UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N° 29

LES SEMI-GROUPES ET LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

par Philippe BENILAN
Jacques DENY
Francis HIRSCH

Deuxième année 1971-1972

TABLE DES MATIERES

Exposé n°1 : A. DAMLAMIAN

Opérateurs maximaux monotones et équations d'évolution. (19 p.)

Exposé n°2 : J.P. ROTH

Opérateurs dissipatifs invariants par translation. (15 p.)

Exposé n°3 : A. DAMLAMIAN

Méthode de monotonie dans certains problèmes d'évolution non linéaires dépendant du temps. Un résultat de H. Brézis. (16 p.)

Exposé n°4 : H. ATTOUCH

"Rafle" par un convexe variable, d'après J.J. Moreau. (09 p.)

Exposé n°5 : T. de GROMARD

Espaces $BV(\Omega)$. (27 p.)

Exposé n°6 : Ph. BENILAN

Equations d'évolution du second ordre. (19 p.)

-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les équations d'évolution

Orsay 1971-1972

(N°1)

Exposé de Alain DAMLAMIAN

"OPERATEURS MAXIMAUX MONOTONES ET EQUATIONS D'EVOLUTION"

I - Opérateurs (multivoques).

Définitions. On dit que ϕ est une multiapplication ou un opérateur multivoque de E dans F, de domaine $D(\phi)$ si et seulement si ϕ est une application de E à valeurs dans $\mathcal{P}(F)$. On identifie toujours ϕ avec "son graphe" dans $E \times F$ et l'on écrit indifféremment :

$y \in \phi(x)$ ou $[x,y] \in \phi$. On définit $D(\phi)$ par $D(\phi) = \{x ; \phi x \neq \emptyset\}$. On définit également l'image de ϕ par $R(\phi) = \bigcup_{x \in E} \phi x$.

. Opérations sur les multiapplications.

Par définition ϕ^{-1} est une multiapplication de F dans E à domaine $R(\phi)$ et à image $D(\phi)$. Son graphe est le symétrique du graphe de ϕ. Si F est un espace vectoriel, on définit de manière évidente l'opérateur multivoque $\lambda\phi_1 + \mu\phi_2$ lorsque ϕ_1 et ϕ_2 sont des multiapplications de E dans F, avec la convention suivante :

$$\emptyset + P = \emptyset \quad \text{pour tout} \quad P \in \mathcal{P}(F)$$
$$0 \cdot \emptyset = \{0\} .$$

. On appelle section de ϕ toute application univoque $\gamma : D(\phi) \rightarrow F$ telle que $\gamma(x) \in \phi(x)$, $\forall x \in E$.

II - Opérateurs monotones dans un espace de Hilbert H réel.

On note la norme et le produit scalaire de H par $|.|$ et $(.,.)$.

2.1. **Définition.** On dit que A est un opérateur monotone dans H, si A est une multiapplication de H dans lui-même et si on a :

$$[x_i,y_i] \in A\ ,\ i=1,2 \implies (y_1-y_2,x_1,x_2) \geqslant 0\ .$$

2.2. **Définition équivalente.** A est monotone dans H si et seulement si on a, $\lambda \geqslant 0$, $[x_i,y_i] \in A$, $i=1,2 \implies$

(2.2,5) $$|x_1+\lambda y_1 - (x_2+\lambda y_2)| \geqslant |x_1-x_2|$$

($-A$ est dit dissipatif).

Démonstration : elle provient immédiatement de l'égalité :

$$|(x_1-x_2) + \lambda(y_1-y_2)|^2 = |x_1-x_2|^2 + \lambda^2(y_1-y_2)^2 + 2\lambda(y_1-y_2,x_1-x_2)\ .$$

Corollaire. Si A est monotone, $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$ est une application univoque contractante pour tout λ positif défini sur son domaine.

Démonstration : (2.2,5) implique : $i=1,2$

$$z_i \in D((I+\lambda A)^{-1}) \iff \exists [x_i,y_i] \in A\ ,\ x_i+\lambda y_i = z_i \quad \text{et}$$

$$(I+\lambda A)^{-1}\ z_i = x_i \implies |z_1-z_2| \geqslant |x_1-x_2|\ .$$

D'où l'univocité de $(I+\lambda A)^{-1}$.

2.3. **Définition.** Un opérateur A est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones, ordonné par l'inclusion de leurs graphes dans $H \times H$.

2.4. **Exemples** : .Graphes monotones : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante définit un opérateur $\tilde{f} : x \longmapsto [f(x^-),f(x^+)] \cap \mathbb{R}$ qui est monotone.

.Sur un Hilbert H : Si J est une contraction de $D \subset H$ alors $I-J$ est monotone.

.Si A est monotone, il en est de même de A^{-1}, λA $(\lambda \geq 0)$ de la fermeture de A au sens des graphes, dans $H \times Hw$ ainsi que celle de A dans $Hw \times H$; de l'opérateur $\widetilde{A}$ défini par $\widetilde{A}x = \overline{\text{conv } Ax}$.

.Soit A un opérateur multivoque sur H espace de Hilbert. Soit $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$. L'opérateur $\mathcal{A}$ suivant appelé prolongement canonique de A à $\mathcal{H}$

$\mathcal{A}u = \{v \in \mathcal{H},\ v(t) \in Au(t)\ \text{p.p.t}\}$ est monotone sur $\mathcal{A}$ dès que A est monotone sur H.

.Si ϕ est une fonction convexe s.c.i. propre sur H, son sous-différentiel $\partial\phi$ est monotone.

$$\partial\phi(x) = \{z \in H : \forall y \in H : \phi(y) - \phi(x) \geq (y-x, z)\} .$$

Caractérisation des opérateurs maximaux monotones.

2.5. Théorème de Minty. Soit H un espace de Hilbert (réel). Sont équivalents :

1) A est maximal monotone dans H

2) $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie de H pour tout λ positif ou nul.

3) A est monotone et il existe λ positif tel que $(I+\lambda A)$ est surjectif.

Pour une démonstration, voir [2] exposé n°3.

Exemple d'opérateurs maximaux monotones : les graphes maximaux monotones.

Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones.

2.6. Proposition. Si A est maximal monotone, le sont aussi A^{-1}, λA $\lambda \geq 0$ et l'on a $\widetilde{A} = A = \overline{A}$ (fermeture de A dans $H \times Hw$) donc A est à valeurs convexes fermées, et est fermé dans $H \times Hw$ et $Hw \times H$.

2.7. Proposition. $\overline{D(A)}$ est convexe et $\forall x \in H$ $\lim_{\lambda \searrow 0} J_\lambda^A x = \text{proj}_{\overline{D(A)}}\, x$.

Démonstration : Soit $x \in H$, $x_\lambda = J_\lambda^A x$. $C = \overline{\text{conv } D(A)}$.

$\exists\, y_\lambda \in Ax_\lambda$ tel que $x_\lambda + \lambda y_\lambda = x$, c'est-à-dire $y_\lambda = \dfrac{x - x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$.

Soit $[x_o, y_o] \in A$, on a alors $(\frac{x-x_\lambda}{\lambda} - x_o, x_\lambda - x_o) \geqslant 0$. Donc en particulier :

$$|x_\lambda|^2 \leqslant (x, x_\lambda - x_o) + (x_\lambda, x_o) - \lambda(y_o, x_\lambda - x_o) \; . \tag{2.8}$$

En majorant les produits scalaires, on voit que $|x_\lambda|$ est borné. Soit donc λ_n une suite décroissant vers 0 telle que $x_{\lambda_n} \rightharpoonup x'$. Il est clair que $x' \in C$ car un convexe fermé est faiblement fermé. Passant à la limite dans (2.8) on obtient :

$$|x'|^2 \leqslant \underline{\lim}|x_{\lambda_n}|^2 \leqslant (x, x'-x_o) + (x', x_o) \quad \text{pour tout} \quad x_o \in D(A)$$

et par continuité et convexité pour tout $x_o \in C$. Ceci montre que x' est <u>la</u> projection de x sur C, donc $x_\lambda \xrightarrow[\lambda \searrow 0]{} x'$. Faisons alors $x_o = x'$ dans (2.8) on obtient

$$\limsup |x_\lambda|^2 \leqslant |x'|^2$$ d'où la convergence forte de x_λ vers x'.

Mais alors comme $x_\lambda \in D(A)$, $x' \in \overline{D(A)}$ et donc $C = \overline{D(A)}$.

<u>Notation</u> : Si C est un convexe fermé, C^o représente la projection de 0 sur C et $|C| = |C^o|$.

<u>Définition</u>. On note A^o l'opérateur $x \longmapsto (Ax)^o$ défini sur $D(A)$.

2.9. <u>L'approsimation Yosida</u>. Ainsi que dans le cas linéaire on associe à A la famille résolvante J_λ et l'approximation Yosida $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$.

L'équation résolvante est remplacée par

$$\lambda, \mu > 0 \implies J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda x\right) .$$

2.10. <u>Proposition</u>. <u>On a</u> :

i) $A_\lambda \subset AJ_\lambda$

ii) A_λ <u>est maximal monotone univoque, lipchitzien de rapport</u> $1/\lambda$

iii) $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ <u>pour</u> λ, μ <u>positifs</u>

iv) $\forall\, x \in D(A)$, $\lambda \searrow 0 \Longrightarrow |A_\lambda x| \nearrow |A^o x|$ et $A_\lambda x \longrightarrow A^o x$

v) $\forall\, x' \notin D(A)$, $|A_\lambda x| \nearrow +\infty$ $(\lambda \searrow 0)$.

Démonstration : i) $i=1,2$, on a $x_i = z_i + \lambda y_i$ avec $[z_i, y_i] \in A$ par définition de $z_i = J_\lambda x_i$ donc $y_i = A_\lambda x_i \in A z_i$:

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) = (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_2 - J_\lambda x_1) + (A_\lambda x_o - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2).$$

Comme $A_\lambda x_i \in A J_\lambda x_i$, et que A est monotone on a

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geqslant \lambda |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|^2$$

d'où $|x_1 - x_2| \geqslant \lambda |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|$. Donc A_λ est lipchitzien de rapport $1/\lambda$ A_λ est monotone car $I - J_\lambda$ l'est.

Enfin A_λ est maximal monotone car pour y dans H on peut résoudre $(I + \lambda A_\lambda)x = y \Longleftrightarrow 2x - J_\lambda x = y$. En effet ceci revient à dire que x est point fixe de l'application $x \longmapsto \frac{1}{2}(y + J_\lambda x)$ qui est une contraction de H de constante de lipschitz $\frac{1}{2}$; x existe donc et est unique.

iii) est évident car $[x, y] \in A_\lambda \Longleftrightarrow [x - \lambda y, y] \in A$.

iv) si $x \in D(A)$ on a $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ donc $(A^o x - A_\lambda x, x - J_\lambda x) \geqslant 0$ d'où puisque $x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x$:

$$|A_\lambda x|^2 \leqslant (A^o x, A_\lambda x) \quad \text{et} \quad |A_\lambda x| \leqslant |A^o x| = |Ax|.$$

Substituant A_μ à A on a $\forall\, x \in H$: $|A_{\lambda+\mu} x| \leqslant |A_\mu x|$, $\forall\, \lambda, \mu > 0$, (donc $|A_\lambda x|$ est décroissante en λ et convergente dès qu'elle est majorée) et $|A_{\lambda+\mu} x|^2 \leqslant (A_\mu x, A_{\lambda+\mu} x)$, donc

$$|A_{\lambda+\mu} x - A_\mu x|^2 = |A_\mu x|^2 + |A_{\lambda+\mu} x|^2 - 2(A_\mu x, A_{\lambda+\mu} x) \leqslant |A_\mu x|^2 - |A_{\lambda+\mu} x|^2.$$

En conséquence si $|A_\lambda x|$ est majorée $\{A_\lambda x\}$ est de Cauchy et donc convergente vers un élément y. Mais

$$x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x \longrightarrow 0 \quad \text{donc} \quad J_\lambda x \longrightarrow x$$

$$A_\lambda x \in A J_\lambda x \longrightarrow y$$

et comme A est fermé $[x, y] \in A$, $x \in D(A)$, $y \in Ax$.

Mais alors $|y| \leqslant |A^o x|$ implique $y = A^o x$.

2.11. **Proposition. Si** $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A)) \neq \emptyset$, **on a**

1) $\mathrm{Int}\ D(A) = \mathrm{Int}\ \overline{D(A)} = \mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A)) \neq \emptyset$

2) A **est borné sur tout compact de** $\mathrm{Int}\ D(A)$.

Ce résultat valide dans le cas général est démontré pour $\dim H < +\infty$.

Démonstration : 1) Soit $C = \overline{\mathrm{conv}\ D(A)} = \overline{D(A)}$ et $C' = \mathrm{Int}\ C$.
On suppose donc $C' \neq \emptyset$. Montrons que $C' \subset D(A)$. Soit en effet $x \in C'$.
Si $A_\lambda x$ est borné, $x \in D(A)$. Supposons donc $y_\lambda = A_\lambda x$ non borné et soit λ_n une suite telle que $\dfrac{y_{\lambda_n}}{|y_{\lambda_n}|} \longrightarrow z$, $|z| = 1$.

Montrons que $z=0$ pour aboutir à une impossibilité :

Soit $x' \in C'$, $x'_\lambda = J_\lambda x'$, $x_\lambda = J_\lambda x$, $y'_\lambda = A_\lambda x'$. Comme $C' \subset \overline{D(A)}$ $x'_\lambda \longrightarrow x'$, $x_\lambda \longrightarrow x$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ (par 2.10). On a $y_\lambda \in Ax_\lambda$ et $y'_\mu \in Ax'_\mu$. Donc : $(y_\lambda - y'_\mu, x_\lambda - x'_\mu) \geqslant 0$. Divisons par $|y_\lambda|$ faisons $\lambda = \lambda_n$ et passons à la limite : on obtient :

$(z, x - x'_\mu) \geqslant 0$. Passons à la limite $\mu \longrightarrow 0$.

$(z, x - x') \geqslant 0$. Ceci a lieu pour tout $x' \in C'$.

Mais comme C' est ouvert, il existe un $t>0$ tel que $x+tz \in C'$.
On en déduit avec $x' = x+tz$

$(z, -tz) \geqslant 0$ d'où $z=0$.

Ceci démontre que $\mathrm{Int}\ \overline{D(A)} \subset D(A) \subset \overline{D(A)}$ et donc $\mathrm{Int}\ D(A) = \mathrm{Int}\ \overline{D(A)}$ est convexe comme intérieur d'un convexe.

2) Supposons que A n'est pas borné au voisinage du point x_o intérieur à $D(A)$: il existe $[x_n, y_n] \in A$ tels que

$$x_n \longrightarrow x_o\ ,\ |y_n| \longrightarrow +\infty \quad \frac{y_n}{|y_n|} \longrightarrow z \quad \text{avec} \quad |z| = 1 .$$

$\forall [x,y] \in A$ on a $\left(\dfrac{y_n - y}{|y_n|}, x_n - x\right) \geqslant 0$ et à la limite $(z, x_o - x) \geqslant 0$.

Comme précédemment on en déduit $z=0$, d'où l'absurdité.

Application. Majoration de $|Ax|$ pour $x \in D(A)$:

Si A^o est borné par M sur une boule $B(x_o, \rho)$ on a

$$\forall [x,y] \in A \ , \ \forall u \in B(x_o,\rho)$$

$(y-A^o u, x-u) \geqslant 0$ ce qui s'écrit

$$(y,u-x_o) \leqslant (y,x-x_o) + (A^o u,x-x_o) + (A^o u,x_o-u) \leqslant (y,x-x_o) + M|x-x_o| + M\rho$$

Passant au supremum du membre de gauche, lorsque u varie dans $B(x_o,\rho)$ on obtient

(2.12) $$\rho|y| \leqslant (y,x-x_o) + M(|x-x_o|+\rho) .$$

III - Résolutions d'équations d'évolution associée à des opérateurs maximaux monotones.

On veut résoudre ici l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ (I) au sens suivant : La fonction u continue sur $[0,T]$ est solution forte de (I) s.s.i.

a) u est absolument continue sur tout compact de $]0,T[$ et donc presque partout différentiable sur $]0,T[$

b) $u(t) \in D(A)$ pour presque tout t de $]0,T[$

c) $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ pour presque tout t de $]0,T[$.

On notera $\mathcal{F}$ l'opérateur multivoque "solution forte" de $L^1(0,T;H)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T];H)$. On notera $\overline{\mathcal{F}}$ l'opérateur dont le graphe est l'adhérence de celui de $\mathcal{F}$, on appellera $\overline{\mathcal{F}}$ l'opérateur "solution faible" c'est-à-dire $[f,u] \in \overline{\mathcal{F}}$ se dira : u est solution faible de (I) associée à f .

Propriétés des solutions forte et faible

3.1. Proposition. Si $[f,u]$ et $[g,v]$ sont dans $\mathcal{F}$ ou $\overline{\mathcal{F}}$ on a

i) $\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ $|u(t)-v(t)| \leqslant |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(\sigma)-g(\sigma)|\, d\sigma$

ii) $\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $\forall [x,y] \in A$.

$$(u(t)-u(s),u(s)-x) \leqslant \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 \leqslant \int_s^t (f(\sigma)-y,u(\sigma)-x)\, d\sigma .$$

Démonstration : Il suffit de vérifier ces relations pour $\mathcal{F}$, elles passent à $\overline{\mathcal{F}}$ par continuité, il suffit également de les vérifier pour $0 \leqslant s \leqslant t < T$ par continuité. La fonction $|u-v|^2$ est absolument continue et l'on a

(3.15) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|^2 = (\frac{du}{dt}(t)-\frac{dv}{dt}(t), u(t)-v(t)) \leq (f(t)-g(t), u(t)-v(t))$

par la monotonie de A.

On en tire : $\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)| \leq |f(t)-g(t)|$,

d'où on déduit i). L'inégalité ii) s'obtient à partir de (3.15) avec $v \equiv x = cte$, $g \equiv y$, la première inégalité de ii) étant élémentaire.

3.2. Corollaire. *Il y a unicité de la solution forte (resp. faible) associée à une fonction f de $L^1(0,T;H)$ avec condition initiale imposée.*

Démontrons l'existence de solutions fortes.

3.3. Théorème. *Si $u_0 \in D(A)$, $f \in W^{1,1}(0,T;H)$ il existe une solution forte unique de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$. Plus précisément u est caractérisée par*

i) $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0,T]$

ii) $u(t)$ *est lipschitzienne sur* $[0,T]$

iii) u *est dérivable à droite sur* $[0,T[$

iv) $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ *pour presque tout* t *de* $]0,T[$

v) $u(0) = u_0$.

De plus on a $\forall t \in [0,T[\quad \frac{d^+u}{dt}(t) + (Au(t)-f(t))^0 = 0$.

Démonstration : Soit $A^t = A-f(t)$ qui est aussi maximal monotone

$$J^t_\lambda = (I+\lambda A^t)^{-1}.$$

$(A^t)_\lambda = A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(I-J^t_\lambda)$ (à ne pas confondre avec $(A_\lambda)^t$ qui ne sera d'ailleurs pas utilisé par la suite).

Alors $A_\lambda(t)$ est continu en x et t, lipchitzien en x de rapport $1/\lambda$ (et maximal monotone) : en effet on a

$$J^t_\lambda x = J_\lambda(x+\lambda f(t)) \quad \text{et}$$
$$A_\lambda(t)x = A_\lambda(x+\lambda f(t)) - f(t).$$

On peut donc par la théorie classique trouver u_λ de classe C^1 solution de $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(t)u_\lambda(t) = 0$, $u_\lambda(0) = u_o$. Remarquons que $v_\lambda(t) = u_\lambda(t)+\lambda f(t)$ est solution de $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = f(t) + \lambda f'(t)$, $v_\lambda(0) = u_o + \lambda f(0)$.

a) Majoration des $|\frac{du_\lambda}{dt}|$: on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 = -(A_\lambda(t+h)u_\lambda(t+h)-A_\lambda(t)u_\lambda(t),u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t))$$

$$= -(\tfrac{1}{\lambda}(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)),u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t))$$

$$+\tfrac{1}{\lambda}(J_\lambda(u_\lambda(t+h)+\lambda f(t+h))-J_\lambda(u_\lambda(t)+\lambda f(t)),u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t))$$

$$\leq -\tfrac{1}{\lambda}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 + \tfrac{1}{\lambda}|J_\lambda(u_\lambda(t+h)+\lambda f(t+h))-J_\lambda(u_\lambda(t)+\lambda f(t))| \times |u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|$$

$$\leq -\tfrac{1}{\lambda}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 + \tfrac{1}{\lambda}(|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|+\lambda|f(t+h)-f(t)|)|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|$$

$$= |f(t+h)-f(t)||u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)| .$$

On en déduit $0\leq s<t\leq T-h$

$$|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda(s+h)-u_\lambda(s)| + \int_s^t |f(\sigma+h)-f(\sigma)|\, d\sigma$$

d'où

$$(3.3,1) \qquad |\frac{du_\lambda}{dt}(t)| \leq |\frac{du_\lambda}{dt}(s)| + \int_s^t |f'(\sigma)|\, d\sigma .$$

Conclusion $t \in [0,T] \implies |\frac{du_\lambda}{dt}(t)| \leq |\frac{du_\lambda}{dt}(0)| + \int_0^t |f'(\sigma)|\, d\sigma$.

Or $|\frac{du_\lambda}{dt}(0)| = |A_\lambda(0)u_o| \leq |A^o(0)u_o| = |(Au_o-f(0))^o|$

par 2.10.(iv), donc

$$|A_\lambda(t)u_\lambda(t)| = |\frac{du_\lambda}{dt}(t)| \leq |(Au_o-f(0))^o| + \int_0^t |f'(\sigma)|\, d\sigma = C \text{ constante}$$

b) Convergence dans $L^2(0,T;H)$ des dérivées $\frac{du}{dt}$.

On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 = -(A_\lambda(t)u_\lambda(t)-A_\mu(t)u_\mu(t),u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$

$$= -(A_\lambda(t)u_\lambda(t)-A_\mu(t)u_\mu(t),u_\lambda(t)-J_\lambda^t u_\lambda(t)-(u_\mu(t)-J_\mu^t u_\mu(t))$$

$$(A_\lambda(t)u_\lambda(t)-A_\mu(t)u_\mu(t),J_\lambda^t u_\lambda(t) - J_\mu^t u_\mu(t)) .$$

Ce dernier terme est négatif ou nul par la monotonie de $A_\lambda(t)$, donc

(3.3.2) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leqslant -(A_\lambda(t)u_\lambda(t)-A_\mu(t)u_\mu(t),\lambda A_\lambda(t)u_\lambda(t)-\mu A_\mu(t)u_\mu(t)),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leqslant -(u'_\mu(t)-u'_\lambda(t),\mu u'_\mu(t)-\lambda u'_\lambda(t)) .$$

Or : $$(u'_\mu-u'_\lambda,\mu u'_\mu-\lambda u'_\lambda) = \mu|u'_\mu|^2 + \lambda|u'_\lambda|^2 - (\lambda+\mu)(u'_\mu,u'_\lambda)$$

$$= \frac{\mu-\lambda}{2}|u'_\mu|^2 + \frac{\lambda-\mu}{2}|u'_\lambda|^2 + \frac{\lambda+\mu}{2}(|u'_\mu|^2+|u'_\lambda|^2 - 2(u'_\mu,u'_\lambda))$$

$$= \frac{\mu-\lambda}{2}(|u'_\mu|^2-|u'_\lambda|^2) + \frac{\lambda+\mu}{2}|u'_\mu-u'_\lambda|^2$$

Intégrant sur $[0,t]$, on obtient :

(3.3.3) $$|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leqslant (\lambda-\mu)\int_0^t(|u'_\mu(\sigma)|^2-|u'_\lambda(\sigma)|^2)d\sigma - (\lambda+\mu)\int_0^t|u'_\mu-u'_\lambda|^2\, d\sigma$$

A fortiori pour $(\lambda \geqslant \mu)$

(3.3.4) $$|u_\lambda-u_\mu|_\infty^2 \leqslant (\lambda-\mu)(|u'_\mu|^2_{L^2(0,T;H)}) \leqslant (\lambda-\mu)\, C^2T .$$

De (3.3.3) on déduit en prenant $t = T$

– $|u'_\lambda|^2_{L^2(0,T;H)}$ est une fonction décroissante en λ (qui croît lorsque $\lambda \searrow 0$) et majorée par C^2T, donc convergente lorsque $\lambda \searrow 0$.

$$|u'_\mu - u'_\lambda|^2_{L^2} \leq \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \left| |u'_\mu|^2_{L^2} - |u'_\lambda|^2_{L^2} \right| \leq \left| |u'_\mu|^2_{L^2} - |u'_\lambda|^2_{L^2} \right|$$

donc u'_λ est convergente dans $L^2(0,T;H)$ lorsque λ tend vers 0^+ : soit $w(t)$ sa limite.

c) Convergence des u_λ .

Il est clair que $u_\lambda(t) = u_o + \int_o^t u'_\lambda(\sigma)\, d\sigma$ converge alors uniformément (voir 3.3,4) vers une fonction u qui vérifie $u(t) = u_o + \int_o^t w(\sigma)\, d\sigma$. Donc u est p.p. dérivable de dérivée w .

Par ailleurs comme les u'_λ sont bornées par C dans L^∞ , il est clair que u est lipschitzienne de constante inférieure ou égale à C .

En extrayant une sous-suite λ_n , on a $w(t) = u'(t) = \lim\limits_{p.p.} u'_{\lambda_n}(t)$.

Plaçons-nous en un point t où $u'(t) = \lim u'_{\lambda_n}(t)$.

On a
$$u(t) = \lim u_\lambda(t)$$

et comme $|J^t_\lambda\, u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| = \lambda |A_\lambda(t)\, u_\lambda(t)| \leq \lambda C$

$$\lim_{\lambda_n \searrow 0} J^t_\lambda\, u_\lambda(t) = u(t) .$$

De plus $- u'_{\lambda_n}(t) = A_{\lambda_n}(t)\, u_{\lambda_n}(t) \in A^t\, J^t_{\lambda_n}\, u_{\lambda_n}(t)$ converge vers $- u'(t)$.

Donc, comme le graphe de A^t est fermé (puisque demi-fermé),

$- u'(t) \in A^t\, u(t)$ c'est-à-dire que pour presque tout t on a

$$\frac{du}{dt}(t) + A^t\, u(t) \ni 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t) .$$

Par ailleurs on a $|A_\lambda(t) u_\lambda(t)| \leq C$, $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, \lambda > 0$ (3.3,1) et $|u_\lambda(t) - u(t)| \leq \lambda C^2 T$ (3.3,4). Comme A_λ est lipchitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$ (2.10.ii)) on a

$$|A_\lambda(t)\, u(t)| \leq |A_\lambda(t) u_\lambda(t)| + C^2 T \leq C + C^2 T$$

Donc par 2.10.iv et v), on a $u(t) \in D(A^t)$, $\forall\, t \in (0,T)$, c'est-à-dire $u(t) \in D(A)$.

d) Propriété de la dérivée à droite de u.

Soit s tel que $\frac{du}{dt}(s) + Au(s) \ni f(s)$ ait lieu, et soit $y \in Au(s)$, la proposition 3.1.i) donne avec $v(t) \equiv u(s)$, $g(t) \equiv y$

$$|u(t)-u(s)| \leq \int_s^t |f(\sigma)-y|\,d\sigma \text{ , d'où}$$

$$\left|\frac{du}{dt}(s)\right| \leq |f(s)-y| \quad \forall\, y \in Au(s) \quad \text{donc}$$

$$\left|\frac{du}{dt}(s)\right| \leq |(f(s)-Au(s))^{\circ}| \text{ . Or } \frac{du}{dt}(s) \in Au(s)-f(s)$$

donc $\frac{du}{dt}(s) = (f(s)-Au(s))^{\circ}$ p.p. $[0,T]$.

Par suite $u(t)-u(s) = \int_s^t (f(\sigma)-Au(\sigma))^{\circ}\,d\sigma$ et pour montrer que $\forall\, t \in [0,T[$

$\frac{d^+u}{dt}(t)$ existe et satisfait à $\frac{d^+u}{dt}(t) + (Au(t)-f(t))^{\circ} = 0$ il suffit de montrer la continuité à droite de

$$(Au(t)-f(t))^{\circ} \text{ (qui est majoré par } C).$$

Soit alors y un point limite faible de $(Au(t)-f(t))^{\circ}$ lorsque $t \searrow 0$ comme $u(t) \longrightarrow u_o$, par la demi fermeture de A on a

$$y \in Au_o - f(0) \text{ , donc}$$

$$(3.3.5) \qquad |y| \geq |(Au_o-f(0))^{\circ}| \text{ .}$$

Par 3.3.1 d'autre part, on a

$$|u_\lambda'(t)| \leq |A^{\circ}(0)u_o| + \int_o^t |f'(\sigma)|\,d\sigma \text{ .}$$

Or $-u_\lambda'(t) = A_\lambda(t)u_\lambda(t) \in A^t\, J_\lambda^t u_\lambda(t)$.

Lorsque $\lambda \searrow 0$ comme $J_\lambda^t u_\lambda(t) \longrightarrow u(t)$ on en déduit (toujours par la demi fermeture de A^t) que

$$|(A^t u(t)^{\circ}| \leq \overline{\lim_{\lambda \searrow o}} |u_\lambda'(t)| \leq |(Au_o-f(0))^{\circ}| + \int_o^t |f'(\sigma)|\,d\sigma \text{ .}$$

Faisant alors $t \searrow 0$ on obtient

$$\overline{\lim_{t \searrow o}} |A^t u(t)| \leq |(Au_o-f(0))^{\circ}| \text{ .}$$

Tout point limite faible y de $(Au(t)-f(t))^{\circ}$ satisfait donc $|y| \leq |(Au_o-f(0))^{\circ}|$. Comparant à 3.3.5 on voit que y est unique égal à $(Au_o-f(0))^{\circ}$ et que la convergence a lieu dans H fort donc $\frac{d^+u}{dt}(0) = (f(0)-Au_o)^{\circ}$. Par translation à droite et unicité on déduit la relation $\frac{d^+u}{dt} = (f(t)-Au(t))^o$ pour t quelconque de celle pour $t=0$.

3.4. <u>Théorème. Si</u> $u_o \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1(0,T;H)$, <u>il existe une solution faible unique de</u> $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_o$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer le théorème 3.3 en remarquant que $D(A)$ est dense dans $\overline{D(A)}$, $W^{1,1}(0,T;H)$ dense dans $L^1(0,T;H)$ et que par 3.1.i) appliqué avec $s=0$, la convergence des conditions initiales et des seconds membres de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ implique la convergence des solutions fortes.

3.5. <u>Proposition. Si</u> $A^o x$ <u>est borné par</u> M <u>sur la boule</u> $B(x_o,\rho)$ <u>toute solution faible de (I) est à variations bornées. De manière plus précise si</u> $[u,f] \in \overline{\mathcal{F}}$, <u>on a pour</u> $0 \leq s \leq t \leq T$

$$(3.6)\quad \rho|u(t)-u(s)| \leq \rho\int_0^t |f(\sigma)+M|\,d\sigma + \int_s^t |u(\sigma)-x_o|(|f(\sigma)|+M)\,d\sigma + \frac{1}{2}[|u(0)-x_o|^2-|u(0)-x_o|^2].$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer la proposition pour $[u,f]$ dans $\mathcal{F}$, $s=0$; mais alors $f - \frac{du}{dt} \in Au(t)$ presque partout et par (2.12) on a :

$$\rho|f - \frac{du}{dt}| \leq (f-\frac{du}{dt}, u-x_o) + M|u-x_o| + M\rho \quad \text{donc}$$

$$\rho|\frac{du}{dt}| \leq \rho(|f|+M) + |u(t)-x_o|(|f|+M) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-x_o|^2$$

d'où (3.6).

Par 3.1.i) on a

$$|u(t)-x_o| \leq |u(0)-x_o| + \int_0^t (|f(s)|+M)\,ds \quad \text{d'où avec}$$

(3.6)

$$V_u([0,T]) \leq (\|f\|_1+MT) + \frac{1}{\rho}|u(0)-x_o|(\|f\|_1+MT) + \frac{1}{\rho}(\|f\|_1+MT)^2 + \frac{1}{2\rho}(|u(0)-x_o|^2 - |u(T)-x_o|^2).$$

IV - Identité entre les solutions faibles et les solutions fortes en dimension finie.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

4.1. Théorème. Si H est de dimension finie, A maximal monotone, l'opérateur $\mathcal{F}$ admet un graphe fermé dans

$$L^1(0,T;H) \times \mathcal{C}([0,T],H) .$$

Il s'agit donc de montrer qu'une solution faible est forte pour (I)

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \in L^1(0,T;H) \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} .$$

4.2. Remarque. On peut toujours se ramener au cas $\mathrm{Int}\, D(A) \neq \emptyset$.

Soit en effet H_1 le sous-espace affine fermé engendré par $D(A)$, on a $\overline{D(A)} \subset H_1$ et projettant l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ sur H_1 et $H_1^\perp$ I s'écrit

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{proj}_{H_1} Au \ni \mathrm{proj}_{H_1} f \quad , \quad \mathrm{proj}_{H_1^\perp} Au \ni \mathrm{proj}_{H_1^\perp} f .$$

Or, il est aisé de voir par la maximalité et la monotonie de A que $Ax + H_1^\perp = Ax$. Donc la deuxième équation est identiquement vérifiée et la première s'écrit $\frac{du}{dt} + A_1 u \ni f_1$ dans H_1, où $A_1 = A \cap (H_1 \times H_1)$ est trivialement maximal monotone dans H_1 (considéré comme identifié à son espace vectoriel des translations).

