PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

86-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1984-1985

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) :

Kahane	60G57	-	76F05
López Lagomasino I	41A20	-	41A21
López Lagomasino II	41A20	-	41A21
Lyons	42A24	-	42A55
Sjögren	32A40	-	32A35
Tran-Oberlé	28A75	-	28D99

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

86-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE
1984-1985

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Exposé 1

UN MODELE DE CHAOS MULTIPLICATIF

Jean-Pierre KAHANE

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Unité Associée 757
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Commençons par une image familière, celle des produits de Riesz. Si $0 \leq a_j \leq 1$,

$$R(t) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j \cos 4^j t)$$

est une mesure positive. Si $\sum_1^\infty a_j^2 < \infty$,

$$L(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos 4^j t$$

est une bonne fonction, qui appartient à tous les L^p $(1 \leq p < \infty)$, et dont l'exponentielle ressemble à $R(t)$ au sens que $R(t)/\exp L(t)$ est une fonction continue strictement positive. Si $\sum_1^\infty a_j^2 = \infty$, $L(t)$ n'est plus une fonction, et $R(t)$ est une mesure singulière. La singularité mutuelle des produits de Riesz a été étudiée par Peyrière.

Il y a beaucoup d'analogies entre les séries lacunaires $L(t)$ et les séries aléatoires gaussiennes

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\xi_n \cos nt + \xi_n' \sin nt)$$

où (ξ_n, ξ_n') est une suite normale, et les α_n des coefficients positifs tels que

$$\sum_{4^j < n \leq 4^{j+1}} \alpha_n^2 = a_j^2 .$$

Quand $\sum_1^\infty \alpha_n^2 < \infty$, $G(t)$ est p.s. une bonne fonction, dont on peut considérer l'exponentielle normalisée

$$\exp(G(t) - \sum_1^\infty \alpha_n^2) .$$

Quand $\sum_1^\infty \alpha_n^2 = \infty$, $G(t)$ n'est plus une fonction. Mais se pourrait-il que son exponentielle normalisée garde un sens, analogue au produit de Riesz ? Nous allons répondre à cette question.

Si on remplace le système trigonométrique par celui de Haar ou de Walsh, certaines réponses sont connues. Elles proviennent du modèle de Benoît Mandelbrot que Peyrière et moi avons traité en 1974. Outre ce modèle, complètement élucidé, le sujet est marqué par des essais successifs de Oboukhov et Kolmogorov (1961), Yaglom (1966), B. Mandelbrot (1971) ; la bibliographie et le point se trouvent dans le dernier livre de Mandelbrot (1982). Naturellement, le sujet n'est pas pour l'essentiel l'exponentiation de séries trigonométriques aléatoires, mais un modèle aléatoire pour la dissipation de l'énergie au cours de la turbulence (idée de Landau, cf. Kolmogorov 1961).

Voici un cadre raisonnable. On donne un espace métrique (T,d), sur lequel on considérera les mesures de Radon positives $\sigma \in M^+(T)$. On donne une suite de processus gaussiens indépendants indexés par T, soit $X_n(t)$. En loi, ils sont bien définis par les corrélations

$$p_n(t,s) = E\, X_n(t)\, X_n(s)$$

qui sont des noyaux de type positif, tout à fait arbitraires, sur T. On leur associe les poids

$$P_n(t) = \exp(X_n(t) - \tfrac{1}{2}\, E\, X_n^2(t)).$$

Ainsi

$$E\, P_n(t) = 1$$

$$E\, P_n(t)\, P_n(s) = \exp p_n(t,s).$$

On multiplie ces poids indépendants :

$$Q_n(t) = P_1 P_2 \dots P_n(t)$$

et, pour chaque $\sigma \in M^+(T)$, on considère la suite des mesures aléatoires $Q_n\sigma$. C'est une martingale, qui converge presque sûrement vers une mesure aléatoire S. On pose $S = Q\sigma$, et on dit que Q est l'opérateur de chaos multiplicatif associé aux $X_n(t)$. En loi, il ne dépend que de la suite des noyaux $p_n(t,s)$. Le problème général est donc celui-ci : étant donné les $p_n(t,s)$, que peut-on dire de l'opérateur aléatoire Q et des mesures aléatoires $Q\sigma$?

Dans la suite, K désigne toujours un compact dans T. La première idée est de fixer σ et K, et d'étudier la convergence L^2 de la martingale $Q_n\sigma(K)$. Cela donnera une condition de non-dégénérescence pour Q (suffisante, pas nécessaire comme on le verra). Le calcul est facile :

$$E\left(\int_K Q_n\sigma\right)^2 = \iint e^{q_n(t,s)}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s)$$

en posant

$$q_n(t,s) = (p_1 + p_2 + \dots p_n)(t,s).$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence L^2 est donc

$$\iint_{K^2} e^{q_n(t,s)}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) = O(1).$$

Dans le cas où les $p_n(t,s)$ sont positifs, on écrit

$$q(t,s) = \sum_1^\infty p_n(t,s)$$

(on dira alors que $q(t,s)$ est un noyau de type σ-positif) et la condition est

$$\iint_{K^2} e^{q(t,s)}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) < \infty.$$

Comme exercice, on peut traiter le cas considéré dans l'introduction : $T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} = K$, $d\sigma(t) = dt$, $p_n(t,s) = \alpha_n^2 \cos n(t-s)$. Si par exemple α_n^2 est une suite convexe,

$$f(t) = \sum_0^\infty \alpha_n^2 \cos nt$$

est une fonction positive, et la condition est $\exp f \in L^1(T)$. La discussion est facile et intéressante quand $\alpha_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$: la valeur $\alpha = 1$ est critique. Dans le choix que nous avons fait, les $p_n(t,s)$ ne sont pas positifs ; mais on aurait pu choisir aussi bien

$$p_n(t,s) = \sum_{o}^{n} \left(1-\frac{j}{n}\right) \alpha_j^2 \cos n(t-s)$$

qui est positif quand α_j^2 est une suite convexe.

Supposons maintenant les $p_n(t,s)$ positifs. La condition de convergence L^2 ne dépend que de leur somme $q(t,s)$, et

$$E(S(K))^2 = \iint_{K^2} e^{q(t,s)}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s).$$

De plus, pour tout noyau $k(t,s)$ positif, ou borné, on a

$$E \iint_{K^2} k(t,s)\, dS(t)\, dS(s) = \iint_{K^2} k(t,s)\, e^{q(t,s)} d\sigma(t)\, d\sigma(s).$$

C'est intéressant dans le cas de l'exemple traité ci-dessus ($T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $q(t,s) = \sum_{o}^{\infty} \frac{\alpha^2}{n} \cos n(t-s)$), mais avec σ et K quelconques. Posons $\alpha^2 = 2u$. On a

$$q(t,s) = 2u \log \frac{1}{|t-s|} + o(1)$$

donc, essentiellement, $E(S(K^2))$ est l'intégrale d'énergie de σ par rapport au noyau r^{-2u}, qu'on note $I_{2u}(\sigma)$. En choisissant $k(t,s) = |t-s|^{-v}$, on voit que

$$E\, I_v(S) \approx I_{v+2u}(\sigma).$$

En choisissant $k(t,s) = \exp in(t-s)$ et $d\sigma(t) = dt$, on voit que

$$E\, |\hat{S}(n)|^2 \sim C\, |n|^{2u-1}$$

(on suppose $\alpha^2 = 2u < 1$). Le choix bizarre de u comme paramètre s'expliquera plus tard.

Voici un autre exemple amusant : $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $X_n(t) = B_n(t+\ell_n) - B_n(t)$, où

B_n représente le mouvement brownien. Ainsi $p_n(t,s) = \Delta_n(t-s)$, où $\Delta_n = 1_{[0,\ell_n]} * 1_{[-\ell_n,0]}$. Dans ce cas, la condition

$$\iint \exp \sum_1^\infty \Delta_n(t)\, dt = \infty$$

est exactement (Shepp) la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ soit presque sûrement recouvert par des arcs de longueur ℓ_n disposés au hasard, et elle s'exprime aussi par la condition

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots \ell_n) = \infty$$

si la suite ℓ_n est supposée décroissante.

Après la théorie L^2, l'idée naturelle est de tenter la théorie L^{2m} (m entier ≥ 1). On part maintenant de la formule

$$E\, P(t_1)\, P(t_2) \ldots P(t_{2m}) = \exp \sum_{1 \leq j < k \leq 2m} p(t_j, t_k)$$

appliquée à $P = P_n$ ou $P = Q_n$, et on obtient comme condition nécessaire et suffisante de convergence L^{2m} de la martingale $Q_n\, \sigma(K)$

$$\int \ldots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq 2m} q_n(t_j, t_k)\, d\sigma(t_1)\, d\sigma(t_2) \ldots d\sigma(t_{2m}) = O(1)$$

et, lorsque les $p_n(t,s)$ sont positifs, la condition – ne dépendant que de $q(t,s)$ –

$$(*) \qquad \int \ldots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq 2m} q_{jk}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_{2m} < \infty$$

avec les notations évidentes

$$q_{jk} = q(t_j, t_k) \quad , \quad d\sigma_j = d\sigma(t_j).$$

On va tirer de là une condition plus parlante.

Définissons les j modulo $2m$ et posons

$$\ell_o = q_{01} + q_{1,-1} + q_{-1,\,2} + \ldots + q_{1-m,m}$$

$$\ell_1 = q_{12} + q_{2,0} + q_{0,3} + \ldots + q_{2-m,m+1}$$

$$\vdots$$

$$\ell_{m-1} = q_{m-1,m} + \ldots\ldots + q_{0,-1}$$

(les indices sur chaque ligne sont translatés de ceux de la première par le numéro de la ligne). Ainsi

$$\sum_{1\le j<k\le 2m} q_{jk} = \ell_o + \ell_1 + \ldots + \ell_{m-1}.$$

En appliquant Hölder, l'intégrale (*) est majorée par

$$\prod_{j=1}^{m-1} \left(\int\!\!\ldots\!\!\int_{K^{2m}} e^{m\ell_j}\, d\sigma_o d\sigma_1 \ldots d\sigma_{2m-1}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Toutes les intégrales ici sont égales. On est amené à majorer

$$\int\!\!\ldots\!\!\int_{K^{2m}} e^{m\ell_o}\, d\sigma_o d\sigma_1 \ldots d\sigma_{2m-1}.$$

Pour cela, on intègre dans l'ordre des indices qui apparaissent sur la ligne ℓ_o ; en posant

$$J = \sup_t \int_K e^{mq(t,s)}\, d\sigma(s)$$

on a les majorations

$$\int e^{mq_{01}}\, d\sigma_o \le J$$

$$\iint e^{m(q_{01}+q_{1-1})}\, d\sigma_o d\sigma_1 \le J^2$$

$$\vdots$$

$$\int\!\!\ldots\!\!\int e^{m\ell_o}\, d\sigma_o d\sigma_1 \ldots d\sigma_{1-m} d\sigma_m \le J^{2m-1}\sigma(K).$$

L'intégrale (*) est donc majorée par $J^{2m-1}\sigma(K)$. Une condition suffisante pour la convergence L^{2m} est donc que les potentiels

$$\int_K e^{m\,q(t,s)}\, d\sigma(s)$$

soient bornés. Pour $m = 1$, c'est à peine un peu moins bon que la condition d'énergie (puisque si l'énergie est bornée, la mesure restreinte à un compact convenable K', tel que $\sigma(K \setminus K')$ soit arbitrairement petit, a un potentiel borné). Cela suggère une question.

Sous quelles conditions additionnelles est-il vrai que la convergence dans $L^h(\Omega)$ de la martingale $Q_n\sigma(K)$ équivaut à

$$(\neq) \qquad \iint_{K^2} e^{\frac{1}{2}hq(t,s)}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) < \infty$$

pour $1 \leq h < \infty$?

Il est temps de regarder les martingales de Benoît Mandelbrot (1974), en nous restreignant au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire des poids log-normaux. Soit c un entier ≥ 2, $T = (\mathbf{Z}/c\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} = K$, σ la mesure de Haar, $d(t,s)$ la distance c-adique, c'est-à-dire $d(t,s) = c^{-n}$ si t et s ont exactement leurs n premières coordonnées en commun. Prenons

$$p_n(t,s) = \begin{cases} 2u\log c & \text{si} \quad d(t,s) \leq c^{-n} \\ 0 & \text{si} \quad d(t,s) > c^{-n}. \end{cases}$$

Ainsi

$$q(t,s) = 2u\log \frac{1}{d(t,s)}\,.$$

Dans ce cas les théorèmes 1 et 2 de K-P 1976 montrent que $Q\sigma = 0$ si $u \geq 1$, $EQ\sigma(T) = \sigma(T) = 1$ si $u < 1$, et $E(Q\sigma(T))^h < \infty$ si et seulement si $uh < 1$. Dans ce cas, $(\neq)$ est bien une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la martingale $Q_n\sigma(K)$ dans $L^h(\Omega)$, pour $1 \leq h < \infty$.

Reprenons le cas général. La première question qui se pose est celle de la dégénérescence ou non-dégénérescence de Q. On dit que Q est dégénéré en σ si $Q\sigma = 0$, et complètement dégénéré si $Q\sigma = 0$ pour tout σ. Si $Q\sigma \neq 0$, posons $\tau = EQ\sigma$: ainsi $0 < \tau \leq \sigma$, $Q(\sigma - T) = 0$ et $EQ\tau = \tau$; on dira que

Q est fortement non-dégénéré en τ. Remarquons aussi que (loi du 0-1), si Q n'est pas dégénéré en σ, on a $Q\sigma \neq 0$ p. s.

La non-dégénérescence de Q en σ se ramène donc - quitte à diminuer convenablement σ - à la non dégénérescence forte. Celle-ci équivaut à la convergence de $Q_n\sigma(K)$ vers $Q\sigma(K)$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout K.

Quand il y a non dégénérescence forte, l'existence des moments $E(Q\sigma(K))^h$ équivaut à la convergence de $Q_n\sigma(K)$ vers $Q\sigma(K)$ dans $L^h(\Omega)$, et aussi au fait que les $E(Q_n\sigma(K))^h$ sont bornés $(h > 1)$.

Quant à la convergence dans L^1, elle équivaut à l'existence d'une fonction $f(x)$ vérifiant $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}f(x) = \infty$ et $E\, f(Q_n\sigma(K)) = O(1)$.

Si on a deux couples (Q,σ) et (Q',σ'), on voit évidemment ce que veut dire (Q,σ) est meilleur que (Q',σ') relativement aux problèmes de dégénérescence et des moments.

Après ces prolégomènes, voici les premiers vrais théorèmes (dont je n'avais encore que des versions partielles lors de l'exposé au séminaire le 16 mars).

THEOREME 1. Si les $p_n(t, s)$ sont positifs, la loi de Q ne dépend que de leur somme $q(t,s)$.

En conséquence, on pourra parler du chaos multiplicatif associé à un noyau de type σ-positif (en identifiant des opérateurs ayant même loi).

THEOREME 2. Si $q(t,s) \leq q'(t,s)$, Q est meilleur que Q' relativement aux problèmes de dégénérescence et des moments.

Cela veut dire, naturellement, que (Q,σ) est meilleur que (Q',σ) quelle que soit la mesure σ. Voici une application dans laquelle on fixe Q et on fait varier σ.

COROLLAIRE du théorème 2. Si $q(t,s)$ est une fonction décroissante de $d(t,s)$ et si σ' est l'image de σ par une contraction de l'espace T, le couple (Q,σ') est pire que le couple (Q,σ) relativement aux problèmes de dégénérescence et des moments.

Un autre corollaire, évident, est que si $q(t,s) - q'(t,s) = O(1)$, Q et Q' sont équivalents relativement aux problèmes posés.

La preuve des théorèmes 1 et 2, que je ne donnerai pas (elle sera publiée dans les Annales des Sciences Mathématiques du Québec) repose sur le lemme clé que voici : si $p_1(t,s) \leq p_2(t,s)$, et si f est convexe, alors

$$E\, f\left(\int_K P_1\sigma\right) \leq E\, f\left(\int_K P_2\sigma\right).$$

C'est un lemme de comparaison du type de Slepian, mais qui ne se déduit pas - du moins de façon visible pour moi - du lemme de Slepian. Par contre, il se démontre de manière analogue, à condition d'avoir la bonne démonstration. Voici donc, en prime et entre parenthèses, la bonne démonstration du lemme de Slepian.

Enoncé. On suppose $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ gaussiennes centrées,

$$E\, X_j X_k \leq E\, Y_j Y_k \quad \text{pour tout } (j,k)$$

$$E\, X_j X_k = E\, Y_j Y_k \quad \text{pour tout } (j,k) \in J$$

J étant une partie donnée de $(1, 2, \dots, n)^2$. Soit $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$, telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k} \geq 0 \quad \text{pour } (j,k) \notin J$$

(on ne suppose rien quand $(j,k) \in J$). Alors

$$E\, f(X) \leq E\, f(Y).$$

Preuve. On suppose, comme à l'ordinaire, que X et Y sont indépendantes, et on pose

$$X(\lambda) = \sqrt{1-\lambda}\, X + \sqrt{\lambda}\, Y \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\varphi(\lambda) = E\, f(X(\lambda)).$$

Il suffit de montrer que φ est une fonction croissante. Or

$$\varphi'(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} E\Big(\Big(\frac{-X_j}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{Y_j}{\sqrt{\lambda}}\Big) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X(\lambda))\Big).$$

Nous allons montrer que chaque terme de la somme est positif. Fixons j et λ, et posons

$$U = \frac{-X_j}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{Y_j}{\sqrt{\lambda}}, \qquad V_k = X_k(\lambda).$$

L'hypothèse donne

$$E\, U\, U_k \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad k$$

$$E\, U\, U_k = 0 \quad \text{pour} \quad (j,k) \in J$$

soit

$$V_k = \alpha_k U + W_k$$

avec $W_k \perp U$, $\alpha_k \geq 0$ pour tout k, $\alpha_k = 0$ si $(j,k) \in J$. Et il est maintenant évident, avec l'hypothèse faite sur f, que

$$E\, U \frac{\partial f}{\partial x_j}(\ldots\ \alpha_k U + W_k \ldots) \geq 0$$

(on intègre d'abord par rapport aux W_k, et on reste avec $E\, U g(U)$, où g est une fonction croissante).

Dans l'énoncé, on peut supprimer l'hypothèse de classe C^2. Le lemme de Slepian classique correspond à $J = \{(j,j)\}$ et f fonction indicatrice d'un produit de demi-espaces $x_j > a_j$.

A partir de l'exemple $T = (\mathbf{Z}/c\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, le théorème 2 permet d'obtenir des énoncés pour des ensembles homéomorphes à T et munis de distances comparables.

Voici la conséquence la plus intéressante.

THEOREME 3. Supposons $T = \mathbb{R}^\nu$ euclidien et Q associé à un noyau de type σ-positif $q(t,s)$ tel que

$$q(t,s) = 2u \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1) \qquad (u > 0)$$

où $d(t,s)$ est la distance euclidienne. Si $u \geq \nu$, Q est dégénéré, et si $u < \nu$ Q est fortement non dégénéré sur la mesure de Lebesgue σ de $\mathbb{R}^\nu$. Dans ce dernier cas, on a

$$E(Q\,\sigma(K))^h < \infty \Longleftrightarrow uh < \nu$$

pour tout compact K de σ-mesure strictement positive.

L'existence de noyaux de type σ-positif vérifiant la condition du théorème 3 est facile à établir. En fait, cela a peu de choses à voir avec la structure euclidienne.

Supposons, généralement, que $d^2(t,s)$ soit un noyau de type négatif sur T, $\psi(t,s)$. Cela signifie, au choix, que

a. $\Sigma\, c_j c_k\, \psi(t_j,t_k) \leq 0$ pour tout choix de t_j en nombre fini dans T, et de réels c_j tels que $\Sigma\, c_j = 0$

b. $e^{-y\,\psi(t,s)}$ est de type positif pour tout $y > 0$

c. (T,d) peut être plongé isométriquement dans un espace de Hilbert.

Comme exemple dans le cas $T = \mathbb{R}^\nu$, on a

$$\psi(t,s) = \sum_{j=1}^{\nu} |t_j - s_j|^{\alpha_j}$$

si les exposants vérifient $0 < \alpha_j \leq 2$ (ici t_j est la jième coordonnée de t). Cf. Schoenberg avant 1940.

Posons

$$\ell(x) = \int_1^\infty e^{-yx}\,\frac{dy}{y} = \log^+ \frac{1}{x} + O(1)$$

$$\ell_\rho(x) = \int_1^\rho e^{-yx}\,\frac{dy}{y}.$$

Chaque $\ell_\rho(\psi(t,s))$ est un noyau de type positif, et $\ell(\psi(t,s))$ est un noyau de type σ-positif. Dorénavant, nous nous limiterons aux noyaux

$$q(t,s) = u\ \ell(\psi(t,s)) = 2u \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1)$$

et nous désignerons par $Q_{(u)}$ l'opérateur correspondant.

Si on a $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_\ell$ et si on considère des versions indépendantes $Q_{(u_1)}, Q_{(u_2)}, \ldots Q_{(u_\ell)}$ associées à $u_1, u_2, \ldots u_\ell$, leur produit est une version de $Q_{(u)}$:

$$Q_{(u)} = Q_{(u_\ell)} \cdots Q_{(u_2)} Q_{(u_1)}.$$

Ainsi, partant d'une mesure $\sigma \in M^+(T)$, on peut construire tour à tour

$$\begin{aligned} S_1 &= Q_{(u_1)}\sigma \\ S_2 &= Q_{(u_2)} S_1 \\ &\vdots \\ S_\ell &= Q_{(u_\ell)} S_{\ell-1} \end{aligned}$$

et poser $S_\ell = S = Q_{(u)}\sigma$. On verra tout à l'heure qu'il peut être essentiel de construire S de cette manière.

