

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

-:-:-:-:-

SUR LA STRUCTURE DES SPHERES
D' HOMOTOPIE LISSES EN DIMENSION 3 (I)

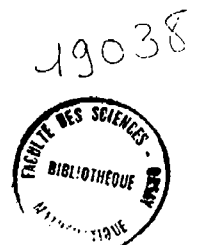
(pages : 235 - 424)

par

Valentin POENARU

-:-:-:-

JUIN 1971



CHAPITRE IV : LES DETAILS DE LA DEMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL.

Dans le chapitre précédent, un grand nombre d'énoncés ont été donnés sans démonstration. On va remplir cette lacune, maintenant, en les prenant un par un et en les démontrant *).

4.1. Démonstration du lemme 3.3.

On considère le 2-polyèdre singulier collapsible (K_2, f, M_3) , K_2 étant triangulé et muni d'une suite de sous-complexes :

$$(d) : K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^q = K_2$$

tels que : 1°. K^0 est un complexe de dimension 1, contractible.

2°. Pour chaque $1 \leq i \leq q$, il existe un simplexe de dimension 2 de K_2 : σ_2^i et une arête $\sigma_1^i \subset \partial\sigma_2^i$, tels que :

$$K^i - K^{i-1} = \text{int } \sigma_2^i + \text{int } \sigma_1^i .$$

On a la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. "Soit $F \subset K_2$ un ensemble fini tel que $s(K_2) \subset F$.

Désignons les points de F par $F = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_p)$ où

$(x_1, \dots, x_r) = s(K_2)$ et $y_i \in (K_2)_2$. On peut trouver $2r+p$ sous-polyèdres de dimension 1 de K_2 (c'est-à-dire des sous-complexes d'une sous-

*) Chaque paragraphe de ce chapitre contient la démonstration d'un lemme du chapitre III. On a laissé de côté un certain nombre de lemmes (faciles) qui ont été laissés au lecteur, comme exercice .

On remarque aussi, que, très souvent, la démonstration d'un lemme fera appel à des paragraphes précédents du chapitre IV et pas seulement au chapitre III.

division de K_2) : Λ_j^i, L_k où : $(i = 1, 2), (j=1, \dots, r), (k=1, \dots, p)$, tels que :

1°. Λ_j^i et L_k sont contractibles. On va désigner par $\partial \Lambda_j^i, \partial L_k$ l'ensemble de leurs bouts.

2°. $x_j \in \partial \Lambda_j^i, y_k \in \partial L_k$.

3°. Les $\{(\Lambda_j^i - x_j), L_k\}$ sont deux à deux disjoints, et ne touchent ni au 0-squelette de K_2 , ni à K^0 .

4°. Chaque point de $\partial L_k - y_k$ ou de $\partial \Lambda_j^i - x_j$ appartient à l'intérieur d'un 1-simplexe de K_2 , qui est incident à un seul 2-simplexe.

5°. Si σ_2^i est un 2-simplexe de K_2 , $\sigma_2^i \cap L_k$ et $\sigma_2^i \cap \Lambda_j^i$ sont des variétés de dimension 1 (pas nécessairement connexes). Chaque composante connexe est un intervalle fermé ayant une extrémité dans $\sigma_2^i \cap K^{i-1}$, l'autre dans $\text{int } \sigma_1^i$.

6°. Soit σ_1 un 1-simplexe de K_2 et $p \in \sigma_1 \cap L_k = \text{int } \sigma_1 \cap L_k$ (ou $p \in \sigma_1 \cap \Lambda_j^i = \text{int } \sigma_1 \cap \Lambda_j^i$). On considère un petit voisinage W de p dans K_2 , tel que : $W \cap \sigma_1 \cap L_i = p$. Si W est assez petit, l'inclusion $L_i \subset K_2$ induit un isomorphisme :

$$\pi_0(W \cap L_i - p) \xrightarrow{\approx} \pi_0(W - \sigma_1 \cap W) \quad (\text{et de même pour } \Lambda^i). \quad (\text{On suppose ici que } \# \pi_0(\sigma_1 \cap W) = 1 \text{ e.a.d.s.})$$

Cette proposition se déduit facilement, par induction sur la longueur (q) de la suite (d). Plus exactement, en supposant la proposition vraie pour K^{i-1} et $F \cap K^{i-1}$, on la prouve pour K^i et $F \cap K^i$.

Le lemme 3.3 résulte de la proposition 3.3.1, si l'on prend $F = s(K_2)$.

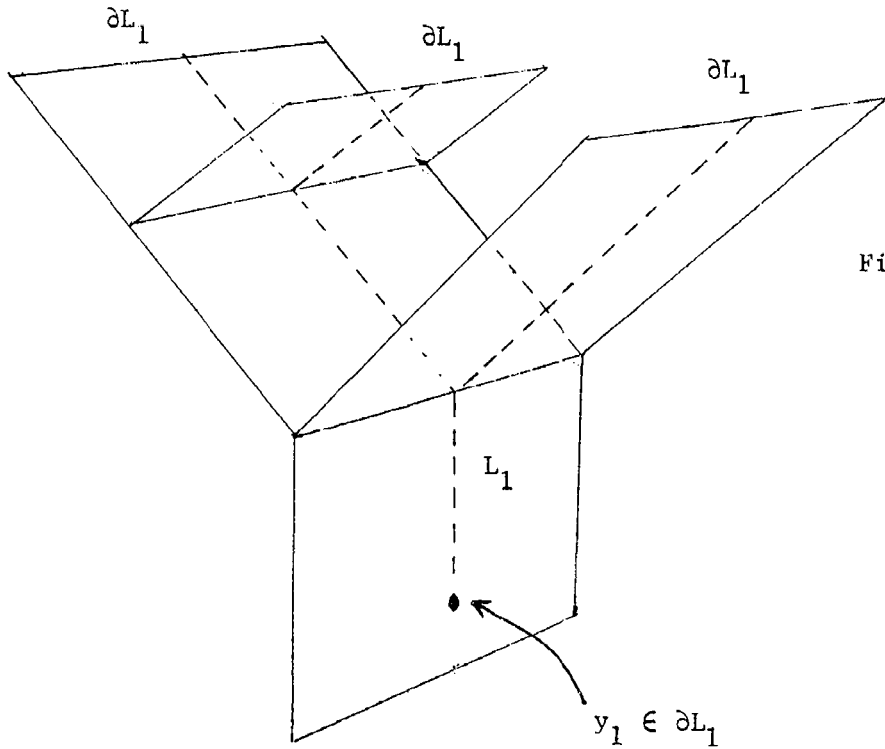


Figure 3.3.1.

Il suffit de couper K_2 le long des $\Lambda_j^i - x_j$ (c'est-à-dire de faire éclater en deux chaque point de $\Lambda_j^i - x_j$) et de montrer que le 2-polyèdre K_2' sans singularités, ainsi obtenu, est collapsible.

L'éclatement des $\Lambda_j^i - x_j$; correspond à une projection canonique d'espace-quotient : $\pi : K_2' \longrightarrow K_2$. Considérons : $\pi^{-1}(K^i) \subset K_2'$. On a : $\pi^{-1}(K^0) \equiv K^0$ (à cause de la condition 3°), $\pi^{-1}(K^q) = K_2'$.

A partir de la condition 5°, on montre sans peine que $\pi^{-1}(K^{i+1})$ collapse sur $\pi^{-1}(K^i)$, e.a.d.s. \square .

4.2) Démonstration du lemme 3.4.

Définition 3.4.1. Une construction, est un quadruple :

$$\{X_3, \mathbb{E}, Y_3, (\Psi_1^0, \dots, \Psi_n^0(0), \bar{\Psi}_1^0, \dots, \bar{\Psi}_n^0(0), \Psi_1^1, \dots, \Psi_n^1(1), \Psi_1^2, \dots, \Psi_n^2(2))\},$$

où : X_3 est un variété compacte, C^∞ , de dimension 3 (à bord $\neq \emptyset$),
 $\partial Y_3 \neq \emptyset$, $f \in \text{Imm}(X_3, Y_3)$, $\Psi_j^i \in \text{Imm}(D_2 \times I, Y_3)$,
 $\bar{\Psi}_j^0 \in \text{Imm}((S_1 \times I) \times I, Y_3)$.

On suppose, aussi, que :

0) Les immersions $f, \Psi_j^i, \bar{\Psi}_j^0$ sont génériques.

1) $\Psi_j^i(D_2 \times I)$ est un voisinage tubulaire très mince
 de $\Psi_j^i(D_2 \times 0) = \Psi_j^i(D_2)$ (et de même pour $\bar{\Psi}_j^0$).

2) $\Psi_j^i(S_1 \times I) \subset f(\partial X_3) - f(M^3(f))$

(et de même pour $\bar{\Psi}_j^0$; plus exactement :

$\bar{\Psi}_j^0((S_1 \times 0) \times I) \subset f(\partial X_3) - f(M^3(f))$.)

3) Pour chaque (i, j) , il existe un ensemble $E_j^i \subset S_1$,

tel que : a) $\# E_j^i = i$,

b) $(\Psi_j^i | S_1 \times I)^{-1}(f(M^2(f|_{\partial X_3}))) \supset E_j^i \times I$,

c) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(Γ_1) $x \in (\Psi_j^i | S_1)^{-1}(f(M^2(f|_{\partial X_3}))) - E_j^i$,

(Γ_2) $x \in (\Psi_j^i | S_1)^{-1}(f(M^2(f|_{\partial X_3})))$ est tel qu'il existe un

germe de plongement $C^\infty : S_{1,x} \xrightarrow{\alpha} \partial X_3$ (où $S_{1,x}$ est
 le germe de S_1 au point $x \in S_1$), avec la propriété :

$$f \circ \alpha \equiv \Psi_j^i | S_{1,x}$$

4) Chaque $x \in (\bar{\Psi}_j^0 | S_1 \times 0)^{-1}(f(M^2(f|_{\partial X_3})))$ satisfait

à la condition (Γ_2), ci-dessus.

5) Au voisinage de $\Psi_j^i(S_1 \times I)$ (respectivement de
 $\bar{\Psi}_j^0((S_1 \times 0) \times I)$), $\Psi_j^i(D_2 \times I)$ (respectivement $\bar{\Psi}_j^0((S_2 \times I) \times I)$)
 se trouve à l'extérieur de $f(D_3)$.