On est alors ramené au cas $\mathrm{Int}(D(A)) \neq \emptyset$ d'après 2.11 car $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\, D(A)) \neq \emptyset$ (Intérieur relatif d'un convexe non vide). Donc en particulier A est borné sur tout compact de $\mathrm{Int}\,(D(A))$.

Pour préciser cette majoration, on utilise le lemme suivant dû à Ph. Benilan :

4.3. Lemme géométrique. Soit H un espace de Hilbert réel de dimension finie, C un ouvert convexe non vide de H, et K un compact de $\overline{C}$. Il existe alors $k>0$ tel que l'on a $\forall\, x \in K$, $\exists\, \zeta \in C$

i) $\mathrm{dist}(\zeta, \partial C) \geqslant k|x-\zeta|$

ii) $\forall\, z \in \overline{C}$ $\quad |z-\zeta|^2 - |x-\zeta|^2 \leqslant |z-x|^2$ (ou de manière équivalente $(z-x, \zeta-x) \geqslant 0$).

<u>Démonstration</u> : Soit x dans C, on désigne par Γx le cône de sommet x défini par $(z-x,\zeta-x) \geqslant 0$ pour tout z de $\overline{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des ζ vérifiant la condition ii). $x-\Gamma x$ est le cône conjugué à C et $\overline{C}$ en x.

On va montrer

$$(4.3,5) \qquad \sup_{\zeta\in C} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)}{|x-\zeta|} = \sup_{\zeta\in C\cap\Gamma x} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)}{|x-\zeta|}$$

il en résultera, puisque la fonction $x \longmapsto \sup\limits_{\zeta\in C} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)}{|x-\zeta|}$ est s.c.i. que $k = \inf\limits_{x\in K} \sup\limits_{\zeta\in C\cap\Gamma x} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)}{|x-\zeta|} > 0$.

Pour simplifier la démonstration de (4.3,5) on prend $x=0$ fixé dans $\overline{C}$. Soit $C_1 = \bigcup\limits_{\lambda\geqslant 1} \lambda C$ cône engendré par C en $x=0$.

Il est immédiat que si ζ est fixé dans C, on a

$$\mathrm{dist}(\zeta,\partial C) \leqslant \frac{\mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)}{t} \qquad t\in]0,1]$$

par la convexité de C, donc $t \longmapsto \frac{\mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)}{t}$ est décroissante en t.

D'autre part par homothétie de rapport t on voit que

$$t\ \mathrm{dist}(\zeta,\partial\tfrac{1}{t}C) = \mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)$$

donc $\frac{\mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)}{t} \leqslant \mathrm{dist}(\zeta,\partial C_1)$ et par suite $\lim\limits_{t\searrow 0} \frac{\mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)}{t}$ existe et est inférieure ou égale à $\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)$. Mais l'inégalité inverse a lieu

Soit en effet $\rho < \mathrm{dist}(\zeta,\partial C_1)$; $B(\zeta,\rho)$ boule fermée est incluse dans $\bigcup\limits_{\lambda\geqslant 1}\lambda C = C_1$, et est compacte, donc il existe $\lambda_o \geqslant 1$ tel que $B(\zeta,\rho)\subset \lambda_o C$ et donc $\mathrm{dist}(\zeta,\lambda_o\partial C)\geqslant\rho$,

mais alors $\mathrm{dist}(\frac{\zeta}{\lambda_o},\partial C) \geqslant \frac{\rho}{\lambda_o}$ et $\lim\limits_{t\searrow 0} \frac{\mathrm{dist}(t\zeta,\partial C)}{t} \geqslant \rho$. On a donc en définitive

$$\sup_{\substack{\zeta\in C\\ (\text{resp } C\cap\Gamma_o)}} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C)}{|\zeta|} = \sup_{\substack{\zeta\in C_1\\ \text{resp}(C_1\cap\Gamma_o)}} \frac{\mathrm{dist}(\zeta,\partial C_1)}{|\zeta|} .$$

On est ainsi ramené à prendre pour C un cône ouvert de sommet 0.
$-\Gamma_0$ est le cône conjugué de C et l'on veut montrer

$$\sup_{\zeta\in C}\frac{\operatorname{dist}(\zeta,\partial C)}{|\zeta|} = \sup_{\zeta\in C\cap\Gamma_0}\frac{\operatorname{dist}(\zeta,\partial C)}{|\zeta|} .$$

Soit $\zeta\in C$, ζ_0 sa projection sur Γ_0. $\zeta-\zeta_0$ est dans $-\overline{C}$ qui est le cône conjugué de $+\Gamma_0$; donc $\zeta\in C$, $\zeta_0-\zeta\in\overline{C}$ donc $\zeta_0\in C+\overline{C}=C$, soit finalement $\zeta_0\in C\cap\Gamma_0$. On a évidemment $|\xi_0|\leqslant|\zeta|$.

On va montrer pour achever la démonstration que

$$\operatorname{dist}(\zeta_0,\partial C) \geqslant \operatorname{dist}(\zeta,\partial C) .$$

Soit $\rho<\operatorname{dist}(\zeta,\partial C)$; la boule $B(\zeta,\rho)\subset C$, donc

$$(\zeta+\rho z,v)\geqslant 0 \quad \forall\, v\in\Gamma_0 ,\ \forall\, z\in H \text{ avec } |z|\leqslant 1 .$$

Mais $(\zeta_0+\rho z,v) = (\zeta_0-\zeta,v)+(\zeta+\rho z,v)\geqslant 0 \quad \forall\, v\in\Gamma_0$, $\forall\, z$ $|z|\leqslant 1$

donc $B(\zeta_0,\rho)\subset\overline{C}$ donc $\operatorname{dist}(\zeta_0,\partial C)\geqslant\rho$.

4.4. Majoration portant sur les solutions faibles de (I).

Appliquons le lemme 4.3 avec $C=\operatorname{Int} D(A)$, $K=u([0,T])$, $x=u(t)$. Il existe alors $k>0$, tel que

$$t\in[0,T] \implies \exists\ \zeta_t\in C \text{ vérifiant}$$

(4.5) $$|z-\zeta_t|^2-|u(t)-\zeta_t|^2\leqslant|z-u(t)|^2 ,\quad \forall\, z\in\overline{C}=\overline{D(A)}$$

et $\operatorname{dist}(\zeta_t,\partial C)\geqslant k(u(t)-\zeta_t)$. Soit

(4.6) $$\rho_t\in\left[\tfrac{k}{2}|u(t)-\zeta_t| ,\ \operatorname{dist}(\zeta_t,\partial C)\right[$$

la boule $B(\zeta_t,\rho_t)\subset\operatorname{Int} D(A)$ et par (2.11), A y est borné ; soit M_t cette borne. Utilisons alors (3.6). On obtient : $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$

(4.7) $$\rho_t|u(t)-u(s)|\leqslant\rho_t\int_s^t(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma+\int_s^t(|u(\sigma)-\zeta_t|)(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma + \tfrac{1}{2}(|u(s)-\zeta_t|^2-|u(t)-\zeta_t|^2) .$$

Or par (4.5) avec $z = u(s)$ on obtient

(4.8) $$\rho_t|u(t)-u(s)| \leqslant \rho_t\int_s^t(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma + \int_s^t(|u(\sigma)-\zeta_t|)(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma + \frac{1}{2}|u(s)-u(t)|^2 .$$

Par la continuité de u, il existe δ_t tel que

$$h \in [0,\delta_t[\implies |u(t)-u(t-h)| \leqslant \rho_t \quad \text{et}$$

par (4.8) $\forall\, s \in]t-\delta_t, t]$,

(4.9) $$\frac{1}{2}\rho_t|u(t)-u(s)| \leqslant \rho_t\int_s^t(|f(\sigma)+M_t)d\sigma + \int_s^t|u(\sigma)-\zeta_t|(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma .$$

Puisque $\frac{k}{2}|u(t)-\zeta_t| \leqslant \rho_t$, par (4.5) on a

$$|u(\sigma)-\zeta_t|^2 \leqslant |u(t)-\zeta_t|^2 + |u(\sigma)-u(t)|^2 \quad \text{donc}$$

$$|u(\sigma)-\zeta_t|^2 \leqslant \frac{4}{k^2}\rho_t^2 + \rho_t^2 = \rho_t^2 \times k_1^2 \quad \text{d'où}$$

dans (4.9) après simplification par ρ_t, $h \in [0,\delta_t[$

(4.10) $$\frac{1}{2}|u(t)-u(t-h)| \leqslant \left(\int_{t-h}^t(|f(\sigma)|+M_t)d\sigma\right) \times (1+k_1) .$$

4.11. __Proposition. Sous les conditions précédentes__ u __est absolument continue sur__ $[0,T]$.

__Démonstration__ : Si on montre que u est scalairement absolument continue, comme u est à variations bornées par (3.5), absolument continue sur $[0,T]$ par un résultat de l'exposé n°1 (d'ailleurs comme $\dim H < +\infty$, scalairement Abs. continue et Abs. continu sont équivalents)

Montrons en effet que u est scalairement absolument continue : soient $w \in H$, $|w|=1$ et $g(t) = (u(t),w) - K\int_0^t|f(\sigma)|d\sigma$.
Pour $K = 1+k_1$ g satisfait à

(4.12) $\forall\, t \in]0,T]$, $\exists\, \delta_1 > 0$, et m_t tels que

$$h \in [0,\delta_t] \implies g(t)-g(t-h) \leqslant m_t h .$$

4.13. __Lemme.__ __Si__ $g \in VB([0,T]$ __satisfait à__ (4.12) __alors__ $\forall\, t \in [0,T]$

$$g(t)-g(0) \leqslant \int_0^t g'(\sigma)\, d\sigma$$

__où__ g' __est la dérivée ponctuelle.__

__Démonstration__ : Si $g \in VB[0,T]$ on sait que $g' \in L^1[0,T]$, et g' est définie presque partout. Il suffit de prouver le lemme pour $t=T$.

Soit $f(t) = \overline{\lim_{h\searrow 0^+}} \dfrac{g(t)-g(t-h)}{h} \leqslant m_t$, $f(t)$ égale $g'(t)$ presque partout, donc f est mesurable et intégrable.

Il existe alors par le théorème de Vitali-Caratheodory, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction f_ε semi-continue inférieurement telle que $f \leqslant f_\varepsilon$ et $\int_0^T f_\varepsilon(t)\, dt \leqslant \int_0^T f(t)\, dt + \varepsilon$.

Mais la fonction $\phi_\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^t f_\varepsilon(\sigma)\, d\sigma$ qui est continue vérifie partout

$$\overline{\lim_{h\searrow 0}} \frac{\phi_\varepsilon(t)-\phi_\varepsilon(t-h)}{h} \leqslant f(t) - f_\varepsilon(t) \quad \text{car } f_\varepsilon \text{ est s.c.i.},$$

donc on a pour tout $t \in]0,T]$

$$\overline{\lim_{h\searrow 0}} \frac{\phi_\varepsilon(t)-\phi_\varepsilon(t-h)}{h} \leqslant f'(t) - f_\varepsilon(t) \leqslant 0 ,$$ donc par le théorème des accroissements finis

$$\phi(T) - \phi(0) \leqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$g(T) - g(0) \leqslant \int_0^T f(t)\, dt + \varepsilon = \int_0^T g'(t)\, dt + \varepsilon .$$

Ceci ayant lieu pour tout $\varepsilon>0$, on a donc

$$g(T) - g(0) \leqslant \int_0^T g'(t) dt .$$

Appliquons ce lemme à $g(t) = (u(t),w) - K \int_0^t f(\sigma)\, d\sigma$

$$g'(t) = (\frac{du}{dt}(t),w) - K|f(t)| \quad \text{et donc}$$

$$(u(t)-u(0),w) \leqslant \int_0^t K|f(\sigma)|d\sigma + \int_0^t g'(\sigma)\, d\sigma \leqslant \int_0^t (\frac{du}{dt}(\sigma),w)d\sigma = (\int_0^t \frac{du}{dt}(\sigma)d\sigma,w) .$$

Remplaçant w par $-w$ on obtient l'inégalité renversée, donc

$(u(t)-u(0),w) = \int_0^t (\frac{du}{dt}(\sigma),w)d\sigma$, donc u est scalairement absolument continue.

La proposition suivante achève la démonstration du théorème 4.1.

4.14 Proposition. <u>Une solution faible absolument continue est solution forte.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $t \in [0,T]$ tel que $\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\sigma)d\sigma = f(t)$

(on sait que ceci a lieu presque partout par le théorème de Lebesgue).

Soit $\alpha = \frac{du}{dt}(t)$. On a (proposition 3.1.i)) $\forall\ [x,y] \in A$

$$(u(t+h)-u(t),\ u(t)-x) \leqslant \int_t^{t+h} (f(\sigma)-y),u(\sigma)-x)\ d\sigma.$$

Divisons par h et faisons $h \searrow 0$. On obtient

$$(\alpha,u(t)-x) \leqslant (f(t)-y,u(t)-x) \quad \forall\ [x,y] \in A .$$

Par suite $[u(t),f(t)-\alpha] \in A$ (par la maximalité de A) et donc

$u(t) \in D(A)$, $f(t)-\alpha \in Au(t)$, ceci s'exprime par $u(t) \in D(A)$ et

$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ pour presque tout t , donc u est solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

<u>Bibliographie.</u>

[1] H. Brezis - Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert : Cours de 3ème cycle, Université Paris VI (1971), rédigé par Ph. Benilan.

[2] P. Benilan - Exposé n°3 de:Séminaire sur les semi-groupes et operateurs non linéaires 1970-71. Publications Mathématiques d'Orsay.

Voir également les autres exposés accompagnant [2].

Pour une bibliographie détaillée se reporter à celle très complète de [1].

-:-:-:-

Exposé de Jean-Pierre ROTH

"OPERATEURS DISSIPATIFS INVARIANTS PAR TRANSLATION"

I - Théorème de Godement-Plancherel.

Préliminaires :

Définition. Une algèbre stellaire A est une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ munie d'une involution $x \longrightarrow x^*$ telle qu'on ait $\|x\|^2 = \|xx^*\|$ pour tout $x \in A$ (on rappelle qu'une involution sur A est caractérisée par les relations

$$(x^*)^* = x \; ; \; (x+y)^* = x^*+y^* \; ; \; (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \; ; \; (xy)^* = y^*x^*) \; .$$

Exemple. E espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$; $A = \mathcal{L}(E)$ est une algèbre stellaire pour $u \longrightarrow u^*$ (opérateur adjoint de u) .

Définition. $x \in A$ est hermitien si $x = x^*$.

Théorème de Gelfand-Neumark. Soit A une algèbre stellaire commutative avec élément unité $e \neq 0$.

Le spectre $\operatorname{Sp} A$ (ensemble des caractères de A) est compact.

L'application $\mathcal{G}$ qui, à tout élément $x \in A$, associe la fonction $\chi \longmapsto \chi(x)$ continue sur $\operatorname{Sp} A$, est un isomorphisme isométrique de A sur $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} A)$ tel que, pour tout $x \in A$ on ait $\mathcal{G}x^* = \overline{\mathcal{G}x}$.

Pour la démonstration, cf. Dieudonné - Eléments d'analyse, tome 2, p.304 ou Bourbaki - Théories spectrales, chap.I et II, p.67.

<u>Définition</u>. Une algèbre unitaire A est une algèbre A sur $\mathbb{C}$ (en général sans élément unité!) munie d'une involution $x \longrightarrow x^*$ et d'un produit scalaire (x,y) (non nécessairement séparé) vérifiant les axiomes :

1) $(xy,z) = (y,x^*z) \qquad (x,y) = (y^*,x^*)$.

2) $\forall\, x \in A$, $L(x) : y \longrightarrow xy$ est continue.

3) les sommes finies $\Sigma x_i y_i$ sont denses dans A .

Dans ce qui suit, on supposera A commutative.

Un caractère de A est un homomorphisme ζ de A sur $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall\, x \in A, \quad |\zeta(x)| \leqslant \|L(x)\| .$$

ζ est dit hermitien si $\forall\, x \in A,\ \zeta(x^*) = \overline{\zeta(x)}$.

L'ensemble Z des caractères hermitiens sur A , muni de la topologie faible, est un espace localement compact

$$\forall\, x \in A, \quad \mathcal{G}x = \hat{x} \in \mathscr{C}_0(Z) .$$

<u>Théorème de Godement-Plancherel</u>. <u>Soit</u> A <u>une algèbre unitaire commutative. Il existe un sous-espace</u> S <u>de</u> Z <u>dont l'adhérence dans</u> $\mathbb{C}^A$ <u>est</u> S <u>ou</u> $S \cup \{0\}$, <u>et une mesure positive unique</u> m <u>sur</u> S <u>tels que les fonctions</u> $\hat{x} : S \longrightarrow \mathbb{C}$ <u>forment un ensemble partout dense de</u> $\mathscr{L}^2(S,dm)$ <u>et vérifient</u> :

$$\forall\, x,y \in A, \quad (x,y) = \int \hat{x}(\zeta)\, \overline{\hat{y}(\zeta)}\, dm(\zeta) .$$

<u>De plus</u> $\{\hat{x}|_S,\ x \in A\}$ <u>est partout dense dans</u> $\mathscr{C}_0(S)$.

<u>Démonstration</u> : On se placera dans le cas où $(.,.)$ est séparé (ce qui suffira pour la suite). Lorsque $(.,.)$ n'est pas séparé, on prend le quotient de A par l'idéal des $s \in A$ tels que $(s,s) = 0$.

Soit H l'espace de Hilbert complété de l'espace préhilbertien A . $L(x) : A \longrightarrow A$ se prolonge continûment en $U(x) : H \longrightarrow H$

Soit $\mathfrak{U} = \overline{\{U(x),\ x \in A\}}^{\mathscr{L}(H)}$

$\mathfrak{U}$ est une algèbre commutative, fermée dans $\mathscr{L}(H)$

$\mathfrak{U}$ est autoadjointe, en effet on a :

$$(U(x))^* = U(x^*)$$

et
$$\|U(x)\| = \|L(x)\| = \|L(x^*)\| = \|U(x^*)\| .$$

Donc $U(x) \xrightarrow{*} U(x^*)$ se prolonge continûment à $\mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{U} + \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$. $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative, autoadjointe, ~~fermée~~ dans $\mathcal{L}(H)$ (car $\mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$ est de dimension finie), avec élément unité $\mathcal{A}$ est donc une algèbre stellaire, commutative, avec élément unité.

On notera $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ l'isomorphisme de Gelfand-Neumark de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,A)$.

a) L'application $x \longmapsto U(x)$ est un morphisme d'algèbre involutive de A dans $\mathcal{A}$. U est injective ; en effet :

$$\text{soit } x \text{ tel que } U(x) = 0 \text{ alors } \forall\, y \in A,\ xy = 0$$
$$\forall\, y, z \in A,\ (x, yz) = (xy^*, z) = 0$$

comme l'ensemble des yz est total dans A, on a $x = 0$.

b) Si χ est un caractère de $\mathcal{A}$, $\chi \circ U$ est un caractère hermitien de A (s'il n'est pas nul) et on a

$$|\chi \circ U(x)| = |\chi(U(x))| \leqslant \|U(x)\| = \|L(x)\| .$$

On notera Λ l'application $\chi \longmapsto \chi \circ U$ de $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ dans $Z \cup \{0\}$.
Λ est <u>injective</u> : soient en effet χ et $\chi' \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ vérifiant $\chi \circ U = \chi' \circ U$. χ et χ' coïncident sur les $U(x)$ donc sur $\mathcal{U}$, et on a $\chi(\mathrm{Id}_H) = \chi'(\mathrm{Id}_H) = 1$, donc $\chi = \chi'$.

Λ est <u>continue</u> (c'est évident) ; soit $S' = \Lambda(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$, Λ est un homéomorphisme de $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ sur S'. On en déduit un isomorphisme Γ de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$ sur $\mathcal{C}(S')$.

a) et b) se résument dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{G}_{\mathcal{A}}", "\sim"'] & \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) \arrow[d, "\Gamma", "\sim"'] \\
A \arrow[u, hook, "U"] \arrow[r, dashed, "\mathcal{G}_A"] & \mathcal{C}(S') \\
(x \arrow[r, mapsto] & \hat{x}_{|S'})
\end{tikzcd}$$

le diagramme est commutatif

(vérification purement formelle)

Lorsque S' contient 0 on a $\hat{x}(0) = 0$.
Notons $S = S' \setminus \{0\}$. On a $\mathcal{G}_A(A) \subset \mathcal{C}_0(S)$

$\{U(x) + \lambda\, \mathrm{Id}_H \,/\, x \in A\}$ est partout dense dans $\mathcal{A}$

donc $\{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(U(x)) + \lambda \,/\, x \in A\}$ est partout dense dans $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$

donc $\{\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(U(x))) + \lambda \,/\, x \in A\}$ est partout dense dans $\mathcal{C}(S')$

donc $\{\hat{x}_{|S'} + \lambda \,/\, x \in A\}$ est partout dense dans $\mathcal{C}(S')$.

Deux cas se présentent :

ou bien, $Id_H \in U$; alors les constantes adhèrent à $\{\hat{x}|_{S'}\}$ et on a la densité des $\hat{x}_{|S}$ dans $\mathscr{C}(S)$ $(S=S')$,

ou bien, $Id_H \notin U$; alors U est un hyperplan fermé et un idéal de $\mathcal{A}$ donc un idéal maximal. Il existe alors $\xi_o \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ s'annulant sur $\mathcal{U}$, donc $0 \in S'$.

On a encore la densité des $\hat{x}_{|S}$ dans $\mathscr{C}_o(S)$ $(S' = S \cup \{0\})$.

Dans tous les cas : les $\hat{x}_{|S}$ forment un ensemble partout dense dans $\mathscr{C}_o(S)$.

Notons $[B]$ la sous-algèbre dense de A engendrée (algébriquement) par la partie $B = \{y \in A | \exists y_1, y_2 \in A \quad y = y_1 y_2\}$

Soit $y \in B$; $\hat{x}_{|S} \longmapsto (x,y)$ est bien définie et est continue, car on a

$|(x,y)| = |(x,y_1y_2)| = |(xy_1^*,y_2)| = |(L(x)(y_1^*),y_2)| \leq \|L(x)\|\|y_1\|\|y_2\|$

$|(x,y)| \leq \|y_1\|\|y_2\|\|\hat{x}\|_\infty$

donc $\forall\, y \in [B]$ $\hat{x}_{|S} \longmapsto (x,y)$ est définie et continue.

Fixons $y \in [B]$; il existe une mesure bornée dm_y sur S telle que :

$$\forall\, x \in A,\ (x,y) = \int \hat{x}(\zeta)\, dm_y(\zeta)$$

$$\forall\, x,y \in [B], \forall\, z \in A, \int_S \hat{z}\, \hat{x}\, dm_y = \langle zx,y\rangle = \langle zy^*,x^*\rangle = \int_S \hat{z}\, \bar{\hat{y}}\, dm_{x^*}.$$

Les $\hat{z}_{|S}$ sont denses dans $\mathscr{C}_o(S)$; on a donc :

(1) $$\forall\, x,y \in [B],\ \bar{\hat{x}}\, dm_y = \bar{\hat{y}}\, dm_x$$

Soit $\Omega_x = \{\zeta \in S\ ,\ \hat{x}(\zeta) \neq 0\}$

dm_x est concentrée sur Ω_x ; en effet :

$$\int_{S\setminus\Omega_x} \bar{\hat{y}}\, dm_x = \int_{S\setminus\Omega_x} \bar{\hat{x}}\, dm_y = 0.$$

$\{\hat{y} \mid y \in [B]\} \supset \{\hat{z}_1\hat{z}_2 \mid z_1$ et $z_2 \in A\}$ qui est dense dans $\mathscr{C}_o(S)$ (petit calcul facile à partir de la densité de $\{\hat{z}|z \in A\}$ dans $\mathscr{C}_o(S)$).

Donc dm_x est portée par Ω_x.

D'après (1) les mesures $\dfrac{dm_x/\Omega_x}{x/\Omega_x}$ vérifient la condition de recollement. Les Ω_x recouvrant S, on peut recoller en une mesure dm sur S.

On a $\forall x \in [B]$, $dm_x = \bar{\hat{x}}\, dm$, en effet les deux membres sont des mesures portées par Ω_x et elles coïncident sur Ω_x .

Donc $\forall x \in [B]$, $\hat{x} \in \mathcal{L}^1(S, dm)$.

Donc $\forall y \in A$, $\hat{y} \in \mathcal{L}^2(S, dm)$.

On a donc :

(2) $$\forall x \in A \,,\ \forall y \in [B] \,,\ (x,y) = \int \hat{x}\, \bar{\hat{y}}\, dm \,.$$

Il nous restera à étendre cette formule au cas $x \in A$ et $y \in A$.

dm <u>est positive</u> : $\forall x, y \in A \quad (xy|xy) = \int |\hat{y}|^2 |\hat{x}|^2 dm \geqslant 0$.
x étant fixé, $|\hat{x}|^2 dm$ est une mesure bornée. D'après la densité des $|\hat{y}|^2$ dans $\mathcal{C}_0(S, \mathbb{R})$ (facile à montrer) on voit que $\forall x \in A$, $|\hat{x}|^2 dm$ est une mesure positive. D'après la densité des $|\hat{x}|^2$ dans $\mathcal{C}_0(S, \mathbb{R})$ on voit que dm est positive.

<u>les $\hat{x}$ pour $x \in B$ sont denses dans</u> $\mathcal{L}^2(S, dm)$: Soit $F \in \mathcal{K}(S)$; il existe un élément $\hat{u} = \sum_i \hat{x}_i \bar{\hat{x}}_i$ qui ne s'annule pas sur Supp F , donc il existe $G \in \mathcal{K}(S)$ tel que $F = G\hat{u}$.

Or il existe $y \in A$ tel que $\forall \chi \in S$, $|G(\chi) - \hat{y}(\chi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{N_2(\hat{u})}$ (N_2 = norme de $\mathcal{L}^2(S, dm)$.

Donc $\int |F(\chi) - \hat{u}(\chi)\hat{y}(\chi)|^2 dm(\chi) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{N_2(\hat{u})}\right)^2 \int |\hat{u}(\chi)|^2 d\chi = \varepsilon^2$.

dm <u>est unique</u> : c'est une conséquence de la densité.

<u>Prolongement de la formule</u> (2) : Soit $y \in A$; il existe une suite d'éléments $\{y_n\} \in [B]$ convergeant vers y dans A . La suite $\{y_n\}$ est de Cauchy ; d'après la formule (2) $\{\widehat{y_n}\}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(S, dm)$; soit f sa limite. Pour tout $x \in A$ on a

$$(x, y) = \int \hat{x}\, \bar{f}\, dm \,.$$

D'autre part pour tout $x \in B$ on a $(x, y) = \int \hat{x}\, \bar{\hat{y}}\, dm$, comme $\{\hat{x} | x \in B\}$ est dense dans $\mathcal{L}^2(S, dm)$ on a

$$\bar{f} = \bar{\hat{y}}$$

finalement on a bien : $\forall x, y \in A$, $(x,y) = \int \hat{x}\, \bar{\hat{y}}\, dm$.

<u>Bibliographie</u> :

GODEMENT : Séminaire Bourbaki 56-57. Exposé n°144.

DIEUDONNE : Eléments d'analyse. Tome II.

II - Fonctions sphériques.

Introduction. Soit G un groupe localement compact unimodulaire ($ds = d(s^{-1})$). Soit K sous-groupe compact de G. Soient μ et ν deux mesures sur G.

On définit la convolée de μ et ν, quand elle existe, par :

$$\forall \phi \in \mathcal{K}(G) , \quad (\mu * \nu)(\phi) = \int_G \phi(yx)\, d\mu(x)\, d\nu(y) .$$

Si f et g sont des fonctions, on a en particulier :

$$f * g(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, g(y)\, dy .$$

On a aussi $f * \varepsilon_s(x) = f(s^{-1}x)$. On a les notions d'invariance à droite, à gauche, de biinvariance par les éléments de K.

Si $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions ou de mesures sur G on note :

$$^{\natural}\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{E} \,;\, \forall k \in K , \quad a * \varepsilon_k = a\}$$
$$\mathcal{E}^{\natural} = \{a \in \mathcal{E} \,;\, \forall k \in K , \quad \varepsilon_k * a = a\}$$
$$^{\natural}\mathcal{E}^{\natural} = \{a \in \mathcal{E} \,;\, \forall k \in K , \quad \varepsilon_k * a = a * \varepsilon_k = a\} .$$

On note $L = \mathcal{K}(G)$.
Dans tout ce qui suit on supposera que la convolution $*$ est commutative sur $^{\natural}L^{\natural}$.

Définition. ϕ est une fonction sphérique sur G si ϕ est continue, non nulle sur G et vérifie

$$\forall x, y \in G , \quad \int_K \phi(xky)\, dk = \phi(x)\, \phi(y)$$

où dk désigne la mesure de Haar sur K.

Théorème 1. Si ζ est une mesure sur G biinvariante, non nulle, et si l'application $f \longmapsto \zeta(f) = \int f(s)\, d\zeta(s)$ est un homomorphisme de $^{\natural}L^{\natural}$ sur $\mathbb{C}$ alors il existe une fonction sphérique ϕ telle que $\zeta = \phi(s)\, ds$. Réciproquement pour toute fonction sphérique ϕ, $\phi(s)\, ds$ a les propriétés de ζ.

Démonstration : 1) Partons d'une fonction sphérique ϕ.
Soit x_o tel que $\phi(x_o) \neq 0$

$$\phi(x_o)\, \phi(ky) = \phi(x_o)\, \phi(y) = \phi(yk)\, \phi(x_o)$$

donc ϕ est biinvariante par K.

$\Longrightarrow \zeta = \phi(s)\, ds$ est une mesure biinvariante par K

ϕ continue $\neq 0 \Longrightarrow \zeta \neq 0$

f et $g \in {}^\natural L^\natural$, $f * g(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, g(y)\, dy$

$$\int_G (f * g)(x)\, \phi(x)\, dx = \int_G \left(\int_G f(y^{-1}x)\, g(y)\, dy\right) \phi(x)\, dx$$

$$= \int_G \int_G f(z)\, g(y)\, \phi(yz)\, dy\, dz$$

$$= \int_G \int_G \int_K f(z)\, g(y)\, \phi(ykz)\, dy\, dz\, dk$$

$$= \left(\int_G f(z)\, \phi(z)\, dz\right)\left(\int_G g(y)\, \phi(y)\, dy\right).$$

2) Partons d'une mesure ζ biinvariante sur G, vérifiant les conditions de l'énoncé.

Soit $g \in L$ notons ${}^\natural g^\natural$ la fonction telle que

$${}^\natural g^\natural(x) = \iint_{K \times K} g(kxk')\, dk\, dk'.$$

Soit $f \in {}^\natural L^\natural$. On a ${}^\natural(f * g)^\natural = f * {}^\natural g^\natural$ et

$\zeta(f * g) = \zeta({}^\natural(f * g)^\natural) = \zeta(f * {}^\natural g^\natural) = \zeta(f)\, \zeta(g)$.

D'après le théorème de Fubini on a $\zeta(f * g) = \int \zeta(f * \varepsilon_s)\, g(s)\, ds$.

Soit $f \in {}^\natural L^\natural$ telle que $\zeta(f) \neq 0$.

Posons $\phi(s) = \dfrac{\zeta(f * \varepsilon_s)}{\zeta(f)}$.

ϕ est continue et on a $\zeta(g) = \int_G g(s)\, \phi(s)\, ds$

ϕ est non nulle car $\zeta \neq 0$

ϕ est biinvariante par K (car f et ζ le sont)

$$\forall f, g \in {}^\natural L^\natural, \iint_{G\times G} f(y)\, g(z) \left(\int_K \phi(ykz)dk\right) dy\, dz$$

$$= \iint_{G\times G} f(y)\, g(z)\, \phi(y)\, \phi(z)\, dy\, dz.$$

C'est encore vrai pour tout f et tout g de L, donc

$$\left(\int_K \phi(ykz)dk\right) dy\, dz = \phi(y)\, \phi(z)\, dy\, dz, \text{ d'où}$$

$$\int_K \phi(ykz)\, dk = \phi(y)\, \phi(z).$$

<u>Théorème 2. Si</u> G <u>est un groupe de Lie, les fonctions sphériques sur</u> G <u>sont les fonctions</u> ϕ <u>sur</u> G <u>telles que</u>

ϕ <u>est biinvariante par</u> K

$\phi(e) = 1$

ϕ <u>est fonction propre de tous les opérateurs différentiels biinvariants sur</u> G.