L'objectif est maintenant le suivant. Supposant σ hölderienne d'un certain ordre, peut on obtenir une condition de Hölder d'un autre ordre presque sûre pour S ? La théorie L^2 nous donne un résultat, puisque, nous l'avons vu, $E\, I_v(S) = I_{v+2u}(\sigma)$ (I_α étant l'intégrale d'énergie d'ordre α). Nous allons obtenir beaucoup mieux. Désignons par $M^+_{\alpha+}(T)$ l'ensemble des $\sigma \in M^+(T)$ vérifiant la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, un $C > 0$ et un compact $K \subset T$ tels que

$$\sigma(T \setminus K) < \varepsilon$$

$$\sigma(K \cap B) < C(\operatorname{diam} B)^{\alpha+\delta}$$

pour toute boule B. Voici le résultat.

THEOREME 4. Si $\sigma \in M^+_{\alpha+}(T)$ et $u < \alpha$, $Q_{(u)}$ est fortement non dégénéré en σ, et $Q_{(u)}\sigma \in M^+_{(\alpha-u)+}(T)$ p. s.

La démonstration se fait en deux étapes : dans la première, on suppose $u < \frac{\alpha}{2}$ (alors la théorie L^2 est applicable) ; dans la seconde, on passe au cas général en utilisant une décomposition $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_\ell$ avec

$$\begin{aligned} & u_1 < \frac{\alpha}{2} \\ & u_2 < \frac{\alpha - u_1}{2} \\ & \vdots \\ & u_\ell < \frac{\alpha - u_{\ell-1}}{2} \end{aligned}$$

Quitte à réduire T, on supposera que $\boxtimes$ a lieu avec $K = T$. La clé pour la première étape est la probabilité de Peyrière (cf. K-P 76), ainsi définie : c'est – en nous restreignant, ce qui est possible, au cas $\sigma(T) = 1$ – la probabilité q sur $\Omega \times T$ telle que

$$\int f(\omega,t)\, d\mathsf{q}\,(\omega,t) = E \int f(\omega,t)\, Q\sigma\,(dt).$$

On vérifie que les $X_n(t)$ sont q-indépendants quand on définit – par exemple – $p_n(t,s) = \ell_{e^2}(e^{2n-2}\,\psi(t,s))$ donc $q_n(t,s) = \ell_{e^{2n}}(\psi(t,s))$. D'où, très facilement,

$$\frac{\log P_1(t) + \ldots + \log P_n(t)}{n} \longrightarrow u \qquad \mathsf{q}\text{-p.s.}$$

On a donc presque sûrement (avec la probabilité donnée sur Ω)

$$\divideontimes \qquad \frac{\log Q_n(t)}{n} \longrightarrow u \qquad S\text{-p.p.}$$

donc convergence uniforme sur un compact (aléatoire) K tel que $S(T \setminus K)$ soit arbitrairement petit.

On décompose alors Q sous la forme $Q_n R_n$ (opérateurs indépendants), où R_n correspond à $(q-q_n)(t,s)$. On appelle $B_n(t)$ la boule de centre t et de rayon e^{-n}, on pose $\rho_n(t) = R_n\sigma(B_n(t))$ et on vérifie que

$$\int \rho_n \, d\mathrm{q} = \iint_{d(s,t)\leq e^{-n}} e^{(\mathrm{q}-\mathrm{q}_n)(t,s)} \, d\sigma(s)\, d\sigma(t).$$

L'intégrale est finie puisqu'on a supposé $u < \frac{\alpha}{2}$ et, sur l'ensemble d'intégration, on a $q_n(t,s) = 2un + O(1)$. L'hypothèse $\boxtimes$ (avec $K = T$) donne

$$\int \sum_1^\infty \rho_n \, e^{(\alpha+\delta)n} \, d\mathrm{q} < \infty$$

d'où presque sûrement (avec la probabilité de départ)

$$\rho_n(t) = O(e^{-(\alpha+\delta)n}) \qquad S\text{-p.p.}$$

On se restreint à un compact où le O est uniforme et, en utilisant $\circledast$, on obtient $S \in M^+_{(\alpha-u)+}(T)$. On a de plus

$$E\, S(T) = \sigma(T).$$

La dimension capacitaire de T (au sens de Polya-Szegö et de Frostman) est la borne supérieure des α tels que T porte une mesure σ non nulle appartenant à $M^+_{\alpha+}(T)$. Notons la $\dim_c T$.

COROLLAIRE du théorème 4. Si $u < \dim_c T$, $Q_{(u)}$ n'est pas complètement dégénéré, et la borne supérieure pour tous les $\sigma \in M^+(T)$ des dimensions des boréliens aléatoires portant $Q_{(u)}\sigma$ est au moins égale à $\dim_c T - u$.

(Précisons. Quand σ est donné, $Q_{(u)}\sigma$ est une mesure aléatoire. La borne supérieure des dimensions des boréliens qui la portent est une variable aléatoire. Par la loi du zéro-un, applicable ici, cette variable aléatoire est une constante presque sûre, $C_u(\sigma)$. L'énoncé dit que

$$\nleqq \qquad \sup_{\sigma \in M^+(T)} C_u(\sigma) \geq \dim_c T - u).$$

Moyennant une hypothèse supplémentaire, (H), on va voir que $\nleqq$ est une égalité.

L'hypothèse (H) est que T soit de nature homogène (dans la terminologie de Coifman et Weiss) ou de dimension métrique finie (dans celle d'Assouad). Cela signifie que, pour un entier $N = N(T)$ convenable, toute boule de T puisse être recouverte par N boules de rayon moitié. Voici deux conséquences : 1. la dimension capacitaire et la dimension de Hausdorff sont les mêmes (Frostman + Assouad) 2. Il existe deux constantes $C = C(T)$ et $\gamma = \gamma(T)$ telles que, pour tout K,

$$N(\varepsilon,K) \leq C \left(\frac{\text{diam } K}{\varepsilon}\right)^{\gamma} \tag{\#}$$

où $N(\varepsilon,K)$ est le nombre minimum de boules de rayon ε recouvrant K.

THEOREME 5. Sous l'hypothèse (H), $Q_{(u)}$ est complètement dégénéré lorsque $u > \dim T$.

Pour la preuve, on peut supposer $T = K$ compact, et l'hypothèse est $\text{mes}_{uh} K = 0$ pour un certain $h < 1$. Cela veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir K avec des boules B_j, en nombre fini, telles que $\Sigma\,(\text{diam } B_j)^{uh} < \varepsilon$. L'idée est alors, pour chaque $\sigma \in M^+(T)$, de décomposer σ sous la forme $\Sigma\,\sigma_j$ avec $\sigma_j \in M^+(B_j)$, d'écrire

$$\int Q\,\sigma = \Sigma \int Q\,\sigma_j$$

$$E\left(\int Q\,\sigma\right)^h \leq \Sigma\, E\left(\int Q\,\sigma_j\right)^h$$

et de majorer $E\left(\int Q\,\sigma_j\right)^h$ en utilisant une décomposition $Q = Q_{n_j} R_{n_j}$ adaptée (mêmes notations que dans la preuve du théorème 4). Alors

$$E\left(\int Q\,\sigma_j\right)^h \leq E \sup_{t \in B_j} (Q_{n_j}(t))^h \left(\int \sigma_j\right)^h$$

donc, par Hölder,

$$\Sigma\, E\left(\int Q\,\sigma_j\right)^h \leq \left(\Sigma\left(E \sup_{t \in B_j} (Q_{n_j}(t))^h\right)^{\frac{1}{1-h}}\right)^{1-h} \left(\int \sigma\right)^h.$$

On choisit $n_j \approx - \log \operatorname{diam} B_j$, et on doit majorer

$$E \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h$$

quand diam $B = e^{-n}$. C'est là qu'on a besoin de $\#$, et d'une version forte du théorème de Dudley sur les processus gaussiens admettant des versions bornées.
On trouve

$$O(e^{-nu(h-h^2)})$$

d'où, facilement, $\int Q\sigma = 0$.

Le théorème 5 et le théorème 4 montrent mutuellement qu'ils ne sont pas améliorables (sauf peut-être en remplaçant des inégalités larges par des strictes, etc...). Par exemple, si dim $T = \alpha$, on ne peut avoir $Q_{(u)}\sigma \in M^+_{(\alpha-u)+}(T)$ p. s. $(\varepsilon > 0)$ pour aucune $\sigma \in M^+(T)$ (en effet, le théorème 4 dit que si $Q_{(u)}(\sigma) \in M^+_{\beta+}(T)$ p. s. et $v < \beta$, on a $Q_{(u+v)}(\sigma) \neq 0$, ce qui, par le théorème 5, signifie $u + v < \alpha$).

COROLLAIRE. Sous l'hypothèse (H), $\not\leq$ est une égalité.

Pour terminer, voici quelques remarques sur la log-normalité.

1. Dans les théories L^2 et L^{2m}, l'hypothèse que les poids $P_n(t)$ sont log-normaux (c'est-à-dire exponentielles de processus gaussiens) n'est pas essentielle ; ce dont on se sert est

$$E\, P_n(t)\, P_n(s)$$

et

$$E\, P_n(t_1)\, P_n(t_2) \dots P_n(t_{2m}).$$

De même, dans la première étape du théorème 4, où l'on n'utilise que les estimés L^2 et la probabilité de Peyrière, on n'a pas besoin que les $P_n(t)$ soient log-normaux. Le théorème 5 peut s'étendre si on a un succédanné du théorème de Dudley. Pour les théorèmes 1, 2, et la 2ème étape du théorème 4, une généralisation au cas non log-normal paraît difficile. Le modèle de B. Mandelbrot traité par Peyrière et moi concerne la multiplication de poids aléatoires identiquement distribués, mais de loi quelconque sous la réserve $EW = 1$.

2. L'expression de limite-log-normal, utilisée par Benoît Mandelbrot, s'applique bien aux opérateurs Q, mais devrait être rejetée pour les mesures images $Q\sigma$.

3. Dans l'exposé oral, j'avais introduit des "cones log-normaux", où les masses aléatoires $Q\sigma(K)$ prennent leurs valeurs. Il s'agit des cônes fermés des $L^h(\Omega)$ engendrés par les e^X $(X \in \mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de variables gaussiennes centrées ; on peut les désigner par $\Gamma^h(\mathcal{H})$. L'hypothèse de log-normalité de Kolmogorof 1961 (dont il dit qu'"il faut la formuler avec la précision nécessaire") me paraît pouvoir avoir le sens suivant : les mesures aléatoires considérées, appliquées à des boréliens ou à des fonctions positives, donnent des éléments d'un cône lognormal $\Gamma^1(\mathcal{H})$.

4. Plus précisément, si Q est fortement non dégénéré en σ, la mesure aléatoire $Q\sigma$ est une isométrie du cône $L^1_+(\sigma)$ dans le cône $\Gamma^1(\mathcal{H})$. On peut être tenté, à partir de cette observation, de donner une définition axiomatique des chaos multiplicatifs associés à une mesure σ : il s'agirait, parmi les opérateurs additifs et isométriques de $L^1_+(\sigma)$ dans $\Gamma^1(\mathcal{H})$, des éléments extrémaux. Le rôle des martingales s'expliquerait par le fait que, si on décompose $\mathcal{H}$ en somme directe $\oplus\mathcal{H}_j$, les espérances conditionnelles des éléments de $\Gamma^1(\mathcal{H})$ par rapport aux $\overset{n}{\underset{1}{\oplus}}\mathcal{H}_j$ appartiennent aux cônes $\Gamma^1(\overset{n}{\underset{1}{\oplus}}\mathcal{H}_j)$ et forment une martingale convergente dans $L^1(\Omega)$.

Exposé 2

ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF THE RATIO OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH RESPECT TO VARYING MEASURES

G. LÓPEZ LAGOMASINO
Fac. of Math. and Cib.
University of Havana
HAVANA (Cuba)

Let μ be a non-decreasing function on $[-1,1]$ with an infinite set of points of increase. By μ we also denote the associated positive Borel measure whose support is contained in $[-1,1]$. The space of all such measure we will denote by $S[-1,1]$. If $\mu' > 0$ almost everywhere with respect to Lebesgue's measure (a. e.) we write $\mu \in W[-1,1]$.

Let $\alpha \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, where $\mathbb{E}$ is a regular compact compact which is symmetric with respect to $\mathbb{R}$ and whose complement is a region that contains $z = \infty$, and $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots 2n$, a table of points also symmetric with respect to $\mathbb{R}$ (this means that for each $n \in \mathbb{N}$ the polynomial $\omega_{2n}(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z - \alpha_{n,k})$ has all its coefficients real). Obviously, ω_{2n} has no zeros on $[-1,1]$; without loss of generality we may assume that $\omega_{2n}(x) > 0$, $x \in [-1,1]$.

Suppose $\mu \in S[-1,1]$ and r is a rational function whose poles belong to the region $\mathbb{C} \setminus ([-1,1] \cup E)$, $r(\infty) = 0$. Unless otherwise specified, the coefficients of r are, in general, complex numbers. In the following, we shall denote

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z - t} + r(z).$$

It's easy to prove that there exists a unique rational function $\pi_n(\alpha,f) = \pi_n(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$, such that :

i. P_{n-1}, Q_n are polynomials, $\deg P_{n-1} \leq n-1$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$

ii. $\frac{Q_n f - P_{n-1}}{\omega_{2n}} \in H(D')$, $D = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, $D' = D \setminus [r(z)=\infty]$,

where, as usual, $H(D)$ stands for the space of analytic functions on D ; π_n is called the $(n-1\ ,\ n)$-multipoint Padé approximant to f with respect to α.

When all the coefficients of r are real and $\mu \in S[-1,1]$ it was shown in [1] (see also [2]) that

(1) $$\pi_n \rightrightarrows f\ ,\ K \subset D',\qquad n \longrightarrow \infty .$$

That is π_n converges to f uniformly on each compact subset of D'. Moreover, for all sufficiently large n, we have that $\deg Q_n = n$, each pole of f in D "attracts" as many zeros of Q_n as its order of multiplicity and the rest of the zeros of Q_n lie on $[-1,1]$. In the classical case of Padé approximation (when all the interpolation data is assigned to one point, $\alpha = \{a\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$), but under heavier restrictions on μ, A. A. Gonchar [3] proved that a similar result holds true even if r has complex coefficients ; these additional conditions are satisfied, in particular, if $\mu \in W[-1,1]$. In this connection see the papers [4]-[5] of E. A. Rahmanov (also [6]). There, Rahmanov proves that if $\mu \in W[-1,1]$ then

(2) $$\frac{L_{n+1}}{L_n} \rightrightarrows \frac{1}{2}\varphi,\quad K \subset D,\quad n \longrightarrow \infty,$$

where φ is the conformal mapping of $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$ on $[|\omega| > 1]$, such that $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$, and $\{L_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, is the sequence of monic orthogonal polynomials with respect to μ. Gonchar's paper [3] relies essentially on the assumption that μ is such that (2) takes place.

In § 3 we study the convergence of multipoint Padé approximants to f (for general r). In the proof, which follows the ideas of [3], we were obliged to use a property similar to [2], but relative to sequences of orthogonal polynomials with respect to varying measures that depend on μ and ω_{2n}. In § 2 we prove that the desired property holds if $\mu \in W[-1,1]$.

2. ASYMPTOTIC RELATIONS

1. In what follows

$$\mu(x) = \mu[-1,x] = \int_{-1}^{x} d\mu(t), \qquad x \in [-1,1].$$

We will denote

$$\rho(\theta) = \begin{cases} -\mu(\cos\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \mu(\cos\theta), & \pi < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

and

$$\rho_n(\theta) = \begin{cases} -\Gamma_n(\cos\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \Gamma_n(\cos\theta), & \pi < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

where

$$\Gamma_n(x) = \int_{-1}^{x} \frac{d\mu(t)}{\omega_{2n}(t)}, \qquad x \in [-1,1].$$

It's quite obvious that for any $\mu \in S[-1,1]$

(3) $$d\rho_n(\theta) = \frac{d\rho(\theta)}{\omega_{2n}(\cos\theta)}$$

(almost everywhere on $[0,2\pi]$) and that $\mu \in W[-1,1]$ implies that $\rho \in W[0,2\pi]$. In all that follows ρ always represents a measure that proceeds from a certain μ on $[-1,1]$.

LEMMA 1. There exists a polynomial $W_{2n}(z) = \beta_{2n} z^{2n} + \ldots + \beta_o$ with real coefficients such that

a) $\omega_{2n}(\cos\theta) = |W_{2n}(e^{i\theta})|^2 \quad (\neq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi])$

b) $d\rho_n(\theta) = \dfrac{d\rho(\theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2}$.

Proof. Part b is immediate from a and (3), so we must prove only the first part.

Let $\xi \in \alpha_{n,k} \in \mathbb{R}_-$ and consider the factor $z - \xi$ of $\omega_{2n}(z)$. We will prove that $(\cos\theta - \xi)$ can be written as $|\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2|^2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. In fact, if $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ then

$$|\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2|^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 \cos\theta ,$$

so we must show that the following system has at least one solution

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = -\xi \quad , \quad -2\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1.$$

That is

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2\gamma_2} \quad , \quad \gamma_2^2 + \frac{1}{4\gamma_2^2} = -\xi .$$

But

$$4\gamma_2^4 + 4\xi\gamma_2^2 + 1 = 0$$

has real zeros, since $16\xi^2 - 16 > 0$ $(\xi^2 > 1)$ and $-4\xi \pm \sqrt{16\xi^2 - 16} > 0$. Analogously, if $\xi = \alpha_{n,k} \in \mathbb{R}_+$ then there exists $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ such that $|\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2|^2 = -(\cos\theta - \xi)$.

On the other hand, if $\xi = \alpha_{n,k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ belongs to α then $\bar{\xi}$ also belongs to α. In this case, solving (in $\mathbb{C}$) system (4) it's easy to see that there exist two monomials $\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2$ and $\bar{\gamma}_1 e^{i\theta} - \bar{\gamma}_2$ such that

$$\cos\theta - \xi = (\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2)(\gamma_1 e^{-i\theta} - \gamma_2)$$

$$\cos\theta - \bar{\xi} = (\bar{\gamma}_1 e^{i\theta} - \bar{\gamma}_2)(\bar{\gamma}_1 e^{-i\theta} - \bar{\gamma}_2)$$

And so

$$(\cos\theta - \xi)(\cos\theta - \bar{\xi}) = |(\gamma_1 e^{i\theta} - \gamma_2)(\bar{\gamma}_1 e^{i\theta} - \bar{\gamma}_2)|^2 .$$

From all the above and the fact that we have assumed that $\omega_{2n} > 0$ on $[-1,1]$ follows a.

2. Let $\varphi_{n,k}(z) = \gamma_{n,k} z^k + \gamma_{n,k-1} z^{k-1} + \ldots + \gamma_{n,0}$, $\gamma_{n,k} > 0$,

be the k-th orthonormal polynomial with respect to the measure

$d\rho_n(\theta) = \left(\dfrac{d\rho(\theta)}{\omega_{2n}(\cos\theta)} = \dfrac{d\rho(\theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2} \right)$. That is

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{n,k}(e^{i\theta}) . \varphi_{n,m}(e^{i\theta}) d\rho_n(\theta) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 , & n=m \\ 0 , & n \neq m. \end{cases}$$

LEMMA 2. The following relations hold :

a) $$\int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta} \frac{d\theta}{|\varphi_{n,k}(e^{i\theta})|^2} = \int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta} \frac{d\rho(\theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2}, \quad \nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm k.$$

b) There exists an algebraic polynomial $\Theta_{n,k}$ of degree k such that

$$|\varphi_{n,k}(e^{i\theta})|^2 = \Theta_{n,k}(\cos\theta).$$

<u>Proof</u>. Part a) is simply formula (1,20) of [7] applied to measure $d\rho_n(\theta)$. For the proof of b) let us first note that all the coefficients of $\varphi_{n,k}$ are real (see [7], page 172). So

$$|\varphi_{n,k}(e^{i\theta})|^2 = \gamma_{n,k}^2 + \ldots + \gamma_{n,0}^2 + \sum_{0 \leq \ell < j \leq k} 2\gamma_{n,\ell}\gamma_{n,j} \cos(j-\ell)\theta ,$$

but $\cos(j-\ell)\theta$ can be written as a polynomial of degree $(j-\ell)$ of $\cos\theta$.

3. If ν_n and ν $(n = 1, 2, \ldots)$ are in $S(\Gamma)$ by $\nu_n \xrightarrow[*]{} \nu$ (or $d\nu_n(\theta) \xrightarrow[*]{} d\nu_n(\theta)$) we shall denote weak convergence : that is for all $f \in C(\Gamma)$

$$\int_\Gamma f \, d\nu_n \longrightarrow \int_\Gamma f \, d\nu , \qquad n \longrightarrow \infty .$$

The following lemma is an analogous version of lemma 1, [4].

