

Publications Mathématiques d'Orsay

ALGÈBRES TENSORIELLES
ET
ANALYSE HARMONIQUE

Par

N.Th. VAROPOULOS

année 1967-1968

Notes rédigées par Mesdames CHAUVÉ et LUST

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences

91-ORSAY (France)

Publications Mathématiques d'Orsay

ALGÈBRES TENSORIELLES
ET
ANALYSE HARMONIQUE

Par

N.Th. VAROPOULOS

année 1967-1968

Notes rédigées par Mesdames CHAUVÉ et LUST

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Chapitre I

I - Produit tensoriel topologique de deux espaces vectoriels topologiques localement convexes [1]

Définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels E, F sur un corps K .

Théorème : Soient E, F deux espaces vectoriels. Il existe un espace vectoriel noté $E \otimes F$ unique à un isomorphisme près, et une application bilinéaire

$\pi : E \times F \longrightarrow E \otimes F$ tels que

$$\forall G \quad \forall f \in \mathcal{B}(E \times F, G) \quad \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}(E \otimes F, G) \quad f = \tilde{f} \circ \pi$$

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{f} & G \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ E \otimes F & & \end{array}$$

unicité : soient $E \otimes F$ et \mathcal{G} répondant à la question.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{P} & \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ E \otimes F & & \end{array}$$

$$P = \tilde{P} \circ \pi$$

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ P$$

$$\text{d'où } \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ \tilde{P} \circ \pi$$

$$\tilde{\pi} \circ P = \text{Id}_{E \otimes F}$$

$E \otimes F$ et \mathcal{G} sont donc isomorphes.

existence : Soit $K^{(E \times F)}$ l'espace vectoriel sur K des combinaisons linéaires d'éléments de $E \times F$.

Soit f une application quelconque : $E \times F \longrightarrow G$

f est prolongeable en \bar{f} linéaire : $\bar{f} : K^{(E \times F)} \longrightarrow G$ et ce prolongement est

unique :

$$z = \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{xy} f(x,y) \quad \alpha_{x,y} = 0 \text{ sauf en un nombre fini de points.}$$

$$\bar{f}(z) = \sum \alpha_{xy} f(x,y)$$

f est bilinéaire si et seulement si \bar{f} est nulle sur les éléments de la forme

$$(\lambda x + \lambda' x', \mu y + \mu' y') - \lambda \mu(x,y) - \lambda \mu'(x,y') - \lambda' \mu(x',y) - \lambda' \mu'(x',y')$$

sur l'espace vectoriel H où s'annulent toutes les formes bilinéaires.

$$\begin{array}{ccccc} E \times F & \longrightarrow & K(E \times F) & \xrightarrow{\bar{f}} & G \\ & \searrow & \downarrow \theta & & \nearrow \tilde{f} \\ & & K(E \times F) & & \\ & & \swarrow H & & \end{array}$$

il existe \tilde{f} linéaire telle que $\bar{f} = \tilde{f} \circ \theta$. Soit π la restriction de θ à

$E \times F$. On a donc $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Remarque : Dans $E \otimes F$, $(\lambda x + \mu x') \otimes y = \lambda(x \otimes y) + \mu(x' \otimes y)$

en particulier $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$

$\forall z \in E \otimes F \quad z = \sum_i x_i \otimes y_i$ la décomposition n'est pas unique.

Définition du produit tensoriel topologique de deux EVT localement convexes. [5]

Théorème : E, F, G est localement convexes.

Il existe sur $E \otimes F$ une seule topologie localement convexe telle que

pour tout G et toute f bilinéaire continue appartenant à

$\mathcal{B}(E \times F, G)$ il existe \tilde{f} linéaire continue appartenant à $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$

avec $f = \tilde{f} \circ \pi$. Alors la topologie ainsi définie est la plus fine

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{f} & G \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ E \otimes F & & \end{array}$$

pour laquelle π soit continue.

Unicité :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\pi'} & (E \otimes F)_{\mathcal{C}'} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ (E \otimes F)_{\mathcal{C}} & & \end{array}$$

π' supposée continue est l'application canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_{\mathcal{C}'}$,

Donc $\tilde{\pi}'$ est continue c'est-à-dire \mathcal{C}

est plus fine que \mathcal{C}' . Inversement \mathcal{C}'

est plus fine que \mathcal{C} donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Existence : $\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right.$ parcourant un système fondamental de voisinage de 0 dans $\left\{ \begin{array}{l} E \\ F \end{array} \right.$
 $\Gamma(U \otimes V)$ enveloppe convexe équilibrée de $U \otimes V$ parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes F$ et définit une topologie localement convexe dans $E \otimes F$.

Soit f continue : $\forall W$ (voisinage convexe équilibré de 0 dans G)

$\exists \left\{ \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right.$ (voisinage de 0 dans $\left\{ \begin{array}{l} E \\ F \end{array} \right.$) tels que $\tilde{f}(U \otimes V) = f(U, V) \subset W$

W étant convexe équilibré, $\tilde{f}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$

C'est la topologie la plus fine pour laquelle π est continue :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\pi} & (E \otimes F)_{\mathcal{C}} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} = \text{Id} & \\ (E \otimes F)_{\mathcal{C}} & & \end{array}$$

l'identité $\tilde{\pi}$ est continue donc provient d'une application bilinéaire continue, qui est π .

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\pi} & (E \otimes F)_{\mathcal{C}'} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ (E \otimes F)_{\mathcal{C}} & & \end{array}$$

Soit \mathcal{C}' telle que π soit continue.

Alors $\tilde{\pi}$ est continue $\Leftrightarrow \mathcal{C}'$ est moins fine que \mathcal{C} .

Définition : La topologie définie sur $E \otimes F$ est appelée topologie tensorielle projective, et $(E \otimes F)_\tau$ produit tensoriel topologique.

II - Produit tensoriel de deux espaces vectoriels normés. Définition de la norme projective (π)

Soient E, F des espaces vectoriels normés.

On va définir dans $E \otimes F$ une norme N telle que pour tout espace vectoriel normé G et pour toute application f continue de $\mathcal{B}(E \times F, G)$ on ait $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ et \tilde{f} continu.

La topologie définie par cette norme vérifie les propriétés de la topologie projective donc lui est identique. Supposons que N existe. Alors :

π a pour norme 1 :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\pi} & (E \otimes F)_N \\ \pi \downarrow & & \nearrow \tilde{\pi} \\ (E \otimes F)_\tau & & \end{array}$$

$\tilde{\pi}$ étant l'identité, $\|\tilde{\pi}\| = 1$ entraîne $\|\pi\| = 1$.

unicité de la norme :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\pi'} & (E \otimes F)_{N'} \\ \pi \downarrow & & \nearrow \tilde{\pi}' \\ (E \otimes F)_N & & \end{array}$$

$\|\pi'\| = 1$ entraîne $\|\tilde{\pi}'\| = 1$ c'est-à-dire $N' \leq N$

Inversement $\|\pi\| = \|\tilde{\pi}\| = 1$ entraîne $N \leq N'$ d'où $N = N'$

existence :

$$\forall x \in E \otimes F \quad x = \sum_{\nu} e_{\nu} \otimes f_{\nu} \quad (\text{nombre fini de termes})$$

on prend pour norme N

$$\|x\|_{\pi} = \inf_{\text{pour toutes les décompositions de } x} \left(\sum_{\nu} \|e_{\nu}\| \|f_{\nu}\| \right)$$

C'est la norme induite par celle de $E \times F$ dans $E \otimes F$ qui a été définie comme espace quotient.

Soient f une application bilinéaire continue, \tilde{f} l'application linéaire sur $E \otimes F$ associée

$$\|\tilde{f}(x)\| = \left\| \sum_{\nu} \tilde{f}(e_{\nu} \otimes f_{\nu}) \right\| = \left\| \sum_{\nu} f(e_{\nu}, f_{\nu}) \right\| \leq \|f\| \sum_{\nu} \|e_{\nu}\| \|f_{\nu}\|$$

$$\text{donc } \|\tilde{f}(x)\| \leq \|f\| \|x\|_{\pi} \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$$

$$\text{D'autre part } \|\tilde{f}(e \otimes f)\|_{\pi} \leq \|\tilde{f}\|_{\pi} \leq \|\tilde{f}\| \|e\| \|f\|$$

$$\text{Donc } \|f\| \leq \|\tilde{f}\| \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Définition : Cette norme est appelée norme projective.

Définition du produit tensoriel de deux applications linéaires continues :

Soient E_i, F_i ($i = 1, 2$) des espaces vectoriels normés.

$u_i : E_i \rightarrow F_i$ des applications linéaires continues.

$u_1 \otimes u_2$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{u_1 \times u_2} & F_1 \times F_2 \\ & \searrow f & \\ E_1 \otimes E_2 & \xrightarrow{\tilde{f} = u_1 \otimes u_2} & F_1 \otimes F_2 \end{array}$$

$$\text{où } f(x_1, x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2) = (u_1 \otimes u_2)(x_1 \otimes x_2).$$

$$\text{Alors } \|f\| = \sup_{\substack{\|x_1\| \leq 1 \\ \|x_2\| \leq 1}} \|u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)\| \leq \sup_{\|x_1\| \leq 1} \|u_1(x_1)\| \sup_{\|x_2\| \leq 1} \|u_2(x_2)\|$$

d'après la définition de la norme projective.

$$\|f\| \leq \|u_1\| \|u_2\|$$

f est bilinéaire continue, donc \tilde{f} existe et $\|\tilde{f}\| = \|u_1 \otimes u_2\| = \|f\| \leq \|u_1\| \|u_2\|$.

Remarque : Soient $x \in E$, $y \in F$ (E, F espaces vectoriels normés). On a

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|.$$

- $\|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|$ par définition.

- D'après le théorème de Hahn-Banach $x' \in E'$ tels que $\|x'\| = \|y'\| = 1$
 $y' \in F'$

$$\text{et } \langle x', x \rangle = \|x\| \quad \langle y', y \rangle = \|y\|$$

$$|\langle x' \otimes y', x \otimes y \rangle| \leq \|x' \otimes y'\| \|x \otimes y\| \leq \|x \otimes y\|$$

$$\text{or } |\langle x' \otimes y', x \otimes y \rangle| = |\langle x', x \rangle \langle y', y \rangle| = \|x\| \|y\|.$$

Proposition : $\|u_1 \otimes u_2\| = \|u_1\| \|u_2\|$.

$$\|u_1 \otimes u_2\| = \sup_{\substack{\|x_1\| \leq 1 \\ \|x_2\| \leq 1}} \|u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)\| = \|u_1\| \|u_2\|.$$

Cas où les espaces sont de Banach.

1) $B_1 \otimes B_2$ muni de la norme projective est complété en $B_1 \hat{\otimes} B_2$ qui est un espace de Banach.

2) Toute application linéaire continue sur $B_1 \otimes B_2$ se prolonge en application linéaire continue sur $B_1 \hat{\otimes} B_2$, de même norme.

3) en particulier $u_1 \otimes u_2 : B_1 \otimes B_2 \rightarrow C_1 \otimes C_2$
 se prolonge en $u_1 \hat{\otimes} u_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \rightarrow C_1 \hat{\otimes} C_2$

Proposition : Soient B_1, B_2 deux espaces de Banach.

tout élément x appartenant à $B_1 \hat{\otimes} B_2$ admet quel que soit $\epsilon > 0$ une décom-

position $x = \sum_1^\infty b_\alpha^1 \otimes b_\alpha^2$ telle que

$$\|x\|_\pi \leq \sum_1^\infty \|b_\alpha^1\| \|b_\alpha^2\| \leq \|x\|_\pi + \epsilon$$

si $x \in B_1 \otimes B_2$ c'est la définition de $\|x\|_\pi$.

Soit $x \in B_1 \hat{\otimes} B_2$.

$$\exists x_1 \in B_1 \otimes B_2 \quad \|x - x_1\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \|x_1\| \leq \|x\| (1 + \epsilon)$$

$$\exists x_2 \in B_1 \otimes B_2 \quad \|x - x_1 - x_2\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} \quad \text{et} \quad \|x_2\| \leq \|x - x_1\| (1 + \epsilon)$$

$$\exists x_n \in B_1 \otimes B_2 \quad \|x - x_1 - \dots - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2^n} \quad \text{et} \quad \|x_n\| \leq \|x - x_1 - \dots - x_{n-1}\| (1 + \epsilon)$$

Alors $\|x_2\| \leq \epsilon$

$$\forall n \quad \|x_n\| \leq \frac{(1 + \epsilon)\epsilon}{2^{n-1}} \leq \frac{\epsilon}{2^{n-2}}$$

La série (x_n) est absolument convergente, donc convergente, vers x .

$\forall n$ x_n admet un développement fini : $x_n = \sum_1^{m_n} b_i^1 \otimes b_i^2$ tel que

$$\|x_n\| \leq \sum_1^{m_n} \|b_i^1\| \|b_i^2\| \leq \|x_n\| (1 + \epsilon)$$

d'où $x = x_1 + x_2 + \dots$

$$= \sum_1^{m_1} + \sum_1^{m_2} + \dots$$

$$\sum_1^\infty \|x_n\| \leq \sum_1^{m_1} \|b_i^1\| \|b_i^2\| + \sum_1^{m_2} + \dots \leq (1 + \epsilon) \left(\sum_1^\infty \|x_n\| \right) \in (1 + \epsilon) (\|x_1\| + 2\epsilon)$$

$$\leq (1 + \epsilon) \|x\| \left(1 + \epsilon + \frac{2\epsilon}{\|x\|} \right) \leq \|x\| [1 + \epsilon'] \quad \text{en posant} \quad \epsilon' = \frac{\epsilon'}{3 + \frac{2}{\|x\|}}$$

III - Produit tensoriel de deux algèbres

Soient E, F deux algèbres.

$E \otimes F$ a été défini comme espace vectoriel. Il reste à y définir une multiplication. La multiplication est une application bilinéaire de $(E \otimes F, E \otimes F)$ dans $E \otimes F$. Il suffit de la définir sur les éléments décomposables.

$$\underline{(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'}$$

on vérifie la bilinéarité et l'associativité.

Exemple : $M_p(K) \otimes M_q(K) \cong M_{pq}(K)$ matrices d'ordre p sur K .

Cas de deux algèbres de Banach :

$$x \text{ et } x' \in B_1 \hat{\otimes} B_2 \quad \begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j^1 \otimes b_j^2 \\ x' &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j'^1 \otimes b_j'^2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \sum \|b_j^1\| \|b_j^2\| < \infty$$

Donc xx' admet pour décomposition $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j^1 \ b_j'^1) \otimes (b_j^2 \ b_j'^2)$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^1 \otimes b_j'^1 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 \otimes b_j'^2 \right)$$

$$\underline{\|xx'\|_{\pi} \leq \|x\| \|x'\|}$$

Exemple 1 K_1, K_2 compacts

$\mathcal{C}(K_i)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est une algèbre de Banach.

On définit $V(K) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$.

Exemple 2 Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts.

Théorème : $L^1(G_1) \hat{\otimes} L^1(G_2)$ est isométriquement isomorphe à $L^1(G_1 \times G_2)$.

[cf. séminaire Schwartz 1953-54. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques].

Exemple 3 Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts.

On définit les algèbres de groupes $A(G_i) = \mathcal{F}L^1(\hat{G}_i)$; le dual \hat{G}_i de G_i étant

aussi localement compact, $L^1(\hat{G}_1) \hat{\otimes} L^1(\hat{G}_2) = L^1(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$

D'où $A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2) = A(G_1 \times G_2)$ car $\|f\|_{A(G)} = \|f\|_{L^1(G)}$ (cf chap III).

Propriétés des produits tensoriels d'algèbres de Banach.

Théorème : Soient B_1, B_2 deux algèbres de Banach.

$$\mathfrak{M}_{B_1} \hat{\otimes} \mathfrak{M}_{B_2} = \mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2}$$

Soient M_1 un caractère de B_1
 M_2 B_2

$M_1 \times M_2$ est une forme bilinéaire continue sur $B_1 \times B_2$ donc définit $\tilde{M} = M_1 \otimes M_2$

élément du dual de $B_1 \hat{\otimes} B_2$

$M_1 \times M_2$ est une forme multiplicative sur $B_1 \times B_2$ donc \tilde{M} l'est sur $B_1 \otimes B_2$

et par continuité sur $B_1 \hat{\otimes} B_2$, c'est-à-dire $\tilde{M} \in \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$

$$\mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2} \subset \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$$

Réciproquement soit $M \in \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$

on pose $M_1(b_1) = M(b_1 \otimes 1_{B_2})$ $M_1 \in \mathfrak{M}_{B_1}$

et $M_2(b_2) = M(1_{B_1} \otimes b_2)$ $M_2 \in \mathfrak{M}_{B_2}$

$$M(b_1 \otimes b_2) = M_1(b_1) M_2(b_2)$$

$$\mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2} \supset \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$$

Définition : Une algèbre de Banach B est régulière si $\forall K \subset \mathfrak{M}_B$ K fermé

$$\forall M \in \mathfrak{M}_B - K$$

$\exists b \in B$ tel que $\left. \begin{array}{l} \hat{b}(K) = 0 \\ \hat{b}(M) \neq 0 \end{array} \right\}$ où \hat{b} est l'image de b par l'homomorphisme de Gelfand.

Théorème : Si B_1 et B_2 sont des algèbres de Banach régulières, $B_1 \hat{\otimes} B_2$ est régulière.

Soit $K \subset \mathcal{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2} = \mathcal{M}_{B_1} \times \mathcal{M}_{B_2}$ K compact

Les projections de K sur \mathcal{M}_{B_1} et \mathcal{M}_{B_2} sont des compacts K_1 et K_2 .

$M \notin K$ $M = (M_1, M_2)$

$\exists b_i \in B_i$ $\hat{b}_i(M_i) \neq 0$ $\hat{b}_i(K_i) = 0$ $i = 1, 2$

$(\widehat{b_1 \otimes b_2}) = \hat{b}_1 \hat{b}_2$ vérifie $\hat{b}_1 \hat{b}_2(K) = 0$

$\hat{b}_1 \hat{b}_2(M) \neq 0$.

IV - Définition de la norme injective ε dans un produit tensoriel d'espaces vectoriels normés

- d'après la construction de $E \otimes F$ il y a identité entre les formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et les formes linéaires continues sur $E \otimes F$.

- (cf. Bourbaki evt chap. IV p. 113). Soit E un espace vectoriel normé, E'

son dual $\forall x \in E$ $\|x\| = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} | \langle x', x \rangle |$

- Dans $E \otimes F$ on a donc

$$\|x\|_{\pi} = \sup_{\substack{B \in \mathcal{B}(E \times F, \mathcal{C}) \\ \|\tilde{B}\| = \|B\| \leq 1}} |\tilde{B}(x)|$$

- Soient $f_1 \in E'$ $f_2 \in F'$ l'application $f : (x, y) \longrightarrow f_1(x) \times f_2(y)$

$$E \times F \longrightarrow \mathcal{C}$$

est une forme bilinéaire continue, associée à $\tilde{f} = f_1 \otimes f_2$

c'est-à-dire $\mathcal{B}(E \times F, \mathcal{C}) \simeq (E \otimes F)' \supset E' \otimes F'$

Définition : Dans $E \otimes F$ on définit la norme

$$\frac{\|x\|_{\mathcal{E}}}{\inf_{\substack{f_i \in E_i \\ \|f_i\| \leq 1}} |f_1 \otimes f_2(x)|} \leq \frac{\sup_{\substack{f_1 \otimes f_2 \in E_1' \otimes E_2' \\ \|f_1 \otimes f_2\| \leq 1}} |f_1 \otimes f_2(x)|}{1}$$

Donc $\|x\|_{\mathcal{E}} \leq \|x\|_{\pi}$

Cas où les espaces vectoriels sont de Banach :

On définit le complété de $E \otimes F$ pour la norme injective : noté $\widehat{E \otimes F}$

Proposition : Soient E_i, F_i des espaces vectoriels normés ($i = 1, 2$) et

$v_i : E_i \rightarrow F_i$ des applications linéaires continues. On a défini

$v_1 \otimes v_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2$. Alors $v_1 \otimes v_2$ est continue pour la topologie

injective. Elle se prolonge donc en application linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$

dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$ et $\|v_1 \otimes v_2\|_{\mathcal{E}} = \|v_1\| \|v_2\|$.

Démonstration : $\|v_1 \otimes v_2\|_{\mathcal{E}} = \sup_{\substack{x \in E_1 \otimes E_2 \\ \|x\|_{\mathcal{E}} \leq 1}} \|v_1 \otimes v_2(x)\|_{\mathcal{E}}$

$$= \sup_{\substack{\|x\|_{\mathcal{E}} \leq 1 \\ y_i' \in F_i' \\ \|y_i'\| \leq 1}} | \langle v_1 \otimes v_2(x), y_1' \otimes y_2' \rangle | = \sup_{\substack{\|x\|_{\mathcal{E}} \leq 1 \\ y_i' \in F_i' \\ \|y_i'\| \leq 1}} | \langle x, {}^T v_1(y_1') \otimes {}^T v_2(y_2') \rangle |$$

$$\|{}^T v_1(y_1')\| \leq \|{}^T v_1\| \|y_1'\| \leq \|{}^T v_1\| = \|v_1\|$$

Donc $\|v_1 \otimes v_2\|_{\mathcal{E}} \leq \|v_1\| \|v_2\| \sup_{\substack{x_i' \in E_i' \\ \|x_i'\| \leq 1}} | \langle x, x_1' \otimes x_2' \rangle | = \|v_1\| \|v_2\| \|x\|_{\mathcal{E}}$

$$x_i' \in E_i' \|x_i'\| \leq 1$$

$$\|v_1 \otimes v_2\|_{\mathcal{E}} \leq \|v_1\| \|v_2\|$$

2° D'autre part $\|v_1 \otimes v_2\|_{\mathcal{E}} \geq \sup_{\|x_i\|_{\mathcal{E}} \leq 1} \|v_1 \otimes v_2(x_1 \otimes x_2)\| = \sup \|v_1(x_1) \otimes v_2(x_2)\|$

$$= \sup_{\|x_1\|_{\mathcal{E}} \leq 1} \|v_1(x_1)\| \sup_{\|x_2\|_{\mathcal{E}} \leq 1} \|v_2(x_2)\| = \|v_1\| \|v_2\|$$

V - La propriété d'approximation dans les espaces de Banach

Soient E et F des espaces de Banach.

Problème : Sur $E \otimes F$ la topologie π est plus fine que la topologie ϵ .

L'application identique $i : (E \otimes F)_\pi \longrightarrow (E \otimes F)_\epsilon$ est donc continue. Elle se prolonge en application continue

$$E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\otimes} F$$

Cette application est-elle injective ?

(P₁) On dira que le Banach E vérifie (P₁) si quel que soit le Banach F , i

est injective : $E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\otimes} F$

La topologie π dans $E \hat{\otimes} F$ est la topologie induite par le dual $(E \hat{\otimes} F)'$

La topologie ϵ est induite par $E' \otimes_\pi F'$.

$$\left. \begin{array}{l} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\otimes} F \\ (E \hat{\otimes} F)' \xleftarrow{t \cdot i} E' \otimes_\pi F' \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \text{ étant linéaire continue pour les topologies } \pi \text{ et } \epsilon, \\ \text{on a } \text{Im}(t \cdot i) = (\text{Ker } i)^0 \text{ [cf. Bourbaki evt. chap. II p. 97]} \end{array}$$

$$\text{donc } (P_1) \iff \text{Ker } i = \{0\} \iff (\text{ker } i)^0 = (E \hat{\otimes} F)' \iff \overline{E' \otimes F'} = (E \hat{\otimes} F)'$$

(P₁) équivaut à (P₂) :

(P₂) Pour la topologie faible de $(E \hat{\otimes} F)'$, $(E \hat{\otimes} F)' = \overline{E' \otimes F'}$

Remarque : on peut voir directement que (P₂) entraîne (P₁) :

$$\text{Soit } x \neq \{0\} \quad x \in E \hat{\otimes} F$$

$$\iff \|x\|_\pi \neq 0 \iff \exists \tilde{B} \in (E \hat{\otimes} F)' \quad \tilde{B}(x) \neq 0$$

$$\text{d'après } (P_2) \quad \exists e \in E' \otimes F', \quad e = \sum_{j=1}^{i=n} e_j \otimes f_j \quad e(x) \neq 0$$

$$\text{donc } \|x\|_\epsilon \neq 0 \text{ c'est-à-dire } i(x) \neq 0.$$

Définition : Un espace de Banach E vérifie la propriété d'approximation s'il vérifie (P_1) ou (P_2) pour tout espace de Banach F .

