y_1, \ldots, y_m \in G$ vérifiant :

(1) $f(0) = \|f\|_\infty = 1$

(2) $$\left\| \sum_{k=1}^{m} |f_{y_k}| \right\|_\infty \leqslant M.$$

Alors pour toute $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \leqslant m\epsilon/8M^2$, il existe $k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, m\}$ tels que si X est le sous-espace de $C_E(G)$ engendré par $\{f_{y_{k_j}} : j = 1, \ldots, n\}$, on a $d(X, \ell_n^\infty) \leqslant M + \epsilon$.

Si les hypothèses de 3.1 sont vérifiées pour un $\ell \in \mathbb{N}$, alors celles de 3.4 sont vérifiées pour $m = 2^\ell$. L'hypothèse de 3.1 implique l'analyticité de $A(E)$ et $B(E)$ lorsqu'elle est vraie pour tout ℓ appartenant à $\mathbb{N}$; en ce cas, et par 3.4, on a aussi que $C_E(G)$ contient des ℓ_n^∞ $M+\epsilon$-uniformément, chaque X_n de la définition 3.3 étant engendré par des translatées d'une fonction $f_n \in C_E(G)$. La démonstration de 3.4 repose sur le lemme suivant que l'on trouve dans [JS] :

LEMME 3.5.

Soit (a_{ij}) $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, une matrice à coefficients réels positifs qui vérifie :

$$\forall\, i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m : \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leqslant M.$$

Alors, pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe $D \subset \{1, \ldots, m\}$ tel que :

(a) $\forall i \in D, \quad \sum_{j \in D, i \neq j} a_{ij} \leqslant \delta$

(b) $|D| \geq \langle m\delta/4M \rangle$

(où $\langle x \rangle$ désigne la partie entière du $x \in \mathbb{R}$).

Démonstration du lemme 3.5.

Pour chaque nombre entier k, avec $2 \leqslant k < m$, on pose $\mathfrak{F}_k = \{E : E \subset \{1,\dots,m\}, |E| = k\}$. Alors $|\mathfrak{F}_k| = \binom{m}{k}$. Soit, pour chaque $E \in \mathfrak{F}_k$:

$$C_E = \sum_{i \in E} \sum_{j \in E, i \neq j} a_{ij}.$$

On a :

$$\sum_{E \in \mathfrak{F}_k} C_E = \sum_{E \in \mathfrak{F}_k} \sum_{i \in E} \sum_{j \in E, i \neq j} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, n(i,j)$$

où $n(i,j) = |\{E \in \mathfrak{F}_k : i,j \in E\}| = \binom{m-2}{k-2}$ si $i \neq j$, et $n(i,j) = 0$ si $i = j$. D'après l'hypothèse on a :

$$\sum_{E \in \mathfrak{F}_k} C_E = \binom{m-2}{k-2} \sum_{i \neq j, i,j=1}^{m} a_{ij} \leqslant \binom{m-2}{k-2} Mm.$$

Choisissons $E_o \in \mathfrak{F}_k$ tel que C_{E_o} soit minimal, alors :

$$\binom{m}{k} C_{E_o} \leqslant \sum_{E \in \mathfrak{F}_k} C_E \leqslant \binom{m-2}{k-2} Mm$$

et on en déduit que

(1) $$C_{E_o} \leqslant \frac{k(k-1)}{m-1} M \leqslant \frac{k^2 M}{m}.$$

Si on pose $D = \left\{ i \in E_o : \sum_{j \in E_o, j \neq i} a_{ij} \leqslant \frac{2Mk}{m} \right\}$, alors $|D| \geq k/2$ (si non on aurait que $|E_o \setminus D| > k/2$, et

$$C_{E_o} \geq \sum_{i \in E_o \setminus D} \sum_{j \in E_o, i \neq j} a_{ij} > |E_o \setminus D| \frac{2Mk}{m} > \frac{Mk^2}{m}$$

contrairement à (1)). En outre :

$$\forall\ i\in D, \qquad \sum_{j\in D, i\neq j} a_{ij} \leqslant \sum_{j\in E_o, i\neq j} \leqslant \frac{2Mk}{m}.$$

Etant donné $\delta \in]0,1[$, prenons $k = 2 \langle \frac{m\delta}{4M} \rangle$; d'où $|D| \geq \langle m\delta/4M \rangle$, et pour tout $i\in D$:

$$\sum_{j\in D, i\neq j} a_{ij} \leqslant \frac{4M\langle m\delta/4M\rangle}{m} \leqslant \delta.$$ ∎

Preuve de la proposition 3.4.

Posons pour chaque i et chaque j entre 1 et m, $a_{ij}=|f_{y_j}(y_i)|$, et appliquons le lemme précédent à la matrice (a_{ij}) et à $\delta = \epsilon/2M \in]0,1[$. Cette matrice vérifie les hypothèses du lemme puisque, pour tout $x\in G$, on a $\sum_{j=1}^{m} |f_{y_j}(x)| \leqslant M$. Il existe donc un ensemble $D \subset \{1,..,m\}$ vérifiant (a) et (b) du lemme. Si $n \leqslant m\epsilon/8M^2$, alors par (b) : $n \leqslant \langle\frac{m\epsilon}{8M^2}\rangle = \langle\frac{m\delta}{4M}\rangle \leqslant |D|$. Soient $k_1,\ldots,k_n$ n éléments distincts de D, alors $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |f_{y_{k_j}}(y_{k_i})| \leqslant \delta$.

Pour chaque $\alpha \in \ell_n^\infty$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ on a

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{y_{k_j}}\right\|_\infty \leqslant M\|\alpha\|_{\ell_n^\infty}.$$

Soit i, tel que $|\alpha_i| = \|\alpha\|_{\ell_n^\infty}$, alors on a :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{y_{k_j}}(y_{k_i})\right| \geq |\alpha_i||f_{y_{k_i}}(y_{k_i})| - \sum_{j\neq i} |\alpha_j||f_{y_{k_j}}(y_{k_i})| \geq$$

$$\geq \|\alpha\|_{\ell_n^\infty}(1-\sum_{j\neq i}|f_{y_{k_j}}(y_{k_i})|) \geq (1-\delta)\|\alpha\|_{\ell_n^\infty}.$$

On en déduit que :

$$(1-\delta)\|\alpha\|_{\ell_n^\infty} \leqslant \|\sum_{j=1}^n \alpha_j f_{y_{k_j}}\| \leqslant M\|\alpha\|_{\ell_n^\infty}.$$

Soit X le sous-espace de $C_E(G)$ engendré par les fonctions $f_{y_{k_j}}$, $j = 1,\ldots, n$. On conclut la démonstration puisque $\delta \in]0,½[$ et on a :

$$d(X,\ell_n^\infty) \leqslant M/(1-\delta) \leqslant M(1+2\delta) = M+\epsilon. \qquad \blacksquare$$

On a déjà dit que, dans [BM], on démontre que si E n'est pas un ensemble de Sidon, alors $C_E(G)$ contient des ℓ_n^∞ uniformément ; on va voir, maintenant, que ceci entraîne que σ_E n'est pas bornée, et même qu'elle a une croissance au moins linéaire. Plus précisément, on va démontrer :

PROPOSITION 3.6.
Si $C_E(G)$ contient des ℓ_n^∞ M-uniformément, alors, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a :

$$\sigma_E(t) \geq t/2M$$

La démonstration est inspirée par celle de la proposition 3.1, et elle l'éclaire. Si un espace de Banach contient des ℓ_n^∞ uniformément, alors il les contient $(1+\epsilon)$-uniformément pour tout $\epsilon > 0$ (voir [MP]). donc si E n'est pas Sidon, $\sigma_E(t) \geq t/2(1+\epsilon)$, pour tout $\epsilon > 0$; c'est-à-dire, $\sigma_E(t) \geq t/2$.

Preuve de 3.6.