LEMMA 3. Let j be a fixed entire number, then

$$\left| \frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \longrightarrow d\rho(\theta) .$$

Proof. To begin with, let's take $j \in \mathbb{N}$ and $k = 2n+j$ in lemma 2a. Then for each $n \in \mathbb{N}$

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} d\rho(\theta) = \rho[0,2\pi] ,$$

and

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - \alpha_{n,k}} \left| \frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\rho(\theta)}{\cos\theta - \alpha_{n,k}} , \qquad k = 1,2,\ldots,2n.$$

From (5) follows that the sequence $\left\{ \left| \frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \right\}$, $n \in \mathbb{N}$, is bounded in norm. Since the set of measures $S[0,2\pi]$ is weakly compact it's sufficient to prove that any weakly convergent subsequence has the same limit. Let $\Lambda \subset \mathbb{N}$ and suppose that

$$\left| \frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \xrightarrow[*]{} dg(\theta) , \qquad n \to \infty , \qquad n \in \Lambda .$$

It's easy to see that g is of the form

$$(7) \qquad g(\theta) = \begin{cases} -G(\cos\theta) & 0 \le \theta \le \pi \\ G(\cos\theta) & \pi < 0 \le 2\pi . \end{cases}$$

In fact, for each n

$$\left|\frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta = |\sin\theta| \frac{\omega_{2n}(\cos\theta)}{\Theta_{n,2n+j}(\cos\theta)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} ,$$

so

$$\int_0^\theta \left|\frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta = \begin{cases} -G_n(\cos\theta) & 0 \le \theta \le \pi \\ G_n(\cos\theta) & \pi < \theta \le 2\pi , \end{cases}$$

where

$$G_n(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\omega_{2n}(x)}{\Theta_{n,2n+j}(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

and G is non other that the weak limit of $\{G_n\}$, $n \in \Lambda$.

From (7) and the definition of ρ it's obvious that $\rho = g$ if and only if their integrals with respect to all even 2π-periodic functions are equal. That is, with respect to all functions of the form $F(\cos\theta)$ where $F \in C[-1,1]$.

Let α' be the set of limit points of α. Suppose that α' contains an infinite set of points $\xi \in \alpha'$. Then from (6) it follows that

$$\int_0^{2\pi} \frac{dg(\theta)}{\cos\theta - \xi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\rho(\theta)}{\cos\theta - \xi} , \qquad \xi \in \alpha' .$$

But (see [8], page 294) the linear hull of the set $\left\{\frac{1}{x-\xi}\right\}$, $\xi \in \alpha'$, is dense in $C[-1,1]$ since α' contains an infinite amount of points. From this we have that

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta)\, dg(\theta) = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta)\, d\rho(\theta)$$

and $g = \rho$.

If α' has only a finite number of points then at least one of them ξ is the limit of an infinite set of "different" sequences of points of α. Here "different" means that any two such sequences differ for all sufficiently large n. Now using (6) (better yet return to lemma 2a) follows that

$$\int_0^{2\pi} \frac{dg(\theta)}{(\cos\theta-\xi)^k} = \int_0^{2\pi} \frac{d\rho(\theta)}{(\cos\theta-\xi)^k}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

But again the linear hull of $\left\{\frac{1}{(x-\xi)^k}\right\}$, $k\in\mathbb{N}$ is dense in $C([-1,1])$ (Weierstrass' theorem), so in this case also $g=\rho$.

Suppose now that $j=-1,-2,-3,\dots$ Let $\xi_1,\dots,\xi_j$ be a set of points of α' corresponding to "different" sequences of points of α. We can suppose that $\alpha_{n,m} \longrightarrow \xi_m$, $n\longrightarrow\infty$, $m=1,2,\dots,|j|$. We will denote $\omega'_{2n}(z)=\omega_{2n}(z).\prod_{m=1}^{|j|}(z-\alpha_{n,m})^{-1}$. Using again lemma 2a we obtain that for each $n\in\mathbb{N}$

$$(8)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{\omega'_{2n}(\cos\theta)}{|\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})|^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\rho(\theta)}{\prod_{m=1}^{|j|}(\cos\theta-\alpha_{n,m})}$$

and

$$(9)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta-\alpha_{n,k}}\,\frac{\omega'_{2n}(\cos\theta)}{|\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})|^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta-\alpha_{n,k}}\cdot\frac{d\rho(\theta)}{\prod_{m=1}^{|j|}(\cos\theta-\alpha_{n,m})}$$

$$k=|j|+1,\dots,2n.$$

Using similar arguments as above from (8) and (9) follows that

$$\frac{\omega'_{2n}(\cos\theta)}{|\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})|^2}d\theta \xrightarrow[*]{} \frac{d\rho(\theta)}{\prod_{m=1}^{|j|}(\cos\theta-\xi_m)}, \quad n\longrightarrow\infty,$$

which immediately implies that

$$\frac{\omega_{2n}(\cos\theta)}{|\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})|^2}d\theta = \left|\frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta \xrightarrow[*]{} d\rho(\theta), \quad n\longrightarrow\infty.$$

4. In the following, $\Phi_{n,k} = \gamma_{n,k}^{-1} \varphi_{n,k}$ and $\Phi^*_{n,k}(z) = z^k \bar{\Phi}_{n,k}(\frac{1}{\bar{z}})$.

In our case, since all the coefficients of $\varphi_{n,k}$ are real, $\Phi_{n,k} = \bar{\Phi}_{n,k}$. But we will not abuse of this fact in the following formulas to avoid confusion. We will make use of sereral formulas whose proof can be found in [7], pp. 11-12 (considering the measure $d\rho_n(\theta)$). They are :

$$\Phi_{n,k+1}(z) = z\,\Phi_{n,k}(z) + \Phi_{n,k+1}(0)\,\Phi^*_{n,k}(z)\,, \tag{10}$$

$$\Phi^*_{n,k+1}(z) = \Phi^*_{n,k}(z) + \overline{\Phi_{n,k+1}(0)}\; z\,\Phi_{n,k}(z)\,, \tag{11}$$

$$\gamma^2_{n,k+1} = \gamma^2_{n,k} + |\varphi_{n,k+1}(0)|^2. \tag{12}$$

Also the following relation will be useful (for the proof see lemma 4 in [4]) :

$$f_{n,k}(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{\Phi^*_{n,k}(z)}{\Phi^*_{n,k+1}(z)} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\varphi_{n,k}(z)}{\varphi_{n,k+1}(z)}\right|^2 - 1\right], \qquad |z| = 1. \tag{13}$$

The proof of the following lemma is analogous to that of theorem 2 in [6].

LEMMA 4. There exists an absolute constant C that does not depend on n or k such that

$$|\Phi_{n,k+1}(0)| \le C \int_0^{2\pi} \left|\left|\frac{\varphi_{n,k}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,k+1}(e^{i\theta})}\right|^2 - 1\right| d\theta\,.$$

Proof. From (11) we have that

$$|\Phi_{n,k+1}(0)| = \left|\frac{\Phi^*_{n,k+1}(e^{i\theta})}{\Phi^*_{n,k}(e^{i\theta})} - 1\right|. \tag{14}$$

On the other hand, all the zeros of $\Phi_{n,k}$ are in $[|z|<1]$ (see page 14, [7]) so $|\Phi_{n,k+1}(0)| \le 1$, and thus, by (14)

$$\left|\frac{\Phi^*_{n,k+1}(e^{i\theta})}{\Phi^*_{n,k}(e^{i\theta})}\right| \le 2$$

so using again (14) we obtain

$$|\Phi_{n,k+1}(0)| \leq 2\left|\frac{\Phi^*_{n,k}(e^{i\theta})}{\Phi^*_{n,k+1}(e^{i\theta})} - 1\right|.$$

On the other hand, according to a theorem of Kolmogorov (see page 150, [9]) if $f \in L[0,2\pi]$, $\tilde{f}$ is its conjugate function, and $0 < p < 1$, then there exists a constant B_p such that

$$\left(\int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^p \, d\theta\right)^{1/p} \leq B_p \int_0^{2\pi} |f| \, d\theta .$$

By Schwarz's inequality

$$\left(\int_0^{2\pi} |f|^{1/2} d\theta\right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} |f| \, d\theta .$$

Noting that $\dfrac{\Phi^*_{n,k}(z)}{\Phi^*_{n,k+1}(z)} - 1$ is analytic in the closed unit disk and using these inequalities for $f_{n,k}$ we conclude that there exists an absolute constant C for which

$$(15) \quad \left(\int_0^{2\pi} \left|\frac{\Phi^*_{n,k}(e^{i\theta})}{\Phi^*_{n,k+1}(e^{i\theta})} - 1\right|^{1/2} d\theta\right)^2 \leq C \int_0^{2\pi} \left|\operatorname{Re}\left[\frac{\Phi^*_{n,k}(e^{i\theta})}{\Phi^*_{n,k+1}(e^{i\theta})} - 1\right]\right| d\theta .$$

Using consecutively (14), (15) and (13) we obtain the desired result.

5. Now we are ready to prove an extension of a theorem of P. Nevai and al. (theorem 3, [6]).

THEOREM 1. If $\rho \in W[0,2\pi]$ $(\mu \in W[-1,1])$ and $j \in \mathbb{Z}$ is fixed, then

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|\left|\frac{\varphi_{n,2n+1}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})}\right|^2 - 1\right| d\theta = 0.$$

<u>Proof</u>. Let f be a 2π-periodic continuous function. By Holder's inequality,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\rho'(\theta)\, f(\theta))^{1/4}\, d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})}\right|^{1/2} \frac{|\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})|^{1/2}(\rho'(\theta))^{1/4}}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^{1/2}} \cdot \frac{|W_{2n}(e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}(f(\theta))^{1/4}}{|\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})|^{1/2}}\, d\theta \leq$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})}\right| d\theta\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})}{W_{2n}(e^{i\theta})}\right|^2 \rho'(\theta)\, d\theta\right)^{1/4} .$$

(16)
$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{W_{2n}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}\right|^2 f(\theta)\, d\theta\right)^{1/4} .$$

From lemma 2a it's obvious that the second factor on the right is ≤ 1. From lemma 3 follows that the third factor tends to $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\rho(\theta)\right)^{1/4}$ when $n \longrightarrow \infty$. Using these facts we conclude from (16) that

(17)
$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\rho'(\theta)\, f(\theta))^{1/4} d\theta\right)^4 \leq \underline{\lim} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})}\right| d\theta\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\rho(\theta)\right).$$

There exists a sequence of 2π-periodic continuous functions $\{h_m\}$, $m \in N$ such that $0 < h_m(\theta) \leq 1$, $h_m(\theta) \longrightarrow 1$ a. e. and

$$\lim_m \int_0^{2\pi} h_m(\theta)\, d\rho_s(\theta) = 0$$

where ρ_s is the singular component of ρ (for the proof see Lemma 1, [6]). On the other hand, for each $\varepsilon > 0$ we can find a sequence of 2π-periodic continuous functions $\{g_k\}$, $k \in N$ such that $0 < g_k(\theta) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ and

$$\lim_k g_k(\theta) = (\rho'(\theta) + \varepsilon)^{-1} \quad \text{a. e.}$$

For $\varepsilon > 0$ fixed, let's apply (17) to $f = h_m g_k$. Then, we take limits first when $m \to \infty$ and finally when $\varepsilon \to 0$. Having in mind that $\rho' > 0$ a. e., the integral on the left hand side and on the extreme right of (17) tend to one. Using this fact and lemma 2a we obtain

$$1 \le \underline{\lim} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right| d\theta \le \overline{\lim} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right| d\theta \right.$$

$$\le \overline{\lim} \left(\frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} = \lim \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{W_{2n}(e^{i\theta})} \right|^2 d\rho(\theta) \right)^{1/2} = 1.$$

Hence

(18)
$$1 = \lim_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right| d\theta \right) = \lim_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \right).$$

Using Schwarz's inequality and (18) we have

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right|^2 - 1 \right| d\theta \right)^2 \le$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right| + 1 \right)^2 d\theta \, . \, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left| \frac{\varphi_{n,2n+j}(e^{i\theta})}{\varphi_{n,2n+j+1}(e^{i\theta})} \right| - 1 \right)^2 d\theta \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

6. From the proof of lemma 3 and theorem 1 it's easy to see that these results remain true for any sequence of the form $\left\{ \frac{\varphi_{n_k, m_k}}{\varphi_{n_k, m_k + \ell}} \right\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ fixed, $(n_k, m_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, such that

$$\underline{\lim}_k \, (m_k - n_k) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \quad \lim m_k = +\infty.$$

In particular, if $\{n_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ is constant, $\{m_k\}$ is the sequence of natural numbers and $\ell = 1$ we obtain an analogue of theorem 3, [6] for the fixed measure $\dfrac{d\rho(\theta)}{|W_{2n_k}(e^{i\theta})|^2}$.

7. Now from lemma 4 and theorem 1 immediately follow :

COROLLARY 1. If $\rho \in W[0,2\pi]$ then

$$\Phi_{n,2n+j+1}(0) \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

THEOREM 2. If $\rho \in W[0,2\pi]$ and $j \in \mathbf{Z}$ fixed, then

$$\frac{\Phi_{n,2n+j+1}(z)}{\Phi_{n,2n+j}(z)} \rightrightarrows z, \qquad K \subset [|z| \geq 1].$$

<u>Proof</u>. According to (10) we have

$$\left|\frac{\Phi_{n,2n+j+1}(z)}{z\Phi_{n,2n+j}(z)} - 1\right| = |\Phi_{n,2n+j+1}(0)|\left|\frac{\Phi^*_{n,2n+k}(z)}{z\,\Phi_{n,2n+k}(z)}\right|.$$

Since the function on the left is analytic in $[|z| \geq 1]$ (including $z = \infty$) by the maximum principle for any compact $K \subset [|z| \geq 1]$ using corollary 1 we obtain

$$\max_{z \in K}\left|\frac{\Phi_{n,2n+j+1}(z)}{z\Phi_{n,2n+j}(z)} - 1\right| \leq |\Phi_{n,2n+j+1}(0)| \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi}\left|\frac{\Phi^*_{n,2n+k}(e^{i\theta})}{\Phi_{n,2n+k}(e^{i\theta})}\right|$$

$$= |\Phi_{n,2n+j+1}(0)| \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

8. Before obtaining an analogue of this result for the segment $[-1,1]$ we need to prove

LEMMA 5. If $\Phi_{n,2n+j}(0) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, then

$$\frac{\Phi^*_{n,2n+j}(z)}{\Phi_{n,2n+j}(z)} \rightrightarrows 0, \qquad K \subset [|z| > 1], \qquad n \longrightarrow \infty.$$

Proof. Since $\dfrac{\Phi^*_{n,2n+j}(z)}{\Phi_{n,2n+j}(z)} = \overline{\left(\dfrac{\Phi_n(\frac{1}{z})}{\Phi^*_n(\frac{1}{z})}\right)}$ it will be equivalent to prove that

$$\frac{\Phi_{n,2n+j}(z)}{\Phi^*_{n,2n+j}(z)} \rightrightarrows 0\,, \qquad K \subset [|z|< 1].$$

Dividing relation (10) by (11) taking $k = 2n+j$ and denoting $\lambda_{2n+j}(z) = \dfrac{\Phi_{n,2n+j}(z)}{\Phi^*_{n,2n+j}(z)}$ we obtain

$$\lambda_{2n+j+1}(z) = \frac{z\,\lambda_{2n+j}(z) + \Phi_{n,2n+j+1}(0)}{1 + z\,\overline{\Phi_{n,2n+j+1}(0)}\,\lambda_{2n+j}(z)}\,. \tag{19}$$

Let z_o be an arbitrary fixed point in $[|z|< \frac{1}{4}]$. Since $|\lambda_{2n+j}(z)| = 1$ on $[|z|= 1]$ and $\lambda_{2n+j}(z)$ is analytic in $[|z|\leq 1]$ by the maximum principle we have that $|\lambda_{2n+j}(z_o)| \leq 1$. Since all the zeros of $\Phi_{2n+j+1}(z)$ are in the disk $[|z|< 1]$ then $|\Phi_{n,2n+j+1}(0)| < 1$. Putting all this together we get that

$$|1 + z_o\overline{\Phi_{n,2n+j+1}(0)}\,\lambda_n(z_o)| \geq \frac{3}{4}. \tag{20}$$

On the other hand, since $\Phi_{n,2n+j}(0) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, then for any $\varepsilon > 0$ there exists N_o such that for $n \geq N_o$ we have that $|\Phi_{2n+j}(0)|< \frac{\varepsilon}{2}$. From (19) and (20) and taking $n \geq N(\varepsilon)$ we obtain

$$|\lambda_{2n+j+1}(z_o)| \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}|\lambda_{2n+j}(z_o)| + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{1}{3}|\lambda_{2n+j}(z_o)| + \varepsilon. \tag{21}$$

From (21) easily follows that $\lambda_{2n+j}(z_o) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ for all $z_o \in [|z|\leq \frac{1}{4}]$. Since the family $\{\lambda_{2n+j}(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$ is normal in $[|z|\leq 1]$ this is sufficient to prove that $\lambda_{2n+j}(z) \rightrightarrows 0$, $K \subset [|z|< 1]$.

9. Let $L_{n,k} = z^k + \delta_{n,k-1}z^{k-1} + \ldots + \delta_{n,0}$ be the k-th monic orthogonal

polynomial with respect to the measure $\frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)}$, $\mu \in S[-1,1]$. Now we are ready to prove the following :

THEOREM 3. Let $\mu \in W[-1,1]$ and $j \in \mathbb{Z}$ be fixed, then

$$\frac{L_{n,n+j+1}(z)}{L_{n,n+j}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{2}\varphi(z), \qquad K \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1], \qquad n \longrightarrow \infty.$$

Proof. It's a well known fact that for any $k \in \mathbb{N}$

$$L_{n,k}(\xi) = \frac{1}{2^k(1+\Phi_{n,2k}(0))} \frac{\Phi_{n,2k}(z)+\Phi^*_{n,2k}(z)}{z^k}$$

where $\xi = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ and $z = \varphi(\xi)$, (see [7], page 173). Using this relation for $k = n+j$ and $k = n+j+1$ and dividing we obtain

$$\frac{L_{n,n+j+1}(\xi)}{L_{n,n+j}(\xi)} = \frac{1+\Phi_{n,2n+2j}(0)}{2z(1+\Phi_{n,2n+2j+2}(0))} \cdot \frac{\Phi_{n,2n+2j+2}(z)}{\Phi_{n,2n+2j}(z)} \cdot \frac{1+\dfrac{\Phi^*_{n,2n+2j+2}(z)}{\Phi_{n,2n+2j+2}(z)}}{1+\dfrac{\Phi^*_{n,2n+2j+2}(z)}{\Phi_{n,2n+2j}(z)}} .$$

If $\xi \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$ then $|z| > 1$ and using the above equality, theorem 2 and lemma 5 we get the proof.

10. We wish to make several remarks :

a. Theorem 3 has as obvious analogue for $\mu \in W[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$.

b. Table α may contain points at infinity ; in this case, each factor in ω_{2n} corresponding to $\alpha_{n,k} = \infty$ should be substituted by 1. We avoided this case only for simplicity. In particular, if $\alpha_{n,k} = \infty$ for all n and k theorem 1 reduces to theorem 3 in [6] and theorems 2 and 3 correspond to results of Rahmanov (see [4] and [5]).

c. The point in α may also approximate the interval $[-1,1]$ as long as they don't do it too fast. More precisely, theorems 1-3 still hold as long as

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{2n} (1 - |\varphi(\alpha_{n,k})|^{-1}) = \infty \tag{22}$$

(see [8], page 294). This is so because condition (22) is sufficient for lemma 3 to take place.

d. Moreover, under certain additional restrictions on μ it is possible to prove theorem 3 even when (22) doesn't take place and α may contain -1 or $+1$. In this case, in order to guarantee lemma 3 a certain generalized moment problem must be determined and then an analogue of theorem 3 follows immediately.

For instance, in the case when $\alpha_{n,k} = -1$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $n \in \mathbb{N}$, it would be sufficient that the moment problem for the sequence $\{c_k\}$, $k \geq j_o$, $j_o \in \mathbb{N}$, $c_k = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{(1+x)^k}$ be determined (that is : if G is such that $\int_{-1}^{1} \frac{dG(x)}{(1+x)^k} = c_k$, $k \geq j_o$ then $G \equiv \mu$) in order to have theorem 3 for all $j \in \mathbb{Z}$ fixed such that $j \geq -j_o$. In particular, if

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[2n]{c_n}} = +\infty$$

then theorem 3 takes place for all $j \in \mathbb{Z}$ fixed.

e. Similar results to those of theorems 2 and 3 can be obtained with respect to the functions of second order associated to $\{L_{n,k}\}$. If we take

$$g_{n,k}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{L_{n,k}(x)}{z - x} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)}$$

then for $j \in \mathbb{Z}$ fixed we have

$$\frac{g_{n,n+j+1}(z)}{g_{n,n+j}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{2\varphi(z)}, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1], \quad n \to \infty. \tag{23}$$

3. APPLICATIONS TO MULTIPOINT PADE APPROXIMANTS.

1. Let $\mu \in S[-1,1]$ and $r = \frac{t_{d-1}}{s_d}$, where t_{d-1} and s_d are mutually prime polynomials of degree $\leq d-1$ and d respectively such that the zeros of s_d lie in $\mathbb{C} \setminus ([-1,1] \cup E)$. Put

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} + r(z).$$

In the following, we will restrict our attention to a certain class of tables. We will say that table α is extremal with respect to the plane condenser $(E, [-1,1])$ (we remind that $\alpha \subset E$ where E is a regular compact set contained in $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ whose complement is a region that contains $z = \infty$) if

$$(24) \qquad \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} g(z, \alpha_{n,k}) \underset{K}{\rightrightarrows} \frac{h(z)}{C}, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1], \quad n \to \infty,$$

where : $g(\cdot, \alpha_{n,k})$ is Green's function with respect to $[-1,1]$ with singular point at $\alpha_{n,k}$; h is the harmonic measure of the region $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,1] \cup E)$ such that $h\big|_{[-1,1]} = 0$ and $h\big|_{\partial E} = 1$; and $C = C(E, [-1,1]) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial \eta} ds$, where Γ is an arbitrary contour in G that "separates" E from $[-1,1]$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ is the normal derivative to Γ in the direction "from $[-1,1]$ to E" and ds is the arc element. Constant C is called the capacity of the condenser $(E, [-1,1])$. The existence of such tables is well known from the theory of interpolation by rational functions with fixed poles (see [11], chap. VIII, IX, and [12]).