Définition : Un Banach E admet une base de Schauder s'il existe une famille (P_3) $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'endomorphismes continus de E , A étant une famille filtrante, telle que :

$$(i) \quad \sup_{\alpha} \|T_\alpha\| < \infty$$

$$(ii) \quad \forall \alpha, T_\alpha \text{ est de rang fini, c'est-à-dire } \dim T_\alpha(E) < \infty$$

$$(iii) \quad (T_\alpha) \text{ converge faiblement vers } Id_E.$$

Théorème : Si un Banach E admet une base de Schauder, il vérifie la propriété d'approximation.

Soient F un Banach et $B \in \text{Bil}(E \times F)$

On définit une famille (B_α) : $B_\alpha(x, y) = B(T_\alpha(x), y)$; d'après (ii)

$$T_\alpha(x) = \sum_1^n x_i e_i$$

$$B(T_\alpha(x), y) = \sum_1^n x_i B(e_i, y) = \sum_1^n e_i^*(T_\alpha(x)) \times B(e_i, y)$$

On pose $B(e_i, y) = B_i(y)$ $B_i \in F'$

$$\text{et } \tilde{B}_\alpha = \sum_1^n e_i^* \otimes B_i \in E' \otimes F'$$

d'après (iii) $\forall x \in E \quad T_\alpha(x) \longrightarrow x$

B étant continue, $B_\alpha(x, y) \longrightarrow B(x, y) \quad \forall x, y \in E \times F$

$$\forall z \in E \otimes F \quad \tilde{B}_\alpha(z) \longrightarrow \tilde{B}(z)$$

$$\text{donc } \forall z \in \hat{E} \otimes F \quad \tilde{B}_\alpha(z) \longrightarrow \tilde{B}(z) \quad \tilde{B} \in (E \otimes F)'$$

ce qui démontre (P) .

Exemple :

Soient deux compacts K_1, K_2 .

$\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$.

Proposition : Dans $\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ donc dans $\widehat{\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)}$ la norme injective est égale à la norme de la convergence uniforme dans $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$.

Soit $u \in \mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ (on note $m_{\mathcal{C}(K)} = \text{spectre de } \mathcal{C}(K)$).

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{\chi_i \in m_{\mathcal{C}(K_i)}} |\langle u, \chi_1 \otimes \chi_2 \rangle| \leq \|u\|_{\varepsilon} = \sup_{\substack{\|\mu\| \leq 1 \\ \mu_i \in \mathcal{C}(K_i)}} |\langle u, \mu_1 \otimes \mu_2 \rangle| = \sup_{\chi_i \in m_{\mathcal{C}(K_i)}} |\langle u, \chi_1 \otimes \chi_2 \rangle|$$

car la boule unité de $\mathcal{C}(K_i)$ est l'enveloppe convexe fermée faible des caractères de $\mathcal{C}(K_i)$. (Théorème de Krein Millman Bourbaki evt II § 7 n° 1)

$\widehat{\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)}$ est donc le complété de $\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ pour la norme uniforme et s'identifie à $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$. (Théorème de Stone Weierstrass).

Proposition : $\mathcal{C}(K)$ est un espace de Banach possédant une base de Schauder.

Toute fonction continue φ sur un compact K est uniformément continue et il existe un recouvrement ouvert fini de K tel que l'oscillation de φ sur chaque ouvert soit arbitrairement petite. Soit (α_i) une partition de l'unité associée à un tel recouvrement

$$u_{\alpha} : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathcal{C}(K)$$

$$\varphi \rightsquigarrow \sum_i \varphi(\xi_i) \alpha_i \quad \xi_i \text{ fixé } \in \text{supp } \alpha_i$$

Les $\{u_\alpha\}$ associés à une famille filtrante de recouvrements ouverts finis forment une base de Schauder

L'application identique $\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$ est donc injective, ainsi que

$$\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1 \times K_2).$$

Définition : Une algèbre de Banach B est semi-simple si l'homomorphisme de Gelfand γ est injectif c'est-à-dire si :

$$\forall x \in B \quad x \neq 0 \quad \exists \chi \in \mathcal{M}_B \quad \chi(x) \neq 0.$$

Théorème : Soient B_1, B_2 deux algèbres de Banach semi-simples dont l'une vérifie la propriété d'approximation (P_2) . $B_1 \hat{\otimes} B_2$ est une algèbre semi-simple.

Soit $x \in B_1 \hat{\otimes} B_2 \quad x \neq 0 \quad x = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^1 \otimes b_{\alpha}^2$

$$\iff \|x\|_x \neq 0$$

$$\iff \exists B \in \text{Bil}(B_1 \times B_2) \quad \tilde{B}(x) \neq 0$$

D'après la propriété d'approximation \tilde{B} est limite d'éléments de $B_1^1 \otimes B_2^1$ de la

forme $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \beta_{\nu}^1 \otimes \beta_{\nu}^2 \quad \beta_{\nu}^1 \in B_1^1 \quad \beta_{\nu}^2 \in B_2^1$ donc $\exists \beta_{\nu}^1 \exists \beta_{\nu}^2 \quad \beta_{\nu}^1 \otimes \beta_{\nu}^2(x) \neq 0$.

à β_{ν}^1 on associe $\overline{\beta}_{\nu}^1 : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_2$

$$b_1, b_2 \rightsquigarrow \overline{\beta}_{\nu}^1(b_1)b_2$$

$\overline{\beta}_{\nu}^1(x) = \sum_{\alpha} \beta_{\nu}^1(b_{\alpha}^1)b_{\alpha}^2$ est $\neq 0$ car $\beta_{\nu}^2[\overline{\beta}_{\nu}^1(x)] = \beta_{\nu}^1 \otimes \beta_{\nu}^2(x) \neq 0$

B_2 étant semi-simple, $\exists \chi_2 \in \mathcal{M}_{B_2} \quad \chi_2[\overline{\beta}_{\nu}^1(x)] \neq 0$

$$\chi_2[\overline{\beta}_{\nu}^1(x)] = \sum_{\alpha} \beta_{\nu}^1(b_{\alpha}^1)\chi_2(b_{\alpha}^2) = \langle \beta_{\nu}^1 \otimes \chi_2, x \rangle \neq 0$$

en faisant le même raisonnement pour β_{ν}^2 on obtient $\langle \chi_1 \otimes \chi_2, x \rangle \neq 0$.

Remarque : $\mathcal{E}(K)$ est semi-simple et admet une base de Schauder. $\mathcal{E}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}(K_2)$ est donc semi-simple. La transformation de Gelfand est l'injection canonique dans $\mathcal{E}(K_1 \times K_2)$.

VI - Le problème de synthèse

Soit R une algèbre de Banach régulière semi-simple.

Soit E un compact de son spectre \mathcal{M}_R .

Définitions :
$$I(E) = \left\{ r \in R \mid \hat{r}^{-1}(0) \supset E \right\} = \left\{ r \in R \mid \forall \lambda \in E, \lambda(r) = 0 \right\}$$

$$= \ker E .$$

$I(E)$ est une intersection d'idéaux maximaux donc est un idéal fermé de R .

$$I_0(E) = \left\{ r \in R \mid \hat{r}^{-1}(0) \text{ est un voisinage de } E \right\} .$$

On considère l'ensemble des idéaux J de R tels que $\text{hull } J = E$ ($\text{hull } J$ est l'ensemble des caractères de R dont le noyau contient J). On démontre [cf. [11]

Varopoulos = Algèbres de Banach, algèbres de groupes] que $I(E)$ en est le plus grand élément, $I_0(E)$ le plus petit.

$$\left| \text{soit } J(E) = \overline{I_0(E)} \right.$$

Définition : E est dit de synthèse si $J(E) = I(E)$.

Lemme : Soient B_1, B_2 deux espaces de Banach ayant une base de Schauder, F_1, F_2 deux sous espaces fermés de B_1 et B_2 tels que $B_1/F_1, B_2/F_2$ aient une base de Schauder,

Soit $p_i : B_i \longrightarrow B_i/F_i$ la projection canonique ;

$$p_1 \hat{\otimes} p_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1/F_1 \hat{\otimes} B_2/F_2$$

Alors $\ker p_1 \hat{\otimes} p_2 = \overline{B_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes B_2}$

Soit $\tilde{p} = \text{Id}_{B_1} \hat{\otimes} p_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1 \hat{\otimes} B_2 / F_2$

on a $B_1 \otimes F_2 \subset \ker \tilde{p}$

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base de Schauder de B_1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \sup_{\alpha} \|T_\alpha\| < \infty \\ \text{(ii)} \quad \dim T_\alpha(B_1) < \infty \\ \text{(iii)} \quad T_\alpha \longrightarrow \text{Id}_{B_1} \text{ faiblement} \end{array} \right.$

On définit $U_\alpha = T_\alpha \hat{\otimes} \text{Id}_{B_2}$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, (i) et (iii) entraînent :

$T_\alpha \longrightarrow \text{Id}_{B_1}$ pour la convergence en norme.

Donc $U_\alpha \longrightarrow \text{Id}(B_1 \hat{\otimes} B_2)$ pour la convergence en norme

car $\|T_\alpha \hat{\otimes} \text{Id}_{B_2} - \text{Id}_{B_1} \hat{\otimes} \text{Id}_{B_2}\| \leq \|T_\alpha - \text{Id}_{B_1}\| \|\text{Id}_{B_2}\|$

Soient $x \in \ker \tilde{p}$ et $x_\alpha = U_\alpha(x) : (x_\alpha) \longrightarrow x$

D'après (ii) $x_\alpha = \sum_1^n b_i^1 \otimes b_i^2$

$\tilde{p}(x_\alpha) = \tilde{p} \circ U_\alpha(x) = U_\alpha \circ \tilde{p}(x) = 0$ donc $x_\alpha \in B_1 \otimes F_2$

D'où $\overline{B_1 \otimes F_2} = \ker \tilde{p}$.

En appliquant deux fois ce résultat on obtient le lemme.

Théorème : Soient R_1, R_2 deux algèbres de Banach régulières, semi-simples, unitaires ; E_1 et E_2 deux compacts de synthèse de \mathcal{M}_{R_1} et \mathcal{M}_{R_2} . On suppose que R_i et $R_i / I(E_i)$ ont des bases de Schauder.

Alors $E = E_1 \times E_2$ est un compact de synthèse de l'algèbre $R = R_1 \hat{\otimes} R_2$.

$R_1 \hat{\otimes} R_2$ est régulière et semi-simple, son spectre est $\mathcal{M}_{R_1} \times \mathcal{M}_{R_2}$. On peut y

définir des ensembles de synthèse.

Soit $\mathcal{X} = R_1 \otimes I(E_2) + I(E_1) \otimes R_2 \subset R_1 \hat{\otimes} R_2$.

$\text{hull } \mathcal{X} = \{(\chi_1, \chi_2) \mid \chi_1(R_1)\chi_2(I(E_2)) + \chi_1(I(E_1))\chi_2(R_2) = 0\} = E_1 \times E_2 = E$

donc $\overline{\mathcal{K}} \supset J(E)$.

$$\mathcal{K} = R_1 \otimes J(E_2) + J(E_1) \otimes R_2 \quad (\text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont de synthèse})$$

$$\overline{\mathcal{K}} = \overline{R_1 \otimes I_0(E_2) + I_0(E_1) \otimes R_2}$$

si $r = p_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes p_2 \in R_1 \otimes I_0(E_2) + I_0(E_1) \otimes R_2$,

$\hat{\mathcal{K}}^{-1}(0) \supset \mathcal{V}(E_1) \times \mathcal{V}(E_2)$ c'est-à-dire est un voisinage de E

D'où $\overline{\mathcal{K}} \subset J(E)$ et finalement $\overline{\mathcal{K}} = J(E)$.

D'après le lemme, $J(E) = \ker p_1 \hat{\otimes} p_2$ ($p_i : R_i \rightarrow R_i / I(E_i)$)

Donc $R/J(E)$ s'identifie à $R_1 / I(E_1) \hat{\otimes} R_2 / I(E_2)$

L'algèbre $R_i / I(E_i)$ a pour spectre E_i et est semi-simple :

Soit $r \in R_i / I(E_i)$ $\hat{r}(E) = 0 \iff \forall x \in E \hat{r}(x) = 0 \iff r = 0$

Donc $R_1 / I(E_1) \hat{\otimes} R_2 / I(E_2) = R/J(E)$ est semi-simple. Son spectre est E .

Soit $r \in R$, $\hat{r} \in R/J$.

$r \in I(E) \iff \hat{r}(e) = 0 \forall e \in E \iff \hat{r}(e) = 0 \forall e \in E \iff \hat{r} = 0 \iff r \in J(E)$

E est de synthèse

Chapitre II

Morphismes d'algèbres tensorielles

Problème : Soient K_i et K'_i des espaces topologiques $i = 1, 2$, des applications p_i continues : $K_i \rightarrow K'_i$ (on peut toujours les supposer surjectives)

considérons $\overset{v}{p}_i : \mathcal{L}(K'_i) \rightarrow \mathcal{L}(K_i)$ et $V(K) = \mathcal{L}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{L}(K_2)$
 $\overset{v}{p} = \overset{v}{p}_1 \otimes \overset{v}{p}_2 : V(K') \rightarrow V(K)$
 $K = K_1 \times K_2$

Si p_i $i = 1, 2$ est surjective alors $\overset{v}{p}_i$ est une isométrie

Le problème qui se pose : $\overset{v}{p}$ est-il une isométrie ?

I - Généralités sur les espaces de Banach : Notion d'inverse approximée

Soient B et C deux banach et $T \in (B, C)$

1. Définition :

T a un inverse approximé si on peut trouver une famille $T_\alpha : \mathcal{L}(C, B)$
 $\alpha \in A$

telle que :

a) $\forall \alpha \in A \quad \|T_\alpha\| \leq 1$

b) $T_\alpha \circ T \rightarrow Id(B)$ soit $\forall x \in B \quad T_\alpha \circ T(x) \rightarrow x$
 $\alpha \rightarrow \infty$

2. Remarque (1) :

Si $\|T\| \leq 1$ alors a) et b) entraînent que $\|T\| = 1$.

Donc les fonctions T pour lesquelles on parlera d'inverse approximée ne diminuent pas la norme.

Exemple : Considérons l'injection canonique T de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ espace des fonctions continues sur le tore dans $L^\infty(\mathbb{T})$ espace des classes de fonctions complexes mesurables (au sens de Haar) et bornées munies de la norme

$$\|f\|_\infty = \text{Sup } |f(s)|$$

en mesure

Théorème : Il n'existe pas S telle que $S \circ T = \text{Id}$ (en effet T n'est pas bijective). Cependant, il existe une inverse approximée définie par

$$T_n : L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T}) \quad T_n(f) = f * e_n$$

e_n $n \in \mathbb{N}$ étant une unité approximative de $L^\infty(\mathbb{T})$.

Notons que puisque e_n est continue $T_n(f)$ l'est aussi

Démonstration :

$$T_n(f) = f * e_n \text{ donc pour tout } x \in \mathbb{T} \quad [T_n(f)](x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)e_n(t)dt$$

$$\text{donc } |T_n(f)(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} * \int_{\mathbb{T}} e_n(t)dt$$

et puisque $\int_{\mathbb{T}} e_n(t)dt$ est égal à 1 par définition d'une unité approximative

$$\text{on a } \|T_n(f)\| \leq \|f\| \text{ soit } \|T_n\| \leq 1$$

D'autre part $T_n \circ T \longrightarrow \text{Id } \mathcal{C}(\mathbb{T})$:

$$A(x) = [T_n \circ T(f)](x) - f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e_n(t) dt - f(x) \int_{\mathbb{T}} e_n(t) dt$$

$$\text{Alors } |A(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}} [f(x-t) - f(x)] e_n(t) dt \right|$$

Or f est uniformément continue sur \mathbb{T} donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que } \|t\|_{\mathbb{T}} < \eta \implies |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|A(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} \varepsilon e_n(t) dt \quad |A(x)| \leq \varepsilon$$

$$\text{D'où } T_n \circ T(f) \longrightarrow f$$

Ce résultat est valable pour un groupe compact quelconque (même démonstration)

3. Remarque (2)

Soit $\pi_i : B_i \longrightarrow H_i \quad i = 1, 2 \quad B_i, H_i$ Banach $\pi_i \in \mathcal{L}(B_i, H_i)$.

on suppose que π_i possède un inverse approximé $\pi_i^{(\alpha_i)}$

avec $\alpha_i \in A_i$ et que $\|\pi_i\| \leq 1$.

D'après la remarque (1) alors π_i est une isométrie

Donc B_i est identifié à un sous espace de H_i

Considérons $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 : B_1 \otimes B_2 \longrightarrow H_1 \otimes H_2$

$$\text{Alors } \|\pi_1 \otimes \pi_2\| \leq \|\pi_1\| \times \|\pi_2\|$$

Donc π vérifie $\|\pi\| \leq 1$

D'autre part π possède un inverse approximé : il suffit de considérer la

famille $\pi_\alpha = \pi_1^{(\alpha_1)} \otimes \pi_2^{(\alpha_2)}$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in A_1 \times A_2$

Donc π est une isométrie

Application aux algèbres tensorielles : soient G_1 et G_2 deux groupes com-

pacts $\mathcal{C}(G_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G_2) \xrightarrow{I} L^\infty(G_1) \hat{\otimes} L^\infty(G_2)$

L'injection canonique I est une isométrie (en effet π_1 et π_2 ont des inverses approximatifs comme dans la remarque (1))

4. Remarque (3) :

On peut noter qu'on n'a pas vraiment besoin de la "structure de groupe" en effet

Soit $K = I = [0,1]$

$[0,1]$ ne peut pas être muni d'une structure de groupe

$[0,1]$ peut être plongé dans le groupe \mathbb{R}

Considérons $T : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{B}([0,1])$

où $\mathcal{B}([0,1])$ désigne l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\| = \text{Sup } |f(x)|$.

On rappelle qu'une fonction $f : E \longrightarrow E'$ E et E' métrisables est dite borélienne si pour tout fermé F' de E' $f^{-1}(F')$ est un borélien de E

T : injection canonique de $\mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{B}([0,1])$

T n'admet pas d'inverse et $\|T\| = 1$

Cependant T possède un inverse approximé

On va poser $T_n(f) = \tilde{f} * e_n$ où e_n est une unité approximative et \tilde{f} un prolongement de f borélienne sur $[0,1]$ qui nous fasse sortir de l'intervalle

\tilde{f} pourra être par exemple un prolongement par symétrie.

On pose alors $T_n(f) = \tilde{f} * e_n$ au lieu de $f * e_n$ afin que $T_n(f)$ soit bien une fonction continue sur $[0,1]$ et non simplement continue sur un intervalle plus petit.

\tilde{f} est bornée : $\text{Sup } |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}([0,1])}$ et borélienne sur un intervalle contenant $[0,1]$

Par un calcul analogue à celui de la remarque (1) on montre que

$$\|T_n\| \leq 1 \text{ et que } T_n \circ T(f) \longrightarrow f \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}([0,1])$$

En conséquence : d'après la remarque (2) si T est l'injection canonique de $\mathcal{C}[0,1]$ dans $\mathcal{B}[0,1]$ Alors $\|T\| \leq 1$ et T possède un inverse approximé

D'où $T \circ T : \mathcal{C}[0,1] \otimes \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{B}[0,1]$ possède un inverse approximé et est de norme ≤ 1

Donc $T \circ T$ réalise un plongement isométrique de $\mathcal{C}[0,1] \otimes \mathcal{C}[0,1]$ dans $\mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{B}[0,1]$

II - Etude du problème posé

Soient K_i $i = 1, 2$ 2 compacts métrisables

G_i $i = 1, 2$ 2 groupes compacts métrisables

$$p_i : K_i \longrightarrow G_i \text{ une surjection continue } \check{p}_i : \mathcal{C}(G_i) \longrightarrow \mathcal{C}(K_i)$$

$$\check{p}_i(f) = f \circ p_i$$

Considérons $\check{p} = \check{p}_1 \hat{\otimes} \check{p}_2 : \mathcal{C}(G_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$

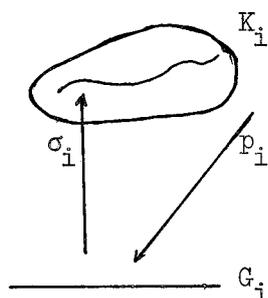
Théorème $\left[\check{p} \right]$ est un morphisme isométrique d'algèbres de Banach

en effet : $\overset{v}{p}$ est trivialement un morphisme d'algèbres

Montrons que $\overset{v}{p}$ est une isométrie : Ici K_i et G_i sont des espaces métri-

sables. Dans ces conditions, on sait [3]

qu'il existe un ensemble borélien dans K_i qui rencontre chaque classe d'équivalence (associée à la surjection p_i) en un point et un seul.



D'où la définition de la section borélienne σ_i associée à l'application sur-

jective p_i $p_i \circ \sigma_i = \text{Id}(G_i)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(G_i) & \xrightarrow{\overset{v}{p}_i} & \mathcal{B}(K_i) & \xrightarrow{\overline{p}_i} & L^\infty(G_i) \\ & \xrightarrow{\pi_i} & & \xrightarrow{\pi_i} & \\ & & & & \xleftarrow{\pi_i^{(n)}} \end{array}$$

on a $\overset{v}{p}_i(f) = f \circ p_i$
 $p_i(g) = g \circ \sigma_i$

D'où $\overline{p}_i \circ \overset{v}{p}_i(f) = f \circ p_i \circ \sigma_i = f$

$$\|\overset{v}{p}_i\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|f \circ p_i\|_{\mathcal{B}(K_i)}$$

Or $\|f \circ p_i\|_{\mathcal{B}(K_i)} = \sup_{x \in K_i} |f \circ p_i(x)| \leq \|f\|$ Donc $\|\overset{v}{p}_i\| \leq 1$

D'autre part $\overset{v}{p}_i$ possède un inverse approximé

On sait par des considérations analogues à celles de la remarque 1 que

$\pi_i = \overline{p}_i \circ p_i$ injection canonique de $\mathcal{B}(G_i)$ dans $L^\infty(G_i)$ admet un

inverse approximé $\pi_n^{(i)}$ tel que $\pi_n^{(i)}(h) = h * e_n^i$

où e_n^i est une unité approximative dans $L^\infty(G_i)$

$\pi_n^{(i)} \circ \overline{p}_i$ est un inverse approximé de $\overset{v}{p}_i$:

$$a) \quad \|\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i}\| \leq 1 \quad \text{en effet} \quad \|\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i}\| \leq \|\pi_n^{(i)}\| \|\overline{p_i}\|$$

$$\text{Or} \quad \|\overline{p_i}\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|f \circ \sigma_i\|_{\infty} \quad \text{et} \quad \|f \circ \sigma_i\|_{\infty} = \sup_x |f \circ \sigma_i(x)| \leq \|f\|$$

$$\text{Donc} \quad \|\overline{p_i}\| \leq 1$$

D'autre part $\pi_n^{(i)}$ est l'inverse approximé de π_i donc $\|\pi_n^{(i)}\| \leq 1$

$$b) \quad (\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i}) \circ \check{p}_i \longrightarrow \text{Id} \mathcal{L}(G_i)$$

Ceci est évident par construction :

$$\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i} \circ \check{p}_i = \pi_n^{(i)} \circ \pi_i \longrightarrow \text{Id} \quad \text{puisque} \quad \pi_n^{(i)} \quad \text{est l'inverse ap-}$$

proximé de π_i

Conclusion :

$$\|\check{p}_i\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \check{p}_i \quad \text{possède un inverse approximé}$$

D'où \check{p}_i est une isométrie et $p = \check{p}_1 \circ \check{p}_2$ est aussi une isométrie

III - Etude d'un exemple : plongement isométrique de $\mathcal{L}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{T})$ dans
 $\mathcal{L}(D_{\infty}) \hat{\otimes} \mathcal{L}(D_{\infty})$

1. Définition de D_{∞}

Soit $Z(2)$ groupe à deux éléments que nous noterons 0 et 1 ou ± 1 selon

la commodité

$$\text{Par définition} \quad D_{\infty} = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j(2) = \left\{ \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots) \mid \alpha_k = 0 \text{ ou } 1 \right\}$$

D_{∞} est compact métrisable totalement discontinu (s'il est muni de la topologie produit)

En effet :

$Z_j(2)$ est muni de la topologie discrète

$Z_j(2)$ est compact et totalement discontinu (évident)

Il est métrisable $\delta_j(0,0) = 0$ $\delta_j(0,1) = 1$ $\delta_j(1,1) = 0$

D'où D_∞ muni de la topologie produit est un groupe compact (théorème de Tychonoff) métrisable

$$\Delta(0, \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \frac{(0, \alpha_j)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} \quad \alpha_j = 0 \text{ ou } 1$$

On sait d'après un résultat de topologie que $\Delta(0, \underline{\alpha})$ est compatible avec la topologie produit.