Soit $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse il y a n fonctions $f_1,\ldots,f_n$ dans $C_E(G)$ qui vérifient :

(1)
$$\|\alpha\|_{\ell_n^\infty} \leqslant \|\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k\|_\infty \leqslant M\|\alpha\|_{\ell_n^\infty}, \qquad \alpha \in \ell_n^\infty.$$

Alors pour chaque k, $\|f_k\|_\infty \geq 1$; on verra qu'il existe une mesure μ_k

sur G telle que $\hat{\mu}_k \in B_{\mathbb{R}}(E)$, et :

(2) $$\|\hat{\mu}_k\|_{B(E)} \leqslant 1 \quad , \quad |\langle \mu_k, f_k\rangle| \geq \frac{1}{2}.$$

Prenons alors $b_k \in \mathbb{C}$, $|b_k| = 1$ tel que $b_k\langle \mu_k, f_k\rangle = |\langle \mu_k, f_k\rangle|$; et soit pour chaque $\epsilon \in D^n$:

$$u_k(\epsilon) = \frac{it\ \epsilon_k \hat{\mu}_k}{n}$$

où $t \in \,]0,n]$. Comme dans la démonstration de 3.1, on a :

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} (1+u_k) \right\|_{B(E)} \leqslant e^{c_1 t^2/n}\, \sigma_E(t).$$

Par (1), on a que pour tout $\epsilon \in D^n$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k b_k f_k \right\|_{\infty} \leqslant M$. Donc, comme dans 3.1 :

$$M\, e^{c_1 t^2/n} \sigma_E(t) \geq \left| \int \langle \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k b_k \hat{f}_k\rangle d\epsilon \right| =$$

$$= \left| \int \langle \sum_{S} \left[\frac{it}{n}\right]^{|S|} w_S(\epsilon)\hat{\mu}_S\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k b_k \hat{f}_k\rangle d\epsilon \right| = A$$

où $\hat{\mu}_S = \prod_{k\in S} \hat{\mu}_k$. Finalement, par l'orthogonalité des fonctions de Walsh, et puisque $\epsilon_k = w_{\{k\}}(\epsilon)$, on obtient :

$$A = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{it}{n} \langle \mu_k, b_k f_k\rangle \right| = \left| \frac{it}{n} \sum_{k=1}^{n} |\langle \mu_k, f_k\rangle| \right| \geq \frac{t}{2}.$$

Donc $Me^{c_1 t^2/n}\sigma_E(t) \geq \frac{t}{2}$; en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $\sigma_E(t) \geq \frac{t}{2M}$.

Il reste à démontrer (2). Pour ceci, si $f \in C_E(G)$, il existe $\hat{\mu} \in B(E)$ telle que $\|\hat{\mu}\|_{B(E)} = 1$ et $\langle \mu, f\rangle = \|f\|_\infty$. Si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$, soit $\hat{\mu}_z = \frac{1}{2}(z\hat{\mu} + \bar{z}\bar{\hat{\mu}})$; on a $\hat{\mu}_z \in B_{\mathbb{R}}(E)$ et $\|\hat{\mu}_z\|_{B(E)} \leqslant 1$. Soit $a = \langle \bar{\hat{\mu}}, \hat{f}\rangle$; alors $\langle \mu_z, f\rangle = \frac{1}{2}(\|f\|_\infty z + a\bar{z})$; d'où :

$$|\langle \mu_z, f\rangle| = \frac{1}{2}|\ \|f\|_\infty + a\bar{z}^2|.$$

Il suffit de choisir z tel que $a\bar{z}^2 = |a|$ pour conclure que $|\langle \mu_z, f\rangle| = \frac{1}{2}\{\|f\|_\infty + |a|\} \geq \frac{\|f\|_\infty}{2}$. Comme $\|f_k\|_\infty \geq 1$, ceci montre (2).

On termine ce chapitre par une conséquence de la proposition 3.1 qui s'obtient aussi par d'autres méthodes (voir [KM]). Un ensemble $E \subset \Gamma$ contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tels que les points $\gamma' + k\gamma$, $k = 1, \ldots, n$, sont deux à deux distincts et appartiennent à E. Le fait que tous les n points $\gamma' + k\gamma$ soient différents entraîne que l'ordre de γ est infini ou plus grand que n. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.7.

Si $E \subset \Gamma = \hat{G}$ contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues, alors les algèbres $A(E)$ et $B(E)$ sont analytiques.

Démonstration.

On va démontrer que, sous les hypothèses de la proposition, il existe, pour tout $m \in \mathbb{N}$, un polynôme $P \in Pol_E(G)$, et un point x de G vérifiant :

(a) $P(0) = \|P\|_\infty = 1$

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} |P_{jx}(y)| \leqslant 2$ pour $y \in G$.

Ceci implique que les hypothèses de 3.1 sont vérifiées pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et donc $A(E)$ et $B(E)$ sont analytiques. En effet, si $\ell \in \mathbb{N}$, choisissons P et x vérifiant (a) et (b) pour $m = 2^{\ell}-1$. Pour chaque k, $1 \leq k \leq \ell$, soit $x_k = 2^{k-1}x$; l'application qui à chaque $S \subset \{1,\dots,\ell\}$ fait correspondre $\sum_{k \in S} 2^{k-1}$, est une bijection entre l'ensemble des parties de $\{1,\dots,\ell\}$ et celui des entiers j tels que $0 \leq j \leq 2^{\ell}-1$. Donc $f = P$ et $x_1,\dots,x_\ell$ ainsi définis vérifient les hypothèses de 3.1, car :

$$\left\| \sum_{S \subset \{1,\dots,\ell\}} |f_{\sum_{k \in S} x_k}| \right\|_\infty = \left\| \sum_{j=0}^{m} |P_{jx}| \right\|_\infty \leq 2.$$

L'hypothèse sur E entraîne que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $\gamma_2 + j\,\gamma_1$, pour $j = -N,\dots, 0,\dots, N$, sont des éléments deux à deux distincts de E. Si $F_N : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est le N-ième noyau de Féjer, alors $P(y) = \frac{1}{N+1}\,\gamma_2(y)\,F_N(\gamma_1(y))$ définit un polynôme sur G qui vérifie $P \in \mathrm{Pol}_E(G)$, et $P(0) = \|P\|_\infty = 1$.

Soit $\theta = \frac{2\pi}{N+1}$; si $t \in \mathbb{R}$, puisque F_N est positif, on a (en utilisant la notation additive pour $\mathbb{T}$) :

$$\sum_{j=0}^{N} |F_N(t-j\theta)| = \sum_{j=0}^{N} F_N(t-j\theta) =$$

$$= \sum_{|k| \leq N} \left(1-\frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikt} \left(\sum_{j=0}^{N} e^{-ijk\theta}\right) = A.$$

Par le choix de θ, $w = e^{-i\theta}$ est une racine primitive de 1, donc $\sum_{j=0}^{N} (w^k)^j$ est différent de zéro seulement si k est divisible par $N+1$.

Comme $|k| \leq N$, $A = \sum_{j=0}^{N} w^\circ = N+1$. S'il existait, dans G, un x tel que $\gamma_1(x) = e^{i\theta}$, alors P et x vérifieraient (a) et (b) pour $m = N$; mais cela n'est pas vrai en général, et il faut un raisonnement un peu plus subtil.

Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{T}$ tels que

$$\left\| \sum_{j=0}^{N} |(F_N)_{jx}| \right\|_\infty < 2(N+1)$$

est un ouvert H_N qui contient $e^{i\theta}$. Soit $\mathbb{T}_p$ le sous-groupe de $\mathbb{T}$ (en notation multiplicative) des racines p-ièmes de 1 ; puisque H_N est un ouvert, il contient un arc de cercle I de longueur $\epsilon > 0$, et si $p > \frac{2\pi}{\epsilon}$ on aura $H_N \cap \mathbb{T}_p \neq \emptyset$. Il existe donc un nombre $p_N \in \mathbb{N}$ $(p_N \geq N)$ tel que $H_N \cap \mathbb{T}_p \neq \emptyset$, pour tout $p \geq p_N$. Par hypothèse il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $\gamma_2 + j\,\gamma_1$ sont des éléments deux à deux distincts appartenant à E, pour $j = -p_N, \dots, 0, \dots, p_N$. Comme $p_N \geq N$ on a $P \in \mathrm{Pol}_E(G)$, où $P(y) = \frac{1}{N+1}\gamma_2(y)\, F_N(\gamma_1(y))$, pour $y \in G$. L'ordre de γ_1 est plus grand que p_N ; donc l'image de G par γ_1, qui est un sous-groupe compact de $\mathbb{T}$, doit être $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{T}_p$ pour un certain $p \geq p_N$. Dans les deux cas cette image rencontre H_N, et il existe $x \in G$ tel que $\gamma_1(x) \in H_N$. On a alors, pour tout $y \in G$:

$$\sum_{j=0}^{N} |P_{jx}(y)| = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} |\gamma_2(y-jx)|\ |F_N(\gamma_1(y-jx))| =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} |F_N(\gamma_1(y) - j\ \gamma_1(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N+1} \left\| \sum_{j=0}^{N} (F_N)_{j\gamma_1(x)} \right\|_\infty \leqslant 2$$

d'où P et x vérifient (a) et (b) pour $m = N$, et la proposition est démontrée. ∎

Chapitre IV

LE PROBLEME DE LA DICHOTOMIE POUR LES ALGEBRES TENSORIELLES

Dans ce chapitre on démontre le résultat de dichotomie suivant dû à Bourgain ([B]) :

THEOREME 4.1.
Soient X et Y deux ensembles et $E \subset X \times Y$; alors une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée :

(i) E est un ensemble de V_o-interpolation
(ii) $V_o(E)$ est une algèbre analytique.