From Green's formula follows that function $H(z) = \frac{1}{C}(h(\infty) - h(z))$ can be represented in the form

$$(25) \qquad \begin{aligned} H(z) &= \int \log|z-\xi|\, d\nu_E(\xi) - \int \log|z-\xi|\, d\nu_{[-1,1]}(\xi) = \\ &h_E(z) - h_{[-1,1]}(z), \qquad z \in G, \end{aligned}$$

where ν_E and $\nu_{[-1,1]}$ are positive unit Borel measures supported on E and

$[-1,1]$ respectively. Relation (24) is equivalent to

$$\prod_{k=1}^{2n} |z-\alpha_{n,k}|^{1/2n} \rightrightarrows \exp h_E(z), \quad K \subset \mathbb{C} \setminus E, \quad n \to \infty.$$

Using theorem 3 we can prove the following :

THEOREM 4. Let $\mu \in W[-1,1]$, $\alpha \subset E$ a table extremal with respect to the regular condenser $(E, [-1,1])$, and $\{\pi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, the sequence of $(n-1,n)$-multipoint Padé approximants of f with respect to α. Then :

i) for all sufficiently large n, $\deg Q_n = n$; when $n \to \infty$ each pole of f in D "attracts" towards itself as many zeros of Q_n as its order of multiplicity ; for any compact set $K \subset D'$ and all sufficiently large n, Q_n has no zero on K,

ii) $$\overline{\lim} \, \| f - \pi_n \|_K^{1/2n} \leq \exp\left\{-\frac{\tau(K)}{C}\right\} < 1$$

where $K \subset D' \cup \{\infty\}$ and $\tau(K) = \inf\{h(z) : z \in K\}$.

We will dedicate this paragraph to sketch out the proof of this result. Our proof follows the ideas exposed by A. A. Gonchar in [3]. Our theorem 4 is an extension of theorem 1, [3] to multipoint Padé approximation.

2. Let $u,v = 0, 1, 2, \ldots$ be fixed, $u < v < n+j$ then there exist two positive constants C_1, C_2 that depend only on $K \subset D$ such that

$$C_1 n^{v-u} < \left| \frac{L^{(v)}_{n,n+j}(z)}{L^{(u)}_{n,n+j}(z)} \right| < C_2 \, n^{v-u}, \qquad z \in K \subset D. \tag{26}$$

These estimates are easy to obtain noting that

$$\frac{L^{(v)}_{n,n+j}}{L^{(u)}_{n,n+j}} = \prod_{i=u}^{v-1} \frac{L^{(i+1)}_{n,n+j}}{L^{(i)}_{n,n+j}} = \prod_{i=u}^{v-1} (n+j-1) \frac{I_{n,n+j-i-1}}{I_{n,n+j-i}}$$

where $I_{n,n+j-i}$ is the polynomial of degree $n+j-i$ obtained from $L^{(i)}_{n,n+j}$ after dividing it by its coefficient of z^{n+j-i} and having in mind that all the zeros of $L_{n,n+j}$ are in $(-1,1)$ (see [10], theorem 3.3.1) and by Rolle's theorem all the zeros of its derivatives are also in $(-1,1)$ and two consecutive derivatives have their zeros intercalated.

In [2] (see theorem 2), it was shown that if $\mu \in W[-1,1]$ and α is extremal with respect to $(E, [-1,1])$ then the table $\beta = \{\beta_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, where $(\beta_{n,1}, \ldots, \beta_{n,n})$ is the set of zeros of $L_{n,n}$, is also extremal with respect to $(E, [-1,1])$ and

(27) $$|L_{n,n}(z)|^{1/n} \rightrightarrows \exp h_{[-1,1]}(z), \quad K \subset D, \quad n \to \infty.$$

Putting together (26) and (27) we get

LEMMA 6. If $\mu \in W[-1,1]$, α is extremal with respect to $(E, [-1,1])$, $j \in \mathbb{Z}$, $v = 0, 1, 2, \ldots$ are fixed, then

$$|L^{(v)}_{n,n+j}(z)|^{1/n} \rightrightarrows \exp h_{[-1,1]}(z), \quad K \subset D, \quad n \to \infty.$$

3. It's easy to prove (see [1] and [2]) that

(28) $$0 = \int_{-1}^{1} x^{\nu} Q_n(x) \frac{s_d(x)\, d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-d-1$$

where Q_n is the denominator of the $(n-1, n)$-multipoint Padé approximant associated to f, normalized with the coefficient of the term of highest degree equal to one. Denote $R_{n+d} = Q_n \cdot s_d$. Obviously, $\deg R_{n+d} \le n+d$. Let Λ be the set of indexes for which $\deg R_{n+d} = n+d$. Let's suppose that Λ contains an infinite amount of elements. As we will prove later, Λ contains all but a finite set of natural numbers. In the following, unless we specify the contrary $n \in \Lambda$. For such indexes, having in mind (28), it's obvious that

(29) $$R_{n+d}(z) = L_{n,n+d}(z) + \lambda_{n,1} L_{n+d-1}(z) + \ldots + \lambda_{n,2d} L_{n,n-d}(z).$$

Suppose that $s_d(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z-a_j)^{d_j}$, where $d_1 + d_2 + \ldots + d_\ell = d$. We can decompose r in simple fractions. Let

$$(30) \qquad r(z) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{d_j} \frac{A_{j,k}}{(k-1)!} \frac{1}{(z-a_j)^k}, \qquad A_{j,d_j} \neq 0.$$

From the definition of R_{n+d} we get that

$$(31) \qquad R_{n+d}(a_j) = R_{n+d}^{(1)}(a_j) = \ldots = R_{n+d}^{(d_j-1)}(a_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell.$$

These relations give d equations, in case we want to find the $2d$ unknowns $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,2d}$ in (29). In order to obtain d more equations we do as follows : First observe that

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{Q_n(z)\, f(z)}{\omega_{2n}(z)} z^\nu dz = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

where Γ is an arbitrary contour surrounding $[-1,1]$ and the set of poles of f and separating these sets of points from E. Substituting $f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} + r(z)$ in (32) having in mind (30) we obtain that

$$(33) \qquad \int Q_n(x)\, q_{n-1}(x) \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{d_j} A_{j,k} \left(\frac{Q_n(z)\, q_{n-1}(z)}{\omega_{2n}(z)}\right)_{z=a_j} = 0.$$

If we take $q_{n-1}(z) = s_d(z).(z-a_i)^{-\nu}$, $1 \leq \nu \leq d_i$, and substitute in (33) we get

$$(34) \qquad \int \frac{R_{n+d}(x)}{(x-a_i)^\nu} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{d_i} A_{i,k} \left(\frac{R_{n+d}(z)}{\omega_{2n}(z)(z-a_i)^\nu}\right)^{(k-1)} \Bigg|_{z=a_i} = 0.$$

Let i be fixed. Put

$$(35) \qquad R_{n+d,i}(z) = R_{n+d}(z).(z-a_i)^{-d_i} = B_{n,i}^{o} + B_{n,i}^{1}(z-a_i) + \ldots .$$

Observe that $\deg R_{n+d,i} = n+d-d_i$. Substituting (35) in (34) we obtain

$$(36) \qquad 0 = \int \frac{R_{n+d}(x)}{(x-a_i)^\nu} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{d_i} A_{i,k} \left(\frac{R_{n+d,i}(z).(z-a_i)^{d_i-\nu}}{\omega_{2n}(z)}\right)^{(k-1)} \Bigg|_{z=a_i}.$$

If for each $i = 1, 2, \ldots, \ell$ we vary ν from 1 to d_i in (36) we obtain another set of d equations. This new system can be written as follows

$$\int \frac{R_{n+d}(x)}{(x-a_i)} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + (d_i-1)! \frac{A_{i,d_i}}{\omega_{2n}(a_i)} B^o_{n,i} = 0$$

$$\int \frac{R_{n+d}(x)}{(x-a_i)^2} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + (d_i-2)! \frac{A_{i,d_i-1}}{\omega_{2n}(a_i)} B^o_{n,i} + (d_i-1)! \frac{A_{i,d_i}}{\omega_{2n}(a_i)} B^1_{n,i} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int \frac{R_{n+d}(x)}{(x-a_i)^{d_i}} \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} + \frac{A_{i,1} B^o_{n,i}}{\omega_{2n}(a_i)} + \ldots + (d_i-1)! \frac{A_{i,d_i}}{\omega_{2n}(a_i)} B^{d_i-1}_{n,i} = 0.$$

If we solve, for each i fixed, this system with respect to $B^o_{n,i}, \ldots, B^{m_i-1}_{n,i}$ we find m_i polynomials $p_{i,1}(x), \ldots, p_{i,m_i}(x)$ whose coefficients don't depend on n ($\deg p_{i,\nu} = \nu$), such that $p_{i,\nu}(0) = 0$ and

$$m_i!\, B^o_{n,i} + \omega_{2n}(a_i) \int R_{n+d}(x)\, p_{i,1}\left(\frac{1}{x-a_i}\right) \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} = 0$$

$$(m_i+1)!\, B^1_{n,i} + \omega_{2n}(a_i) \int R_{n+d}(x)\, p_{i,2}\left(\frac{1}{x-a_i}\right) \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(2m_i-1)!\, B^{d_i-1}_{n,i} + \omega_{2n}(a_i) \int R_{n+d}(x)\, p_{i,m_i}\left(\frac{1}{x-a_i}\right) \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} = 0.$$

Since $(m_i+\nu)!\, B^{\nu}_{n,i} = R^{(d_i+\nu)}_{n+d}(a_i)$, we have that

$$R^{(d_i+\nu)}_{n+d}(a_i) + \omega_{2n}(a_i) \int R_{n+d}(x)\, p_{i,\nu+1}\left(\frac{1}{x-a_i}\right) \frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} = 0, \tag{37}$$

$\nu = 0, 1, \ldots, m_i-1$, $\quad i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Putting together equations (31) and (37) we get the 2d equations with which we are going to work on.

4. Put

$$\delta_n(j,k,\nu) = \frac{\omega_{2n}(a_j)}{L^{(d_j+\nu)}_{n,n-d}(a_j)} \int L_{n,n+d-k}(x).p_{j,\nu+1}(\frac{1}{x-a_j})\frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)},$$

$j = 1, 2, \ldots, \ell$; $\nu = 0, 1, \ldots, d_j-1$; $k = 0, 1, \ldots, 2d$. It's easy to see that

$$\left[L_{n,n+d-k}(a_j) - \sum_{\eta=0}^{d_i} \frac{L^{(\eta)}_{n+d-k}(x)(a_j-x)^{\eta}}{\eta!}\right] p_{j,\nu+1}(\frac{1}{x-a_j}) = J_{(j,k,\nu)}(x)$$

is a polynomial on x of degree not greater than $n+d-k-1$. So

$$\int L_{n,n+d-k}(x).J_{(j,k,\nu)}(x)\frac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)} = 0.$$

From this readily follows that

$$\delta_n(j,k,\nu) = \sum_{\eta=0}^{d_i} \frac{1}{\eta!}\int \frac{L_{n,n+d-k}(x)\, L^{(\eta)}_{n,n+d-k}(x)(a_j-x)^{\eta}}{L^{(d_j+\nu)}_{n,n-d}(a_j)\, L_{n,n+d-k}(a_j)} .p_{j,\nu+1}(\frac{1}{x-a_j})\frac{\omega_{2n}(a_i)}{\omega_{2n}(x)}d\mu(x)$$

$$= \sum_{\eta=0}^{d_i} \frac{1}{2\pi i\eta!}\int \left(\int_\Gamma \frac{L_{n,n+d-k}(z)\, L^{(\eta)}_{n,n+d-k}(z)(a_j-z)^{\eta}}{L^{(d_j+\nu)}_{n,n-d}(a_j)\, L_{n,n+d-k}(a_j)}\, p_{j,\nu+1}(\frac{1}{z-a_j})\frac{\omega_{2n}(a_j)}{\omega_{2n}(z)}\frac{dz}{z-x}\right) d\mu(x)$$

where $\Gamma = [h(z) = \delta]$ and $\delta > 0$ is sufficiently small so that $E \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ lies outside Γ.

Making use of lemma 6 and the extremality of table α we can estimate from above $\delta_n(j,k,\nu)$ and we get that

$$(38) \qquad \delta_n(j,k,\nu) = o(\delta^{2n}), \qquad n \to \infty,$$

where $\max_{1\le j\le \ell} \exp(-\frac{h(a_j)}{c}) < \delta < 1$.

5. Substituting (29) in (31) and (37) and transforming these equations, taking into account (38), we obtain

$$\frac{L_{n,n+d}(a_j)}{L_{n,n-d}(a_j)} + \lambda_{n,1}\frac{L_{n,n+d-1}(a_j)}{L_{n,n-d}(a_j)} + \ldots + \lambda_{n,2d} = 0\ ,$$

. . . .

$$\frac{L^{(d_j-1)}_{n,n+d}(a_j)}{L^{(d_j-1)}_{n,n-d}(a_j)} + \lambda_{n,1}\frac{L^{(d_j-1)}_{n,n+d-1}(a_j)}{L^{(d_j-1)}_{n,n-d}(a_j)} + \ldots + \lambda_{n,2d} = 0\ ,$$

$$\frac{L^{(d_j)}_{n,n+d}(a_j)}{L^{(d_j)}_{n,n-d}(a_j)} + o(\delta^{2n}) + \lambda_{n,1}\left(\frac{L^{(d_j)}_{n,n+d-1}(a_j)}{L^{(d_j)}_{n,n-d}(a_j)} + o(\delta^{2n})\right) + \ldots + \lambda_{n,2d}(1+o(\delta^{2n})) = 0\ ,$$

. . . .

$$\frac{L^{(2d_j-1)}_{n,n+d}(a_j)}{L^{(2d_j-1)}_{n,n-d}(a_j)} + o(\delta^{2n}) + \lambda_{n,1}\left(\frac{L^{(2d_j-1}_{n,n+d-1}(a_j)}{L^{(2d_j-1}_{n,n-d}(a_j)} + o(\delta^{2n})\right) + \ldots + \lambda_{n,2d}(1 + o(\delta^{2n})) = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, \ell$.

As they appear, these equations are not useful. This is so because, for each fixed j, any two equations have in the limit the same coefficients. Making use of Leibnitz formula follows that

$$\frac{L^{(\nu)}_{n,n+d-\mu}}{L^{(\nu)}_{n,n-d}} + \sum_{k=1}^{\nu} F_{n,n-d}(\nu,k)\frac{L^{(\nu-k)}_{n,n+d-\mu}}{L^{(\nu-k)}_{n,n-d}} = \left(\frac{L_{n,n+d-\mu}}{L_{n,n-d}}\right)^{(\nu)}\frac{L_{n,n-d}}{L^{(\nu)}_{n,n-d}} \tag{40}$$

where

$$F_{n,n-d}(\nu,k) = \binom{\nu}{k}\frac{L_{n,n-d}\,L^{(\nu-k)}_{n,n-d}}{L^{(\nu)}_{n,n-d}}\left(\frac{1}{L_{n,n-d}}\right)^{(k)}$$

$\mu = 0, 1, \ldots, 2d-1$. Making use of Lemma 6, it is easy to prove that for $a \in D$

$$\overline{\lim}\left|F_{n,n-d}(\nu,k)(a)\right|^{1/2n} \le 1. \tag{41}$$

Let $F_{n,n-d}(j,\nu,k) = F_{n,n-d}(\nu,k)(a_j)$, where $j = 1, 2, \ldots, \ell$,

$\nu = 1, 2, \ldots, 2d_j-1$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$; and $C > 1$ such that $\delta_1 = C\delta < 1$. From (41) we have that

(42)
$$F_{n,n-d}(j,\nu,k) = O(C^{2n}), \quad n \longrightarrow \infty.$$

Let's denote

$$\psi_{n,\mu} = \frac{L_{n,n+d-\mu}}{L_{n,n-d}}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, 2d \ ; \quad \psi = \frac{1}{2}\varphi.$$

We have from theorem 3 that

(43)
$$\lim \psi_{n,\mu}(z) = \psi^{2d-\mu}(z), \quad \mu = 0, 1, \ldots, 2d,$$

where the convergence is uniform on each compact set contained in $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

If we add to the ν-th row of system (39) a linear combination of the previous rows whose coefficients are determined by (40) (observe that $F_{n,n-m}(\nu,k)$ does not depend on μ) evaluated at a_j and having in mind (for $\nu \geq d_j$) relations (42) we obtain

$$\psi^{(\nu)}_{n,0}(a_j) + \lambda_{n,1}\,\psi^{(\nu)}_{n,1}(a_j) + \ldots + \lambda_{n,2d}\,\psi^{(\nu)}_{n,2d}(a_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, d_j-1 \ ;$$

$$\psi^{(\nu)}_{n,0}(a_j)\,\frac{L_{n,n-m}(a_j)}{L^{(\nu)}_{n,n-m}(a_j)} + o(\delta_1^{2n}) + \lambda_{n,1}\Big(\psi^{(\nu)}_{n,1}(a_j)\,\frac{L_{n,n-m}(a_j)}{L^{(\nu)}_{n,n-m}(a_j)} + o(\delta_1^{2n})\Big) +$$

$$\ldots + \lambda_{n,2d}\Big(\psi^{(\nu)}_{n,2d}(a_j)\,\frac{L_{n,n-m}(a_j)}{L^{(\nu)}_{n,n-m}(a_j)} + o(\delta_1^{2n})\Big) = 0, \quad \nu = d_j, \ldots, 2d_j-1.$$

Multiplying by $\dfrac{L^{(\nu)}_{n,n-m}}{L_{n,n-m}}$ all the equations from $\nu = d_j$ to $\nu = 2d_j-1$ and making use of (26) we finally get the system :

$$\psi_{n,0}(a_j) + \lambda_{n,1}\,\psi_{n,1}(a_j) + \ldots + \lambda_{n,2d} \cdot 1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi^{(d_j-1)}_{n,0}(a_j) + \lambda_{n,1}\,\psi^{(d_j-1)}_{n,1}(a_j) + \ldots + \lambda_{n,2d} \cdot 0 = 0,$$

$$(44)\qquad \psi_{n,0}^{(d_j)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}(\psi_{n,1}^{(d_j)}(a_j) + o(1)) + \ldots + \lambda_{n,2d}\cdot o(1) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{n,0}^{(2d_j-1)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}\left(\psi_{n,1}^{(2d_j-1)}(a_j) + o(1)\right) + \ldots + \lambda_{n,2d}\cdot o(1) = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, \ell.$

6. Let Δ_n^o denote the determinant of the system (44) with respect to the unknowns $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,2d}$. From (43) follows that

$$\lim_{n\in\Lambda} \Delta_n^o = \Delta^o = \begin{vmatrix} \psi^{2d-1}(a_j)\ \psi^{2d-2}(a_j) & \cdots\cdots\cdots & 1 \\ (\psi^{2d-1})^{(1)}(a_j)\ (\psi^{2d-2})^{(1)}(a_j) & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ (\psi^{2d-1})^{(2d_j-1)}(a_j)\ (\psi^{2d-2})^{(2d_j-1)}(a_j) & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(j=1,2,\ldots,\ell)}$$

Since ψ is one-one in D, we have that $\Delta^o \neq 0$. From this follows that $\Delta_n^o \neq 0$ for all n $(\in \Lambda)$ sufficiently large. Adding to (44) equation

$$\psi_{n,0}(z) + \lambda_{n,1}\,\psi_{n,1}(z) + \ldots + \lambda_{n,2d} = \frac{R_{n+d}(z)}{L_{n,n-d}(z)}, \qquad z\in D$$

and solving the system we get that

$$\frac{R_{n+d}(z)}{L_{n,n-d}(z)} = \frac{\Delta_n(z)}{\Delta_n^o}, \qquad z\in D,\ \ n>N,\ \ n\in\Lambda,$$

where

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} \psi_{n,0}(z) & \psi_{n,1}(z) & 1 \\ \psi_{n,0}(a_j) & \psi_{n,1}(a_j) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n,0}^{(d_j-1)}(a_j) & \psi_{n,1}^{(d_j-1)}(a_j) & 0 \\ \psi_{n,0}^{(d_j)}(a_j)+o(1) & \psi_{n,1}^{(d_j)}(a_j)+o(1) & o(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n,0}^{(2d_j-1)}(a_j)+o(1) & \psi_{n,1}^{(2d_j-1)}(a_j)+o(1) & o(1) \end{vmatrix}_{(j=1,\ldots,\ell}$$

Taking limit it's obvious that

$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{R_{n+d}(z)}{L_{n,n-d}(z)} = \prod_{j=1}^{\ell} (\psi(z) - \psi(a_j))^{2d_j}.$$

So we have

$$(45) \qquad \lim_{n\in\Lambda} \frac{Q_n(z)}{L_{n,n-d}(z)} = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\varphi(z)-\varphi(a_j))^{2d_j}}{2^{2d}\, s_d(z)} , \qquad z\in D ,$$

where the convergence is uniform on each compact subset of D.