6)

$\sum_{i,j} \Psi_j^i + \sum_j \bar{\Psi}_j^0 + f : [((D_2 \times 0) + (D_2 \times 1))$ pris

$(n(0) + n(1) + n(2))$ fois] + [(($S_1 \times I \times 0$) + ($S_1 \times I \times 1$)) pris $\bar{n}(0)$ fois] + $\partial X_3 \longrightarrow Y_3$
 est générique. \square

Exemple. Une formation est un cas spécial de construction (avec :

$$n(0) = \bar{n}(0) = n(2) = 0 \quad \text{et} \quad n(1) = 1) \quad .$$

Pour chaque Ψ_j^2 considérons les deux arcs $I_j', I_j'' \subset S_1$ caractérisés par les propriétés :

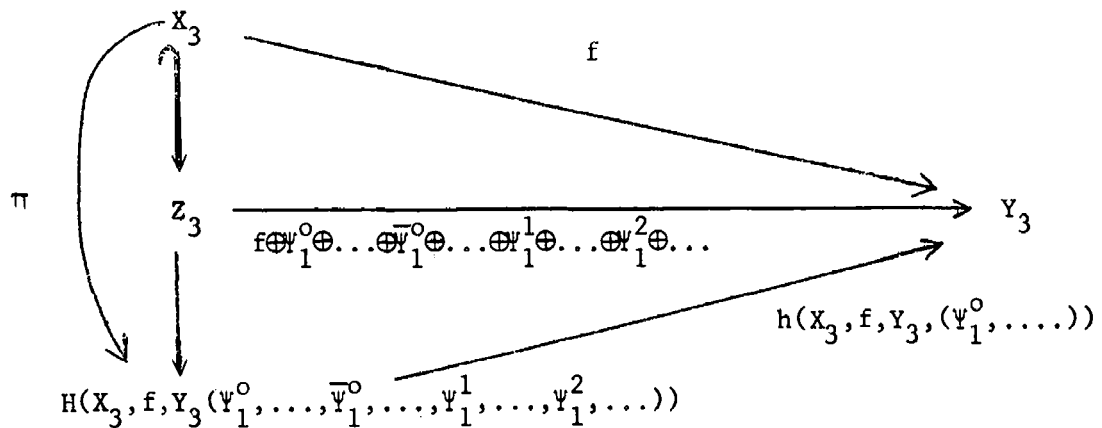
$$I_j' + I_j'' = S_1, \quad I_j' \cap I_j'' = \partial I_j' \cap \partial I_j'' = E_j^2 \subset S_1 \quad .$$

On définit l'espace (avec singularités) :

$$Z_3 = X_3 \underbrace{\oplus \Psi_1^0(D_2 \times I)}_{\Psi_1^0(S_1 \times I)} \oplus \dots \oplus \underbrace{\bar{\Psi}_1^0(S_1 \times I \times I)}_{\bar{\Psi}_1^0(S_1 \times 0 \times I)}$$

$$\oplus \dots \oplus \underbrace{\Psi_1^1(D_2 \times I)}_{\Psi_1^1(S_1 \times I)} \oplus \dots \oplus \underbrace{\Psi_1^2(D_2 \times I)}_{\Psi_1^2(I_1' \times I)} \oplus \dots \dots$$

Tout à fait comme pour les formations (chapitre I) on peut construire un diagramme commutatif :



où $H(X_3, f, Y_3, \dots)$ est une (vraie) variété, et $h(\dots)$ une immersion C^∞ , générique.

A difféomorphisme près :

$$h(X_3, f, Y_3, \dots) : H(X_3, f, Y_3, \dots) \longrightarrow Y_3$$

ne change pas quand on interchange (indépendamment) les rôles des

I'_j, I''_j (à condition que les points doubles de f , correspondant à E_j^2 soient identifiées par π).

Lemme 3.4.01 . "Soit $(D_3, f, Y_3, (\Psi_1^0, \dots))$ une construction, telle que :

$$f \in \text{Pl}^\infty(D_3, Y_3) .$$

Alors : 1) $n(1) = n(2) = 0$.

2) Il existe un 2-polyèdre singulier complètement collapsible (K_2, g, Y_3) , tel que $H(D_3, f, Y_3, (\Psi_1^0, \dots))$ et $\Theta_3(K_2 / \Psi(g))$ soient \ast -équivalents". \square

La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur.

Avant de démontrer l'analogie du lemme 3.4.01, pour des constructions tout à fait générales, on aura besoin de quelques préliminaires.

Lemme 3.4.02. "Soit :

$$f_1 \in \text{Imm}(D_3, Y_3)$$

une immersion générique, où Y_3 est une variété C^∞ , telle que $\partial Y_3 = \emptyset$.

Il existe une homotopie régulière :

$$\Phi \in \text{Imm}_I(D_3 \times I, Y_3 \times I)$$

telle que :

A) $\Phi(1) = f_1, \Phi(0) = f_0 = \text{un plongement } C^\infty : f_0 : D_3 \xrightarrow{\hookrightarrow} Y_3$.

B) La restriction au bord

$$\Phi | \partial D_3 \in \text{Imm}_I(S_2 \times I, Y_3 \times I)$$

est une homotopie régulière générique .

C) Pour chaque $t_0 \in \sigma(\Phi) = \sigma(\Phi | \partial D_3)$,

il existe un voisinage de coordonnées $R_3 \subset Y_3$ tel que :

C₁) En dehors de R_3 , $\Phi | [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ varie par isotopie C^∞ (à la source et au but).

C₂) $\Phi(t_0)^{-1}(R_3) = W_1 + \dots + W_n(t_0) + V_1 + \dots + V_p(t_0)$ où les W_i, V_j sont des voisinages (de coordonnées), disjoints, de D_3 , avec $W_i \approx R_3, V_i \approx R_3^+$.

C₃) $\Phi(t) | W_i$ est un difféomorphisme $W_i \xrightarrow{\approx} R_3$, indépendant de t (si $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$)

C₄) $\Phi(t) (V_i) \subset R_3$ (si $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$) et $\Phi(t) | \sum_i \partial V_i$ est donné (à difféotopie près), par l'une des 6 formules de la fin du chapitre 0.

C₅) Quand $t', t'' \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, et $t' \leq t''$ on a :

$$\Phi(t') (V_i) \subset \Phi(t'') (V_i) \quad " \square$$

La démonstration est une conséquence facile du théorème 0.11.

Pour la commodité, on a intérêt à remplacer les "mouvements élémentaires" génériques, du lemme précédent, par des mouvements non-génériques.

Lemme 3.4.02. "Soit :

$$f_1 \in \text{Imm}(D_3, Y_3)$$

une immersion générique ($\partial Y_3 = \emptyset$) .

Il existe une homotopie régulière :

$$\Phi \in \text{Imm}_I(D_3 \times I, Y_3 \times I) ,$$

telle que :

A) $\Phi(0) = f_0 \in P\mathcal{L}(D_3, Y_3)$; $\Phi(1) = f_1$.

B) Il existe un ensemble fini : $F \subset I$, tel que :

$\Phi|((I - F) \times \partial D_3)$ soit générique et que pour chaque composante connexe $J \subset I - F$, $\Phi(t)$ ($t \in J$) varie par isotopie C^∞ .

C) Si $t_0 \in F$, il existe un voisinage de coordonnées $R_3 \subset Y_3$, tel que :

a) pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit et en dehors de R_3 , $\Phi| [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, varie par isotopie C^∞ .

b) Ils existent des nombres :

$n = n(t_0) \in (0, 1, 2, \dots)$, $p = p(t_0) \in (2, 3, 4)$, tels que

$$\Phi(t_0)^{-1}(R_3) = W_1 + \dots + W_{n(t_0)} + V_1 + \dots + V_{p(t_0)},$$

où les W_i, V_j sont des voisinages de coordonnées, disjoints, de D_3 , et $W_i \approx R_3, V_j \approx R_3^+$.

c) $\Phi(t)|W_i$ est un difféomorphisme $W_i \xrightarrow{\approx} R_3$, indépendant de $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

d) $\Phi(t)(V_i) \subset R_3$ ($t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$) .

D) Ils existent des nombres $\lambda = \lambda(t_0) \in (0, 1, 2)$,

$\epsilon' = \epsilon'(t_0) \in (-1, +1)$, qui, avec $p(t_0)$, décrivent complètement (à un changement de coordonnées près)

$\Phi(t)|\sum_i V_i$ ($t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$) de la façon suivante : (On va supposer que V_i est muni de coordonnées $x_i, y_i, z_i \geq 0$) :

Cas 1°. ($p = 2, \lambda = 0, \epsilon' = +1$).

$$X = x_1, Y = y_1, Z = +z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) - x_2^2 - y_2^2 - z_2 .$$

Cas 2°. ($p = 2, \lambda = 0, \epsilon' = -1$)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) - x_2^2 - y_2^2 - z_2 .$$

Cas 3°. (p = 2, λ = 1, ε' = + 1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = + z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) - x_2^2 + y_2^2 - z_2 .$$

Cas 4°. (p = 2, λ = 1, ε' = -1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) - x_2^2 + y_2^2 - z_2 .$$

Cas 5°. (p = 2, λ = 2, ε' = +1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = + z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) + x_2^2 + y_2^2 - z_2 .$$

Cas 6°. (p = 2, λ = 2, ε' = 1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = x_2, Y = y_2, Z = (t - t_0) + x_2^2 + y_2^2 - z_2 .$$

Cas 7°. (p = 3, λ = 0, ε' = +1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = y_3, Z = (t - t_0) - x_3^2 - y_3^2 - z_3 .$$

Cas 8°. (p = 3, λ = 0, ε' = -1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = y_3, Z = (t - t_0) - x_3^2 - y_3^2 - z_3 .$$

Cas 9°. (p = 3, λ = 1, ε' = + 1)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = y_3, Z = (t - t_0) - x_3^2 + y_3^2 - z_3 .$$

Cas 10°. ($p = 3, \lambda = 1, \epsilon' = -1$)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = y_3, Z = (t - t_0) - x_3^2 + y_3^2 - z_3.$$

Cas 11°. ($p = 4, \lambda = 0, \epsilon = +1$)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = z_3, Z = y_3$$

$$X = x_4, Y = y_4, Z = (t - t_0) - x_4^2 - y_4^2 - z_4.$$

Cas 12°. ($p = 4, \lambda = 0, \epsilon = -1$)

$$X = x_1, Y = y_1, Z = -z_1$$

$$X = z_2, Y = x_2, Z = y_2$$

$$X = x_3, Y = z_3, Z = y_3$$

$$X = x_4, Y = y_4, Z = (t - t_0) - x_4^2 - y_4^2 - z_4. \quad " \quad \square$$

C'est un corollaire facile du lemme précédent.

Lemme 3.4.03. " Soient

$$f_0, f_1 \in \text{Imm}(X_3, Y_3),$$

telles qu'il existe une homotopie régulière : $\Phi \in \text{Imm}_1(X_3 \times I, Y_3 \times I)$,

avec $\Phi(i) = f_i$ ($i = 0, 1$), ayant les propriétés du lemme 3.4.02,

avec $\# F = 1$. On supposera que $\pi_1 X_3 = 0$.