D'autre part si on examine les ouverts de l'espace produit on voit que D_∞ est totalement discontinu et sans point isolé.

2. Etude du plongement

On sait que : quel que soit K compact métrisable, il est homéomorphe à un sous espace du cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$ donc il existe une surjection $D_\infty \longrightarrow K$

On veut démontrer que $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$ est une isométrie.

$$D_\infty \xrightarrow{\delta} I = [0,1] \xrightarrow{\rho} \mathbb{T} \quad \delta(\underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} \quad \alpha_j = 0 \text{ ou } 1$$

(développement binaire d'un nombre)

d est surjective ; elle est presque biunivoque, à un ensemble dénombrable près.

La section borélienne associée à d est évidente ici (on utilise le développement binaire d'un nombre)

en conséquence

$$\check{d} \circ \check{d} \text{ est une isométrie } : \mathcal{L}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{L}(D_{\infty}) \hat{\otimes} \mathcal{L}(D_{\infty})$$

IV - Etude du morphisme \check{p}

Comment se transportent par \check{p} les problèmes de synthèse et de calcul symbolique ?

1. Position du problème pour le calcul symbolique

a) définition du calcul symbolique

Soit Φ définie sur un ensemble D_{Φ} du plan complexe

On dit que Φ opère dans une classe de fonctions H si $\forall f \in H$ à valeurs dans D_{Φ} la fonction composée $\Phi \circ f$ appartient à H .

Soit B une algèbre de Banach

$$\mathfrak{M}_B \text{ son spectre} \quad \text{alors} \quad \hat{B}(\mathfrak{M}_B) \subset \mathcal{L}(\mathfrak{M}_B, \mathbb{C})$$

Le calcul symbolique sur B est la recherche des fonctions Φ qui opèrent sur $\hat{B}(\mathfrak{M}_B)$

Si K est une partie du plan complexe le calcul symbolique sur K est

$$[\mathcal{C}(K)] = \left\{ \Phi \in \mathcal{L}(K, \mathbb{C}) \text{ tq } \left[\begin{array}{l} \forall f \in B \\ \hat{f}(\mathfrak{M}_B) \subset K \end{array} \implies \Phi \circ \hat{f} \in \hat{B} \right] \right\}$$

b) problème posé : (il sera abordé plus tard)

Soit K un compact et soit $B(K) \subset \mathcal{L}(K)$ une algèbre de Banach de fonctions sur K , unitaire, régulière, symétrique dont le spectre puisse s'identifier à K

Soit $\Phi : F \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall f \in B(K) \quad f(K) \subset F$ alors $\Phi \circ f \in B(K)$

Alors si $B'(K')$ est une sous algèbre de $B(K)$, Φ opère-t-il aussi sur $B'(K')$?

On abordera dans la suite du cours le cas particulier des algèbres tensorielles et d'une sous algèbre donnée par un morphisme

2. Problème de synthèse dans une sous algèbre

Soient R_1 et R_2 deux algèbres de Banach régulières unitaires telles que

$\exists \theta : R_1 \rightarrow R_2$ injection isométrique de R_1 dans R_2

Soit $\check{\theta} : \mathfrak{M}_{R_2} \rightarrow \mathfrak{M}_{R_1}$

Soit E_1 un fermé de \mathfrak{M}_{R_1} on définit $E_2 = \check{\theta}^{-1}(E_1)$

a) Proposition :
$$I_1^{R_1}(E_1) = \left\{ r \in R_1 / \hat{r}(E_1) = 0 \right\} = I_2^{R_2}(E_2) \cap R_1 = \theta^{-1} \left[I_2^{R_2}(E_2) \right]$$

 Mais en général on a seulement $J_1^{R_1}(E_1) \subset \theta^{-1} \left[J_2^{R_2}(E_2) \right]$

En effet : $r \in J_1^{R_1}(E_1) \iff \exists (r_n) \in I_0^{R_1}(E_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{r_n} r$

$$r_n \in I_0^{R_1}(E_1) = \left\{ \rho \in R_1 / \hat{\rho}^{-1}(0) \text{ est un voisinage de } E_1 \right\}$$

$$= I_0^{R_2}(E_2) \cap R_2 = \theta^{-1} \left[I_0^{R_2}(E_2) \right]$$

c'est-à-dire $\theta(r_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(r)$ dans R_2 (car θ est isométrique)

et $r \in \theta^{-1} \left[J_2^{R_2}(E_2) \right]$

b) Une condition suffisante pour que $J_1^{R_1}(E_1) = \theta^{-1} \left[J_2^{R_2}(E_2) \right]$

Définition : L'opérateur θ a un inverse approximé local s'il existe une

famille θ_α $\alpha \in A$ telle que $\theta_\alpha : R_2 \rightarrow R_1$ et

$$1) \quad \|\theta_\alpha\| \leq 1 \quad \forall \alpha \in A$$

2) $\theta_\alpha \circ \theta \longrightarrow I\delta_{R_1}$ au sens de la convergence simple dans R_1

3) $\forall r_2 \in R_2$ le compact $\text{Supp } \widehat{\theta_\alpha(r_2)}$ tend vers le compact

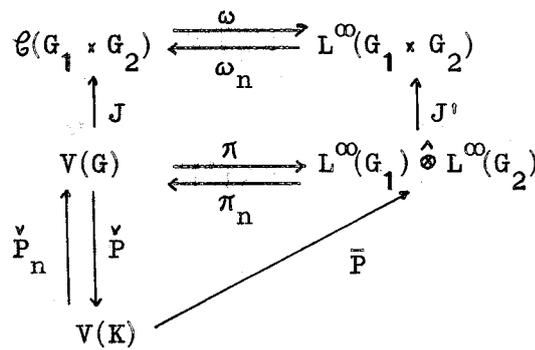
$\check{v}(\text{Supp } \widehat{r_2})$ au sens suivant : on dit que $K_\alpha \longrightarrow K \in \mathfrak{M}_{R_1}$ si pour tout ouvert

$\Omega \supset K$ il existe $A_\Omega \subset A$ tel que $\forall \alpha \notin A_\Omega \quad K_\alpha \subset \Omega$

exemple : Dans le cas des algèbres tensorielles on peut toujours avoir un

inverse approximé local

En reprenant les notations de (II, § II) on va étudier le diagramme suivant :



Notations :

- π, p, \bar{p} réalisant les plongements isométriques déjà étudiés
- J le plongement à norme décroissante de $\mathcal{E}(G_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}(G_2)$ dans $\mathcal{E}(G_1 \times G_2)$
(cf. chapitre I : norme projective \geq norme injective)
- J' le plongement à norme décroissante de $L^\infty(G_1) \hat{\otimes} L^\infty(G_2)$ dans $L^\infty(G_1 \times G_2)$
- $\omega : \mathcal{E}(G_1 \times G_2) \longrightarrow L^\infty(G_1 \times G_2)$. On sait comme au (II, I, 2) déterminer un inverse approximé $\omega_n = f * e_n$ où $e_n \quad n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une unité approximative.

- alors définissons un inverse approximé de π :

C'est π_n tel que

$$\boxed{J \circ \pi_n = \omega_n \circ J'}$$

-on en déduit un inverse approximé pour \check{p} noté \check{p}_n

on a $\bar{p} \circ \check{p} = \pi$ alors

$$\boxed{\check{p}_n = \pi_n \circ \bar{p}}$$

p_n est-il un inverse approximé local ?

Pour voir cela il suffit de vérifier la condition suivante :

$\forall f \in V(K)$ alors le compact $\widehat{\text{Supp}}[\check{p}_n(f)]$ tend vers le compact $(\check{p})(\widehat{\text{Supp}} f)$

On note que (\check{p}) transposée de \check{p} c'est p (évident)

D'autre part : J peut être identifié à la représentation de Gelfand de $V(K)$

en conséquence :

$$\widehat{\check{p}_n}(f) = (J \circ \check{p}_n)(f) = (J \circ \pi_n \circ \bar{p})(f) = (\omega_n \circ J' \circ \bar{p})(f)$$

et en identifiant \hat{f} à f on se ramène à démontrer

$$\forall f \in V(K) \text{ alors } \text{Supp}[(\omega_n \circ J' \circ \bar{p})(f)] \longrightarrow p[\text{Supp}(f)]$$

Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

$$\text{Lemme : } \left\| \begin{array}{l} \forall f \in V(K) \\ \forall g \notin p[\text{Supp}(f)] \end{array} \right. \text{ alors } [J' \circ \bar{p}(f)](g) = 0$$

en effet :

Si $g \notin p[\text{Supp}(f)]$ alors puisque p est surjective

$\exists k \in K_1 \times K_2$ tel que $g = p(k)$ avec $k \notin \text{Supp}(f)$

c'est-à-dire $f(k) = 0$

Considérons l'isométrie $\bar{p} : f \longrightarrow \bar{p}(f)$

A l'aide de \bar{p} on associe à la valeur de f en k la valeur de $\bar{p}(f)$ en $g = p(k)$ et comme $f(k) = 0$ et que \bar{p} est une isométrie

$$\bar{p}(f)(g) = 0$$

D'où puisque J^1 ne change pas le support

$$[J^1 \circ \bar{p}(f)](g) = 0$$

Conséquence : $\forall f \in V(K)$ et g telle que $g \notin p(\text{Supp } f)$ on a

$$[(\omega_n \circ J^1 \circ \bar{p})(f)](g) = 0 \text{ Donc } \widehat{\text{Supp } p_n(f)} \subset p(\text{Supp } f)$$

et alors $\widehat{\text{Supp } p_n(f)} \longrightarrow p(\text{Supp } f)$

Proposition : [Si θ a un inverse approximé local alors $J^{R_1}(E_1) = \theta^{-1} J^{R_2}(E_2)$

Il suffit de montrer que $J^{R_1}(E_1) \supset \theta^{-1} [J^{R_2}(E_2)]$

$r \in \theta^{-1} [J^{R_2}(E_2)] \iff \theta(r) \in J^{R_2}(E_2) \iff \exists y_n, y_n \in I^{R_2}(E_2) \text{ tq } y_n \longrightarrow \theta(r)$

$$\|\theta_\alpha(y_n) - r\| \leq \|\theta_\alpha(y_n) - \theta_\alpha \circ \theta(r)\| + \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - r\|$$

$\forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \exists A_\alpha$ tq $\alpha \notin A_\alpha \implies \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - r\| < \frac{\epsilon}{2}$ d'après définition -2-

On fixe α alors $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \exists N \quad n \geq N \implies \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - \theta_\alpha(y_n)\| < \frac{\epsilon}{2}$ d'après

définition -1-

Pour que $r \in J^{R_1}(E_1)$ il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang les

$\theta_\alpha(y_n) \in I_0^{R_1}(E_1)$ donc que le noyau de $\widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est un voisinage de E_1 ou

que le support compact de $\widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est disjoint de E_1

Or le support de $\widehat{y_n}$ est disjoint de E_2 donc $\check{\theta}(\text{Supp } \widehat{y_n})$ est disjoint de E_1

D'autre part :

$\text{Supp } \widehat{\theta_\alpha(y_n)} \longrightarrow \check{\theta}(\text{Supp } \hat{y}_n)$ donc $\text{Supp } \widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est disjoint de E_1 à partir d'un certain rang

- Intérêt de cette proposition

Lorsque $J^{R_1}(E_1) = \theta^{-1} [J^{R_2}(E_2)]$,

comme on a toujours

$$I^{R_1}(E_1) = \theta^{-1} [I^{R_2}(E_2)] ,$$

On remarque que $J^{R_1}(E_1) \neq I^{R_1}(E_1) \implies J^{R_2}(E_2) \neq I^{R_2}(E_2)$

Donc s'il y a défaut de synthèse dans la "petite" algèbre R_1 (i.e., s'il

existe un fermé E de \mathfrak{m}_{R_1} Lq $J^{R_1}(E) \neq I^{R_1}(E)$) alors il y a aussi défaut

de synthèse dans R_2 .

Chapitre III

Lien avec l'Analyse Harmonique :

Réalisation d'une algèbre de restriction
sous la forme d'une algèbre tensorielle

Rappelons les définitions de $A(G)$ et de $A(E)$

Soit G un groupe topologique localement compact commutatif

\hat{G} groupe dual ou groupe des représentations continues de G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ou groupe des caractères

\hat{G} muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est un groupe topologique localement compact.

On désigne par $A(G)$ l'algèbre des fonctions continues sur G transformées de Fourier de fonctions sommables sur \hat{G} pour la mesure de Haar

$$A(G) = \mathcal{F} L^1(G)$$

$$f \in L^1(\hat{G}) \quad \mathcal{F} f = \hat{f} \quad \hat{f}(x) = \int_{\hat{G}} f(\chi) (-x, \chi) d\chi$$

$$\|f\|_{A(G)} = \|f\|_{L^1}$$

$A(E)$ ou algèbre de restriction :

Soit E un fermé de G

$$A(E) = \left\{ \varphi \text{ à valeurs complexes telles que } \varphi = \hat{f}/E \quad f \in L^1(\hat{G}) \right\}$$

$A(E)$ est isométrique à $A(G)/\mathcal{J}(E)$ où $\mathcal{J}(E)$ est l'idéal des

éléments de $A(G)$ nuls sur E

$$\|\varphi\|_{A(E)} = \inf \left\{ \|f\|_{L^1} \mid \varphi = \hat{f}/E \right\}$$

I - Définitions et propriétés de parties remarquables dans un groupe

1. Ensemble de Helson :

Soit G un groupe localement compact abélien

E compact $E \subset G$

E est de Helson $\iff A(E) = \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ et les normes sont équivalentes (résultat de la théorie générale des algèbres de Banach)

Plus précisément

$\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A(E)}$ car la transformation de Fourier fait décroître la norme

Donc dire que les normes sont équivalentes c'est dire : il existe $k > 0$

tel que

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A(E)} \leq k \|f\|_{\infty}$$

2. Ensemble de Kronecker

G groupe localement compact abélien

E compact $\subset G$

E de Kronecker \iff

$\left\{ \begin{array}{l} \text{toute fonction} \\ \text{continue sur } E \text{ de module } 1 \text{ peut être} \\ \text{approchée uniformément sur } E \text{ par des} \\ \text{caractères de } G \end{array} \right.$

Propriété : Un ensemble compact de Kronecker est de Helson

(cf autre démonstration dans [4])

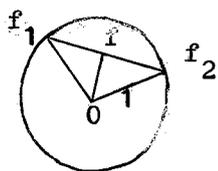
Démonstration : Nous allons utiliser le résultat suivant de Banach

Soient E et F deux espaces de Banach, U et V leurs boules unités, u application linéaire de E dans F telle que $u(U)$ soit une partie partout dense de V alors u est un homomorphisme métrique de E sur F .

Ici nous allons seulement faire la démonstration dans le cas où G compact, car alors \hat{G} est discret : il suffit donc de pouvoir démontrer que toute fonction continue de $[\mathcal{C}(E)]_1$ boule unité de $\mathcal{C}(E)$ peut s'écrire comme série absolument sommable de caractères.

Soit $f \in [\mathcal{C}(E)]_1$ si f ne s'annule pas on peut toujours considérer

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{avec} \quad \|f_1\| = \|f_2\| = 1 \quad (f_1, f_2) \text{ unique}$$



Par hypothèse f_1 et f_2 peuvent être approchées uniformément sur E par des caractères de G donc f peut être approché uniformément par des combinaisons linéaires de caractères.

Si f s'annule, alors on approche par des fonctions qui ne s'annulent pas

Remarque : pour un Kronecker E compact on a donc $A(E)$ isomorphe et isométrique à $\mathcal{C}(E)$

3. Ensemble indépendant : la terminologie n'est pas bien fixée à ce sujet.

Nous allons donner et comparer plusieurs définitions

a) sur \mathbf{R} d'abord, considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{Q}

$X \subset \mathbb{R}$ X indépendant $\iff X$ système libre sur \mathbb{Q}

Il est clair que cette définition ne peut pas convenir pour un groupe abélien quelconque. Nous dirons donc :

b) Soit G un groupe abélien

$$X \subset G \quad X \text{ indépendant} \iff \left(\begin{array}{l} \sum_{\alpha \in A} n_{\alpha} x_{\alpha} = 0 \iff \forall_{\alpha} n_{\alpha} = 0 \\ \text{card } A < +\infty \\ n_{\alpha} \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

Alors les $X \subset \mathbb{R}$ indépendants au sens a) et au sens b) coïncident.

Cependant, à l'aide de cette deuxième définition, on ne peut rien dire sur l'indépendance dans un groupe qui a beaucoup de torsion :

Dans un module E sur un anneau intègre A on appelle sous module de torsion de E , le sous module de E formé des éléments non libres.

E , module de torsion $\iff \forall x \in E \quad \exists a \in A \quad a \neq 0$ tel que $ax = 0$

La torsion d'un groupe est celle du groupe envisagé comme \mathbb{Z} -module

par exemple dans $D_{\infty} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_j$ (2) aucun $x \in D_{\infty}$ n'est indépendant car $2x = 0$

c) G groupe abélien :

$$X \subset G \quad X \text{ indépendant} \iff \left(\begin{array}{l} \sum_{\alpha \in A} n_{\alpha} x_{\alpha} = 0 \iff n_{\alpha} x_{\alpha} = 0 \quad \forall_{\alpha} \\ \text{card } A < +\infty \\ n_{\alpha} \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

Nous ne nous servons pas de la formulation c) mais de conditions moins fortes cependant suffisantes

Nous utiliserons donc d'une part l'indépendance au sens b) et aussi la p-indépendance au sens suivant :

d) G abélien

$$X \subset G \text{ est } p \text{ indépendant} \iff \left(\begin{array}{l} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \in A}} n_{\alpha} x_{\alpha} = 0 \implies n_{\alpha} = 0 \pmod{p} \\ \text{card } A < +\infty \end{array} \right)$$

p premier

On remarque que la forme d) est suffisante pour qu'il existe des x , p-indépendants dans D_{∞}

Propriété : $\left[\begin{array}{l} \text{Dans un groupe abélien localement compact } G \\ \text{Tout ensemble de Kronecker est indépendant} \end{array} \right.$

Démonstration : Soit $k_i : i = 1, 2, \dots, n$ un ensemble fini quelconque de points

de K tels que $\sum_1^n n_i k_i = 0$

Alors pour tout caractère χ sur G on a $\chi\left(\sum_1^n n_i k_i\right) = 1$

$$\text{Soit } \prod_{i=1}^n [\chi(k_i)]^{n_i} = 1$$

Or K est de Kronecker.

Pour toute fonction f continue de module 1 on a

$$\prod_{i=1}^n f(k_i)^{n_i} = 1$$

Ce qui ne peut être réalisé que si $n_i = 0 \forall i$

Donc K est indépendant.

On remarque que le Kronecker K ne contient pas d'élément d'ordre fini. En conséquence dans les groupes d'ordre borné, il n'y a pas d'ensembles de Kronecker. On va alors définir les ensembles de type K_p

4. Ensemble E de type K_p :

On note $Z(p)$ le sous groupe cyclique d'ordre p (premier) du tore.

$$Z(p) = \left\{ \exp 2i\pi j/q \quad 0 \leq j \leq q-1 \right\}$$

$E \subset G$ est dit de type K_p $p \geq 2 \iff \mathcal{C}(E, Z(p)) = \hat{G}/E$

où \hat{G}/E = ensemble des restrictions à E des caractères de G .

On peut remarquer, en appliquant le raisonnement utilisé dans la démonstration précédente que les ensembles de type K_p sont des ensembles indépendants (au sens III, I.3 d) et contiennent uniquement des éléments d'ordre p .

Propriété : Un ensemble E compact de type K_p est de Helson

Démonstration : analogue à celle du III, I, 2

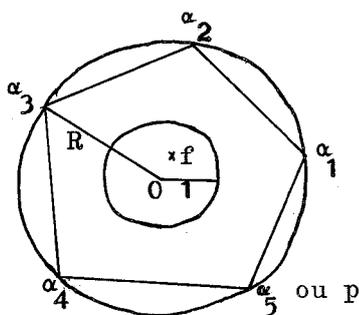
Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où G est compact

Soit $f \in [\mathcal{C}(E)]_1$ (boule unité de $\mathcal{C}(E)$) et soit la boule de $\mathcal{C}(E)$ de rayon R plus grand que 1 telle que f appartienne à la fermeture convexe de l'ensemble constitué par les applications α_j : homomorphismes de G dans $R * Z(p)$

$$\text{Alors } f = \sum \lambda_j \alpha_j \quad \text{où } \lambda_j > 0 \quad \text{sur } E$$

$$\sum \lambda_j = 1$$

Les α_j sont, à une constante multiplica-



tive près R , des caractères de G

$$\alpha_j = R * \chi_j \quad \chi_j \text{ caractère}$$

en conséquence $\mathcal{C}(E)$ et $A(E)$ sont isomorphes

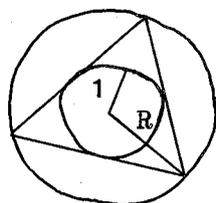
Ils ne sont pas isométriques :

La plus grande valeur de R que l'on puisse rencontrer correspond au cas où il n'y a que trois fonctions α_j

La fermeture convexe des α_j est alors un triangle et si l'on veut que toute

la boule unité de $\mathcal{C}(E)$ soit dedans il

faut prendre $R \geq 2$



Ceci entraîne : $\forall R \geq 2 \quad \|f\|_{A(E)} \leq R$

D'où $\|f\|_{A(E)} \leq 2$

Or $\|f\|_{\infty} < 1$ D'où

$$\frac{1}{2} \|f\|_{A(E)} \leq \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A(E)}$$

5. Etude des ensembles finis indépendants

Théorème : Soit un ensemble fini E indépendant dans G localement compact abélien

- a) Si tout $x \in E$ est d'ordre infini E est un Kronecker.
- b) Si tout $x \in E$ est d'ordre fini p alors E est de type K_p .

Démonstration : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ et H le sous groupe de G engendré par E i.e l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum n_i x_i, n_i \in \mathbb{Z}$$

Soit f une fonction quelconque définie sur E et à valeurs dans \mathbb{T}

Soit ϕ l'extension de f à H par linéarité :

$$\phi(x_i) = f(x_i)$$

Or $\forall x \in H \quad x = \sum n_i x_i$ et ce développement est unique

$$\text{on pose } \phi(x) = \phi\left(\sum n_i x_i\right) = \prod [f(x_i)]^{n_i}$$

\mathbb{T} est divisible (un groupe abélien D est divisible si $\forall x \in D$ et $\forall n \neq 0 \exists y \in D$ tq $ny = x$)

Dans ce cas là on sait que l'on peut étendre ϕ en un homomorphisme que nous noterons toujours ϕ de G tout entier dans \mathbb{T} .

(Démonstration analogue à celle du théorème de Hahn Banach)

ϕ est donc un caractère (peut-être non continu) de G

Nous allons utiliser la notion de compactifié de Bohr d'un groupe abélien localement compact ([4] p. 31)

On sait que l'ensemble Γ de tous les caractères continus d'un groupe est partout dense dans l'ensemble des caractères $\bar{\Gamma}$ (continus ou non) ;

L'ensemble de tous les caractères $\bar{\Gamma}$ muni de la topologie de la convergence simple est appelé compactifié de Bohr de Γ

Donc il existe un caractère χ continu de G tel que

$$|\bar{\phi}(x) - \chi(x)| < \epsilon \text{ sur } E$$

Envisageons les deux cas suivants :

a) Si tout $x \in E$ est d'ordre infini : Puisque l'ensemble de définition est fini f est continue sur E et il existe un caractère χ continu de G qui approxime f uniformément sur E . Donc E est un Kronecker

b) Si tout $x \in E$ est d'ordre fini p :

$$\forall x \quad px = 0$$

Or $\bar{\phi}$ est un homomorphisme donc $\bar{\phi}(px) = 1 = [f(x)]^p$

Donc ici f prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}(p)$.