7. Suppose that $\Lambda' = \{n : \deg R_{n+d} = n + d_o\}$, $0 \le d_o \le d$, has an infinite number of elements, where d_o is fixed. We shall see that necessarily $d_o = d$. In fact, suppose $d_o < d$. In this case

$$R_{n+d}(z) = L_{n,n+d_o}(z) + \lambda_{n,1} L_{n,n+d_o-1}(z) + \ldots + \lambda_{n,d+d_o} L_{n,n-d}(z)$$

and we have $d + d_o < 2d$ coefficients. Equations (31) and (37) give us $2d$ equations to work on, but we don't need them all. Working with different sets of $d + d_o$ equation taken from (31) - (37) and repeating the proof above for each one of these sets you can see that

$$\lim_{n\in\Lambda'} \frac{R_{n+d}(z)}{L_{n,n-d}(z)} = \psi^{d+d_o}(z) + b_1\psi^{d+d_o-1}(z) + \ldots + b_{d+d_o}$$

is a polynomial of $\psi(z)$ of degree $d + d_o$ whose zeros are $a_1, \ldots, a_\ell$ with multiplicity $2d_1, \ldots, 2d_\ell$ respectively. Since $\psi(z)$ is one to one and $2d_1 + 2d_2 + \ldots + 2d_\ell = 2d > d + d_o$ we obtain a contradiction because $\lim_{n\in\Lambda'} \frac{R_{n+d}(z)}{L_{n,n-d}(z)}$ can have no more than $d + d_o$ roots. So, actually, $\Lambda' \subset \Lambda$ and this means that Λ differs from N on at most a finite number of elements. In particular, $\deg Q_n = n$ for all sufficiently large n. We can now write using (45) and theorem 3 that

$$(46) \qquad \frac{Q_{n,n}(z)}{L_{n,n}(z)} \rightrightarrows \frac{\prod_{k=1}^{\ell} (\varphi(z) - \varphi(a_j))^{2d_j}}{2^d\, s_d(z)\, \varphi^d(z)}, \qquad K \subset D, \quad n \to \infty.$$

This limit and lemma 6 yield the following :

COROLLARY. If $\mu \in W[-1,1]$ and $\alpha \subset E$ is extremal with respect to $(E, [-1,1])$ then

$$|Q_{n,n}|^{1/n} \rightrightarrows \exp h_{[-1,1]}(z), \qquad K \subset D', \quad n \to \infty.$$

8. To complete the proof of theorem 4 we just need to use Rouche's theorem for the location of zeros and (46) in order to obtain what's left of i. To obtain ii we must write Hermite's integral formula for $f - \pi_n$ and then estimate from above the integral using that α is extremal, the corollary and (25).

As in the classical case (see [3], page 623), theorem 4 can be extended to functions of the form

$$\int \frac{h(t)\, d\mu(t)}{z - t} + r(z)$$

where h is a rational function (with complex coefficients) such that all its zeros and poles belong to D. In this case, the same method of proof works out, only several more equations are needed for which the functions of second order and 23 are of help.

References

[1] ILLAN, J., LOPEZ, G. Convergencia de los aproximantes multipuntuales de Pade a funciones meromorfas de tipo Stieltjes. Rev. Ciencias Matematicas, V.III (1981), 43-66.

[2] GONCHAR, A. A., LOPEZ, G. Markov's theorem for multipoint Padé approximants. Math. USSR Sbornik, vol. 34 (1978), 449-459.

[3] GONCHAR, A. A. On the convergence of Padé approximants for certain classes of meromorphic functions. Math. USSR Sbornik, 26 (1975), 555-575.

[4] RAHMANOV, E. A. On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. Math. USSR Sbornik, vol. 32 (1977), 199-213.

[5] RAHMANOV, E. A. On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, II. Math. USSR Sbornik, vol. 46 (1983), 105-117.

[6] MATE, A., NEVAI, P. and TOTIK, V. Asymptotics for the ratio of the leading coefficients of orthogonal polynomials on the unit circle. Constructive approximation, 1 (1984), to appear.

[7] GERONOMUS, N. I. Polynomials orthogonal on a circle and interval Gozizdat, Moscow, 1958. Eng. transl. in Int. Series on Applied Math. Pergamon Press, New York, 1960.

[8] AHIEZER, N. I. Theory of approximation. Ungar, New York, 1956.

[9] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Dover Pub. 1955.

[10] WALSH, J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. 2nd. ed., A.M.S. Providence, R. I., 1956.

[11] BAGBY, T. On interpolation by rational functions. Duke Math. J.,36 (1969), 95-104.

Exposé 3

SURVEY ON MULTIPOINT PADÉ APPROXIMATION TO MARKOV TYPE MEROMORPHIC FUNCTIONS AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS GENERATED BY THEM.

G. LÓPEZ LAGOMASINO
Fac. of Math. and Cib.
University of HAVANA
HAVANA (CUBA)

§ INTRODUCTION.

Let μ be a finite positive Borel measure whose support supp μ is contained in $[0,+\infty[$, and for all $\nu \in \mathbb{N}$, $c_\nu = \int t^\nu d\mu(t) < +\infty$.*) The space of all such measures we denote by $S[0,+\infty[$. If additionally $\mu' > 0$ a.e. on $[0,+\infty[$ (almost everywhere with respect to Lebesgue's measure) we write $\mu \in W[0,+\infty[$. Whenever supp $\mu \subset [a,b]$ we also use the notation $\mu \in S[a,b]$ (respectively $\mu \in W[a,b]$ if also $\mu' > 0$ on $[a,b]$). A simple change of variables indicates that for all that follows we can restrict our attention to the four following spaces of measure $S[0,1]$, $S[0,+\infty[$, $W[0,1]$ and $W[0,+\infty[$. By Δ we denote generically either $[0,1]$ or $[0,+\infty[$.

Let $\alpha \subset E \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, where E is a regular compact set (in $\bar{\mathbb{C}}$), symmetric with respect to $\mathbb{R}$ and whose complement is a region, and $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\dots,2n$, is a table of points also symmetric with respect to $\mathbb{R}$ (this means that for each $n \in \mathbb{N}$ the polynomial $\omega_{2n}(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z-\alpha_{n,k})$ has all its coefficients in $\mathbb{R}$; if $\alpha_{n,k} = \infty$ we take $z - \alpha_{n,k} = 1$, also we consider $\omega_0(z) = 1$). Obviously, ω_{2n} has no zeros on Δ; without loss of generality we may assume that $\omega_{2n}(x) > 0$, $x \in \Delta$.

Suppose that $\mu \in S(\Delta)$ and r is a rational function whose poles belong to $\mathbb{C} \setminus \Delta = D$, $r(\infty) = 0$. The coefficients of r are in general complex numbers in which case we say that r is complex, to specify that all the coefficients of r are real numbers we say that r is real. In the following, we shall denote :

*) *We also consider that supp μ contains an infinite set of points.*

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} + r(z) = \hat{\mu}(z) + r(z).$$

It's easy to prove that there exists a unique rational function $\pi_n^\alpha(f) = \pi_n^\alpha = \frac{P_{n-1}}{Q_n}$, such that :

i) P_{n-1}, Q_n are polynomial, $\deg P_{n-1} \leq n-1$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$ (for which we can suppose that Q_n is monic) ;

ii) $\frac{Q_n f - P_{n-1}}{\omega_{2n}} \in H(D')$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathring{\Delta}$, $D' = D \setminus [r = \infty]$, where as usual $H(D')$ stands for the space of analytic functions on D' ;

iii) $\frac{Q_n f - P_{n-1}}{\omega_{2n}}(z) = \frac{A_{n,1}}{z^{n+1}} + \frac{A_{n,2}}{z^{n+2}} + \ldots$, where the right hand side is the asymptotic expansion of the left hand (for example as $z \to \infty$, $z < 0$).

Condition iii) is trivial if $\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,2n}$ are all finite. Whenever some $\alpha_{n,k}$ are infinite (n fixed) then iii) imposes as many interpolation conditions at $z = \infty$ as points $\alpha_{n,k}$, $k = 1,2,\ldots, 2n$, are infinite. The rational function π_n^α is called the $(n-1,n)$ multipoint Padé approximant associated to f with respect to α .

When all the interpolation data is assigned to $z = \infty$ $(\alpha_{n,k} = \infty, n \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\ldots, 2n)$ we obtain the main diagonal sequence of the classical Padé approximants associated to f at $z = \infty$ and we write $\{\pi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, instead of $\{\pi_n^\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$. There are two classical results concerning the uniform convergence on each compact set for the main diagonal of the Padé table. They are :

<u>MARKOV'S THEOREM</u>. *If* $\mu \in S[0,1]$, $f = \hat{\mu}$ $(r \equiv 0)$ *and* $\pi_n = \pi_n(\hat{\mu})$, *then*

$$\pi_n(z) \rightrightarrows \hat{\mu}(z), \; K \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus [0,1], \quad n \to \infty .$$

<u>STIELTJES' THEOREM</u>. *Let* $\mu \in S[0,+\infty[$ *be such that the moment problem for the sequence* $\{c_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, *is determined. If* $f = \hat{\mu}$ *and* $\pi_n = \pi_n(\hat{\mu})$, *then*

$$\pi_n(z) \rightrightarrows \hat{\mu}(z), \; K \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus [0,+\infty[.$$

Obviously, Stieltjes' theorem contains that of Markov since in a finite interval the moment problem is always determined (has a unique solution). A well known sufficient condition for the moment problem to be determined was given by

Carleman. It says :

<u>CARLEMAN'S THEOREM</u>. *If* $\sum_{\nu\geq 1} \frac{1}{2\nu\sqrt{c_\nu}} = \infty$ *then the moment problem for the sequence* $\{c_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, *is determined.*

Reference to the proofs of these results may be found in [1].

In the present paper, we wish to point out several extensions of these result's in two directions. The first, considering meromorphic functions in D obtained adding to $\hat{\mu}$ either real or complex r's . The second, considering multi-point $(n-1,n)$ type Padé approximants. We will not consider other types of extensions as for instance consider sequences parallel to the main diagonal or weak convergence results. We will also discuss results concerning the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials because of its intimate relation to one type of problem considered here.

§ 2.- CLASSICAL PADÉ APPROXIMANTS.

Trying to widen the class of functions for which strong convergence of the main diagonal sequence of Padé approximants took place, A.A. Gončar considered functions of type $\hat{\mu} + r$, $\mu \in S[0,1]$. His idea was the following :

Let $a_1,\ldots,a_\ell$ be the distinct poles of f in $D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ whose multiplicities are $m_1, m_2,\ldots, m_\ell$ respectively. Let $m = m_1 + m_2 +\ldots+ m_\ell$ and $t_m(z) = \prod_{k=1}^{\ell} (z-a_k)^{m_k}$. From the definition immediately follows that

$$0 = \int x^\nu Q_n(x)\, t_m(x)\, d\mu(x), \quad \nu = 0, 1,\ldots, n-m-1. \tag{1}$$

From these equations we obtain (we remind that Q_n is supposed monic), for each n such that $\deg Q_n = n$ (n normal), the following

$$\frac{(t_m Q_n)}{L_{n-m}}(z) = \frac{L_{n+m}}{L_{n-m}}(z) + \lambda_{n,1}\frac{L_{n+m-1}}{L_{n-m}}(z) + \ldots + \lambda_{n,2m} \tag{2}$$

where L_k denotes the k^{th} monic orthogonal polynomial with respect to μ .

The problem consists of finding a suitable system of equations on $\lambda_{n,1},\ldots, \lambda_{n,2m}$ which allow us to find the limit in (2), as $n \to \infty$. He was able to do this under the condition that μ is such that

$$\frac{L_{n+1}}{L_n}(z) \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \frac{\varphi(z)}{4}, \; K \subset D, \tag{3}$$

where φ is the conformal representation of $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0,1]$ into $[|\omega| > 1]$ such that $\varphi(\infty) = \infty$ and $\varphi'(\infty) > 0$.

More precisely, in [2] A.A. Gončar proved the following :

THEOREM 1. *Let* $\mu \in W[0,1]$ *be such that* (3) *is satisfied,* $f = \hat{\mu} + r$ *where* r *is complex and* $\pi_n = \pi_n(f)$. *Then*

i) $$\lim_n \frac{Q_n(z)}{L_n(z)} = \frac{\prod_{k=1}^{\ell} (\varphi(z) - \varphi(a_k))^{2m_k}}{4^m \, t_m(z) \, \varphi^m(z)}$$

ii) $$\overline{\lim} \, \|f - \pi_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{\rho(K)}, \; K \subset D' = D \setminus \{a_1, \ldots, a_\ell\},$$ *where* $\|\cdot\|_K$ *is the sup-norm on* K *and* $\rho(K) = \|\frac{1}{\varphi}\|_K$.

It's well known that (3) is satisfied in particular if μ satisfies Szego's condition. That is, if

$$\int \frac{\log \mu'(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx > -\infty .$$

E.A. Rahmanov gave a much weaker condition for (3) to take place. In a series of two papers [3,4] he proved that

THEOREM 2. *If* $\mu \in W[0,1]$ *then* (3) *holds.*

In [5], Rahmanov gave examples of very simple measures supported on two disjoint segments contained in $[0,1]$ for which an analogue of theorem 1 is not true, thus showing that a complete extension of Markov's theorem is not possible if we add to $\hat{\mu}$ a complex r $(W[0,1] \subset S[0,1])$. Now, if r has real coefficients then the linear system of equations which gives π_n can be solved in $\mathbb{R}$. In particular, Q_n has real coefficients and then from (1) can be deduced that at least $n-m$ zeros of Q_n lie on $[0,1]$. Thus, if r is real, the number of possible poles of π_n in D is bounded above by m for all n. Using this fact, Rahmanov in that same paper proved :

THEOREM 3. *If* $\mu \in S[0,1]$, $f = \hat{\mu} + r$ *where* r *is real and* $\pi_n = \pi_n(f)$, *then*

i) *for all sufficiently large* n, Q_n *has degree* n ; $n-m$ *zeros of* Q_n

lie on $[0,1]$ *and* m *on* $D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ *; each pole of* f *in* D *"attracts" as many zeros of* Q_n *in* D *as its order of multiplicity ;*

ii) $\overline{\lim} \; \|f - \pi_n\|_k^{1/2n} \leq \frac{1}{\rho(K)}$, $K \subset D'$.

Whenever property i of this theorem is true with respect to Δ we will say that "the poles of π_n are well behaved on $D = \mathbb{C} \setminus \Delta$".

Based on the same idea but using a different method we obtained a generalization of theorem 3 in the same sense that Stieltjes' result extends that of Markov. In [1] (see also [6] for a version and proof in terms of determined moment problems) we proved.

THEOREM 4. *If* $\mu \in S[0,+\infty[$ *is such that* $\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{2\nu\sqrt{c_\nu}} = \infty$, $f = \hat{\mu} + r$ *where* r *is real and* $\pi_n = \pi_n(f)$, *then :*

i) *"the poles of* π_n *are well behaved on* $D = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$ *"* ,

ii) $\pi_n \rightrightarrows f$, $K \subset D'$, $n \to \infty$.

Since in this case the interpolation process is carried on at a point where f is possibly not analytical it is natural that a priori a geometrical rate of convergence cannot be expected.

§ 3. MULTIPOINT PADÉ APPROXIMANTS.

The results in [1] were extended in [7] to multipoint Padé approximants. In order to avoid new notation we shall only state a simplified version, when $\mu \in S[0,1]$.

THEOREM 5. *If* $\mu \in S[0,1]$, $f = \hat{\mu} + r$ *where* r *is real, and* $\pi_n^\alpha = \pi_n^\alpha(f)$, *then*

i) *"the poles of* π_n^α *are well behaved in* D *"* .

ii) $\overline{\lim_n} \; \|f - \pi_n^\alpha\|_k^{1/2n} \leq \tau \leq 1$, $K \subset D'$, *where* τ *is a constant that depends on* K, α *and* supp μ.

For details about τ see [8] where several interesting cases are considered. When $\mu \in S[0,+\infty]$ and r is real, convergence results are given in terms of generalized moments and a sufficient condition which reduces to that of Carleman for the case of classical Padé approximation (see [7] and [9]). In [10] there are overlapping results with theorem 5 for the case when $r \equiv 0$.

Following Gončar's ideas we tried to extend theorem 1 to multipoint Padé approximation. In this case

$$0 = \int x^{\nu} Q_n(x)\ t_m(x)\ d\mu_n(x), \quad \nu = 0,1,\ldots,n-m-1$$

where $d\mu_n(x) = \dfrac{d\mu(x)}{\omega_{2n}(x)}$. So one gets that

$$\frac{(t_m Q_n)}{L_{n,n-m}}(z) = \frac{L_{n,n+m}}{L_{n,n-m}}(z) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n,n+m-1}}{L_{n,n-m}}(z) + \ldots + \lambda_{n,2m} \qquad (4)$$

where $L_{n,k}$ denotes the monic polynomial of degree k orthogonal with respect to $d\mu_n$. In order to find the limit in (4) we were precised to obtain an analogue of theorem 2 for sequences of ratios of orthogonal polynomials with respect to varying measures depending on μ and ω_{2n}. In [11] we proved :

THEOREM 6. *If* $\mu \in W[0,1]$ *and* $j \in \mathbb{Z}$ *is fixed, then*

$$\frac{L_{n,n+j+1}}{L_{n,n+j}}(z) \rightrightarrows \frac{\varphi(z)}{4}, \ K \subset D.$$

In our proof, we combine several ideas of [4] and [12] (where a simplified proof of theorem 2 may be found) making the necessary arrangements. Using theorem 6 we were able to obtain convergence results for multipoint Padé approximants to $f \doteq \hat{\mu} + r$, where r is complex for certain type of tables which we define below.

As said, E is a regular compact set contained in $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0,1]$ whose complement is connected and is symmetric with respect to $\mathbb{R}$. Let h be the harmonic measure of $G = \bar{\mathbb{C}} \setminus (E \cup [0,1])$ such that $h|_{[0,1]} = 0$ and $h|_E = 1$; and $g(.,\xi)$ be the Green's function with respect to $[0,1]$ with singular point at ξ. The capacity of the condenser $(E,[0,1])$ is defined as the value $C = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial \eta}\, ds$, where Γ is an arbitrary contour in G that "separates" E from $[0,1]$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ is the normal derivative to Γ in the direction "from $[0,1]$ to E " and ds is the arc element.

We say that α is *extremal* with respect to the condenser $(E,[0,1])$ if

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} g(z,\alpha_{n,k}) \rightrightarrows \frac{h(z)}{C},\ K\subset \mathbb{C}\setminus[-1,1],\quad n\to\infty .$$

For more details with respect to this definition see [8], there you can also find reference to different types of construction of such tables.

We have the following result in [11] .

THEOREM 7. *If* $\mu\in W[0,1]$, $f=\hat{\mu}+r$ *where* r *is complex,* α *is extremal with respect to the condenser* $(E,[0,1])$ *and* $\pi_n^\alpha=\pi_n^\alpha(f)$, *then :*

i) $$\lim_n \frac{Q_n(z)}{L_{n,n}(z)} = \frac{\prod_{k=1}^{\ell}(\varphi(z)-\varphi(a_k))^{2m_k}}{4^m\, t_m(z)\, \varphi^m(z)}\ ,$$

ii) $$\overline{\lim}\ \|f-\pi_n\|_k^{1/2n} \le \exp\{-\frac{\tau(K)}{C}\} < 1,\ K\subset D'\ ,\ \textit{and}\ \ \tau(K)=\inf\{h(z) : z\in K\}.$$

Références.

1. G. LÓPEZ, *On the convergence of the Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*, Math. Sb. 111 (1980), 308-316 ; English transl. in Math. USSR Sb. 38 (1981), 281-288.

2. A.A. GONČAR, *On the convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*, Mat. Sb. 97 (1975), 607-629 ; English transl. in Math. USSR Sb 26 (1975), 555-575.

3. E.A. RAHMANOV, *On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials*, Math. Sb. 103 (1977), 237-252 ; English transl. in Math. USSR Sb. 32 (1977), 199-213.

4. E.A. RAHMANOV, *On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials II*, Mat. Sb. 118 (1982), 104-117 ; English transl. in Math. USSR Sb. 46 (1983), 105-117.

5. E.A. RAHMANOV, *On the convergence of diagonal Padé approximants*, Mat. Sb. 104 (1977), 271-291 ; English transl. in Math. USSR Sb. 33 (1977), 243-260.

6. G. LÓPEZ, *On the moment problem and the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*. Proc. Int. Conf. on Const. Function Theory, Sofia, 1983, 419-424.

7. J. ILLÁN and G. LÓPEZ, *Multipoint Padé approximation to meromorphic functions of Stieltjes type*, Revista Ciencias Mat. 2 (1981), 43-65.

8. A.A. GONČAR and G. LÓPEZ, *On Markov's theorem for multipoint Padé approximants*, Mat. Sb. 105 (1978), 512-524 ; English transl. in Math USSR Sb. 34 (1978), 449-459.

9. G. LÓPEZ, *Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes type*, Mat. Sb. 107 (1978), 69-83 ; English Transl. in Math. USSR Sb. 35 (1979), 363-376.

10. J. GELFGREN, *Multipoint Padé approximants converging to functions of Stieltjes type*, Proc. Conf. Padé approximation and its appl., Amsterdam, L. Notes in Math. 888, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 197-207.

11. G. LÓPEZ, *On the asymptotics of the ratio of polynomials orthogonal with respect to varying measures*, to appear in Mat. Sb.

12. A. MATÉ, P. NEVAI and V. TOTIK, *Asymptotics for the ratio of the leading coefficients of orthonormal polynomials on the unit circle*, Constructive Approximation 1 (1984).