La démonstration de ce résultat dépend d'une caractérisation des ensembles de V_o-interpolation due à Varopoulos [V]. Ensuite le problème se transfère au groupe $G = D^{\infty} \times D^{\infty}$ et l'on obtient un polynôme trigonométrique satisfaisant aux conditions (1) et (2) de la proposition 3.1, grâce à des estimations sur le groupe G^{ℓ} faisant intervenir des variables aléatoires et le lemme de comparaison des processus gaussiens de Slepian. On va diviser la démonstration en étapes liées aux différents ingrédients utilisés et aux difficultés de calcul.

1ère étape. Caractérisation de Varopoulos des ensembles de V_o -interpolation.

Un sous-ensemble $\Delta \subset X \times Y$ est appelé cube s'il existe $A \subset X$ et $B \subset Y$ tels que $\Delta = A \times B$; si Δ est un cube fini on écrira $s(\Delta) = |A| + |B|$. La proposition suivante est démontrée dans [V], et sa preuve est reprise de façon plus détaillée dans [S] :

PROPOSITION 4.2.
Soit $E \subset X \times Y$; E est un ensemble de V_o-interpolation si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout cube fini $\Delta \subset X \times Y$ on

ait

$$|E \cap \Delta| \leqslant K\, s(\Delta)$$

Comme conséquence on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.

Soit $E \subset X \times Y$. Si E n'est pas un ensemble de V_o-interpolation, pour tout $K \in \mathbb{N}$ il existe deux ensembles finis $A \subset X$ et $B \subset Y$ vérifiant l'une des propriétés suivantes :

(a) $|A| \geq |B|$, et pour tout x dans A, il existe $B_x \subset B$ tel que $|B_x| = K$ et $\{x\} \times B_x \subset E$

(b) $|B| \geq |A|$, et pour tout y dans B, il existe $A_y \subset A$ tel que $|A_y| = K$ et $A_y \times \{y\} \subset E$.

Preuve de la proposition 4.3.

Supposons que le résultat n'est pas vrai pour un certain $K \in \mathbb{N}$; alors tout couple d'ensembles finis $A \subset X$, $B \subset Y$ vérifie (1) et (2) :

(1) $|\{x \in A : |(\{x\} \times B) \cap E| \geq K\}| < |B|$

(2) $|\{y \in B : |(A \times \{y\}) \cap E| \geq K\}| < |A|$.

On va montrer que (1) et (2) entraînent que pour tout cube fini $\Delta \subset X \times Y$ on a :

$$|E \cap \Delta| \leqslant K\, s(\Delta). \tag{3}$$

D'après la proposition 4.2, E est alors un ensemble de V_o-interpolation, ce qui contredit l'hypothèse et conclut la preuve.

On démontre (3) par récurrence sur $s(\Delta)$. Si $s(\Delta) = 2$, il est clair que (3) est satisfaite. Supposons (3) vraie pour tout cube Δ tel que $s(\Delta) = N \geq 2$, et soit $A \times B$ un cube tel que $s(A \times B) = N + 1$. Si $|A| \geq |B|$ alors, d'après (1), on a

$$|\{x \in A : |(\{x\} \times B) \cap E| \geq K\}| < |B| \leqslant |A|.$$

Il existe donc $x_o \in A$ tel que

$$|(\{x_o\} \times B) \cap E| < K.$$

Soit Δ le cube $\Delta = (A \setminus \{x_o\}) \times B$; on a $s(\Delta) = N$ et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|(A \times B) \cap E| = |\Delta \cap E| + |(\{x_o\} \times B) \cap E| \leqslant$$
$$\leqslant K\, s(\Delta) + K = K\, s(A \times B).$$

Ce qui démontre (3) dans le cas où $|A| \geq |B|$. Si on a $|B| > |A|$, il suffit d'utiliser (2) pour arriver à la même conclusion. ∎

2ème étape. Transfert au groupe $G = D^\infty \times D^\infty$.

Pour démontrer le théorème 4.1, il faut montrer que si $E \subset X \times Y$ n'est pas un ensemble de V_o-interpolation alors $V_o(E)$ est analytique. Il suffit de le montrer lorsque X et Y sont dénombrables. En effet, si X et Y sont deux ensembles et $E \subset X \times Y$ n'est pas un ensemble de V_o-interpolation, il existe une fonction $\psi \in c_o(E) \setminus V_o(E)$; ψ étant à support dénombrable, il existe deux ensembles dénombrables, $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$, tel que $\mathrm{Supp}(\psi) \subset X' \times Y'$. Soit $E' = E \cap (X' \times Y')$; pour toute $f \in V_o(E')$, on notera $\tilde{f}$ la fonction définie sur E par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E'$, $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in E \setminus E'$. Puisque $f \in V_o(E')$, il existe $h \in V_o(X,Y)$ telle que $h|_{E'} = f$; alors $h\chi_{X' \times Y'} \in V_o(X,Y)$ [$V_o(X,Y)$ est un idéal dans $V(X,Y)$], et $\tilde{f} = h\,\chi_{X' \times Y'}|_E$ appartient à $V_o(E)$. E' n'est pas V_o-interpolation car $\psi|_{E'} \notin V_o(E')$ [$\psi = \widetilde{\psi|_{E'}}$]. Si F opère sur $V_o(E)$, F opère aussi sur $V_o(E')$ [pour $f \in V_o(E')$, $F \circ f = (F \circ \tilde{f})|_{E'}$], donc si $V_o(E')$ est analytique, $V_o(E)$ est aussi analytique.

Il suffit donc de démontrer le théorème pour n'importe quel couple d'ensembles dénombrables X et Y. On prend $X = I \subset \hat{D}^\infty$, où I est l'ensemble des fonctions coordonnées sur D^∞, qui est un ensemble de Sidon pour D^∞, comme on l'a vu dans le premier chapitre : $I = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$, où $\alpha_i(x) = x_i$ pour $x = (x_1, x_2, \ldots) \in D^\infty$. On prend $Y = J$ une autre copie de cet ensemble I ; on pose $J = \{\beta_j : j \in \mathbb{N}\}$. Si $G = D^\infty \times D^\infty$ et $\Gamma = \hat{G} = \hat{D}^\infty \times \hat{D}^\infty$, alors $I \times J \subset \Gamma$. Comme I et J sont des ensembles de Sidon, par le corollaire 1.3, $V_o(E) = A(E)$ pour tout $E \subset I \times J$.

Supposons que $E \subset I \times J$ n'est pas un ensemble de V_o-interpolation, et que pour $K \in \mathbb{N}$ la condition (a) de la proposition 4.3 est vérifiée (si on avait (b) on ferait un raisonnement semblable). Alors il existe deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$ vérifiant $|A| \geq |B|$, et tels que pour tout $i \in A$ il existe B_i inclus dans B, $|B_i| = K$, tel que $\alpha_i \otimes \beta_j \in E$ pour tout j dans B_i. Considérons le polynôme trigonométrique à spectre dans E

$$g = \sum_{i\in A} \sum_{j\in B_i} \alpha_i \otimes \beta_j .$$

Alors $\|g\|_\infty = K|A|$, et le théorème 4.1 se déduit du lemme suivant :

LEMME 4.4.
Il existe $M > 0$ tel que si $2^\ell < K^{1/4}$, alors :

$$\int_{G^\ell} \left\| \sum_{S\subset\{1,\dots,\ell\}} |g_{\sum_{k\in S} z_k}| \right\|_\infty dz_1, \dots, dz_\ell \leqslant M\,K|A|$$

où $dz_1, \dots, dz_\ell$ désigne l'intégration par rapport à la mesure de Haar de G^ℓ.

D'après ce lemme, il existe $z_1, \dots, z_\ell$ dans G tels que :

$$\left\| \sum_S |g_{\sum_{k\in S} z_k}| \right\|_\infty \leqslant M\|g\|_\infty$$

donc $f = g/\|g\|_\infty$ et $z_1, \dots, z_\ell$ vérifient les hypothèses de 3.1. Comme cette construction est valable pour tout $K \in \mathbb{N}$, les hypothèses de 3.1 sont vérifiées pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et $A(E) = V_o(E)$ est une algèbre analytique, ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.

La démonstration du lemme 4.4 se fera en trois étapes.

<u>3ème étape</u>. Majoration de $\left\| \sum_S g_{\sum_{k\in S} z_k} \right\|_\infty$ **pour** $(z_1, \dots, z_\ell) \in G^\ell$.