Or ici puisque tout caractère χ est un homomorphisme continu

$\forall x \in E \quad \chi(px) = 1$ donc $\chi|_E$ prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}(p)$

Donc à condition de choisir ϵ suffisamment petit, le caractère χ est égal à f sur E .

Donc E est un ensemble de type K_p

II - Existence d'ensembles de Kronecker parfaits

Définition d'un ensemble de Cantor E

On démontre en topologie que les trois propriétés suivantes

- 1) E métrisable
- 2) E totalement discontinu

3) E parfait (c'est-à-dire compact sans point isolé)

caractérisent un espace topologique E à un homéomorphisme près.

Exemple : E est réalisé par $D_\infty = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j(2)$ ou par l'ensemble "triadique" de Cantor ou par D_p p entier ≥ 2 $D_p = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j(p)$ où $Z(p)$ est le sous groupe cyclique de T d'ordre p .

On cherche des ensembles de Cantor qui soient ou de Kronecker, ou de type K_p

On va montrer qu'on peut en trouver dans tout groupe non discret localement compact abélien.

Plus précisément : G groupe localement compact est un I -groupe si

et seulement si tout voisinage de 0 contient un élément d'ordre infini

Théorème :

1) Tout I -groupe localement compact abélien contient un ensemble de Cantor qui est un Kronecker

2) Si G localement compact abélien non discret et si G n'est pas un I -groupe alors G contient un ensemble de Cantor de type K_p pour un p convenable.

Démonstration : Voir [4] page 100.

Remarque : 1) D'après la fin du I tout ensemble fini indépendant est ou bien un Kronecker ou bien un ensemble de type K_p .

D'où des exemples très simples de Kronecker et d'ensembles de type K_p .

2) Pour l'assertion 2) du théorème on notera d'après [4] que tout groupe répondant aux hypothèses contient un ensemble D_p pour un p particulier et que c'est dans D_p qu'on cherche l'ensemble de type K_p .

III - Application : réalisation d'une algèbre de restriction

Soit G un groupe compact abélien qui s'écrit $G = G_1 \times G_2$

Soient $E_i \subset G_i$ $i = 1, 2$ E_i de Kronecker ou de type K_p

Si $(x, y) \in E = E_1 \times E_2 \longrightarrow x+y \in E_1+E_2$ est bijective, $E_1 \times E_2 = E_1+E_2 \subset G$

Alors $A(E)$ et $A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ sont isométriques (voir démonstration plus loin dans un cas plus général)

Application : On a vu que tout groupe localement compact abélien non discret contient un Kronecker de Cantor ou bien un Cantor de type K_p

Plaçons nous dans le 1er cas : E_1 et E_2 de Kronecker

E_1 et E_2 sont réalisés par D_∞ et puisque tout

Kronecker est de Helson $A(E_i) = \mathcal{C}(E_i, \mathbb{C})$ $E = E_1 \times E_2$

$$D^{\circ} \text{ où } A(E) = \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty) = V(D_\infty)$$

Dans le 2ème cas : Si E_i est un Cantor de type K_p alors

$$A(E_i) = \mathcal{C}(E_i) \text{ et } A(E_1 \times E_2) = \mathcal{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(E_2) = V(E)$$

Donc pour tout groupe compact abélien (au moins dans le cas où il se met sous la forme $G_1 \times G_2$) il existe une algèbre de restriction qui se réalise en $V(E)$

On pourra par l'étude de $V(E)$ tirer des renseignements sur $A(G)$.

IV - Cas général

On voudrait se débarrasser de la condition: G est sous la forme $G_1 * G_2$.

Soit G un groupe compact abélien

Théorème : a) Soient K_i $i = 1, 2, \dots, n$

$K_i \subset G$, K_i Kronecker (ou de type K_p)

1) deux à deux disjoints

2) $K = \bigcup_1^n K_i$ Kronecker (ou de type K_p)

b) Soient $G_p(K_j)$ = groupe engendré par K_j

$G_p(K_j) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n K_j - n K_j)$ avec $n X = \{x_1 + \dots + x_n \in G / x_j \in X\}$

c) Soient $E_j \subset G_p(K_j)$ tels que 1) E_j compact

2) $E_j \subset \bigcup_1^{N_j} (n K_j - n K_j)$

Alors $A(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$ est isométriquement isomorphe à

$$A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A(E_n)$$

Nous allons aborder le cas où K_i est de Kronecker. Le cas où K_i est de type K_p est parallèle.

Remarque : La notion de Kronecker est dans un certain sens une indépendance topologique.

On utilise cette notion en b)

L'hypothèse c) 2) n'est pas capitale mais elle évite des ennuis topologiques.

Démonstration :

$$\tilde{E} = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longleftrightarrow E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

est biunivoque.

En effet : $G_p(K_i)$ et $G_p(K_j)$ pour $i \neq j$ ont une intersection réduite à $\{0\}$

Tout élément commun s'écrirait $\sum n_\ell k_\ell^{(i)} = \sum n_p k_p^{(j)}$ et comme $K_i \cap K_j$ est de Kronecker donc indépendant il vient $n_p = n_\ell = 0$

en conséquence $G_p(K_1) + G_p(K_2) + \dots + G_p(K_n) \longleftrightarrow G_p(K_1) \times G_p(K_2) \times \dots \times G_p(K_n)$ est biunivoque et identifie $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ avec $E_1 + \dots + E_n$.

1ère étape de la démonstration : $A(E_1 + E_2 + \dots + E_n) \subset A(E_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A(E_n) = \hat{A}(\tilde{E})$

Soit $f \in A(G)$, alors puisque \hat{G} est discret $f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_\chi \chi$

On définit une application λ de $A(G)$ dans $\hat{A}(\tilde{E})$:

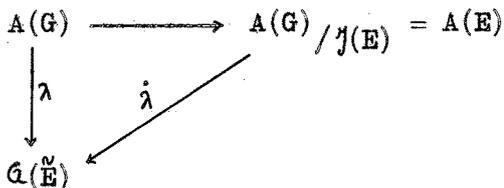
On la définit d'abord sur les caractères

$$\lambda(\chi) = \chi|_{E_1} \otimes \chi|_{E_2} \otimes \dots \otimes \chi|_{E_n}$$

où $\chi|_{E_i}$ désigne la restriction de χ à E_i

On a ainsi une application de norme 1 .

On l'étend à $A(G)$ par linéarité.



or λ est nulle sur $\mathcal{J}(E)$:

en effet $\mathcal{J}(E)$ étant l'idéal des

fonctions nulles sur E on a :

$$f \in \mathcal{J}(E) \text{ alors pour } e \in E \quad f(e) = \sum_{\chi} \beta_{\chi} \chi(e) = 0$$

Or $e \in E$ donc $e = e_1 + \dots + e_n$

$$\lambda[f(e)] = \sum \beta_{\chi} \lambda[\chi(e)]$$

Or les caractères sont multiplicatifs donc

$$\lambda[\chi(e)] = \chi(e_1) * \chi(e_2) * \dots * \chi(e_n) = \chi(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$$

D'où $\lambda f(e) = 0$ pour tout $e \in E$ donc $\forall f \in \mathcal{J}(E) \quad \lambda(f) = 0$

Soit $\dot{\lambda}$ l'application injective associée à λ par le passage au quotient

$$A(G) \longrightarrow A(G)/\mathcal{J}(E)$$

$\dot{\lambda}$ fait décroître la norme :

en effet : $\dot{\lambda}$ est l'application qui à $\check{f} \in A(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$ associe

$F \in \mathcal{G}(E_1 * \dots * E_n)$; \check{f} est une classe d'équivalence de fonctions de $A(G)$

$$F(e_1, \dots, e_n) = \check{f}(e_1 + \dots + e_n) \quad \check{f} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_{\chi} \chi$$

$F \in \mathcal{G}(\check{E})$

$$F(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_{\chi} \chi(e_1 + \dots + e_n) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_{\chi} \chi(e_1) \chi(e_2) \dots \chi(e_n)$$

$\forall \epsilon > 0$ il existe un développement de \check{f} tel que $\sum |\alpha_{\chi}| \leq \|\check{f}\|_{A(E)} + \epsilon$

D'autre part $\|F\|_{\mathcal{G}(\check{E})}$ est telle que $\|F\|_{\mathcal{G}(\check{E})} \leq \sum |\alpha_{\chi}|$

D'où $\|F\|_{\mathcal{G}(\check{E})} \leq \|\check{f}\|_{A(E)}$ $\dot{\lambda}$ fait décroître la norme

2ème étape de la démonstration : $\dot{\lambda}$ est surjective et isométrique

On va utiliser le théorème de Banach énoncé au I, 2.

Ici pour démontrer que $\dot{\lambda}$ est surjective et isométrique il suffit de démon-

trer que l'image par $\overset{\circ}{\lambda}$ de la boule unité de $A(E)$ est dense dans la boule unité de $\mathcal{A}(\tilde{E})$ (densité par rapport à la topologie de $\mathcal{A}(\tilde{E})$.)

Or un élément de la boule unité de $\mathcal{A}(\tilde{E})$ est un produit tensoriel de la

forme $F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j^{(1)} \otimes \dots \otimes f_j^{(n)}$ où $f_j^{(i)}$ appartient à la boule unité de $A(E_i)$

avec $\sum |\lambda_j| \leq 1 + \varepsilon$ ε dépendant du développement de F

Il suffit de savoir approcher un monôme $\lambda_j f_j^{(1)} \otimes \dots \otimes f_j^{(n)}$ par une image par $\overset{\circ}{\lambda}$ d'un élément de la boule unité de $A(E)$.

Il suffit même de savoir approcher les monômes de la forme suivante :

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes f_j^{(i)} \otimes 1 \dots \otimes 1$$

1 étant la notation représentant la fonction constante et égale à 1 et

$f_j^{(i)}$ étant toujours un élément quelconque de la boule unité de $A(E_i)$

On se ramène ensuite au cas précédent en faisant le produit dans l'algèbre tensorielle.

On remarque que $f_j^{(i)}$ élément de la boule unité de $A(E_i)$ s'écrit :

$$f_j^{(i)} = \sum_{\chi \in G} \alpha_{\chi} \chi_{/E_i} \quad \sum |\alpha_{\chi}| \leq 1 + \varepsilon$$

où $\chi_{/E_i}$ désigne la restriction du caractère χ à E_i

Il suffira donc d'approcher $\xi = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \chi_{/E_i} \otimes 1 \dots \otimes 1$

Il faut donc approcher ξ par un élément de la forme $\Psi_{/E_1} \otimes \Psi_{/E_2} \otimes \dots \otimes \Psi_{/E_n}$

où ψ est un caractère de G .

Cas particuliers : 1) $E_1 = K_1$ Kronecker compact

$E_2 = K_2$ Kronecker compact

$K_1 \cup K_2$ Kronecker

Dans ce cas précis on sait que $A(K_i)$ et $\mathcal{C}(K_i)$ sont isomorphes isométriquement de même que

$$A(K_1 \cup K_2) \text{ et } (K_1 \cup K_2) \quad (\text{cf I-2})$$

On veut approcher $\chi_{/K_1} \otimes 1$:

Considérons la fonction ψ continue sur $K_1 \cup K_2$ telle que ψ et χ coïncident sur K_1 et ψ soit constante et égale à 1 sur K_2

Alors $\|\psi\| = 1$

Puisque $K_1 \cup K_2$ est un Kronecker, ψ de norme 1 est approchable par des caractères uniformément sur $K_1 \cup K_2$.

Or ici approcher dans la norme uniforme ou dans la norme de $A(K_1 \cup K_2)$

c'est la même chose

D'où $\exists \theta$, caractère tel que

$$\|\psi - \theta\|_{A(K_1 \cup K_2)} < \epsilon$$

Dans ce cas simple on peut même approcher directement $\chi_{/K_1} \otimes \mathcal{C}_{/K_2}$

où χ et \mathcal{C} sont des caractères de G .

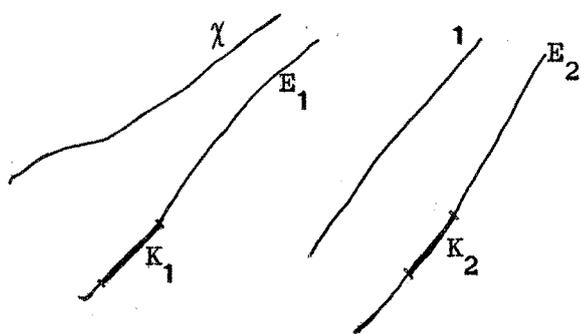
en effet on considère alors la fonction Φ continue qui coïncide avec χ

sur K_1 et avec τ sur K_2 $\|\Phi\| = 1$ et Φ est approchable par des caractères.

- 2) E_1 est compact de type K_p]
 E_2 est compact de type K_p]

Alors E_1 et E_2 sont de Helson et $A(E_i)$ et $\mathcal{C}(E_i)$ sont isomorphes et de métriques équivalentes. On trouverait les mêmes résultats

3) Cas général : pour la simplicité de l'exposé on se limite à deux



ensembles E_1 et E_2

On veut approcher $\chi/E_1 \otimes 1$ par un caractère

dans la norme de $\mathcal{C}(E_1 \times E_2)$

Soit ψ la fonction continue coïncide avec χ

sur E_1 et qui vaut 1 sur E_2

D'après 1) on sait approcher (dans la norme uniforme et sur $K_1 \cup K_2$ uniquement) ψ par le caractère θ .

Mais ici on sait que $E_i \subset \bigcup_{n=1}^{N_i} (n K_i - n K_i)$

$$\text{D'où } \forall x \in E_1 \quad x = \sum k_j^{(1)} \quad k_j^{(1)} \in K_1$$

En conséquence

$$\psi(\sum k_j^{(1)}) = \chi(\sum k_j^{(1)}) = \pi \chi(k_j^{(1)})$$

ψ est toujours de norme 1. On saura donc l'approcher uniformément sur

$E_1 \cup E_2$ par des caractères.

Or on a besoin d'approcher ψ en norme de $A(E_1 \cup E_2)$; on utilisera la proposition suivante qui sera démontrée chap. IV page 5 page 5

Proposition : Soit E un compact d'un groupe abélien compact G

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \{ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \chi_1, \chi_2 \text{ tq } \| \chi_1|_E - \chi_2|_E \|_{\infty} \leq \eta \\ \text{alors } \| \chi_1 - \chi_2 \|_{A(E)} \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Chapitre IV

Problème de la synthèse spectrale

Soit B une algèbre de Banach commutative unitaire, régulière, semi-simple. $\mathcal{PM}(B)$, espace des pseudo-mesures sur B désigne le dual de B .

Support d'une pseudo-mesure $S \in \mathcal{PM}(B)$ [10]

Soit σ la famille des fermés F de \mathcal{M}_B tels que

$$\forall x \in B \quad \text{Supp } \hat{x} \cap F = \emptyset \implies \langle S, x \rangle = 0$$

On démontre que σ est stable par intersection.

Le support de S est $\bigcap_{\sigma} F$, c'est le plus petit élément de σ .

Si S est une distribution, $\bigcap_{\sigma} F$ est aussi son support en tant que distribution.

Définition : Soit E un fermé de \mathcal{M}_B .

$\mathcal{PM}(E)$ désigne l'ensemble des pseudo-mesures de B dont le support est inclus dans E .

Proposition : Soit E un fermé de \mathcal{M}_B . E est de synthèse si et seulement si

$$\mathcal{PM}(E) = I(E)^\perp.$$

$$J(E) = \overline{I_0(E)} = \overline{\{x \in B \mid \text{Supp } \hat{x} \cap E = \emptyset\}}$$

On a donc $\mathcal{PM}(E) = J(E)^\perp$

" E est de synthèse" équivaut à $I(E) = J(E)$, donc à $I(E)^\perp = J(E)^\perp$ (car

$[I(E)^\perp]^\perp = I(E)$ d'après le théorème de Hahn-Banach).

Définitions : $S \in \text{PM}(E)$ est synthésable sur E si

$$x \in I(E) \implies \langle S, x \rangle = 0$$

$x \in I(E)$ est synthésable sur E si $x \in J(E)$.

exemple : toute mesure est synthésable sur son support :

Soit $B = \mathcal{C}(K)$ K compact ; $\mathcal{M}_B = K$.

Le support de $S \in M(K)$ est le plus petit fermé $E \subset K$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) \text{ Supp } f \cap E = \emptyset \implies \langle S, f \rangle = 0$$

$$f \in I(E) \iff f(E) = 0 \iff f \in \overline{\{g \in \mathcal{C}(K) \mid \text{Supp } g \cap E = \emptyset\}} \implies \langle S, f \rangle = 0$$

Remarque : A toute mesure μ sur \mathcal{M}_B on peut associer une pseudo-mesure $\dot{\mu}$

$$\text{sur } B = \langle x, \dot{\mu} \rangle = \langle \hat{x}, \mu \rangle$$

On a évidemment $\text{Supp } \dot{\mu} = \text{Supp } \mu$.

On désigne par $M(E)$ les mesures de $M(\mathcal{M}_B)$ dont le support est inclus dans $E \subset \mathcal{M}_B$.

Proposition : $S \in \text{PM}(E)$ est synthésable sur E si et seulement s' il existe une suite $(\mu_\alpha) \in M(E)$ telle que $(\dot{\mu}_\alpha)$ converge faiblement vers S .

$$\iff \forall x \in I(E) \quad \langle x, \dot{\mu}_\alpha \rangle = \langle \hat{x}, \mu_\alpha \rangle = 0$$

$$\text{donc } \langle x, S \rangle = \lim_{\alpha} \langle x, \dot{\mu}_\alpha \rangle = 0$$

\implies on suppose que $S \notin \overline{M(E)}$

D'après le théorème de Hahn-Banach :

$$\exists x \in \text{PM}(B) : \langle S, x \rangle \neq 0 \quad \langle \dot{\mu}, x \rangle = 0 \quad \forall \dot{\mu} \in \overline{M(E)}$$

or $B = \mathcal{PM}(B) : \quad \langle \hat{x}, \hat{\mu}_\alpha \rangle = 0 \quad \forall \mu \in \overline{M(E)} \implies x \in I(E)$

S ne peut être synthésable.

exemple : Soit $B = \mathcal{D}_1(\mathbb{T})$ algèbre des fonctions dérivables sur le tore. La distribution $\delta^1 : \langle \delta^1, f \rangle = f'(0)$ est une pseudo-mesure sur $\mathcal{D}_1(\mathbb{T})$, de support $\{0\}$.

Il existe $f \in \mathcal{D}_1(\mathbb{T})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

δ^1 n'est donc pas synthésable sur $\{0\}$ et ne peut être approchée par des mesures de support $\{0\}$. On démontre par contre que δ^1 peut être approchée sur $[-\epsilon, \epsilon]$ par des mesures de support $\subset [-\epsilon, \epsilon]$ c'est-à-dire que δ^1 est synthésable sur $[-\epsilon, \epsilon]$.

On se place désormais dans le cas où $B = A(G)$ avec $G = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{T}^n . On sait que $A(G)$ est isomorphe à $L^1(\hat{G})$ et a pour spectre G . On note $\mathcal{PM}(G)$ l'espace des pseudo-mesures sur $A(G)$. En fait, pour $G = \mathbb{R}^n$ $A(G)$ n'est pas unitaire et il faudrait considérer $A(GU_\infty)$. On supposera que les pseudo-mesures sont à support compact ne contenant pas le point à l'infini.

Comme $A(G) \supset \mathcal{D}(G)$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) ces pseudo-mesures sont des distributions à support compact.

Définition : La transformée de Fourier d'une pseudo-mesure S de $A(G)$ à support compact est définie par $\hat{S}(\chi) = \langle S, \chi \rangle \quad \forall \chi \in \hat{G}$

Elle coïncide avec sa transformée de Fourier en tant que distribution.

Théorème : Une distribution à support compact est une pseudo-mesure de $A(G)$
 $(G = \mathbb{T}^n \text{ ou } \mathbb{R}^n)$ si et seulement si sa transformée de Fourier est bornée.

\implies Soit $S \in \text{PM}(G)$

$$\|\hat{S}(\chi)\| \leq \|S\|_{\text{PM}(G)} \|\chi\|_{A(G)} = \|S\| < \infty.$$

\Leftarrow Soit S une distribution à support compact telle que $\|\hat{S}\|_{\infty} < \infty$.

S est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue sur $\mathcal{D}(G)$ pour la topologie de

$A(G)$: en effet (On note $\|\hat{S}\|_{\infty} = \sup_{\chi} |\hat{S}(\chi)|$)

$$\forall \hat{f} \in \mathcal{D}(G) \subset A(G) \quad |\langle S, \hat{f} \rangle| = |\langle \hat{S}, f \rangle| \leq \|\hat{S}\|_{\infty} \|f\|_{L_1(\hat{G})} = \|\hat{S}\|_{\infty} \|f\|_{A(G)}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, S se prolonge donc en pseudo-mesure sur

$$A(G) \text{ et } \|S\| = \|\hat{S}\|_{\infty}$$

Définition : Un compact $E \subset G$ (groupe compact abélien) est dit sans vraie
pseudo-mesure si $\text{PM}(E) = M(E)$, $\text{PM}(E)$ désignant les pseudo-mesures sur $A(G)$
à support dans E .

exemple : On considère l'algèbre $A(\mathbb{T})$ et $E = \{x\}$, $x \in \mathbb{T}$.

Soit S une pseudo-mesure de support $\{x\}$. S étant une distribution est
de la forme $\sum_{j=0}^p a_j \delta_{(x)}^j$. Sa transformée de Fourier est $\hat{S}(n) = \sum_{j=0}^p a_j (2\pi n)^j$.
 $\hat{S}(n)$ doit être bornée, donc $\hat{S}(n) = a_0$ et $S = \delta_x$. S est une mesure sur
 $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Théorème : un ensemble de Kronecker K compact inclus dans \mathbb{T} est sans vraie
pseudo-mesure.

- K est totalement discontinu, c'est-à-dire la composante connexe de tout point de K est réduite à ce point : sinon K contiendrait un intervalle $[xy]$, avec x, y rationnels. Alors il existerait $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$ et K ne pourrait être indépendant.

La démonstration utilisera la proposition suivante :

Proposition : Soit E compact d'un groupe abélien compact G . Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ indépendant de χ_1 et χ_2 tel que

$$\| \chi_{1/E} - \chi_{2/E} \|_{\infty} \leq \eta \text{ entraîne } \| \chi_1 - \chi_2 \|_{A(E)} \leq \varepsilon .$$

D'après l'étude de la dualité dans les Banachs,

$$f \in B \quad \| f \|_B = \sup_{\substack{S \neq 0 \\ S \in B'}} \frac{|\langle f, S \rangle|}{\| S \|}$$

Comme, $A(E) \subset PM(E)$ et $\| S \|_{A(E)} \geq \| S \|_{PM}$, on a

$$\| f \|_{A(E)} = \sup_{S \in A(E)} \frac{|\langle f, S \rangle|}{\| S \|_{A(E)}} < \sup_{S \in PM(E)} \frac{|\langle f, S \rangle|}{\| S \|_{PM}}$$
 il suffit donc de mon-

trer que $\forall S \in PM(E)$, $|\hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| \leq \varepsilon \| S \|$.

Lemme 1 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{4}$, $\exists f \in A(\mathbb{T})$ telle que $\| f \|_{A(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$

et $1 - e^{ix} - f(x) = 0 \quad \forall x \in [-\delta, +\delta]$

Soit $m \in \mathbb{N}$; $\forall x \in [-\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2m}]$ posons $y = mx$.

$$1 - e^{ix} = 1 - e^{\frac{iy}{m}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iy)^k}{m^k k!} .$$

Soit $g(y) \in A(\mathbb{T})$ le développement en série de Fourier de y : sur

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $g(y) = y$.

$$h_m(y) = 1 - e^{\frac{iy}{m}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[ig(y)]^k}{m^k k!} \in A(\mathbb{T})$$

$$\| 1 - e^{\frac{iy}{m}} \|_{A(\mathbb{T})} \leq e^{\frac{\|g\|}{m} A} - 1 = O\left(\frac{\|g\|}{m} A(\mathbb{T})\right)$$

Posons $f(x) = h_m(mx)$

$$\text{sur } \left[-\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2m}\right] \quad f(x) = 1 - e^{ix}$$

$$\| f(x) \|_A = \| h_m(mx) \|_A = \| h_m(x) \|_A = O\left(\frac{\|g\|}{m} A\right)$$

On peut généraliser au cas d'un groupe abélien localement compact G .