Soit

$(X_3, f_1, Y_3, (\psi_1^0, \dots, \psi_{n(0)}^0, \bar{\psi}_1^0, \dots, \psi_1^1, \dots, \psi_1^2, \dots))$ une construction

quelconque. Il existe une construction :

$(X_3, f_0, Y_3, (\bar{\phi}_1^0, \dots, \bar{\phi}_{m(0)}^0, \bar{\phi}_1^0, \dots, \bar{\phi}_1^1, \dots, \bar{\phi}_1^2, \dots))$ telle que

les variétés :

$H(X_3, f_1, Y_3, (\Psi_1^0, \dots))$ et $H(X_3, f_0, Y_3, (\Phi_1^0, \dots))$ soient $*$ -équivalentes. " \square

(Remarque : l'hypothèse $\pi_1 X_3 = 0$ est probablement inutile. Mais elle fait que $\pi_1 H(X_3, f_1, Y_3, (\Psi_1^0, \dots)) = \pi_1 H(X_3, f_0, Y_3, (\Phi_1^0, \dots)) = 0$. Ceci fait la vérification de l' $*$ -équivalence plus facile, car en ajoutant une anse d'indice 2, quelconque, à un espace simplement connexe, on ne sort pas de la classe d' $*$ -équivalence ...).

Démonstration. (esquissée) : La démonstration est facile mais fastidieuse, puisqu'il faut analyser les 12 cas du lemme 3.4.02.

On va se contenter de regarder le cas 1° ($p = 2, \lambda = 0, \epsilon' = +1$). Les autres cas ($\lambda = 0, \epsilon' = +1$) se traitent de la même manière ; quant aux cas : ($\lambda = 0, \epsilon' = -1$), $\lambda = 1, \lambda = 2$, ils sont plus faciles.

On va considérer le 2-disque :

$$\Delta = (Z = (1 - t_0) - X^2 - Y^2) \cap (Z \geq 0) \subset f_1 (\partial X_3)$$

et tous les $\Psi_j^i, \bar{\Psi}_j^0$ qui le touchent.

Cas I : Ils existent des $\Psi_j^i(E_j^i) \cap \partial \Delta \neq \emptyset$. Soient $\Psi_{j_1}^{i_1}, \dots, \Psi_{j_g}^{i_g}$ les Ψ_j^i tels que $\Psi_j^i(E_j^i) \cap \partial \Delta \neq \emptyset$ et que : $i = 1$ ou : $i = 2$ et, en même temps $\Psi_j^2(E_j^2) \not\subset \partial \Delta$. Soient, de même $\Psi_{\ell_1}^2, \dots, \Psi_{\ell_f}^2$, les Ψ_j^2 tels que $\Psi_j^2(E_j^2) \subset \partial \Delta$.

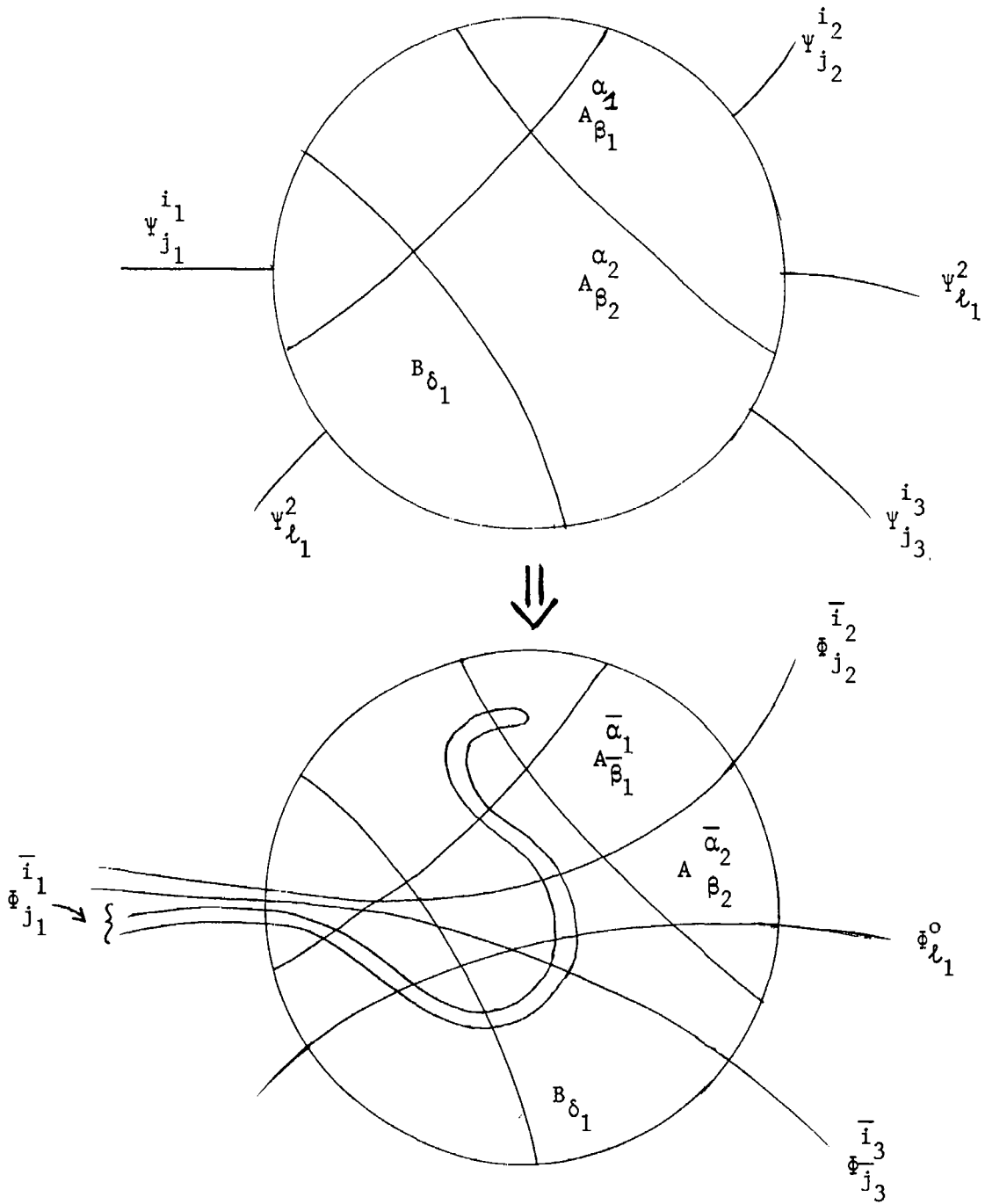
Enfin, Δ coupe $(\cup \Psi_j^i(S_1)) \cup (\cup \bar{\Psi}_j^0(S_1 \times 0))$ suivant des segments : $A_{\beta_1}^{\alpha_1}, \dots, A_{\beta_k}^{\alpha_k}, B_{\delta_1}, \dots, B_{\delta_r}$ où : $A_{\beta_i}^{\alpha_i} \subset \Psi_{\beta_i}^{\alpha_i}(S_2) - E_{\beta_i}^{\alpha_i}$,

$B_{\delta_i} \subset \bar{\Psi}_{\delta_i}^0(S_2 \times 0)$.

Les $\Psi_{\ell_i}^2$ vont devenir des $\bar{\Phi}_{\ell_i}^0$, (ici, la remarque que H, h ne dépend pas du choix I_j', I_j'' , joue un rôle important).

Pour le reste, on procède comme dans la figure 3.4 a.

Figure 3.4. a. $\bar{i}_1 \leq i_1, \bar{i}_2 \leq i_2, \dots$



Cas II. Il n'y a pas de $\Psi_j^1(E_j^1) \cap \partial \Delta \neq \emptyset$. Dans ce cas on procède comme dans la figure 3.4 b ; les détails sont laissés au lecteur. \square

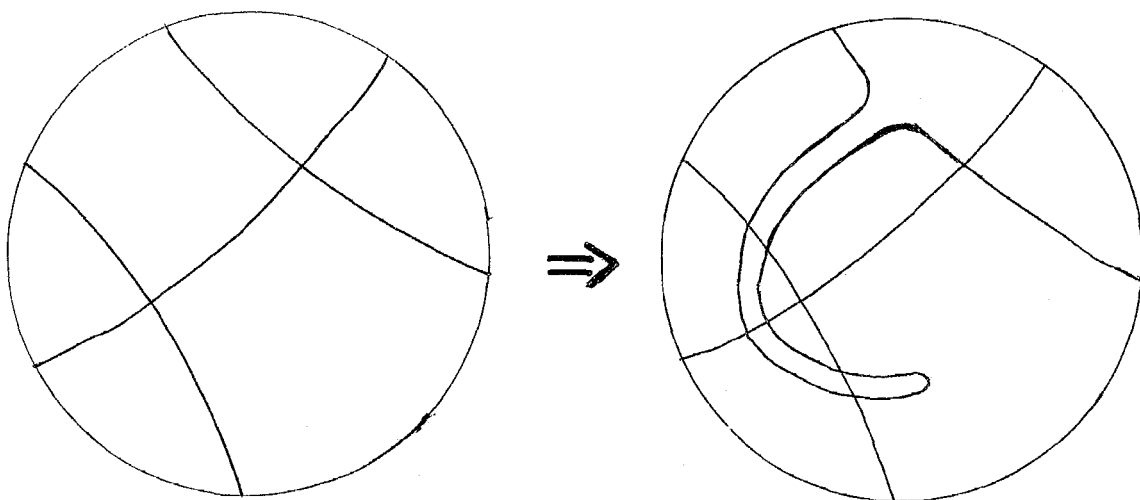


Fig. 3.4. b.

Le lemme suivant est la conclusion de tout ce qu'on vient de faire (depuis le début du paragraphe) :

Lemme 3.4.04 : "Pour toute construction $(D_3, f, Y_3, (\Psi_1^0, \dots))$, il existe un 2-polyèdre singulier (K_2, g, Y_3) , complètement collapsible, tel que $H(D_3, f, (\Psi_1^0, \dots))$ et $\Theta_3(K_2/\Psi(g))$ soient $*$ -équivalentes". \square

Le lemme 3.4 est impliqué par le lemme 3.4.04, et le lemme que voici :

Lemme 3.4.05. "Dans les conditions du lemme 3.4, il existe une construction :

$$(D_3, f, Y_3^k, (\Psi_1^0, \dots, \Psi_{n(0)}^0, \Psi_1^1, \dots, \Psi_{n(1)}^1)) ,$$

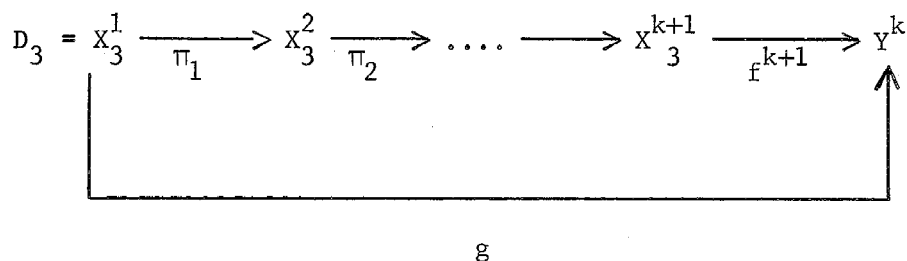
telle que X_3^{k+1} et $H(D_3, f, Y_3^k, (\Psi_1^0, \dots))$ soient $*$ -équivalents." \square

Démonstration. On passe de X_3^i à X_3^{i+1} par l'un des quatre procédés suivants :

- a) $X_3^{i+1} = X_3^i / \mathcal{C}l_Z(x_i, y_i)$
- b) $X_3^{i+1} = X_3^i / \mathcal{C}l_Z(x_i, y_i) + (\text{une anse d'indice 2 : } D_2^i \times I^i)$
- c) $X_3^{i+1} = X_3^i + (\text{une anse d'indice 2 : } D_2^i \times I^i)$
- d) $X_3^{i+1} = X_3^i + (\text{une anse d'indice 3, } D_3^i)$.