Démonstration : voir Helgason (on ne se servira pas de ce théorème dans la suite).

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>l'ensemble des fonctions sphériques sur</u> G <u>bornées muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de</u> G.

<u>Soit</u> Z <u>l'ensemble des caractères</u> $\zeta \neq 0$ <u>sur</u> $^{\natural}L^{\natural}$ <u>tels que</u> $|\zeta(f)| \leqslant \int |f(s)| ds$ <u>muni de la topologie de la convergence faible</u>.

Soit $j : \mathcal{F} \longrightarrow Z$

$$\phi \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} ^{\natural}L^{\natural} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int f(s)\, \phi(s)\, ds \end{array} \right)$$

j <u>est un homéomorphisme de</u> $\mathcal{F}$ <u>sur</u> Z.

Démonstration : 1) j est bien une application ; en effet la relation fonctionnelle entraîne que, si ϕ est bornée, on a $\|\phi\| = 1$, d'où $|\zeta(f)| \leqslant \int |f(s)| ds$.

2) j est continue : c'est évident.

3) j est injective ; ϕ_1 et $\phi_2 \in \mathcal{F}$ tels que $\forall f \in {}^{\natural}L^{\natural}$ $\int f(s)\, \phi_1(s)\, ds = \int f(s)\, \phi_2(s)\, ds$; c'est encore vrai pour tout f dans L donc $\phi_1 = \phi_2$.

4) j est surjective : soit $\zeta \in Z$, ζ se prolonge en une mesure ζ' sur G, biinvariante, non nulle. D'après le théorème 1 soit $\phi(s) = \dfrac{\zeta'(f * \varepsilon_s)}{\zeta(f)}$, on a $\zeta' = \phi(s) ds$ et ϕ est sphérique bornée par $\dfrac{\|f\|_{L^1}}{|\zeta(f)|}$.

5) continuité de j^{-1} : $\zeta = j(\phi)$. Soit $f \in {}^{\natural}L^{\natural}$ tel que $\zeta(f) \neq 0$, $W = \{\zeta', \zeta'(f) \neq 0\}$ est un ouvert de Z.

$$\left. \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & L^1(G) \\ s & \longmapsto & f * \varepsilon_s \end{array} \right\} \text{est continue}.$$

Soit K compact $\subset G$, $\{f * \varepsilon_s, s \in K\}$ est un compact de L^1, Z est équicontinue sur $L^1(G)$. La topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie de la convergence compacte.

Donc $\zeta'(f * \varepsilon_s)$ converge uniformément pour $s \in K$ vers $\zeta(f * \varepsilon_s)$ lorsque $\zeta' \longrightarrow \zeta$ dans W. Donc

$$\phi' \longrightarrow \phi \text{ uniformément sur } K \text{ lorsque } \zeta' \longrightarrow \zeta \text{ dans } W .$$

Bibliographie :

HELGASON : Differential geometry and Symmetric Spaces.

GODEMENT : Séminaire Bourbaki 56-57, exposé 144.

III - Théorème de Plancherel - Transformation de Fourier.

Mêmes notations que dans les chapitres précédents.

Définition. On dit que la mesure μ sur G est de type positif si

$$\forall f \in L , \quad \mu(f * \tilde{f}) \geqslant 0 , \text{ où } \tilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})} .$$

Propriété. Si ϕ est une fonction sphérique de type positif, alors

$$\phi(e) = 1 , \quad \phi(s) = \overline{\phi(s^{-1})} , \quad |\phi(s)| \leqslant 1 \text{ , pour tout élément } s \in G.$$

Théorème de Plancherel. Soit μ une mesure de type positif sur G. Alors il existe un sous-espace $\mathcal{S}$ de l'ensemble des fonctions sphériques de type positif sur G qui est localement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G et il existe une mesure positive $\hat{\mu}$ unique sur $\mathcal{S}$ telle que, si on note $\hat{f}(\phi) = \int f(x)\, \phi(x)\, dx$ pour $\phi \in \mathcal{S}$, on ait

1) $\overline{\{\hat{f}, f \in {}^{\natural}L^{\natural}\}}^{L^2(\hat{\mu})} = L^2(\hat{\mu})$

2) $\forall f, g \in {}^{\natural}L^{\natural}, \quad \mu(f * \hat{g}) = \int \hat{f}(\phi)\, \overline{\hat{g}}(\phi)\, d\hat{\mu}(\phi)$.

Remarques : * si $\mu = \delta_e$ on obtient le théorème de Plancherel proprement dit

* si $\mu = \phi(x)dx$ avec ϕ continue de type positif, on obtient le théorème de Bochner.

Démonstration du théorème : On se place dans le cas $\mu = \delta_e$ (c'est le cas qui nous est utile dans la suite).

Soit $^\natural L^\natural$ muni de $*$ et du produit scalaire $(f,g) = \delta_e(f * \tilde{g})$ et de l'involution $f \longmapsto \tilde{f}$. $^\natural L^\natural$ est une algèbre unitaire commutative :

. $(f * g, h) = \delta_e(f * g * \tilde{h}) = \delta_e(f * \widetilde{h * \tilde{g}}) = (f, h * \tilde{g})$

. $(f, g) = \delta_e(f * \tilde{g}) = \delta_e(\tilde{g} * f) = (\tilde{g}, \tilde{f})$

. Soit $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien complété de $^\natural L^\natural$ ($^\natural L^\natural$ est séparé)

$$f, g \in {}^\natural L^\natural \quad , \quad L(g)(f) = g * f$$

$$f * g = \int (f * \varepsilon_s)\, g(s)\, ds \quad \text{(intégrale vectorielle)}$$

$$\|f * g\| \leqslant \int \|f * \varepsilon_s\| |g(s)| ds = \|f\| \int |g(s)| ds \ .$$

Donc $L(g)$ est continue et $\|L(g)\| \leqslant \int |g(s)| ds$

. Les $f * g$ sont denses dans $^\natural L^\natural$.

On applique alors le théorème de Plancherel abstrait à $^\natural L^\natural$. On obtient:

$$\begin{cases} S & \text{sous-ensemble de caractères de } {}^\natural L^\natural \text{. } S \text{ localement compact} \\ m & \text{mesure positive sur } S \end{cases}$$

$$\zeta \in S \Longrightarrow |\zeta(f)| \leqslant \|L(f)\| \leqslant \int |f(x)| dx \ .$$

Donc $S \subset Z$.

Posons $\begin{cases} \mathcal{S} = j^{-1}(S) \\ \hat{\mu} = j^{-1}(m) \ . \end{cases}$

En fait, les fonctions de $\mathcal{S}$ sont de type positif ; en effet :
soit $\phi \in \mathcal{S}$, $j(\phi) = \zeta$.
Il s'agit de montrer $\forall g \in L$, $\int \tilde{g} * g(x)\, \phi(x)\, dx \geqslant 0$, c'est-à-dire $\zeta({}^\natural(\tilde{g} * g)^\natural) \geqslant 0$.

. $L({}^\natural(\tilde{g} * g)^\natural)$ est hermitien positif :

$\phi \in {}^\natural L^\natural$

$$(L({}^\natural(\tilde{g} * g)^\natural)(\phi), \phi) = ({}^\natural(\tilde{g} * g)^\natural * \phi * \tilde{\phi})(e) = (\phi * {}^\natural(\tilde{g} * g)^\natural * \tilde{\phi})(e)$$

$$= {}^\natural(\phi * \tilde{g} * g * \tilde{\phi})^\natural(e) \geqslant 0 \ .$$

. $f \in {}^\natural L^\natural$, $L(f)$ hermitien positif $\Longrightarrow \zeta(f) \geqslant 0$:
Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre fermée engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par les $L(h)$ pour $h \in {}^\natural L^\natural$; $|\zeta(h)| \leqslant \|L(h)\|$.

Posons $\xi(L(h)) = \zeta(h)$. ξ se prolonge continûment sur $\mathcal{B}$ en un caractère hermitien. On a le théorème suivant :

Si une algèbre fermée d'opérateurs d'un espace de Hilbert contient un opérateur hermitien positif, elle contient aussi sa racine carrée

une démonstration élémentaire est donnée dans le livre : Analyse fonctionnelle de Riesz et Nagy.

Donc $\exists B \in \mathcal{B}$ tel que B hermitien positif et $B^2 = L(f)$. On a alors :

$$\zeta(f) = \xi(L(f)) = \xi(B^2) = \xi(BB^*) = \xi(B)\,\overline{\xi(B)} \geqslant 0 .$$

Théorème (transformation de Fourier) : Soit G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact, $*$ étant commutative sur $^\natural L^\natural$. Alors il existe un sous-espace localement compact $\mathcal{S}$ de l'espace des fonctions sphériques de type positif sur G muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G et une mesure $d\phi$ positive tels que :

il existe une isométrie $^\natural L^2(G)^\natural \longrightarrow L^2(\mathcal{S}, d\phi)$ vérifiant : $f \longmapsto \hat{f}$

i) $\forall f \in {}^\natural[L^1(G) \cap L^2(G)]^\natural \qquad \hat{f}(\phi) = \int f(x)\, \phi(x)\, dx$

ii) $\forall \hat{f} \in L^1(\mathcal{S}) \cap L^2(\mathcal{S}) \qquad f(x) = \int \hat{f}(\phi)\, \overline{\phi(x)}\, d\phi$

iii) $\forall f \in {}^\natural L^\natural, \ \forall g \in {}^\natural L^2(G)^\natural \qquad \widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$

Démonstration : i) et iii) sont immédiats.

ii) $f \in {}^\natural L^{2\,\natural} \Longrightarrow \hat{f} \in L^1(\mathcal{S}) \cap L^2(\mathcal{S})$

notons $F(x) = \int \hat{f}(\phi)\, \overline{\phi(x)}\, d\phi$. Soit $g \in {}^\natural[L^1(G) \cap L^2(G)]^\natural$

$$\int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int \hat{f}(\phi)\, \overline{\hat{g}}(\phi)\, d\phi$$

$$\int F(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \iint \hat{f}(\phi)\, \overline{\phi(x)}\, \overline{g(x)}\, dx\, d\phi = \int \hat{f}(\phi)\, \overline{\hat{g}}(\phi)\, d\phi$$

donc $\qquad f = F$ dans $^\natural L^2(G)^\natural$.

Bibliographie :

GODEMENT : Séminaire Bourbaki 56-57, exposé 144.

IV - Opérateurs invariants par translations.

G groupe abélien localement compact unimodulaire, K sous-groupe compact de G.

$$G \xrightarrow{\pi} G/K \quad . \text{ Notons } \quad \mathring{g} = \pi(g)$$

À une fonction F définie sur G et invariante à droite par K, on associe la fonction f obtenue à partir de F par passage au quotient.

Proposition. $F \longmapsto f$ est une bijection de $\mathcal{H}(G)^{\natural}$ sur $\mathcal{H}(G/K)$, $\mathcal{H}(G)^{\natural}$ est stable par convolution, donc on peut définir la convolée de deux fonctions de $\mathcal{H}(G/K)$. On a $(f * g)(\mathring{b}) = \int_G f(y^{-1}\mathring{b})\, g(y\mathring{e})\, dy$.
Supposons que la convolution soit commutative sur ${}^{\natural}\mathcal{H}(G/K)$ c'est-à-dire sur ${}^{\natural}\mathcal{H}(G)^{\natural}$.

Condition suffisante pour que la convolution soit commutative :

Il existe σ automorphisme involutif de G tel que :

$\forall x \in G, \exists k \in K, \exists p \in G, \quad x = kp, \quad \sigma(k) = k, \quad \sigma(p) = p^{-1}$.

Démonstration : Pour $F \in {}^{\natural}\mathcal{H}(G)^{\natural}$ on a $F^{\sigma} = \check{F}$ $(\sigma(x) = kx^{-1}k)$

$$\left.\begin{array}{l} \check{F} * \check{G} = \overline{G * F}^{\vee} \\ F^{\sigma} * G^{\sigma} = (F * G)^{\sigma} \end{array}\right\} \text{d'où } F * G = G * F \quad \text{pour} \quad F, G \in {}^{\natural}\mathcal{H}(G)^{\natural}.$$

Exemples : 1) la sphère $S_2 = \dfrac{SO(3)}{SO(2)}$. Notons π la symétrie par rapport au plan diamétral invariant par $SO(2)$.

On prend pour σ l'automorphisme $\mathcal{R} \longmapsto \pi \circ \mathcal{R} \circ \pi$.

2) Les sommets de l'octaèdre considéré comme quotient des déplacements de l'octaèdre.

3) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ considéré comme quotient du groupe des similitudes laissant l'origine invariante.

Théorème. Soit A un opérateur non partout défini sur $\mathcal{C}(G/K)$, où G est compact, tel que :

1) $D(A)$ est dense dans $\mathcal{C}(G/K)$;

2) A est dissipatif ;

3) A est invariant par G.

Alors $\mathrm{Im}(I-\widetilde{A})$ est dense dans $\mathcal{C}(G/K)$.

<u>Démonstration</u> : On parlera indifféremment de F ou de f.

a) Soit $\tilde{A}$ le plus petit prolongement fermé de A, on a
$\forall f,g \in {}^{\natural}D(\tilde{A})$, $\tilde{A}(f * g) = \tilde{A}(f) * g = f * \tilde{A}(g)$,
$\forall f,g \in {}^{\natural}D(\tilde{A})$, $\widehat{A(f)}\hat{g} = \hat{f}\,\widehat{A(g)}$.

<u>Donc il existe une fonction unique Φ continue telle que</u> $\forall f \in {}^{\natural}D(\tilde{A})$, $\widehat{A(f)} = \Phi\hat{f}$.

Soit $\mathcal{F}_o(G/K) = \{f \in {}^{\natural}L^2(G/K)\ ,\ \hat{f} \in \mathcal{K}(S)\}$

$\mathcal{F}_o(G/K) \in \mathcal{C}(G/K)$

$\mathcal{F}(G/K)$ = l'espace engendré par les $\tau_g f$.

b) <u>Lemme. Il existe une base</u> $\{V_i\}$ <u>de voisinages compacts de</u> $\mathring{e}$ <u>invariants par</u> K <u>et des</u> $\alpha_i \subset {}^{\natural}\mathcal{C}(G/K)$ <u>telles que</u> :

$$\alpha_i \geqslant 0\ ,\quad \int \alpha_i(x)dx = 1\ ,\quad \mathrm{Supp}\ \alpha_i \subset V_i\ .$$

<u>Si</u> $f \in \mathcal{C}(G/K)$, $\alpha_i * f \longrightarrow f$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(G/K)$.

<u>Démonstration</u> : Soit V un voisinage ouvert relativement compact de $\mathring{e}$
Supposons que $\bigcap_{k\in K} kV$ ne soit pas un voisinage de $\mathring{e}$

$$\exists (k_i) \subset K\ ,\quad x_i \notin V\ ,\quad k_i x_i \longrightarrow \mathring{e}\ .$$

On prend la limite suivant un ultrafiltre plus fin :

$$k_i \longrightarrow k \in K\ ,\ \text{donc}\ x_i \longrightarrow x \notin V\ ,\ \text{d'où}\ \mathring{e} = kx\ ,$$

donc $k^{-1}\mathring{e} = \mathring{e} = x \notin V$, d'où contradiction (l'existence des α_i est facile à montrer).

Soit $f \in \mathcal{C}(G/K)$,

$$(\alpha_i * f - f)(\mathring{a}) = \int_G [\alpha_i(y^{-1}\mathring{a})\ f(y\mathring{e}) - f(\mathring{a})\ \alpha_i(y^{-1}\mathring{a})]\ dy$$

f est uniformément continue $\Longrightarrow \varepsilon \rightsquigarrow V_i$

$$y^{-1}\mathring{a} \in V_i \Longrightarrow \mathring{a} \in yV_i \quad \text{et} \quad y\mathring{e} \in yV_i \quad \text{donc}$$

$$|(\alpha_i * f - f)(\mathring{a})| < \varepsilon\ .$$

c) $\mathcal{F}_o(G/K)$ <u>est dense dans</u> ${}^{\natural}\mathcal{C}(G/K)$:

$f \in {}^{\natural}\mathcal{C}(G/K)$, $\alpha_i * f \longrightarrow f$ dans $\mathcal{C}(G/K)$ d'après le lemme,
$\widehat{\alpha_i * f} = \hat{\alpha}_i\ \hat{f} \in \mathcal{L}^1$, $\exists\ h \in {}^{\natural}\mathcal{C}(G/K)$ tel que $\hat{h} \in \mathcal{K}(S)$ et $\|\hat{\alpha}_i\hat{f} - \hat{h}\|_1 < \varepsilon$,
alors $\|\alpha_i * f - h\| \leqslant \varepsilon$.

$\mathcal{F}(G/K)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{C}(G/K)$:

$f \in \mathcal{C}(G/K)$, $\alpha_i * f \longrightarrow f$ dans $\mathcal{C}(G/K)$. Soit $\beta_i \in \mathcal{F}_o(G/K)$ tel que $\|\alpha_i - \beta_i\|_\infty < \varepsilon$. Alors $\|\alpha_i * f - \beta_i * f\|_\infty \leqslant \varepsilon \int |f(y)|dy$, d'autre part $\beta_i * f = \int (\beta_i * \varepsilon_y)\, f(y)\, dy \in \overline{\mathcal{F}(G/K)}$.

d) $D(\widetilde{A}) \supset \mathcal{F}(G/K)$.

Il suffit de voir $D(\widetilde{A}) \supset \mathcal{F}_o(G/K)$; $f \in {}^\natural L^2(G/K)$ tel que $\hat{f} \in \mathcal{K}(S)$, $\exists\, f_n \in {}^\natural D(\widetilde{A})$ tel que $\operatorname{Supp} \hat{f}_n$ et $\operatorname{Supp} \hat{f} \subset H$ compact fixe et tel que $\hat{f}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{f}$ uniformément.

En effet : soit $h \in {}^\natural L^2(G/K)$ tel que $\hat{h} \in \mathcal{K}(H)$ et $\hat{h}\, \hat{f} = \hat{f}$, soit $g_n \in {}^\natural D(A)$ tel que $\|\hat{g}_n - \hat{f}\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$. On prend $f_n = g_n * h$. On a $\hat{f}_n = \hat{g}_n\, \hat{h}$ et $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \quad \frac{\|\hat{h}\|_\infty}{n}$.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}_n \longrightarrow \hat{f} \quad \text{dans } \mathcal{L}^1 \\ \Phi\hat{f}_n \longrightarrow \Phi\hat{f} \quad \text{dans } \mathcal{L}^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } \mathcal{C}(G/K) \\ Af_n \longrightarrow g \quad \text{dans } \mathcal{C}(G/K) . \end{array}$$

D'où $f \in D(\widetilde{A})$.

e) Soient ϕ et $\psi \in \mathcal{S}$:

$$\phi * \psi(t) = \int \phi(x^{-1}t)\, \psi(x)\, dx = \phi(t) \int \phi(x^{-1})\, \psi(x)\, dx$$
$$= \psi(t) \int \psi(x^{-1})\, \phi(x)\, dx$$

si $\phi \neq \psi$ alors $\int \phi(x^{-1})\, \psi(x)\, dx = \hat{\phi}(\bar{\psi}) = \hat{\psi}(\bar{\phi}) = 0$; d'autre part $\hat{\phi}(\bar{\phi}) > 0$. Donc $\phi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \phi \in D(\widetilde{A})$ et on a $\widehat{\widetilde{A}(\phi)} = \Phi\hat{\phi} = \Phi(\bar{\phi})\hat{\phi}$.

Donc $\widetilde{A}(\phi) = \Phi(\bar{\phi})\phi$ (ϕ est fonction propre de A) , ceci est vrai pour tout opérateur A préfermé, à domaine dense, et invariant par translation.

f) $\widetilde{A}$ étant dissipatif :

$\widetilde{A}(\phi)(e) = \Phi(\bar{\phi})\, \phi(e) = \Phi(\bar{\phi})$ et $\mathcal{R}e\, \widetilde{A}(\phi)(e) \leqslant 0$, donc $\forall\, \phi \in \mathcal{S}$ $\mathcal{R}e\, \Phi(\phi) \leqslant 0$.

g) $\mathcal{F}(G/K) \subset \operatorname{Im}(I - \widetilde{A})$:

Il suffit de montrer $\mathcal{F}_o(G/K) \subset \operatorname{Im}(I - \widetilde{A})$ d'après l'invariance de $\widetilde{A}$ par translation. Soit $f \in {}^\natural L^2(G/K)$ tel que $\hat{f} \in \mathcal{K}(S)$

$\frac{\hat{f}}{1-\Phi} \in \mathcal{K}(S)$ donc $\exists\, g \in \mathcal{F}_o(G/K)$ tel que $\hat{f} = (1-\Phi)\hat{g}$, $\hat{f} = \widehat{(I-A)(g)}$ d'où $f = (I-A)(g)$.

Remarque 1. On a le même résultat avec A codissipatif.

Remarque 2. $\forall f \in D(\widetilde{A})$, $\int \bar{f}\, \widetilde{A}(f)\, dx = \int \Phi\, |\hat{f}|^2 d\phi$.

$(\mathcal{R}e\, \Phi \leq 0) \Longleftrightarrow (\forall f \in D(\widetilde{A})\ \ \mathcal{R}e \int \bar{f}\, \widetilde{A}(f)\, dx \leq 0)$

(et on a un résultat analogue dans le cas A codissipatif).

Remarque 3. Si $\widetilde{A}$ est injectif on a $\Phi(\phi) \neq 0$ pour tout ϕ, d'où il résulte que $\operatorname{Im} \widetilde{A}$ est dense ; ceci est vrai pour A préfermé, à domaine dense, invariant par translation.

Bibliographie :

Le point de départ de cette étude est l'article de :

FARAUT et HARZALLAH : Semi-groupes d'opérateurs invariants et opérateurs dissipatifs invariants (Université de Tunis).

-:-:-:-

Exposé de Alain DAMLAMIAN

"METHODE DE MONOTONIE DANS CERTAINS PROBLEMES D'EVOLUTION NON LINEAIRES DEPENDANT DU TEMPS. UN RESULTAT DE H. BREZIS"

Soit H un espace de Hilbert réel, de norme $|.|$, et de produit scalaire $(.,.)$, $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs monotones sur H. On s'intéresse au problème (P) suivant :

Etant données f dans un $L^p(0,T;H)$ et u_0 dans H, peut-on trouver u dans $\mathscr{C}([0,T];H)$ absolument continue sur tout compact de $]0,T[$, telle que presque partout sur $]0,T[$

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)\,u(t) \ni f(t) \qquad u(0) = 0 .$$

I - Etude fonctionnelle.

Il s'agit ici de voir dans quelle mesure les méthodes fonctionnelles utilisées dans le cas quasi-autonome ($A(t) = A$ indépendant de t) [voir à ce sujet [2] chapitre III ; voir aussi [4]] peuvent s'étendre au cas dépendant du temps.

1) "Prolongement canonique" à $L^2(0,T;H)$" d'une famille d'opérateurs $(A(t))_{t\in[0,T]}$.

(1.1) Définition. Soit $A(t)$ une famille d'opérateurs (multivoques) de H, définis pour presque tout t de $[0,T]$, on appellera prolongement canonique de $(A(t))$ à $L^2(0,T;H)$ (en abrégé : P.C. de $A(t)$ à L^2) l'opérateur fonctionel $\mathcal{A}$ ainsi défini par son graphe

$$\mathcal{A} = \{[u,v] \in (L^2(0,T;H))^2 \;;\quad v(t) \in A(t)\,u(t) \;\; \text{p.p.}\} .$$

(1.2) Remarque 1. Il s'agit d'une généralisation immédiate du cas indépendant du temps. Il est clair que $\mathcal{A}$ peut avoir un domaine vide.

Remarque 2. On pourrait définir un prolongement canonique de $A(t)$ depuis $L^p(0,T;H)$ dans $L^q(0,T;H)$. Toutefois il n'aurait d'intérêt que pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(p\neq 1,\infty)$, situation dans laquelle on peut utiliser les propriétés de monotonie. Nous nous restreindrons ici au cas $p=q=2$ pour lequel $L^2(0,T;H)$ est encore un espace de Hilbert (réel). Nous noterons son produit scalaire $(.,.)_{L^2}$.

On a le résultat évident suivant :

(1.3) Proposition. *Si $A(t)$ est monotone dans H pour presque tout t de $[0,T]$, $\mathcal{A}$ est monotone dans $L^2(0,T;H)$.*

(1.4) Corollaire. *Si $A(t)$ est monotone dans H pour presque tout t de $[0,T]$, il y a unicité de la solution du problème* (P)

$$\frac{du}{dt}+A(t)\,u(t)\ni f(t) \quad u(0)=u_o \quad \text{pour tout } f \text{ dans } L^2(0,T;H).$$

Démonstration : Si u_1 et u_2 sont solution du problème ci-dessus,

$$f-\frac{du_1}{dt}\in\mathcal{A}u_1 \quad\text{et}\quad f-\frac{du_2}{dt}\in\mathcal{A}u_2 \quad\text{donc}\quad -\left(\frac{du_1}{dt}-\frac{du_2}{dt},\,u_1-u_2\right)_{L^2}\geqslant 0.$$

Posons $u=u_1-u_2$.

Or $\left(\frac{du}{dt},u\right)_{L^2}=\int_o^T\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}(|u(T)|^2-|u(0)|^2)$.

Or $u(0)=u_1(0)-u_2(0)=0$. On en conclut que $u_1(T)=u_2(T)$. Ceci a lieu aussi pour tout $t\in[0,T]$, d'où l'unicité.

(1.5) Remarque. Le même raisonnement montre que l'opérateur B défini ci-dessous est monotone :

$$Bu=\frac{du}{dt} \quad\text{où}\quad D(B)=\{u\in W^{1,2}(0,T;H)^{(*)}\ ;\ u(0)=u_o\}.$$

Voici les conditions de maximalité de $\mathcal{A}$.

(*) $W^{1,2}(0,T;H)=\{u\in\mathcal{C}(0,T;H)\ ;\ u$ absolument continue et $\frac{du}{dt}\in L^2(0,T;H)\}$
cf. [1]

(1.6) <u>Proposition. Supposons que</u> $A(t)$ <u>est maximal monotone pour presque tout</u> t <u>de</u> $[0,T]$. <u>Sont équivalents</u>

i) $\mathcal{A}$ <u>est maximal monotone</u>

ii) $\exists\ \lambda>0\ ,\ \forall x\in H\ ,\ (t \longmapsto J_\lambda^{A(t)}x) \in L^2(0,T;H)$

(J_λ^A <u>est la résolvante d'indice</u> λ <u>de</u> A).

iii) $\forall\ \lambda>0\ ,\ \forall u\in L^2(0,T;H)\ ,\ (t \longmapsto J_\lambda^{A(t)}\ u(t) \in L^2(0,T;H)$.

De plus, la résolvante d'indice λ associé à $\mathcal{A}$ est le "Prolongement canonique" de la famille $J_\lambda^{A(t)}$.

<u>Démonstration</u> i) $\Longrightarrow$ ii) . En effet $t \longmapsto J_\lambda^{A(t)}x$ est égal à $t \longmapsto J_\lambda^{\mathcal{A}}x$ En effet si $v(t) + \lambda A(t)\ v(t) \ni x$ p.p. on a p.p.

$$v(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}x\ .$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) En effat il existe un λ positif tel que $J_\lambda(t,x) = J_\lambda^{A(t)}x$ satisfait aux conditions de Caratheodory (puisque contractante en x pour presque tout t) .

Donc pour tout u mesurable,

$$t \longmapsto J_\lambda(t,u(t)) \text{ est mesurable.}$$

De plus, lorsque u est dans $L^2(0,T;H)$ on a, en fixant x dans H , pour presque tout t

$$|J_\lambda(t,x) - J_\lambda(t,u(t))| \leq |x-u(t)| \quad \text{donc}$$

$t \longmapsto J_\lambda(t,u(t))$ est dans $L^2(0,T;H)$.

Enfin, puisque $\mathcal{A}$ est monotone, l'existence d'un λ positif pour lequel $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ est une contraction partout définie implique que céci est vrai pour tout λ positif.

iii) $\Longrightarrow$ i) . Car alors pour tout λ positif $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ est une contraction partout définie.

2) Prolongement canonique d'une famille de fonctions convexe s.c.i. $(\phi(t))$ définie sur H .

(1.7) <u>Définition</u>. Soit $(\phi(t))_{t\in[0,T]}$ une famille (presque partout définie) de fonctions convexes s.c.i. sur H . On appelle "prolongement canonique" (P.C.) de la famille $(\phi(t))$ à $L^2(0,T;H)$ la fonction Φ ainsi définie :

$$u \longmapsto \Phi u = \begin{cases} \int_0^T \phi(t,u(t))\,dt & \text{si} \quad \phi(t,u(t)) \in L^1(0,T) \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

Cette notion ne présente aucun intérêt si pour presque tout t la fonction $\phi(t)$ n'est pas propre (c'est-à-dire ϕ non identiquement $+\infty$) . Ceci ne garantit toutefois pas que Φ soit convexe.

On peut se poser la question du rapport de Φ avec $\mathcal{A}$ prolongement canonique de $A(t) = \partial\phi(t)$ à $L^2(0,T;H)$.

(1.8) <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> $(\phi(t))_{t\in[0,T]}$ <u>une famille de fonctions (presque partout) convexe s.c.i. propre sur</u> H , <u>telle que pour tout</u> u <u>de</u> $L^2(0,T;H)$, $t \longmapsto \phi(t\,,u(t))$ <u>est mesurable</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>le prolongement associé à la famille</u> $(\partial\phi(t))_{t\in[0,T]}$. <u>On suppose que</u> $\mathcal{A}$ <u>est maximal monotone, et que</u> $D(\Phi)\cap D(\mathcal{A})$ <u>est non vide</u>.

<u>Alors</u> Φ <u>est convexe s.c.i. propre et</u> $\mathcal{A}$ <u>est son sous-différentiel</u>.

<u>Démonstration</u> L'hypothèse de mesurabilité assure que Φ est convexe ; l'hypothèse sur le domaine non vide implique que Φ est propre.

Montrons que Φ est s.c.i. : soit u dans $D(\Phi)$ et soit $\rho = \underline{\lim}_{\substack{v\to u \\ L^2}} \Phi(v)$.

Il existe u_n tendant vers u dans $L^2(0,T;H)$ et presque partout, avec $\rho = \lim \Phi(u_n)$. Il suffit de montrer que $\lim \Phi(u_n) \geq \Phi(u)$.

Or soit $\alpha \in D(\Phi)\cap D(\mathcal{A})$ et soit $\beta \in \mathcal{A}\alpha$, on a alors p.p.t

$$\phi(t,v(t)) \geq \phi(t,\alpha(t)) + (v(t)-\alpha(t),\beta(t))$$

donc $\phi(t,v(t)) - (v(t),\beta(t)) \geq \phi(t,\alpha(t)) - (\alpha(t),\beta(t))$.

Par suite $\phi(t,v(t)) - (v(t),\beta(t))$ est minorée par une fonction de $L^1(0,T)$.

Par le lemme de Fatou, on a donc :

$$\int(\underline{\lim}_{n\to+\infty} \phi(t,u_n(t)) - (u(t),\beta(t)) \leq \lim(\Phi(u_n)-(u_n,\beta)_{L^2}) = \lim \Phi(u_n)-(u,\beta)_{L^2}.$$

Or p.p.t $\underline{\lim}(\phi(t,u_n(t)) - (u_n(t),\beta(t)) \geq \phi(t,u(t)) - (u(t),\beta(t))$.

Puisque $\phi(t,u(t))$ est mesurable on en déduit donc que

$$\Phi(u) \leq \lim \Phi(u_n) .$$

On en déduit aussi que $\Phi(u)-(u,\beta)_{L^2} \geq \phi(\alpha)-(\alpha,\beta)_{L^2}$. Ceci montre bien que $\beta \in \partial\Phi(\alpha)$, c'est-à-dire que $\partial\Phi$ prolonge $\mathcal{A}$. Par la maximalité de $\mathcal{A}$, on déduit $\mathcal{A} = \partial\Phi$.

3) Un théorème d'existence sans aucun intérêt.
Pour résoudre le problème (P) on peut l'écrire sous la forme

$$Bu + \mathcal{A}u \ni f \quad \text{où } B \text{ a été défini dans (1.5).}$$

L'opérateur $(B+\mathcal{A})$ est maximal monotone sous certaines conditions et surjectif sous certaines autres. Voici un exemple d'utilisation de ces conditions (pour plus de détails sur ce type de condition, se référer à [2] chapitre II).