Exposé 4

LA TAILLE DE CERTAINES CLASSES D'ENSEMBLES MINCES

Russell LYONS
Stanford University
Department of Mathematics
Stanford, California 94305
USA

1. INTRODUCTION

Par "ensemble mince" nous entendons les ensembles d'unicité au sens large, ou ensemble (U_0). Rappelons que ce sont les boréliens E du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui sont annulés par toute mesure appartenant à $M_0(\mathbf{T}) = R = \left\{\mu \in M(\mathbf{T}) \; ; \; \lim_{|n| \to +\infty} \hat{\mu}(n) = 0\right\}$. Nous appelons les mesures de R "les mesures de Rajchman". Etant donnée une classe $\mathcal{C} \subset U_0$, nous allons étudier sa taille selon une notion qui est une combinaison du nombre d'ensembles dans la classe et de la grandeur de chacun. Pour préciser, si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux sous-classes de U_0, nous dirons que $\mathcal{C}_1$ est "beaucoup plus grande" que $\mathcal{C}_2$ s'il existe une mesure concentrée sur un ensemble de $\mathcal{C}_1$ qui annule tout ensemble de $\mathcal{C}_2$, mais pas inversement. Ceci équivaut à la condition $\mathcal{C}_1^{\perp} \subsetneq \mathcal{C}_2^{\perp}$, où on note

$$\mathcal{C}^{\perp} = \left\{\mu \in M(\mathbf{T}) \; ; \; \forall\, E \in \mathcal{C} \quad |\mu|(E) = 0\right\} .$$

Dans ce cas, il n'est pas difficile de voir que toute mesure concentrée sur un ensemble de $\mathcal{C}_2$ est aussi concentrée sur une réunion dénombrable d'ensembles de $\mathcal{C}_1$.

Or pour toute $\mathcal{C} \subset U_0$, on a $R \subset U_0^{\perp} \subset \mathcal{C}^{\perp}$. En fait, $R = U_0^{\perp}$ [4] ; nous nous intéressons ici à voir si certaines autres classes $\mathcal{C}$ jouissent de cette même propriété $(\mathcal{C}^{\perp} = R)$. Une telle classe est "aussi grande" que U_0 elle-même.

Nous nous servirons des produits de Riesz pour montrer que certaines classes ne sont pas "grandes". On verra à travers les démonstrations que les produits de Riesz ressemblent aux mesures de Rajchman de plusieurs façons. Tous les détails non donnés ici se trouvent dans [5].

2. ENSEMBLES DE TYPE H.

On rappelle qu'un borélien $E \subset \mathbf{T}$ est un ensemble (U) si la seule série trigonométrique $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}$ qui converge vers 0 pour tout $t \notin E$ est la série où $c_n \equiv 0$. Il est bien connu que $U \subset U_0$. La première classe d'ensembles (U) non dénombrables a été introduite par Rajchman dans les années 1920 sous le nom d'ensembles de type H. Ce sont les boréliens $E \subset \mathbf{T}$ pour lesquels il existe une suite $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ d'entiers positifs tendant vers $+\infty$ et un ouvert non-vide $I \subset \mathbf{T}$ tels que $n_k x \notin I$ quel que soit $x \in E$ et $k \geq 1$. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor est un ensemble (H) avec $n_k = 3^k$ et $I =]1/3\ ,\ 2/3[$. Rajchman a conjecturé que $R = H^{\perp}$, mais c'est faux. H n'est donc pas une "grande" classe. Une esquisse de la démonstration suit.

Soit μ un produit de Riesz hyperlacunaire :

$$(1) \qquad \mu = \prod_{k\geq 1} \left(1 + \mathrm{Re}\left\{\alpha_k\, e^{2\pi i n_k x}\right\}\right),$$

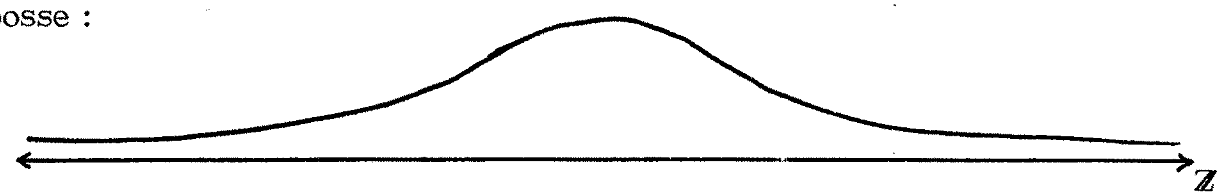
$|\alpha_k| \leq 1$ et $n_{k+1}/n_k \to +\infty$. Si nous prenons $\alpha_k \not\to 0$, alors $\mu \notin R$. Pour montrer que $\mu E = 0 \quad \forall\, E \in H$, il suffit de montrer que, étant donnée une suite $m_j \to +\infty$, la suite $\{m_j x\}$ est dense pour μ-presque tout x. Pour cela, il nous suffit de tirer une sous-suite $\{m_j'\} \subset \{m_j\}$ telle que $\{m_j' x\}$ ait une distribution asymptotique ν_x μ-p. p. dont le support est plein. Or d'après un lemme fondamental [4], il existe une sous-suite $\{m_j'\} \subset \{m_j\}$ telle que pour toute sous-suite $\{m_j''\} \subset \{m_j'\}$ et pour μ-presque tout x, $\{m_j'' x\}$ ait une distribution asymptotique ν_x (indépendante de la sous-suite $\{m_j''\}$). Les coefficients de Fourier-Stieltjes $\hat{\nu}_x$ s'expriment en termes du comportement de $\hat{\mu}$ à l'infini. Plus précisément, $\hat{\nu}_x(n)$ est la limite faible* dans $L^\infty(\mu)$ de $e^{-2\pi i n m_j' x}$. Par exemple, pour $\mu \in R$, on aura $\nu_x = \lambda$ p.p., où λ est la mesure de Lebesgue. Dans le présent cas (1), on n'en est pas loin : il se trouve que ν_x a la forme $\left(1 + \mathrm{Re}\left\{a\, e^{2\pi i r x}\right\}\right)\lambda$. Ceci termine la démonstration, le support de ν_x étant évidemment plein.

3. ENSEMBLES DE HELSON ET ENSEMBLES CONNEXES.

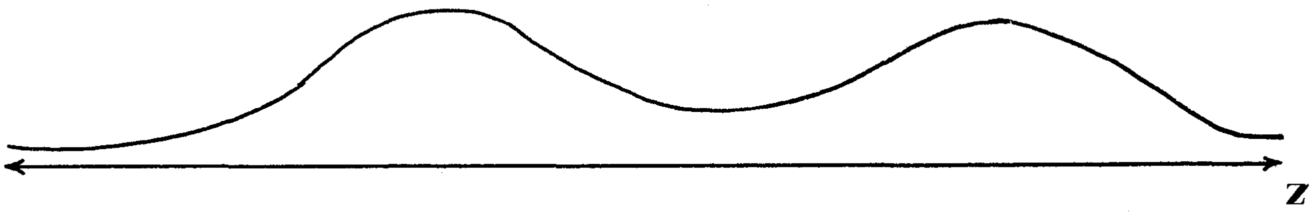
Soit $A(\mathbb{T})$ la classe des fonctions dont la série de Fourier est absolument convergente. Son dual est $PM(\mathbb{T})$, les pseudomesures. Un fermé $E \subset \mathbb{T}$ est un ensemble de Helson si toute fonction définie et continue sur E se prolonge à une fonction de $A(\mathbb{T})$. Par dualité, E est de Helson si et seulement si la quantité

$$\alpha(E) = \sup\left\{ \frac{\|\mu\|_{M(T)}}{\|\mu\|_{PM(T)}} \;;\; 0 \neq \mu \in M(E) \right\}$$

est finie, où $M(E)$ désigne les mesures portées par E. Helson a montré que ces ensembles sont de type U_0. Plus tard, Kahane et Salem en ont donné la démonstration suivante. Ils montrent que si $\mu \in R$ et $\mu E \neq 0$, alors $\alpha(E) = +\infty$. Il suffit de prendre $\mu \in M(E)$ de masse totale 1. Alors l'allure de $\hat{\mu}$ est une bosse :



L'allure de $e^{2\pi irx}\mu$ est la même, quitte à être translatée. Pour r suffisamment grand et tout $a = \pm 1$, l'allure de $(\mu + ae^{2\pi irx}\mu)\hat{}$ est deux bosses :



De même, si $r_1, \ldots, r_M$ sont suffisamment grands, si $a_1, \ldots, a_M = \pm 1$, et si $\nu = \sum_{m=1}^{M} a_m e^{2\pi ir_m x}\mu$, alors $\|\nu\|_{PM} \leq \|\mu\|_{PM} + \varepsilon \leq 2$. Mais il existe, par un lemme général [1, p. 112], un choix de a_m tel que $\|\nu\|_{M(\mathbf{T})} \geq \sqrt{M/3}\,\|\mu\|_{M(\mathbf{T})} = \sqrt{M/3}$. Donc $\|\nu\|_M / \|\nu\|_{PM} \geq \sqrt{M/3}/2$. Puisque $\nu \in M(E)$ et M est arbitraire, il s'ensuit que $\alpha(E) = +\infty$.

Cette méthode marche également pour μ un produit de Riesz (1) avec $n_{k+1}/n_k \geq q > 5$: l'allure de $\hat{\mu}$ consiste en des bosses centrées à $\pm n_k$. La largeur des bosses croît quand k croît mais elles se séparent de plus en plus. L'allure de $\mu|_E$ est la même, et quelques calculs montrent l'applicabilité du même argument. On en tire la conclusion que la classe des ensembles de Helson est "petite".

Si E est un fermé, on note $A(E)$ la restriction de $A(\mathbf{T})$ à E. Si l'image de $f \in A(E)$ est contenue dans $]-1, 1[$, F est continue sur $]-1,+1[$, et E est de Helson, alors $F \circ f \in A(E)$, bien sûr. Mais si les seules F sur $]-1,+1[$ telles que $F \circ f \in A(E)$ pour tout $f \in A(E)$ à image dans $]-1,+1[$ sont les restrictions de fonctions analytiques, on dit que E est un ensemble analytique. La Conjecture de Dichotomie, toujours ouverte, affirme que tout fermé est soit de Helson, soit analytique. En tout cas, on peut montrer que la classe d'ensembles non-analytiques est "petite" : elle est annulée par tout produit de Riesz hyperlacunaire. Pour le montrer, on utilise une condition de Kahane et Katznelson [2] : on dit qu'un fermé E satisfait à la condition (R) s'il existe K tel que pour tout $N \geq 1$, il existe $0 \neq \nu \in M(E)$ et $m \in \mathbf{Z}^+$ tels que

$$\sup_{p \in \mathbf{Z}} \sum_{|n| \leq N} |\hat{\nu}(p-nm)| \leq K \|\nu\|_{PM}.$$

Tout tel ensemble est d'analyticité. On voit tout de suite, donc, que tout ensemble non-analytique est (U_o). En pensant des bosses, mais aussi en se servant davantage de la structure du spectre des produits de Riesz, on peut montrer que tout E qui n'est pas annulé par la mesure μ de (1) vérifie la condition (R).

Nous allons exhiber maintenant une classe proche des ensembles de Helson mais qui est "grande". Il est bien connu [3, p. 16] que E est de Helson si et seulement si

$$s(E) = \inf \left\{ \frac{R(\mu)}{\|\mu\|_{M(\mathbf{T})}} \; ; \; 0 \neq \mu \in M(E) \right\}$$

est positif, où on note $R(\mu) = \limsup_{|n| \to \pm\infty} |\hat{\mu}(n)|$. Remarquons que ce critère et le fait que $\nu << \mu \in R \Longrightarrow \nu \in R$ [1, Proposition 1.5.1] impliquent immédiatement que les ensembles de Helson sont de type U_o. Considérons la classe de boréliens E tels que

$$s^+(E) = \inf \left\{ \frac{R(\mu)}{\|\mu\|_{M(T)}} \; ; \; 0 \neq \mu \in M^+(E) \right\}$$

soit positif, où $M^+(E)$ consiste des mesures positives portées par E. Puisque $s(E) \leq s^+(E)$, cette classe comprend les ensembles de Helson. Elle inclut aussi les ensembles de Dirichlet faibles, ceux-là étant précisément les ensembles tels que $s^+(E) = 1$. Comme ci-dessus, c'est une sous-classe de U_o. Cette classe, pourtant, est "grande". On pourrait noter, par comparaison, que les classes $\{E \; ; \; s^+(E) \geq c\}$ sont "petites" quel que soit $c > 0$.

Le théorème suivant montre que $\{E \; ; \; s^+(E) > 0\}^{\perp} = R$.

THEOREME. Si $\mu \notin R$, alors il existe un ensemble E de $|\mu|$-mesure positive tel que $s^+(E) \geq R(|\mu|)/\|\mu\|_M$.

Démonstration. On peut supposer que μ soit une probabilité. Choisissons $n_k \longrightarrow +\infty$ tels que $\hat{\mu}(n_k) \to \omega R(\mu)$, où $|\omega| = 1$, et tels que

$$f(t) = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} e^{-2\pi i n_k t}$$

existe μ-p.p. ([4]). Puisque $R(\mu) = \int \bar{\omega} f \, d\mu = \int \mathrm{Re}\{\bar{\omega} f\} d\mu$, il suit que

$$E = \{t \; ; \; f(t) \text{ existe et } \mathrm{Re}\{\bar{\omega} f(t)\} \geq R(\mu)\}$$

n'est pas annulé par μ.

Or si $\nu \in M^+(E)$, alors

$$R(\mu) \|\nu\|_M \leq \int_E \mathrm{Re}\{\bar{\omega} f\} d\nu = \mathrm{Re}\{\bar{\omega} \lim_{K\to+\infty} \int_E \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} e^{-2\pi i n_k t} d\nu(t)\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\bar{\omega} \lim_{K\to+\infty} \int_T \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} e^{-2\pi i n_k t} d\nu(t)\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\bar{\omega} \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} \hat{\nu}(n_k)\} \leq \limsup_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} |\hat{\nu}(n_k)|.$$

Donc $R(\nu) \geq R(\mu)\|\nu\|_M$.

4. ENSEMBLES D'UNICITE.

On étudie les ensembles d'unicité depuis plus de 100 ans. Pendant ce temps, on a obtenu plusieurs beaux résultats, mais on connait relativement peu d'exemples d'ensembles d'unicité. Certains théorèmes très astucieux montrent, en effet, que U est une sous-classe assez limitée de U_o. Mais on dirait qu'encore beaucoup d'ensembles d'unicité attendent à être découverts. Comme approche à la détermination de la taille de U, la question "$R \stackrel{?}{=} U^{\perp}$" est particulièrement fascinante.

La réponse n'est pas connue, mais vraie ou fausse, elle serait d'un grand intérêt. Afin d'expliquer pourquoi, il faut d'abord faire mention de quelques faits connus.

Notons que, par régularité, $U^{\perp} = (\text{fermés } (U))^{\perp}$. Il est bien connu qu'un fermé est de type U si et seulement si il ne porte aucune pseudofonction ; une pseudofonction est une pseudomesure S tel que $\hat{S}(n) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$.

Les seuls exemples d'ensembles (U) connus sont les réunions dénombrables d'ensembles de type $H^{(m)}$ et de certains ensembles de Meyer [6]. On peut montrer, encore à l'aide des produits de Riesz, que tous ces exemples forment une "petite" classe. Donc, si $R = U^{\perp}$, alors pour toute $\mu \notin R$, il y aurait un ensemble E d'unicité qui n'est pas annulé par μ. Ceci fournirait une profusion d'ensembles (U), y compris forcément des ensembles jusqu'ici inconnus. D'autre part, si $R \neq U^{\perp}$, alors il y aurait une certaine $\mu \notin R$ qui annule tout ensemble (U). Cette mesure μ (un produit de Riesz ?)ressemblerait très fortement aux pseudo-fonctions. La propriété (U) de ne porter aucune pseudofonction impliquerait - à elle seule - la propriété de ne porter aucune partie d'une certaine μ fixée qui, elle, n'est pas une pseudofonction ! Un tel résultat fournirait en plus un grand nombre d'ensembles de multiplicité : tout ensemble dont la μ-mesure n'est pas nulle.

Références

[1] GRAHAM, C. C. and McGEHEE, O. C. Essays in Commutative Harmonic Analysis. New York : Springer-Verlag, 1979.

[2] KAHANE, J.-P. et KATZNELSON, Y. Contribution à deux problèmes concernant les fonctions de la classe A. Israël J. Math. 1 (1963), 110-131.

[3] LINDAHL, L.-A. and POULSEN, F. (ed.) Thin Sets in Harmonic Analysis. New York : Marcel Dekker, 1971.

[4] LYONS, R. Fourier-Stieltjes coefficients and asymptotic distribution modulo 1. Ann. of Math. 122 (1985), 155-170.

[5] LYONS, R. The size of some classes of thin sets, preprint, 1984.

[6] MEYER, Y. Problème de l'unicité et de la synthèse en analyse harmonique. C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), A275-A276.

Exposé 5

ADMISSIBLE CONVERGENCE AT THE FURSTENBERG BOUNDARY

Peter SJÖGREN
Chalmers University of Technology
and University of Göteborg
Department of Mathematics
S-412 96 Göteborg (Suède)

ABSTRACT.- Given an L^p function on the Furstenberg boundary of a symmetric space, we show that for $p > 1$ the generalized Poisson integral of f converges admissibly to f at almost every boundary point. The proof goes via a maximal function estimate. This paper is a simplified version of the author's preliminary report [7]. More generally, Sjögren [8] deals with admissible convergence at each boundary of any Furstenberg-Satake compactification of the symmetric space.

1. STATEMENT OF RESULTS

Let $X = G/K$ be a Riemannian symmetric space of the noncompact type. Here G is a semisimple Lie group with finite center and K a maximal compact subgroup. We briefly recall the general theory needed. See Korányi [2] and Lindahl [3] for more details.

Via a Cartan decomposition and an ordered system of restricted roots, one arrives at an Iwasawa decomposition $G = KAN$. Here A is abelian and N nilpotent. For $g \in G$, we denote by $H_0(g)$ the unique element in the Lie algebra $\underline{\underline{a}}$ of A for which $g \in K \exp H_0(g) N$.

The nilpotent Lie algebra $\underline{\underline{\bar{n}}}$ is the sum of the root spaces $\underline{\underline{g}}_{-\alpha}$, where $\alpha \in \underline{\underline{a}}^*$ runs through the set of positive (restricted) roots. As in [2, Lemma 3.1], we choose a basis X_i, $i = 1, \ldots, d$, of $\underline{\underline{\bar{n}}}$ such that the linear subspace spanned by $X_1, \ldots, X_k$ is an ideal in $\bar{\underline{\underline{n}}}$ for each $k = 1, \ldots, d$. Moreover, each X_i should belong to $\underline{\underline{g}}_{-\alpha_i}$ for some positive root α_i. The nilpotent Lie group $\bar{N} \subset G$ with Lie algebra $\bar{\underline{\underline{n}}}$ can, as a set, be identified with $\mathbb{R}^d$ via the canonical coordinates, defined by the map

$$(1.1) \qquad (x_1, \ldots, x_n) \to \bar{n} = \prod_{i=1}^{d} \exp(x_i X_i).$$

Then the conjugation $\bar{n}^H = \exp H\, \bar{n} \exp(-H)$ for $H \in \underline{\underline{a}}$ is given by

$$\bar{n}^H = \prod_{i=1}^{d} \exp(e^{-\alpha_i(H)} x_i X_i).$$

A Haar measure of $\bar{N}$ is defined by

$$(1.2) \qquad \int_{\bar{N}} \varphi(\bar{n}) d\bar{n} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\prod_{i=1}^{d} \exp(x_i X_i)\Big) dx_1 \ldots dx_n .$$

The Furstenberg or maximal distinguished boundary of X is K/M, where M is the centralizer of A in K. It has a K-invariant measure dkM. We denote by o the point $eK \in X$, and write $g.o$ for $gK \in X$. Let $\underline{\underline{a}}_+ \subset \underline{\underline{a}}$ denote the positive Weyl chamber.

Fix λ in the dual $\underline{\underline{a}}^*$ of $\underline{\underline{a}}$, in such a way that $\lambda \in \underline{\underline{a}}_+$ if $\underline{\underline{a}}^*$ is identified with $\underline{\underline{a}}$ by means of the Killing form. The λ-Poisson integral of $f \in L^1(K/M)$ is a function on X given by

$$P_\lambda f(g.o) = \int_{K/M} f(kM)\, e^{-(\rho+\lambda)(H_0(g^{-1}k))} dkM.$$

Here

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \in \underline{\underline{a}}^* .$$

Admissible convergence, which here coincides with unrestricted convergence, of $P_\lambda f$ at the point $kM \in K/M$ means the following. Let 1 denote the constant function on K/M, and let $D \subset X$ be an arbitrary compact set. Then the normalized λ-Poisson integral $P_\lambda f(x)/P_\lambda 1(x)$ should converge to $f(kM)$ as

$x \in k \exp H.D$ and $H \in \underline{\underline{a}}_+$ tends to $+\infty$ in the sense that $\alpha(H) \to +\infty$ for every positive root α. For $f \in L^p(K/M)$ and p large enough, admissible convergence holds a. e. on K/M. When $\lambda = \rho$, this result is due to Lindahl and to Knapp and Stein, see [3]. Schlichtkrull [6] extended it to arbitrary λ. We shall remove the restriction on p.

THEOREM 1. If $p > 1$ and $f \in L^p(K/M)$, one has admissible convergence a. e. on K/M.

To prove this, we consider as usual the maximal function

$$(1.3) \qquad \sup_{H \in \underline{\underline{a}}_+, x \in D} P_\lambda |f| (k \exp H.x)/P_\lambda 1(k \exp H.x).$$

By means of the Bruhat map, the problem can be transformed to $\bar{N}$. We let

$$P(\bar{n}) = e^{-2\rho(H_0(\bar{n}))}$$

be the Poisson kernel on $\bar{N}$. It belongs to $L^p(\bar{N})$ for $p > \frac{1}{2}$. Set

$$(1.4) \qquad P^\beta f(\bar{n}_1 \exp H.o) = e^{2\rho(H)} \int_{\bar{N}} f(\bar{n}_1 n) P(\bar{n}^{-H})^\beta d\bar{n}, \qquad \beta > \frac{1}{2},$$

for suitable functions f on $\bar{N}$. This transform is normalized in the sense that $P^\beta 1$ is constant. Arguing as in Michelson [4], we can replace (1.3) by the maximal function

$$(1.5) \qquad M_\beta f(\bar{n}_1) = \sup_{H \in \underline{\underline{a}}_+} P^\beta |f| (\bar{n}_1 \exp H.o).$$

Here $\beta > \frac{1}{2}$ is determined by λ. Theorem 1 is a consequence of the following estimate.