Toutes les fonctions qui vont apparaître dans cette démonstration sont à valeurs réelles, car les caractères de D^∞ ne prennent que les valeurs 1 et -1. On rappelle que pour $u \in D^\infty$, $u = -u$; et, puisque chaque α_i est un caractère ; $\alpha_i(x-u) = \alpha_i(x)\alpha_i(u) = \alpha_i(x+u)$, pour x

et u dans D^∞ (de même pour β_j). Pour chaque $i \in A$ on notera :

$$X_i = \sum_{j\in B_i} \beta_j$$

et alors :

$$g(x,y) = \sum_{i\in A} \alpha_i(x)\ X_i(y) \quad , \quad (x,y) \in G = D^\infty \times D^\infty.$$

Pour $z_k \in G = D^\infty \times D^\infty$, on pose $z_k = (u_k, v_k)$. Si on fixe $(x,y) \in G$, il existe des nombres réels c_s, $|c_s| = 1$, tels que :

$$\sum_{S\subset\{1,\dots,\ell\}} |g_{\sum_{k\in S} z_k}(x,y)| = \left|\sum_S \sum_{i\in A} c_s\ \alpha_i(x+\sum_S u_k)\ X_i(y+\sum_S v_k)\right| =$$

(1)

$$= \left|\sum_{i\in A} \alpha_i(x) \sum_S c_s \alpha_i(\sum_S u_k)\ X_i(y+\sum_S v_k)\right|$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport à l'indice i en notant que $\alpha_i(\sum_S u_k)\ \alpha_i(\sum_T u_k) = \alpha_i(\sum_{S\triangle T} u_k)$:

$$(1) \leqslant |A|^{1/2}\left\{\sum_{i\in A} \sum_{S,T} c_S\ c_T\ \alpha_i(\sum_{S\triangle T} u_k)\ X_i(y+\sum_S v_k) X_i(y+\sum_T v_k)\right\}^{1/2}.$$

On sépare la somme $\sum_{S,T}$ en deux parties : lorsque $S = T$, et lorsque $S \neq T$. Comme $\alpha_i^2 = 1$, $c_s^2 = 1$, et que pour a et b positifs, $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}$, on arrive à :

$$(1) \leqslant |A|^{1/2}\left\{\left[\sum_{i\in A} \sum_S (X_i(y + \sum_S v_k))^2\right]^{1/2} +\right.$$

$$+ \left[\sum_{S\neq T} \left| \sum_{i\in A} \alpha_i \left(\sum_{S\triangle T} u_k\right) X_i \left(y+\sum_S u_k\right) \ X_i \left(y+\sum_T v_k\right) \right| \right]^{1/2} \Bigg\} = (2)$$

Posons $d_i = \left[\sum_S \left(X_i \left(y+\sum_S v_k\right)\right)^2 \right]^{1/2}$ pour $i \in A$. En fixant i, il existe des nombres réels a_S tels que $\sum_S a_S^2 = 1$ vérifiant :

$$d_i = \sum_S a_S X_i \left(y+\sum_S v_k\right) = \sum_S a_S \sum_{j\in B_i} \beta_j(y) \ \beta_j\left(\sum_S v_k\right) =$$

$$= \sum_{j\in B_i} \beta_j(y) \sum_S a_S \ \beta_j\left(\sum_S v_k\right).$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport à l'indice j et séparons $\sum_{S,T}$ en $\sum_{S=T}$ et $\sum_{S\neq T}$ à nouveau :

$$d_i \leqslant |B_i|^{1/2} \left[\sum_{j\in B_i} \left(\sum_S |a_S|^2 + \sum_{S\neq T} a_S a_T \ \beta_j\left(\sum_{S\triangle T} v_k\right) \right) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K^{1/2} \left(K + \sum_{S\neq T} |a_S| \ |a_T| \left| X_i\left(\sum_{S\triangle T} v_k\right) \right| \right)^{1/2}$$

Appliquons de nouveau Cauchy-Schwarz par rapport aux S,T tels que $S\neq T$, en notant que $\sum_{S\neq T} |a_S|^2 |b_S|^2 \leqslant \left(\sum_S |a_S|^2\right)^2 = 1$:

$$d_i \leqslant \left(K^2 + K\left(\sum_{S\neq T} \left|X_i\left(\sum_{S\triangle T} v_k\right)\right|^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2}$$

En revenant à (2) on obtient la majoration :

$$\left\| \sum_S |g_{\sum\limits_{k\in S} z_k}| \right\|_\infty \leqslant |A|^{1/2} \left\{ |A|K^2 + \sum_{i\in A} K \left(\sum_{S\neq T} |X_i(\sum_{S\triangle T} v_k)|^2 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} +$$

$$+ |A|^{1/2} \sup_{(y,y')\in D^\infty \times D^\infty} \left\{ \sum_{S\neq T} | \sum_{i\in A} \alpha_i (\sum_{S\triangle T} u_k) X_i(y) X_i(y') | \right\}^{1/2} .$$

Notons I_1 et I_2 les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{G^\ell} \left\{ |A|K^2 + K \sum_{i\in A} \left(\sum_{S\neq T} |X_i(\sum_{S\triangle T} v_k)|^2 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} dz_1 \ldots dz_\ell$$

$$I_2 = \int_{G^\ell} \sup_{(y,y')\in (D^\infty)^2} \left\{ \sum_{S\neq T} | \sum_{i\in A} \alpha_i (\sum_{S\triangle T} u_k) X_i(y) X_i(y') | \right\}^{1/2} dz_1 \ldots dz_\ell .$$

Dans les prochaines étapes on va démontrer les majorations $I_1 \leqslant \sqrt{2}\ |A|^{1/2}K$ et $I_2 \leqslant 2\pi^{1/4}|A|^{1/2}K$. Ceci finira la preuve du lemme 4.4, en posant $M = \sqrt{2} + 2\pi^{1/4}$.

4ème étape. $I_1 \leqslant \sqrt{2}\ |A|^{1/2}K$.

Comme $(\int f)^{1/2} \geq \int f^{1/2}$ pour $f \geq 0$, on a :

$$I_1 \leqslant \left\{ |A|K^2 + K \sum_{i\in A} \left(\sum_{S\neq T} \int_{G^\ell} |X_i(\sum_{S\ T} v_k)|^2 dz_1 \ldots dz_\ell \right)^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Si $S \neq T$ soit $\psi : G^\ell \longrightarrow D^\infty$ la fonction qui a $(z_1,\ldots,z_\ell)$ fait correspondre $\sum_{k\in S\triangle T} v_k$; ϕ est un homomorphisme continu et surjectif, donc la mesure $\phi_{m_{G^\ell}}$ image de la mesure de Haar de G^ℓ est la mesure de Haar de D^∞, et on a :

$$\int_{G^\ell} |X_i(\sum_{S\triangle T} v_k)|^2\, dz_1 \ldots dz_\ell = \int_{G^\ell} |X_i \circ \phi|^2 dm_{G^\ell} =$$

$$= \int_{D^\infty} |X_i(x)|^2 dx = K.$$

Comme il y a $2^{2\ell}$ paires (S,T) de sous-ensembles de $\{1,\ldots,\ell\}$, on conclut (via $2^\ell \leqslant K^{1/4}$) :

$$I_1 \leqslant \{|A|K^2 + K|A|\; 2^\ell K^{1/2}\}^{1/2} \leqslant (|A|K^2 + |A|K^{7/4})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\; |A|^{1/2} K.$$

<u>5ème étape</u>. $I_2 \leqslant 2\pi^{1/4}|A|^{1/2}K.$

En raisonnant comme dans l'étape précédente on obtient :

$$I_2 \leqslant \left\{\sum_{S\neq T} \int_{G^\ell} \sup_{y,y'} |\sum_{i\in A} \alpha_i (\sum_{S\triangle T} u_k)\; X_i(y) X_i(y')\, |dm_{G^\ell}\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{2^{2\ell} \int_{D^\infty} \sup_{y,y'} |\sum_{i\in A} \alpha_i(x)\; X_i(y)\; X_i(y')\,|dx\right\}^{1/2}$$

Ici, la suite $\{\alpha_i\}_{i\in A}$ joue le rôle d'une suite de Rademacher, et on va la remplacer par une suite de variables gaussiennes. Soit g une variable gaussienne standard et $(g_i)_{i\in A}$ une suite de copies indépendantes de g définies sur un espace Ω ; si les $(f_i)_{i\in A}$ sont des éléments d'un espace de Banach, et si $(\epsilon_i)_{i\in A}$ est une suite de Rademacher définie sur un espace Ω', on a :

$$(a) = \int_\Omega \|\sum_{i\in A} g_i(\omega) f_i\| d\omega = \int_{\Omega'}\int_\Omega \|\sum_{i\in A} g_i(\omega)\ \epsilon_i(\omega') f_i\| d\omega\ d\omega'$$

puisque les (g_i) sont symétriques et indépendantes ; en posant $g_i(\omega) = \sigma_i(\omega)|g_i(\omega)|$, où $\sigma_i = +1$, et en changeant l'ordre d'intégration on a :

$$(a) = \int_\Omega \left(\int_{\Omega'} \|\sum_{i\in A} |g_i(\omega)|\sigma_i(\omega)\epsilon_i(\omega') f_i\| d\omega'\right) d\omega.$$