Lemme 2 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \theta \quad \forall \chi \in \hat{G} \quad \exists \tilde{f} \in A(G)$ telle que

$$(i) \quad \| \tilde{f} \|_{A(G)} \leq \varepsilon$$

$$(ii) \quad | 1 - e^{-i\theta} \chi(x) | < \alpha \implies 1 - e^{-i\theta} \chi(x) - \tilde{f}(x) = 0$$

Soit $f(t) = \sum a_n e^{int}$ la fonction construite dans le lemme 1. Posons

$$f(t) = f_1(e^{it}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_1(z) = \sum a_n z^n \quad \text{avec} \quad z = e^{it}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \alpha \quad |1-z| < \alpha \implies |t| < \delta.$$

δ étant défini comme dans le lemme 1, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \quad |1-z| < \alpha \implies$

$$1 - z - f_1(z) = 0.$$

$$\text{Soit} \quad \tilde{f}(x) = f_1(e^{-i\theta} \chi(x)) = \sum a_n e^{-in\theta} \chi^n(x)$$

$$\tilde{f} \in A(G) \quad \text{et} \quad \| \tilde{f} \|_{A(G)} = \sum |a_n| < \varepsilon.$$

$$\text{D'autre part} \quad |1 - e^{-i\theta} \chi(x)| < \alpha \implies 1 - e^{-i\theta} \chi(x) - \tilde{f}(x) = 0$$

Lemme 3 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad 0 < \eta < \varepsilon \quad , \quad \forall \theta \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G} \quad \forall S \in \text{PM}(G)$

$$tq \quad |e^{i\theta} \chi_1(x) - \chi_2(x)| < \eta \quad \text{sur le support de } S \implies$$

$$|e^{i\theta} \hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| \leq \varepsilon \|S\|$$

Posons $\lambda(x) = e^{i\theta} \chi_1(x) - \chi_2(x) - e^{i\theta} \chi_1(x) \tilde{f}(x)$ où \tilde{f} est définie comme dans le lemme 2. $\lambda(x) \in \mathbf{A}(G)$.

$$\lambda(x) = e^{i\theta} \chi_1(x) [1 - e^{-i\theta} \chi_2 \chi_1^{-1}(x) - \tilde{f}(x)]$$

Soit $\eta = \inf(\varepsilon, \frac{\alpha}{2})$ où α est défini comme dans le lemme 2. (η est indépendant de $\theta, \chi_1, \chi_2, S$). Si $|e^{i\theta} \chi_1(x) - \chi_2(x)| = |1 - e^{-i\theta} \chi_2 \chi_1^{-1}(x)| \leq \eta$ sur le support de S , $\{x \mid |1 - e^{-i\theta} \chi_2 \chi_1^{-1}(x)| < \alpha\}$ est un ouvert, dépendant de χ_1 et θ , contenant le support de S . Sur cet ouvert $\lambda(x) = 0$, donc $\langle S, \lambda \rangle = 0$. $|e^{i\theta} \hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| = |S, e^{i\theta} \chi_1(x) \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon \|S\|$.

Démonstration du théorème :

- Lemme 4 : Soit $S \in \text{PM}(\mathbf{T})$ telle que son support soit un Kronecker et telle que

$$S = \sum_1^r S_j \text{ avec } S_j \in \text{PM}(\mathbf{T}) \quad \text{Supp } S_j \cap \text{Supp } S_{j'} = \emptyset \text{ pour } j \neq j'$$

$$\text{Alors } \|\hat{S}\|_\infty = \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty$$

$$\text{On a évidemment } \|\hat{S}\|_\infty \leq \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty.$$

Il suffit donc de montrer :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|\hat{S}\|_\infty \geq \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_j) \in \mathbf{Z} \quad \exists (\theta_j) \in \mathbf{R}$$

$$|\sum_1^r e^{i\theta_j} \hat{S}_j(n_j)| \geq \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le support K de S étant un Kronecker la fonction continue sur K dont la restriction à $\text{Supp } S_j$ est $e^{i\theta_j} e^{in_j t}$ est approchée uniformément par des

caractères :

$$\forall \delta' > 0 \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \sup_j \left(\sup_{t \in S_j} |e^{i\theta_j} e^{in_j t} - e^{int}| \right) < \delta'.$$

D'après le lemme 3 : On a donc : $\forall \delta > 0 \quad \exists n \in \mathbb{Z}, \forall j |e^{i\theta_j} \hat{S}_j(n_j) -$

$$- \hat{S}_j(n)| < \delta_1 \|S_j\| < \frac{\delta}{2r}$$

$$\text{Alors } \|\hat{S}\|_\infty \geq |\hat{S}(n)| = \left| \sum_1^r \hat{S}_j(n) \right| \geq \left| \sum_1^r e^{i\theta_j} \hat{S}_j(n_j) \right| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \varepsilon$$

- lemme 5 : Soit $S \in \text{PM}(\mathbb{T})$, $S \neq 0$ telle que

(i) $\text{Supp } S = K$ est totalement discontinu :

(ii) Pour toute décomposition $S = \sum_{j=1}^r S_j$ $S_j \in \text{PM}(\mathbb{T})$
 $\text{Supp } S_j \cap \text{Supp } S_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$

$$\text{On a} \quad \|\hat{S}\|_\infty = \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty$$

Alors $S \in M(\mathbb{T})$.

Soit $V(K) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \mid \exists \Omega \text{ ouvert}, \mathbb{T} \supset \Omega \supset K \text{ card } f(\Omega) < \infty\}$.

$V(K)$ est un sous-espace partout dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour la convergence uniforme, d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

$\forall f \in V(K) \quad \exists \check{f} \in A(\mathbb{T}) \quad f = \check{f}$ sur un voisinage de K .

Alors $\langle \underline{\quad}, f \rangle = \langle S, \check{f} \rangle$ est indépendant de \check{f} et $\underline{\quad}$ est une forme linéaire sur $V(K)$.

$\forall f \in V(K) \quad \forall \Omega$ ouvert tel que $\text{card } f(\Omega) < \infty \quad \forall x \in f(K)$ qui est discret,

$$\Omega_x = \Omega \cap f^{-1}(x) \text{ est ouvert et } K \subset \bigcup_{x \in f(K)} \Omega_x.$$

Les Ω_x sont en nombre finis et disjoints.

$$\text{Donc } S = \sum_{x \in f(K)} S_x \quad \begin{array}{l} S_x \in \text{PM}(\mathbb{T}) \\ \text{Supp } S_x \subset f^{-1}(x) \cap K \cap \Omega_x \end{array}$$

$$\text{et } \langle \sum, f \rangle = \sum_{x \in f(K)} \langle S_x, f \rangle = \sum_{x \in f(K)} x \langle S_x, 1 \rangle = \sum_{x \in f(K)} x \hat{S}_x(0)$$

$$|\langle \sum, f \rangle| \leq \sup_{k \in K} |f(k)| \sum_{x \in f(K)} \|\hat{S}_x\|_\infty = \sup_{k \in K} |f(k)| \|\hat{S}\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\hat{S}\|_\infty$$

\sum est donc une forme linéaire sur $V(K)$ continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'après le théorème de Hahn-Banach \sum se prolonge en mesure μ_S à support $\subset K$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $\|\mu_S\| \leq \|\hat{S}\|_\infty$.

$\mu_S \in \text{PM}(\mathbb{T})$ et coïncide avec S si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \hat{S}(n) = \hat{\mu}_S(n)$

$$(\text{en effet, } \forall f \in \mathbf{A}(\mathbb{T}) \quad \langle (S - \mu_S), f \rangle = \langle \hat{S} - \hat{\mu}_S, f \rangle)$$

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \varepsilon > 0$ Soit $\Psi \in V(K)$ telle que $\sup_{k \in K} |e^{\frac{i\Psi}{nk}} - \Psi(k)| \leq \eta$

où η est défini par le lemme 3 pour $\frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty}$ (Ψ existe car $V(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$).

$$\text{Alors } S = \sum_{x \in \Psi(K)} S_x \quad \begin{array}{l} S_x \in \text{PM}(\mathbb{T}) \\ \text{Supp } S_x \subset K \cap \Psi^{-1}(x) \end{array}$$

$$\text{et } |\hat{S}_x(n) - x \hat{S}_x(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} \|S_x\| \quad \forall x \in \Psi(K)$$

$$|\hat{S}(n) - \sum_{x \in \Psi(K)} x \hat{S}_x(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} \sum_{x \in \Psi(K)} \|S_x\| = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \|S\| = \|\hat{S}\|_\infty$$

$$\text{Or } \langle \mu_S, \Psi \rangle = \langle \sum, \Psi \rangle = \sum_{x \in \Psi(K)} x \hat{S}_x(0)$$

$$|\langle \mu_S, e^{int} \rangle - \langle \mu_S, \Psi \rangle| \leq \|\hat{S}_\infty\| \eta \leq \|\hat{S}_\infty\| \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $|\hat{S}(n) - \hat{\mu}_S(n)| \leq \varepsilon$.

Corollaire : Tout Kronecker compact de \mathbb{T} est un ensemble de synthèse.

$M(K) \subset I(K)^\perp$ car toute mesure est synthésable sur son support.

On a donc $PM(K) = M(K) \subset I(K)^\perp \subset J(K)^\perp = PM(K)$.

Proposition : Soit E un fermé d'un groupe compact G .

E est de synthèse si et seulement si $A(E)' = PM(E)$.

- E est de synthèse $\iff PM(E) = I(E)^\perp$

- $I(E)^\perp = \{S \in PM(G) \mid \ker S \supset I(E)\} = \{\hat{S} \in (A(G)/I(E))'\} = A(E)'$

Proposition : Soit H un sous ensemble d'un groupe compact G .

H est de Helson si et seulement si $M(H) (= \mathcal{C}(H)') = A(H)'$.

Les normes $\|\mu\|_{M(H)}$ et $\|\mu\|_{[A(H)]'}$ sont alors équivalentes.

En effet H est de Helson $\iff A(H) = \mathcal{C}(H)$ avec des normes équivalentes.

Corollaire : Soit E un fermé dans un groupe compact G .

E est sans vraie pseudo-mesure $\iff E$ est de Helson et de synthèse

$\iff PM(E) = A(E)' = M(E)$

\implies On a toujours $M(E) \subset A(E)' \subset PM(E)$.

Chapitre V

Problèmes de synthèse

I - L'application de Hopf

1) Soit G un groupe compact.

On définit les homomorphismes d'algèbres : $L^1(G) \xrightarrow{M} L^1(G \times G) \xrightarrow{P} L^1(G)$

$$f \rightsquigarrow Mf \quad (Mf)(x,y) = f(x+y)$$

$$F \rightsquigarrow PF \quad (PF)(t) = \int_G F(t-x, x) dx \quad (dx \text{ étant la mesure de Haar sur } G).$$

2) $P \circ M(f)(t) = \int_G f(t) dx = f(t)$ $P \circ M$ est l'identité sur $L^1(G)$.

3) On a les inclusions suivantes (G étant compact)

$$V(G) = \mathcal{L}(G) \hat{\otimes} \mathcal{L}(G) \xrightarrow{\forall p, q \geq 2} L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G) \xrightarrow{\forall p, q \geq 2} L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G) \xrightarrow{\forall p, q \geq 2} L^1(G) \hat{\otimes} L^1(G) \xrightarrow{\forall p, q \geq 2} L^1(G \times G)$$

Proposition : P applique $L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G)$ dans $A(G)$ et $\|P\| \leq 1$

$$\text{Soit } F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes \varphi_j \quad \text{où } f_j, \varphi_j \in L^2(G) \quad \text{et} \quad \sum_j \|f_j\|_{L^2} \|\varphi_j\|_{L^2} < \infty$$

$$(PF)(t) = \int_G \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t-x) \varphi_j(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * \varphi_j(x)$$

d'après le théorème de Plancherel la transformation de Fourier est une isométrie

de l'algèbre $L^2(G)$ munie du produit de convolution sur l'algèbre $L^2(\hat{G})$

munie du produit ordinaire.

Donc $f_j * \varphi_j(x) = [\hat{f}_j \hat{\varphi}_j](x)$. D'après l'inégalité de Schwarz, $\hat{f}_j \hat{\varphi}_j \in L^1(\hat{G})$

c'est-à-dire que $f_j * \psi_j(x) \in A(G) = \mathcal{F}L^1(\hat{G}) \subset \mathcal{L}(G) \subset L^1(G)$

$$\|PF\|_{A(G)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j * \psi_j\|_{A(G)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{f}_j\|_{L^2(\hat{G})} \|\hat{\psi}_j\|_{L^2(\hat{G})} = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L^2(G)} \|\psi_j\|_{L^2(G)}$$

or $\|F\|_{L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G)} = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L^2(G)} \|\psi_j\|_{L^2(G)}$ donc $\|PF\|_{A(G)} \leq \|F\|_{L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G)}$

De même P applique $V(G) = \mathcal{L}(G) \hat{\otimes} \mathcal{L}(G)$ dans $A(G)$ et $\|P\| \leq 1$:

$$\|PF\|_{A(G)} \leq \sum_j \|f_j\|_{L^2(G)} \|\psi_j\|_{L^2(G)} \leq \sum_j \|f_j\|_{\mathcal{L}(G)} \|\psi_j\|_{\mathcal{L}(G)}$$

$$\|F\|_{V(G)} = \inf \sum_j \|f_j\|_{\mathcal{L}(G)} \|\psi_j\|_{\mathcal{L}(G)} \longrightarrow \|PF\|_{A(G)} \leq \|F\|_{V(G)}$$

4) Proposition : M applique $A(G)$ dans $V(G)$ et $\|M\| \leq 1$.

Soit $f \in A(G)$ $f(x) = \sum \alpha_\chi \chi(x)$ avec $\sum |\alpha_\chi| < \infty$.

$$(Mf)(x,y) = \sum \alpha_\chi \chi(x+y) = \sum \alpha_\chi \chi(x) \chi(y) \in V(G) \text{ car } \chi \in \mathcal{L}(G)$$

$$\|Mf\|_{V(G)} \leq \sum |\alpha_\chi| = \|f\|_{A(G)}$$

Conséquence : $P \circ M$ est l'identité sur $A(G)$ d'après 2.

$$A(G) = P \circ M(A(G)) \subset P(V(G)) \text{ (d'après 4)} \subset A(G) \text{ (d'après 3)}$$

Donc $P(V(G)) = A(G)$ [mais cela n'entraîne pas $M(A(G)) = V(G)$]

Comme $P \circ M$ est une isométrie, $\|P \circ M(g)\| = \|g\| \leq \|M(g)\| \leq \|M\| \|g\|$

M est donc une isométrie.

M identifie $A(G)$ à l'ensemble des fonctions de $V(G)$ qui ne dépendent que de $x+y$; c'est un plongement d'une algèbre de groupe dans une algèbre tensorielle.

II - Problème de synthèse spectrale - Théorème de P. Malliavin

On dit que la synthèse spectrale est en défaut dans une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple R si le spectre de R contient un fermé E qui n'est pas de synthèse. On va étudier le problème pour les algèbres $A(G)$ et $V(G)$.

Le raisonnement se fera en deux étapes :

1) Dès qu'on a un contre exemple pour une algèbre, alors la synthèse est en défaut partout.

2) On cherche une algèbre pour laquelle il n'y a pas synthèse.

Théorème de P. Malliavin

Dès que la synthèse est en défaut dans $A(\mathbb{R}^3)$ ou $A(\mathbb{T}^3)$, elle est en défaut dans tout $A(G)$ pour G groupe compact infini et aussi dans tout $V(K_1 \times K_2)$ où K_1 et K_2 sont des ensembles parfaits métrisables.

1ère étape :

a) le défaut de synthèse dans $A(\mathbb{T}^3)$ entraîne le défaut de synthèse dans $V(D_\infty)$

b) le défaut de synthèse dans $V(D_\infty)$ entraîne le défaut de synthèse dans $A(G)$ et $V(K_1 \times K_2)$

étude du b)

$$\text{Soit } V(K_1 \times K_2) = \hat{\mathcal{L}}(K_1) \hat{\otimes} \hat{\mathcal{L}}(K_2)$$

où K_1 et K_2 sont parfaits (i.e. compacts sans point isolé) métrisables :
 donc il existe $\tilde{K}_i \subset K_i$ tel que \tilde{K}_i soit parfait métrisable totalement dis-
 continu

c'est-à-dire \tilde{K}_i est homéomorphe à D_∞

Considérons l'injection canonique $\tilde{K}_i \longrightarrow K_i$

et le morphisme induit $g : \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{K}_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\tilde{K}_2) \simeq V(D_\infty)$

g est l'application canonique "quotient" appliquant

$$V(K_1 \times K_2) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \text{ sur } V(K_1 \times K_2) / \mathcal{J}(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$$

où $\mathcal{J}(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$ est l'idéal des fonctions nulles sur $\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$

Lemme : Soient $R(K)$ une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple,
 de spectre K , E un fermé de K , $\mathcal{J}(E)$ l'idéal des fonctions nulles sur E
 et $R(E) = R(K) / \mathcal{J}(E)$
 S'il y a défaut de synthèse dans l'algèbre quotient $R(E)$, alors il y a dé-
 faut de synthèse dans $R(K)$

En effet : Si $R(E)$ est de non synthèse, il existe un ensemble E_1 fermé de
 son spectre E tel que

$$\exists f \in I^{R(E)}(E_1) \subset R(E) \text{ et } f \notin J^{R(E)}(E_1)$$

c'est-à-dire (en identifiant f à sa transformée de Gelfand)

Il existe f nulle sur E_1 telle que f ne soit pas approchable par des
 fonctions nulles sur un voisinage de E_1 dans E .

Soit \tilde{f} extension de f $f \in I^{\mathbb{R}(K)}(E_1) \subset \mathbb{R}(K)$

Si \tilde{f} pouvait être approchée par des fonctions nulles sur un voisinage de E_1 dans K , f le serait aussi.

Conséquences :

1) Si $V(D_\infty)$ est de non synthèse alors pour K_1 et K_2 parfaits métrisables $V(K_1 \times K_2)$ est de non synthèse.

2) Dans tout groupe infini compact G on a vu (au chapitre III) qu'il existe $E \subset G$, E de Cantor qui soit un Kronecker ou un ensemble de type K_p . Or un modèle topologique d'ensemble de Cantor est D_∞ .

Soit une partition de E en E_1 et E_2 homéomorphes à D_∞ et tels que

$$E^3 = E_1 + E_2$$

On sait que

$$A(E^3) = A(E_1 + E_2) \text{ est isométrique à } \mathcal{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(E_2) = V(D_\infty)$$

Si $V(D_\infty)$ est de non synthèse, alors $A(E^3)$ est de non synthèse et d'après le lemme $A(G)$ est de non synthèse.

étude du a)

(a,1) Considérons $d : D_\infty \longrightarrow \mathbb{T}$ défini chap. II § III

$$\text{et } d^3 : D_\infty^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$$

D_∞^3 est compact métrisable sans point isolé totalement discontinu donc homéomorphe à D_∞

On sait que :

$$V(\mathbf{T}^3) \xrightarrow{d^3 \otimes d^3} V(D_\infty) \text{ est une isométrie et qu'elle possède un in-}$$

verse approximé local.

En conséquence si $V(\mathbf{T}^3)$ est de non synthèse alors $V(D_\infty)$ est de non synthèse.

(a,2) Considérons le plongement isométrique : $A(\mathbf{T}^3) \xrightarrow{M} V(\mathbf{T}^3)$; on peut même se placer dans le cas général d'un groupe compact.

$$A(G) \xrightarrow{M} V(G) \xrightarrow{P} A(G)$$

D'après IV, I : M possède un inverse approximé qui est ici un inverse P

Cet inverse est local :

$M_\alpha f = Pf =$ intégrale sur les fibres (une fibre étant l'ensemble des (x,y)

tels que $\check{M}(x,y) = x+y$ fixé)

\hat{f} défini sur le spectre $G \times G$ peut-être identifié à f :

$$\text{soit } \check{M} : (x,y) \longrightarrow x+y$$

d'après la définition de M et P : $\text{Supp } [M_\alpha f]^\wedge \subset \check{M} [\text{Supp } \hat{f}]$

En conséquence :

si $A(\mathbf{T}^3)$ est de non synthèse alors $V(\mathbf{T}^3)$ est de non synthèse

2ème étape :

a) le défaut de synthèse dans $A(\mathbf{R}^3)$ entraîne le défaut de synthèse dans $A(\mathbf{T}^3)$

Supposons qu'il existe E fermé $\subset \mathbb{R}^3$ tel qu'il existe f nulle sur E et non approchable par des fonctions nulles dans un voisinage de E .

Cette propriété étant locale on peut supposer que f est à support compact.

Or les fonctions de ce type s'identifient à des fonctions de $A(\mathbb{T}^3)$:

Cas de \mathbb{R} et \mathbb{T} . Soit f une fonction de ce type : son support est contenu dans l'intervalle $[-L, +L]$. On "enroule" l'intervalle en identifiant $-L$ et $+L$ et $r \in [-L, +L] \longrightarrow e^{2i\pi r/L} \in \mathbb{T}$.

Cas de \mathbb{R}^3 et \mathbb{T}^3 . On "enroule" trois fois, c'est-à-dire sur chacune des trois composantes de la variable.

C'est-à-dire on effectue le changement de variables

$$f(x, y, z) = g\left(e^{\frac{2i\pi x}{L}}, e^{\frac{2i\pi y}{L}}, e^{\frac{2i\pi z}{L}}\right)$$

x, y et $z \in [-L, +L]$

En conséquence : si E est de non synthèse dans \mathbb{R}^3 , son transformé est de non synthèse dans \mathbb{T}^3 .

b) dans $A(\mathbb{R}^3)$ la sphère unité U_3 est de non synthèse (cf. article de L. Schwartz C.R. Acad. Sciences 227 pages 424-426-1948)

Dans le chapitre IV on a vu : E de synthèse $\iff \text{PM}(E) = I(E)^\perp$

il faut donc montrer qu'il existe $S \in \text{PM}(U_3)$ et $f \in I(U_3)$ tels que

$$\langle S, f \rangle \neq 0$$

Soit μ la mesure uniforme sur U_3 de masse totale 1.

$$\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{PM}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

$\mathcal{F}\mu = \hat{\mu}$ est définie sur \mathbb{R}^3 et est bornée (car $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R}^3)$ et on a vu au chap.

IV que : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution à support compact soit une pseudo mesure est que sa transformée de Fourier soit bornée)

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-2i\pi \langle r, \rho \rangle) d\mu(r) = \int_{U_3} \exp(-2i\pi \langle r, \rho \rangle) d\mu(r)$$

$$\text{D'où } \hat{\mu}(\rho) = K \int_0^\pi \exp(-2i\pi |\rho| \cos \theta) \sin \theta d\theta = C \frac{\sin 2\pi |\rho|}{|\rho|}$$

μ étant une distribution,

$$\text{si } \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \quad \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial r_1} = 2i\pi \rho_1 \hat{\mu}(\rho)$$

$$r = (r_1, r_2, r_3)$$

$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial r_1}$ est une distribution à transformée de Fourier bornée donc c'est une pseudomesure.

On peut toujours choisir f telle que \hat{f} soit nulle sur U_3 et telle que $\frac{\partial \hat{f}}{\partial r_1}$ soit ≥ 0 partout sur \mathbb{R}^3 et > 0 en au moins un point.

$$\text{Alors } \langle \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial r_1}, \hat{f} \rangle = \langle \mu, \frac{\partial \hat{f}}{\partial r_1} \rangle \neq 0$$

III - Autre méthode : Fonctions radiales

On va démontrer directement que $\forall n \geq 3$ $A(\mathbb{R}^n)$ est de non synthèse, en utilisant les fonctions radiales.