(1.9) <u>Proposition</u>. <u>On suppose les hypothèses de (1.8) vérifiées. On suppose de plus qu'il existe une constante</u> C <u>telle que pour tout</u> λ <u>positif et tout</u> u <u>de</u> $L^2(0,T;H)$ <u>on a</u>

$$(1.10) \quad \int_0^T \phi(t, u_0\, e^{-t/\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t u(\tau)\, e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}\, d\tau)\, dt \leq C\lambda + \int_0^T \phi(t, u(t))\, dt .$$

Alors $B+\mathcal{A}$ est surjectif et maximal monotone. En particulier pour tout f de $L^2(0,T;H)$ il existe u solution unique de
$\frac{du}{dt}(t) + A(t)\,u(t) \ni f(t)$ p.p.t $u(0) = u_0$.

<u>Démonstration</u> : L'hypothèse 1.10 exprime que $\Phi(J_\lambda^B u) \leq \Phi(u) + \lambda C$ où J_λ^B est la résolvante d'indice λ de B. Cette condition implique que $B+\partial\Phi$ est maximal monotone et que $|Bu| \leq \sqrt{C} + |(\mathcal{A}+B)^\circ u|$.
(cf. [2] p.II.30-31, proposition 2.17).

Or $\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2} \geq |u-u_0|_{L^2}\sqrt{T}$ par l'inégalité de Schwarz, donc $|Bu| \longrightarrow +\infty$ lorsque $|u| \longrightarrow +\infty$. Donc $|(\mathcal{A}+B)^\circ u| \longrightarrow +\infty$ lorsque $|u| \longrightarrow +\infty$.

Ceci implique (cf. [2] p.II.13, théorème 2.3 et corollaire 2.3) que $\mathcal{A}+B$ est surjectif.

<u>Remarque</u>. Comme on le voit, la condition (1.10) implique que $B+\mathcal{A}$ est bijectif donc univoque, donc $\mathcal{A}$ est univoque. Donc cette condition est très stricte. En fait, elle n'est intéressante que dans le cas $\phi(t)$

indépendant de t (voir à ce propos [2] p.III. 20-24, théorème 3.6).

II - Un résultat de Brézis : Un théorème d'existence.

On suppose que $A(t) = \partial\phi + \partial I_{K(t)}$ où $(K(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille de convexes fermés de H dépendant de t.
Nous noterons $\phi(t) = \phi + I_{K(t)}$ (où $I_{K(t)}$ est la fonction indicatrice de $K(t)$, égale à 0 sur $K(t)$, à $+\infty$ ailleurs) et $A = \partial\phi$.

Nous utiliserons des hypothèses supplémentaires que nous allons expliciter.

Hypothèse
(2.1) Il existe $a(t)$ dans $L^2(0,T;H)$ tel que p.p.t

$$(I+\lambda(A-a(t)))^{-1} K(t) \subset K(t) \text{ . Ceci s'écrit aussi}$$

$$(I + \lambda A)^{-1} (K(t)+\lambda a(t)) \subset K(t) \text{ .}$$

Conséquence de (2.1) : (par [2] proposition 2.17, p.II 30-31), p.p.t, $A - a(t) + \partial I_{K(t)}$ est le sous-différentiel de $x \longmapsto \phi(x) - (a(t),x) + I_{K(t)}x$, et donc p.p.t, $A(t) = \partial(\phi+I_{K(t)})$ est maximal monotone. De plus $\overline{D(\phi)} \cap K(t) = \overline{D(\phi) \cap K(t)}$ pour ces valeurs de t

Hypothèse
(2.2) Il existe une fonction ω de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ bornée sur les bornés telle que :

$$\forall h \in]0,T[\text{ , } \forall v \in W^{1,2}(0,T;H) \text{ on a}$$
$$\int_0^{T-h} \left|\frac{P(t+h)u(t) - P(t)u(t)}{h}\right|^2 dt \leq \omega^2(|u|_\infty) \text{ .}$$

(où $P(t)$ est la projection sur $K(t)$; c'est aussi la résolvante $J_\lambda^{I_{K(t)}}$ pour tout λ positif).

De plus, si ω n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$, il existe b dans $W^{1,1}(0,T;H)$ (i.e. absolument continue et à dérivée dans $L^1(0,T;H)$), et c dans $L^1(0,T;h)$ tels que p.p.t

$$b(t) \in D(A) \cap K(t) \quad \text{et} \quad c(t) \in A\, b(t) \quad \text{p.p.t .}$$

(2.3) Remarque.1. La condition (2.2) implique, en particulier que pour tout z de H, la fonction $t \longmapsto P(t)z$ est dans $W^{1,2}(0,T;H)$ et $\left|\frac{d}{dt} P(t)z\right|_{L^2} \leqslant \omega(|z|)$ (cf. [1]).

2. De plus elle exprime une certaine "continuité" de la famille $K(t)$ au sens suivant

Pour tout t_o de $[0,T]$ on définit $\tilde{K}(t_o) = \{x \in H ; \exists\, z \in H$ avec $x = \lim_{t \to t_o} P(t)z\}$. Il est clair que $\tilde{K}(t_o)$ est convexe. De plus si $K(t_o)$ est défini ($K(t)$ l'est a priori seulement presque partout). L'ensemble des t_o tels que $K(t_o) \neq \tilde{K}(t_o)$ est de mesure nulle (cf. la remarque 1 ci-dessus). On peut donc supposer $K(t)$ partout défini sur $[0,T]$ et ayant la propriété de continuité

$$K(t_o) = \{x : \exists\, z \in H ; \ x = \lim_{t \to t_o} P(t)z\} .$$

C'est ce que nous supposerons dans toute la suite de ce paragraphe. Enfin, si on suppose ω bornée par une constante C, la dépendance de $K(t)$ par rapport à t devient höldérienne lorsqu'on la mesure par la distance de Hansdorff :

$$\delta(K(t),K(s)) = \sup\left(\sup_{x \in K(t)} \operatorname{dist}(x,K(s)), \sup_{x \in K(s)} \operatorname{dist}(x,K(t))\right) .$$

Or $\operatorname{dist}(x,K(s)) = |x - P(s)x| = |P(t)x - P(s)x|$ lorsque x est dans $K(t)$. Or $\left|\frac{d}{dt} p(t)x\right|_{L^2} \leqslant \omega(|x|) \leqslant C$ donc

$$|P(t)x - P(s)x| \leqslant \sqrt{|t-s|}\ \left|\frac{d}{dt} p(t)x\right|_{L^2} \leqslant C\sqrt{|t-s|} .$$

Donc $\delta(K(t),K(s)) \leqslant C\sqrt{|t-s|}$.

3. Sous la même condition (2.2) pour toute u de $W^{1,2}(0,T;H)$, la fonction $t \longmapsto P(t)\,u(t)$ est (presque partout égale à) un élément de $W^{1,2}(0,T;H)$.

En effet supposant que $K(t)$ est défini comme dans la remarque 2 ci-dessus, il est clair que $t \longmapsto P(t)\,u(t)$ est continue si u l'est. Il suffit alors de vérifier (cf. [1]) qu'il existe $C(u)$ indépendant de h tel que

$$\int_0^{T-h} \left|\frac{P(t+h)\,u(t+h) - P(t)\,u(t)}{h}\right|^2 dt \leqslant C(u) < +\infty .$$

Or $|P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t)| \leqslant |P(t+h)\ u(t+h) - P(t+h)\ u(t)|$

$$+ |P(t+h)\ u(t) - P(t)\ u(t)| \ .$$

Utilisant le fait que $P(t+h)$ est une contraction, on en déduit que

$$\left|\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right| + \left|\frac{P(t+h)\ u(t) - P(t)\ u(t)}{h}\right| .$$

Puisque $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ on a $\left|\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right|_{L^2(0,Th)} \leqslant \left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(0,T)}$

donc

$$C(u) = \left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(0,T)} + \omega(|u|_\infty) \ .$$

Voici le résultat de Brezis que nous allons montrer.

(2.4) <u>Théorème</u>. <u>Sous les hypothèses (2.1) et (2.2), pour toute</u> f <u>de</u> $L^2(0,T;H)$, <u>tout</u> u_o <u>de</u> $\overline{D(\phi) \cap K(0)}$, <u>il existe une unique fonction</u> u <u>de</u> $\mathscr{C}([0,T];H)$, <u>solution de</u> $\frac{du}{dt} + \partial\phi u + \partial I_{K(t)} u \ni f$ <u>avec</u> $u(0) = u_o$.

De manière plus précise, il existe une fonction z de $L^2(0,T;H)$, telle que p.p.t on a $f(t) - \frac{du}{dt}(t) - z(t) \in Au(t)$ et $(z(t), v-u(t)) \leqslant 0$ $\forall\ v \in K(t)$.

De plus $u(t) \in D(A) \cap K(t)$ p.p.t, $u(t) \in D(\phi) \cap K(t)$, $\forall\ t>0$ et $\sqrt{t}\ \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

Enfin, si $u_o \in D(\phi) \cap K(0)$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

La démonstration se fait en plusieurs étapes, chacune concernant un passage à la limite d'une régularisation Yosida.

Notons $B(t) = \partial I_{K(t)}$, $B_\mu(t) = \frac{I-P(t)}{\mu}$ approximation Yosida de $B(t)$, $\mathcal{A}$ le prolongement canonique de $A = \partial\phi$ à $L^2(0,T;H)$, $\mathcal{B}$ le prolongement canonique de $(B(t))_{t\in[0,T]}$ à $L^2(0,T;H)$. Ces deux opérateurs sont des opérateurs maximaux monotones, le premier par suite d'un résultat classique, le second d'après la proposition (1.6) : en effet l'hypothèse (2.2) implique que (1.6)ii) est vérifiée. Par la proposition (1.8) on vérifie également que $\mathcal{B}$ est un sous différentiel; le même résultat pour $\mathcal{A}$ est encore classique. Nous utiliserons en particulier la propriété de demi-fermeture de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
Soient λ et μ positifs ; on note u_μ la solution (dépendant aussi de λ) de

(2.5)
$$\begin{cases} \dfrac{du_\mu}{dt} + A_\lambda\, u_\mu + B_\mu(t)\, u_\mu = f \\ u_\mu(0) = u_o \,. \end{cases}$$

(2.6) <u>Lemme.</u> <u>(2.5) admet une solution</u> u_μ <u>dans</u> $W^{1,2}(0,T;H)$.

En effet, soit $g(t) = \int_o^t f(\tau)\, d\tau$, et $v(t) = u_\mu(t) - g(t)$

v doit vérifier $\frac{dv}{dt} + F(t,v(t)) = 0$ où

$$F(t,x) = A_\lambda(x-g(t)) + B_\mu(x-g(t)) \,.$$

Or $F(t,x)$ est lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ par rapport à x et continue par rapport à t (en utilisant le fait que g est continue, et A_λ et B_μ lipchitziens). Par le théorème classique de Cauchy, il existe donc v de classe C^1 répondant à la question ; g étant dans $W^{1,2}(0,T;H)$, il en résulte que u_μ est aussi dans $W^{1,2}(0,T;H)$.

Nous allons obtenir des estimations sur $\left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda\, u_\mu\right|_{L^2}$. Nous utiliserons à cet effet deux lemmes :

(2.7) <u>Lemme.</u> <u>Sous l'hypothèse (2.1), pour tout</u> z <u>de</u> H <u>on a</u>

$$(A_\lambda z, B_\mu(t)z) \geqslant -\, |a(t)|\,|B_\mu(t)z| \,.$$

<u>Démonstration</u> : On a $(A_\lambda z, z-P(t)z) = (A_\lambda z - A_\lambda\, P(t)z, z-P(t)z) + (A_\lambda\, P(t)z, z-P(t)z)$

$$\geqslant \frac{1}{\lambda}(P(t)z - J_\lambda^A(P(t)z+\lambda a(t)) + J_\lambda^A(P(t)z+\lambda a(t)) - J_\lambda^A(P(t)z), z-P(t)z) \,.$$

Or $J_\lambda^A(P(t)z+\lambda a(t)) \in K(t)$ car $P(t) \in K(t)$, donc

$(P(t)z - J_\lambda^A(P(t)z+\lambda a(t)), z-P(t)z)) \geqslant 0$ et

$$(A_\lambda z, z-P(t)z) \geqslant -\frac{1}{\lambda}|J_\lambda^A(P(t)z+\lambda a(t)) - J_\lambda^A(P(t)z)|\,|z-P(t)z|$$

$$\geqslant -\frac{1}{\lambda}|\lambda a(t)|\,|z-P(t)z| = -\,|a(t)|\,|z-P(t)z| \,.$$

(2.8) <u>Corollaire.</u>

$$\int_o^T (A_\lambda\, u_\mu(t), B_\mu(t)\, u_\mu(t)) \geqslant -\, |a|_{L^2}\, |B_\mu(t)\, u_\mu|_{L^2} \,.$$

(2.9) <u>Lemme.</u> <u>Sous l'hypothèse (2.2) pour tout</u> u <u>de</u> $W^{1,2}(0,T;H)$ <u>on a</u>

$$\int_o^T (\tfrac{du}{dt}, u(t)-P(t)\, u(t)dt \geqslant \frac{1}{2}|u(T)-P(T)\, u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u(0)-P(0)\, u(0)|^2 - \omega(|u|_\infty)\,|u-P(t)u|_{L^2} \,.$$

Démonstration : Par (2.3).3 $P(t)\ u(t)$ est absolument continue et dans $W^{1,2}$, donc en dérivant $t \mapsto |u(t)-P(t)\ u(t)|^2$

$$\int_0^T (\frac{du}{dt}, u(t)-P(t)\ u(t))dt = \frac{1}{2}|u(T)-P(T)|^2 - \frac{1}{2}|u(0)-P(0)\ u(0)|^2$$
$$+ \int_0^T (\frac{d}{dt}(P(t)\ u(t)), u(t)-P(t)\ u(t))dt .$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_0^T (\frac{d}{dt}P(t)\ u(t), u(t)-P(t)\ u(t))dt \geqslant - \omega(|u|_\infty)(u-P(t)u|_{L^2} .$$

Or $\frac{d}{dt}\ P(t)\ u(t)$ est la limite dans $L^2(0,T;H)$, lorsque h tend vers 0 de $\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t)}{h}$ (où $u(t)$ et $P(t)\ u(t)$ ont été prolongés en $t<0$ et en $t>T$ de manière constante).

Or $\int_0^T (\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t)}{h}, u(t)-P(t)\ u(t))dt$

$$= \int_0^T \frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t+h)}{h}, u(t)-P(t)\ u(t))dt$$
$$+ \int_0^T (\frac{P(t)\ u(t+h) - P(t)\ u(t)}{h}, u(t)-P(t)\ u(t))dt .$$

Or $(P(t)\ u(t+h) - P(t)\ u(t), u(t) - P(t)\ u(t)) \leqslant 0$ donc faisant $h<0$ on obtient :

$$\int_0^T (\frac{d}{dt}\ P(t)\ u(t), u(t)-P(t)\ u(t))dt$$
$$\geqslant \lim_{h\to 0^-} \int_0^T (\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t+h)}{h}, u(t)-P(t)u(t)dt$$
$$\geqslant - \lim_{h\to 0^-} \left|\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t+h)}{h}\right|_{L^2} |u(t)-P(t)u(t)|_{L^2}.$$

Or

$$\lim_{h\to 0^-}\left|\frac{P(t+h)\ u(t+h) - P(t)\ u(t+h)}{h}\right|_{L^2} = \lim_{h\to 0^+}\left|\frac{P(t)\ u(t) - P(t+h)\ u(t)}{h}\right|_{L^2}$$

est majoré par $\omega(|u|_\infty)$.

(2.10) Corollaire. $\int_0^T (\frac{du_\mu}{dt}, B_\mu\ u_\mu(t))dt \geqslant - \omega(|u_\mu|_\infty)\ |B_\mu\ u_\mu|_{L^2}$.

En effet, par hypothèse $u_0 \in \overline{D(\phi) \cap K(0)}$ donc $u_\mu(0) - P(0)\ u_\mu(0) = 0$.

Démonstration du théorème (2.4). Par (2.8) et (2.10) on déduit, en multipliant (2.5) par $\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu$ et en intégrant sur $[0,T]$:

$$\left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|^2_{L^2} \leqslant |f|_{L^2}\left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|_{L^2} + |B_\mu u_\mu|_{L^2}(|a|_{L^2}+\omega(|u_\mu|_\infty))$$

c'est-à-dire

$$(2.11)\quad \left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|^2_{L^2} \leqslant \left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|_{L^2}\left[|f|_{L^2}+|a|_{L^2}+\omega(|u|_\infty)\right] + |f|_{L^2}(|a|_{L^2}+(|u_\mu|_\infty))\ .$$

D'après l'hypothèse (2.2) ou bien $\omega(|u_\mu|_\infty)$ est borné indépendamment de λ et μ, ou bien $|u_\mu|_\infty$ est borné indépendamment de λ et μ comme on va le voir ci-dessous, ce qui montre alors que $\omega(|u_\mu|_\infty)$ est aussi borné indépendamment de λ et μ. Par (2.11) alors, on voit que $\left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|_{L^2}$ est borné indépendamment de λ et μ.

(2.12) Lemme. Si ω n'est pas borné sur $\mathbb{R}^+$, l'hypothèse (2.2) implique que u_μ est borné indépendamment de λ et μ.

En effet on a $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\mu(t)-b(t)|^2 = (u_\mu-b, \frac{du_\mu}{dt} - \frac{db}{dt})$

$$= (u_\mu-b,\ f - \frac{u_\mu-P(t)u_\mu}{\mu} - A_\lambda u_\mu - \frac{db}{dt})\ .$$

Or $(u_\mu-P(t)u_\mu,\ u_\mu-b) \geqslant 0$ car $b(t)\in K(t)$ p.p.t, et

$(A_\lambda u_\mu,\ u_\mu-b(t)) \geqslant (A_\lambda b(t),\ u_\mu-b(t))$ par la monotonie de A_λ, donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\mu(t)-b(t)|^2 \leqslant |u_\mu(t)-b(t)||f(t)| - (A_\lambda b(t),\ u_\mu-b) - (\frac{db}{dt},\ u_\mu-b)$$

$$\leqslant |u_\mu(t)b(t)|(|f(t)|+|\frac{db}{dt}|+|A_\lambda b(t)|)\ .\ \text{Or}$$

$|A_\lambda b(t)| \leqslant |A^0 b(t)| \leqslant |c(t)|$ d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\mu(t)-b(t)|^2 \leqslant |u_\mu(t)-b(t)|(|f(t)|+|\frac{db}{dt}|+|c(t)|)\ .$$

On en déduit que u_μ est uniformément borné en λ et μ.

On en conclut donc qu'il existe une constante M indépendante de λ et μ (et aussi de u_o dans $\overline{D(\phi)\cap K(0)}$) telle que

$$(2.13)\qquad \left|\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu\right|_{L^2} \leqslant M \quad \text{et} \quad |B_\mu u_\mu|_{L^2} \leqslant M\ .$$

<u>1er passage à la limite</u> : $\mu \to 0^+$.

Avec des simplifications d'écriture évidente on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\mu - u_{\mu^1}|^2 = -(A_\lambda u_\mu - A_\lambda u_{\mu^1}, u_\mu - u_{\mu^1}) - (B_\mu u_\mu - B_{\mu^1} u_{\mu^1}, u_\mu - u_{\mu^1})$$
$$\leqslant -(B_\mu u_\mu - B_{\mu^1} u_{\mu^1}, u_\mu - u_{\mu^1})$$
$$= -(B_\mu u_\mu - B_{\mu^1} u_{\mu^1}, \mu B_\mu u_\mu - \mu^1 B_{\mu^1} u_{\mu^1}) - (B_\mu u_\mu - B_{\mu^1} u_{\mu^1}, J_\mu^{(t)} u_\mu - J_{\mu^1}^{(t)} u_{\mu^1})$$

Or $B_\mu u_\mu(t) \in B(t)\, J_\mu^{(t)} u_\mu$ donc par la monotonie de $B(t)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\mu - u_{\mu^1}|^2 \leqslant -(B_\mu u_\mu - B_{\mu^1} u_{\mu^1}, \mu B_\mu u_\mu - \mu^1 B_{\mu^1} u_{\mu^1}) \leqslant 2M^2(\mu+\mu^1).$$

Donc u_μ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}(0,T;H)$, de limite u dans $\mathscr{C}(0,T;H)$. (Nota : ici u dépend de λ et sera noté ultérieurement u_λ).

Comme A_λ est lipschitzien, $A_\lambda u_\mu \to A_\lambda u$ uniformément, donc $\left|\frac{du_\mu}{dt}\right|_{L^2}$ reste borné dans $L^2(0,T;H)$. Classiquement alors, $\frac{du_\mu}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T;H)$ faible.

On a donc $f - (\frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\mu) = \mathcal{B}_\mu u_\mu \in \mathcal{B} J_\mu^B u_\mu$. Or le premier membre converge faiblement vers $f - (\frac{du}{dt} + A_\lambda u)$ dans $L^2(0,T;H)$. Quant à $J_\mu^B u_\mu$, il converge fortement vers u dans $L^2(0,T;H)$ car $u_\mu - J_\mu^B u_\mu = \mu\, \mathcal{B}_\mu u_\mu$ et $|\mathcal{B}_\mu u_\mu|_{L^2} \leqslant M$. Par la demi fermeture de $\mathcal{B}$ on en déduit que $f - (\frac{du}{dt} + A_\lambda u) \in \mathcal{B}u$.

Concluons $\exists M$, $\forall \lambda > 0$, il existe une solution

(2.14) u_λ dans $W^{1,2}(0,T;H)$ à

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda + \mathcal{B}u_\lambda \ni f \qquad u(0) = u_o \quad \text{et} \quad \left|\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda\right|_{L^2} \leqslant M$$
$$\left|f - \frac{du_\lambda}{dt} - A_\lambda u_\lambda\right|_{L^2} \leqslant M.$$

(2.15) <u>Remarque</u>. On aurait pu montrer que $B_\mu u_\mu$ converge dans $L^2(0,T;H)$ fort et utiliser uniquement la fermeture de $\mathcal{B}$ en utilisant le lemme élémentaire ci-dessous :

<u>Lemme. Soit</u> z_μ <u>une application de</u> R^+ <u>dans un espace de Hilbert</u> E, <u>telle que</u> $(z_\lambda - z_\mu, \lambda z_\lambda - \mu z_\mu)_E \leq 0$, $\forall \lambda, \mu > 0$.
<u>Alors</u> $|z_\lambda|$ <u>est décroissante en</u> λ (<u>croît lorsque</u> $\lambda \to 0^+$) <u>et si</u> $|z_\lambda|$ <u>est borné, la fonction</u> $\lambda \mapsto z_\lambda$ <u>admet une limite lorsque</u> $\lambda \to 0^+$.

<u>2ème passage à la limite</u> : $\lambda \to 0^+$.

On se ramène d'abord au cas ϕ positive :
ϕ étant minorée par une fonction affine continue, il existe α et β tels que $\tilde{\phi}(x) = \phi(\alpha) - (\alpha, x) - \beta \geq 0$. Alors $\partial\phi = \partial\tilde{\phi} + \alpha$. Il suffit donc de changer f en $f+\alpha$ pour se ramener à une équation du même type avec $\tilde{\phi}$ positif ou nul. De plus les hypothèses (2.1) et (2.2) sont vérifiées par $\tilde{\phi}$ et $K(t)$ si elles le sont par ϕ et $K(t)$.

Supposons maintenant u_o dans $D(\phi) \cap K(0)$.
u_λ satisfait à $\dfrac{du_\lambda}{dt} + \partial\phi_\lambda u_\lambda = \rho_\lambda \qquad |\rho_\lambda|_{L^2} \leq M$
où $\phi_\lambda(x) = \inf\limits_{z \in H} \left(\frac{1}{2\lambda}|x-z|^2 + \phi(z)\right)$. (On sait que $A_\lambda = \partial\phi_\lambda$).
Par le théorème 3.6 de [2] (page III.20) on a

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2} \leq |\rho_\lambda|_{L^2} + \sqrt{\phi_\lambda(u_o)} \leq M + \sqrt{\phi_\lambda(u_o)} \leq M + \sqrt{\phi(y_o)}.$$

Donc $\left|\dfrac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2}$ est borné indépendamment de λ ; il en est alors de même de $|A_\lambda u_\lambda|_{L^2}$. Comme $f - \dfrac{du_\lambda}{dt} - A_\lambda u_\lambda \in \mathcal{B} u_\lambda$ on en déduit que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_{\lambda'}}{dt}, u_\lambda - u_{\lambda'}\right) &\leq -(A_\lambda u_\lambda - A_{\lambda'} u_{\lambda'}, u_\lambda - u_{\lambda'}) \\ &\leq -(A_\lambda u_\lambda - A_{\lambda'} u_{\lambda'}, J_\lambda u_\lambda - J_{\lambda'} u_{\lambda'}) \\ &\qquad - (A_\lambda u_\lambda - A_{\lambda'} u_{\lambda'}, \lambda A_\lambda u_\lambda - \lambda' A_{\lambda'} u_{\lambda'}).\end{aligned}$$

Par la monotonie de A, puisque $A_\lambda u_\lambda \in AJ_\lambda u_\lambda$ on obtient :

$$(2.16) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_\lambda - u_{\lambda'})^2 \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_{\lambda'} u_{\lambda'}, \lambda A_\lambda u_\lambda - \lambda' A_{\lambda'} u_{\lambda'}) \leq 2(\lambda + \lambda') \sup |A_\lambda u_\lambda|^2.$$

Donc u_λ est de Cauchy dans $\mathscr{C}(0,T;H)$. Soit u sa limite.
De (2.16) on tire que :

$$(A_\lambda u_\lambda - A_{\lambda'} u_{\lambda'}, \lambda A_\lambda u_\lambda - \lambda' A_{\lambda'} u_{\lambda'})_{L^2} \leq -\frac{1}{2}|u_\lambda(T) - u_{\lambda'}(T)|^2 \leq 0.$$

Par le lemme (2.15) on en déduit que $A_\lambda u_\lambda$ converge dans $L^2(0,T;H)$ (On pourrait aussi, sans utiliser le lemme 2.15, démontrer que $A_\lambda u_\lambda$ converge faiblement dans $L^2(0,T;H)$.

Comme $A_\lambda u_\lambda \in \mathcal{A} J_\lambda u_\lambda$ et que $|J_\lambda u_\lambda - u_\lambda| = \lambda |A_\lambda u_\lambda|$ on voit que $J_\lambda u_\lambda$ converge vers u dans $L^2(0,T;H)$ et par la fermeture de $\mathcal{A}$ (ou sa demi fermeture) la limite v de $A_\lambda u_\lambda$ est dans $\mathcal{A}u$.

Comme $|\frac{du_\lambda}{dt}|_{L^2}$ est borné, classiquement $\frac{du_\lambda}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T;H)$ et donc $f - \frac{du_\lambda}{dt} - A_\lambda u_\lambda$ converge faiblement vers $f - \frac{du}{dt} - v$. Or $f - \frac{du_\lambda}{dt} - A_\lambda u_\lambda$ est dans $\mathcal{B}u_\lambda$, donc par la demi fermeture de $\mathcal{B}$ $f - \frac{du}{dt} - v \in \mathcal{B}u$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathcal{A}u$, $w \in \mathcal{B}u$ tels que

(2.17) $\frac{du}{dt} + v + w = f$, et $|\frac{du}{dt} + v|_{L^2} \leq M$, $|w|_{L^2} \leq M$.

Prenons maintenant u_o dans $\overline{D(\phi) \cap K(0)}$ et soit $x_n \in D(\phi) \cap K(0)$ telle que $x_n \longrightarrow u_o$ dans H. Soit u_n la solution de $\{\frac{du_n}{dt} + v_n + w_n = f$, $u_n(0) = x_n$; $v_n \in \mathcal{A}u_n$, $w_n \in \mathcal{B}u_n\}$.

Par la monotonie de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on déduit que $|u_n(t) - u_m(t)| \leq |x_n - x_m|$, c'est-à-dire que u_n est de Cauchy donc convergente dans $\mathcal{C}(0,T;H)$. Soit u sa limite, on a $u(0) = u_o$.
De plus, par le théorème 3.6 de [2] (p.III.20) on a :

$$|\sqrt{t}\, \frac{du_n}{dt}|_{L^2} \leq 2\sqrt{T}\, |\frac{du_n}{dt} + v_n|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{div} t(x_n; \phi^{-1}(\min \phi)) \leq 2\sqrt{T}\, M + \text{cte}.$$

On en déduit donc que $|\sqrt{t}\, \frac{du_n}{dt}|_{L^2}$ est borné indépendamment de n et donc $\sqrt{t}\, \frac{du_n}{dt} \longrightarrow \sqrt{t}\, \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T;H)$ faible. De même si w est un point limite faible de $\{w_n\}$ dans $L^2(0,T;H)$ et g un point limite faible de $|\frac{du_n}{dt} + v_n|$ dans $L^2(0,T;H)$ atteint simultanément (w et g existent par (2.17)), on en déduit, par la demi fermeture de A et de B que $w \in \mathcal{B}u$, et que $v = g - \frac{du}{dt} \in Au$ (de manière plus précise utiliser la demi fermeture de $\mathcal{A}$ sur $[\delta, T]$ pour tout $\delta > 0$).

Par suite on a $\frac{du}{dt} + v + w = f$, $u(0) = u_o$ où $w \in \mathcal{B}u$ et p.p.t $v(t) \in Au(t)$ ($\sqrt{t}\, v(t) \in L^2(0,T;H)$, mais il n'est pas vrai que $v(t)$ soit dans $L^2(0,T;H)$).

Les propriétés régularisantes des équations d'évolutions associées à une sous différentielle indépendante du temps s'appliquent alors à $\frac{du}{dt} + \partial\phi u \ni f-w \in L^2(0,T;H)$, $u(0) = u_o$ ce qui donne les propriétés supplémentaires du théorème (2.4).

<u>Application</u>. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière et $Q = \Omega \times]0,T[$; soit $\psi \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ avec $\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^2(Q)$ et $\psi \geq 0$ sur $\Omega \times]0,T[$.

Pour tout f de $L^2(Q)$ et tout u_o de $L^2(\Omega)$, tel que $0 \leq u_o(x) \leq \psi(x_o)$ il existe une fonction $u(x,t)$ dans $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$ $u(t) \in H_o^1(\Omega)$ pour $t>0$, vérifiant $\sqrt{t}\ u(x,t) \in L^2((0,T)H^2(\Omega))$ $\sqrt{t}\ \frac{du}{dt}(x,t) \in L^2(Q)$, $0 \leq u(x,t) \leq \psi(x,t)$ p.p. sur $\Omega \times]0,T[$ et p.p. sur $]0,T[$ $\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_x u(x,t) - f(x,t), v(x) - u(x,t))dx \geq 0$ pour tout v de $L^2(\Omega)$ tel que $0 \leq v(x) \leq \psi(x,t)$ p.p. sur Ω .

Si de plus $u_o \in H_o^1(\Omega)$ alors $u \in \mathscr{C}([0,T];H_o^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$.

On applique le théorème précédent avec $A = \partial\phi$ où

$$\phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\text{grad } u|^2 dx & \text{si } u \in H_o^1(\Omega) \text{ et } u \geq 0 \text{ sur } \Omega \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$K(t) = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \ u(x) \leq \psi(x,t) \ \text{p.p.t sur } \Omega\} .$$

On a $P(t)\ v(x) = \min(v(x),\psi(x,t))$ et la condition (2.2) est satisfaite avec $\omega = \text{cte} = |\frac{\partial\psi}{\partial t}|^2_{L^2(Q)}$.

La condition (2.1) est vérifiée avec $a(t) = -\Delta\psi(x,t)$ et grâce au principe du maximum : en effet

$$I + \lambda(-\Delta + \Delta\psi(t))^{-1}\ K(t) \subset K(t) \quad \text{exprime que}$$

si $\qquad v - \psi - \lambda\Delta(v-\psi) \leq 0$ alors $v - \psi \leq 0$.

Comme de plus $\qquad$ projection$_{C_o}$ $K(t) \subset K(t)$ c'est-à-dire

$$(I + \lambda\partial I_{C_o})^{-1}\ K(t) \subset K(t) \quad \text{on en déduit que}$$

$$(I + \lambda(-\Delta + \Delta\psi(t) + \partial I_{C_o}))^{-1}\ K(t) \subset K(t) .$$

Bibliographie.

[1] P. Benilan - Exposé n°1. Séminaire J. Deny. Orsay 1971-72.

[2] H. Brézis - Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Cours de 3ème cycle, Paris 1971.

[3] H. Brézis - Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps. C.R.A.S. Paris t.274 (1972) p. 310-312.

[4] A. Damlamian - Opérateurs maximaux monotones et équations d'évolution. Exposé n°2. Séminaire J. Deny. Orsay 1971-72.

-:-:-:-

et les équations d'évolution

Orsay 1971-1972

(N°4)

Exposé de Hedy ATTOUCH

" "RAFLE" PAR UN CONVEXE VARIABLE, D'APRES J.J. MOREAU "

Introduction.