Comme $\sigma_i = +1$ et (ϵ_i) est une suite symétrique :

$$(a) = \int_\Omega \int_{\Omega'} \|\sum_{i\in A} |g_i(\omega)|\epsilon_i(\omega') f_i\| d\omega' d\omega.$$

En changeant à nouveau l'ordre d'intégration on arrive à :

$$(a) \geq \int_{\Omega'} \|\int_\Omega \sum_{i\in A} |g_i(\omega)|\epsilon_i(\omega') f_i d\omega\| d\omega' =$$

$$= \mathbb{E}(|g|) \int_{\Omega'} \|\sum_{i\in A} \epsilon_i(\omega') f_i\| d\omega' \qquad (*).$$

On peut appliquer l'inégalité (*) au cas où $f_i = X_i \otimes X_i \in C(D^\infty \times D^\infty)$, $i\in A$; et la suite de Rademacher est $\{\alpha_i\}_{i\in A}$. Comme $\mathbb{E}(|g|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ on obtient :

$$I_2 \leqslant \left\{2^{2\ell} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_\Omega \sup_{y,y'\in D^\infty} |\sum_{i\in A} g_i(\omega)\ X_i(y)\ X_i(y')| d\omega\right\}^{1/2}.$$

Pour $y = (y_1, y_2, \dots) \in D^\infty$ on pose $\bar{y} = (-y_1, -y_2, \dots) \in D^\infty$; alors $X_i(y) = -X_i(\bar{y})$; donc pour chaque $\omega \in \Omega$ on a :

$$\sup_{y,y'} \left| \sum_{i\in A} g_i(\omega)\ X_i(y)\ X_i(y') \right| = \sup_{y,y'} \left\{ \sum_{i\in A} g_i(\omega)\ X_i(y)\ X_i(y') \right\}.$$

Comme les fonctions X_i ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que :

$$I_2 \leqslant \left\{ 2^{2\ell}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_\Omega \max_{y,y'\in D^n} \left[\sum_{i\in A} g_i(\omega)\ X_i(y)\ X_i(y') \right] d\omega \right\}^{1/2}$$

Soit $\Lambda = D^n \times D^n$; pour chaque $\lambda = (y,y') \in \Lambda$ posons :

$$Z_\lambda(\omega) = \sum_{i\in A} g_i(\omega)\ X_i(y)\ X_i(y')$$

$$Y_\lambda(\omega) = \sqrt{2}\ K \sum_{i\in A} (g_i(\omega)\ X_i(y) + g_i'(\omega)\ X_i(y'))$$

où $(g_i')_{i\in A}$ est une copie indépendante de la suite $(g_i)_{i\in A}$ (l'idée de séparer les variables y et y' remonte à S. Chevet [C]). Alors $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont deux processus gaussiens centrés. On va utiliser le lemme suivant, conséquence du lemme de Slepian, dont on peut trouver la démonstration dans [K], chapitre 15, paragraphes 2 et 3.

LEMME 4.5.

Soit Λ un ensemble fini, et soient $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, et $(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ deux processus gaussiens centrés. Si pour tout couple $\lambda,\mu \in \Lambda$ on a :

$$\|Z_\lambda - Z_\mu\|_2 \leqslant \|Y_\lambda - Y_\mu\|_2$$

alors :

$$\mathbb{E}(\max Z_\lambda) \leqslant 2\mathbb{E}(\max Y_\lambda).$$

Vérifions les hypothèses de ce lemme dans notre cas, pour $\lambda = (y,y')$ et $\mu = (y_1,y_1')$. Comme $|X_i(y)| \leqslant K$, et que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ pour $a,b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|Z_\lambda - Z_\mu\|_2^2 = \sum_{i\in A} (X_i(y)\ X_i(y') - X_i(y_1)\ X_i(y_1'))^2 =$$

$$= \sum_{i\in A} [X_i(y')(X_i(y) - X_i(y_1)) + X_i(y_1)(X_i(y') - X_i(y_1'))]^2$$

$$\leqslant \sum_{i\in A} 2K^2\left\{[X_i(y)-X_i(y_1)]^2 + [X_i(y') - X_i(y_1')]^2\right\} =$$

$$= \|Y_\lambda - Y_\mu\|_2^2.$$

D'après le lemme 4.5, on a :

$$I_2 \leqslant \left\{2^{2\ell}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 4\sqrt{2}\, K \int \max_{y\in D^n} |\sum_{i\in A} g_i(\omega)\, X_i(y)|d\omega\right\}^{1/2}$$

Si on pose, pour chaque $j\in B$, $A_j = \{i\in A : j\in B_i\}$, alors on a :

$$\left|\sum_{i\in A} g_i(\omega)\, X_i(y)\right| = \left|\sum_{i\in A}\ \sum_{j\in B_i} g_i(\omega)\, \beta_j(y)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j\in B} \beta_j(y) \sum_{i\in A_j} g_i(\omega)\right| \leqslant \sum_{j\in B}\left|\sum_{i\in A_j} g_i(\omega)\right|$$

d'où il s'ensuit :

$$\int \max_{y\in D^n} |\sum_{i\in A} g_i(\omega)\, X_i(y)|d\omega \leqslant \sum_{j\in B}\int |\sum_{i\in A_j} g_i(\omega)|d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in B}\left(\int |\sum_{i\in A_j} g_i(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} = \sum_{j\in B} |A_j|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant |B|^{1/2}\left(\sum_{j\in B} |A_j|\right)^{1/2} = |B|^{1/2}\left(\sum_{i\in A} |B_i|\right)^{1/2} =$$

$$= |B|^{1/2}(K|A|)^{1/2} \leqslant K^{1/2}|A|.$$

Alors, on obtient la majoration (via $2^{\ell} \leqslant K^{1/4}$) :

$$I_2 \leqslant \{2^{2\ell} \sqrt{\pi}\ 4\ K(K^{1/2}|A|)\}^{1/2} \leqslant 2\pi^{1/4}\ K|A|^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[B] J. BOURGAIN On the dichotomy problem for tensor algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 793-798.

[BM] J. BOURGAIN, V. D. MILMAN La dychotomie du cotype pour les espaces invariants. C. R. Acad. Sc. Paris 300 (1985), 263-266.

[C] S. CHEVET Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$. Applications aux produits de Wiener abstraits. Sém. Maurey-Schwartz 1977-78. Exposé XIX. Ec. Polytechnique. Paris.

[DU] J. DIESTEL, J. J. UHL Vector mesures. Amer. Math. Soc. 1977.

[GM] G. GRAHAM, C. McGEHEE Essays in commutative harmonic analysis. Springer 1979.

[K] J.-P. KAHANE Some random series of functions. Cambridge University Press 1985.

[KM] Y. KATZNELSON, P. MALLIAVIN Un critère d'analyticité pour les algèbres de restriction. C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965), 4964-4967.

[JS] W. B. JOHNSON, G. SCHECHTMAN On subspaces of L_1 with maximal distance to euclidean space. Proc. Research Workshop on Banach Space Theory (Bor Luh Lin ed.). Univ. of Iowa (1981), 83-96.

[L] L. H. LOOMIS An introduction to abstract harmonic analysis. Van Nostrand (1953).

[MP] B. MAUREY, G. PISIER Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math. 58 (1976), 45-90.

[R] W. RUDIN Fourier analysis on groups. Interscience publishers (1968).

[S] J. D. STEGEMAN Studies in Fourier and tensor algebras. Press Trajectina. Utrecht (1971).

[V] N. Th. VAROPOULOS Tensor algebras over Discretes spaces. J. Funct. Anal. 3 (1969), 321-335.

Exposé no. 3 Année 1985-86

G. da Rocha Filho et A. Gilioli

COMPACTS ASSOCIES A DES SOUS-ESPACES DE $C(K)$

Résumé. Soit K un espace compact de Hausdorff, $p \in K'$ et X un sous-espace fermé de $C(K)$ ne contenant pas c_o. Nous montrons qu'il existe un voisinage ouvert V de p tel que les normes uniformes sur K et sur $K \setminus V$ sont équivalentes dans X, ce qui généralise un résultat de [6]. Nous examinons ensuite la pertinence de l'hypothèse $c_o \not\subset X$, suivant les propriétés topologiques de K.

I. INTRODUCTION

Dans toute la suite K désigne un espace compact de Hausdorff infini et K' l'ensemble de ses points d'accumulation. $C(K)$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies sur K et à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Si $K_o \subset K$, on note $\|f\|_{K_o} = \sup_{x \in K_o} |f(x)|$.

Pour tout ensemble I, $c_o(I)$ est l'espace de Banach des fonctions sur I, à valeurs complexes et tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme uniforme sur I. On pose $c_o = c_o(N)$. Pour tout espace de Banach X et tout ensemble I, la notation $c_o(I) \not\subset X$ signifie que X ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à $c_o(I)$.