THEOREM 2. If $\beta > \frac{1}{2}$ and $p > 1$, then M_β is bounded on $L^p(\bar{N})$.

The proof of this theorem is given in Section 2. Roughly speaking, we apply to the level sets of P the method of Theorem 3.1 in Korányi [2] combined with a lemma on one-dimensional maximal functions from Carlsson, Sjögren, and Strömberg [1].

By C we denote many different constants.

2. PROOF OF THEOREM 2

The following lemma transforms operators defined on $L^p(\mathbf{R})$ to $L^p(\bar{N})$.

LEMMA 1. Let $p \geq 1$. Assume T is a bounded operator on $L^p(\mathbf{R})$, commuting with translations but not necessarily linear. Take $\nu \in \{1, \dots, d\}$. Define an operator T_ν by

$$T_\nu \varphi(n) = T\varphi_\nu(0) ,$$

where $\varphi \in L^p(\bar{N})$, $\bar{n} \in \bar{N}$, and $\varphi_\nu(t) = \varphi(\bar{n} \exp(tX_\nu))$ for $t \in \mathbf{R}$. Then T_ν is bounded on $L^p(\bar{N})$, with norm not exceeding that of T.

Proof. Assume first $\nu = d$. If $(x_1, \dots, x_d)$ are the canonical coordinates of $\bar{n}$, we set

$$\varphi^*(t) = \varphi\Big(\prod_{i=1}^{d-1} \exp(x_i X_i) \exp(tX_d)\Big) ,$$

so that $\varphi_d(t) = \varphi^*(x_d + t)$. Then

$$\begin{aligned} \|T_d\varphi\|^p_{L^p(\bar{N})} &= \int dx_1 \dots dx_{d-1} \int |T\varphi_d(0)|^p \, dx_d \\ &= \int dx_1 \dots dx_{d-1} \int |T\varphi^*(x_d)|^p \, dx_d \\ &\leq \int dx_1 \dots dx_{d-1} \|T\|^p \int |\varphi^*(x_d)|^p \, dx_d = \|T\|^p \, \|\varphi\|^p_{L^p(\bar{N})} . \end{aligned}$$

For $\nu \neq d$ the same argument works, provided we can modify formula (1.2) for the Haar measure. We must show that the factors $\exp(x_i X_i)$ can be reordered in such a way that $\exp(x_\nu X_\nu)$ appears last. Since $\bar{N}$ is unimodular, the order can certainly be reversed, which settles the case $\nu = 1$. After that one can reverse the order of the factors $\exp(x_\nu X_\nu) \ldots \exp(x_1 X_1)$, since the integration in $x_1, \ldots, x_\nu$ represents the Haar measure of a (nilpotent) subgroup of $\bar{N}$. This completes the proof of Lemma 1.

It is known that

$$P(\bar{n}) = 1/\sum_{0}^{\nu_0} Q_\nu(\bar{n}),$$

where the Q_ν are non-negative polynomials in the coordinates $x_1, \ldots, x_n$, and $Q_0 \equiv 1$. Each Q_ν is homogeneous in the sense that

$$Q_\nu(\bar{n}^{-H}) = e^{L_\nu(H)} Q_\nu(\bar{n}), \quad H \in \underline{\underline{a}}, \quad \bar{n} \in \bar{N}.$$

Here L_ν is a linear combination of the positive roots with non-negative integer coefficients. Therefore, it is enough to take in (1.5) the supremum over those $H \in \underline{\underline{a}}_+$ for which $\alpha(H)$ is an integer when α is a simple root, hence when α is any root.

Consider the increasing sequence of sets

$$E_m = \left\{\bar{n} \in \bar{N} : P(\bar{n}) > 2^{-m}\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

According to [3, p. 42], $P(\bar{n})$ is bounded by some negative power of $\max |x_i|$ at infinity. Hence, the coordinates of a point $\bar{n} \in E_{m+1}$ are no larger than 2^{Cm}. Therefore, the gradient, taken in $\mathbf{R}^d$, of the polynomial $1/P$ is bounded by 2^{Cm} in E_{m+1}. It follows that the (Euclidean) distance from E_m to $\bar{N} \setminus E_{m+1}$ is at least 2^{-Cm}.

Now let $\gamma > 0$ and divide $\bar{N}$ into a lattice of cubes of side $2^{-\gamma m}$, defined in terms of the canonical coordinates. Let Q_j^m, $j = 1, \ldots, j_m$, be those cubes of this lattice which intersect E_m. We can choose the constant γ so that the Q_j^m are contained in E_{m+1}. Then

$$j_m \leq 2^{\gamma md} |E_{m+1}| . \tag{2.1}$$

Let the coordinates of the center of Q_j^m be $(c_{j1}^m, \dots, c_{jd}^m)$. They satisfy $|c_{ji}^m| \leq 2^{Cm}$.

Let $0 \leq f \in L^p(\bar{N})$. Transforming variables through $\bar{n} \to \bar{n}^H$ in (1.4), we get

$$P^{\beta} f(\bar{n}_1 \exp H.o) = \int_{\bar{N}} f(\bar{n}_1 \bar{n}^H) P(\bar{n})^{\beta} \, d\bar{n} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\beta - \beta m} \int_{E_m} f(\bar{n}_1 \bar{n}^H) d\bar{n}. \tag{2.2}$$

Clearly,

$$\int_{E_m} f(\bar{n}_1 \bar{n}^H) d\bar{n} \leq \sum_{j=1}^{j_m} \int_{Q_j^m} f(\bar{n}_1 \prod_{i=1}^{d} \exp(e^{-\alpha_i(H)} x_i X_i)) \, dx_1 \dots dx_n. \tag{2.3}$$

The integral over Q_j^m here will be estimated by means of one-dimensional maximal operators

$$M^{a,b} \psi(t) = \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2a} \int_{|s-b| \leq a} |\psi(t + e^{-\ell} s)| \, ds.$$

Here $a > 0$, $b \in R$, and $\psi \in L^p(\mathbf{R})$. It is a consequence of Lemma 4 in [1] that $M^{a,b}$ is bounded on $L^p(\mathbf{R})$ with constant at most $C(1 + \log^+ |b|/a)^{1/p}$. This can also be seen from Nagel and Stein's paper [5].

With $M_\nu^{a,b}$ defined as in Lemma 1 and H as described above, one has

$$\int_{|x_d - c_{jd}^m| < 2^{-\gamma m - 1}} f(\bar{n}_1 \prod_{i=1}^{d} \exp(e^{-\alpha_i(H)} x_i X_i)) \, dx_d$$

$$\leq 2^{-\gamma m} M_d^{a, c_{jd}^m} f(\bar{n}_1 \prod_{i=1}^{d-1} \exp(e^{-\alpha_i(H)} x_i X_i)) ,$$

where $a = 2^{-\gamma m - 1}$. We then estimate the integrals in $x_1, \dots, x_d$ similarly, and obtain

$$\int_{Q_j^m} f(\bar{n}_1 \bar{n}^H)\, d\bar{n} \le 2^{-\gamma md}\, M_1^{a,c_{j1}^m} \cdots M_d^{a,c_{jd}^m} f(\bar{n}_1)$$

with the same a. The right hand side here is independent of H. Lemma 1 implies that the norm of M_i^{a,c_{ji}^m} on $L^p(\bar{N})$ is bounded by $Cm^{1/p}$. Thus

$$\Big\|\sup_H \int_{Q_j^m} f(\bar{n}_1\, \bar{n}^H)\, d\bar{n}\Big\|_{L^p(d\bar{n}_1)} \le C\, m^{d/p}\, 2^{-\gamma md} \|f\|_{L^p(\bar{N})}.$$

Now (2.2-3) gives

$$\|M_\beta f\|_{L^p} \le C \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\beta m}\, j_m\, m^{d/p}\, 2^{-\gamma md} \|f\|_{L^p}.$$

Because of (2.1), we need only verify that

$$\sum_m 2^{-\beta m}\, m^{d/p}\, |E_{m+1}| < \infty.$$

This follows since $P^{\beta'}$ is integrable for some $\beta' < \beta$. Theorem 2 is proved.

[1] CARLSSON, H., SJÖGREN, P. and STRÖMBERG, J.-O. Multi-parameter maximal functions along dilation-invariant hypersurfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 335-343.

[2] KORÁNYI, A. Harmonic functions on symmetric spaces. In Symmetric spaces. Ed. Boothby and Weiss. Marcel Dekker, New York, 1972.

[3] LINDAHL, L.-A. Fatou's theorem for symmetric spaces. Ark. Mat. 10 (1972), 33-47.

[4] MICHELSON, H. L. Fatou theorems for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973), 257-274.

[5] NAGEL, A. and STEIN, E. M. On certain maximal functions and approach regions. Adv. Math. 54 (1984), 83-106.

[6] SCHLICHTKRULL, H. On the boundary behaviour of generalized Poisson integrals on symmetric spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985), 273-280.

[7] SJÖGREN, P. Unrestricted convergence for generalized Poisson integrals on a symmetric space. Research report 1984-13, Dept. of Math., Chalmers Univ. of Techn. and Univ. of Göteborg.

[8] SJÖGREN, P. Admissible convergence of Poisson integrals in symmetric spaces. Preprint 1985-04, Dept. of Math., Chalmers Univ. of Techn. and Univ. of Göteborg. To appear in Ann. of Math. 123 (1986).

Department of Mathematics
Chalmers University of Technology
and the University of Göteborg
S-412 96 GÖTEBORG, Sweden

Exposé 6

SUR LES ENSEMBLES DE DISTANCES DE CERTAINS ENSEMBLES MESURABLES DU PLAN

Chantal TRAN-OBERLE

Exposé de travaux inédits de H. Furstenberg, Y. Katznelson et B. Weiss communiqués dans une lettre de Y. Katznelson à J.-P. Kahane (avril-mai 1984), présenté par Chantal Tran-Oberlé comme soutenance de Diplôme d'Etudes Approfondies le 12 novembre 1984 à Orsay (jury : A. Ancona, A. Brunel, J.-P. Kahane, J.-P. Thouvenot).

Cet exposé est publié dans ce séminaire avec l'autorisation des auteurs, qui nous signalent que leur résultat principal (théorème 1 ci-dessous) est la réponse à une conjecture de L. A. Szekely [1].

On se propose de montrer le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> : Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ de densité positive à l'infini. Alors l'ensemble des distances entre deux points de E contient une demi-droite $(R > R_o)$.

Rappelons la définition :

<u>Définition 1</u> : Une partie mesurable E de $\mathbb{R}^2$ a une densité positive à l'infini, s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carrés de $\mathbb{R}^2$ d'aire arbitrairement grande tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ m(E\cap S_n) \geqslant \alpha m(S_n)$$

(m désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$) .

Dans une première partie, on va voir que l'ensemble des distances entre deux points de E est "dense à l'infini". Plus précisément, on va montrer qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $R_o > 0$ tel que pour tout $R > R_o$, on peut trouver x et y dans E avec

$$R - \varepsilon \leqslant d(x,y) \leqslant R + \varepsilon$$

(d désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$) .

On obtiendra en fait un résultat plus précis qui permettra, dans une deuxième partie, de montrer le théorème 1 .

I.1 On se sert du théorème ergodique suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soit G un groupe localement compact abélien . Soit T une action de G sur un espace de probabilité $(X,\mathcal{B},\mu)$

$$(1) \quad \begin{cases} \text{préservant la mesure} \\ \text{et telle que } g \longrightarrow (T(g).f, f') \text{ soit une fonction continue} \\ \text{sur G quels que soient f et f' de } L^2(X) \ . \end{cases}$$

Soit $(m_u)_u$ une famille de mesures de probabilité sur G avec

$$(2) \qquad \lim_{u\to\infty} \hat{m}_u(\gamma) = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \text{ de } \hat{G}\smallsetminus\{0\} \ .$$

Soit P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(X)$ sur le sous-espace M des éléments invariants par G :

$$M = \{ f \in L^2(X) \ , \ \forall\, g \in G \ , \ T(g).f = f \}$$

Alors en posant

$$T_u = \int_G T(g)\, dm_u(g)$$

on a

$$(3) \qquad \lim_{u\to\infty} T_u = P$$

au sens de la convergence forte des opérateurs de $L^2(X)$.

Remarque : T induit, de manière naturelle, une opération de G sur $L^2(X)$ (encore notée T) définie pour tout f de $L^2(X)$ et x de X par

$$T(g).f(x) = f(T(g)^{-1}.x)$$

T_u est alors défini pour tout f de $L^2(X)$ et x de X par

$$T_u f(x) = \int_G T(g).f(x) \; dm_u(g)$$

et on vérifie que T_u est un opérateur continu de $L^2(X)$, de norme 1.

Démonstration du théorème 2 :

a) Les hypothèses (1) montrent que T est une représentation continue de G par des transformations unitaires de $L^2(X)$. D'après le théorème de Stone, on peut associer à chaque f de $L^2(X)$ sa mesure spectrale ν_f sur $\hat{G}$ avec

$$\forall\, g \in G \;,\; (T(g).f, f) = \hat{\nu}_f(g)$$

b) Si f appartient à M alors $T_u f = f = Pf$.

c) Si f est de la forme

$$f = T(g_0)F - F \quad (g_0 \in G \;,\; F \in L^2(X))$$

on a $Pf = 0$ et

$$\|T_u f\|^2 = \int_{G\times G} (T(g).f, T(g').f) \; dm_u(g) \, dm_u(g')$$

$$= \int_{\hat{G}} |\hat{m}_u(\gamma)|^2 \left[2 - (g_0,\gamma) - (g_0^{-1},\gamma)\right] d\nu_F(\gamma)$$

L'hypothèse (2) et le théorème de convergence dominée assurent que

$$\lim_{u\to\infty} T_u f = 0 = Pf$$

d) Soit N le sous-espace vectoriel engendré par

$$\{T(g)F - F \;,\; g \in G \;,\; F \in L^2(X)\}$$

et $\bar{N}$ son adhérence dans $L^2(X)$. Si $f \in \bar{N}$ on peut, pour tout $\varepsilon > 0$ trouver f_ε dans N tel que

$$\|f - f_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{u\to\infty} T_u f_\varepsilon = 0$$

Alors

$$\|T_u f\| \leqslant \|T_u(f - f_\varepsilon)\| + \|T_u f_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon + \|T_u f_\varepsilon\|$$

et

$$\lim_{u\to\infty} T_u f = 0 = Pf$$

e) Enfin, on vérifie immédiatement que

$$L^2(X) = M \oplus \bar{N}$$

d'où l'on déduit le théorème 2.

<u>Corollaire</u> : Soit T une action de $\mathbb{R}^2$ sur un espace de probabilité $(X,\mathcal{B},\mu)$ vérifiant les conditions (1) du théorème 2. On note encore P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(X)$ sur le sous-espace des éléments invariants par $\mathbb{R}^2$.
Alors, pour $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 2\pi$, on a :

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\theta_1-\theta_0}\int_{\theta_0}^{\theta_1} T(R e^{i\theta})\, d\theta = P$$

au sens de la convergence forte des opérateurs de $L^2(X)$.

<u>Démonstration</u> : Pour $R > 0$, posons

$$dm_R(r e^{i\theta}) = \frac{1}{\theta_1-\theta_0}\, \delta_R(r) \otimes 1_{[\theta_1,\,\theta_0]}(\theta)d\theta$$

(δ_R désigne la mesure de Dirac au point $r = R$.)
m_R est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ chargeant l'arc $(R e^{i\theta}, \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1)$.
Pour $\gamma = \rho e^{i\phi} \neq 0$, on a

$$\hat{m}_R(\gamma) = \frac{1}{\theta_1-\theta_0}\int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{i\rho R\cos(\theta-\phi)}\, d\theta$$

et le lemme de Van Der Corput assure que pour $R \to +\infty$

$$\hat{m}_R(\gamma) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

ce qui permet d'utiliser le théorème 2 pour conclure.

I.2. On va construire explicitement un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et une action de $\mathbb{R}^2$ sur Ω satisfaisant aux conditions (1) du théorème 2.

<u>Définition 2</u> : Une partie F de $\mathbb{Z}^2$ a une densité positive à l'infini s'il existe $\alpha > 0$ et une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carrés de $\mathbb{R}^2$ d'aire tendant en croissant vers $+\infty$, tels que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \operatorname{card}(F\cap S_n) \geqslant \alpha m(S_n)$$

I.2.a) On considère maintenant une partie F de $\mathbb{Z}^2$ de densité positive à l'infini et on lui associe α et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la définition 2.

On choisit $\eta > 0$ assez petit (en particulier $\eta < \frac{1}{2}$) et on définit la fonction $\tilde{\omega}$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\tilde{\omega}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(z,F) > \eta \\ 1 - \dfrac{d(z,F)}{\eta} & \text{si } d(z,F) \leqslant \eta \end{cases}$$

$\tilde{\omega}$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ et de l'inégalité

$$|d(z,F) - d(z',F)| \leqslant d(z,z')$$

on déduit immédiatement que $\tilde{\omega}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Le théorème d'Ascoli permet alors de conclure que l'ensemble Ω_0 des translatées de $\tilde{\omega}$:

$$\Omega_0 = \{ \tilde{\omega}_\xi \}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \quad \text{avec} \quad \tilde{\omega}_\xi : z \longrightarrow \tilde{\omega}(z - \xi)$$

est relativement compact dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts .

Notons $\Omega = \overline{\Omega_0}$ l'adhérence de Ω_0 dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

I.2.b) Remarquons que si G est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et $\omega \in \Omega$ alors il existe $\xi \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall z \in G , \quad \omega(z) = \tilde{\omega}_\xi(z)$$

En effet, Ω étant métrisable, ω est limite uniforme sur $\overline{G}$ (compact) d'une suite $(\tilde{\omega}_{\xi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω_0 .
Soit $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \eta)$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait

$$\sup_{z \in \overline{G}} |\tilde{\omega}_{\xi_n}(z) - \omega(z)| < \varepsilon$$

Quitte à agrandir G, on peut supposer qu'il existe z_{n_0} dans G tel que $\tilde{\omega}_{\xi_{n_0}}(z_{n_0}) = 1$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, il existe $z_n \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\tilde{\omega}_{\xi_n}(z_n) = 1$$

et

$$d(z_n , z_{n_0}) \leqslant \eta$$

Mais alors, $\tilde{\omega}_{\xi_n}$ et $(\tilde{\omega}_{\xi_{n_0}})_{z_n - z_{n_0}}$ qui coincident en z_n , coincident également sur le disque de rayon η centré en z_n et par suite (puisque $\sup_{z \in \overline{G}} | \tilde{\omega}_{\xi_n}(z) - \tilde{\omega}_{\xi_{n_0} + z_n - z_{n_0}}(z)| \leqslant \varepsilon + \eta < 1$) sur tout G .
La suite $(z_n)_{n \geqslant n_0}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite $(z_{n_k})_{k \geqslant 1}$ convergeant vers $\xi - \xi_{n_0} + z_{n_0} \in \mathbb{R}^2$.
Par continuité de $\tilde{\omega}_{\xi_{n_0}}$, on déduit alors :

$$\forall z \in G , \quad \omega(z) = \lim_{k \to +\infty} \tilde{\omega}_{\xi_{n_k}}(z) = \lim_{k \to +\infty} \tilde{\omega}_{\xi_{n_0} + z_{n_k} - z_{n_0}}(z) = \tilde{\omega}_\xi(z) .$$

I.2.c) $\mathbb{R}^2$ agit sur Ω par translation :

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$$
$$T : \xi \longrightarrow T(\xi)$$

où

$$\forall \omega \in \Omega \quad , \quad T(\xi).\omega = \omega_\xi$$

I.2.d) Ω étant muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, on considère pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la mesure image μ_n de la mesure

$$\frac{1}{m(S_n)} 1_{S_n}(x,y)\,dx\,dy$$

par l'application continue X_n de S_n dans Ω définie par

$$X_n : \xi \longrightarrow \tilde{\omega}_{-\xi}$$

L'ensemble des mesures complexes bornées μ sur Ω telles que $\int d|\mu| < 1$ étant faiblement compact, de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers une mesure de probabilité μ.

I.2.e) Pour $\xi \in \mathbb{R}^2$ et $B \in \mathcal{B}$ on a :

$$|\mu_{n_k}(T^{-1}(\xi).B) - \mu_{n_k}(B)| \leqslant \frac{1}{m(S_{n_k})} m[(S_{n_k} - \xi) \,\Delta\, S_{n_k}]$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$ on ait

$$m(S_{n_k}) \geqslant 16|\xi|^2 \varepsilon^{-2}$$

et

$$m[(S_{n_k} - \xi) \,\Delta\, S_{n_k}] \leqslant 4|\xi|\sqrt{m(S_{n_k})} \leqslant \varepsilon\, m(S_{n_k})$$

Ce qui montre que

$$\mu(T^{-1}(\xi).B) = \lim_{k\to+\infty} \mu_{n_k}(T^{-1}(\xi).B) = \lim_{k\to+\infty} \mu_{n_k}(B) = \mu(B)$$

et donc que μ est invariante par translation.