(A) Définitions et notations

- G désignant un groupe opérant sur \mathbb{R}^n , si F désigne une fonction quel-

conque définie sur \mathbb{R}^n on notera

$$gF : x \longrightarrow F(gx)$$

- Si V désigne un espace de Banach on dit que G opère sur V si

$$\left[\begin{array}{l} \forall g \in G, \forall v \in V \quad gv \in V \\ v \longrightarrow gv \text{ est une isométrie} \end{array} \right.$$

- Fonctions radiales :

On prend $G = SO_n$ groupe compact commutatif des rotations ou transformations orthogonales de \mathbb{R}^n . Il est simple de vérifier que SO_n opère sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et sur $A(\mathbb{R}^n)$.

A tout sous espace V de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur lequel SO_n opère on associe

$$\mathcal{R}V = \left\{ v \in V / \forall \sigma \in SO_n \quad \sigma v = v \right\}$$

$\mathcal{R}V$ = espace des fonctions radiales contenues dans V

On notera $\mathbb{R}_n = \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$

On peut identifier \mathbb{R}_n à une algèbre de fonctions définies sur $[0, \infty[$

$$f \in \mathbb{R}_n \quad f(x) = f(\rho) \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \rho \end{array}$$

- Soit B un espace de Banach de fonctions définies sur \mathbb{R}^n sur lequel opère SO_n .

Soit $\mu \in \mathcal{M}(SO_n)$

$$f \in B \quad \text{Posons} \quad (\mu * f)(x) = \int_{SO_n} \sigma f(x) \, d\mu(\sigma) \quad \begin{array}{l} \sigma \in SO_n \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

On sait que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } f \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ \mu \in \mathcal{M}(SO_n) \end{array} \right] \implies \mu * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et si on convole avec $\nu \in \mathcal{M}(SO_n)$ $(\nu * \mu) * f = \nu * (\mu * f)$

(B) Le défaut de synthèse dans \mathbb{R}_n entraîne le défaut de synthèse dans $A(\mathbb{R}^n)$

Considérons $\mathbb{R}_n \xrightarrow{M} A(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{P} \mathbb{R}_n$

où M est l'injection canonique de \mathbb{R}_n dans $A(\mathbb{R}^n)$ et P défini par :

$$f \in A(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Pf \quad \boxed{\begin{array}{l} Pf(\rho) = \int_{SO_n} f(\sigma \bar{\rho}) dh(\sigma) \\ \rho \in [0, \infty[\end{array}}$$

où $\left[\begin{array}{l} dh(\sigma) = \text{mesure de Haar normalisée du groupe } SO_n \\ \bar{\rho} = (\rho, 0, 0, \dots, 0) \end{array} \right.$

1° Vérifions que $Pf \in \mathbb{R}_n = \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$

a) $f \in A(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, y \rangle} \varphi(y) dy$$

$$Pf(\rho) = \int_{SO_n} f(\sigma \bar{\rho}) dh(\sigma) = \int_{SO_n} f(\sigma x) dh(\sigma) \quad \text{où } x \text{ désigne n'importe quel point de } \mathbb{R}^n \text{ sur la sphère de rayon } \rho$$

$$= h * f(x) \quad (h \text{ est invariante par } SO_n)$$

$$Pf(\rho) = \int_{SO_n} f(\sigma x) dh = \int_{SO_n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle \sigma x, y \rangle} \varphi(y) dy \right] dh$$

D'après le théorème de Fubini et en posant $\sigma y = t$

$$Pf(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, t \rangle} \left[\int_{SO_n} \varphi(\sigma t) dh \right] dt \quad (\text{car } dy \text{ est la mesure de Haar de } \mathbb{R}^n$$

et SO_n opère sur \mathbb{R}^n donc

$$d(\sigma t) = dt)$$

$$\int_{SO_n} (\sigma\varphi)(t) dh = h*\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Donc $Pf \in A(\mathbb{R}^n)$

b) $Pf \in \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$

Si δ_ζ est la mesure de Dirac associée à $\zeta \in SO_n$

$$\delta_\zeta * f = \zeta f$$

d'où $\delta_\zeta * h * f = h * f = Pf$ puisque h est invariante

c'est-à-dire $\zeta Pf = Pf \quad \forall \zeta \in SO_n$ et Pf est radiale.

2° Montrons que M a un inverse approximé local

On a $P \circ M = Id$, donc M a un inverse approximé qui est ici un inverse

$$\forall \alpha \quad M_\alpha = P$$

On veut montrer que: $\forall f \in A(\mathbb{R}^n)$ alors le compact $\widehat{\text{Supp } P(f)}$ est contenu

dans le compact

$$\overset{\vee}{M}(\widehat{\text{Supp } f})$$

Or $\|P\| \leq 1$ donc f nulle $\implies Pf$ nulle

On admet que le spectre de \mathbb{R}_n est $[0, \infty[$. On peut alors identifier les

fonctions de \mathbb{R}_n et $A(\mathbb{R}^n)$ à leurs transformées de Fourier.

$$D'où $\widehat{\text{Supp } Pf} \subseteq \overset{\vee}{M}(\widehat{\text{Supp } f})$$$

où $\overset{\vee}{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty[\quad x \longmapsto |x|$

(C) Tout revient à étudier les algèbres radiales

Théorème : $\left[n \geq 3 \quad \forall x \neq 0 \quad \{x\} \subset [0, +\infty[\right]$ est de non synthèse dans \mathbb{R}_n

Démonstration : E de synthèse $\iff PM(E) = I(E)^\perp$ donc $\{x\}$ est de non synthèse s'il existe $S \in PM\{x\}$ et $f \in I\{x\}$ tels que $\langle f, S \rangle \neq 0$

Les éléments du dual R_n^1 de R_n (encore appelés pseudo-mesures) sont des distributions (en effet il est clair que $\mathcal{D}]0, \infty[\subset R_n$ $n \geq 1$

Donc $R_n^1 \subset \mathcal{D}']0, \infty[$).

Toute distribution dont le support est un point admet une décomposition linéaire unique comme combinaison finie de dérivées de la mesure de Dirac associée à ce point.

S cherché est nécessairement de la forme $S = \sum_{j=0}^N \lambda_j \delta^{(j)}$

D'autre part $\forall f \in I\{x\}$, $\langle \delta, f \rangle = f(x) = 0$. Montrons que $S = \delta_x^{(1)}$

convient :

Soit $f \in \mathcal{D}]0, \infty[\subset R_n$ telle que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors $\langle f, \delta_x^{(1)} \rangle = - \langle \frac{df}{dx}, \delta \rangle = -f'(x) \neq 0$ pourvu que $\delta_x^{(1)} \in R_n^1$.

$$\underline{\delta_x^{(1)} \in R_n^1 \text{ pour } n \geq 3.}$$

Soit $\mathcal{E}_1(]0, +\infty[)$ l'espace des fonctions scalaires sur $]0, +\infty[$ une fois continûment différentiables, muni de la topologie la moins fine rendant continue l'application D^1 de cet espace dans $\mathcal{C}_c(]0, +\infty[)$: espace des fonctions continues sur $]0, \infty[$ muni de la topologie de la convergence compacte.

On sait que $\delta_x^{(1)} \in \mathcal{E}_1'$. Si $R_n \subset \mathcal{E}_1$, alors $R_n^1 \supset \mathcal{E}_1'$.

On va même démontrer mieux

Lemme : $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{E} \left[\frac{n-1}{2} \right] (]0, +\infty[)$ où $\left[\frac{n-1}{2} \right] =$ partie entière de $\frac{n-1}{2}$

(cf. Fourier transforms de S. Bochner et K. Chandrasekharan Annals of Mathematics studies n° 19 p. 67)

Si $f \in \mathbb{R}^n \subset A(\mathbb{R}^n)$ $n \geq 1$ f est la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radiale :

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ y &= (y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, y \rangle} g(y) dy \quad \text{avec} \quad \|f\|_A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

En décomposant $\int_{\mathbb{R}^n}$ en intégrale sur la sphère unité et sur le rayon vecteur

il vient :

$$f(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g_f(\rho) \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) d\rho \quad r \neq 0$$

où g_f désigne la fonction profil $g_f(\rho) = g(y)$ où $|y| = \rho$

et où $J_\lambda(t)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre λ .

On sait (cf. le livre de Courant-Hilbert : Methods of Mathematical physics vol. 1 chap. VII § 7 page 421) que ces fonctions vérifient :

$$\frac{d^s}{d(t)^{2s}} \frac{J_\lambda(t)}{t^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \frac{J_{\lambda+s}(t)}{t^{\lambda+s}} \quad s \geq 1 \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

On étudiera seulement le cas : $k \geq 1$;

$n = 2k+2$, le cas n impair étant analogue

J_{2k} est uniformément bornée par 1, on a donc convergence uniforme et on peut intervertir les opérations de dérivation et d'intégration.

D'où

$$\frac{d^k}{d(r^2)^k} f(r) = (-1)^k \frac{2\pi^{k+1}}{r^{2k}} \int_0^\infty g_f(\rho) \rho^{2k+1} J_{2k}(r\rho) d\rho$$

On a même

$$\left| \frac{d^k}{d(r^2)^k} f(r) \right| \leq \frac{2\pi^{k+1}}{r^{2k}} \int_0^\infty |g_f(\rho)| \rho^{n-1} d\rho$$

Or $\|f\|_A = W_{n-1} \int_0^\infty |g_f(\rho)| \rho^{n-1} d\rho$ où $W_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ aire n dimensionnelle de U_n

D'où
$$\left| \frac{d^k}{d(r^2)^k} f(r) \right| \leq \frac{\Gamma(k+1)}{r^{2k}} \|f\|_A$$

IV Etude d'ensembles de non synthèse

Soit R une algèbre de Banach commutative, I un idéal de R .

On définit I^n , idéal engendré par les éléments $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$ où $r_j \in I$.

$$I^\omega = \bigcap_n I^n$$

$I^{\omega+1}$ idéal fermé engendré par les $r_1 \times r_2$ où $r_1 \in I^\omega$, $r_2 \in I$

etc...

On a évidemment $I \supseteq I^2 \supseteq \dots \supseteq I^n \supseteq \dots \supseteq I^\omega \supseteq I^{\omega+1} \dots$

On suppose maintenant R régulière semi-simple et $I = I(E)$ où E est un compact du spectre de R , non de synthèse.

$$I(E) \not\supseteq J(E) = \overline{I_0(E)}$$

$$\forall \alpha \text{ hull } I^\alpha(E) = \text{hull } I(E) = E$$

$J(E)$ étant le plus petit idéal fermé dont le hull est E , on a

$$I(E) \supseteq I^\alpha(E) \supseteq J(E) .$$

exemple 1 : Soit $R = \mathcal{D}(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions dérivables sur le tore munie de la norme $\|f\| = \| |f| + |f'| \|_{\infty}$

Soit $E = \{x\} \in \mathbb{T}$

$I(E)$ est l'ensemble des fonctions de R nulles en x .

$I^2(E)$ est inclus dans l'ensemble S des fonctions de R nulles en x ainsi que leur dérivée. Or S est égal à $J(E)$: en effet si $S \not\supseteq J(E)$, d'après le théorème de Hahn-Banach,

$$\exists f \in S, f \notin J(E)$$

$$\exists \mu \neq 0, \mu \in [\mathcal{D}(\mathbb{T})]'$$
 telle que $\langle \mu, f \rangle \neq 0$

$$\langle \mu, g \rangle = 0 \quad \forall g \in J(E).$$

$J(E)$ étant l'ensemble des fonctions dont le support est disjoint de $\{x\}$,

le support de μ est $\{x\}$. μ étant une distribution, $\mu = \alpha \delta_x + \beta \delta'_x$ et

$$\langle \mu, f \rangle = 0.$$

Donc $J(E) \subset I^2(E) \subset S = J(E)$.

exemple 2 : On suppose R séparable. Alors la chaîne des idéaux $I^\alpha(E)$ est dénombrable

$$\text{sinon, } \forall \alpha \text{ tel que } I^{\alpha-1} \not\supseteq I^\alpha$$

$$\exists r \in I^\alpha, r \notin I^{\alpha+1}, \exists r' \in I^{\alpha+1} \text{ tels que } \|r - r'\| = \theta \neq 0$$

$$\text{Alors } \frac{r}{\theta} \in I^\alpha, \frac{r'}{\theta} \in I^{\alpha+1} \text{ et } \left\| \frac{r}{\theta} - \frac{r'}{\theta} \right\| = 1.$$

R séparable contiendrait un sous-ensemble non dénombrable de vecteurs dont

la distance mutuelle est 1 ,

exemple 3 :

Proposition : il existe dans $A(\mathbb{R}^n)$ une chaîne d'idéaux distincts de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2} \right]$.

On considère la sphère unité S_n de \mathbb{R}^n , μ la mesure uniforme de masse 1 sur S_n .

1° $\frac{\partial^m \mu}{\partial r^m}$ ($m \leq \left[\frac{n-1}{2} \right]$) est une pseudo-mesure sur S_n : il suffit de montrer que c'est une distribution à transformée de Fourier bornée voir : [8])

2° Soit $f \in \mathbb{R}_n \subset A(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(1) = 0$ $f'(1) \neq 0$ et f dérivable $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ fois.

Alors $f \in I^{A(\mathbb{R}^n)}(S_n)$

$$f'(1) \neq 0 \implies \frac{\partial^m f^m}{\partial r^m}(1) \neq 0 \iff \langle \mu, \frac{\partial^m f^m}{\partial r^m} \rangle = \langle \frac{\partial^m \mu}{\partial r^m}, f \rangle \neq 0$$

$$\implies f^m \notin \text{PM}(S_n)^\perp = J(S_n)$$

Donc $I^m \supsetneq J(S_n)$.

Corollaire : il existe dans $A(\mathbb{T}^n)$ une chaîne d'idéaux distincts de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2} \right]$:

Les groupes \mathbb{R}^n et \mathbb{T}^n sont localement isomorphes à S_n on associe une petite sphère S_n^α de \mathbb{T}^n . \mathbb{T}^n étant une variété analytique réelle,

$$\exists f \in I^{A(\mathbb{T}^n)}(S_n^\alpha) \quad f^m \notin J^{A(\mathbb{T}^n)}(S_n^\alpha) \quad m = \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

exemple 4 : Soit G un groupe abélien compact infini.

Proposition : il existe dans $A(G)$ des chaînes d'idéaux de longueur arbitraire,

existence de chaînes de longueur finie :

- il existe dans $A(\mathbb{T}^n)$ une chaîne de longueur $\geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ définie par
 $I(S_n^\alpha) = I(E)$

- il existe dans $V(\mathbb{T}^n)$ une chaîne de longueur $\geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$:

Soit M l'application de Hopf : $A(\mathbb{T}^n) \longrightarrow V(\mathbb{T}^n)$

D'après le chapitre V, § II, a₂ si $E^* = \{(x,y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \mid x+y \in E\}$ on a

$$M^{-1}[I^\vee(E^*)] = I^A(E) \quad M^{-1}[J^\vee(E^*)] = J^A(E)$$

M étant injective, $(I^A)^m(E) \not\supseteq J^A(E)$ entraîne

$$(I^\vee)^m(E^*) \not\supseteq (J^\vee)(E^*)$$

- $V(\mathbb{T}^n)$ est isomorphe isométriquement à une sous-algèbre de $V(D_\infty)$

car $\overset{\vee}{d} \hat{\otimes} \overset{\vee}{d} : \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$

admet un inverse approximé local. De plus, pour tout fermé $E \subset \mathfrak{M}_{V(\mathbb{T}^n)}$

et pour $E^\vee = (\overset{\vee}{d} \hat{\otimes} \overset{\vee}{d})^{-1}(E)$ on a

$$(\overset{\vee}{d} \hat{\otimes} \overset{\vee}{d})^{-1}(J^{\vee} \left(\begin{smallmatrix} V(D_\infty) \\ \mathfrak{M} \end{smallmatrix} \right) (E^\vee)) = J^{\vee} \left(\begin{smallmatrix} V(\mathbb{T}^n) \\ \mathfrak{M} \end{smallmatrix} \right) (E)$$

D'autre part $(\overset{\vee}{d} \hat{\otimes} \overset{\vee}{d})^{-1}(I^{\vee} \left(\begin{smallmatrix} V(D_\infty) \\ \mathfrak{M} \end{smallmatrix} \right) (E^\vee)) = I^{\vee} \left(\begin{smallmatrix} V(\mathbb{T}^n) \\ \mathfrak{M} \end{smallmatrix} \right) (E)$

Donc $V(D_\infty)$ contient une chaîne d'idéaux de longueur $\geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$

- soit $E \subset G$, somme de deux Kroneckers ou de deux ensembles K_p

disjoints parfaits. $A(E)$ est isomorphe topologiquement à $V(D_\infty)$.

Il existe E^\vee tel que $I^A(E^\vee)$ engendre une chaîne de longueur $\geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

or
$$I^{A(E)}(E^i) = \overbrace{I^{A(G)}(E^i)}$$

$$J^{A(E)}(E^i) \supset \overbrace{J^{A(G)}(E^i)}$$

$$I^{m A(E)}(E^i) \supsetneq J^{A(E)}(E^i) \text{ entraîne donc } I^{m A(G)}(E^i) \supsetneq J^{A(G)}(E^i)$$

existence d'une chaîne de longueur ω :

On considère dans G une suite de compacts K_n tels que

(i) les K_n sont deux à deux disjoints

(ii) $(K_n) \rightarrow \{a\}$ $a \in G$ au sens suivant :

$$\forall v(a) \quad \exists N \quad n > N \implies K_n \subset v(a).$$

Chaque K_n contient un ensemble F_n , somme de deux Kroneckers ou de deux ensembles K_p disjoints parfaits. Dans chaque F_n existe une chaîne de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2} \right]$ engendrée par un $I(E_n)$.

Soit $E = \left[\bigcup_n E_n \right] \cup \{a\}$. Alors $I(E)$ engendre une chaîne de longueur ω :

Soit $f \in A(F_n)$ $f \in I^{A(F_n)}(E_n)$ $f \notin J^{A(F_n)}(E_n)$

Soit $F \in A(G)$ telle que $F/F_n = f$

$L^1(\hat{G})$ étant une algèbre normale, il existe $\hat{\varphi}$ appartenant à $L^1(\hat{G})$ telle que $\hat{\varphi} = 1$ sur F_n

$$\hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \{a\} \cup E_1 \cup \dots \cup E_{n-1} \cup E_{n+1} \cup \dots = E \cap E_n^c$$

Soit $\tilde{f} = F * \hat{\varphi} \in A(G)$: $F * \hat{\varphi}/F_n = f$ et $F * \hat{\varphi} = \tilde{f} \in I(E)$

$$\tilde{f}^n \in I^n(E) \quad \tilde{f}^n \notin J^{A(G)}(E_n) \text{ donc } \tilde{f}^n \notin J^{A(G)}(E)$$

Ceci montre que $\forall n$, $I(E)$ engendre une chaîne de longueur $\geq n$.

Chapitre VI

Problèmes de calcul symbolique

Soient K un compact, R une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}(K)$, symétrique, unitaire, régulière, de spectre K .

Soit f une fonction de R à valeurs réelles

Définition : On désigne par $[f]^R$ le calcul symbolique de f dans R c'est-à-dire

$$[f]^R = \left\{ \Phi/I \mid \Phi \in \mathcal{C}(R) \quad \Phi \circ f \in R \right\} \in \mathcal{C}(I) \quad \text{où } I = [-1, +1]$$

$$[R] = \bigcap_{\substack{f \in R \\ f(K) \subset I}} [f]^R$$

On va étudier le calcul symbolique de $R = A(G)$.

Définition : Soit $\sigma = (s_j)$ une suite de réels > 0 tels que $\sum_{j=1}^{\infty} s_j < \infty$.

Soit \mathcal{C}_σ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur

I telles que

$$\sup_{\substack{x \in I \\ n \in \mathbb{N}}} |s_1 s_2 \dots s_n f^{(n)}(x)|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

Lemme 1 : Soient $\epsilon > 0$ et σ une suite positive sommable.

Alors il existe $f_{\sigma, \epsilon} \in A(\mathbb{T}^\infty)$, à valeurs réelles, telle que

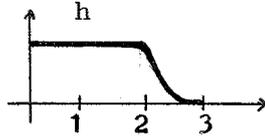
$$\|f\|_A \leq 1 + \epsilon \quad \text{et} \quad [f]^A \subset \mathcal{C}_\sigma$$

Démonstration : Soit $\gamma: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$

$$(r_1, \dots, r_4) \rightsquigarrow (e^{ir_1}, \dots, e^{ir_4})$$

Soient φ et h deux fonctions radiales sur \mathbb{R}^4 à valeurs réelles telles que

$$(i) \quad h[0,2] = 1 \quad (ii) \quad \text{Supp } h \subset [0,3]$$



$$(i') \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (ii') \quad \text{Supp } \varphi \subset [0,2] \quad (iii') \quad \frac{d\varphi}{d\alpha}(\mathbf{1}) = 1.$$

En particulier, φ et h appartiennent à $A(\mathbb{R}^4)$ et

$$\text{Supp}_{\mathbb{R}^4} \varphi, h \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x_j| \leq 3\}$$

Soit $\theta \in A(\mathbb{T}^4)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, |x_j| \leq \pi \quad \varphi(x) = \theta \circ \gamma(x).$$

On pose $G = \mathbb{T} \times G_1 \times \dots \times G_n \times \dots$ avec $G_j = \mathbb{T}^4$

$$= \mathbb{T}^\infty$$

ζ étant un réel > 0 arbitraire, soit

$$f(g) = \sin t + \zeta \sum_{j=1}^{\infty} s_j \theta(g_j) \quad g = (t, g_1, \dots, g_n, \dots) \in G$$

$$\|\sin t\|_{A(G)} = \left\| \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it}}{2i} \right\|_{A(G)} = 1$$

donc $f \in A(G)$ et $\|f\|_{A(G)} \leq 1 + \zeta \|\theta\|_A$

On choisit ζ pour que $\zeta \|\theta\|_A \leq \varepsilon$ alors $\|f\|_{A(G)} \leq 1 + \varepsilon$.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $F = \Phi \circ f \in A(G)$.

$\forall t \in \mathbb{T} \quad \forall k \geq 1$ on définit $f_{t,k}(g_1 \dots g_K) = f(t, g_1 \dots g_K, 0 \dots 0)$

$$F_{t,k}(g_1 \dots g_K) = F(t, g_1 \dots g_K, 0 \dots 0) = \Phi \circ f_{t,k}$$

$$\hat{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^4 \times \dots \times \mathbb{Z}^4 \times \dots ;$$

$$f(g) = \sum_{n \in \hat{G}} c(n) e^{i \langle n, g \rangle}$$

$$\|f\|_{A(G)} = \sum_{n \in \hat{G}} |c(n)|$$

$$f_{t,k}(g_1 \dots g_K) = \sum_{n' \in (\mathbb{Z}^4)^k} d(n') e^{i(\langle n_1, g_1 \rangle + \dots + \langle n_K, g_K \rangle)}$$

$$\text{avec } d(n') = \sum_{n \in \hat{G}} c(n)$$

$$n' / (\mathbb{Z}^4)^k = n$$

$$\|f_{t,k}\|_{A(G_1 \times \dots \times G_K)} = \sum_{n' \in (\mathbb{Z}^4)^k} |d(n')| \leq \|f\|_{A(G)}$$

de même $F_{t,k} \in A(G_1 \times \dots \times G_K)$ et $\|F_{t,k}\|_{A(G_1 \times \dots \times G_K)} \leq \|F\|_{A(G)}$

$$\text{Soit } \tilde{F}_{t,k} = [F_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \dots \times \gamma_K)] \times [h_1 \otimes \dots \otimes h_k]$$

h_i étant la fonction de $A(\mathbb{R}^4)$ définie précédemment ; en notant $\tilde{G}_i = \mathbb{R}^4$

on a $h_1 \otimes \dots \otimes h_k \in A(\tilde{G}_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A(\tilde{G}_k)$ qui est isométriquement isomorphe à $A(\tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_k)$.

Donc $\tilde{F}_{t,k} \in A(\tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_k)$.