On se propose d'étudier dans un espace hilbertien réel, l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + A(t)u(t) \ni 0$$

où pour chaque t dans $[0,T]$, $A(t)$ désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé non vide $C(t)$. On reprend ici une technique due à MOREAU [3], qui, moyennant des hypothèses de régularité sur la dépendance du convexe $C(t)$ en fonction de t, énonce un théorème d'existence et d'unicité (pour une condition initiale dans $C(\theta)$). Cette méthode a été généralisée par J.C. PERALBA [4], au cas plus général où $A(t)$ est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre $\phi(t,.)$.

1. Préliminaires.

. Soit H un espace de Hilbert réel.

. Etant donné un convexe fermé non vide C dans H, on note I_C sa fonction indicatrice :

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

et l'on désigne par γ_C sa fonction duale (ou fonction d'appui du convexe C).

$$\gamma_C(x) = \sup_{y\in C} \langle x,y\rangle .$$

. On notera $\partial I_{C(t)}$ le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe fermé $C(t)$.

. On considère l'ensemble E des convexes fermés non vides de H, que l'on munit de la métrique de Hausdorff δ (métrique au sens large, car prenant éventuellement la valeur $+\infty$)

$$\delta(C,C') = \sup\left[\sup_{x\in C} d(x,C') \ ; \ \sup_{x\in C} d(x,C)\right]$$

$$= \inf\left[\rho / C\subset C' + B\rho \ ; \ C'\subset C + B\rho\right]$$

où $d(x,C)$ désigne la distance du point x au convexe C et $B\rho$ la boule fermée (par exemple) centrée à l'origine et de rayon ρ.

Montrons comment la distance de Hansdorff de deux convexes C et C' s'exprime en termes de leurs fonctions d'appui γ_C et γ_C'. Tout d'abord de façon évidente, $C\subset C' + B\rho$ et $C'\subset C + B\rho$ entraîne que pour tout x dans H, $\gamma_C(x)\leq \gamma_{C'}(x) + \rho|x|$ et $\gamma_{C'}(x)\leq\gamma_C(x) + \rho|x|$. Réciproquement, soit ρ tel que pour tout x dans H on ait ces deux inégalités. Montrons par exemple que $C\subset C' + B\rho$. Supposons qu'il existe x_o dans C n'appartenant pas à $C' + B\rho$. On sépare alors x_o du convese fermé $C' + B\rho$ par un hyperplan et donc il existe y_o dans H tel que $\langle y_o,x_o\rangle > \gamma_{C'}(y_o) + \rho|y_o|$. Puisque x_o appartient à C, ceci entraîne que $\gamma_C(y_o) > \gamma_{C'}(y_o) + \rho|y_o|$, d'où la contradiction.

Donc $\delta(C,C')$ est fini seulement si γ_C et $\gamma_{C'}$ ont même domaine D et l'on a alors :

$$\delta(C,C') = \sup_{\substack{x\in D\\ |x|=1}} |\gamma_C(x) - \gamma_{C'}(x)| . \tag{1.1}$$

On remarque d'autre part que si $\delta(C,C')$ est finie alors les ensembles C et C' ont même cône asymptotique. (Cela tient au fait que l'adhérence du domaine de γ_C est le cône polaire du cône asymptotique de C).

Soit $t \longrightarrow C(t)$ une multiapplication de $[0,T]$ dans H, à valeurs convexes fermées non vides. Pour décrire cette multiapplication on peut avantageusement considérer $C(t)$ comme un élément de l'ensemble

E (muni de la métrique de Hausdorff). On peut alors parler de variation, absolue continuité ... du convexe $C(\cdot)$ sur $[0,T]$.

Si $C(\cdot)$ est à variation bornée, la distance $\delta(C(s),C(t))$ est finie quels que soient s et t dans $[0,T]$ et donc le domaine D de la fonction d'appui $\gamma(t,\cdot)$ du convexe $C(t)$ est indépendant de t. Il résulte de (1.1) qu'en désignant par $v(t)$ la variation de $C(\cdot)$ sur $[0,t]$, on a

$$(1.2) \qquad \forall x \in D\,,\ \forall s,t \in [0,T]\,,\ |\gamma(t,x)-\gamma(s,x)| \leq |x|\,|v(t)-v(s)|\,.$$

Notons d'autre part que la multiapplication $t \longrightarrow C(t)$ est absolument continue si et seulement si sa variation v est absolument continue (à valeurs numériques). Suivant la terminologie de MOREAU on dira que $\frac{dv}{dt}$ est la "vitesse numérique" du convexe "mobile" $C(\cdot)$.

2. "Rafle" par un convexe absolument continu.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant

Théorème. Soit $t \longrightarrow C(t)$ une multiapplication de $[0,T]$ dans H, à valeurs convexes fermées non vides, et absolument continue (au sens de la métrique de Hausdorff). Etant donné u_0 dans $C(0)$, il existe u unique, absolument continue de $[0,T]$ dans H solution de

$$(P) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial I_{C(t)}\, u(t) \ni 0 \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

De plus a) $\forall t \in [0,T]\,,\ u(t) \in C(t)$

b) p.p. $t \in]0,T[\ \left|\frac{du}{dt}\right| \leq \frac{dv}{dt}$ où $\frac{dv}{dt}$ désigne la "vitesse numérique" du convexe $C(\cdot)$.

L'unicité résulte immédiatement de l'argument classique utilisé pour les équations d'évolution régies par un opérateur monotone. On va étudier le problème (P) par la méthode d'approximation de Yosida. Rappelons que si l'on pose $A^t = \partial I_{C(t)}$, on a $J^t_\lambda(x) = P(t)x$ et $A^t_\lambda(x) = \frac{x-P(t)x}{\lambda}$ où $P(t)(\cdot)$ désigne la projection sur le convexe $C(t)$.

On considère donc le problème approché

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + \dfrac{u_\lambda(t) - P(t)\, u_\lambda(t)}{\lambda} = 0 \\ u_\lambda(0) = u_o \;. \end{cases}$$

Pour appliquer le théorème d'existence de Cauchy au problème (P_λ) il suffit de montrer que pour z donné dans H, l'application $t \longrightarrow P(t)z$ est continue de $[0,T]$ dans H. En fait on a beaucoup plus. C'est l'objet de la proposition suivante :

<u>Proposition 1. Soit $C(.)$ un convexe "mobile" absolument continu. Pour tout z dans H, il existe une constante $M(z)$ telle que l'on ait :</u>

$$(2.1) \qquad \forall t \in [0,T] \;, \; \forall s \in [0,T] \qquad |P(t)z - P(s)z|^2 \leq 2M(z)|v(t)-v(s)| \;.$$

<u>De plus l'application $z \longrightarrow M(z)$ est contractante.</u>

<u>Démonstration</u> : On se fixe z dans H. Considérons la fonctionelle $\Phi(t) : y \longmapsto \frac{1}{2}|z-y|^2 + \gamma(t,y)$.

Cette fonctionelle est strictement convexe, s.c.i. et tend vers l'infini quand $|y|$ tend vers l'infini. Elle atteint donc son minimum en un unique point $y(t)$ qui vérifiera (le théorème d'additivité des sous-différentiels s'appliquant ici : cf. par exemple [5])
$y(t) - z + \partial\gamma(t,y(t)) \ni 0$.

D'où en tenant compte que $\partial\gamma(t) = (\partial I_{C(t)})^{-1}$ (cf. [1], chapitre II p.23 par exemple) on obtient $y(t) = z - P(t)z$. Ecrivons alors que $z - y(t)$ appartient à $\partial\gamma(t,y(t))$.

$$\forall \xi \in H \qquad \gamma(t,\xi) \geq \gamma(t,y(t)) + \langle \xi - y(t), z - y(t) \rangle$$

$$\forall \xi \in H \qquad \gamma(s,\xi) \geq \gamma(s,y(s)) + \langle \xi - y(s), z - y(s) \rangle \;.$$

Prenant $\xi = y(s)$ dans la première inégalité et $\xi = y(t)$ dans la seconde, on obtient en ajoutant :

$$[\gamma(t,y(s)) - \gamma(s,y(s))] + [\gamma(s,y(t)) - \gamma(t,y(t))] \geq |y(t) - y(s)|^2 \;.$$

Soit en tenant compte de (1.2)

$$|y(t)-y(s)|^2 \leq [|y(t)|+|y(s)|].|v(t)-v(s)|$$

d'où l'on déduit immédiatement que $t \longrightarrow y(t)$ est continue et en posant $M(z) = \sup\limits_{t\in[0,T]} |z-P(t)z|$ on obtient :

$|P(t)z-P(s)z|^2 \leq 2M(z)\ |v(t)-v(s)|$ ce qui achève la démonstration.

Revenant au problème approché (P_λ) qui admet donc une solution unique u_λ (de classe $\mathscr{C}^1$), suivant la méthode classique on cherche à établir une estimation sur $|\frac{du_\lambda}{dt}|$.

Multipliant (P_λ) par $\frac{du_\lambda}{dt}$ on obtient

$$|\frac{du_\lambda}{dt}|^2 + \frac{1}{\lambda} \langle u_\lambda(t)-P(t)\ u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}\rangle = 0 .$$

On est donc amené à considérer l'application

$$f_\lambda : t \longrightarrow \frac{1}{2}|u_\lambda(t)-P(t)\ u_\lambda(t)|^2 .$$

Si comme dans l'exposé précédent, l'absolue continuité de f_λ découle de l'absolue continuité de l'application $t \longrightarrow P(t)\ u_\lambda(t)$, il n en est plus de même ici. On a cependant :

<u>Proposition 2.</u> <u>Soient</u> $C(.)$ <u>un convexe mobile absolument continu et</u> u <u>une fonction absolument continue de</u> $[0,T]$ <u>dans</u> H. <u>Alors l'application</u>

$f : t \longrightarrow \frac{1}{2}|u(t)-P(t)\ u(t)|^2$ <u>est absolument continue de dérivée</u>

$$(2.2) \qquad f'(t) = \langle\frac{du}{dt}, u(t)-P(t)u(t)\rangle - \dot{\gamma}(t,u(t)-P(t)u(t))$$

(<u>où</u> $\dot{\gamma}(t,\xi)$ <u>désigne la dérivée au point</u> t <u>de l'application</u> $t \longrightarrow \gamma(t,\xi)$).

<u>Démonstration</u> : Posons $C'(t) = C(t) - u(t)$.

On a alors $f(t) = \frac{1}{2}[d(u(t),C(t))]^2 = \frac{1}{2}[d(0,C'(t))]^2$.

Le convexe mobile $C'(t)$ est encore absolument continu ; en effet

$$\gamma_{C'}(t,x) = \gamma_C(t,x) - \langle u\ (t),x\rangle \text{ et donc}$$

$$|\gamma_{C'}(t,x)-\gamma_{C'}(t_o,x)| \leq |\gamma_C(t,x)-\gamma_C(t_o,x)| + |x|.|u(t)-u(t_o)|$$

$$|\gamma_{C'}(t,x)-\gamma_{C'}(t_o,x)| \leq |x|[|v(t)-v(t_o)|+|u(t)-u(t_o)|]$$

ce qui exprime que $\delta(C'(t), C'(t_o)) \leqslant |v(t)-v(t_o)|+|u(t)-u(t_o)|$.

Désignons par $z(t)$ la projection de 0 sur $C'(t)$, c'est-à-dire $z(t) = P(t)u(t)-u(t)$. On a donc $f(t) = \frac{1}{2}|z(t)|^2$.

Considérons l'expression

$$f(t)-f(t_o)+\frac{1}{2}|z(t)-z(t_o)|^2 = |z(t)|^2 - \langle z(t), z(t_o)\rangle$$
$$= \langle z(t), z(t)-z(t_o)\rangle$$

que nous allons majorer :

Le point $z(t)$ projection de 0 sur $C'(t)$ est caractérisé par

$$z(t) \in C'(t) \; ; \; \forall u \in C'(t) \quad \langle u-z(t), z(t)\rangle \geqslant 0 \quad \text{et donc}$$

$$\gamma_{C'}(t, -z(t)) = \langle -z(t), z(t)\rangle \quad .$$

D'autre part, d'après le définition de la fonction d'appui

$$\gamma_{C'}(t_o, -z(t)) \geqslant -(z(t_o), z(t)) \; .$$

D'où $\qquad f(t)-f(t_o) \leqslant \gamma_{C'}(t_o, -z(t)) - \gamma_{C'}(t, -z(t))$

et en échangeant t et t_o on obtient par conséquent la double inégalité:

$$\gamma_{C'}(t_o, -z(t_o))-\gamma_{C'}(t, -z(t_o)) \leqslant f(t)-f(t_o) \leqslant \gamma_{C'}(t_o, -z(t)) - \gamma_{C'}(t, -z(t)).$$

Tenant compte de la continuité de l'application $t \longrightarrow z(t)$, on déduit d'une part que f est absolument continue puisque

$$|f(t)-f(t_o)| \leqslant \left(\sup_{t\in[0,T]} |z(t)|\right) . [|v(t)-v(t_o)|+|u(t)-u(t_o)|]$$

et d'autre part on obtient pour dérivée de f au point t_o :

$$\frac{f}{t}(t_o) = -\dot{\gamma}_{C'}(t_o, -z(t_o)) = -\dot{\gamma}_C(t_o, u(t_o)-P(t_o u(t_o)) + \langle\frac{du}{dt}(t_o), u(t_o)-P(t_o)u(t_o)\rangle \; .$$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème.

De (2.2) on tire, compte tenu de la définition de u_λ

$$\lambda\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-P(t)u_\lambda(t)|^2 = -\dot{\gamma}(t,u_\lambda(t)-P(t)u_\lambda(t))$$

d'où, d'après (1.2)

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-P(t)u_\lambda(t)|^2 \leqslant \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dv}{dt}\right| . \tag{2.3}$$

a) Dans une première étape, on va supposer le convexe mobile $C(\cdot)$ à vitesse numérique dans $L^2(0,T)$.

Intégrant (2.3) et appliquant l'inégalité d'Hölder au second membre, on obtient

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 dt + \frac{1}{2\lambda}|u_\lambda(T)-P(T)u_\lambda(T)|^2 \leqslant \left(\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T \left|\frac{dv_\lambda}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2} .$$

Soit (2.4) $$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leqslant \left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} .$$

On termine alors la démonstration par une argumentation classique ; on peut se référer à la démonstration donnée dans l'exposé précédent. On trouve donc une fonction u absolument continue de $[0,T]$ dans H, solution de (P). De plus par passage à la limite sur (2.4) on obtient

$$\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leqslant \left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \quad (2.5).$$

D'autre part, $u(t)$ appartient à $C(t)$ pour tout t puisque la fonction $t \longrightarrow |u(t)-P(t)u(t)|$ est continue d'après la proposition 1, et est égale à zéro presque partout, u étant solution de (P). Soit t_0 un point de $[0,T[$. La fonction u est solution sur $[t_0,T]$ de l'équation $\frac{du}{dt} + \partial I_{C(t)}u(t) \ni 0$ avec condition initiale $u(t_0)$; Appliquant (2.5) on déduit que $\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(t_0,T;H)} \leqslant \left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(t_0,T)}$ et plus généralement on a donc : $\forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ $\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(s,t;H)} \leqslant \left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(s,t)}$. Par conséquent, presque pour tout t de $]0,T[$, $\left|\frac{du}{dt}\right| \leqslant \left|\frac{dv}{dt}\right|$ (2.6).

En particulier si $C(\cdot)$ est à vitesse numérique dans $L^\infty(0,T)$, la solution u du problème (P) est lipchitzienne.

b) On se place à présent dans le cadre initial, à savoir on suppose seulement $C(\cdot)$ absolument continue. On pose alors $C(t) = \Gamma(v(t))$, où Γ est donc une application de $[0,v(T)]$ dans E (cela a un sens puisque $v(t_1) = v(t_2)$ entraîne $C(t_1) = C(t_2)$). D'autre part $\Gamma(\cdot)$ est à vitesse numérique dans $L^\infty(0,T)$; en effet

$$\delta(\Gamma(v(t_1)),\Gamma(v(t_2))) = \delta(C(t_1),C(t_2)) \leq |v(t_1)-v(t_2)| \; .$$

D'après la partie a) il existe donc une fonction ω, contractante, solution sur $[0,v(T)]$ de

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\theta} + \partial I_{\Gamma(\theta)}\omega \ni 0 \\ \omega(0) = u_0 \; . \end{cases}$$

Posons alors $u(t) = \omega(v(t))$. La fonction u est absolument continue (car ω est une contraction) et sa dérivée est égale presque partout à $\frac{d\omega}{d\theta}(v(t)).v'(t)$ (ce qui se démontre simplement ici en utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée et le fait que v est croissante ; on peut se référer plus généralement à [2]). Prenant $\theta = v(t)$ dans (2.7) que l'on multiplie par $v'(t)$ (positif ou nul), et remarquant que $\partial I_{\Gamma(v(t))}\omega(v(t))$ est un cône convexe, on obtient finalement

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial I_{C(t)}u(t) \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(cette relation ayant lieu presque partout par le même argument que précédemment).

D'autre part pour presque tout t de $]0,T[$ $\left|\frac{du}{dt}\right| = \left|\frac{d\omega}{d\theta}(v(t))\right|.\frac{dv}{dt} \leq \frac{dv}{dt}$

ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Exemple</u>. Prenons $H = L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On se donne ψ une application de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$ à valeurs positives et l'on pose : $C(t) = \{u \in L^2(\Omega) \; ; \; 0 \leq u(x) \leq \psi(x,t) \;\; p.p. \; x \in \Omega\}$.

$C(t)$ est un convexe fermé non vide de $L^2(\Omega)$ et étant donné ξ

dans $L^2(\Omega)$ on a $P(t)\xi(x) = \text{Inf}[\xi^+(x);\psi(x,t)]$; on en déduit simplement les inégalités :

$$|\psi(t,\cdot)-\psi(s,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \geq \delta(C(t),C(s)) \geq \frac{1}{2}|\psi(t,\cdot)-\psi(s,\cdot)|_{L^2(\Omega)} .$$

On voit donc que l'hypothèse de régularité faite sur le convexe $C(\cdot)$ revient dans ce cas particulier important, à supposer l'application $t \longrightarrow \psi(t,\cdot)$ absolument continue de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$.

Références :

[1] H. BREZIS - Cours 3ème cycle rédigé par P. BENILAN, Paris 1971.

[2] N. BOURBAKI - Intégration (chap.V, §.6, n°5), Hermann, Paris.

[3] J.J. MOREAU - Rafle par un convexe variable (première partie), Séminaire d'Analyse convexe, exposé n°15, Montpellier 1971.

[4] J.C. PERALBA - Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps. Exposé n°6, Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier 1972.

[5] R.T. ROCKAFELLAR - On the maximality of the sums of nonlinear monotone operators T.A.M. 149 (1970), p.75-85.

-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les équations d'évolution

Orsay 1971-1972

(N°5)

Exposé de Thierry de GROMARD

"ESPACES BV(Ω)"

La notion de fonction à variation bornée de plusieurs variables a été étudiée - conjointement avec celle d'ensemble de périmètre fini dans $\mathbb{R}^n$ - par De Giorgi, Federer, Miranda, Vol'pert, etc... ; sa première application est l'étude des surfaces minimales. Une autre application est la recherche de solutions à variation bornée pour des équations quasilinéaires du premier ordre.

Dans la première partie, on expose les premières propriétés des fonctions de $BV(\Omega)$ en reprenant partiellement $[M_1]$ et $[M_2]$.

La deuxième partie est consacrée à la formule de Green pour les ensembles de périmètres finis généraux d'après $[DG_1]$ et $[DG_2]$; on démontre enfin un résultat relatif à l'hypographe d'une fonction de $BV(\Omega)$.

I - Espaces BV(Ω) ; premières propriétés.

1. Notations et définitions.

Définition 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dite à variation localement bornée dans Ω si ses dérivées partielles au sens des distributions sont des mesures (de Radon) sur Ω. On note $BV(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Notations. On note $\overline{BV}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u \in BV(\Omega)$ dont les dérivées partielles sont des mesures bornées sur Ω.

Si $u \in BV(\Omega)$, on note $Du = (D_1u, D_2u, \dots, D_nu)$ la mesure (vectorielle) ayant pour composantes les dérivées partielles $D_1u, \dots, D_nu$ de u. On note $|Du|$ la mesure variation totale associée, la norme $|.|$ étant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2. Soient A un ouvert de Ω et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
On appelle variation de u sur A et on pose :

$$\int_A |Du| = \operatorname{Sup}\{\int u \operatorname{div}\phi \, dx ; \ \phi \in \mathcal{D}(A)^n, |\phi| \leq 1\}.$$

Remarques.

1) On sait que $u \in BV(\Omega)$ si et seulement si, pour tout A appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}(\Omega)$ des ouverts d'adhérence compacte contenue dans Ω, on a $\int_A |Du| < \infty$.

Cette notation désigne alors la variation totale sur A de la mesure Du également notée $|Du|(A)$.

2) Si A est un ouvert borné et si $u \in \mathcal{C}^1(A)$, on a

$$\int_A |Du| = \int_A |Du(x)| dx \quad \text{où} \quad Du(x) = (D_1u(x), \dots, D_nu(x))$$

Démonstration : Par Fubini et intégrations par parties, on a

$$\text{(i)} \quad \int_A |Du| = \operatorname{Sup}\{\int \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ D_iu(x) dx \ ; \ \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathcal{D}(A)^n, \ \sum_{i=1}^n \phi_i^2 \leq 1\}$$

On a d'une part

$$\int \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ D_iu(x) dx \leq \int (\sum_{i=1}^n \phi_i(x)^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^n D_iu(x)^2)^{1/2} du \leq \int |Du(x)| dx$$

d'où : $\int_A |Du| \leq \int_A |Du(x)| dx$.

D'autre part, dans la borne supérieure ci-dessus (i), on peut remplacer la condition $\phi \in \mathcal{D}(A)^n$ par la condition : ϕ mesurable (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) et nulle hors de A ; en particulier, on peut prendre :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |Du(x)|=0 \\ \dfrac{D_i u(x)}{|Du(x)|} & \text{si } |Du(x)|\neq 0 \end{cases} \quad , \quad \phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$$

ce qui montre $\int_A |Du| \geq \int_A |Du(x)|dx$ et en fait l'égalité.

<u>Définition 3</u>. Soit E un ensemble mesurable de Ω.
On appelle périmètre de E dans Ω et on note $P_\Omega(E) = \int_\Omega |D\chi_E|$, où χ_E est la fonction caractéristique de E.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $P(E) = P_{\mathbb{R}^n}(E)$ est appelé périmètre de E.

Si $\chi_E \in BV(\Omega)$ (resp. $\chi_E \in \overline{BV}(\Omega)$), on dit que E est de périmètre localement fini (resp. de périmètre fini) dans Ω.

<u>Remarque</u> : <u>Cas n=1</u>. On montre facilement que dans le cas $n=1$, la variation d'une fonction $u \in L^1_{loc}(]a,b[)$ $(-\infty \leq a<b \leq +\infty)$, coïncide avec la variation totale (au sens usuel) de u sur $I =]a,b[$:

(i) $$\int_I |Du| = V_I(u)$$

($V_I(u)$ désigne la borne inférieure des variations totales $v_I(f)$ des fonctions f égales à u p.p. :

$$v_I(f) = \sup\{\sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})| \ ; \ a<t_o<t_1<\ldots<t_n<b\}).$$

a) <u>Cas</u> : $-\infty<a<b<+\infty$. On sait que les deux membres de (i) sont simultanément ou finis ou infinis (voir Schwartz : Distributions, chap.2). On peut donc les supposer finis tous deux.

Des propriétés de l'intégrale de Stieljes, on tire : $\int_I |Du| \leq V_I(u)$.

Pour l'inégalité opposée, on prend $f(x) = \lim_{h \to o} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(t)dt$ et on pose

$$\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}_o[f(t_i)-f(t_{i-1})] \quad \text{si } t \in]t_{i-1},t_i[$$

$$\varepsilon(t) = 0 \quad \text{si } t \in]a,b[\setminus(\bigcup_{i=1}^n]t_{i-1},t_i[).$$

On a $\int \varepsilon.Du = \int \varepsilon(t)\, df(t) = \sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})|$ pourvu que les t_i soient des points de continuité de f. Or, la fonction f vérifiant

$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$, sa variation totale peut être calculée en se limitant à des partages où les t_i sont des points de continuité.

On en conclut :

$$v_I(f) \leqslant \operatorname{Sup}\{\int \phi . Du ;\ \phi \text{ borélienne sur } I,\ |\phi| \leqslant 1\} =$$

$$\leqslant \operatorname{Sup}\{\int \phi . Du ;\ \phi \in \mathcal{D}(I),\ |\phi| \leqslant 1\} = \int_I |Du| .$$

Et en résumé : $V_I(u) = v_I(\bar{u}) = \int_I |Du|$

$$\text{avec } \bar{u}(x) = \lim_{h\to o} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(x)dx .$$

b) Enfin la formule (i) s'étend au cas : $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ en posant

$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, les I_k étant des intervalles ouverts bornés emboîtés, et en remarquant qu'on a par définition : $\operatorname{Sup}_k \int_{I_k} |Du| = \int_I |Du|$ et $\operatorname{Sup}_k V_{I_k}(u) = V_I(u)$.

2. <u>Propriétés d'approximation.</u>

<u>Proposition 1. Soient</u> $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, <u>et</u> u_k <u>une suite convergeant ve</u> u <u>dans</u> $L^1_{loc}(\Omega)$. <u>On a</u>

$$\int_\Omega |Du| \leqslant \varliminf_{h\to\infty} \int_\Omega |Du_h|$$

<u>Démonstration</u> :

Pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^n$, l'application $u \longmapsto \int_\Omega u \operatorname{div} \phi \, dx$ est continue sur $L^1_{loc}(\Omega)$. L'enveloppe supérieure de ces applications pour ϕ variant dans $\mathcal{D}(\Omega)^n$, est donc s.c.i.

<u>Proposition 2. Soient</u> $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ <u>et</u> (τ_h) <u>une suite rég larisante. L'application</u> $u_h = u * \tau_h$ <u>est définie sur</u> A <u>pour</u> $h > \operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)^{-1}$ <u>et l'on a</u>

(i) $$\int_A |Du_h| \leqslant \int_{A_h} |Du|$$

(ii) $$\varlimsup_{h\to\infty} \int_A |Du_h| \leqslant \int_{\bar{A}} |Du|$$

(iii) $$\int_A |Du| = \lim_{r\to 0^+} \varliminf_{h\to\infty} \int_{A^r} |Du_h| = \lim_{r\to 0^+} \varlimsup_{h\to\infty} \int_{A^r} |Du_h|$$

<u>où l'on a posé :</u>

$$A_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \tfrac{1}{h}\} \; ; \; A^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n - A) > r\}$$

<u>et pour tout fermé</u> F, <u>contenu dans</u> Ω :

$$\int_F |Du| = \operatorname{Inf}\{\int_V |Du| \; ; \; V \text{ ouvert, } F \subset V \subset \Omega\} \leqslant +\infty$$

<u>Démonstration</u> :

(i) On peut supposer $\int_{A_h} |Du| < \infty$, sinon l'inégalité est évidente ; alors la restriction de la distribution Du à l'ouvert A_h est une mesure (bornée) ; en utilisant la remarque du paragraphe 1, on a donc

$$\int_A |Du_h| = \int_A |Du_h(x)|\,dx = \int_A \left|\int \tau_h(y-x)\; Du(dy)\right| dx$$

$$\leqslant \int_A \left(\int \tau_h(y-x)\,|Du|(dy)\right)dx = \int \left(\int_A \tau_h(y-x)\,dx\right)|Du|(dy) \;.$$

La fonction $y \longmapsto \int_A \tau_h(x-y)\,dx$ est majorée par 1 et est nulle hors de A_h. D'où :

$$\int_A |Du_h| \leqslant \int_{A_h} |Du| \;.$$

(ii) On peut encore supposer $\int_{\bar{A}} |Du| < \infty$.

Alors la restriction de Du à un voisinage de $\bar{A}$ - qui contient évidemment A_h pour h assez grand - est une mesure (bornée) - les ensembles A_h forment une suite décroissante d'ouverts d'intersection $\bar{A}$. D'après Beppo-Lévi on a donc

$$\lim \int |Du| = \int |Du| \qquad \text{ce qui donne avec (i) :}$$

On obtient :

$$\overline{\lim_{r\to o}}\ \overline{\lim_{h\to\infty}} \int_{A^{r-1}} |Du_h| \leqslant \int_A |Du| \leqslant \underline{\lim_{r\to o}}\ \underline{\lim_{h\to\infty}} \int_{A^r} |Du_h|$$

d'où l'égalité (iii).

Remarques. 1) Dans les propositions (1) et (2), on peut remplacer $L^1_{loc}(\Omega)$ par $\mathcal{D}'(\Omega)$ en posant pour $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\int_\Omega |DT| = \mathrm{Sup}\{<T,\mathrm{div}\ \phi> ; \phi\in\mathcal{D}(\Omega)^n, |\phi|\leqslant 1\}$$

et pour un fermé $F\subset\Omega$:

$$\int_F |DT| = \mathrm{Inf}\{\int_V |DT| ; V \text{ ouvert}, F\subset V\subset\Omega\} .$$

2) En faisant $\Omega = A = \mathbb{R}^n$ dans les propositions 1 et 2(i), on trouve pour $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $u_h = u * \tau_h$:

$$\int |Du| = \lim_{h\to\infty} \int |Du_h| .$$

3) Avec les notations de la proposition 2, il résulte de (i) que, si on a

$$\int_{A_{h_o}} |Du| < \infty$$

alors les distributions Du_h, qui convergent vers Du dans $\mathcal{D}'(A)$, convergent vaguement (comme mesures sur A) vers Du.

4) Dans tout ce paragraphe, on aurait pu remplacer D par un opérateur de dérivation $D^\alpha = (D_{i_1},\ldots,D_{i_k})$, associant à une distribution T la distribution (vectorielle) $D^\alpha T = (D_{i_1}T,\ldots,D_{i_k}T)$.

On conviendra d'appeler, dans la suite, un tel opérateur D^α, un opérateur différentiel d'ordre 1. Naturellement, on pose

$$\int_\Omega |D^\alpha T| = \mathrm{Sup}\{<\phi,D^\alpha T> ; \phi\in\mathcal{D}(\Omega)^k, |\phi|\leqslant 1\}$$

$$<\phi,D^\alpha T> = - <\mathrm{div}_\alpha\ \phi,T> = - \sum_{q=1}^{k} <D_{i_q}\phi_{i_q},T>$$

$$|\phi| = \sum_{q=1}^{k} \phi_{i_q}^2 .$$

5) La définition suivante, utilisée au paragraphe suivant, se dégage alors :

Définition. Soit $S \in \mathcal{D}'(\Omega)^k$. On appelle masse de la distribution S et on note $\int_\Omega |S| = \mathrm{Sup}\{\langle\phi, S\rangle \,;\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^k, |\phi| \leq 1\}$.

6) Soit τ une contraction, i.e. une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\tau(0) = 0$ et $|\tau(s) - \tau(t)| \leqslant |s-t|$ $(s, t \in \mathbb{R})$
Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega |D^\alpha(\tau \circ u)| \leqslant \int_\Omega |D^\alpha u| \;.$$

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{A}(\Omega)$; montrons d'abord que :
$\int_A |D^\alpha(\tau \circ u)| \leqslant \int_{\overline{A}} |D^\alpha u|$ soit u_h une régularisation de u ; $\tau \circ u_h$ est lipschitzienne sur A et $(\text{p.p. } x \in A)\, |D^\alpha(\tau \circ u_h)(x)| \leqslant |D^\alpha u_h(x)|$.
Donc $\int_A |D^\alpha(\tau \circ u_h)| = \int_A |D^\alpha(\tau \circ u_h)(x)|\,dx \leqslant \int_A |D^\alpha u_h(x)|\,dx = \int_A |D^\alpha u_h|$.
En remarquant que $\tau \circ u_h$ tend vers $\tau \circ u$ dans $L^1_{loc}(A)$, on a

$$\int_A |D^\alpha(\tau \circ u)| \leqslant \underline{\lim}_{h\to\infty} \int |D^\alpha(\tau \circ u_h)| \leqslant \overline{\lim}_{h\to\infty} \int |D^\alpha(\tau \circ u_h)| \leqslant \int_A |D^\alpha u| \;.$$

Soit maintenant (A_j) une suite croissante dans $\mathcal{A}(\Omega)$ avec $\bigcup A_j = \Omega$.
Il résulte de la définition que :

$$\int_\Omega |D^\alpha u| = \mathop{\mathrm{Sup}}_j \int_{A_j} |D^\alpha u| = \mathop{\mathrm{Sup}}_j \int_{\overline{A}_j} |D^\alpha u|$$

(et de même pour $\tau \circ u$).
D'après ce qui précède, on a

$$\int_{A_j} |D^\alpha(\tau \circ u)| \leqslant \int_{\overline{A}_j} |D^\alpha u| \;.$$

D'où :

$$\int_\Omega |D^\alpha(\tau \circ u)| = \mathop{\mathrm{Sup}}_j \int_{A_j} |D^\alpha(\tau \circ u)| \leqslant \mathop{\mathrm{Sup}}_j \int_{\overline{A}_j} |D^\alpha u| = \int_\Omega |D^\alpha u|$$

Conséquence. L'espace $BV(\Omega)$ est invariant par les contractions.