I.2.f) μ étant régulière, $f \in L^2(\Omega)$ peut être approché dans $L^2(\Omega)$ par $g \in L^2(\Omega)$ continue (uniformément).
Comme $\xi \longrightarrow T(\xi).\omega$ est uniformément continue, indépendamment de ω, (Ω étant muni de la distance usuelle définissant sa topologie), on déduit que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\xi - \xi'| < \delta$ alors pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$|T(\xi).g(\omega) - T(\xi').g(\omega)| < \varepsilon$$

soit

$$\|T(\xi).g - T(\xi').g\| < \varepsilon$$

En écrivant alors

$$\|T(\xi).f - T(\xi').f\| < \|T(\xi).f - T(\xi).g\| + \|T(\xi).g - T(\xi').g\| + \|T(\xi').g - T(\xi').f\|$$
$$< 2\|f - g\| + \|T(\xi).g - T(\xi').g\|$$

on obtient la continuité, pour tout f de $L^2(\Omega)$, de $\xi \to T(\xi).f$, et donc celle de $\xi \to (T(\xi).f\,,\,f')$ pour tous f, f' de $L^2(\Omega)$.

I.3. On est maintenant en mesure de montrer le :

Théorème 3 : Considérons une partie F de $\mathbb{Z}^2$ de densité positive à l'infini. Donnons-nous un entier $N \in \mathbb{N}$, un réel $\varepsilon > 0$ et $\theta_{01}, \theta_{11}, \ldots, \theta_{0N}, \theta_{1N}$ tels que $0 \leqslant \theta_{01} < \theta_{11} < \ldots < \theta_{0N} < \theta_{1N} \leqslant 2\pi$. Alors, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$, on peut trouver $z_0, \ldots, z_N$ dans F répartis de telle sorte que si on pose

$$z_j - z_0 = r_j e^{i\theta_j}$$

on ait

$$|r_j - R| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta_{0j} \leqslant \theta_j \leqslant \theta_{1j}$$

pour $j = 1, \ldots, N$.

Démonstration : On considère l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et l'action T de $\mathbb{R}^2$ sur Ω construits dans les §2.a)c)d), en prenant soin de choisir η inférieur à ε.

Les conditions (1) du théorème 2 étant vérifiées d'après les §2.e)f), le corollaire permet d'affirmer que pour $j = 1, \ldots, N$

$$T_{R,j} = \frac{1}{\theta'_{1j} - \theta'_{0j}} \int_{\theta'_{0j}}^{\theta'_{1j}} T(Re^{i\theta})\, d\theta$$

(où $\theta_{0j} < \theta'_{0j} < \theta'_{1j} < \theta_{1j}$) converge au sens de la convergence forte des opérateurs de $L^2(\Omega)$ vers P, projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace des éléments $\mathbb{R}^2$-invariants.

Prenons $f = 1_A$

où

$$A = \{\omega \in \Omega, \quad \omega(0) > \tfrac{1}{2}\} \in \mathcal{B}$$

et évaluons $\mu(A)$.

$$\mu(A) = \lim_{k \to +\infty} \frac{m(S_{n_k} \cap D)}{m(S_{n_k})}$$

où D désigne la réunion des disques de centre un point de F et de rayon $\frac{\eta}{2}$.

Comme
$$\mathrm{card}(S_{n_k} \cap F) \geqslant \alpha\, m(S_{n_k})$$
et que
$$m(S_{n_k} \cap D) > \frac{1}{2}\left[\pi \frac{\eta^2}{4} \mathrm{card}(S_{n_k} \cap F)\right]$$
on a
$$\mu(A) > \frac{\alpha \eta^2}{4} > 0$$

D'autre part, on a pour presque tout ω de A :

$$Pf(\omega) > 0$$

(car P est en fait l'espérance conditionnelle par rapport à la sous tribu de $\mathcal{B}$ formée des boréliens saturés sous l'action T). Il en résulte qu'il existe $\omega \in A$ et $R_\omega > 0$

tel que pour tout $R > R_\omega$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$T_{R,j}(f)(\omega) > 0$$

c'est-à-dire

$$m(\theta \in [\theta'_{0_j}, \theta'_{1_j}], \omega(R e^{i\theta}) > \frac{1}{2}) > 0$$

et en particulier, il existe $\phi_j \in [\theta'_{0_j}, \theta'_{1_j}]$ avec

$$\omega(R e^{i\phi_j}) > \frac{1}{2}$$

Mais d'après le §2.b), il existe $\xi \in \mathbb{R}^2$ tel que sur le disque $(|z| < 2R)$ ω et $\tilde{\omega}_\xi$ coincident.
Par conséquent, pour tout $R > R_\omega$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$ il existe z_j dans F vérifiant

$$d(R e^{i\phi_j} - \xi, z_j) < \frac{\eta}{2}$$

Or, par définition de A, il existe z_0 dans F avec

$$d(\xi, z_0) < \frac{\eta}{2}$$

En posant alors pour $j = 1, \dots, N$

$$z_j - z_0 = r_j e^{i\theta_j}$$

on vérifie que

$$|r_j - R| < \varepsilon$$

et

$$\theta_j \in [\phi_j - \phi, \phi_j + \phi]$$

où ϕ est tel que $\sin\phi = \frac{\eta}{R}$.

Pour $R > R_0 \geq R_\omega$, $[\phi_j - \phi, \phi_j + \phi] \subset [\theta_{0_j}, \theta_{1_j}]$ et les conclusions du théorème 3 sont satisfaites.

II.1. Démonstration du théorème 1 :

Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$ de densité positive à l'infini.
On lui associe α et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans la définition 1.
On note Q_k $(k \in \mathbb{N})$ la partition de $\mathbb{R}^2$ en carrés de côté 2^{-k} dont les sommets sont les points de $2^{-k}\mathbb{Z}^2$.

Définition 3 : On dira qu'un réel $\beta > 0$ est admissible pour Q_k si l'ensemble des carrés Q de Q_k dans lesquels la mesure relative de E dépasse β, a une densité positive à l'infini.

On note $Q_{k,\beta}$ l'ensemble des carrés de Q_k dans lesquels la mesure relative de E dépasse β.

Lemme 1 : a) Si β est admissible pour Q_k, il l'est aussi pour $Q_{k+\ell}$, quel que soit $\ell \in \mathbb{N}$.

b) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\alpha}{2}$ est admissible pour Q_k.

Démonstration : a) Il est clair que tout Q de $Q_{k,\beta}$ contient au moins un sous-carré Q' appartenant à $Q_{k+\ell,\beta}$.
Soit Π l'ensemble de ces sous-carrés.
Alors Π a une densité positive à l'infini. En effet, si a et $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont associés à $Q_{k,\beta}$ par la définition 1, $a.2^{-2\ell-1}$ et $(\Sigma_n)_{n>n_o}$ peuvent être associés à Π. Précisément, posons

$$\Pi_n^1 = \{ Q \in Q_{k,\beta} \ , \ Q \subset \Sigma_n \}$$

$$\Pi_n^2 = \{ Q \in Q_{k,\beta} \setminus \Pi_n^1 \ , \ Q \cap \Sigma_n \neq \emptyset \}$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$m(\Pi_n^1 \cap \Sigma_n) \leqslant 2^{2\ell} m(\Pi \cap \Sigma_n)$$

$$m(\Pi_n^2 \cap \Sigma_n) \leqslant 4\sqrt{2}\,.\,2^{-k}.\sqrt{m(\Sigma_n)}$$

Pour n assez grand $(n > n_o)$, on a

$$m(\Sigma_n) > \left[a^{-1}\, 2^{-k+\frac{7}{2}}\right]^2$$

et

$$m(\Pi \cap \Sigma_n) \geqslant 2^{-2\ell}\left[m(Q_{k,\beta} \cap \Sigma_n) - m(\Pi_n^2 \cap \Sigma_n)\right] > a.2^{-2\ell-1}\, m(\Sigma_n) \ .$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k} \ll \inf_n (\sqrt{m(S_n)}\,)$.
On va montrer que

$$\Pi = \{ Q \in Q_{k,\frac{\alpha}{2}} \ , \ \exists\, n \in \mathbb{N} \ , \ Q \subset S_n \}$$

a une densité positive à l'infini.
S'il n'en était pas ainsi, pour $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \frac{\alpha}{4})$ il existerait une sous-suite $(S_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de carrés d'aire arbitrairement grande et telle que

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \ , \ m(\Pi \cap S_{n_j}) < \varepsilon\, m(S_{n_j})$$

Or si

$$\Pi' = \{ Q \in Q_k \setminus Q_{k,\frac{\alpha}{2}} \ , \ \exists\, j \in \mathbb{N} \ , \ Q \subset S_{n_j} \}$$

et si j est assez grand on a

$$m(S_{n_j}) > (\varepsilon^{-1}.\,2^{-k}.\,4\sqrt{2}\,)^2$$

et

$$\begin{aligned} m(E \cap S_{n_j}) &\leqslant m(E \cap \Pi' \cap S_{n_j}) + m(E \cap \Pi \cap S_{n_j}) + m(E \cap S_{n_j} \cap \Pi^c \cap \Pi'^c) \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2}\, m(S_{n_j}) + m(\Pi \cap S_{n_j}) + 2^{-k}.\,4\sqrt{2}.\sqrt{m(S_{n_j})} \\ &< \alpha\, m(S_{n_j}) \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

II.2. On définit

$$\beta^* = \sup(\beta \; ; \exists k \in \mathbb{N} \, , \beta \text{ admissible pour } Q_k)$$

D'après le lemme 1.b) , on a

$$\beta^* \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0$$

La propriété suivante est essentielle :

<u>lemme 2</u> : Soit $\ell \in \mathbb{N}$; alors il existe $\beta_\ell < \beta^*$, tel que pour tout $\beta \in]\beta_\ell, \beta^*[$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que β est admissible pour Q_k , on peut trouver un sous-ensemble $Q_{k,\beta,\ell}$ de $Q_{k,\beta}$ de densité positive à l'infini et dont tous les éléments ont la propriété suivante :
tous leurs sous-carrés pour la partition $Q_{k+\ell}$ appartiennent à $Q_{k+\ell,\frac{\beta^*}{2}}$.

<u>Démonstration</u> : On prend

$$\beta_\ell = (1 - 2^{-2\ell-1})\beta^*$$

et pour $Q^*_{k,\beta,\ell}$ les carrés de $Q_{k,\beta}$ tels que dans tous leurs sous-carrés pour la partition $Q_{k+\ell}$, la mesure relative de E est inférieure à β^* . Par définition de β^* , $Q^*_{k,\beta,\ell}$ est bien de densité positive à l'infini et vérifie la propriété énoncée.

II.3.a) On choisit maintenant :

$N = \left[\frac{30}{\beta^{*2}}\right] + 1$; $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \gg \log N$; $\beta \in]\beta_\ell, \beta^*[$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que β est admissible pour Q_k .

On considère le sous-ensemble F de $2^{-k}\mathbb{Z}^2$ formé des sommets, situés aux coins inférieurs gauches des carrés de $Q_{k,\beta,\ell}$ (défini dans le lemme 2) .

Si a et $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont associés à $Q_{k,\beta,\ell}$ par la définition 1 , alors, dès que

$$m(\Sigma_n) > (a^{-1}2^{1-k}4\sqrt{2})^2$$

on a

$$\text{card}(F \cap \Sigma_n) > 2^{2k} m(Q_{k,\beta,\ell} \cap \Sigma_n) - 4.2^k\sqrt{2}\sqrt{m(\Sigma_n)}$$

$$> 2^{2k-1}.a.m(\Sigma_n)$$

Donc F est de densité positive à l'infini dans $\mathbb{Z}^2$.

II.3.b) En appliquant alors le théorème 3 avec $\varepsilon > 0$ choisi tel que

$$\varepsilon \ll 2^{-k}$$

et

$$\theta_{0j} = \frac{\pi j}{3N} - \frac{1}{N^2} \; (j=1,\dots,N) \; ; \; \theta_{1j} = \frac{\pi j}{3N} + \frac{1}{N^2} \; (j=1,\dots,N-1); \; \theta_{1N} = \frac{\pi}{3}$$

on constate qu'il existe $R_o > 0$ tel que pour tout $R > R_o$, il existe $z_o, \dots, z_N$ dans F répartis de telle sorte que si on écrit

$$z_j - z_o = r_j e^{i\theta_j}$$

on a

$$|r_j - R| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\theta_j - \frac{\pi j}{3N}| \leqslant \frac{1}{N^2}$$

pour $j = 1, \dots, N$.

II.3.c) Fixons $R > \max(R_o, 1+\varepsilon)$ et appelons $Q_o, \dots, Q_N$ les carrés de $\mathcal{Q}_{k,\beta,\ell}$ correspondant à $z_o, \dots, z_N$ (figure 1).

figure 1

Posons pour $j = 0, \dots, N$

$$E_j = E \cap Q_j$$

Dans la suite on remplacera la mesure m par $2^{2k} m$.

Comme

$$m(E_o) \geqslant \beta$$

il suffit maintenant de montrer que l'ensemble des points de Q_o qui sont à distance R d'un point de $E_1 \cup \dots \cup E_N$ a une mesure supérieure à $1-\beta$ pour conclure qu'il existe deux points de E à distance R .

II.4. Posons

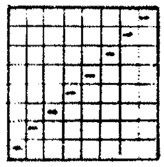
$$G_j = \{x \in Q_o \ , \ \exists\, y \in E_j \ , \ d(x,y) = R\}$$

pour $j \in \{1, \dots, N\}$ et divisons Q_j en ses sous-carrés pour la partition $\mathcal{Q}_{k+\ell}$. Dans chaque sous-carré, la mesure relative de E dépasse $\beta^*/2$ d'après §II.2. et §II.3.a) .

Ceci entraîne que dans chaque sous-carré situé sur la première diagonale de Q_j, on peut trouver un sous-ensemble de E_j, contenu dans un segment horizontal de longueur $2^{-\ell}$ et de mesure (linéaire) relative dans ce segment égale à $\beta^*/2$.
Notons E'_j ces sous-ensembles.
Notons G'_j le sous-ensemble de G_j correspondant à E'_j.
On vérifie immédiatement que G'_j est une réunion, disjointe, d'arcs de cercles (figure 2).

Le lemme suivant va permettre d'évaluer $m(G'_j)$ et $m(G'_i \cap G'_j)$ pour $i \neq j$.

Q_j



Q_o

figure 2

II.5. <u>Définition 4</u> : On appelle bande $B_{\delta,\ell,\Theta}$ de $\mathbb{R}^2$, le produit cartésien d'un ensemble mesurable de mesure $\delta 2^{-\ell}$ $(0<\delta<1)$ contenu dans un segment de longueur $2^{-\ell}$ du segment $[0,1]$ de l'axe des x avec une droite d'angle polaire $\Theta + \frac{\pi}{2}$.

<u>Lemme 3</u> : On considère un système S_i $(i=1,2)$ de 2^{ℓ} bandes B_{δ,ℓ,Θ_i} de $\mathbb{R}^2$ avec $0 \leqslant \Theta_1 < \Theta_2 \leqslant \frac{\pi}{3}$, l'écart entre deux bandes de S_i étant supposé constant.
On note S'_i l'intersection de S_i avec le carré unité $[0,1]\times[0,1]$.
Alors

a) $m(S'_i) = \dfrac{\delta}{1+\operatorname{tg}\Theta_i}$ $(i=1,2)$

b) $m(S'_1 \cap S'_2) = m(S'_1)m(S'_2) + \varepsilon(\ell)$ avec $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \varepsilon(\ell) = 0$

<u>Démonstration</u> : a) Soit P_i le parallélogramme de sommets $(-\operatorname{tg}\Theta_i, 1)$; $(1,1)$; $(1+\operatorname{tg}\Theta_i, 0)$; $(0,0)$ (dans le repère où Q_o est le carré unité (figure 3)). Alors

$$m(P_i \cap S_i) = \delta$$

La proportion des bandes de S_i dans P_i est $\frac{\delta}{1+\operatorname{tg}\Theta_i}$.
Cette proportion étant la même dans Q_o, on déduit a).

b) La mesure de l'intersection d'une bande B_{δ,ℓ,Θ_1} avec une bande B_{δ,ℓ,Θ_2} est

$$(\delta 2^{-\ell})^2 \frac{\cos\Theta_1 \times \cos\Theta_2}{\sin|\Theta_1 - \Theta_2|}$$

Fixons une bande $B'_{\delta,\ell,\Theta_1} = B_{\delta,\ell,\Theta_1} \cap Q_o$ de S'_1 .
Soit $B''_{\delta,\ell,\Theta_1}$ sa projection orthogonale sur la droite perpendiculaire à la direction des B_{δ,ℓ,Θ_2} et passant par une extrémité de $B'_{\delta,\ell,\Theta_1}$.
$B''_{\delta,\ell,\Theta_1}$ rencontre autant de bandes de S_2 que $B'_{\delta,\ell,\Theta_1}$.

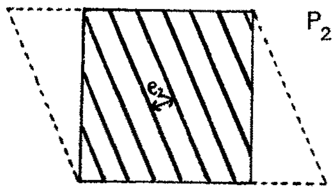


figure 3

L'écart moyen e_2 entre les bandes de S_2 étant donné par

$$1 + \mathrm{tg}\,\Theta_2 = \frac{e_2}{\cos\Theta_2} 2^{\ell}$$

la longueur de $B''_{\delta,\ell,\Theta_1}$ étant égale à $\sin|\Theta_1 - \Theta_2|$ fois celle de $B'_{\delta,\ell,\Theta_1}$, la somme Σ_1 des longueurs des bandes de S_1' étant

$$\frac{\delta}{1 + \mathrm{tg}\,\Theta_1} \times \frac{1}{2^{-\ell}.\delta.\cos\Theta_1}$$

il y a

$$\left[\frac{\sin|\Theta_1 - \Theta_2|\ \Sigma_1}{e_2}\right] + 1$$

rencontres entre les bandes de S_1' et celles de S_2' .
D'où

$$\begin{aligned} m(S_1' \cap S_2') &= (\delta 2^{-\ell})^2 \frac{\cos\Theta_1 \times \cos\Theta_2}{\sin|\Theta_1 - \Theta_2|} \times \frac{\sin|\Theta_1 - \Theta_2|\ \Sigma_1}{e_2} + \varepsilon(\ell) \\ &= m(S_1')m(S_2') + \varepsilon(\ell) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{\ell \to +\infty} \varepsilon(\ell) = 0$.

II.6.a) On déduit du lemme 3 que pour $i,j = 1,\ldots,N$

$$m(G'_j) = \frac{\beta^*}{2(1 + \mathrm{tg}\,\Theta_j)} + \varepsilon_j(\ell,R) \text{ avec } \lim_{\ell,R \to +\infty} \varepsilon_j(\ell,R) = 0$$

$$m(G'_i \cap G'_j) = m(G'_i)m(G'_j) + \varepsilon_{ij}(\ell,R) \text{ avec } \lim_{\ell,R \to +\infty} \varepsilon_{ij}(\ell,R) = 0$$

Car lorsque R et ℓ sont choisis suffisamment grands , on peut en introduisant un terme correctif dans les estimations, assimiler un arc de G'_j à un segment de droite et considérer que l'écart entre les "bandes" constituant G'_j est constant .

On peut alors minorer $m(\bigcup_{i=1}^{N} G'_i)$:

<u>Lemme 4</u> : Soit $(X,\mathcal{A},\lambda)$ un espace de probabilité.
Soient $A_1, \ldots, A_N$ $(N\geq 1)$ dans $\mathcal{A}$ tels que

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\} \quad , \quad \lambda(A_i) > 0$$

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2 \ , \ \lambda(A_i \cap A_j) = \lambda(A_i)\,\lambda(A_j) + \varepsilon_{ij}$$

Alors, en posant $a = \inf_i \lambda(A_i)$; $b = \sup_i \lambda(A_i)$; $\varepsilon = \sup_{i\neq j} \varepsilon_{ij}$
on a

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \geq 1 - \frac{b}{N a^2} - \frac{\varepsilon}{a^2}$$

<u>Démonstration</u> : Posons $f_i = \lambda(A_i) - 1_{A_i}$. Sur $\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)^c$, $\sum_{i=1}^{N} f_i$ est constante supérieure à Na.

D'où
$$\|\sum_{i=1}^{N} f_i\|^2 \geq N^2 a^2 \lambda\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)^c\right)$$

D'autre part,
$$(f_i, f_j) = \lambda(A_i \cap A_j) - \lambda(A_i)\lambda(A_j) \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i \neq j \\ b & \text{si } i = j \end{cases}$$

D'où
$$\|\sum_{i=1}^{N} f_i\|^2 \leq \varepsilon N^2 + Nb$$

et le résultat en découle.

II.6.b) Comme $\theta_j \in \left[\frac{\pi}{3N} - \frac{1}{N^2}, \frac{\pi}{3}\right]$, $N = \left[\frac{30}{\beta^{*2}}\right] + 1$ (§II.3.a)) et que pour ℓ, R assez grands et tous i,j de $\{1,\ldots,N\}$ on a

$$\frac{\beta^*}{2(1+\sqrt{3})} \leq m(G'_j) \leq \frac{\beta^*}{2}$$

et

$$\frac{2}{3}\beta^* + \left(\frac{\beta^*}{2(1+\sqrt{3})}\right)^{-2} |\varepsilon_{ij}(\ell,R)| < \beta$$

on obtient

$$m(\bigcup_{i=1}^{N} G'_i) > 1 - \frac{2(1+\sqrt{3})^2}{N\beta^*} - (\beta - \frac{2}{3}\beta^*) > 1 - \beta \ .$$

[1] L. A. SZEKELY "Remarks on the chromatic number of geometric graphs", in Graphs and other combinatorial topics, Teibner, Texte zur Mathematik, Band 59, Leipzig 1983, 312-315.

No. d'impression 831
2ème trimestre 1986