(Les cas a, b correspondent aux formations). En multipliant le nombre des $D_2^i \times I^i$ du point c) on peut supposer que $D_3 = X_3^1$.

Considérons :



de même que les immersions

$$\begin{array}{l}
 \psi_i : D_2^i \times I^i \longrightarrow Y^k \\
 \varphi_j : D_3^j \longrightarrow Y^k .
 \end{array}$$

Par des homotopies régulières des f^i , on peut changer $g \Rightarrow f'$, $\varphi_i \Rightarrow \bar{\varphi}_i$, $\psi_i \Rightarrow \bar{\psi}_i$ de telle manière que les $\bar{\varphi}_i$, $\bar{\psi}_i$ soient des plongements, que $\bar{\varphi}_i$ soit très petit, et $\bar{\psi}_i(D_2^i)$ très petit par rapport à $\bar{\psi}_i(I^i)$. Après cela, on oublie les $\bar{\varphi}_i$ et on remplace le "long saucisson" $\bar{\psi}_i(D_2^i \times I)$ par beaucoup de "tranches" parallèles.

Chacune de ces tranches, est essentiellement un D_2^k , dont le bord est dans $f'(\partial X_3^1)$.

(voir la figure 3.4 c)

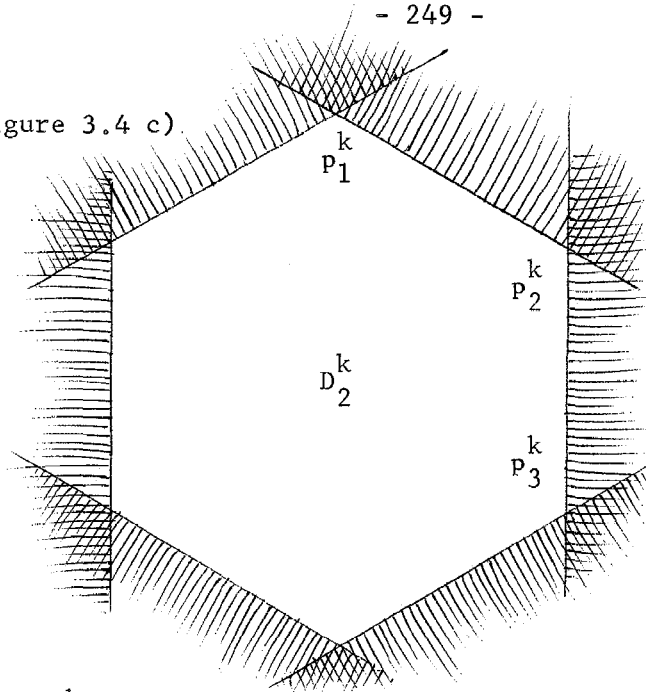


Fig. 3.4 c)

Les D_2^k tels que le nombre d'intersections (essentiels) $\partial D_2^k \cap f'(M^2(f' | \partial X_3^1))$ est ≤ 2 sont laissés en place, pour fabriquer notre construction. Quant aux autres, on modifie f' par homotopie régulière, en un f , comme dans la figure ci-dessous : (et à partir de là, on laisse les détails au lecteur).

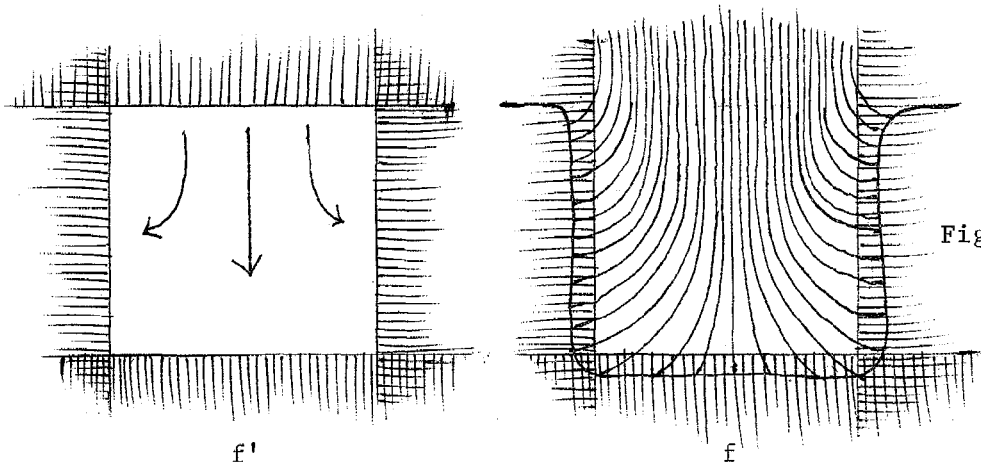


Fig. 3.4. d) □

4.3) Démonstration du lemme 3.4.1.

On va donner une démonstration esquissée : On peut trouver une triangulation τ de $f(X_3) \subset N_3$ ayant les propriétés suivantes :

A) Si l'on considère le plongement :

$$f | s(X_3) : s(X_3) \longrightarrow f(X_3) ,$$

alors $f(s(X_3))$ est un sous-complexe.

B) Il existe une triangulation $\bar{\tau}$ de X_3 , telle que $s(X_3)$ soit un sous-complexe et que $f : X_3 \longrightarrow f(X_3)$ soit une application simpliciale.

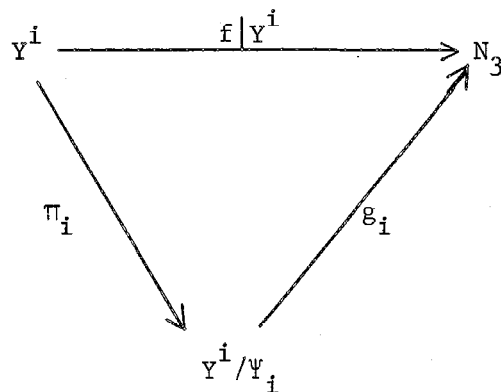
C) X_3 , muni de la triangulation $\bar{\tau}$ est collapsible.

Le lecteur n'aura aucune peine à construire τ et $\bar{\tau}$, de même qu'à prolonger τ à une triangulation de N_3 . Considérons une suite de sous-complexes :

$$Y^0 \subset Y^1 \subset \dots \subset Y^q = X_3$$

tels que Y^0 soit un simplexe σ_0 , $\mathcal{C}\ell(Y^{i+1} - Y^i)$ soit un simplexe σ_{i+1} et $\sigma_{i+1} \cap Y^i \subset \partial\sigma_{i+1}$ soit collapsible. Pour chaque Y^i , considérons la relation d'équivalence $\Phi(f|Y^i) \subset S^2 Y^i$.

Soit $\Psi_i \subset \Phi(f|Y^i)$, la relation d'équivalence la plus petite, telle que, dans le diagramme commutatif ci-dessous :



(où π_i est la projection canonique), Y^i/Ψ_i puisse être muni d'une structure simpliciale telle que : a) π_i soit une application simpliciale.

b) g_i soit une (vraie) immersion simpliciale. Maintenant, considérons $X_3^i \supset Y^i/\Psi_i$, un voisinage régulier C^∞ de Y^i/Ψ_i et $f^i \in \text{Imm}(X_3^i, N_3)$ une immersion C^∞ qui étende, g_i (et qui soit "très proche de g_i ").

On peut vérifier que les conditions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, sont satisfaites. \square

4.4) Démonstration du lemme 3.5.

Soit X_3 une variété singulière, et :

$$\begin{aligned} X_3 &= M_3 \cup \bar{K}_3^1 \cup \dots \cup \bar{K}_3^p = \\ &= M_3 \oplus_{\delta \bar{K}_3^1} \bar{K}_3^1 \oplus_{\delta \bar{K}_3^2} \bar{K}_3^2 \oplus \dots \oplus_{\delta \bar{K}_3^p} \bar{K}_3^p \end{aligned}$$

une décomposition canonique. Chaque \bar{K}_3^i est un exemplaire du modèle local \bar{K}_3 . Soit $V_3 \xrightarrow{\pi} X_3$ une résolution des singularités. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $V_3 \xrightarrow{\pi} X_3$ spécifie les branches $B^i \subset \bar{K}_3^i$ pour $i \leq q \leq p$ et les branches $C^i \subset \bar{K}_3^i$ pour $q < i \leq p$.

On considère $M_3 \times I$, et :

$$\partial (M_3 \times I) = M_3 \times 0 \cup (\partial M_3 \times I) \cup M_3 \times 1 .$$

On a le plongement C^∞ :

$$i(M_3) : M_3 \longrightarrow \partial (M_3 \times I)$$

qui identifie M_3 avec $M_3 \times 0$.

Pour $i \leq q$, $\pi^{-1}(\bar{K}_3^i) \xrightarrow{\pi} \bar{K}_3^i$ s'identifie à $\bar{V}_3(B^i) \xrightarrow{\pi(B^i)} \bar{K}_3^i$ et pour $i > q$, $\pi^{-1}(\bar{K}_3^i) \xrightarrow{\pi} \bar{K}_3^i$ s'identifie à $\bar{V}_3(C^i) \xrightarrow{\pi(C^i)} \bar{K}_3^i$ (déf. 3.12).

Considérons pour chaque i un exemplaire de $D_4 : D_4^i$ et un plongement : (déf. 3.14)

$$e(B^i) : \bar{V}_3(B^i) \longrightarrow S_3^i \quad (\text{si } i \leq q)$$

ou : $e(C^i) : \bar{V}_3(C^i) \longrightarrow S_3^i$ (si $i > q$). On considère le plongement C^∞ :

$$\delta \bar{K}_3^i \xrightarrow{\psi_i} \partial \bar{V}_3(B^i) \quad \text{si } i \leq q, \quad (\text{ou}$$

$$\delta \bar{K}_3^i \xrightarrow{\psi_i} \partial \bar{V}_3(C^i) \quad \text{si } i > q, \quad)$$

tel que $\pi(B^i) \circ \psi_i = \text{identité}$ (respectivement $\pi(C^i) \circ \psi_i = \text{identité}$ ($\delta \bar{K}_3^i$)). On considère des plongements :

$$\Psi_i : \delta \bar{K}_3^i \times I \longrightarrow S_3^i$$

tels que (si $i \leq q$) : $\Psi_i \mid \delta \bar{K}_3^i \times 0 \equiv e(B^i) \circ \psi_i$, et $\Psi_i (\delta \bar{K}_3^i \times I) \cap e(B^i)(\bar{V}_3(B^i)) = e(B_i) \circ \psi_i (\delta \bar{K}_3^i)$. (et avec des conditions analogues pour $i > q$).