3. Caractérisation par les sections.

A. Notations. Si u est une fonction définie sur un ensemble Ω de $\mathbb{R}^{p+m} = \mathbb{R}^n$, on pose pour $y \in \mathbb{R}^m$: $\Omega(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in \Omega\}$

pour $x \in \Omega(y)$: $u^y(x) = u(x,y)$.

On suppose Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\Omega(y)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^p$.
On note δ_y l'application qui à $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe $\phi^y \in \mathcal{D}(\Omega(y))$.

Lemme 1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega(y))^k$. Alors $S = T \circ \delta_y \in \mathcal{D}'(\Omega)^k$ et on a

$$\int_{\Omega(y)} |T| = \int_{\Omega} |S| ,$$

Démonstration :

C'est immédiat : si ϕ_i tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)^k$, ϕ_i^y tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega^y)^k$ et T étant une distribution, $\langle\phi_i,S\rangle = \langle\phi_i^y,T\rangle$ tend vers 0. Donc S est une distribution.
Par définition, on a $\int_{\Omega(y)} |T| \geqslant \int_\Omega |S|$. De plus, si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega(y))^k$, avec $|\psi| \leqslant 1$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^k$ avec $|\phi| \leqslant 1$, telle que $\psi = \phi^y$; en effet : soit $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha = 1$ sur $(\operatorname{Supp} \psi) \times \{y\}$.
On pose $\phi(x,z) = \psi(x)\,\alpha(x,z)$.

Proposition 1. Soient $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $D^\alpha = (D_{i_1},\ldots,D_{i_k})$, $i_1 < \ldots < i_k \leqslant p$.
La fonction $y \longmapsto \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y|$ est mesurable sur $\mathbb{R}^m$ et on a

(i) $$\int_\Omega |D^\alpha u| = \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y|$$

(si $\Omega(y) = \emptyset$, on pose $\int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y| = 0$).

Démonstration :

(a) Mesurabilité. D'après le lemme, on a $\int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y| = \int_\Omega |D^\alpha u^y \circ \delta_y|$.
Or, par définition, il existe une suite $\phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)^k$ telle que

$$\int_\Omega |D^\alpha u^y \circ \delta_y| = \lim_{j\to\infty} \int u(x,y)\ \operatorname{div}_\alpha \phi_j(x,y)\,dx .$$

On obtient une suite de fonctions de y, mesurables d'après Fubini.
Leur limite est donc mesurable.

(b) L'inégalité $\int_\Omega |D^\alpha u| \leq \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y|$ résulte de Fubini :

Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^k$, avec $|\phi| \leq 1$, alors $\phi^y \in \mathcal{D}(\Omega(y))^p$ avec $|\phi^y| \leq 1$,
et $\int u \operatorname{div}_\alpha u = \int dy \int u(x,y) \operatorname{div}_\alpha \phi(x,y) dx \leq \int dy \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y|$.

(c) Montrons $\int_\Omega |D^\alpha u| \geq \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y|$.

Soit u_h une régularisation de u. D'après §.2, prop.2, on a

$$\int_\Omega |D^\alpha u| = \lim_{r \to 0^+} \varliminf_{h \to \infty} \int_{\Omega^r} |D^\alpha u_h| .$$

Or, pour u_h, l'égalité (i) résulte de Fubini :

$$\int_{\Omega^r} |D^\alpha u_h| = \int_{\Omega^r} |D^\alpha u_h(x,y)| dx\, dy = \int dy \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha u_h(x,y)| dx$$
$$= \int dy \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha (u_h)^y| .$$

Par Fatou, on en déduit :

$$\varliminf_{h \to \infty} \int_{\Omega^r} |D^\alpha u_h| \geq \int dy \varliminf_{h \to \infty} \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha (u_h)^y| .$$

Pour presque tout y (tel que $\Omega(y) \neq \emptyset$), $(u_h)^y$ converge vers u^y dans $L^1_{loc}(\Omega^r(y))$. Donc, d'après §.2, prop.1, on a

$$\varliminf_{h \to \infty} \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha (u_h)^y| \geq \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha u^y| .$$

Mais les ouverts $\Omega^r(y)$ formant une suite croissante de réunion $\bigcup_{r \searrow 0} \Omega^r(y) = \Omega(y)$ il résulte de la définition (§.1) que

$$\int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha u^y| \text{ tend en croissant vers } \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y| \quad (\text{quand } r \searrow 0)$$

En appliquant encore Beppo-Levi, on obtient

$$\lim_{r \to 0^+} \int dy \int_{\Omega^r(y)} |D^\alpha u^y| = \int dy \int_{\Omega(y)} |D^\alpha u^y| .$$

D'où l'inégalité (c) et la proposition.

Remarques.

1) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ appartienne à $\overline{BV}(\Omega)$ est que :

(Pour $i=1,2,\ldots,n$) (α) p.p. $x_i' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u^{x_i'} \in \overline{BV}(\Omega(x_i'))$

(en notant $x = (x_i, x_i') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$)

(β) la fonction $N_i(x_i') = \int_{\Omega(x_i')} |D_i u^{x_i'}|$

(prolongée par 0 si $\Omega(x_i') = \emptyset$)

vérifie $N_i \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

Si Ω est de la forme $\Omega = \prod_{i=1}^{n} I_i$, I_i intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, cette condition s'écrit (pour $i=1,2,\ldots,n$)

(α) p.p. $x' \in \prod_{j\neq i} I_j$, $V_{I_i}(u^{x'}) < \infty$

(β) la fonction $N_i(x') = V_{I_i}(u^{x'})$ vérifie $N_i \in L^1(\prod_{j\neq i} I_j)$

2) Pour un ensemble mesurable E de Ω , on a, en terme de périmètre :

$$\int_\Omega |D_x \chi_E| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Omega(y)}(E(y))\, dy \quad \text{(en notant } D_x = (D_1,\ldots,D_{n-1})\text{)}.$$

On note $K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact dans Ω , $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de Radon réelles sur Ω , δ_y l'application de $K(\Omega)$ dans $K(\Omega(y))$ telle que $\delta_y(\phi) = \phi^y$.

Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega(y))$ et $\phi \in K(\Omega)$, on note $\mu \circ \delta_y(\phi) = \mu(\phi^y)$.

On vérifie sans difficulté le lemme suivant :

Lemme 2. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega(y))^k$; alors $\nu = \mu \circ \delta_y \in \mathcal{M}(\Omega)^k$ et on a

1) $|\nu| = |\mu| \circ \delta_y$

2) f est dans $L^1(\nu)$ si et seulement si f^y est dans $L^1(\mu)$ et dans ce cas $\int f\, d\nu = \int f^y\, d\mu$.

On a alors la proposition :

Proposition 2. Soit $u \in BV(\Omega)$ (ou simplement $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec $D^\alpha u \in \mathcal{M}(\Omega)^k$). Alors, p.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $D^\alpha u^y \in \mathcal{M}(\Omega(y))^k$.
Et, si $f \in L^1(D^\alpha u)$, on a

1) p.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $f^y \in L^1(D^\alpha u^y)$

2) $\displaystyle\int f\, D^\alpha u = \int_{\mathbb{R}^m} dy \int f(x,y)\, D^\alpha u^y(dx)$

3) $\displaystyle\int f\, |D^\alpha u| = \int_{\mathbb{R}^m} dy \int f(x,y)\, |D^\alpha u^y|(dx)$

(avec la convention $D^\alpha u^y = 0$ si $\Omega(y) = \emptyset$).

Démonstration : La prop. 1 appliquée à une suite exhaustive $A_j \in \mathcal{A}(\Omega)$ ($\bigcup A_j = \Omega$) donne

$$D^\alpha u^y \in \mathcal{M}(\Omega(y))^k \quad (\text{p.p. } y \in \mathbb{R}^m).$$

Posons
$$\lambda_y = \begin{cases} D^\alpha u^y \circ \delta_y & \text{si } D^\alpha u^y \in \mathcal{M}(\Omega(y))^k \\ 0 & \text{si } D^\alpha u^y \notin \mathcal{M}(\Omega(y))^k. \end{cases}$$

D'après le lemme 2, $\lambda_y \in \mathcal{M}(\Omega)^k$, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$.
Pour $\phi \in K(\Omega)^k$, l'application $y \longmapsto \lambda_y(\phi)$ est mesurable ; en effet : soit $\phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)^k$ une régularisation de ϕ.
On a $\lambda_y(\phi) = \lim\limits_{j\to\infty} \lambda_y(\phi_j)$. Or : $y \longmapsto \lambda_y(\phi_j) = \int \mathrm{div}_\alpha\, \phi_j(x,y)\, u(x,y)dx$ est mesurable (par Fubini). De plus, l'application $y \longmapsto |\lambda_y|(\phi)$, pour $\phi \in K(\Omega)$, est mesurable car :

$$|\lambda_y|(\phi^\pm) = \sup_{\substack{|\psi| \leq \phi^\pm \\ \psi \in K(\Omega)}} |\lambda_y(\psi)| = \lim_{j\to\infty} |\lambda_y(\psi_j)| \quad \text{avec} \quad \psi_j \in K(\Omega), \text{ et}$$

$$|\lambda_y|(\phi) = |\lambda_y|(\phi^+) - |\lambda_y|(\phi^-).$$

D'après le lemme 1 et la proposition 1, on a

(i) $\forall A \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\displaystyle\int |\lambda_y|(A)\, dy = |D^\alpha u|(A) < \infty$.

Donc, pour $\phi \in K(\Omega)$, les applications $y \longmapsto \lambda_y(\phi)$ et $y \longmapsto |\lambda_y|(\phi)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^m$, et

$$\lambda(\phi) = \int \lambda_y(\phi)\, dy \; ; \quad \sigma(\phi) = \int |\lambda_y|(\phi)\, dy$$

définissent des mesures sur Ω : $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)^k$, $\sigma \in \mathcal{M}^+(\Omega)$.

D'après ([B] : ch.V. §.3. Théorème 1), $y \longmapsto |\lambda_y|$ étant une famille de mesures $\geqslant 0$ sur Ω scalairement dy-intégrable, (ce qui entraîne qu'elle est aussi vaguement dy-mesurable d'après ([B] ch.VI. §.1. Prop.1)), pour toute $f \in L^1(\sigma)$, l'ensemble des y tels que $f \notin L^1(|\lambda_y|)$ est dy-négligeable, la fonction $y \longmapsto \int f\, d|\lambda_y|$ est dy-intégrable et on a :

$$\int f\, d\sigma = \int dy \int f\, d|\lambda_y| .$$

En particulier, si $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, on a :

$$\sigma(A) = \int |\lambda_y|(A)\, dy$$

d'où $\sigma(A) = |D^\alpha u|(A)$ d'après (i) ci-dessus et

$$\sigma = |D^\alpha u| .$$

En rassemblant ce qui précède on obtient les affirmations 1) et 3) de la proposition.

Pour démontrer le 2), on remarque d'abord que d'après Fubini :

$$\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^k , \int \phi\, d\lambda = \int \lambda_y(\phi)\, dy = \int dy \int \phi^y\, D^\alpha u^y = -\int dy \int \mathrm{div}_\alpha \phi(x,y) u(x,y)\, dx$$
$$= -\int \mathrm{div}_\alpha \phi(x,y)\, u(x,y)\, dx\, dy = \int \phi\, D^\alpha u .$$

On a donc l'égalité des mesures : $\lambda = D^\alpha u$.

D'autre part, d'après la définition d'une mesure à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, on peut ici supposer $k=1$, en considérant chaque composante.

Pour $\phi \in K(\Omega)$, on a démontré que les applications

$y \longmapsto \lambda_y(\phi)$ et $y \longmapsto |\lambda_y|(\phi)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^m$;

les applications $y \longmapsto \lambda_y^{\pm}(\phi)$ sont donc aussi intégrables sur $\mathbb{R}^m$, et on peut appliquer le résultat d'intégration de [B] énoncé ci-dessus aux familles de mesures $\geqslant 0$: $y \longmapsto \lambda_y^{\pm}$.

Posons, pour $\phi \in K(\Omega)$: $\lambda_1(\phi) = \int \lambda_y^+(\phi)dy$; $\lambda_2(\phi) = \int \lambda_y^-(\phi)dy$, on a évidemment :

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \ ; \ L^1(\lambda) \supset L^1(\lambda_1) \cap L^1(\lambda_2) .$$

D'autre part : $\lambda_i \leq \sigma$ $(i=1,2)$; d'où $L^1(\lambda_i) \supset L^1(\sigma)$ et comme on a montré que $\sigma = |D^\alpha u|$, $\lambda = D^\alpha u$, on a :

$$L^1(\sigma) = L^1(D^\alpha u) = L^1(\lambda) = L^1(\lambda_1) \cap L^1(\lambda_2) .$$

Soit $f \in L^1(\lambda)$. On a $f \in L^1(\lambda_y^+) \cap L^1(\lambda_y^-)$ (p.p. $y \in \mathbb{R}^m$) ; $y \longmapsto \left(\int f \, d\lambda_y^+ - \int f \, d\lambda_y^-\right) = \int f \, d\lambda_y$ est dy-intégrable et

$$\int f \, d\lambda = \int f \, d\lambda_1 - \int f \, d\lambda_2 = \int dy \left(\int f \, d\lambda_y^+ - \int f \, d\lambda_y^-\right) = \int dy \int f \, d\lambda_y$$

C.Q.F.D.

4. Premières relations avec l'hypographe.

Définition. Soit u une fonction définie sur Ω . L'hypographe de u est l'ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}$ défini par $G = \{(x;y) \in \Omega \times \mathbb{R} : u(x) > y\}$.

On note p la projection de $\Omega \times \mathbb{R}$ sur Ω : $p(x,y) = x$

U l'application de Ω dans $\Omega \times \mathbb{R}$: $U(x) = (x, u(x))$

m la mesure de Lebesgue sur Ω

$D_x \chi_G$ la distribution (vectorielle) $(D_1 \chi_G, \ldots, D_n \chi_G)$ (si G mesurable)

$D_y \chi_G = D_{n+1} \chi_G$

$D^\alpha = (D_{i_1}, \ldots, D_{i_k})$ $(i_1 < \ldots < i_k \leq n)$ une dérivation d'ordre 1 par rapport à la variable x .

Proposition. Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et G son hypographe. Alors :

1) La distribution $-D_y \chi_G$ est toujours une mesure ≥ 0 et l'on a

$$-p \circ D_y \chi_G = m \quad (1) \ ; \quad -D_y \chi_G = U \circ m \quad (2)$$

2) Pour tout ouvert $A \subset \Omega$, on a

(i) $\int_A |D^\alpha u| = \int_{A \times \mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G|$; et en particulier $\int_A |Du| = \int_{A \times \mathbb{R}} |D_x \chi_G|$

(ii) $u \in BV(\Omega) \Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\int_{A\times\mathbb{R}} |D_x\, \chi_G| < \infty$

(iii) <u>Si</u> $u \in BV(\Omega)$, <u>on a la relation</u> :

$$p \circ D_x\, \chi_G = Du \qquad (1') .$$

3) <u>Si</u> u <u>est continue sur</u> Ω , <u>alors</u> (1') <u>est vérifiée au sens des distributions</u> ; u <u>appartient à</u> $BV(\Omega)$ <u>si et seulement si</u> G <u>est de périmètre localement fini dans</u> $\Omega \times \mathbb{R}$.

<u>Dans ces conditions on a</u> $D_x\, \chi_G = U \circ Du$ (2')

<u>Démonstration de la proposition</u> :

1) On montre d'abord la relation (2).

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$. On a, par Fubini :

$$-\int \phi\, D_y\, \chi_G = \int_G D_y\, \phi(x,y)\, dx\, dy = \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{u(x)} D_y\, \phi(x,y)\, dy\right) dx = \int_\Omega \phi(x,u(x))\, dx .$$

On en conclut que $-D_y\, \chi_G$ est la mesure-image : $U \circ m$.

La relation (1) se déduit de (2) : on a $f \in L^1(D_y\, \chi_G)$ si et seulement si $f \circ U \in L^1(m)$ et dans ce cas : $-\int f\, D_y\, \chi_G = \int f \circ U\, dm$.

Soit $\phi \in K(\Omega)$. Si on pose : $f = \phi \circ p$, on a

$$f \circ U = \phi .$$

On a donc $\phi \circ p \in L^1(D_y\, \chi_G)$, et $-\int (\phi \circ p)\, D_y\, \chi_G = \int \phi\, dm$.

Ce qui montre que $-D_y\, \chi_G$ admet m comme image par p .

2) (a) On suppose que $\forall A \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\int_{A\times\mathbb{R}} |D_x\, \chi_G| < \infty$. $D_x\, \chi_G$ est donc une mesure sur $\Omega \times \mathbb{R}$ qui, de plus, admet une image par p . Montrons l'égalité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$p \circ D_x\, \chi_G = Du \qquad (1')$$

<u>Note</u> : $\theta \circ \mu$ désigne l'image de la mesure μ par l'application θ , si elle existe.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On pose $\eta_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\varepsilon<y<\varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |y|>\varepsilon \end{cases}$ et on prolonge η_ε continûment en une fonction linéaire sur les intervalles $[-\varepsilon-1, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, \varepsilon+1]$. On a

$$\int \phi(x)\, D_i\, \chi_G(dx\; dy) = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int \eta_\varepsilon(y)\, \phi(x)\, D_i\, \chi_G(dx\; dy)\, .$$

Or $\int \eta_\varepsilon(y)\, \phi(x)\, D_i\, \chi_G(dx\; dy) = -\int D_i\phi(x)(\int \eta_\varepsilon(y)\chi_G(x,y)dy)dx$ ce qui peut se déduire du §.3 Prop.2 ou plus simplement du lemme ci-dessous.

Le nombre $(\int \eta_\varepsilon(y)\chi_G(x,y)dy-\varepsilon-\frac{1}{2})$ vaut $u(x)$ pour $\varepsilon > |u(x)|$ et est majoré en valeur absolue par $1+2|u(x)|$.

Comme on a évidemment $\int D_i\, \phi(x)[-\varepsilon-\frac{1}{2}]dx = 0$, on trouve :

$$\int \phi(x)\, D_i\, \chi_G(dx\; dy) = -\int u(x)\, D_i\phi(x)\, dx$$

par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow +\infty$, ce qui prouve (1') dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Mais $(p \circ D_x\, \chi_G)$ est une mesure, donc Du aussi et $u \in BV(\Omega)$.

En posant $k(x,y) = \eta_\varepsilon(y)\, \phi(x)$, $f = \chi_G$, on a utilisé le :

<u>Lemme</u>. Si k est une fonction continue à support compact dans $\Omega \times \mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles $D_i k$ $(i=1,2,\ldots,n)$ continues, et si $f \in BV(\Omega \times \mathbb{R})$, on a

$$\int k\, D_i f = -\int D_i k(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy\, .$$

<u>Démonstration</u> : Soit f_h une régularisation de f.

On a $\int k\, D_i f = \lim_{h\to\infty} \int k\, D_i\, f_h$.

D'autre part $\int k\, D_i f_h = \int k(x,y)\, D_i f_h(x,y)\, dx\, dy = -\int f_h(x,y)\, D_i k(x,y) dx\, dy.$

Enfin $\lim_{h\to\infty} -\int f_h(x,y)\, D_i k(x,y)\, dx\, dy = -\int f(x,y)\, D_i k(x,y)\, dx\, dy$.

(b) Montrons que pour tout ouvert $A \subset \Omega$, on a

$$\int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha\, \chi_G| \leqslant \int_A |D^\alpha u| \qquad (\text{avec } D^\alpha = (D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}))\, .$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(A \times \mathbb{R})^k$, $|\phi| \leqslant 1$, et $B \in \mathcal{A}(A)$ tel que $p(\operatorname{supp} \phi) \subset B$.

Soit u_h une régularisation de u et $G_h = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} : u_h(x) > y\}$

($h > \operatorname{dist}(B, \mathbb{R}^n \times \Omega)^{-1}$). On a $\int_{B\times\mathbb{R}} |\chi_G - \chi_{G_h}| = \int_B |u_h - u|$; donc

$\int_G \operatorname{div}_\alpha \phi = \lim_{h\to\infty} \int_{G_h} \operatorname{div}_\alpha \phi$. Par la formule de Green classique on a

$$\int_{G_h} \operatorname{div}_\alpha \phi = \int \sum_{q=1}^{k} \phi_{i_q}(x, u_h(x))\, D_{i_q} u_h(x)\, dx \leqslant \int \Big(\sum_{q=1}^{k} \phi_{i_q}(x, u_h(x))^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{q=1} D_{i_q} u_h(x)^2\Big)^{1/2} dx$$

$$\leqslant \int_B |D^\alpha u_h(x)|\, dx = \int_B |D^\alpha u_h| \text{ .}$$

Et, d'après le §.2. Prop.2 : $\int_G \operatorname{div}_\alpha \phi \leqslant \overline{\lim_{h\to\infty}} \int_B |D^\alpha u_h| \leqslant \int_{\overline{B}} |D^\alpha u| \leqslant \int_A |D^\alpha u|$

ce qui établit l'inégalité désirée et montre que si $u \in BV(\Omega)$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ , } \int_{A\times\mathbb{R}} |D_x \chi_G| < \infty \text{ .}$$

(c) On vient d'établir (ii) et (iii) du 2) de la proposition. Pour montrer (i), il nous reste à voir que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a

$$\int_A |D^\alpha u| \leqslant \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G| \quad (A \text{ ouvert} \subset \Omega).$$

<u>Cas</u> : u <u>bornée</u>

Supposons $|u(x)| < M$ pour tout $x \in A$ et soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\alpha(y) = 1$ si $|y| \leqslant M$, $|\alpha| \leqslant 1$.

On a évidemment $u(x) = M + \int_{-M}^{+M} \chi_G(x,y)\, dy$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(A)^k$, $|\phi| \leqslant 1$, et $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$.

$$\int u(x)\, D_i \phi_i(x)\, dx = \int \Big(M + \int_{-M}^{M} \chi_G(x,y)dy\Big)\, D_i \phi_i(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega \int_{-M}^{M} \chi_G(x,y)\, D_i \phi_i(x)\, dy\, dx \text{ .}$$

Posons $\psi(x,y) = \phi(x).\alpha(y)$. On a $\psi \in \mathcal{D}(A\times\mathbb{R})^k$, $|\psi| \leqslant 1$, et

$$\int u(x)\, D_i \phi_i(x)\, dx = \int_G D_i \psi_i(x,y)\, dx\, dy \text{ .}$$

Car

$$\int_\Omega dx \int_{|y|>M} \chi_G(x,y)\, D_i \phi_i(x)\alpha(y)\, dy = \Big(\int_\Omega D_i \phi_i(x)dx\Big)\Big(\int_{|y|>M} \alpha(y)\, dy\Big) = 0$$

On en conclut en sommant de $q=1$ à $q=k$ et en passant au sup :

$$\int_A |D^\alpha u| \leqslant \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G|$$

et en fait, d'après (b) :

$$\int_A |D^\alpha u| = \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G|$$

Cas général :

Posons pour $N>0$, $u_N(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad |u(x)|\leqslant N \\ 0 & \text{si} \quad |u(x)|>N \end{cases}$

et $G_N = \{(x,y)\in \Omega \times \mathbb{R} : u_N(x) > y\}$.

On a

$$G_N(y) = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad y<-N \\ G(y) & \text{si} \quad |y|<N \\ \Omega & \text{si} \quad y>N \end{cases}.$$

D'après le §.3. Prop.1, on a

$$\int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_{G_N}| = \int_{\mathbb{R}} dy \int_A |D^\alpha \chi_{G_N(y)}| = \int_{-N}^{+N} dy \int_A |D^\alpha \chi_{G(y)}|$$

et

$$\int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G| = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_A |D^\alpha \chi_{G(y)}| .$$

On en déduit $\int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G| = \lim_{N\to\infty} \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_{G_N}|$ et cette limite est croissante.

D'autre part, u_N tend vers u dans $L^1_{loc}(A)$. D'après le §.2. Prop.1, et en résumant ce qui précède, on a

$$\int_A |D^\alpha u| \leqslant \varliminf_{N\to\infty} \int_A |D^\alpha u_N|$$

$$\int_A |D^\alpha u_N| = \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_{G_N}| \quad \text{qui croît vers} \quad \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G| \quad (N\to\infty) .$$

D'où le résultat $\int_A |D^\alpha u| \leqslant \int_{A\times\mathbb{R}} |D^\alpha \chi_G|$ et l'égalité (i), avec (b).

Remarque. Notons au passage qu'il résulte de cette démonstration que

$$\int_A |D^\alpha u_N| \leqslant \int_A |D^\alpha u|$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_A |D^\alpha u_N| = \int_A |D^\alpha u| .$$

Si on interprète la $N^{\text{ième}}$ troncature comme une contraction, on retrouve que, pour cette contraction particulière, la semi-norme $\int_A |D^\alpha u|$ est diminuée pour tout D^α d'ordre 1 (voir §.2, Remarque 6)).

3) On suppose maintenant u continue sur Ω. Montrons l'égalité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$p \circ D_x \chi_G = Du \qquad (1')$$

La distribution image $p \circ D_x \chi_G$ est bien définie car le support de la distribution $D_x \chi_G$ est contenu dans le graphe de u sur Ω, soit L, dont l'intersection avec toute bande $K \times \mathbb{R}$ (K compact de Ω) est compacte dans $\Omega \times \mathbb{R}$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, u_h une régularisation de u et G_h comme en 2)b), et L_h le graphe de u_h sur Ω. On pose $S = \operatorname{Supp} \phi$.
Comme u est continue, u_h converge uniformément vers u sur S, et il existe un voisinage V de $L \cap p^{-1}(S)$ contenu dans $\Omega \times \mathbb{R}$ tel que, pour h assez grand : $L_h \cap p^{-1}(S) \subset V$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$, tel que $\forall z \in V$, $\psi(z) = \phi \circ p(z)$.

On a $\langle \phi, p \circ D_i \chi_G \rangle = \langle \psi, D_i \chi_G \rangle \quad (i=1,2,\ldots,n)$.

Or d'après la formule de Green classique, on a

$$\langle \psi, D_i \chi_{G_h} \rangle = -\int_{G_h} D_i \psi(x,y)\, dx\, dy = \int \psi(x, u_h(x))\, D_i u_h(x)\, dx$$
$$= \int \phi(x)\, D_i u_h(x)\, dx = -\int u_h(x)\, D_i \phi(x) dx .$$

De plus
$$\lim_{h \to \infty} \langle \psi, D_i G_h \rangle = \langle \psi, D_i G \rangle$$
$$\lim_{h \to \infty} \int u_h\, D_i \phi\, dx = \int u\, D_i \phi\, dx$$

d'où la relation (1').

Alors, si G est de périmètre localement fini sur $\Omega \times \mathbb{R}$, on a $u \in BV(\Omega)$. La réciproque résulte de 2) (ii).

Reste à montrer la formule (2').

On suppose u continue sur Ω et $u \in BV(\Omega)$.
D'abord, l'image de $D_i u$ par U est bien définie puisque pour ϕ continue à support compact dans $\Omega \times \mathbb{R}$, $\phi(x, u(x))$ est continue à support compact contenu dans $p(\operatorname{supp} \phi)$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{A}(\Omega)$, $B \supset p(\operatorname{supp} \phi)$. Soit u_h une régularisation de u sur B $(h > \operatorname{dist}(B,\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^{-1})$

$$G_h = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} : u_h(x) > y\} .$$

On a, comme en 2)b) ,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{G_h} D_i\phi = \int_G D_i\phi .$$

Comme u est continue, u_h tend vers u uniformément sur B , donc $\phi(x,u_h(x))$ tend vers $\phi(x,u(x))$ uniformément sur Ω .

De plus les mesures $D_i u_h$ convergent vaguement vers $D_i u$ (on a la majoration : $\int_A |D_i u_h| \leqslant \int_{A_{h_o}} |D_i u|$, $h > h_o$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$)

On en déduit :

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \phi(x,u_h(x))dx = \int_\Omega \phi(x,u(x))dx .$$

La formule de Green classique permet d'écrire

$$\int_\Omega \phi(x,u_h(x))dx = \int_{G_h} D_i\phi$$

ce qui achève de démontrer la proposition.

<u>Exemple</u>. L'assertion 3) de la proposition ci-dessus permet de donner l'exemple d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}^2$ de périmètre infini :

La fonction $u(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ $(x \in]0,1[)$ est continue et non à variation bornée sur $]0,1[$. Son hypographe G est donc de périmètre infini dans $]0,1[\times \mathbb{R}$ et a fortiori dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Corollaire 1. Soit</u> $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ <u>et</u> A <u>ouvert dans</u> Ω .
<u>L'application</u> $y \longmapsto \int_A |D^\alpha \chi_{G(y)}|$ <u>est mesurable et l'on a</u>

$$\int_A |D^\alpha u| = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_A |D^\alpha \chi_{G(y)}| .$$

<u>En particulier</u> $\int_A |Du| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(G(y))dy$ <u>et</u> $u \in BV(\Omega)$ <u>si et seulement si</u>

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega) , \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(G(y))dy < \infty .$$

Démonstration : Cela résulte du 2) de la proposition ci-dessus et du §.3 Prop.1.

Exemple. Soit $\Omega = B(0,1)$ boule unité de $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$. La fonction $u(x) = |x|^{-1/2}$ $(x \in \Omega)$ est dans $\overline{BV}(\Omega)$, car

$$P_\Omega(G(y)) = \begin{cases} \omega_{n-1}\, y^{2(1-n)} & \text{si } y>1 \\ 0 & \text{si } y\leq 1 \end{cases}$$, et n'est pas bornée.

(ω_{n-1} = aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$)

Corollaire 2. Si $u \in BV(\Omega)$, on a $p \circ |D^\alpha \chi_G| = |D^\alpha u|$ et si on pose $\nu = (D_1 u, \dots, D_n u, -m)$, on a

$$p \circ D\chi_G = \nu \quad ; \quad p \circ |D\chi_G| = |\nu| .$$

Enfin, si on a seulement $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, la distribution ν vérifie

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega) , \quad \int_{A\times\mathbb{R}} |D\chi_G| = \int_A |\nu| .$$

Démonstration : Supposons $u \in BV(\Omega)$. D'après 2)i) de la proposition, on a

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega) , \quad |D^\alpha u|(A) = (p \circ |D^\alpha \chi_G|)(A)$$

cela implique : $\quad |D^\alpha u| = p \circ |D^\alpha \chi_G|$.

La relation $p \circ D\chi_G = \nu$, résulte des relations (1) et (1') de la proposition.

On en déduit $|\nu| \leq p \circ |D\chi_G|$. En reprenant le 2)b) de la démonstration de la proposition, on a

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega) , \quad |\nu|(A) \geq (p \circ |D\chi_G|)(A)$$

D'où l'égalité

$$|\nu| = p \circ |D\chi_G| .$$

Enfin, si u est seulement dans $L^1_{loc}(\Omega)$, et si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, on a

$$\int_A |\nu| = \infty \iff \int_A |Du| = \infty \iff \int_{A\times\mathbb{R}} |D_x \chi_G| = \infty \iff \int_{A\times\mathbb{R}} |D\chi_G| = \infty$$

puisqu'on a toujours $m(A) = |D_y \chi_G|(A \times \mathbb{R}) < \infty$.

Et si $\int_A |\nu|$ et $\int_{A\times\mathbb{R}} |D\chi_G|$ sont finis, alors $u \in BV(A)$ et ces nombres sont égaux d'après la relation $p \circ |D\chi_G| = |\nu|$.