Si $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) \in \text{Supp } h_1 \otimes \dots \otimes h_k$,

$$[f_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \dots \times \gamma_K)](\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = \sin t + \mathfrak{E} \sum_1^k s_j \psi_j(\tilde{g}_j)$$

$$[F_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \dots \times \gamma_K)](\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = \Phi \left[\sin t + \mathfrak{E} \sum_1^k s_j \psi_j(\tilde{g}_j) \right] \in R_{4 \ 4 \dots 4}$$

Comme $h_1 \otimes \dots \otimes h_k \in R_{4 \ 4 \dots 4}$ on a aussi $\tilde{F}_{t,k} \in R_{4 \ 4 \dots 4}$

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_{t,k}^{\alpha}\|_{A(\tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_K)} &\leq \|F_{t,k} \circ (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_K)\|_{A(\tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_K)} \|h\|_{A(\mathbb{R}^4)}^K \\ &= \|F_{t,k}\|_{A(G_1 \times \dots \times G_K)} \|h\|_{A(\mathbb{R}^4)}^K \end{aligned}$$

Lorsque $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ est dans un voisinage assez petit de $(1, \dots, 1)$,

$$h_i(\alpha_i) = 1 \text{ et } \tilde{F}_{t,k}^{\alpha}(\alpha_1 \dots \alpha_K) = \Phi(\sin t + \zeta \sum_1^k s_j \varphi_j(\alpha_j))$$

$$\frac{\partial^K \tilde{F}_{t,k}^{\alpha}}{\partial \alpha_1^2 \dots \partial \alpha_K^2} (1, \dots, 1) = \Phi^{(K)}(\sin t) \zeta^K s_1 s_2 \dots s_K$$

car $\varphi_j(1) = 1$ et $\frac{d\varphi_j}{d\alpha_j}(1) = 1$. On va vérifier l'existence de $\frac{\partial^K \tilde{F}_{t,k}^{\alpha}}{\partial \alpha_1^2 \dots \partial \alpha_K^2}$.

Remarque sur les fonctions multiradiales :

Soit h_{SO_n} la mesure de Haar de SO_n . Pour toute fonction $f \in A(\mathbb{R}^n)$ on

a défini au chapitre V $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(h_{SO_n} * f)(x) = \int_{\sigma \in SO_n} f(\sigma x) dh_{SO_n}$$

f est radiale, c'est-à-dire $f \in R_n$, si et seulement si $h_{SO_n} * f = f$

On sait qu'on peut identifier $A(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_r})$ à $A(\mathbb{R}^{n_1}) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A(\mathbb{R}^{n_r})$.

Soit $f \in A(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_r})$ et $f = f_1 \otimes \dots \otimes f_r$ avec $f_i \in A(\mathbb{R}^{n_i})$

Définition : f est multiradiale si et seulement si $h_{SO_{n_1+\dots+n_r}} * f = f$

$$\text{Or } h_{SO_{n_1+\dots+n_r}} * (f_1 \otimes \dots \otimes f_r) = (h_{SO_{n_1}} * f_1) \otimes \dots \otimes (h_{SO_{n_r}} * f_r)$$

donc f est multiradiale si et seulement si $f_1 \dots f_r$ sont radiales.

R_n , sous-algèbre de $A(\mathbb{R}^n)$ étant munie de la norme induite par celle de

$A(\mathbb{R}^n)$, on peut identifier $R_{n_1 \dots n_r}$ à $R_{n_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} R_{n_r}$.

On a montré que pour une fonction radiale $\in R_n$ et $n = 2k^2 + 2$,

$$\left| \frac{d^{K'} f(\alpha)}{d(\alpha^2)^{K'}} \right| \leq \frac{\Gamma(K'+1)}{\alpha^{2K'}} \|f\|_{\mathbb{A}} \quad (\text{cf v. p. 14})$$

avec $n_1 = n_2 = \dots = n_K = 4$ et $k' = 1$ on obtient pour $f \in R_{4\dots 4}$

$$\left| \left(\frac{\partial^{K'} f(\alpha_1 \dots \alpha_K)}{\alpha_1^2 \dots \alpha_K^2} \right) (1, \dots, 1) \right| \leq \|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^4)}$$

En appliquant ce résultat à $\tilde{F}_{t,K}$ on a :

$$|\Phi^{(K)}(\sin t) + \zeta^K s_1 s_2 \dots s_K| \leq \|\tilde{F}_{t,K}\|_{\mathbb{A}(\tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_K)} \leq \|\tilde{F}_{t,K}\|_{\mathbb{A}(G_1 \times \dots \times G_K)} \|h\|_{\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)}^K$$

$$|s_1 s_2 \dots s_K \Phi^{(K)}(\sin t)|^{\frac{1}{K}} \leq \|F\|_{\mathbb{A}(G)}^{\frac{1}{K}} \|h\|_{\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)}^{-1}$$

donc $\sup_{\substack{K \in \mathbb{N} \\ x \in I}} |s_1 s_2 \dots s_K \Phi^{(K)}(x)|^{\frac{1}{K}} < \infty$ c'est-à-dire $\Phi \in \mathcal{E}_\sigma$.

Lemme 2 : Soient $\varepsilon > 0$ et σ une suite positive sommable.

Alors il existe $f_{\sigma, \varepsilon} \in V(D_\infty)$ telle que $\|f\|_{V(D_\infty)} \leq 1 + \varepsilon$ et

$$[f]_{V(D_\infty)} \subset \sigma.$$

Soit $f_1 \in \mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$ vérifiant les conditions du lemme 1.

M étant l'application isométrique de Hopf : $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty) \xrightarrow{M} V(\mathbb{T}^\infty)$,

On définit $f = Mf_1 \in V(\mathbb{T}^\infty)$.

d étant l'application $D_\infty \rightarrow \mathbb{T}$, soit $\tilde{f} = \check{d} \hat{\otimes} \check{d}(f) \in V(D_\infty)$

$$\|f_1\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)} = \|f\|_{V(\mathbb{T}^\infty)} = \|\tilde{f}\|_{V(D_\infty)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Il est évident que $[f]_{V(D_\infty)} \subset \{\Phi/I \mid \Phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \Phi \circ \tilde{f} \in L^\infty(D_\infty) \hat{\otimes} L^\infty(D_\infty)\}$

On peut identifier $L^\infty(D_\infty)$ à $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Donc

$$[\tilde{f}]^{V(D_\infty)} \subset \left\{ \Phi/I \mid \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \Phi \circ f \in L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \hat{\otimes} L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \right\}$$

Soit Φ appartenant à cet ensemble.

$$\Phi \circ f(x,y) = \Phi \circ Mf_1(x,y) = \Phi \circ f_1(x+y) = M[\Phi \circ f_1(x)]$$

Dans l'étude de l'application de Hopf P on a vu que

$$L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \hat{\otimes} L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \xrightarrow{P} A(\mathbb{T}^\infty)$$

Donc $P \circ M(\Phi \circ f_1) = \Phi \circ f_1 \in A(\mathbb{T}^\infty)$ et $\Phi \in [f_1]^{A(\mathbb{T}^\infty)}$

$$[\tilde{f}]^{V(D_\infty)} \subset [f_1]^{A(\mathbb{T}^\infty)} \subset \mathcal{C}_\sigma.$$

Théorème : Soient $\varepsilon > 0$ et σ une suite positive sommable. Alors

(i) Pour tout groupe compact abélien G contenant un Kronecker parfait,

il existe $f_{\sigma, \varepsilon} \in A(G)$ telle que $[f]^{A(G)} \subset \mathcal{C}_\sigma$ et $\|f\|_{A(G)} \leq 1 + \varepsilon$

(ii) Pour tout groupe compact abélien G contenant un ensemble K_p

parfait il existe $f_{\sigma, \varepsilon} \in A(G)$ telle que $[f]^{A(G)} \subset \mathcal{C}_\sigma$ et

$$\|f\|_{A(G)} \leq 4 + \varepsilon.$$

(i) Etant donné un Kronecker parfait $K = K_1 \cup K_2$, soit $E = K_1 + K_2$

On sait que $A(E)$ est isométriquement isomorphe à $V(E)$ donc à $V(D_\infty)$ (Chap III § 3)

Il existe d'après le lemme 2 $f_{\sigma, \frac{\varepsilon}{2}} \in A(E)$, $\|f\|_{A(E)} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ et $[f]^{A(E)} \subset \mathcal{C}_\sigma$

Il existe $F \in A(G)$ telle que $F/E = f$ et $\|F\|_{A(G)} \leq \|f\|_{A(E)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 + \varepsilon$.

Or $[F]^{A(G)} \subset [f]^{A(E)} \subset \mathcal{C}_\sigma$.

(ii) Etant donné un ensemble K_p parfait, $K_p = K_1 \cup K_2$, soit $E = K_1 + K_2$.

On sait que $A(E)$ est topologiquement isomorphe à $V(E)$ donc à $V(D_\infty)$ et

$$\|f\|_{A(E)} \leq 4 \|\tilde{f}\|_{V(E)} = 4 \|\tilde{f}\|_{V(D_\infty)}$$

il existe, d'après le lemme 2, $\tilde{f}_{\sigma, \frac{\varepsilon}{8}} \in V(D_\infty)$, donc $f_{\sigma, \frac{\varepsilon}{2}} \in A(E)$ telle que

$$\|f\|_{A(E)} \leq 4 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

il existe $F_{\sigma, \varepsilon} \in A(G)$ telle que $F/E = f$ et $\|F\|_{A(G)} \leq 4 + \varepsilon$.

On sait que tout groupe abélien compact contient un parfait de Kronecker ou de type K_p .

On peut démontrer que si $\mathcal{A}(-1,1)$ est l'ensemble des fonctions analytiques sur $(-1,1)$ et indéfiniment dérivables sur I ,

$$\mathcal{A}(-1,1) \supset \bigcap_{\sigma} \mathcal{C}_{\sigma}[-1,1]$$

(σ suite > 0 sommable).

$$\text{Or } [A(G)] = \bigcap_{\substack{f \in A(G) \\ f(G) \subset I}} [f]^{A(G)} \subset \bigcap_{\sigma} \mathcal{C}_{\sigma}[-1,1]$$

Théorème : Pour tout groupe G abélien compact, le calcul symbolique de $A(G)$ est inclus dans $\mathcal{A}(-1,1)$.

Chapitre VII

Théorèmes de topologie générale sur la théorie élémentaire des algèbres tensorielles

Soient K_i, K'_i $i = 1, 2$ des compacts

$p_i : K_i \longrightarrow K'_i$ des surjections continues.

On a vu au chapitre II, § II si K_i, K'_i étaient métrisables et K'_i munis d'une structure de groupe, $V(K') = \mathcal{C}(K'_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K'_2)$ pouvait être plongé isométriquement dans $V(K)$.

On considère la sous algèbre de $V(K)$ constituée par les fonctions constantes sur les fibres associées à la surjection $p_1 * p_2$.

Il est clair qu'il existe un plongement canonique de $V(K')$ dans cette sous algèbre.

A) Problème : y-a-t-il identité entre $V(K')$ et cette sous algèbre ?

L'objet des théorèmes ci-après est de montrer que dans le cas où les morphismes sont engendrés par

$d : D_\infty \longrightarrow \mathbf{T}$ alors $V(\mathbf{T}^\omega)$ est égale à la sous algèbre des fonctions

de $V(D_\infty)$ constantes sur les fibres.

B) Notations : $\omega = 1, 2, \dots, \lambda_0$ où $\lambda_0 = \text{card } \mathbb{N}$

Posons $d_\omega = \underbrace{d * d * \dots}_{\omega \text{ fois}} : D_\infty^\omega \longrightarrow \mathbf{T}^\omega$

d_ω est surjective puisque d l'est.

$$\text{Or } D_{\infty}^{\omega} = (\mathbf{Z}(2))^{\chi_{0\omega}} = (\mathbf{Z}(2))^{\chi_0} = D_{\infty}$$

$$\text{Donc } d_{\omega} : D_{\infty} \longrightarrow \mathbf{T}^{\omega} \text{ et } d_{\omega}^{\vee} : \mathcal{C}(\mathbf{T}^{\omega}) \longrightarrow \mathcal{C}(D_{\infty})$$

C) Théorème 1 : Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbf{T}^{\omega}) & \xrightarrow{\quad d_{\omega}^{\vee} \hat{\otimes} d_{\omega}^{\vee} \quad} & V(D_{\infty}) \\ \downarrow & & \downarrow J \\ \mathcal{C}(\mathbf{T}^{\omega} \times \mathbf{T}^{\omega}) & \xrightarrow{\quad (d_{\omega} \times d_{\omega})^{\vee} \quad} & \mathcal{C}(D_{\infty} \times D_{\infty}) \end{array}$$

Alors on a
$$\boxed{(\text{Im } J) \cap (\text{Im}(d_{\omega} \times d_{\omega})^{\vee}) = \text{Im}(J \circ (d_{\omega}^{\vee} \hat{\otimes} d_{\omega}^{\vee}))}$$

Dans cette égalité de deux ensembles le membre de gauche désigne une sous algèbre égale à une sous algèbre de $V(D_{\infty})$ de fonctions constantes sur les fibres et le membre de droite une sous algèbre égale à $V(\mathbf{T}^{\omega})$.

Le théorème 1 se déduira du théorème suivant :

Théorème 2 : Considérons le diagramme, où A et B sont deux compacts paramètres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbf{T} \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & \mathcal{C}(D_{\infty} \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \\ \downarrow & & \downarrow J \\ \mathcal{C}(\mathbf{T} \times A \times B) & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & \mathcal{C}(D_{\infty} \times A \times B) \end{array}$$

où
$$\psi = (d \times I \mathcal{B} A)^{\vee} \hat{\otimes} I \mathcal{B} B^{\vee}$$

$$\theta = (d \times I \mathcal{B} A \times I \mathcal{B} B)^{\vee}$$

Alors
$$\boxed{(\text{Im } J) \cap \text{Im } \theta = \text{Im}(J \circ \psi)}$$

Le théorème 2 entraîne le théorème 1 :

Soit B un espace compact. On considère le diagramme suivant :

$$\Delta_\omega(A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T}^\omega) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) & \xrightarrow{\varphi_\omega} & \mathcal{E}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) = V_\omega(B) \\ \downarrow & & \downarrow J \\ \mathcal{E}(\mathbb{T}^\omega * B) & \xrightarrow{\theta_\omega} & \mathcal{E}(D_\infty * B) = W_\omega(B) \end{array}$$

où $\varphi_\omega = d_\omega^\vee \hat{\otimes} \text{Id}^\vee B$

$\theta_\omega = (d_\omega * \text{Id}_B)^\vee$

Alors on a $(\text{Im } J) \cap (\text{Im } \theta_\omega) = \text{Im}(J \circ \varphi_\omega)$

Démonstration :

$\omega = n$

Il suffit d'appliquer n fois le théorème 2 aux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}(\mathbb{T}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) & \xrightarrow{A=\mathbb{T}^{n-1}} & \mathcal{E}(D_\infty * \mathbb{T}^{n-1}) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) & \xrightarrow{A=D_\infty * \mathbb{T}^{n-2}} & \mathcal{E}(D_\infty * \mathbb{T}^{n-2}) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) & \dots & \rightarrow \mathcal{E}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(\mathbb{T}^n * B) & \longrightarrow & \mathcal{E}(D_\infty * \mathbb{T}^{n-1} * B) & \longrightarrow & \mathcal{E}(D_\infty * \mathbb{T}^{n-2} * B) & \dots & \rightarrow \mathcal{E}(D_\infty * B) \end{array}$$

$\omega = \lambda_0$

Soit K un groupe compact.

On définit $\alpha_n, \beta_n : K^\omega \xrightarrow{\alpha_n} K^n \xrightarrow{\beta_n} K^\infty$

$(k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n \ \dots) \rightsquigarrow (k_1 \ \dots \ k_n) \rightsquigarrow (k_1 \ \dots \ k_n \ 0 \ \dots)$

Il est clair que $(\beta_n \circ \alpha_n)^\vee \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Id } \mathcal{E}(K^\infty)$ pour la convergence simple.

On applique α_n (respectivement β_n) à $K = \mathbb{T}$ et $K = D_\infty$ en identifiant

D_∞^ω à D_∞ . Par transposition on obtient une correspondance entre les dia-

grammes $\Delta_\infty(A)$ et $\Delta_n(A)$. (respectivement $\Delta_n(A)$ et $\Delta_\infty(A)$).

Soit $x \in \mathcal{E}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) = V_\infty(B)$ tel que $Jx \in (\text{Im } J) \cap (\text{Im } \theta_\infty)$.

Alors $x_n = [\check{\beta}_n(D_\infty) \hat{\otimes} \text{Id}^v B](x) \in V_n(B)$ et $Jx_n \in \text{Im } \theta_n$

c'est-à-dire $x_n \in \text{Im } \varphi_n$.

Son image $\tilde{x}_n = [\check{\alpha}_n(D_\infty) \hat{\otimes} \text{Id}^v A](x_n) = [\check{\alpha}_n \circ \check{\beta}_n(D_\infty) \hat{\otimes} \text{Id}^v A](x)$ est dans $\text{Im } \varphi$.

$\text{Im } \varphi$ est fermé dans $\mathcal{E}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B)$ car φ est isométrique. Comme $\tilde{x}_n \rightarrow x$,

$x \in \text{Im } \varphi$.

D) Démonstration du théorème 2 :

D-1 Lemme préliminaire sur les Banach

Soient B un Banach quelconque et une suite de sous espaces fermés B_n tels

que $B = B_0 \supset B_1 \dots \supset B_n \supset \bigcap_1^\infty B_n = B_\infty$

et tels que

hypothèse 1 : l'injection $i^{(n)} : B_n \rightarrow B_{n-1}$ $n = 1, 2, \dots$ a un inverse approximé

$$i_\alpha^{(n)} : B_{n-1} \rightarrow B_n \quad \alpha \in A_n$$

hypothèse 2 : si $j^{(n)} : B_n \rightarrow B$ $j^{(n)} = i^{(1)} \circ \dots \circ i^{(n)}$ on sait que $j^{(n)}$

possède un inverse approximé noté $j_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$.

D'après l'hypothèse 1, $j_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = i_{\alpha_n}^{(n)} \circ \dots \circ i_{\alpha_1}^{(1)}$.

Par hypothèse : Pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \dots$

$$j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{une limite } J_{\underline{\alpha}} : B \rightarrow B$$

(c'est-à-dire : $j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) \rightarrow J_{\underline{\alpha}}(x)$)

Alors

$\forall C$ espace de Banach on a :

$$B \hat{\otimes} C = B_0 \hat{\otimes} C \supset \dots \supset B_n \hat{\otimes} C \dots \supset B_\infty \hat{\otimes} C = \bigcap_1^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$$

chaque espace étant contenu isométriquement dans tous ceux qui sont à sa gauche.

Démonstration du lemme :

On sait que pour tout n

$$\text{Im}(j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \subset B_{n-1}$$

Donc d'après l'hypothèse 2 $\text{Im}(J_{\underline{\alpha}}) \subset B_\infty$.

Considérons la famille $J_{\underline{\alpha}}$ $\underline{\alpha} \in A = A_1 * A_2 \dots A_n * \dots$ muni de l'ordre produit elle constitue un inverse approximé de $j^\infty : B_\infty \longrightarrow B$.

Or toutes les applications $i^{(P)}$ sont de norme ≤ 1 par suite d'après le chapitre II § II on a un plongement isométrique de

$$B_\infty \hat{\otimes} C \text{ dans } B \hat{\otimes} C$$

et aussi de

$$\left. \begin{array}{l} B_1 \hat{\otimes} C \\ B_n \hat{\otimes} C \\ \text{et } \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C) \end{array} \right\} \text{ dans } B \hat{\otimes} C$$

il reste à démontrer que $B_\infty \hat{\otimes} C = \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$

il est clair que $\forall n \quad B_\infty \hat{\otimes} C \subset B_n \hat{\otimes} C$

$$\text{D'où} \quad B_\infty \hat{\otimes} C \subset \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$$

Soit $x \in \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$.

$\forall \underline{\alpha} \in A$ on a $x_{\underline{\alpha}} = (J_{\underline{\alpha}} \hat{\otimes} \text{Id } C)(x) \in B_{\infty} \hat{\otimes} C$

Or pour un choix convenable de $\underline{\alpha}$ on peut avoir $\|x - (j^{\infty} \hat{\otimes} \text{Id } C)(x_{\underline{\alpha}})\|_{B \hat{\otimes} C} \leq \varepsilon$

et comme $B_{\infty} \hat{\otimes} C$ est fermé (car plongé isométriquement dans $B \hat{\otimes} C$)

On a bien
$$B_{\infty} \hat{\otimes} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \hat{\otimes} C)$$

D-2 Application du lemme au cas du plongement de $\mathcal{E}(\mathbb{T} * A) \hat{\otimes} C$ dans $\mathcal{E}(D_{\infty} * A) \hat{\otimes} C$

D-2.1 Idée : On intercale entre $\mathcal{E}(\mathbb{T} * A)$ et $\mathcal{E}(D_{\infty} * A)$ une suite de Banach H_i de telle sorte que

$$\mathcal{E}(\mathbb{T} * A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset H_n \subset \dots \quad H_1 \subset \mathcal{E}(D_{\infty} * A)$$

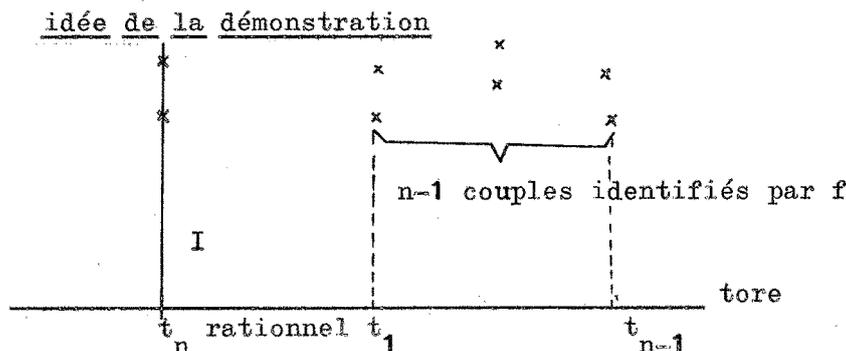
Nous savons que $d : D_{\infty} \rightarrow \mathbb{T}$ est presque injective (sauf en une infinité dénombrable de points, les rationnels diadiques Δ).

H_1 sera le sous espace de $\mathcal{E}(D_{\infty} * A)$ où on identifie deux points de D_{∞} correspondant par d au même point de \mathbb{T} .

H_2 sera le sous espace de H_1 où on identifie deux autres points etc...

D-2.2 L'hypothèse 1 du lemme est vérifiée :

Il s'agit de montrer que l'injection canonique $i^{(n)} : H_n \rightarrow H_{n-1}$ a un inverse approximé :



Soit $\Gamma = (t_n)$ l'image par d des rationnels diadiques Δ .

Soit $f \in H_{n-1}$ c'est-à-dire f identifie $n-1$ couples de points de D_∞

chaque couple correspondant à un point du tore (t_1, \dots, t_{n-1}) .

Soit $t_n \in \Gamma$ $t_n \neq t_i$ $1 \leq i \leq n-1$.

L'idée est de construire des intervalles fermés de centre t_n et de demi longueur α irrationnel suffisamment petit pour que tous les t_i $1 \leq i \leq n-1$

soient à l'intérieur de I .

On considère alors la fonction φ_α telle que

On considère alors la fonction φ_α telle que

$$\varphi_\alpha = f \text{ en dehors de } d^{-1}(]t_n - \alpha, t_n + \alpha[) \text{ et telle que}$$

$$\varphi_\alpha \text{ est "affine" sur } d^{-1}(]t_n - \alpha, t_n + \alpha[)$$

en posant $i_\alpha^{(n)} : f \rightarrow \varphi_\alpha$ on voit que si α irrationnel tend vers 0 alors

$i_\alpha^{(n)}(f) \rightarrow f$ puisqu'il y a de plus en plus de points où f et φ_α coïncident.

mise au point de la démonstration

On considère une famille d'intervalles fermés du tore

- | | |
|---|---|
| $I_{m,n}$ $m = 1, \dots, \infty$ tels que
$n = 1, \dots, \infty$ | <ul style="list-style-type: none"> a) I_{mn} a pour centre $t_n \in \Gamma$ b) $I_{1,n} \supseteq \bigcap_m I_{mn} = \{t_n\}$ c) $I_{m,n}^-$ a pour extrémités k_{mn} et $k'_{mn} \notin \Gamma$ d) I_{α_1, α_2}^- et I_{β_1, β_2} sont, ou bien dis-joints, ou bien contenus l'un dans l'autre |
|---|---|

Il est possible de construire une telle suite par récurrence sur n :

Les $I_{m,p}$ $p \leq n$ étant construits, l'introduction de t_{n+1} bouleverse $m : 1 \rightarrow \infty$

peut-être la taille de ces intervalles mais par un changement de numérotation.

sur les m (décalage vers les m croissants) il est possible de trouver

$\text{Im } p$ $p \leq n$ tels que $t_{n+1} \notin \text{Im } p$
 $m : 1 \rightarrow \infty$

alors on choisit $I_{1,n+1}$ disjoint des I_{1p} , et les $I_{i,n+1}$ sont contenus dedans.