Remarquons que les plongements naturels :

$$\delta \bar{K}_3^i \hookrightarrow \partial M_3 = \partial M_3 \times 0 \text{ induisent canoniquement, des plongements :}$$

$$\delta \bar{K}_3^i \times I \hookrightarrow \partial M_3 \times I \longrightarrow \partial(M_3 \times I).$$

On peut définir alors :

$$\theta_4(X_3) = M_3 \times I \oplus \underset{\delta \bar{K}_3^1 \times I}{D_4^1} \oplus \underset{\delta \bar{K}_3^2 \times I}{D_4^2} \oplus \dots \oplus \underset{\delta \bar{K}_3^p \times I}{D_4^p},$$

$$\theta(\pi) = i(M_3) \oplus e(B^1) \oplus \dots \oplus e(B^q) \oplus e(C^{q+1}) \oplus \dots \oplus e(C^p).$$

On laisse au lecteur le soin de finir la démonstration. \square

4.5) Démonstration du lemme 3.18. On va commencer par introduire une certaine terminologie utile pour la démonstration : Soit $K \subset M_3$ un (sous)-polyèdre de dimension 2 de la variété (de dimension 3), M_3 , et $R_3 \subset M_3$ un voisinage de coordonnées, tel que $K \cap R_3$ contienne l'ensemble :

$$((y = 0) \cap (x \geq 0)) \cup ((x = 0) \cap (y \geq 0)).$$

On va considérer deux plongements du simplexe standard de dimension 2, Δ_2 :

$$i : \Delta_2 \longrightarrow (y = 0) \cap (x \geq 0), \text{ et :}$$

$$i' : \Delta_2 \longrightarrow (x = 0) \cap (y \geq 0),$$

tels que : $i(\Delta_2) \cap (x = y = 0) = i(\partial \Delta_2) \cap (x = y = 0) =$
 $= i'(\Delta_2) \cap (x = y = 0) = i'(\partial \Delta_2) \cap (x = y = 0) = (x = y = 0) \cap$
 $\cap(|z| \leq 1).$

On suppose qu'il existe un plongement $\gamma : \Delta_3 \longrightarrow R_3$,
 tel que :

$$\gamma(\Delta_3) \cap K = \gamma(\partial \Delta_3) \cap K = i(\Delta_2) \cup i'(\Delta_2) .$$

Il existe alors un chemin de Whitehead glissant (voir la définition 3.21.), commençant par $K \subset M_3$, où notre $\gamma : \Delta_3 \longrightarrow R_3 \subset M_3$ joue le même rôle que le $\gamma : \Delta_3 \longrightarrow M_3$ de la définition 3.21, et où l'on glisse $(x = 0) \cap (y \geq 0)$ le long de $i(\Delta_2)$.

En principe, il pourrait y avoir deux $\gamma(\Delta_3)$ possibles : des deux côtés de $i(\Delta_2) \cup i'(\Delta_2)$. Ceci donnerait deux chemins différents (chacun déterminé à isotopie près). Si $K \cap R_3$ est tel que deux $\gamma(\Delta_3)$ distincts sont possibles, on va spécifier, aussi, de quel côté de $i(\Delta_2)$ on fait le glissement, (c'est-à-dire de quel côté de $i(\Delta_2)$ se trouve $\gamma(\Delta_3)$).

Soit $K \subset M_3$ un (autre) polyèdre de dimension 2, et $R_3 \subset M_3$ un voisinage de coordonnées tel que :

$$R_3 \cap K = ((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup ((y = 0) \cap (z \leq 1)).$$

Soit $\Delta_2 \subset (y = 0) \cap (z \leq 1)$ le triangle de sommets : $(-1, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 0, -1)$, et : $Y \subset (y = 0) \cap (z \leq 1)$ la fermeture du complémentaire de Δ_2 . On considère $K' \subset M_3$, où $K' - R_3 \equiv K - R_3$ (identité entre sous-espaces de M_3) et :

$$K' \cap R_3 = ((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup Y.$$

Il existe un chemin, contractant, de Whitehead, unique à isotopie près, (déterminé par Δ_2), qui passe de K à K' (et, respectivement, un chemin dilatant, qui passe de K' à K). On va

dire qu'on contracte K le long du segment $(x = 0) \cap (y = 0) \cap \cap (0 \leq z \leq 1)$, (ou, respectivement, qu'on dilate K' le long du segment $(x = 0) \cap (y = 0) \cap (-1 \leq z \leq 0)$). Enfin le passage de $K_1 = (x = 0, z \leq -1) \cup (y = 0, z \leq 0)$ à $K_2 = (x = 0, z \leq 0) \cup \cup (y = 0, z \leq 0)$, s'appelle "dilater K_1 strictement le long du segment : $(x = y = 0) \cap (-1 \leq z \leq 0)$. Le passage inverse va s'appeler "contraction stricte" (le long du segment $(x = y = 0) \cap (0 \leq z \leq 1)$).

On va utiliser maintenant les notations de la définition 3.20.

Pour rendre notre construction "canonique", on aura besoin de préciser une "orientation" (= relation d'ordre) sur $A \cap B = f(A) \cap f(B) \subset R_3$.

De toute façon, (voir la partie du chapitre III qui suit l'énoncé du lemme 3.18), on se donne aussi une séquence principale :

(L_2^i, g^i, M_3) de (L_2, g, M_3) , et les paires de points $\pi_1 \in A$, $\pi_2 \in B$, ayant la propriété : $f(\pi_1) = g(\pi_1) = g(\pi_2) = f(\pi_2)$, seront identifiées par une projection d'espace-quotient : $p_i : L_2^{i-1} \longrightarrow L_2^i$. p_i est engendrée par un point singulier $\sigma(p_i) \in s(L_2^{i-1})$ (voir la déf. 3.19) et on va supposer que l'orientation (= ordre total) sur $f(A) \cap f(B)$ est telle que, "les points de $f(A) \cap f(B)$ deviennent de plus en plus grands, en s'éloignant de $\sigma(p_i)$ ". Par convention de "langage" notre orientation va de gauche à droite. Ce sera l'ordre de y croissants.

Sans perdre la généralité on peut supposer que M_3 est orientable et orienté. L'orientation de l'axe des z est déjà implicite dans la définition 3.20. Enfin le système de coordonnées (x, y, z) est choisi de telle manière qu'il soit compatible avec l'orientation de M_3 .

Enfin, toujours pour rendre notre construction canonique on aura besoin de préciser, dès le début, une certaine résolution des singularités qu'on va décrire : on commence par considérer le 2-polyèdre

singulier : $((A \cup B)/\Psi(\hat{g}), i, R_3)$ (où i est induite par les plongements naturels $A, B \subset R_3$) et une séquence principale :

$$(A \cup B/\Psi(\hat{g})) \longrightarrow (A \cup B)/\Psi(f_H) = ((A \cup B)/\Psi(\hat{g}))/\Psi(i) \subset R_3$$

qui consiste d'exactement p opérations élémentaires $O(3)$. On va se donner une résolution des singularités :

$$\pi : U_3 \longrightarrow \Theta_3((A \cup B) / \Psi(\hat{g}))$$

pour laquelle toutes les p opérations $O(3)$ sont cohérentes. En particulier, toute résolution des singularités : $\pi : W_3 \longrightarrow \Theta_3(L_2)$ induit une résolution comme ci-dessus (d'une manière canonique), et ceci justifie le complément au lemme 3.18.

Avant d'aller plus loin on va décrire certains chemins de Whitehead "standard" dont on aura besoin. Il est entendu que ces chemins sont décrits à isotopie près, par ce qui suit.

On considère, dans un voisinage de coordonnées R_3 , le polyèdre $\bar{P}_2 \subset R_3$ défini de la manière suivante :

$$\bar{P}_2 = (x = 0) \oplus ((x \geq 0) \cap (z = 0)) \oplus ((z \geq 0) \cap (z = -1)).$$

Sur $(x = 0) \cap (z = 0)$ et $(x = 0) \cap (z = -1)$ on va se donner des relations d'ordre compatibles entre elles (par exemple celles des y croissants) et, par convention de langage, ces relations d'ordre vont de gauche à droite.

On va considérer une application $z = h(x, y)$, C^∞ , identiquement égale à -1 en dehors d'un compact telle que la surface $z = h(x, y)$ coupe la droite $x = z = 0$, transversalement, en deux points b_1 et b_2 , et que $(z = h(x, y), x \geq 0)$ coupe $(z = 0, x \geq 0)$ transversalement, suivant un arc $\ell \subset (z = 0, x \geq 0)$, d'extrémités b_1 et b_2 . On peut considérer $(z = h(x, y), x \geq 0)$ comme l'image de l'application (désignée toujours par h) :

$$h : (z = -1), x \geq 0 \longrightarrow \mathbb{R}_3 ,$$

donnée par : $h(x,y, -1) = (x,y, h(x,y))$. Dans $(z = -1, x \geq 0)$, ℓ correspond à un arc λ . On va supposer que b_1 est à gauche de b_2 et considérer deux décompositions en sommes de chemins, compatibles entre elles via h :

$$\lambda = \lambda^- + \mu + \lambda^+,$$

$$\ell = \ell^- + m + \ell^+, \text{ avec } b_1 \in \ell^-, b_2 \in \ell^+ .$$

On va se donner deux 2-disques plongés différemment :

$$\varphi : D_2 \longrightarrow (z = 0, x > 0)$$

$$f : D_2 \longrightarrow (z = -1, x > 0)$$

qui coupent ℓ , (respectivement λ), transversalement suivant $m(\mu)$. On

se donnera aussi, deux disques de dimension 2, plongés différemment :

$$\Delta_2 \subset (z = 0, x > 0) - \ell - \varphi(D_2)$$

$$\Delta'_2 \subset (z = -1, x > 0) - \lambda - f(D_2)$$

séparés de l'infini par $\ell(\lambda)$.

On considère, enfin, des 2-disques, différemment plongés, 2 à 2 disjoints :

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k : D_2 \longrightarrow \text{int } \Delta_2$$

$$g_1, \dots, g_q : D_2 \longrightarrow \text{int } \Delta'_2 .$$

On va considérer le polyèdre $P_2 \subset \overline{P}_2$, défini comme suit :

$$P_2 = (x = 0) \oplus [((x \geq 0) \cup (z = 0)) - \varphi(\overset{\circ}{D}_2) - \cup \varphi_i(\overset{\circ}{D}_2)] \oplus$$

$$\oplus [((x \geq 0) \cup (z = -1)) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_j(\overset{\circ}{D}_2)].$$

Soit, aussi, $P'_2 \subset \mathbb{R}_3$ le polyèdre :

$$P'_2 = (x = 0) \oplus \left[((x \geq 0) \cap (z = 0)) - \varphi(\overset{\circ}{D}_2) - \cup \varphi_1(\overset{\circ}{D}_2) \right] \oplus \\ \oplus h \left[((x \geq 0) \cap (z = -1)) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_j(\overset{\circ}{D}_2) \right].$$

On va décrire (à isotopie près) deux chemins de Whitehead $Ch(+)$, $Ch(-)$ allant de P_2 à P'_2 . (Le lecteur, remarquera que, de toute façon, en dehors d'un compact $C \subset R_3$: $P_2 - C \equiv P'_2 - C$, comme sous-espaces de R_3).