DEFINITION 1. Soient K_o un sous-ensemble compact de K et X un sous-espace fermé de $C(K)$. On dit que <u>K_o est associé à X</u> s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour toute fonction f de X on a

$$(1) \qquad \|f\| \leq M\|f\|_{K_o}.$$

La notion de compact associé a été étudiée jusqu'ici plutôt dans le cas où K est un groupe abélien compact (ou localement compact) et X un sous-espace invariant par translation de $C(K)$. Une synthèse des résultats connus dans ce cadre se trouve dans [1].

DEFINITION 2. Soit X un sous-espace fermé de $C(K)$. On dit que <u>le point $p \in K$ a la propriété P par rapport à X</u>, et on note $p \in P(X)$, s'il existe un voisinage ouvert V de p tel que $K \setminus V$ soit associé à X. On dit que <u>X a la propriété P</u>, et on note $X \in P$, si tout point p de K' a la propriété P par rapport à X.

Par compacité, si $X \in P$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in K'$ on ait (1), où K_o désigne le complémentaire d'un voisinage ouvert de p. Il est également facile de voir que tout sous-espace de dimension finie de $C(K)$ a la propriété P. Nous allons étudier des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un sous-espace, ou pour qu'une famille de sous-espaces de $C(K)$, ait la propriété P.

Au chapitre II se trouve le résultat essentiel de ce travail : tout sous-espace X de $C(K)$ ne contenant pas c_o a la propriété P (Théorème 1). Ce théorème est énoncé dans [6] lorsque K est métrisable et en oubliant l'hypothèse que le point p soit un point d'accumulation de K. Nous verrons que l'hypothèse $p \in K'$ est essentielle chaque fois que le compact K est non clairsemé (Proposition 2). Nous finissons ce chapitre par la caractérisation des compacts K pour lesquels la condition $X \not\supset c_o$ est équivalente à la condition $X \subset P$, pour tout sous-espace fermé de X de $C(K)$ (Corollaire 4).

Au chapitre III nous montrons que l'hypothèse $X \not\supset c_o$ est loin d'être nécessaire pour que X ait la propriété P, lorsque K n'est pas métrisable. Tout d'abord nous caractérisons les points d'accumulation p d'un compact K tels que $p \in P(X)$ pour tout sous-espace X de $C(K)$ "presque isométrique" à $c_o(I)$ (Théorème 3). La conséquence la plus intéressante est la suivante : si K est un compact parfait et stonien, alors tout sous-espace de $C(K)$ isométrique à $c_o(I)$ a la propriété P (Corollaire 6).

Si A est un espace topologique, notons $d(A)$ la densité de A, c'est-à-dire, le plus petit cardinal α tel qu'il existe un sous-ensemble D de A, de cardinal α, dense dans A. Au chapitre 4, nous donnons des exemples de conditions suffisantes sur K pour que tout sous-espace X de $C(K)$ tel que $d(x) \leq \alpha$ ait la propriété P (Corollaire 10, Proposition 11). Le chapitre se termine par quelques problèmes.

II. GENERALISATION DU THEOREME DE F. PIQUARD ET CARACTERISATION DES COMPACTS OU L'ON A LA RECIPROQUE.

THEOREME 1. Soient K un compact de Hausdorff infini et X un sous-espace fermé de $C(K)$. Si $c_o \not\subset X$ alors $X \in P$.

Démonstration. Supposons, par absurde, qu'il existe $p \in K'$ tel que $p \notin P(X)$. Nous allons exhiber une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de X vérifiant les conditions suivantes :

a) $0 < c_1 \leq \|f_n\| \leq c_2 < \infty, \quad n \geq 1$

b) $\sup\limits_{x \in K} \sum\limits_{n \geq 1} |f_n(x)| < \infty.$

D'après un critère bien connu de A. Pelczynski [4] on sait qu'alors $c_o \subset X$, contrairement à l'hypothèse.

Par récurrence, on peut construire une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de X, une suite $(W_n)_{n\geq 1}$ de voisinages ouverts de p et une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de points de K vérifiant les conditions suivantes pour $n \geq 1$:

(i) $W_1 = K$, $W_{n+1} \subset W_n$ et $p_j \notin W_{n+1}$ pour $1 \leq j \leq n$

(ii) $p_n \in W_n$, $p_n \neq p$, $|h_n(p_n)| > \frac{3}{4}$

(iii) $\|h_n\| = 1$, $n \geq 1$, et $\|h_n\|_{\complement W_n} < 4^{-n}$, $n \geq 2$

(iv) $\omega(h_j, W_{n+1}) < 4^{-(n+1)}$ pour $1 \leq j \leq n$ (si $f \in C(K)$ et $A \subset K$,

$\omega(f,A) = \sup\limits_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$ est l'oscillation de f sur A).

D'après ces conditions, on a $\|h_n - h_m\| \geq \frac{1}{2}$ si $n \neq m$. Puisque la suite $(h_n(p))_{n\geq 1}$ est bornée, nous pouvons supposer qu'elle converge, quitte à considérer une sous-suite. Nous pouvons alors construire par récurrence une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de X et une suite $(V_n)_{n\geq 1}$ de voisinages ouverts de p (où f_n sera de la forme $h_{k_n+1} - h_{k_n}$, $V_n = W_{k_n}$ et $k_{n+1} \geq k_n+2$) vérifiant les conditions suivantes pour $n \geq 1$:

(j) $V_{n+1} \subset V_n$

(jj) $|f_n(p)| \leq 2^{-1}\, 4^n$

(jjj) $\frac{1}{2} \leq \|f_n\| \leq 2$, $\|f_n\|_{CV_n} \leq 2(4^{-n})$, $\|f_j\|_{V_{n+1}} \leq 4^{-j}$ pour $1 \leq j \leq n$

(jjjj) $\omega(f_j\, , V_{n+1}) < 2\ (4^{-(n+1)})$ pour $1 \leq j \leq n$.

Posons $S(x) = \sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ pour $x \in K$. Si $x \in K \setminus V_1$, $S(x) \leq 2.3^{-1}$; si $x \in \bigcap_{n\geq 1} V_n$, $S(x) \leq 3^{-1}$; si $x \in V_1 \setminus (\bigcap_{n\geq 1} V_n)$, il existe $k \geq 1$ tel que $x \in V_k \setminus V_{k+1}$ et $S(x) \leq \sum_{1\leq j\leq k-1} 4^{-j} + 2 + 2 \sum_{j\geq k+1} 4^{-j} < \infty$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ satisfait donc aux conditions (a) et (b), ce qui conclut la preuve.

Lorsque X est de dimension infinie, l'hypothèse du Théorème 1 est non vide si et seulement si <u>K est non clairsemé</u>, c'est-à-dire, contient un sous-espace non vide, compact et parfait [4]. Montrons que dans ce cas la condition que p appartienne à K' est essentielle pour que $p \in P(X)$.

PROPOSITION 2. Soit K un compact de Hausdorff non clairsemé. Si p est un point isolé de K il existe un sous-espace X de dimension infinie de $C(K)$ tel que $c_o \not\subset X$ et $p \notin P(X)$.

<u>Démonstration</u>. L'espace $K_1 = K \setminus \{p\}$ est non claisemé, donc il existe un sous-espace Y de $C(K_1)$ isomorphe à $\ell^1(N)$ [4]. Soit Y_1 l'ensemble des extensions des fonctions de Y à K qui sont nulles en p et Y_2 l'ensemble des fonctions de $C(K)$ nulles sur K_1. Alors $X = Y_1 \oplus Y_2$ satisfait aux conditions voulues.

Passons à la caractérisation des compacts infinis pour lesquels le Théorème 1 admet une réciproque.

PROPOSITION 3. Soit K un compact de Hausdorff infini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. K est le compactifié d'Alexandroff d'un ensemble infini discret, c'est-à-dire, K' est un ensemble réduit à un élément.

2. Si X est un sous-espace fermé de $C(K)$ de dimension infinie alors $X \notin P$.

3. Si X est un sous-espace fermé de $C(K)$ isomorphe à c_o alors $X \notin P$.

4. Si X est un sous-espace fermé de $C(K)$ isométrique à c_o alors $X \notin P$.

<u>Démonstration</u>. Pour démontrer l'implication $1 \Rightarrow 2$, il suffit de remarquer que si $K' = \{p\}$, le complémentaire de tout voisinage de p est un ensemble fini, donc $p \notin P(x)$ si X est de dimension infinie.

Les implications $2 \Rightarrow 3$ et $2 \Rightarrow 4$ sont évidentes.

Montrons l'implication $4 \Rightarrow 1$ par l'absurde. Si K' possède au moins deux éléments distincts p_1 et p_2, soient A_1 et A_2 des voisinages ouverts et disjoints de p_1 et p_2, respectivement. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(g_n)_{n\geq 1}$) une suite de fonctions continues sur K de norme 1 et avec supports deux à deux disjoints contenus dans A_1 (resp. A_2). Alors l'application de c_o dans $C(K)$ définie par $(a_n)_{n\geq 1} \longmapsto \sum\limits_{n\geq 1} a_n f_n + \sum\limits_{n\geq 1} a_n g_n$ est une isométrie de c_o dans un sous-espace fermé de $C(K)$ tel que $X \in P$, contre l'hypothèse.