Construction de l'inverse approximé

Soit $f \in H_{n-1}$, c'est-à-dire f identifie les points de $D_{\infty} \times A$ associés à

$t_1 \times A, t_2 \times A, \dots, t_{n-1} \times A$.

Soit $x \in D_{\infty} \times A$ si $(d \times I_{\delta}^{\circ} A)(x) \notin \text{Im } n \times A$ posons $[i_m^{(n)}(f)](x) = f(x)$

si $(d \times I_{\delta}^{\circ} A)(x) \in \text{Im } n \times A$ $[i_m^{(n)}(f)](x) = \varphi[d(x), y]$ où φ

est affine par rapport à la première variable sur $\text{Im } n$.

Cette application est un inverse approximé

On a $\|i_m^{(n)}(f)\| \leq \|f\|_{\infty}$

et $(i_m^{(n)} \circ i_m^{(n)} - I_{\delta}^{\circ})(f) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$ c'est-à-dire lorsque la longueur

de $\text{Im } n$ tend vers 0.

D-2.3 L'hypothèse 2 du lemme est vérifiée :

$$j^{(n)} = i^{(1)} \circ \dots \circ i^{(n)} : H_{n-1} \rightarrow \mathcal{C}(D_{\infty} \times A)$$

$$j_{m_1 m_2 \dots m_n} = \mathcal{C}(D_{\infty} \times A) \rightarrow H_{n-1}$$

Il faut démontrer que pour toute suite $(m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$ alors

$j^{(n)} \circ j_{m_1 \dots m_n}$ converge simplement vers $J_{m_1 m_2 \dots m_n \dots}$ continue de norme ≤ 1

lorsque $n \rightarrow \infty$

$j^{(n)} \circ j_{m_1 \dots m_n}$ converge simplement :

Soit $g \in \mathcal{C}(D_\infty \times A)$ et $g_n = j^{(n)} \circ j_{m_1 \dots m_n}(g) \in H_{n-1} \subset \mathcal{C}(D_\infty \times A)$.

Lorsque n croit g_n tend vers une fonction h telle que tous les couples de

D_∞ correspondant à un point de \mathbb{T} soient identifiés

et $h \in \bigcap H_n = \mathcal{C}(\mathbb{T} \times A)$ et puisque $\|j^{(n)} \circ j_{m_1 \dots m_n}\| \leq \sqrt[n]{\|J_{m_1 m_2 \dots m_n}\|} \leq 1$ ^{Alors}

Conséquence

$\forall C$ Banach et en particulier si $C = \mathcal{C}(B)$ alors

$$\mathcal{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) = \bigcap_1^\infty H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \subset H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \dots \subset \mathcal{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$$

tous ces plongements étant isométriques

D-3 Utilisation des H_i pour la démonstration du théorème 2

On va intercaler les H_i entre $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times A)$ et $\mathcal{C}(D_\infty \times A)$.

On sait qu'on a des plongements isométriques

$$\mathcal{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) = \bigcap_1^\infty H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \subset H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \dots \subset H_1 \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$$

Il suffira en effet de vérifier la propriété énoncée dans le théorème 2 pour chaque étape n .

Supposons que dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \\
 \downarrow & & \downarrow J \\
 \mathcal{C}(H_n \times B) & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{C}(D_\infty \times A \times B)
 \end{array}$$

On a

$$(\text{Im } J) \cap (\text{Im } \theta_n) = \text{Im}(J \circ \varphi_n)$$

Soit alors $f \in \mathcal{C}(D_\infty * A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ tel que $Jf \in \text{Im } \theta$. Il est clair que

$Jf \in \text{Im } \theta_n$ donc que $Jf \in \text{Im } \varphi_n$. D'après l'hypothèse $f \in H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \forall n$.

D'après D-2 $f \in \mathcal{C}(T * A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ et on obtient le théorème 2.

Démontrons (δ_n) : les espaces compacts X, A, B étant donnés, les couples

$$\{(x_j, x_j^1) \in X * X\} \quad j = 1 \text{ à } n \text{ étant donnés}$$

alors

$$\text{si } \mu_n = \left\{ f \in \mathcal{C}(X * A) \text{ tq } f(x_j, a) = f(x_j^1, a) \quad j = 1 \text{ à } n \right\} \subset \mathcal{C}(X * A)$$

et

$$\text{si } M_n = \left\{ F \in \mathcal{C}(X * A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \text{ tq } J_0 F(x_j, a, b) = J_0 F(x_j^1, a, b) \quad j = 1 \text{ à } n \right\}$$

$$\text{On a} \quad \mu_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) = M_n$$

Démonstration pour $n=1$:

Par définition de $\mathcal{C}(X * A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ on sait que toute fonction

$F \in \mathcal{C}(X * A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ s'écrit sous la forme d'une série absolument sommable

$$F(x, a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x, a) \beta_i(b) \quad \text{où } f_i \in \mathcal{C}(X * A)$$

$$\text{et } \beta_i \in \mathcal{C}(B)$$

Il faut montrer que si $F \in M_n$ alors les f_i peuvent être choisis dans

μ_n . Dans le cas $n=1$ μ_n est un sous espace de codimension 1 dans $\mathcal{C}(X * A)$.

Donc toute fonction f de $\mathcal{C}(X * A)$ peut être décomposée en une somme de deux

vecteurs dont l'un est contenu dans μ_n .

Il est clair qu'il existe $\psi \notin \mu_n \quad \psi \in \mathcal{C}(X * A)$

Alors $\forall f_i \in \mathcal{E}(X * A) \quad f_i = f_i^{(1)} + k_i \varphi \quad \varphi(x_1, a) \neq \varphi(x'_1, a)$

$$F(x, a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(1)}(x, a) \beta_i(b) + \varphi \sum_{i=1}^{\infty} k_i \beta_i(b)$$

or par hypothèse $F(x_1, a, b) = F(x'_1, a, b)$ donc $\sum_1^{\infty} k_i \beta_i(b) [\varphi(x_1, a) - \varphi(x'_1, a)] = 0$

ce qui entraîne $\sum k_i \beta_i(b) = 0 \quad \text{CQFD}$

Soit $n > 1$.

On identifie μ_n à $\mathcal{E}(X_n * A)$, X_n étant déduit de X par identification de

x_j à x'_j pour $j=1$ à n .

Supposons les relations (δ) démontrées jusqu'à l'ordre $n-1$.

Soit $F \in M_n \subset M_{n-1}$. Alors $F \in \mu_{n-1} \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(X_{n-1} * A) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B)$ et

$JF(x_n, a, b) = JF(x'_n, a, b)$. On est ramené au cas $n=1$.

Chapitre VIII

Problèmes de type Bernstein

On désigne par $\Lambda_{\alpha}(\mathbb{T}^n, B)$ l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{T}^n à valeurs dans un Banach B , telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^n \quad \|f(x) - f(y)\|_B = o(\|x - y\|_{\mathbb{T}^n}^{\alpha})$$

et $\|x - y\|_{\mathbb{T}^n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

Remarque 1 : Si $\alpha' > \alpha$ on a $\Lambda_{\alpha'}(\mathbb{T}^n, B) \subset \Lambda_{\alpha}(\mathbb{T}^n, B)$.

Soit $D_{\infty} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$

On a défini les applications surjectives : $D_{\infty} \xrightarrow{d} \mathbb{T}$

$$D_{\infty}^n \xrightarrow{d^n} \mathbb{T}^n$$

D_{∞} est muni de la métrique $\Delta(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j - y_j|}{2^j} = \Delta(0, x - y)$

d est alors une application de $\Lambda_1(D_{\infty})$:

Soient $t, u \in \mathbb{T}$. $t = e^{2i\pi x}$ $u = e^{2i\pi y}$ $x, y \in [0, 1] \rightsquigarrow x^j, y^j \in D_{\infty}$

$$\begin{aligned} |t - u|_{\mathbb{T}} &= |e^{2i\pi(x-y)} - 1| = 2|\sin \pi(x-y)| \leq 2\pi|x-y| = 2\pi\Delta(0, |x^j - y^j|) \\ &\leq 2\pi\Delta(x^j, y^j) \end{aligned}$$

Remarque 2 : D_{∞}^n étant muni de la métrique produit, $d^n \in \Lambda_1(D_{\infty}^n)$, donc

$\Lambda_{\alpha}(\mathbb{T}^n, B) \subset \Lambda_{\alpha}(D_{\infty}^n, B)$. On ne peut identifier D_{∞} à D_{∞}^n car cette identifica-

tion ne préserve pas la métrique.

Soit $D_r = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ r entier > 0 .

On considère les projections surjectives $p_r : D_\infty \longrightarrow D_r$

$$p_r^n : D_\infty^n \longrightarrow D_r^n$$

et l'application induite

$$V_{p_r^n} : \mathcal{E}(D_r^n) \longrightarrow \mathcal{E}(D_\infty^n)$$

Remarque 3 : On sait que les applications $V_{p_r^n} \hat{\otimes} V_{p_r^m} : \mathcal{E}(D_r^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(D_r^m) \longrightarrow \mathcal{E}(D_\infty^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(D_\infty^m)$

$$\text{et } V_{p_r^n} \hat{\otimes} \text{Id}_K : \mathcal{E}(D_r^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(K) \longrightarrow \mathcal{E}(D_\infty^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(K)$$

où K est un compact quelconque, sont isométriques.

- Soient $K_1 \dots K_n$ des espaces finis, de cardinaux $p_1 \dots p_n$.

On a alors de façon évidente :

$$V(K) = \mathcal{E}(K_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{E}(K_n) \longleftrightarrow \mathcal{E}(K_1 \times \dots \times K_n) = \mathcal{E}(K)$$

Mais cette bijection n'est pas isométrique.

Lorsque $K_1 \dots K_n$ sont des compacts quelconques, on sait que

$$V(K) \xrightarrow{\subset} \mathcal{E}(K)$$

Soit $BM(V)$ le dual topologique de $V(K)$, ou espace des bimesures sur K .

$$BM(V) \supset M(K)$$

Proposition 1. Si $K_1 \dots K_n$ sont des espaces finis, $BM(V) = M(K)$, les normes

étant équivalentes.

On note $p_1 \dots p_n$ les cardinaux de $K_1 \dots K_n$.

$$\forall f \in V(K) \quad f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e_\nu^1 \otimes \dots \otimes e_\nu^n$$

avec $e_\nu^i \in \mathcal{E}(K_i)$ et $\|e_\nu^i\|_\infty \leq 1 \quad \forall \nu \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$.

$$\|f\|_V = \inf \sum |\alpha_\nu| \quad \longrightarrow \quad \|f\|_V \geq \|f\|_\infty$$

pour toutes les décompositions

Soit $\mu \in M(K)$.

$$\|\mu\|_{M(K)} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{E}(K) \\ \|f\|_{\infty} \leq 1}} |\langle f, \mu \rangle| \geq \sup_{\substack{f \in V(K) \\ \|f\|_V \leq 1}} |\langle f, \mu \rangle| = \|\mu\|_{BM(V)}$$

- Soit $\mu \in BM(V)$

$$\|\mu\|_{BM(V)} = \sup_{\substack{f = e^1 \otimes \dots \otimes e^n \\ \|e^i\|_{\infty} \leq 1}} |\langle f, \mu \rangle|$$

$$e^i \in \mathcal{E}(K_i) \quad e^i(k_i^{r_i}) = u_i^{r_i} \in \mathcal{E} \quad 1 \leq i \leq p_i$$

$$\langle e^1 \otimes \dots \otimes e^n, \mu \rangle = \sum_{r=(r_1, \dots, r_n)} \mu_r u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n}$$

$$\|\mu\|_{BM(V)} = \sup_{\substack{r_i^{j_i} \\ |u_i^{j_i}| \leq 1}} \left| \sum_r \mu_r u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n} \right| = \sup_{\substack{r_i^{j_i} \\ |u_i^{j_i}| \leq 1}} \sum_r |\mu_r u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n}|$$

$$= \sup_{\substack{r_i^{j_i} \\ |u_i^{j_i}| \leq 1 \\ 1 \leq j_i \leq n-1}} \sum_{r_1, \dots, r_{n-1}} \sum_{r_n=1}^{r_n=p_n} |\mu_r u_1^{r_1} \dots u_{n-1}^{r_{n-1}}|$$

On décompose les $u_i^{r_i} \in \mathcal{E}$ en parties réelle et imaginaire.

$$\|\mu\|_{BM(V)} \left[\sup_{\substack{r_i^{j_i} \\ |u_i^{j_i}| \leq 1 \\ 1 \leq j_i \leq n-1}} \sum_{r_1, \dots, r_{n-1}} \sum_{r_n=1}^{r_n=p_n} |\mu_r u_1^{r_1} \dots u_{n-1}^{r_{n-1}}| \right] \times 2^{n-1} \quad u_i^{j_i} \in \mathbb{R}$$

$$\|\mu\|_{BM(V)} \geq 2^{n-1} \left[\sup_{\substack{r_i^{j_i} \\ |u_i^{j_i}| = \pm 1 \\ 1 \leq j_i \leq n-1}} \sum_{r_1, \dots, r_{n-1}} \sum_{r_n} |\mu_{r_1, \dots, r_{n-1}, r_n} u_1^{r_1} \dots u_{n-1}^{r_{n-1}}| \right]$$

μ est aussi une forme linéaire bornée sur $\mathcal{E}(K)$ car

$$\|\mu\|_{M(K)} = \sup_{\|f\|_{\infty} \leq 1} |\langle f, \mu \rangle| = \sup_{\substack{r_1, \dots, r_n \\ |u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n}| \leq 1 \\ \forall r = (r_1, \dots, r_n)}} \left| \sum_r \mu_r u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n} \right| \leq \sum_r |\mu_r|$$

On utilise alors la théorie des probabilités, en associant à $u_i^{r_i}$ la variable aléatoire $u_i^{r_i}$ valant ± 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque valeur. Ces variables sont indépendantes les unes des autres.

Lemme. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in \mathcal{C}$. On considère la variable aléatoire $(\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K)$ où les \pm sont choisis au hasard avec probabilité $\frac{1}{2}$ indépendamment les uns des autres.

$$\text{Alors } \mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K|^2 \leq \left[\mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K| \right]^{2/3} \left[\mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K|^4 \right]^{1/3}$$

Les \pm étant indépendants, $\mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} |\pm \alpha_1, \dots, \pm \alpha_K|^4 &= |\alpha_1|^4 + \dots + |\alpha_K|^4 + 6 \sum_{i < j} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 \\ &\leq 3 (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2)^2 \end{aligned}$$

On obtient ici :

$$\|\mu\|_{BM(V)} \geq 2^{n-1} \sup_{\substack{r_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n-2}} \sum_{r_1, \dots, r_{n-2}} |u_1^{r_1} \dots u_{n-2}^{r_{n-2}}| \mathcal{E} \left| \sum_{r_{n-1}} \mu_{r_1, \dots, r_{n-1}, r_n} u_{n-1}^{r_{n-1}} \right|$$

$$\text{Or } \mathcal{E} \left| \sum_{r_{n-1}} \mu_{r_{n-1}} u_{n-1}^{r_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sum_{r_{n-1}} |\mu_{r_{n-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{p_{n-1}}} \sum_{r_{n-1}} |\mu_{r_{n-1}}|$$

La dernière inégalité n'est autre que l'inégalité de Schwarz.

En recommençant pour $r_{n-2} \dots r_1$ on a :

$$\|\mu\|_{\text{BM}(V)} \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{p_1 \dots p_{n-1}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \sum_{r_n} \sum_{r_1 \dots r_{n-1}} |\mu_r| \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_1 \dots p_{n-1}}} \|\mu\|_{M(K)}$$

- Alors

$$\forall f \in V(K) \quad \|f\|_V = \sup_{\substack{\mu \in \text{BM}(V) \\ \|\mu\|_{\text{BM}} \leq 1}} |\langle f, \mu \rangle| \leq \sup_{\mu \in M(K)} |\langle f, \mu \rangle| = \sqrt{p_1 \dots p_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \|f\|_\infty$$

$$\|\mu\|_M \leq \sqrt{p_1 \dots p_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

ce qui démontre la

Proposition 2. Si $K_1 \dots K_n$ sont des espaces finis, $V(K) = \mathcal{C}(K)$, les normes étant équivalentes.

Proposition 3. Si $K_1 \dots K_{n-1}$ sont des espaces finis, K_n un compact quelconque, $V(K) = \mathcal{C}(K)$, les normes étant équivalentes.

- On vérifie aisément que $V(K) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_{n-1}) = \mathcal{C}(K_1 \times \dots \times K_{n-1}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_n)$ est algébriquement isomorphe à $\mathcal{C}(K_1 \times \dots \times K_n)$, en posant

$$\forall f(t, k) \in \mathcal{C}(K_1 \dots K_n), \quad f = \sum_{t_i \in \mathcal{C}(K_1 \times \dots \times K_{n-1})} f_{t_i} \otimes 1_{\delta_{tt_i}} \quad \text{avec } \delta_{tt_i} = 1 \text{ si } t = t_i \\ = 0 \text{ si } t \neq t_i$$

- On remarque que la constante $\sqrt{p_1 \dots p_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ de la proposition 2 est indépendante du cardinal du dernier espace.

La boule unité de $\text{BM}(V)$ est l'enveloppe convexe faiblement fermée de ses points extrémaux qui sont les bimesures à support fini. Ce sont aussi des mesures sur $\mathcal{C}(K)$.

$$\|f\|_V = \sup_{\substack{\mu \in \text{BM}(V) \\ \mu \text{ discrète} \\ \|\mu\|_{\text{BM}} \leq 1}} |\langle f, \mu \rangle| \leq \sqrt{p_1 \dots p_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \|f\|_\infty$$

(pour chaque μ discrète on considère la restriction de f à

$K_1 \times \dots \times K_{n-1} \times \text{Supp } \mu$ et on applique la proposition 2).

Théorème : Pour m entier > 0 et $B = \mathcal{C}(K)$ K compact

$$\text{on a } \bigwedge_{\frac{m}{2} + \varepsilon} (\mathbb{R}^m, B) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K).$$

$$(1) \quad \bigwedge_{\frac{m}{2}} (D_\infty^m, B) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}(D_\infty^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K).$$

Soit $f \in \bigwedge_{\alpha} (D_\infty^m, B)$

On lui associe f_r :

$$\begin{array}{ccc} D_\infty^m & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}(K) \\ P_r \downarrow & \nearrow f_r & \\ D_r^m & & \end{array}$$

Soit dt la mesure de Haar^r de D_∞^m . On pose

$$\forall x \in D_r^m \quad f_r(x) = 2^{rm} \int_{\{t | P_r^m(t) = x\}} f(t) dt \quad f_r \in \mathcal{C}(D_r^m, B)$$

$$\{t | P_r^m(t) = x\} = Z_r(x)$$

(si $f(t) = 1 \quad \forall t \in Z_r(x)$ on obtient bien $f_r(x) = 1$)

$$\forall x \in D_r^m \quad \|f_r(x)\| \leq \sup_{t \in Z_r(x)} \|f(t)\|$$

$$\text{d'où } \|f_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

$$\|P_r^m(f_r) - f\|_\infty = \sup_{x \in D_r^m} \left[\sup_{t \in Z_r(x)} \|f(t) - f_r(x)\| \right] = 0 \quad (\text{diamètre de } Z_r(x) = 0(2^{-r\alpha}))$$

$$\text{Soit } \psi_r = f_r - (f_{r-1}) \quad \psi_r \in \mathcal{C}(D_r^m, B) \quad \|\psi_r\|_\infty = 0(2^{-r\alpha})$$

$$f = \lim_{r \rightarrow \infty} (P_r^m f_r) \quad \text{pour la convergence uniforme dans } \mathcal{C}(D_\infty^m, B)$$

$$\text{ou } f = \sum_1^\infty P_r^m \psi_r$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}(G, B)$ s'identifie à $\mathcal{C}(G \times K)$ pour tout groupe G compact, en posant $f(g, k) = f_g(k)$.

D'après la proposition 3

$$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m, B) = \mathcal{C}(D_r^m \times K) \implies \varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K) = V_r$$

$$\|\varphi_r\|_{V_r} = 0 \quad (\sqrt{2^{rm}} \|\varphi_r\|_{\infty}) = 0 \quad \left(2^{r\left(\frac{m}{2} - \alpha\right)}\right)$$

et $\|\varphi_r\|_{V_r} = \|\mathcal{P}_r^m(\varphi_r)\|_{\mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K)}$ d'après la remarque 3

La série $\sum_1^{\infty} \mathcal{P}_r^m(\varphi_r)$ converge dans $\mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K)$ pourvu que $\alpha > \frac{m}{2}$ et a pour limite f . Donc $f \in \mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K)$.

$$(2) \quad \Lambda_{\alpha}(\mathbb{T}^m, B) \subset \Lambda_{\alpha}(D_{\infty}^m, B)$$

$$\alpha > \frac{m}{2} \implies \Delta_{\alpha}(D_{\infty}^m, B) \subset \mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K)$$

D'autre part $\Lambda_{\alpha}(\mathbb{T}^m, B) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T}^m, B) = \mathcal{C}(\mathbb{T}^m \times K)$

et on sait que $\mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{C}(\mathbb{T}^m \times K) = \mathcal{C}(\mathbb{T}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K)$ (en identifiant $\mathcal{C}(D_{\infty}^m)$ à $\mathcal{C}(D_{\infty}^m)$).

La même méthode permet de montrer le théorème suivant :

Théorème : $\Lambda_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\subset} \mathcal{C}(\mathbb{T}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

(les fonctions sont à valeurs dans \mathcal{C}).

Il suffit de montrer que $\Lambda_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(D_{\infty}^m \times D_{\infty}^m) \subset \mathcal{C}(D_{\infty}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_{\infty}^m)$.

Soit $f \in \Lambda_{\alpha}(D_{\infty}^m \times D_{\infty}^m)$. On lui associe f_r et φ_r .

$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m \times D_r^m)$ et d'après la proposition 1,

$$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_r) = V_r ; \|\varphi_r\|_{V_r} = 0 (2^{r(\frac{1}{2}-\alpha)}) = \|\varphi_r\|_{\mathcal{C}(D_\infty^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)}$$

d'après la remarque 3.

$$\text{Donc} \quad \alpha > \frac{1}{2} \implies f \in \mathcal{C}(D_\infty^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty).$$

Corollaire :

$$\Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\subset} V(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\subset} A(\mathbb{R}^m)$$

en effet $\Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\subset} \Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^m, B)$ où $B = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$

$$\subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) = V(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\subset} A(\mathbb{R}^m) \quad \text{en utilisant l'application de Hopf } P.$$

Bibliographie

- [1] BOURBAKI.- Algèbre linéaire.- Chapitre 2, ASI, 1236.
- [2] BOURBAKI.- Topologie générale.- Chapitre 9, § 6, n° 8, ASI, 1045.
- [3] KAHANE et SALEM.- Ensembles parfaits et séries trigonométriques.- ASI, 1301.
- [4] RUDIN(W.).- Fourier Analysis on Groups.- Interscience Publishers.
- [5] SEMINAIRE SCHWARTZ.- Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques.- 1953-54.
- [6] SCHWARTZ.- Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts.- CRASCI, Paris, t. 227, p. 424-426, 1948.
- [7] VAROPOULOS.- Tensor Algebras and Harmonic Analysis.- Acta Mathematica 119 novembre 1967.
- [8] VAROPOULOS.- Spectral synthesis on spheres.- Proc. Camb. Phil. Soc., 1966.
- [9] VAROPOULOS.- Sur les ensembles parfaits et séries trigonométriques.- Note de Varopoulos présentée par Leray, CRASCI, Paris, t. 260, p. 4668-4676, 1965.
- [10] VAROPOULOS.- Algèbres tensorielles.- cours à Orsay, 1965-1966.
- [11] VAROPOULOS.- Algèbres de Banach. Algèbres de groupes. Cours à Orsay 65-66.