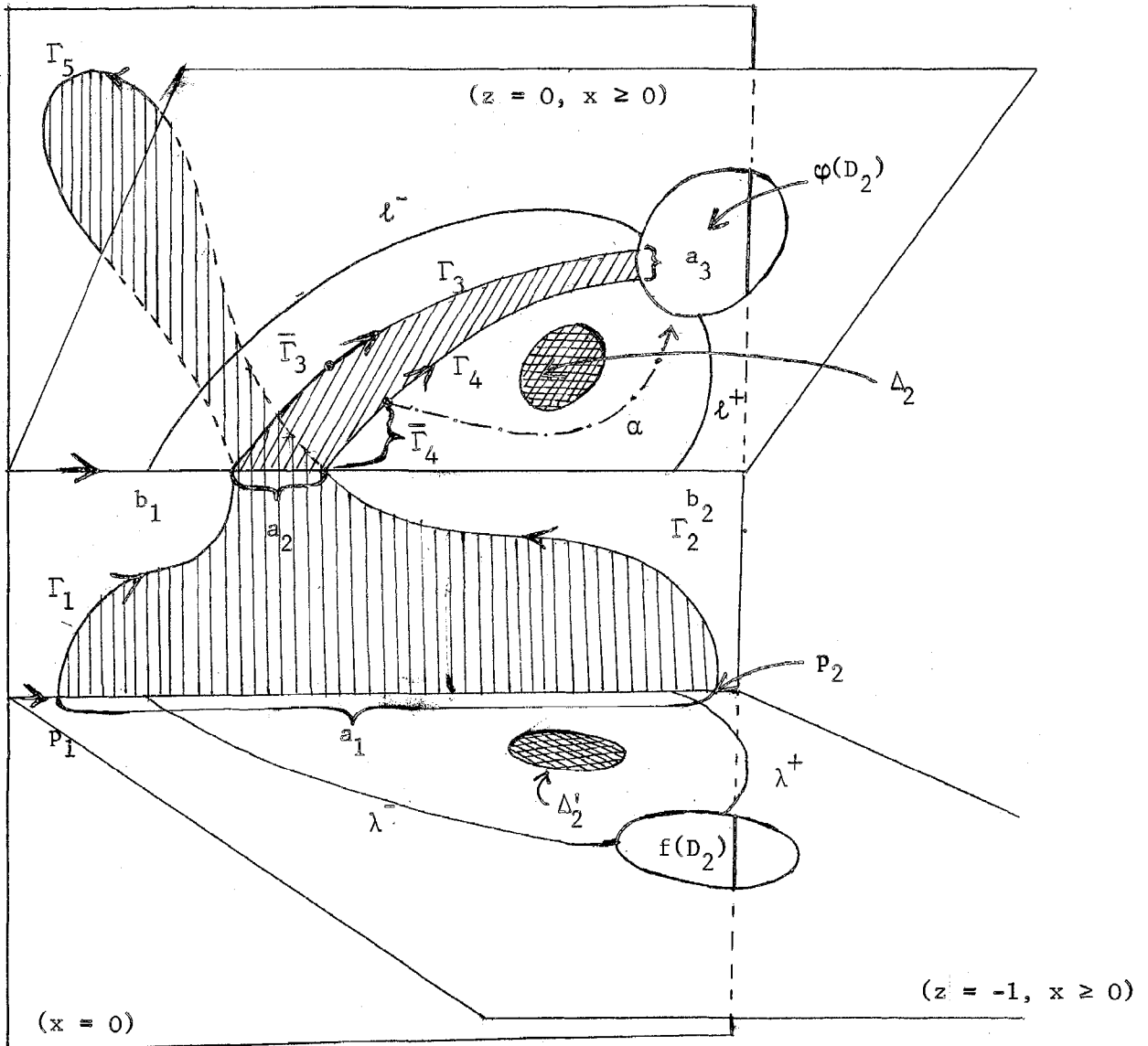


Figure 3.18.1 $P_2 \subset R_3$

On va se donner, maintenant, un certain nombre de sous-ensembles de P_2 , décrits à isotopie près par la figure 3.18.1.

On aura des intervalles fermés : a_1, a_2, a_3 :

$\partial\lambda \subset a_1 \subset (x = 0, z = -1)$, $a_2 \subset (x = 0, z = 0)$, contenu entre b_1 et b_2 , $a_3 \subset \partial\varphi(D_2)$, séparé de l'infini par λ . On aura aussi les intervalles fermés :

$\Gamma_1, \Gamma_2 \subset (x = 0) \cap (0 \geq z \geq -1)$, $\Gamma_3, \Gamma_4, \alpha \subset (x \geq 0, z = 0)$, $\Gamma_5 \subset (x = 0, z \geq 0)$. Ces intervalles sont complètement décrits par notre figure 3.18.1. (On remarque, par exemple, que Γ_3 et Γ_4 laissent Δ_2 à leur droite, et α laisse Δ_2 à gauche, ...). On va désigner par $(a_1, \Gamma_1, a_2, \Gamma_2)$ le 2-disque de $(x = 0)$ déterminé par : $a_1^{-1} + \Gamma_1 + a_2 + \Gamma_2^{-1}$, e.a.d.s.

Je décris maintenant les étapes successives du chemin de Whitehead $Ch(+)$: en partant de P_2 on glisse $(z = -1, x \geq 0) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_i(\overset{\circ}{D}_2)$, successivement, le long des 2-disques : $(a_1, \Gamma_1, a_2, \Gamma_2)$, $(a_2, \Gamma_3, a_3, \Gamma_4)$, $(a_2, \Gamma_3, a_3, \Gamma_4)$ (la seconde fois de l'autre côté de $(z = 0, x \geq 0$, que la première), (a_2, Γ_5) .

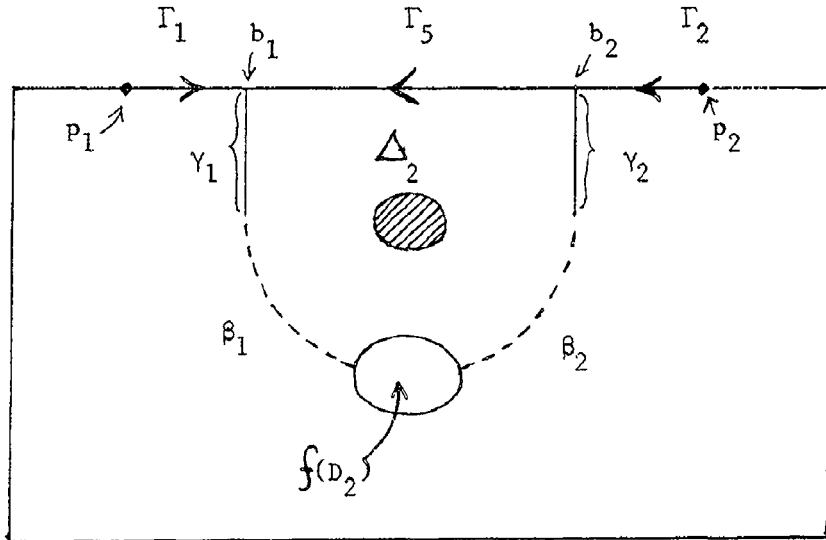
Le résultat de ces glissements, est un 2-polyèdre : $K \subset R_3$ qui peut être décrit (intrinsèquement, c'est-à-dire en oubliant son plongement dans R_3), de la manière suivante : on coupe

$(z = -1, x \geq 0) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_i(\overset{\circ}{D}_2)$ de $(x = 0)$ le long de $\overset{\circ}{a}_1$, et on recolle $a_1 \subset \partial((z = -1, x \geq 0) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_i(\overset{\circ}{D}_2))$ au chemin :

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_3^{-1} + \Gamma_5^{-1} + \Gamma_4 + \Gamma_4^{-1} + \Gamma_2^{-1} \longrightarrow (x = 0) \cup [((x \geq 0) \cap (z = 0)) - \varphi(\overset{\circ}{D}_2) - \cup \varphi(\overset{\circ}{D}_2)]$$

A un difféomorphisme près, ceci donne la même chose que ce qui suit : On considère des sous-ensembles de $(x \geq 0, z = -1) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_i(\overset{\circ}{D}_2)$, comme dans la figure 3.18.2.

Figure 3.18.2. $(x \geq 0, z = -1) - f(\overset{\circ}{D}_2) - \cup g_i(\overset{\circ}{D}_2)$.



On coupe toujours suivant $\overset{\circ}{a}_1$, comme avant, mais on recolle a_1 au chemin $\Gamma_1 + \Gamma_5^{-1} + \Gamma_2^{-1}$ (figure 3.18.2). Ensuite on identifie Γ_3 à γ_1 et Γ_4 à γ_2 . Attention : ceci définit une opération d'espace quotient, et pas un glissement, mais le résultat est difféomorphe au point final de notre chemin glissant, défini avant. On peut donc identifier le résultat de ce passage au quotient, au polyèdre $K \subset R_3$.

On unit les extrémités, libres de γ_1, γ_2 par les arcs β_1, β_2 avec $\partial f(D_2)$ (figure 3.18.2).

On contracte, ensuite, K , le long des segments β_1 et β_2 . Soit $K' \subset R_3$ le résultat de cette opération. A difféomorphisme près, K' peut être décrit (intrinsèquement), comme suit : on considère deux intervalles fermés : $\bar{\Gamma}_3 \subset \Gamma_3, \bar{\Gamma}_4 \subset \Gamma_4$, ayant (respectivement) une

extrémité commune avec Γ_3 (Γ_4), sur ($x = 0 = z$), l'autre dans $\text{int } \Gamma_3$, ($\text{int } \Gamma_4$). L'arc α (de la figure 3.18.1) est censé commencer dans $\partial \bar{\Gamma}_4 - (x = z = 0)$, laisser Δ_2 à sa gauche, et aboutir sur $\partial \varphi(D_2)$ (sans toucher à ℓ^- , ℓ^+ , e.a.d.s.)

On coupe, comme avant ($x \geq 0$, $z = -1$) le long de $\overset{\circ}{a}_1$, on recolle a_1 à $\Gamma_1 + \Gamma_5^{-1} + \Gamma_2^{-1}$, et ensuite, on identifie $\gamma_1 + \beta_1$ à $\bar{\Gamma}_3$, et $\gamma_2 + \beta_2$ à $\bar{\Gamma}_4$.

Enfin, on va dilater K' , strictement, le long des chemins $\mathcal{C}\ell(\Gamma_3 - \bar{\Gamma}_3)$ et α . A difféotopie près, le résultat de ce chemin de Whitehead (qu'on appellera $\text{Ch}(+)$) est $P_2' \subset R_3$.