__Remarque.__ Dans [M2] on montre que si $u \in BV(\Omega)$, u continue, si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, et A de frontière $|\nu|$-négligeable, alors $|\nu|(A)$ coïncide avec l'aire de Lebesgue de la surface non paramétrique définie par u au-dessus de A, i.e. :

$$|\nu|(A) = \mathrm{Inf}\{\varliminf_{h\to\infty} \int_A (1+|Du_h(x)|^2)^{1/2}dx \;;$$

$$f_h \in \mathcal{C}^1(A),\ \lim_{h\to\infty} f_h = f \text{ uniformément sur } A\}.$$

__Corollaire 3.__ __Soit__ $u \in BV(\Omega)$. __Si__ $f \in L^1(D^\alpha u)$, __alors__ $f \in L^1(D^\alpha \chi_{G(y)})$ (p.p. $y \in \mathbb{R}$), __les applications__ $y \longmapsto \int f(x)\, D^\alpha \chi_{G(y)}(dx)$ __et__ $y \longmapsto \int f(x)|D^\alpha \chi_{G(y)}|(dx)$ __sont intégrables sur__ $\mathbb{R}$ __et on a__

$$\int f\, D^\alpha u = \int_{\mathbb{R}} dy \int f(x)\, D^\alpha \chi_{G(y)}(dx)$$

$$\int f|D^\alpha u| = \int_{\mathbb{R}} dy \int f(x)|D^\alpha \chi_{G(y)}|(dx).$$

__Démonstration__ : D'après le 2)(iii) de la proposition, $f \in L^1(D^\alpha u)$ si et seulement si $f \circ p \in L^1(D^\alpha \chi_G)$ et on a $\int f\, D^\alpha u = \int (f\circ p) D^\alpha \chi_G$.
D'après la proposition 2 du §.3 appliquée à la fonction $\chi_G \in BV(\Omega\times\mathbb{R})$, on a $\int (f\circ p)\, D^\alpha\chi_G = \int_{\mathbb{R}} dy \int f(x)\, D^\alpha \chi_{G(y)}(dx)$.
On opère de même pour $|D^\alpha u|$; d'après le corollaire 2 :
$\int f|D^\alpha u| = \int (f\circ p)|D^\alpha \chi_G|$ et d'après la proposition 2 du §.3 :
$\int f\circ p|D^\alpha\chi_G| = \int_{\mathbb{R}} dy \int f(x)|D^\alpha\chi_{G(y)}|(dx)$.

__Remarques sur la proposition__ : 1) On peut aussi montrer ([M_2]) que si u est une fonction mesurable sur Ω, la condition

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega),\quad \int_{A\times\mathbb{R}} |D_x\chi_G| < \infty$$

entraîne que u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$. La démonstration repose sur une inégalité isopérimétrique dans la boule.

2) La formule $D_x \chi_G = U \circ Du$, valable lorsque u est continue et $u \in BV(\Omega)$, admet une généralisation lorsque u est seulement dans $BV(\Omega)$. C'est l'objet d'un paragraphe ultérieur.

5. <u>Une caractérisation par les translations.</u>

<u>Proposition.</u> <u>Soit</u> $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $u \in BV(\Omega)$ <u>est que, pour tout</u> $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, <u>il existe</u> $C>0$ <u>et</u> $\alpha>0$ <u>tel que</u> $\int_A |u(x+k)-u(x)|dx \leq C|k|$ (i) <u>pour tout</u> $k \in \mathbb{R}^n$ <u>tel que</u> $|k|<\alpha$.

Cela résulte de deux lemmes :

<u>Lemme 1.</u> Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $k \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overline{A+k} \subset \Omega$.
Alors $\int_A |u(x+k) - u(x)|dx \leq |k| \int_{\overline{A+k}} |Du|$.

<u>Démonstration</u> : Soit (u_h) une régularisation de u

$$u_h(x+k) - u_h(x) = \int_0^1 k \cdot Du_h(x+tk)\, dt$$

$$\begin{aligned}\int_A |u_h(x+k)-u_h(x)|dx &\leq |k| \int_A \left(\int_0^1 |Du_h(x+tk)dt\right) dx = \\ &\leq |k| \int_0^1 dt \int_A |Du_h(x+tk)|\, dx \\ &\leq |k| \int_{A+k} |Du_h(x)|dx = |k| \int_{A+k} |Du_h| .\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_A (u(x+h)-u(x)|dx = \lim_{h\to\infty} \int_A |u_h(x+k)-u_h(x)|dx &\leq |k| \overline{\lim_{h\to\infty}} \int_{A+k} |Du_h| \\ &\leq |k| \int_{\overline{A+k}} |Du|\end{aligned}$$

(d'après le §.2, prop.2,(ii)).

<u>Lemme 2.</u> Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $C>0$ et $\alpha>0$ vérifiant la condition (i). Alors $\int_A |Du| \leq n\, C$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\phi \in \mathcal{D}(A)^n$, $|\nu| \leq 1$. On a

$$\int u \operatorname{div} \phi \, dx = \lim_{t \to o} \sum_{i=1}^{n} \int u(x) \frac{\phi_i(x+te_i)-\phi(x)}{t} dx$$

$$= \lim_{t \to o} \sum_{i=1}^{n} \int \phi_i(x) \frac{u(x-te_i)-u(x)}{t} dx$$

par passage à la limite dans une intégrale et changement de variable – $[(e_i)_{i=1}^n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n]$ –

Pour tout t tel que $|t|<\alpha$, on a $\int_A \left|\frac{u(x-te_i)-u(x)}{t}\right| du \leq C$. D'où

$\int u \operatorname{div} \phi \, dx \leq C \sum |\phi_i|_\infty$ et

$\int_A |Du| \leq n\, C$.

<u>Remarques</u>. 1) Si $n = 1$, $\int_A |Du|$ est la plus petite constante C vérifiant (i) .

2) Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on a $\int |u(x+k)-u(x)| \, dx \leq |k| \int |Du|$ (pour tout $k \in \mathbb{R}^n$).

3) Comme conséquence immédiate de la proposition, on retrouve que $BV(\Omega)$ est <u>invariant par les contractions</u> ; en particulier, si $u \in BV(\Omega)$, il en est de même de u^+ , u^- et $|u|$; de plus si u et v appartiennent à $BV(\Omega)$, il en est de même de $\operatorname{Sup}(u,v)$ et $\operatorname{Inf}(u,v)$. Enfin, si E et F sont des ensembles de périmètre fini relativement à Ω , il en est de même de $E \cap F$ et $E \cup F$; il y a évidemment stabilité par intersection et réunion finies, mais pas en général par intersection ou réunion infinie.

Traitons à titre d'exemple le cas de l'intersection infinie. On pose : $u(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, $x \in]0,1[$. G l'hypographe de u . Soit (x_i) la suite décroissante des maxima de u ,

$u_i(x) = u(x)$ si $x \in]x_i,1[$, $u_i(x) = u(x_i)$ si $x \in]a,x_i]$

G_i l'hypographe de u_i . On a $G = \bigcap G_i$.

On sait que G est de périmètre infini et que les G_i sont de périmètre fini (dans $]0,1[\times \mathbb{R}$) .

6. Propriétés de compacité. Application.

Proposition 1. Soit σ et γ deux fonctions $\geqslant 0$ définies sur $\mathcal{A}(\Omega)$. Alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ qui vérifient :

$$\forall\, A \in \mathcal{A}(\Omega)\ ,\ \int_A |u(x)|\,dx \leqslant \sigma(A)\ ,\ \int_A |Du| \leqslant \gamma(A)$$

est compact dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Démonstration : D'après le critère de A. Weil [W p.52-54], et la proposition §.4, $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Enfin $\mathcal{F}$ est fermé dans $L^1_{loc}(\Omega)$ d'après le §.2, proposition 1.

Remarque. Une condition plus fine de compacité dans $L^1_{loc}(\Omega)$ figure dans $[M_1]$:

Proposition (1'). Soit Ω_j la suite (finie ou non) des composantes connexes de Ω. Soit $A_j \in \mathcal{A}(\Omega_j)$, $\sigma_j \geqslant 0$ et γ une fonction $\geqslant 0$ sur $\mathcal{A}(\Omega)$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ qui vérifient :

$$(\forall j)\ \int_{A_j} |u(x)|\,dx \leqslant \sigma_j\ ;\ (\forall\, A \in \mathcal{A}(\Omega))\ \int_A |Du| \leqslant \gamma(A)$$

est compact dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Si l'on admet également l'inégalité "de Poincaré" :

Inégalité de Poincaré : Pour toute $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et tout cube cartésien[1] $Q \in \mathcal{A}(\Omega)$, de côté s, on a

$$\int_Q |u-\alpha|\,dx \leqslant s \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{Q}} |D_i u|$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q u(x)\,dx$;

On obtient la proposition :

Note (1). Un cube cartésien de côté s désigne pour nous un ensemble $Q = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i^o < x_i < x_i^o + s\}$ où $x_o = (x_1^o,\ldots,x_n^o)$ est un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.

<u>Proposition 2. Soit</u> (Ω_j) <u>la suite (finie ou non) des composantes connexes de</u> Ω . <u>Soit</u> (Q_j) <u>des cubes cartésiens tels que</u> $Q_j \in \mathcal{A}(\Omega_j)$, <u>et soit</u> γ <u>une fonction</u> $\geqslant 0$ <u>définie sur</u> $\mathcal{A}(\Omega)$.

<u>Soit</u> $\mathcal{F} = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \forall A \in \mathcal{A}(\Omega)\ ,\ \int_A |Du| \leqslant \gamma(A)\}$

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{u} \mid \exists u \in \mathcal{F},\ \tilde{u}(x) = u(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |Du| \quad \underline{\text{pour}} \quad x \in Q_j\}\ .$$

<u>Alors l'ensemble</u> $\widetilde{\mathcal{F}}$ <u>est compact dans</u> $L^1_{loc}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : Si Q_j est de côté s_j on a, par l'inégalité de Poincaré :

$$\int_{Q_j} |\tilde{u}(x)|\,dx \leqslant s_j \sum_{i=1}^{n} \int_{\bar{Q}_j} |D_i u|\ .$$

En posant $\sigma_j = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_j} |D_i u|$ pour un ensemble $B_j \in \mathcal{A}(\Omega_j)$ tel que $B_j \supset \bar{Q}_j$, on peut appliquer la proposition (1') à $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Comme conséquence immédiate, toujours en suivant $[M_1]$, on a

<u>Théorème. Toute distribution dont les dérivées premières sont des mesures est une fonction. Plus précisément</u> :

<u>Soit</u> $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ <u>tel que</u> DT <u>soit une mesure ; alors il existe</u> $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ <u>tel que</u> $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \phi, T\rangle = \int \phi(x)\, u(x)\,dx$.

<u>Démonstration</u> Soit τ_h une suite régularisante. On a d'après le §.1, pour $r>0$:

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Omega^r)\ ,\ \int_A |D(\tau_h * T)| \leqslant \int_{\Omega^r} |DT| \quad (\text{pour} \quad h > \tfrac{1}{r})\ .$$

Soit (Ω^r_j) la suite des composantes connexes de Ω^r .
D'après la proposition 2, il existe des constantes $(c_h^{(j)})_{h > \frac{1}{r}}$ telles que la suite $\{\tau_h * \tau - c_h^{(j)}\}_{h > \frac{1}{r}}$ soit relativement compacte dans $L^1_{loc}(\Omega^r_j)$.
Comme la suite $\tau_h * T$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega^r)$ vers T , on en déduit que la suite $\{c_h^{(j)}\}_{h > \frac{1}{r}}$ est bornée ; et donc la suite $\{\tau_h * T\}_{h > \frac{1}{r}}$ est

relativement compacte dans $L^1_{loc}(\Omega^r_j)$, soit dans $L^1_{loc}(\Omega^r)$, par procédé diagonal.

Soit $u_r \in L^1_{loc}(\Omega^r)$ une valeur d'adhérence de cette suite. On a $(\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega^r))\quad \langle \phi, T\rangle = \int \phi\, u_r\, dx$.

On en déduit : $u_{r'}(x) = u_r(x)$ p.p. $x \in \Omega^r$ si $r' < r$ et l'existence de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$u(x) = u_r(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega^r$$

et u vérifie l'égalité du théorème.

Remarques :

1) Des résultats analogues sont établis pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ dans Schwartz : Distributions, chap.VI, 3ème édition.

2) Le théorème ci-dessus peut-être précisé ainsi : toute fonction $u \in BV(\Omega)$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ avec $p = \frac{n}{n-1}$. La démonstration de ce résultat, dû à Federer, utilise en particulier une inégalité isopérimétrique pour les ensembles de périmètre fini.

3) La proposition 1 de compacité - d'ailleurs démontrée directement par De Giorgi dans le cas où les fonctions u sont des fonctions caractéristiques d'ensembles - est utilisée dans l'étude des ensembles de périmètre fini, qui est l'objet de la deuxième partie.

Bibliographie.

[DG_1] E. De Giorgi : Su una teoria generale della misura (r-1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura Appl (14) 36 (1954)

[DG_2] E. De Giorgi : Nuovi teoremi relativi alle misure (r-1) dimensionali in uno spazio ad r-dimensioni. Ricerche Mat.4 (1955) 95-113.

[DG_3] E. De Giorgi : Sulla proprieta isoperimetrica della ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita. Atti. Acc. Naz. linei. Serie VIII. Vol.V (1958).

[FL] W.H. Fleming : Functions whose partial derivatives are measures. Illinois Journ. of Math. Vol.4, n.3 (1960).

[FR] W.H. Fleming and R. Rishel : An Integral Formula for total gradicut variation. Arch. Math. XI.

[M_1] M. Miranda : Distribuzioni aventi derivate misure. Insienu di perimetro localmente finito. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa 1964.

[M_2] " : Superfici cartesiane generalizzate ed insieni diperemitro localmente finito sui prodolti cartesiani. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 1964.

[M_3] " : Sul minimo dell'integrale del gradiente di una fuzione Ann. Sc. Norm. Pisa 1965.

[M_4] " : Comportamente delle sucessioni convergenti di frontiere minimali. Rend. Padova 1967.

[V] A.I. Volpert : The spaces BV and quasilinear equations. Mat. Sbornik tom.73 (115), (1967), n°2.

[B] Bourbaki : Intégration. Hermann.

[S] L. Schwartz : "Théorie des distributions" Hermann (1966).

[W] A. Weil : "L'intégration dans les groupes topologiques" Hermann (1965).

[F] H. Federer : "Geometric measure theory" Springer-Verlag (1969).

-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les équations d'évolution

Orsay 1971-1972

(N°6)

Exposé de Philippe BENILAN

"EQUATIONS D'EVOLUTION DU SECOND ORDRE"

Nous étudions le problème de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in A(t)\ u(t)\ ,\ u(0) = u_o\ ,\ u \text{ borné sur } [0,+\infty[\ ,$$

où $(A(t))_{t\in\,]0,+\infty[}$ est une famille d'opérateurs.

Ce problème a été notamment étudié par V. Barbu [1] et H. Brézis [2] dans le cas d'un opérateur maximal monotone d'un espace de Hilbert indépendant de t. Dans une première partie, nous développons pour ce problème une théorie d'approximation type "Yosida" dans un convexe fermé d'un espace de Banach quelconque. Dans une deuxième partie nous étudions le problème pour une famille d'opérateurs monotones d'un Hilbert dépendant de t,

I. Etude dans un espace de Banach.

X désigne un espace de Banach de norme $|.|$, de produit $\langle .,. \rangle_s$

$$[x,y] \in X \times X \longmapsto \langle y,x \rangle_s = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{|x+\lambda y|^2 - |x|^2}{2\lambda}\ ,$$

d'application de dualité F,

$$F : x \in X \longmapsto F(x) = \{w \in X' \ ;\ |x| = |w|,\ \langle w,x \rangle = |w|\,|x|\}\ .$$

Démontrons d'abord le lemme général suivant :

Lemme 1. *Soit* ϕ *une fonction convexe continue sur le Banach* X *et soit* $u \in \mathscr{C}^1([0,T];X)$ *tel que* $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1(0,T;X)$. *Alors la fonction* $t \longmapsto \phi(u(t))$ *est dérivable à droite en tout* $t \in [0,T[$ *et*
$\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) = \sup\{<\frac{du}{dt}(t),w> \ ; \ w \in \partial\phi(u(t))\}$; *la fonction* $t \longmapsto \frac{d^+\phi}{dt}(u(t))$ *est à variation bornée et pour tout* $0 \leq s \leq t < T$,
$\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) - \frac{d^+}{dt}\phi(u(s)) \geq \int_s^t \frac{d}{dt}\left(\frac{d^+}{dt}\phi(u(t))\right) dt$. *Enfin en tout point* $t \in]0,T[$ *où* $\frac{d^+}{dt}\phi(u(t))$ *et* $u'(t)$ *sont dérivables, on a*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^+}{dt}\phi(u(t))\right) \geq <\frac{d^2u}{dt^2}(t),w> \quad \text{pour tout} \quad w \in \partial\phi(u(t)) .$$

Démonstration : Soit $t \in [0,T[$. On a $u(t+h) = u(t) + hu'(t) + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ lorsque $h \longrightarrow 0$.

Donc
$$\frac{\phi(u(t+h)) - \phi(u(t))}{h} = \frac{\phi(u(t))+hu'(t)) - \phi(u(t))}{h} + \frac{\phi(u(t)+hu'(t)+h\varepsilon(h)) - \phi(u(t)+hu'(t))}{h} .$$

D'une part, on sait (cf. MOREAU [3]) que

$$\frac{\phi(u(t)+hu'(t)) - \phi(u(t))}{h} \longrightarrow \sup\{<u'(t),w> \ ; \ w \in \partial\phi(u(t))\} \quad \text{lorsque} \quad h \downarrow 0$$

d'autre part ϕ est localement lipschitzienne, donc il existe k et $\delta > 0$ tel que pour $|h| \leq \delta$,
$\frac{|\phi(u(t+h)) - \phi(u(t)+hu'(t))|}{h} \leq k|\varepsilon(h)| \longrightarrow 0$ lorsque $h \longrightarrow 0$. D'où la première partie du lemme.

Soit maintenant $0 \leq s \leq t < T$. Choisissons $w \in \partial\phi(u(t))$ et $v \in \partial\phi(u(s))$ tels que
$\frac{d^+\phi}{dt}(u(t)) = <u'(t),w>$ et $\frac{d^+}{dt}\phi(u(s)) = <u'(s),v>$. On a

$$\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) - \frac{d^+}{dt}\phi(u(s)) = <u'(t)-u'(s),w> + <u'(s),w-v> .$$

Or $u(t)-u(s) = (t-s)\, u'(s) + \int_s^t (t-\tau)\, u''(\tau)\, d\tau$, d'où par monotonie de $\partial\phi$,

$$<u'(s),w-v> \geq <-\frac{1}{t-s}\int_s^t (t-\tau)\, u''(\tau)\, d\tau,\ w-v> \geq -|w-v| \int_s^t |u''(\tau)|\, d\tau .$$

Donc $\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) - \frac{d^+}{dt}\phi(u(s)) \geqslant - 3\|u\|_{L^\infty(0,T)} \int_s^t |u''(\tau)|d\tau$, ce qui démontre la deuxième partie du lemme (cf. [4], Appendice).

Enfin si $\frac{d^+}{dt}\phi(u(t))$ et $u'(t)$ sont dérivables en t , on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^+}{dt}\phi(t)\right) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\phi(u(t+h)) + \phi(u(t-h)) - 2\phi(u(t))}{2h^2}$$ et

$$u''(t) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{u(t+h) + u(t-h) - 2u(t)}{2h^2}$$. Or pour $w \in \partial\phi(u(t))$ fixé,

$\phi(u(t+h)+\phi(u(t-h))-2\phi(u(t)) \geqslant \langle u(t+h)+u(t-h)-2u(t), w\rangle$ pour tout h , d'où la dernière partie du lemme.

Rappelons qu'un opérateur A de X est ϕ-accrétif si

$$\forall [x_1,y_1] \in A\ ,\ \forall [x_2,y_2] \in A\ ,\ \forall \lambda>0\ ,\ \phi(x_1-x_2) \leq \phi((x_1+\lambda y_1)-(x_2+\lambda y_2))\ .$$

Corollaire 2. Soient $(A(t))_{t\in]0,T[}$ famille d'opérateurs ϕ-accrétifs de X et u, v des solutions fortes de $\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in A(t)\ u(t))$ (i.e. $u \in \mathscr{C}([0,T];X) \times \mathscr{C}^1(]0,T[;X)$, $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,T;X)$ et $\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in A(t,u(t))$ p.p. $t \in]0,T[$). Alors la fonction $t \longmapsto \phi(u(t)-v(t))$ est convexe.

Proposition 3. Soient C un convexe fermé de X , $\mathcal{J}(t,x)$ une application de $]0,+\infty[\times C$ dans C vérifiant :

p.p. $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto \mathcal{J}(t,x)$ est contractante

$\forall \in C$, t — (t,x) est mesurable.

On suppose de plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) C est bornée.

(ii) il existe $x_0 \in C$ tel que $\int_0^\infty t|x_0 - \mathcal{J}(t,x_0)|dt < +\infty$.

Alors pour tout $u_0 \in C$ il existe $u \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ unique tel que $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,+\infty;X)$, $\frac{d^2u}{dt^2}(t) = u(t) - \mathcal{J}(t,u(t))$ p.p. $t \in]0,+\infty[$

$u(0) = u_0$, u borné.

De plus pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a

$$u(t) = e^{-t}u_o + \int_0^t e^{s-t} \int_s^{+\infty} e^{s-\tau} \mathcal{J}(\tau,u(\tau))\, d\tau\, ds$$

si $\hat{u}$ est solution correspondant à $\hat{u}_o$, la fonction $t \longmapsto |u(t)-\hat{u}(t)|$ est décroissante,

et sous l'hypothèse ii), $\|u-x_o\|_{L^\infty} \leq |u_o-x_o| + \int_0^\infty t|x_o-\mathcal{J}(t,x_o)|dt$.

Démonstration de la Proposition 3 : D'après le corollaire 2, si u et $\hat{u}$ sont des solutions correspondant à u_o et $\hat{u}_o$, la fonction $t \longrightarrow |u(t)-\hat{u}(t)|$ est convexe ; étant bornée elle est décroissante. En particulier on a unicité.

Pour tout $u : [0,+\infty[\longmapsto C$ continue bornée, $Tu(t) = e^{-t} u_o + \int_0^t e^{s-t} \int_s^{+\infty} e^{s-\tau} \mathcal{J}(\tau,u(\tau))\, d\tau$ est bien définie et continue de $[0,+\infty[$ dans C. On a de plus $\|Tu_1-Tu_2\|_{L^\infty} \leq k\|u_1-u_2\|_{L^\infty}$ où k est un rapport de lipschitz commun à tous les $\mathcal{J}(t,\cdot)$, et $\frac{d^2}{dt^2}(Tu) \in L^1_{loc}(0,+\infty;X)$ avec $\frac{d^2}{dt^2}(Tu)(t) = u(t) - \mathcal{J}(t,u(t))$ p.p.t.

Utilisant le lemme 1, on a $\frac{d^2}{dt^2}|Tu(t)-x_o| \geq -|x_o-\mathcal{J}(t,x_o)|$ p.p.t et donc $\|Tu-x_o\|_{L^\infty} \leq |u_o-x_o| + \int_0^\infty t|x_o-\mathcal{J}(t,x_o)|dt$. On en déduit lorsque $k<1$, l'existence (et l'unicité) d'une fonction $u \in \mathcal{C}_b([0,+\infty[;C)$ telle que $Tu = u$.

Considérons alors pour $\varepsilon>0$, $\mathcal{J}_\varepsilon(t,x) = \dfrac{\varepsilon x_o + \mathcal{J}(t,x)}{1+\varepsilon}$ où x_o est le point sélectionné sous l'hypothèse ii) et un point quelconque de C sous l'hypothèse i). La fonction $\mathcal{J}_\varepsilon$ vérifie les hypothèses de la Proposition 3 et est de rapport de lipschitz $\frac{1}{1+\varepsilon} <1$. Il existe donc $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[;C)$ unique tel que $\dfrac{d^2u_\varepsilon}{dt^2} = u_\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon)$, $u_\varepsilon(0) = u_o$, u_ε borné.

Compte tenu du deuxième paragraphe, u_ε est uniformément borné, soit $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq M$. Utilisant le lemme 1,

$$\frac{d^2}{dt^2}|u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)| \geqslant |u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)| - |J_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t)) - J_{\varepsilon'}(t)u_{\varepsilon'}(t)|$$

$$\geqslant -|\varepsilon-\varepsilon'||x_o| \quad \text{et la fonction}$$

$t \longmapsto |u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)| + |\varepsilon-\varepsilon'||x_o|\frac{t^2}{2}$ est convexe.

On a donc $|u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)| \leqslant \frac{t}{L}|u_\varepsilon(L)-u_{\varepsilon'}(L)| + |\varepsilon-\varepsilon'||x_o|t\ L$ pour tout $0\leqslant t\leqslant L<+\infty$ soit en fixant $T>0$, $\|u_\varepsilon-u_{\varepsilon'}\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant \frac{2TM}{L} + T(x_o)(\varepsilon-\varepsilon')\ L$ $\forall\ L\geqslant T$. Donc u_ε converge uniformément sur tout compact. Par passage à la limite dans

$$u_\varepsilon(t) = e^{-t}u_o + \int_0^t e^{s-t}\int_s^{+\infty} e^{s-\tau}\left\{\frac{\varepsilon x_o + J(\tau,u_\varepsilon(\tau))}{1+\varepsilon}\right\} d\tau\ ds$$

on obtient la Proposition.

<u>Corollaire 4. Soient</u> C <u>convexe fermé de</u> X, $(A(t))_{t\in]0,+\infty[}$ <u>une famille d'opérateurs accrétifs de</u> X <u>tels que</u>

$$(I+\lambda A(t))(C) \supset C \quad \forall\lambda>0\ ,\ p.p.\ t\in]0,+\infty[$$

$$t \longmapsto (I+\lambda A(t))^{-1}x \quad \underline{\text{soit mesurable}} \quad \forall\ \lambda>0\ ,\ \forall\ x\in C\ .$$

<u>On suppose de plus que l'une des deux conditions suivantes est réalisée:</u>

i) C <u>est bornée</u>.

ii) <u>Il existe</u> $x_o\in C$ <u>tel que</u> $\int_0^\infty t|\widehat{A(t)}x_o|dt < +\infty$ (*) .

<u>Alors pour tout</u> $u_o\in C$ <u>et tout</u> $\lambda>0$, <u>il existe</u> $u_\lambda\in\mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ <u>unique tel que</u>

$$\frac{d^2u_\lambda}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,+\infty;X)\ ,\ \frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(t) = A(t)_\lambda\ u_\lambda(t) \quad p.p.\ t\in]0,+\infty[$$

$$u_\lambda(0) = u_o\ ,\ u_\lambda\ \underline{\text{borné}}.$$

<u>De plus sous l'hypothèse ii)</u>, $\|u_\lambda-x_o\|_{L^\infty} \leqslant |u_o-x_o| + \int_0^\infty t|\widehat{A(t)}x_o|\ dt$.

Il suffit d'appliquer la Proposition 3 à la fonction $v_\lambda(t) = u_\lambda(t\sqrt{\lambda})$.

(*) On pose $|\widehat{A}x| = \sup\{|A_\lambda x|\ ,\ \lambda>0\}$.

Remarque 5. Lorsque $A(t) = A$ indépendant de t, l'hypothèse ii) exprime que $A^{-1}(0) \cap C \neq \emptyset$; étant donné $x_0 \in A^{-1}(0) \cap C$, $(I+\lambda A)^{-1}$ laisse invariant le convexe $\{|x-x_0| \leq |u_0-x_0|\} \cap C$ et on est ainsi ramené à l'hypothèse i) ; lorsque X est uniformément convexe l'hypothèse i) implique $A^{-1}(0) \cap C \neq \emptyset$.

Lorsque $A(t) = A + f(t)$, l'hypothèse ii) est en particulier vérifiée s'il existe $y_0 \in A(C)$ tel que $\int_0^\infty t|y_0+f(t)|dt < +\infty$. Nous avons dans ce cas l'approximation :

Corollaire 6. Soient A un opérateur m-accrétif de X et $f :]0,+\infty[\longrightarrow X$ mesurable tels que $0 \quad R(A)$, et $\int_0^\infty t|f(t)|dt \quad +\infty$ Alors pour tout $u_0 \in X$ et tout $\lambda > 0$, il existe $u_\lambda \in \mathscr{C}([0,+\infty[;X)$ unique tel que

$$\frac{d^2u_\lambda}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,+\infty;X), \quad \frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(t) = A_\lambda u_\lambda(t) + f(t) \quad \text{p.p. } t \in]0,+\infty[$$

$u_\lambda(0) = u_0$, u_λ borné.

De plus alors $\|u_\lambda - x_0\|_{L^\infty} \leq |u_0-x_0| + \int_0^\infty t|f(t)|\,dt \quad \forall x_0 \in A^{-1}0$ et si $\hat{u}_\lambda$ est solution correspondant à $\hat{f}$ et $\hat{u}_0$,

$$\|u_\lambda-\hat{u}_\lambda\|_{L^\infty} \leq |u_0-\hat{u}_0| + \int_0^\infty t|f(t)-\hat{f}(t)|\,dt .$$

Mis à part le cas hilbertien, nous ne savons démontrer la convergence de u_λ que dans des cas très particuliers.

Proposition 7. Soit C un convexe fermé de X et $A :]0,+\infty[\times C \longmapsto X$. On suppose :

p.p. $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto A(t,x)$ est accrétif, uniformément continu sur les bornés de C et pour tout $\lambda > 0$, $(I+\lambda A(t,.))^{-1}(C) \supset C$

$\forall x \in C$, $\forall \lambda > 0$, la fonction $t \longmapsto (I+\lambda A(t,.))^{-1}x$ est mesurable,

il existe $M : [0,+\infty[\longmapsto [0,+\infty[$ continue telle que $|A(t,x)| \leq M(|x|)$ p.p. t, $\forall x$, enfin l'une des deux conditions :

i) C est borné.

ii) Il existe $x_0 \in C$ tel que $\int_0^\infty t|A(t,x_0)|dt < +\infty$.

Alors pour tout $u_0 \in C$, il existe $u \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ unique tel que

$\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,+\infty;X)$, $\frac{d^2u}{dt^2}(t) = A(t,u(t))$ p.p. $t \in]0,+\infty[$, $u(0) = u_o$, u borné.

Démonstration de la Proposition 7. Posant $A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(I-(I+\lambda A(t))^{-1})$, d'après le corollaire 4, il existe $u_\lambda \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ unique tel que $\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(t) = A_\lambda(t)u_\lambda(t)$, $u_\lambda(0) = u_o$, u_λ borné. De plus u_λ est uniformément borné.

D'après le lemme 1 et l'accrétivité de $A_\lambda(t)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)| \geqslant -|A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_\mu(t)u_\lambda(t)| .$$

On a $|A_\mu(t)u_\lambda(t)| \leqslant |A(t,u_\lambda(t))| \leqslant M = M(\sup_{\lambda,t}(u_\lambda(t)))$.

Donc $|J_\mu(t)u_\lambda(t)| \leqslant |u_\lambda(t)| + M\lambda$ est uniformément borné et

$|J_\lambda(t)u_\lambda(t) - J_\mu(t)u_\lambda(t)| \leqslant (\lambda+\mu)M$.

Etant donné $\varepsilon>0$, il existe donc $\delta>0$ tel que pour $\lambda,\mu\leqslant\Gamma$ on ait $|A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_\mu(t)u_\lambda(t)| \leqslant 2\varepsilon$ et donc la fonction $t \longmapsto |u_\lambda(t)-u_\mu(t)| + \varepsilon t^2$ convexe. Reprenant le même argument qu'à la Proposition 3, u_λ converge uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$. La limite est évidemment solution du problème. L'unicité de la solution résulte du corollaire 2.

Proposition 8. Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire équicontinu de classe (C_o) . Pour tout $u_o \in D(A)$, il existe $u \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;X)$ unique tel que $u(0) = u_o$, u borné, $u''(t) = Au(t)$ $\forall\, t \in [0,+\infty[$.

Démonstration : On peut toujours supposer, en renormant l'espace, A m-accrétif. Posant $S_\lambda(t)u_o$ la solution de $\frac{d^2u_\lambda}{dt^2} = A_\lambda u_\lambda$, $u_\lambda(0) = u_o$, u_λ borné, on a $S_\lambda(t)A_\mu = A_\mu S_\lambda(t)$: en effet

$$\frac{d^2}{dt^2}(A_\mu u_\lambda(t)) = A_\mu(\frac{d^2}{dt^2}u_\lambda(t)) = A_\mu(A_\lambda u_\lambda(t)) = A_\lambda(A_\mu u_\lambda(t)) , A_\mu u_\lambda(0) = A_\mu u_o$$

et $A_\mu u_\lambda$ borné, donc $A_\mu u_\lambda(t) = S_\lambda(t)A_\mu u_o$.

On a alors en utilisant l'accrétivité de A_λ et le lemme 1,

$$\frac{d^2}{dt^2}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)| \geqslant -|A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\lambda(t)| = -|S_\lambda(t)A_\lambda u_o - S_\lambda(t)A_\mu u_o|$$

$$\geqslant -|A_\lambda u_o - A_\mu u_o| .$$

Supposant $u_o \in D(A)$, $A_\lambda u_o \longrightarrow Au_o$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ et donc u_λ converge uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$; soit $u(t) = S(t)u_o$ sa limite.

On a $A_\lambda S_\lambda(t)u_o = S_\lambda(t)A_\lambda u_o \longrightarrow S(t)Au_o$ uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$. Donc $u \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;X)$ et $\frac{d^2u}{dt^2}(t) = S(t)\, Au_o$. Mais on a $A_\lambda S(t) = S(t)A_\lambda$ et donc $S(t)A = AS(t)$ ce qui achève la démonstration.