COROLLAIRE 4. Soit K un compact infini de Hausdorff. La condition

$c_o \not\subset X$ est équivalente à la condition $X \in P$, pour tout sous-espace fermé X de $C(K)$, si et seulement si K' est réduit à un élément.

III. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE K ET ABONDANCE DE SOUS-ESPACES DE C(K) ISOMETRIQUES OU ISOMORPHES A $c_o(I)$ AYANT LA PROPRIETE P.

Si X et Y sont deux espaces de Banach isomorphes, notons $d(X,Y) = \inf \left\{ \|T\| \, \|T^{-1}\| \text{ , } T : X \to Y \text{ isomorphisme} \right\}$ leur distance de Banach-Mazur.

Nous dirons qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble A est k-disjointe si pour tout $x \in A$ il existe au plus k indices $i \in I$ tels que $x \in A_i$. Evidemment, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est 1-disjointe si et seulement si les A_i sont deux à deux disjoints.

Etant donnés un ensemble infini I et un compact K, nous allons caractériser les points p de K tels que $p \in P(X)$ pour tout sous-espace X de $C(K)$ "presque-isométrique" à $c_o(I)$.

THEOREME 5. Soient $p \in K'$ et I un ensemble infini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Si X est un sous-espace de $C(K)$ isomorphe à $c_o(I)$ et tel que $d(X , c_o(I)) < 2$ alors $p \in P(X)$.

b. Si X est un sous-espace de $C(K)$ isométrique à $c_o(I)$ alors $p \in P(X)$.

c. Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ouverts non vides de K, deux à deux disjoints, il existe un voisinage ouvert V de p tel que $A_i \not\subset V$, pour tout $i \in I$.

d. Pour tout $k \geq 1$ et toute famille $(A_i)_{i \in I}$ k-disjointe d'ouverts non vides de K il existe un voisinage ouvert V de p tel que $A_i \not\subset V$, pour tout $i \in I$.

Démonstration. Les implications $a \Rightarrow b$ et $d \Rightarrow c$ sont évidentes.

L'implication $b \Rightarrow c$ s'obtient facilement par l'absurde. En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts non vides de K, deux à deux disjoints, telle que pour tout voisinage V de p, il existe $i\in I$ tel que $A_i \subset V$. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions de norme 1 de $C(K)$ telle que le support de chaque f_i est contenu dans A_i, le sous-espace fermé X de $C(K)$ engendré par $(f_i)_{i\in I}$ est isométrique à $c_o(I)$ et $p \notin P(X)$, contrairement à l'assertion b.

L'implication $c \Rightarrow d$ s'obtient par récurrence. Le cas $k = 1$ correspond à l'assertion c. Supposons l'assertion d vraie pour un entier $k \geq 1$ et considérons une famille $(A_i)_{i\in I}$ $(k+1)$-disjointe d'ouverts non vides de K. Soient $I_1 = \left\{\{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}\} \subset I \,,\ A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset\right\}$, $I_2 = \left\{i\in I,\ i \notin A,\ \forall\, A\in I_1\right\}$.

L'ensemble $J = I_1 \cup I_2$ a même cardinal que l'ensemble I et la famille $(B_j)_{j\in J}$ définie par :

$$B_j = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k+1}} \,,\ j = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \in I_1 \,,\quad B_j = A_j \,,\ j\in I_2$$

est k-disjointe. L'hypothèse de récurrence permet de trouver un voisinage ouvert V de p tel que $B_j \not\subset V$ pour tout $j\in J$. Il est clair que $A_i \not\subset V$ pour tout $i\in I$.

Il reste à prouver l'implication $c \Rightarrow a$. Soit X un sous-espace de $C(K)$ tel qu'il existe un isomorphisme $T : c_o(I) \to X$ vérifiant $\|T\|\,\|T^{-1}\| = a < 2$. Notons $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de $c_o(I)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ tel que $a(1+\varepsilon) < 2$ et posons, pour tout $i\in I$:

$$f_i = T(e_i) \,,\quad A_i = \left\{x\in K \,,\ |f_i(x)| > (\|T^{-1}\|(1+\varepsilon))^{-1}\right\}.$$

Puisque $\|f_i\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}$, A_i est un ouvert non vide de K, pour tout $i\in I$. Si $x\in A_i \cap A_j$, soient α_i et α_j deux nombres complexes de module 1 tels que $\alpha_i f_i(x) = |f_i(x)|$ et $\alpha_j f_j(x) = |f_j(x)|$. Alors

$$1 = \|\alpha_i e_i + \alpha_j e_j\| \geq \|T\|^{-1}\|\alpha_i f_i + \alpha_j f_j\| \geq \|T\|^{-1}(|f_i(x)| + |f_j(x)|) \geq 2(a(1+\varepsilon))^{-1}$$

d'où $a(1+\varepsilon) \geq 2$, ce qui contredit le choix de ε et prouve que les A_i sont deux à deux disjoints.

Remarquons que $\|\sum_{i\in I} |f_i|\| \leq \|T\|$. En effet, si $x \in K$ et F est une partie finie de I, soit, pour chaque $i \in F$, α_i un nombre complexe de module 1 tel que $\alpha_i f_i(x) = |f_i(x)|$. Alors $\sum_{i\in F} |f_i(x)| = \sum_{i\in F} \alpha_i f_i(x) \leq \|\sum_{i\in F} \alpha_i f_i\| = \|T(\sum_{i\in F} \alpha_i e_i)\| \leq \|T\|$.

D'après la condition c il existe un voisinage ouvert V de p tel que $A_i \not\subset V$ pour $i \in I$, montrons que $K_o = K \setminus V$ est associé à X. Soit $f \in X$ tel que $\|f\| = 1$, alors $f = T(\sum_{i\in I} a_i e_i)$ et il existe $i_o \in I$ tel que

$|a_{i_o}| = \|\sum_{i\in I} a_i e_i\| \geq \|T\|^{-1}$. Soit $x_o \in A_{i_o} \cap K_o$, alors on a

$$\|f\|_{K_o} \geq |f(x_o)| \geq |a_{i_o} f_{i_o}(x_o)| - \sum_{i\neq i_o} |a_i f_i(x_o)| \geq 2|a_{i_o} f_{i_o}(x_o)| - |a_{i_o}| \|\sum_{i\in I} |f_i|\|$$

$$\geq |a_{i_o}|(2|f_{i_o}(x_o)| - \|T\|) \geq \|T\|^{-1}(2(\|T^{-1}\|(1+\varepsilon))^{-1} - \|T\|)$$

$$\geq 2(a(1+\varepsilon))^{-1} - 1 > 0$$

ce qui montre que K_o est associé à X.

REMARQUE 1. Nous ne savons pas s'il est possible d'éliminer la condition $d(X, c_o(I)) < 2$ de l'assertion (a) du théorème 5. Par ailleurs, un espace de Banach X satisfaisant $d(X, c_o(I)) < 2$ n'est pas forcément isométrique à $c_o(I)$. Par exemple, soit X l'espace vectoriel $c_o(\mathbb{N})$ muni de la norme $|||\sum_{n\geq 1} a_n e_n||| = \sup_{n\geq 1} |a_n| + (\sum_{n\geq 1} 4^{-n} |a_n|^2)^{1/2}$; l'application identité $j : X \to c_o(\mathbb{N})$ satisfait $\|j\|\|j^{-1}\| < 2$, mais la boule unité de X est strictement convexe et X n'est pas isométrique à $c_o(\mathbb{N})$. Par contre, si K et H sont deux ensembles compacts de Hausdorff et $d(C(K), C(H) < 2$ alors $C(K)$ et $C(H)$ sont isométriques ([5], p. 154).

Le théorème 5 permet d'exhiber des compacts K tels que tout sous-espace de $C(K)$ isométrique à $c_o(I)$ ait la propriété P, et des compacts K où ceci n'a pas lieu. Rappelons qu'un espace topologique est stonien si l'adhérence de tout ouvert est ouverte, ou encore, si deux ouverts disjoints ont des adhérences disjointes.

COROLLAIRE 6. Soit K un compact parfait et stonien. Alors tout sous-espace de $C(K)$ isométrique à $c_o(I)$ a la propriété P.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides de K, deux à deux disjoints, montrons que la condition c du théorème 5 est satisfaite pour tout point $p\in K'$. Pour chaque $i\in I$, soit B_i un sous-ensemble ouvert non vide de A_i tel que $\overline{B}_i \subset A_i$ et C_i un sous-ensemble ouvert non vide de B_i tel que l'ensemble ouvert et fermé $D_i = \overline{B}_i \setminus \overline{C}_i$ soit non vide. Si $p \notin \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{B}_i} = B$, il suffit de prendre $V = K \setminus B$. Si $p \in B = (\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{C}_i}) \cup (\overline{\bigcup D_i})$, on pose $V = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{C}_i}$ si p appartient à cet ouvert, $V = \overline{\bigcup_{i\in I} D_i}$ sinon.