Le chemin $\text{Ch}(-)$ est défini comme suit : on garde les orientations sur ($x = 0$, $z = -1$), ($x = y = 0$) et on applique $\text{Ch}(+)$, mais en interchangeant les rôles de ($x \geq 0$, $z = 0$) et ($x \geq 0$, $z = -1$). On laisse au lecteur le soin de vérifier que, de cette façon, on obtient bien un chemin de Whitehead reliant $P_2 \subset R_3$ à $P_2' \subset R_3$ (à isotopie près).

On est en mesure, maintenant, de décrire le chemin de Whitehead J (de l'énoncé du lemme 3.18). Ce sera une somme de chemins isomorphes à $\text{Ch}(+)$, plus, des chemins qui ne touchent pas aux cercles $f_i(\partial D_2)$ (voir la définition 3.20).

Choisissons un système de coordonnées (x, y, z) du voisinage de coordonnées R_3 (définition 3.20), tel que : (i) (x, y, z) correspond à notre orientation de M_3 .

(ii) $A \cup B$ est décrit, en coordonnées comme dans la définition 3.20.

(iii) L'orientation sur $A \cap B = ((x = 0) \cap (z = -1))$ définie au début de notre démonstration, correspond à l'orientation croissante des y .

On va introduire les notations suivantes : $B' = B^+ \cup B^-$

où $B^+ = B' \cap (x \geq 0)$ et $B^- = B' \cap (x \leq 0)$. Les $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \cap A'$ (avec $i \neq i_0 = 0$) qui se trouvent du côté $x \geq 0$ seront désignés :

A_1^+, \dots, A_k^+ , où il est entendu que A_{i+1}^+ est au-dessus de A_i^+ . (C'est-à-dire que, si $\theta(A_j^+)$ est l'angle θ_i correspondent à A_j^+ on a :

$\theta(A_{i+1}^+) < \theta(A_i^+)$). De même les $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \cap A'$ qui se trouvent du côté $(x \leq 0)$ seront désignés par : A_1^-, \dots, A_q^- (avec A_{i+1}^- au-dessus de A_i^-). On va désigner par $\varphi_i^+(D_2) \subset A_i^+$ le disque $f_{2i}(D_2)$ ($i \leq (p-1) = k+q$) correspondant à A_i^+ (et par $f_i^+(D_2) \subset B^+$, le disque $f_{2i-1}(D_2)$ ($i \leq (p-1)$) correspondant à A_i^+).

Dans B^\pm on va joindre $\partial f_i^+(D_2)$ à $\partial B^\pm = B^\pm \cap B' = A \cap B$ par deux arcs disjoints $(\lambda_i^\pm)^-$ et $(\lambda_i^\pm)^+$ tels que :

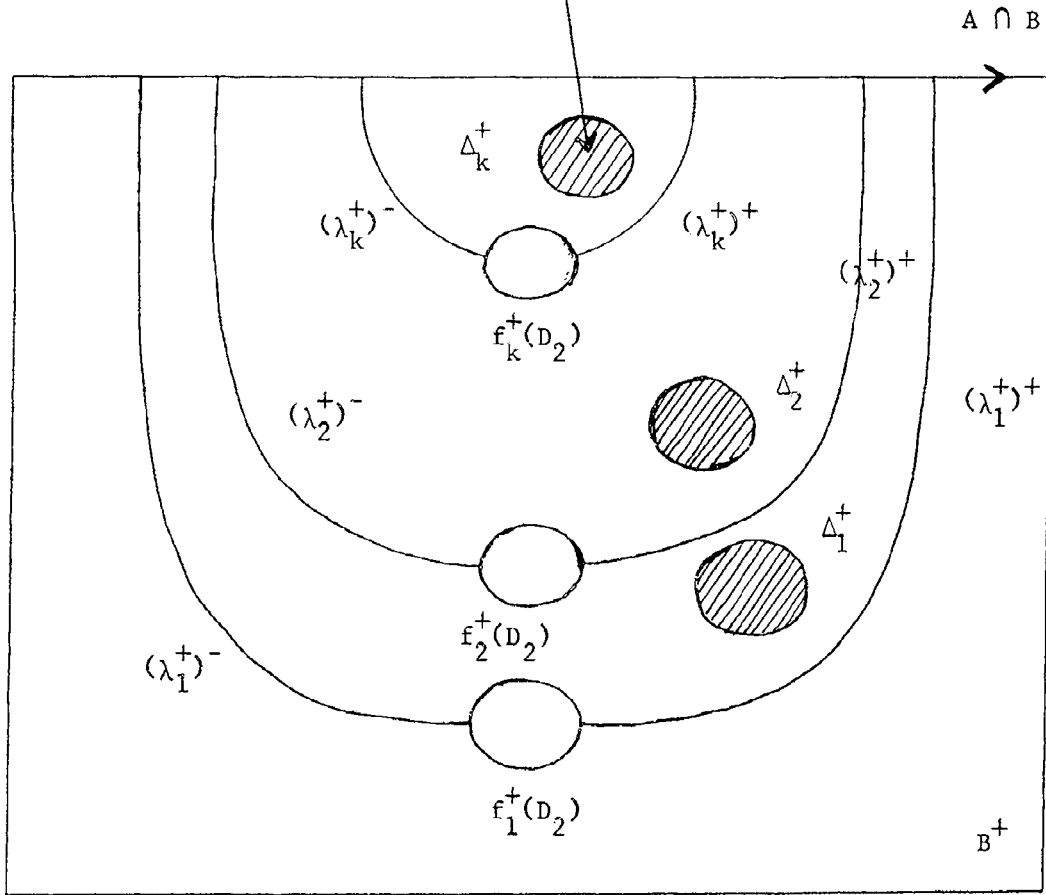
- a) $(\lambda_i^\pm)^-$ est à gauche de $(\lambda_i^\pm)^+$.
- b) $(\lambda_i^\pm)^- + \partial f_i^+(D_2) + (\lambda_i^\pm)^+$ sépare $f_j^+(D_2)$ ($j > i$)

de l'infini.

c) Les $(\lambda_i^\pm)^-$ et $(\lambda_i^\pm)^+$ ne touchent pas aux $f_{2(p-1)+j}(D_2)$. Parmi les $f_{2(p-1)+j}(D_2)$, se trouvent entre $(\lambda_i^\pm)^- + \partial f_i^+(D_2) + (\lambda_i^\pm)^+$ et $(\lambda_{i+1}^\pm)^- + \partial f_{i+1}^+(D_2) + (\lambda_{i+1}^\pm)^+$ exactement ceux qui se trouvent entre λ_ℓ et $\lambda_{\ell+1}$, où : $\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}$ sont les arcs λ_i (définition 3.20) touchés par $f_i^+(D_2), f_{i+1}^+(D_2)$ (qui, on le rappelle sont parmi les $f_{2j-1}(D_2)$ ($j \leq p-1$)). Ceci est représenté dans la figure 3.18.3.

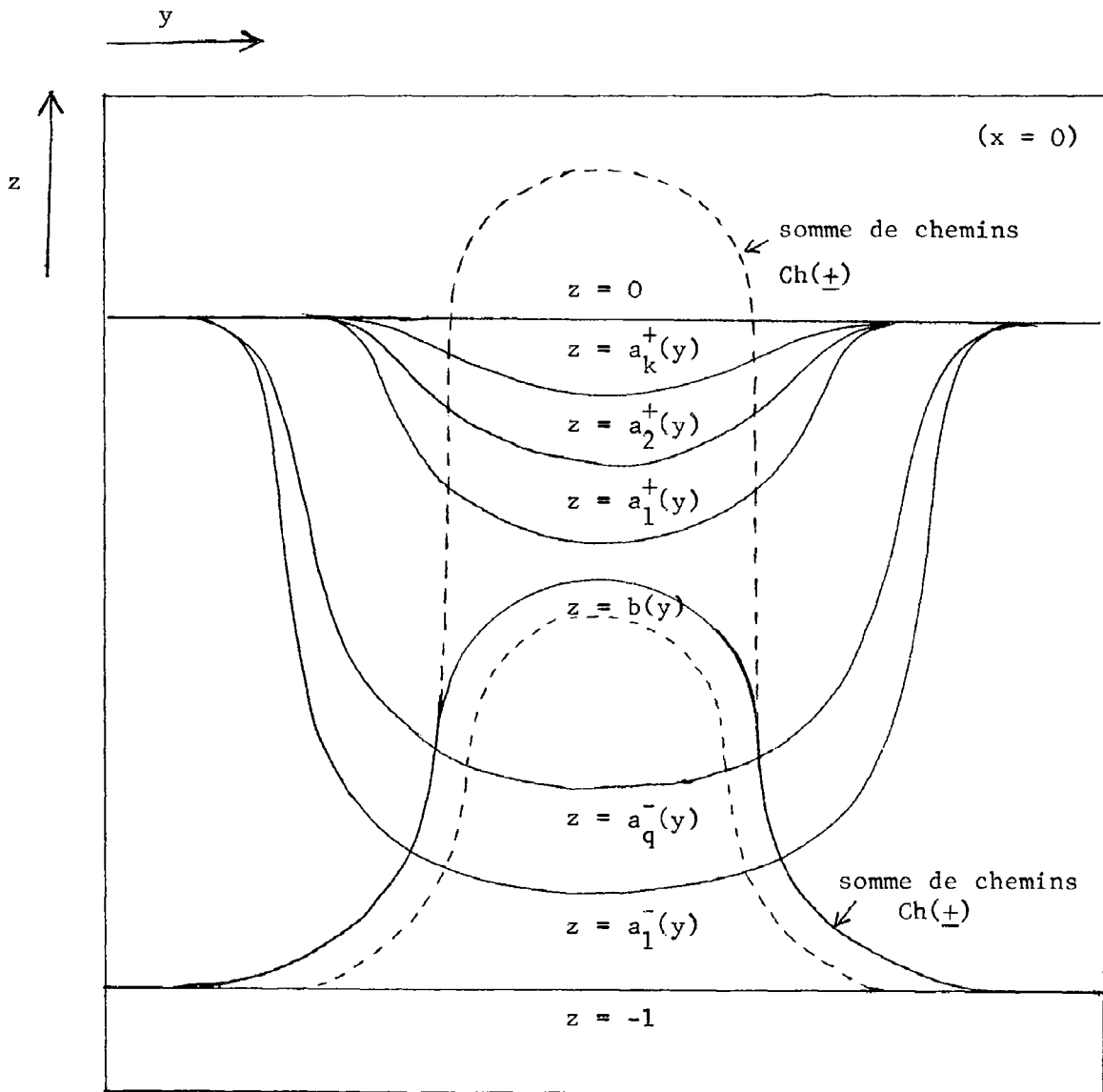
Figure 3.18.3

(tous les $f_{2(p-1)+j}^+(D_2)$ contenus à l'intérieur de $(\lambda_k^+)^- + \partial f_k^+(D_2) + (\lambda_k^+)^+ + A \cap B$ se trouvent ici).



Enfin, dans le plan ($x = 0$) on considère des courbes $C^\infty : z = a_i^+(y)$ ($i = 1, \dots, k$), $z = a_i^-(y)$ ($i = 1, \dots, q$), $z = b(y)$ telles que $a_i^+(y) \equiv 0$ en dehors d'un compact, $b(y) \equiv -1$ en dehors d'un compact, et ayant l'allure décrite par la figure 3.18.4.