Remarque 9. On peut trouver simplement ce résultat en utilisant la théorie des puissances fractionnaires d'un opérateur ; cependant cette démonstration semble un moyen de développer d'une autre manière cette théorie.

II. Etude dans un espace de Hilbert.

Dans toute cette partie H désigne un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(.,.)$ et de norme $|.|$.

Nous nous donnons $(A(t))_{t\in]0,+\infty[}$ famille d'opérateurs monotones de H de domaine contenu dans un convexe fermé C . Nous supposons

(H1) p.p. $t \in]0,\infty[$, $\forall\, \lambda>0$, $R(I+\lambda A(t)) \supset C$.

(H2) Il existe $K : [0,+\infty[\longmapsto [0,+\infty[$ croissante telle que pour tout $u \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[;C) \cap L^\infty(0,\infty;C)$, pour tout $\lambda>0$, la fonction $t \longmapsto J_\lambda(t)u(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}u(t)$ soit mesurable et

$$\int_0^\infty (1+t^2)|J_\lambda(t+h)u(t)-J_\lambda(t)u(t)|dt \leqslant \lambda h K(\|u\|_\infty) , \ \forall\, h>0 .$$

(H3) Il existe $x_o \in C$ tel que $\int_0^\infty t|A(t)^o x_o|dt < +\infty$.

Remarquons que la condition (H2) implique que pour tout $x \in C$ et tout $\lambda > 0$, $t \longmapsto J_\lambda(t)x$ est à variation bornée. Posons $\tilde{J}_\lambda(t)x = \lim_{h \downarrow 0} \text{ess}\, J_\lambda(t+h)x$. La fonction $t \longmapsto \tilde{J}_\lambda(t)x$ est continue à droite ; $\tilde{J}_\lambda(t)x = J_\lambda(t)x$ p.p.t et donc pour $u \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$, $\tilde{J}_\lambda(t)u(t) = J_\lambda(t)u(t)$ p.p.t et $\forall \lambda > 0$; par passage à la limite la famille $\tilde{J}_\lambda(t)$ vérifie :

$$\tilde{J}_\lambda(t)x = \tilde{J}_\mu(t)\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}\tilde{J}_\lambda(t)x\right) \quad \forall t \geq 0 , \forall \lambda, \mu > 0 , \forall x \in C$$

$$(\tilde{J}_\lambda(t)x - \tilde{J}_\lambda(t)y, x-y) \geq |\tilde{J}_\lambda(t)x - \tilde{J}_\lambda(t)y|^2 \quad \forall t \geq 0 , \forall \lambda > 0 , \forall x, y \in C$$

il existe donc $\tilde{A}(t)$ monotone unique tel que $\tilde{J}_\lambda(t) = (I + \lambda\tilde{A}(t))^{-1}$.
La famille $(\tilde{A}(t))_{t \in [0,+\infty[}$ vérifie (H1,2,3) ; enfin si $u \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$, $\tilde{A}(t)u(t) = A(t)u(t)$ p.p.$t \in]0,+\infty[$. On peut donc supposer, sans restreindre la généralité, $A(t)$ défini pour tout $t \in [0,+\infty[$, $J_\lambda(t)$ défini pour tout $t \in [0,+\infty[$ et $t \longmapsto J_\lambda(t)x$ continue à droite pour tout $x \in C$.

Remarquons enfin que la condition (H2) implique aussi que pour tout $x \in C$, tout $\lambda > 0$, $|A(t)_\lambda x - A(s)_\lambda x| \leq K(|x|) \quad \forall s, t \geq 0$
et donc que $D(A(t))$ est indépendant de t ; nous noterons D ce domaine.

<u>Théorème 1. Sous les hypothèses précédentes, pour tout</u> $u_0 \in \bar{D}$ <u>il existe</u> $u \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ <u>unique telle que</u>

$$\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1_{loc}(0,+\infty;H) , \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t) \in A(t)u(t) \quad \text{p.p.} t \in]0,+\infty[$$

$u(0) = u_0$, u <u>borné</u>.

<u>De plus</u> $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$ <u>et</u> $\sqrt{t^3}\,\frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0,+\infty;H)$

<u>et si</u> $u_0 \in D$, $\frac{du}{dt}$ <u>et</u> $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0,\infty;H)$.

Démonstration du théorème 1. On peut toujours supposer $x_o = 0$.
D'après le corollaire I.4, pour tout $\lambda>0$, il existe $u_\lambda \in \mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ solution de $\frac{d^2u_\lambda}{dt^2} = A(t)_\lambda u_\lambda$, $u_\lambda(0) = 0$, u_λ borné. Nous savons de plus que $\|u_\lambda\|_\infty \leqslant |u_o| + \int_0^\infty t|A(t)_\lambda x_o|dt \leqslant M = |u_o| + \int_0^\infty t|A(t)^o x_o|dt$.
D'après (H2), $|A(t)_\lambda u_\lambda(t)| \leqslant |A(s)_\lambda x_o| + |A(s)_\lambda u_\lambda(t) - A(s)_\lambda x_o| + K(|u_\lambda(t)|)$ et donc utilisant (H3), $\|u_\lambda''\|_\infty \leqslant K(M) + \frac{M}{\lambda}$; en particulier u_λ' est continue sur $[0,+\infty[$. Enfin u_λ'' est continue à droite sur $[0,+\infty[$.

Estimations de u_λ'. On a
$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}|u_\lambda|^2 = \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + (A(t)_\lambda u_\lambda, u_\lambda) \geqslant \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + (A(t)_\lambda x_o, u_\lambda).$$
On en tire $\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}|u_\lambda|^2 \geqslant -M|A(t)^o x_o|$ et donc
$\frac{1}{2}|u_\lambda|^2 - M\int_0^t\int_s^{+\infty}|A(\tau)^o x_o|d\tau\, ds$ est convexe; étant bornée elle est décroissante et donc $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}|u_\lambda|^2 = (u_\lambda', u_\lambda) \leqslant M\int_t^{+\infty}|A(\tau)^o x_o|d\tau$. En particulier $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t(u_\lambda'(t), u_\lambda(t)) \leqslant 0$.

Donnons-nous $\gamma : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ croissante de classe C^2.
On a $\int_0^T \gamma(t)|u_\lambda'(t)|^2 dt \leqslant M\int_0^T \gamma(t)|A(t)^o x_o| + \int_0^T \gamma(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}|u_\lambda|^2$, d'où en intégrant deux fois par parties
$$\int_0^T \gamma(t)|u_\lambda'(t)|^2 dt \leqslant M\int_0^T \gamma(t)|A(t)^o x_o| + \gamma(T)(u_\lambda'(T), u_\lambda(T)) \quad \gamma(0)(u_\lambda'(0), u_o)$$
$$- \gamma'(T)\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \gamma'(0)\frac{1}{2}|u_o|^2 + \int_0^T \gamma''(t)|u_\lambda(t)|^2 dt.$$
Prenant $\gamma(t) = 1$, on obtient
$$(1) \quad \int_0^\infty t|u_\lambda'(t)|^2 dt \leqslant M\int_0^\infty t|A(t)^o x_o|dt + \frac{1}{2}|u_o|^2 = M_1.$$
Prenant $\gamma(t) = t$, on a
$$(2) \quad \int_0^\infty |u_\lambda'(t)|^2 dt \leqslant M\int_0^\infty |A(t)^o x_o|dt - (u_\lambda'(0), u_o) = M_2 - (u_\lambda'(0), u_o).$$

où $M_2 = M\int_0^\infty |A(t)^\circ x_o|\,dt \leq M(\int_1^\infty t\,|A(t)^\circ x_o|\,dt + K(0))$.

Estimations de u''_λ . On a

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 = |u'_\lambda(t+h)-u'_\lambda(t)|^2 + (A_\lambda(t+h)u_\lambda(t+h)-A_\lambda(t)u_\lambda(t),$$
$$u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)) \geq |u'_\lambda(t+h)-u'_\lambda(t)|^2$$
$$+ (A_\lambda(t+h)u_\lambda(t)-A_\lambda(t)u_\lambda(t), u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)) .$$

Multipliant par γ et intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^T \gamma(t)|u'_\lambda(t+h)-u'_\lambda(t)|^2 dt \leq K(M) \sup_{[0,T]} \frac{\gamma(t)}{1+t^2}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|$$
$$+ \gamma(T)(u'_\lambda(T+h)-u'_\lambda(T), u_\lambda(T+h)-u_\lambda(T)) - \gamma(0)(u'_\lambda(h)-u'_\lambda(0), u_\lambda(h)-u_\lambda(0))$$
$$- \gamma'(T)\frac{1}{2}|u_\lambda(T+h)-u_\lambda(T)|^2 + \gamma'(0)\frac{1}{2}|u_\lambda(h)-u_\lambda(0)|^2$$
$$+ \int_0^T \gamma''(t)\frac{1}{2}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 dt ,$$

divisant par h^2 et faisant $h \downarrow 0$, on obtient donc

$$\int_0^T \gamma(t)|u''_\lambda(t)|^2 dt \leq K(M) \sup_{[0,T]} \frac{\gamma(t)}{1+t^2}|u'_\lambda(t)| + \gamma(T)(u''_\lambda(T), u'_\lambda(T))$$
$$- \gamma(0)(A(0)_\lambda u_o, u'_\lambda(0)) + \frac{1}{2}\gamma'(0)|u'_\lambda(0)|^2 + \int_0^T \gamma''(t)\frac{1}{2}|u'_\lambda(t)|^2 dt .$$

Prenant d'abord $\gamma(t) = 1$, on obtient puisque $\underline{\lim}_{t\to\infty} (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t)) \leq 0$ car $u''_\lambda \in L^\infty$ et $u'_\lambda \in L^2$,

$$\int_0^\infty |u''_\lambda(t)|^2 dt \leq K(M) \sup_{[0,+\infty[} \frac{|u'_\lambda(t)|}{1+t^2} - (A(0)_\lambda u_o, u'_\lambda(0)) .$$

Or $|u'_\lambda(t)|^2 \leq 2(\int_t^{+\infty} |u'_\lambda(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}(\int_t^{+\infty}|u''_\lambda(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$, d'où

$$\|u''_\lambda\|_2^2 \leq K(M)\sqrt{2}\,\|u'_\lambda\|_2^{1/2}\|u''_\lambda\|_2^{1/2} - (A(0)_\lambda u_o, u'_\lambda(0)) \quad \text{et}$$

(3) $$\|u''_\lambda\|_2 \leq (N_o\, K(M)^{1/3}\|u'_\lambda\|_2^{1/6} + |(A(0)_\lambda u_o, u'_\lambda(0))|^{1/4})^2$$

où N_o est une constante numérique $(N_o = \frac{2^{1/6}(\sqrt{7}+1)}{4^{1/3}})$.

Prenons $\gamma(t) = (1+t)^\alpha$ avec $\alpha>0$. On a

$$\int_0^T (1+t)^\alpha |u''_\lambda(t)|^2 dt \leqslant K(M) \sup_{[0,T]} \frac{(1+t)^\alpha}{1+t^2}|u'_\lambda(t)| + (1+T)^\alpha (u''_\lambda(T), u'_\lambda(T))$$

$$- (A(0)_\lambda u_0, u'_\lambda(0)) + \frac{1}{2}(u'_\lambda(0))^2 + \int_0^T \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+t)^{\alpha-2}|u'_\lambda(t)|^2 dt .$$

Puisque $(1+t)^{1/2}u'_\lambda(t) \in L^2$,

on a $(1+t)^{\alpha-3/2}u''_\lambda(t) \in L^2 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} (1+t)^\alpha (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t)) \leqslant 0$,

d'autre part

$$(1+t)^{\alpha-2}(u'_\lambda(t)) \leqslant \sqrt{2}\left(\int_t^{+\infty}(1+t)|u'_\lambda(t)|^2 dt\right)^{1/4}\left(\int_t^{+\infty}(1+t)^{2\alpha-3/2}|u''_\lambda(t)|^2 dt\right)^{1/4},$$

donc $(1+t)^{\alpha-3/4}u''_\lambda(t) \in L^2 \Longrightarrow \dfrac{(1+t)^\alpha}{1+t^2}|u'_\lambda(t)| \in L^\infty$; enfin

$$\alpha\leqslant 3 \Longrightarrow \overline{\lim_{T\to\infty}} \int_0^T \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+t)^{\alpha-2}|u'_\lambda(t)|^2 dt < +\infty .$$

En définitive si $\alpha\leqslant 3$, $(1+t)^{\alpha-3/2}u''_\lambda(t) \in L^2 \Longrightarrow (1+t)^{\alpha/2}u''_\lambda(t) \in L^2$.

On en déduit $(1+t)^{\alpha/2}u'_\lambda \in L^2$ pour tout $\alpha<3$.

On a alors $(1+t)^{\alpha-2}|u'_\lambda(t)| \leqslant \sqrt{2}\|(1+t)^{1/2}u'_\lambda\|_2^{1/2}\|(1+t)^{\alpha/2}u''_\lambda\|_2^{1/2}$ et donc $\|(1+t)^{\alpha/2}u''_\lambda\|_2$ borné indépendamment de α. On en déduit $(1+t)^{3/2}u''_\lambda \in L^2$.

Estimons alors $\|t^{3/2}u''_\lambda\|_2$. Prenant $\gamma(t) = t^3$, on a

$$\int_0^\infty t^3|u''_\lambda(t)|^2 dt \leqslant K(M)\sqrt{2}\|\sqrt{t}u'_\lambda\|_2^{1/2}\|t^{3/2}u''_\lambda\|_2^{1/2} + \int_0^\infty 3t|u'_\lambda(t)|^2 dt ,$$

et donc

(4) $\|t^{3/2}u''_\lambda\|_2 \leqslant M_3$ ne dépendant que de $K(M)$ et M_1

$(M_3 = (N_0\ K(M)^{1/3}\ M_1^{1/2} + M_1^{1/4})^2$.

On a $\qquad t|u'_\lambda(t)| \leqslant \sqrt{2}\|\sqrt{t}u'_\lambda\|_2^{1/2}\|t^{3/2}u''_\lambda\|_1^{1/2}$, et donc

(5) $\qquad t|u'_\lambda(t)| \leqslant M_4$ avec $M_4 = M_1^{1/4} - M_3^{1/2}$.

Faisant $\gamma(t) = t$, on a

(6) $$\int_0^{\infty} t\,|u''_\lambda(t)|^2 dt \leq K(M)\, M_4 + \frac{1}{2}|u'_\lambda(0)|^2$$

<u>Estimation de</u> $u'_\lambda(0)$. On a

$|u'_\lambda(0)|^2 \leq 2\,\|u'_\lambda\|_2\,\|u''_\lambda\|_2$, d'où utilisant (2) et (3),

$$|u'_\lambda(0)| \leq \sqrt{2}(M_2+|u'_\lambda(0)|\,|u_o|)^{1/4}(N_o K(M)^{1/3}(M_2+|u'_\lambda(0)|\,|u_o|)^{1/12} + |A(0)_\lambda u_o|^{1/4}|u'_\lambda(0)|^{1/4})$$

et donc si $u_o \in D$

(7) $|u'_\lambda(0)| \leq M_5$ dépendant de M_2, $K(M)$, $|u_o|$ et $|A(0)^o u_o|$.

<u>Passage à la limite</u>. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \geq (A(t)_\lambda u_\lambda(t)-A(t)_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$
$$\geq (A(t)_\lambda u_\lambda(t)-A(t)_\mu u_\mu(t), \lambda A(t)_\lambda u_\lambda(t)-\mu A(t)_\mu u_\mu(t))$$
$$\geq \frac{\lambda-\mu}{2}[|A(t)_\lambda u_\lambda(t)-A(t)_\mu u_\mu(t)|^2+|A(t)_\lambda u_\lambda(t)|^2 - |A(t)_\mu u_\mu(t)|^2]$$

d'où

$$|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leq (\lambda-\mu)\int_0^t ds\int_s^{+\infty}\{|A(\tau)_\mu u_\mu(\tau)|^2-|A(\tau)_\lambda u_\lambda(\tau)|^2 - |A(\tau)_\lambda u_\lambda(\tau)-A(\tau)_\mu u_\mu(\tau)|^2\}d\tau$$

et donc pour $\lambda \geq \mu > 0$,

(8) $$|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leq (\lambda-\mu)\int_0^t ds\int_s^{+\infty}|A(\tau)_\mu u_\mu(\tau)|^2 d\tau \leq (\lambda-\mu)\int_0^{\infty} t\,|u''_\lambda(t)|^2 dt.$$

Supposant $u_o \in D$, on a donc d'après (6) et (7), u_λ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ sa limite.

D'autre part on a pour tout $t>0$,

$$\int_0^t ds\int_s^{+\infty}|A(\tau)_\lambda u_\lambda(\tau)|^2 d\tau \uparrow \text{ lorsque } \lambda\downarrow$$

et pour $\lambda \geq \mu > 0$,

$$\int_0^t ds\int_s^{+\infty}|A(\tau)_\lambda u_\lambda(\tau)-A(\tau)_\mu u_\mu(\tau)|^2 d\tau \leq \int_0^t ds\int_s^{+\infty}|A(\tau)_\lambda u_\lambda(\tau)|^2 d\tau - \int_0^t ds\int_s^{+\infty}|A(\tau)_\mu u_\mu(\tau)|^2 d\tau ,$$

d'où faisant tendre $t \to +\infty$ et divisant par t et faisant $t \to 0$,

$$\int_0^\infty (1+t)|A(t)_\lambda u_\lambda(t)|^2 dt \uparrow \quad \text{lorsque} \quad \lambda \downarrow 0$$

et pour $\lambda \geq \mu > 0$,

$$\int_0^\infty (1+t)|A(t)_\lambda u_\lambda(t) - A(t)_\mu u_\mu(t)|^2 dt \leq \int_0^\infty (1+t)|A(t)_\lambda u_\lambda(t)|^2 dt - \int_0^\infty (1+t)|A(t)_\mu u_\mu(t)|^2 dt .$$

Lorsque $u_0 \in D$, $\int_0^\infty (1+t)|A(t)_\lambda u_\lambda(t)|^2 dt$ est borné d'après (3), (6), (7) et donc $\sqrt{(1+t)}A_\lambda(t)u_\lambda(t)$ converge fortement dans $L^2(0,+\infty;H)$.
Donc $\sqrt{(1+t)}u''_\lambda(t) \to \sqrt{(1+t)}u''$ dans $L^2(0,\infty;H)$.
Enfin $|J_\lambda(t)u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| \leq \lambda|A(t)_\lambda u_\lambda(t)|$ et donc $J_\lambda(t)u_\lambda(t) \to u(t)$ dans $L^2_{loc}([0,+\infty[;H)$. Ceci montre que $u''(t) \in A(t,u(t))$ p.p. $t \in]0,+\infty[$, car l'opérateur $A(t)$ est fermé dans H.

Considérons alors $u_0 \in \overline{D}$. Etant donné $\hat{u}_0 \in \overline{D}$ et $\hat{u}_\lambda$ la solution correspondante on a $\|\hat{u}-u\|_\infty \leq |u_0 - \hat{u}_0|$; donc u converge uniformément sur $[0,+\infty[$; soit u sa limite.

Soient $\delta > 0$ et $\lambda_n \downarrow 0$. Il existe d'après (4) $t_0 \in]0,\delta[$ tel que $|A_{\lambda_n}(t_0)\, u_{\lambda_n}(t_0)|$ soit borné et donc $u(t_0) \in D$. Considérons $v_\lambda \in \mathscr{C}([t_0,+\infty[;C)$ tel que $\frac{d^2 v_\lambda}{dt^2}(t) = A(t)_\lambda v_\lambda(t)$, $v_\lambda(t_0) = u(t_0)$, v_λ borné. On a $|v_\lambda(t) - u_\lambda(t)| \leq |u(t_0) - u_\lambda(t_0)|$ $\forall t \geq t_0$, et donc $v_\lambda \to u$ uniformément sur $[t_0,+\infty[$. D'où puisque $u(t_0) \in D$, $u'' \in L^2(t_0,+\infty;H)$ et $u''(t) \in A(t,u(t))$ p.p. $t \in]0,+\infty[$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 2</u>. On obtiendrait le même résultat en prenant à la place de la condition (H2) la condition :

(H2') Il existe $K : [0,+\infty[\mapsto [0,+\infty[$ croissante telle que pour tout $x \in C$, tout $\lambda > 0$,

$$t \mapsto J_\lambda(t)x \quad \text{est dans} \quad W^{1,2}(0,\infty;H)$$

et $$\int_0^\infty (1+t^2)\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_\lambda(t)x\right| dt \leq \lambda K(|x|) .$$

<u>Corollaire 3.</u> <u>Soient</u> A <u>un opérateur maximal monotone de</u> H <u>avec</u> $0\in R(A)$, <u>et</u> $f : [0,+\infty[\longmapsto H$ <u>mesurable vérifiant</u>

$$\int_0^\infty t|f(t)|dt < +\infty$$

$$\int_0^\infty (1+t^2)|f(t+h)-f(t)|dt < +\infty \quad \forall\, h>0 .$$

<u>Pour tout</u> $u_0\in\overline{D(A)}$, <u>il existe</u> $u\in\mathcal{C}([0,+\infty[;H)$ <u>unique tel que</u>

$$\frac{d^2u}{dt^2}\in L^1_{loc}(0,+\infty;H) , \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t)\in Au(t) + f(t) \quad p.p.\, t\in]0,+\infty[$$

$u(0) = u_0$, u <u>borné</u>.

<u>On a de plus</u> $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$ <u>et</u> $\sqrt{t^3}\,\frac{d^2u}{dt^2}$ <u>dans</u> $L^2(0,\infty;H)$

<u>et si</u> $u_0\in D(A)$, $\frac{du}{dt}$ <u>et</u> $\frac{d^2u}{dt^2}\in L^2(0,\infty;H)$.

<u>Remarque 4.</u> Etant donné A maximal monotone avec $0\in R(A)$ et $f : [0,\infty[\longrightarrow H$ mesurable vérifiant $\int_0^\infty t|f(t)|dt < +\infty$, on peut définir une solution faible au sens de [5] du problème $\frac{d^2u}{dt^2}\in A + f$, $u(0) = u_0$, u borné. D'après (1) cette solution vérifie $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}\in L^2(0,\infty;H)$.

<u>Corollaire 5.</u> <u>Soit</u> C <u>convexe fermé borné et</u> A <u>un opérateur monotone de</u> H <u>telle que pour tout</u> $\lambda>0$, $(I+\lambda A)(C)\supset C$. <u>Alors pour tout</u> $u_0\in\overline{D(A)}\cap C$, <u>il existe</u> $u\in\mathcal{C}([0,+\infty[;C)$ <u>unique solution de</u>

$$\frac{d^2u}{dt^2}\in Au , \ u(0) = u_0 , \ u \ \underline{\text{borné}}.$$

Suivant [1] et [2] étant donné A maximal monotone avec $0\in R(A)$, nous noterons $S_{1/2}(t)u_0$ la solution de $\frac{d^2u}{dt^2}\in Au$, $u(0) = u_0$, u borné.

$S_{1/2}(t)$ est un semi-groupe de contraction sur $\overline{D(A)}$, on note $A_{1/2}$ son générateur.

Posant $D_\alpha = \{u_o \in \overline{D(A)} \ ; \ t^\alpha \frac{d^2}{dt^2} S_{1/2}(t)u_o \in L^2(0,+\infty;H)\}$, on a à partir des estimations de la démonstration du théorème 1, les inclusions suivantes :

- D_α croît lorsque α croît de 0 à $3/2$ et $D_{3/2} = \overline{D(A)}$.
- $D(A) \subset D_o$.
- $\bigcup_{\alpha<1/2} D_\alpha \subset D(A_{1/2}) \subset D_{1/2}$
- $D_\alpha = \{u_o \in \overline{D(A)} \ ; \ t^{\alpha-1} \frac{d}{dt} S_{1/2}(t)u_o \in L^2(0,\infty;H)\}$, $\forall \alpha > 1/2$.

Considérant $S_{\lambda,1/2}(t)$ le semi-groupe engendré par $(A_\lambda)_{1/2} = A_{\lambda,1/2}$, on a obtenu les convergences :

- $\|\frac{d^2}{dt^2} S_{\lambda,1/2}(t)u_o\|_2 \uparrow \|\frac{d^2}{dt^2} S_{1/2}(t)u_o\|_2$ lorsque $\lambda \downarrow 0$, $\forall u_o \in \overline{D(A)}$
- $\|\sqrt{t} \frac{d^2}{dt^2} S_{\lambda,1/2}(t)u_o\|_2 \uparrow \|\sqrt{t} \frac{d^2}{dt^2} S_{1/2}(t)u_o\|_2$ lorsque $\lambda \downarrow 0$, $\forall u_o \in \overline{D(A)}$
- $t^{3/2} \frac{d^2}{dt^2} S_{\lambda,1/2}(t)u_o \longrightarrow t^{3/2} \frac{d^2}{dt^2} S_{1/2}(t)u_o$ dans $L^2(0,\infty;H)$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$.
- $S_{\lambda,1/2}(t)u_o \longrightarrow S_{1/2}(t)u_o$ uniformément lorsque $\lambda \longrightarrow 0$

et si $u_o \in D(A)$, $|S_{\lambda,1/2}(t)u_o - S_{1/2}(t)u_o| \leq \sqrt{\lambda |A^o u_o| \operatorname{dist}(u_o, A^{-1}0)}$, $\forall t \geq 0$, $\forall \lambda > 0$.

- $S_{1/2}(t)u_o \in D(A_{1/2})$, $\forall t > 0$ et $|A^o_{1/2} S_{1/2}(t)u_o| \leq \frac{1}{t} \operatorname{dist}(u_o, A^{-1}0)$.
- $A_{\lambda,1/2}u_o$ borné $\Longrightarrow u_o \in D(A_{1/2})$.

Il serait intéressant de démontrer la réciproque. Notons qu'elle est vraie lorsque $A = \partial\phi$ avec ϕ convexe s.c.i. propre positive, car alors $|A_{\lambda,1/2}u_o| = \sqrt{2\phi_\lambda(u_o)} \uparrow$ lorsque $\lambda \downarrow$. On a alors $A_{\lambda,1/2}u_o \longrightarrow A^o_{1/2}u_o$.

<u>Théorème 6. Etant donné</u> R <u>un espace métrique</u>, C <u>un convexe fermé de</u> H , $(A^\rho(t))_{(t,\rho)\in[0,+\infty[\times R}$ <u>famille d'opérateurs monotones de domaine contenu dans</u> C <u>vérifiant</u> :

- $\forall \rho$, $\forall t$, $\forall \lambda>0$, $R(I+\lambda A^\rho(t)) \supset C$.
- il existe $K : [0,+\infty[\longmapsto [0,+\infty[$ croissante telle que

$$\forall \lambda>0 \ , \ \forall \rho \ , \ \forall u \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[;C) \cap L^\infty(0,\infty;C) \ ,$$

$$t \longmapsto J^\rho_\lambda(t)\, u(t) \ \text{est mesurable et continue à droite}$$

et $\int_0^\infty (1+t^2)|J^\rho_\lambda(t+h)\, u(t) - J^\rho_\lambda(t)\, u(t)|dt \leq \lambda h\, K(\|u\|_\infty)$, $\forall h>0$

et donc $D(A^\rho(t))$ est indépendant de t ; on le notera D_ρ .
- il existe $\rho \longrightarrow x^\rho_o$ borné et K_o constante tels que

$$\int_0^\infty t|A^\rho(t)^o x^\rho_o|dt \leq K_o \ , \quad \forall \rho$$

- $\forall \lambda>0$, $\forall t$, $\forall \rho \longmapsto x^\rho$ continu avec $x^\rho \in \overline{D_\rho}$ pour tout ρ , on a $\rho \longmapsto J^\rho_\lambda(t)x^\rho$ continue.

Alors pour tout $\rho \longmapsto u^\rho_o$ continu avec $u^\rho_o \in \overline{D_\rho}$ pour tout ρ , les applications $\rho \longmapsto u^\rho$ et $\rho \longmapsto \frac{du^\rho}{dt}$ sont continues de R dans $\mathscr{C}([0,+\infty[;C)$ et $\mathscr{C}(]0,+\infty];C)$ respectivement muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, où u^ρ est la solution de $\frac{d^2u^\rho}{dt^2} \in A^\rho(t)u^\rho$, $u^\rho(0) = u^\rho_o$, u^ρ borné.

Notons tout de suite le corollaire compte tenu des résultats de [6].

Corollaire 7. Soient A^n , A opérateurs maximaux monotones de H vérifiant : $0 \in R(A)$, $0 \in R(A^n)$ et $((A^n)^{-1})^o(0)$ est borné, $D(A) \subset \bigcap_n \overline{D(A^n)}$, $J^n_\lambda x \longrightarrow J_\lambda x$, $\forall \lambda>0$, $\forall x \in D(A)$.

Alors $(I+\lambda A^n_{1/2})^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda A_{1/2})^{1}x$, $\forall \lambda>0$, $\forall x \in \overline{D(A)}$.

Démonstration du théorème 6. Soit $\rho_n \longrightarrow \rho_o$. Posant $A^n(t) = A^{\rho_n}(t)$, $A(t) = A^{\rho_o}(t)$, $x^n_o = x^{\rho_n}_o$, $x_o = x^{\rho_o}_o$, $u^n_o = u^{\rho_n}_o$, $u_o = u^{\rho_o}_o$.

Fixons $T>0$.

Fixons $\lambda \in]0,1]$ et soit $v^n_o = (I+\lambda A^n(0))^{-1}u^n_o$, $v_o = (I+\lambda A(0))^{-1}u_o$

Considérons u, u_n, v, v_n les solutions respectives de $\frac{d^2u}{dt^2} \in A(t)u$, $\frac{d^2u_n}{dt^2} \in A^n(t)u_n$, $\frac{d^2v}{dt^2} = A(t)_\lambda v$, $\frac{d^2v_n}{dt^2} = A^n(t)_\lambda v_n$ qui sont bornées et prennent les valeurs respectives u_o, u_o^n, v_o, v_o^n pour $t=0$.

On a $\|v_n - x_o^n\|_\infty \leq |v_o^n - x_o^n| + K_o$, $\|u_n - x_o^n\|_\infty \leq |u_o^n - x_o^n| + K_o$, $\|v - x_o\|_\infty \leq |v_o - x_o| + K_o$. Par ailleurs $|v_o^n - x_o^n| \leq |u_o^n - x_o^n| + \lambda K(|x_o^n|)$, donc il existe M indépendant de n et λ majorant toutes fonctions $|u|$, $|u_n|$, $|v|$, $|v_n|$.

D'après (8), (6) et (7) on a

$$\|u_n - v_n\|_\infty \leq |u^n - v_o^n| + \lambda^{1/2}(C_1 + C_2|A^n(0)^o v_o^n|^{1/2})$$

$$\|u - v\|_\infty \leq |u_o - v_o| + \lambda^{1/2}(C_1 + C_2|A(0)^o v_o|^{1/2})$$

où C_1 et C_2 sont indépendants de λ et n.

D'autre part on a $\frac{d^2}{dt^2}|v_n(t) - v(t)| \geq -|A^n(t)_\lambda v - A(t)_\lambda v|$.

Fixons $L \geq T$ et posons $M_n = \sup\limits_{[o,L]} |A^n(t)_\lambda v - A(t)_\lambda v|$; remarquons que M_n dépend de λ et L, mais que pour λ et L fixés, $M_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. On a

$$\|v_n - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq |v_o^n - v_o| + \frac{|v_n(L) - v(L)|T}{L} + \frac{LT}{2}$$

$$\leq |v_o^n - v_o| + \frac{2MT}{L} + M_n \frac{LT}{2}.$$

Utilisant toutes ces estimations on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n - u\|_{L^\infty(0,T)} \leq 2|u_o - v_o| + 2\lambda^{1/2}(C_1 + C_2|A(0)\ v_o|^{1/2}) + \frac{2MT}{L}$$

car $|A^n(0)^o v_o^n| \leq |A^n(0)_\lambda u_o^n| \longrightarrow |A(0)_\lambda v_o|$.

Ceci étant vrai pour tout $\lambda > 0$ et tout $L \geq T$, on a $u_n \longrightarrow u$ uniformément sur $[0,T]$.

Références.

[1] V. Barbu. A class of boundary problems for second order abstract differential equations. C.R.A.S. 2 janvier 72.

[2] H. Brézis. Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones (à paraître).

[3] J.J. Moreau. Fonctionnelles convexes. Collège de France (1967).

[4] H. Brézis. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Cours de 3ème cycle rédigé par Ph. Bénilan. Paris 1971.

[5] Ph. Bénilan et H. Brézis. Solutions faibles d'équation d'évolution dans un espace de Hilbert. Ann. Inst. Fourier <u>22</u> (72). pp. 311-329.

[6] Ph. Bénilan. Une remarque sur la convergence des semi-groupes non linéaires. C.R.A.S. <u>272</u> (71). pp. 1182-1184.

-:-:-:-:-:-