REMARQUE 2. Pour chaque cardinal α, il y a un compact parfait et stonien K tel que $C(K)$ a un sous-espace isométrique à $c_o(I)$, avec $|I| = \alpha$. En effet, on sait que $L^\infty([0,1])$ est isométrique à $C(K_o)$, où K_o est un compact parfait et stonien. Considérons la somme topologique de α copies de K_o et soit K le compactifié de Stone-Čech de cette somme. Alors K est un compact parfait et stonien, et comme il contient α ouverts non vides et disjoints 2 à 2, $C(K)$ possède un sous-espace isométrique à $c_o(I)$.

COROLLAIRE 7. Soit $p \in K'$. Les conditions suivantes sont suffisantes pour qu'il existe un sous-espace fermé X de $c(K)$, isométrique à c_o, tel que $p \notin P(X)$:

(1) p est E_1, c'est-à-dire, admet un système fondamental de voisinages dénombrable.

(2) p est point d'accumulation d'un sous-ensemble dénombrable de points isolés de K.

En effet, dans les deux cas, il est facile d'exhiber une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'ouverts non vides deux à deux disjoints telle que la condition c) du théorème 5 soit en défaut.

COROLLAIRE 8. Soit K un compact infini satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

(1) K possède un ouvert métrisable ayant un point d'accumulation

(2) K possède un nombre infini de points isolés.

Alors il existe un sous-espace fermé X de $C(K)$, isométrique à c_o, tel que $X \notin P$.

En particulier, si K est un compact infini et clairsemé ou si K est le compactifié de Stone-Čech $\beta\Gamma$ d'un espace Γ infini muni de la topologie discrète, il existe un sous-espace X de $C(K)$ isométrique à c_o tel que $X \notin P$. Le corollaire 6 n'est donc pas valable pour des compacts stoniens non parfaits : βN fournit un contre-exemple.

IV. CONDITIONS SUFFISANTES POUR QUE TOUT SOUS-ESPACE DE C(K) DE DENSITE α AIT LA PROPRIETE P.

Etant donné un cardinal α, nous allons exhiber des compacts K tels que tout sous-espace de densité α de $C(K)$ (voir Ch. I) ait la propriété P. Par exemple, si dans l'assertion c du théorème 5 nous éliminons la condition que les ouverts soient deux à deux disjoints, nous obtenons le résultat suivant.

PROPOSITION 9. Soient K un compact infini, $p \in K'$ et I un ensemble de cardinal infini α. Supposons vérifiée la condition suivante :

c'. Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ouverts non vides de K, il existe un voisinage ouvert V de p tel que $A_i \not\subset V$, pour tout $i \in I$.

Alors pour tout sous-espace X de $C(K)$ tel que $d(X) \leq \alpha$, $p \in P(X)$.

<u>Démonstration</u>. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille dense d'éléments non nuls de X, étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de poser, pour tout $i \in I$, $A_i = \left\{ x \in K \ , \ |f_i(x)| > (1+\varepsilon)^{-1}\|f_i\| \right\}$. Si V est le voisinage de p fourni par la condition c', on a alors, pour toute fonction $f \in X$, $\|f\| \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{CV}$.

Voici un cas où cette proposition s'applique : soit ω_1 le premier ordinal non dénombrable et soit $K = [0, \omega_1]$ l'ensemble des ordinaux $\omega \leq \omega_1$, muni de la topologie de l'ordre ; alors $\omega_1 \in P(X)$ pour tout sous-espace séparable X de $C(K)$.

COROLLAIRE 10. Soit K un groupe topologique compact infini. Alors tout sous-espace X de $C(K)$ tel que $d(X) < d(C(K))$ a la propriété P.

<u>Démonstration</u>. Puisque K est un groupe topologique, il suffit de montrer que la condition c' est vérifiée pour $p = e$, l'élément neutre de K, lorsque I est un ensemble de Cardinal $d(X)$. Soit $(V_j)_{j\in J}$ un système fondamental

de voisinages de e, où J est un ensemble de cardinal $d(C(K))$ (pour tout compact infini, $d(C(K)) = \omega(K)$, où $\omega(K)$ est le plus petit cardinal β tel qu'il existe une base d'ouverts de K de cardinal β [2] ; lorsque K est un groupe compact, on montre facilement que $\omega(K)$ est aussi le plus petit cardinal β tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de e de cardinal β).

Etant donnée la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ouverts non vides de K, soit $p_i \in A_i$ et $B_i = p_i^{-1} A_i$, pour $i \in I$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de voisinages de e, donc il existe $j_o \in J$ tel que $B_i \not\subset V_{j_o}$ pour tout $i \in I$ (car $|I| < |J|$). Soit W un voisinage symétrique de e tel que $WW \subset V_{j_o}$, alors $A_i \not\subset W$ pour tout $i \in I$ (sinon, il y aurait $i_o \in I$ tel que $B_{i_o} = p_{i_o}^{-1} A_{i_o} \subset W.W \subset V_{j_o}$).

D'autres exemples de compacts K suffisamment "grands" pour assurer l'abondance de sous-espaces de $C(K)$ ayant la propriété P sont donnés par la proposition suivante.

PROPOSITION 11. Soient L un ensemble de cardinal infini β, $(K_\ell)_{\ell\in L}$ une famille de compacts non réduits à un élément et $K = \prod_{\ell\in L} K_\ell$. Alors tout sous-espace X de $C(K)$ tel que $d(X) < \beta$ a la propriété P.

<u>Démonstration</u>. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille dense d'éléments de X telle que $|I| = d(X)$. Pour chaque $i \in I$ soit J_i une partie dénombrable de L telle que f_i ne dépend que des coordonnées dans J_i [2]. Posons $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, alors $|J| = |I| < \beta$ et toute fonction f de X ne dépend que des coordonnées dans J. Soit $p = (p_\ell)_{\ell\in L} \in K'$, alors pour tout $\ell_o \in L \setminus J$ et tout voisinage ouvert Ω_{ℓ_o} de p_{ℓ_o} dans K_{ℓ_o}, $\Omega_{\ell_o} \neq K_{\ell_o}$, le compact

$K_o = (\complement \Omega_o) \times (\prod_{\ell\in L\setminus\{\ell_o\}} K_\ell)$ est associé à X (avec constante $M = 1$ dans (1), K_o est une <u>frontière</u> pour X).

COROLLAIRE 12. Soit K un produit non dénombrable de compacts non réduits à un point. Alors tout sous-espace séparable de $C(K)$ a la propriété P.

COROLLAIRE 13. Pour tout espace de Banach E il existe un ensemble compact K tel que $C(K)$ contient un sous-espace isométrique à E, et tel que tout sous-espace de $C(K)$ isomorphe à E a la propriété P.

Démonstration. Si K_1 est la boule unité du dual E' de E muni de la topologie $\sigma(E',E)$, il suffit de plonger isométriquement E dans $C(K_1^L)$, où L est un ensemble de cardinal $\beta > d(E)$. Remarquons que pour assurer que $C(K)$ a juste un sous-espace isométrique à E ayant la propriété P, il suffit de plonger E dans $C(K_1 \times [0,1])$.

Quelques problèmes

Les propositions précédentes fournissent des exemples de compacts K tels que tout sous-espace séparable de $C(K)$ a la propriété P. Peut-on caractériser les compacts K ayant cette propriété ?

En particulier : existe-t-il un compact stonien tel que tout sous-espace séparable de $C(K)$ a la propriété P ? Peut-on caractériser les compacts K dyadiques (c'est-à-dire, il existe un cardinal α et une application surjective et continue de $[0,1]^\alpha$ dans K) tels que tout sous-espace séparable de $C(K)$ a la propriété P ?

Bibliographie

[1] DECHAMPS-GONDIM, M. Sur les compacts associés aux ensembles lacunaires, les ensembles de Sidon et quelques problèmes ouverts. Publ. Math. d'Orsay, 84-01.

[2] ENGELKING, R. Outline of general topology. Amsterdam, North-Holland, 1977.

[3] GILIOLI, A. et ROCHA FILHO, G. Compacts associés à des sous-espaces de C(K). A paraître aux C. R. Acad. Sc. Paris.

[4] LACEY, H. E. The Isometric theory of classical Banach spaces. Springer-Verlag, 1974.

[5] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces. Lecture Notes in Math. 338. Springer-Verlag 1973.

[6] LUST-PIQUARD, F. L'espace de fonctions presque périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur. Colloquium Math. 41 (1979), 273-

No. d'impression 898
2ème trimestre 1987