Figure 3.18.4.



On glisse maintenant les $A_1^+ \subset A' \cup B'/\Psi(g)$, le long du plan $(x = 0)$ de telle façon que $A_1^+ \cap (x = 0)$ devienne $(z = a_1^+(y)) \cap (x = 0)$. On glisse aussi B^+ de telle façon que $B^+ \cap (x = 0)$ devienne $z = b(y)$.

Après ces glissements, on applique les chemins de Whitehead $Ch(\pm)$ de la manière suivante :

On commence par appliquer le chemin $\text{Ch}(+)$ (respectivement $\text{Ch}(-)$) à B^+ et A_1^+ (qui jouent respectivement les rôles des $(z = -1) \cap (x \geq 0)$, $(z = 0) \cap (x \geq 0)$) si dans la résolution des singularités : $\pi : U_3 \longrightarrow \Theta_3((A \cup B)/\Psi(\hat{g}))$ la branche A_1^+ est spécifiée (respectivement la branche A_1^+ n'est pas spécifiée). Les rôles de $\varphi(D_2)$, ℓ_i^\pm , $\varphi_i(D_2)$, λ_i^\pm , $f(D_2)$, $f_i(D_2)$, sont joués par : $\varphi_1^+(D_2)$, ℓ_i^\pm contenus dans le ℓ_j qui correspond à $\varphi_1^+(D_2)$ (on laisse au lecteur le soin de les expliciter), les $f_{2(p-1)+j}^+(D_2)$ contenus dans A_1^+ , $(\lambda_1^+)^{\pm}$, $f_1^+(D_2)$, et enfin : $\bigcup_{j>1} f_j^+(D_2)$ + tous les $f_{2(p-1)+j}^+(D_2)$ contenus dans B^+ .

Ensuite on applique (de la même façon) le chemin $\text{Ch}(+)$ (respectivement $\text{Ch}(-)$) à B^+ et A_2^+ , A_3^+ , e.a.d.s. Le rôle de λ_i^\pm est joué, chaque fois par $(\lambda_i^+)^{\pm}$.

On fait la même chose pour B^- et les A_i^- .

A la fin, des glissements "inverses" à ceux du début (qui ont fait apparaître les courbes $z = a_i^+(y)$) nous mènent à un sous polyèdre de R_3 qui est, à isotopie près, $A' \cup B' / \Psi(\hat{g}) \subset R_3$.

Il n'est pas difficile de définir ces nouveaux chemins glissants d'une manière canonique. On laisse au lecteur le soin de le faire, et en même temps de s'assurer qu'on a bien obtenu ce qu'on voulait. \square

4.6. Démonstration du lemme 3.19.1.

On va utiliser, à fond, la démonstration du lemme 3.1.8. En se référant aux notations de cette démonstration, considérons le polyèdre $K \subset R_3$ qui est l'une des étapes du chemin de Whitehead $\text{Ch}(+)$, passant de P_2 à P_2' . (On rappelle ici que, suivant la convention (soulignée) de la fin de la démonstration du lemme 3.18, c'est $\text{Ch}(+)$ (resp. $\text{Ch}(-)$) qu'on

choisit quand la branche A (resp. B), est spécifiée). Soit $\bar{K} \subset R_3$, le polyèdre obtenu en contractant K strictement, le long des segments β_1 et β_2 .

Donc, dans \bar{K} , $f(\partial D_2)$ et $\varphi(\partial D_2)$ se coupent transversalement, en deux points, (et, évidemment : $f(\partial D_2), \varphi(\partial D_2) \subset \partial \bar{K}$).

Considérons une sphère $(x^2 + y^2 + z^2 = N) \subset R_3$, telle que N soit très grand, et :

$$(*) \quad P_2 \cap (x^2 + y^2 + z^2 \geq N) \equiv K \cap (x^2 + y^2 + z^2 \geq N) \equiv \\ \equiv \bar{K} \cap (x^2 + y^2 + z^2 \geq N) \quad (\text{identité entre sous-ensembles de } R_3).$$

On va introduire les notations :

$$Q_2 = P_2 \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N) \\ \delta Q_2 = P_2 \cap (x^2 + y^2 + z^2 = N) \\ N_2 = \bar{K} \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N) \\ \delta N_2 = \bar{K} \cap (x^2 + y^2 + z^2 = N) .$$

Soient $\Theta_3(Q_2) \supset Q_2$ et $\Theta_3(N_2) \supset N_2$ construits de telle façon que $\partial Q_2 \subset \partial \Theta_3(Q_2)$, $\partial N_2 \subset \partial \Theta_3(N_2)$. Soient aussi :

$$v(\delta Q_2) \subset \partial \Theta_3(Q_2), \quad v(\delta N_2) \subset \partial \Theta_3(N_2) ,$$

des voisinages réguliers C^∞ de $\delta Q_2, \delta N_2$. A cause des identités (*), écrites ci-dessus, on a un difféomorphisme (unique à isotopie près) :

$$i : v(\delta N_2) \xrightarrow{\approx} v(\delta Q_2) .$$

On considère, aussi, les inclusions canoniques :

$$\Theta_3(Q_2) \subset 2 \Theta_3(Q_2) , \quad \Theta_3(N_2) \subset 2 \Theta_3(N_2) .$$

Un voisinage de $f(\partial D_2) \cup \varphi(\partial D_2) \subset \partial \Theta_3(N_2) \subset 2 \Theta_3(N_2)$, peut être décrit comme suit :

On considère dans $\{(x,y)\} = R_2 = R_2 \times 0 \subset R_3 = \{(x,y,z)\}$ deux cercles S_1, S_2 qui se coupent transversalement en u, v , et $M \subset R_2$ un voisinage régulier de $S_1 \cup S_2$. (Figure 3.19.1.1).

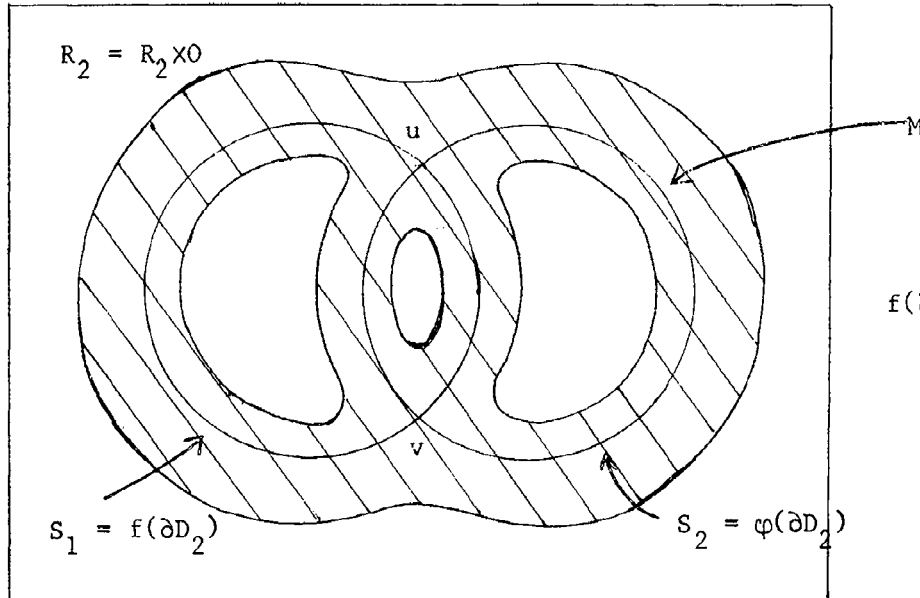


Figure 3.19.1.1.

$$f(\partial D_2) \cup \varphi(\partial D_2) \subset \partial \Theta_3(N_2).$$

On aura un voisinage de $f(\partial D_2) \cup \varphi(\partial D_2)$, $U \subset 2 \Theta_3(N_2)$, et un difféomorphisme :

$$A : (U, U \cap \Theta_3(N_2), U \cap \partial \Theta_3(N_2), f(\partial D_2), \varphi(\partial D_2)) \xrightarrow{\approx} (M \times [-2, 2], M \times [-2, 0], M \times 0 = M, S_1, S_2).$$

Soient $I(u), I(v)$ deux petits arcs de S_1 (qui correspond on le rappelle, à $f(D_2)$) autour de u, v respectivement. On considère deux autres arcs $I'(u), I'(v) \subset S_1 \times [0, -\frac{1}{2}]$ tels que :

$$\partial I'(u) = I'(u) \cap S_1 = \partial I(u),$$

$$\partial I'(v) = I'(v) \cap S_1 = \partial I(v),$$

coupant S_1 transversalement. On va supposer que, $I'(u), I'(v)$ sont coupés par $S_2 \times [0, -1]$, transversalement, dans un seul point chacun.

Considérons, dans $M \times [-2, 2]$ les cercles :

$$\Sigma_1 = S_1 - I(u) - I(v) + I'(u) + I'(v),$$

$$S_2 \times 1 \text{ et } S_2 \times -1 .$$

Dans $2 \text{ @}_3(N_2)$ on va considérer les images réciproques de $\Sigma_1, S_2 \times 1, S_2 \times -1, S_2 \times [0,1], S_2 \times [0,-1]$, (via A^{-1}), qu'on va désigner par les mêmes lettres. $\Sigma_1, S_2 \times 1, S_2 \times -1, S_2 \times [0,1], S_2 \times [0,-1]$, sont définies aussi d'une manière canonique (à isotopie près) dans $2 \text{ @}_3(Q_2)$. De toute façon, dans $2 \text{ @}_3(N_2)$, comme dans $\partial \text{ @}_3(Q_2)$, $S_2 \times 1$ est le résultat de l'opération A_2 (définition 3.18) appliquée à $\varphi(\partial D_2)$.

Remarquons, enfin, que le chemin de Whitehead $Ch(+)$, induit un difféomorphisme D' :

$$D' : (\text{ @}_3(Q_2), \nu(\delta Q_2)) \xrightarrow{\approx} (\text{ @}_3(N_2), \nu(\delta N_2))$$

tel que $D'|_{\nu(\delta Q_2)} = i^{-1}$.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.19.1.1. "Il existe un difféomorphisme (induit par le D' considéré ci-dessus) :

$$D' : (2 \text{ @}_3(Q_2), \text{ @}_3(Q_2), \nu(\delta Q_2), \cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times 1)) \xrightarrow{\approx} (2 \text{ @}_3(N_2), \text{ @}_3(N_2),$$

$$\nu(\delta N_2), \cup \varphi_i(\partial_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times 1)) ,$$

tel que : $D'|_{\nu(Q_2)} = i^{-1}$ et :

$$D'|_{\cup \varphi_i(D_2) + \cup g_j(D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times 1)} = \text{identité.} \square$$

(On remarque que $\cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + (\Sigma_1 \cap S_1)$ est contenu dans $\partial \text{ @}_3(N_2)$ (respectivement, vu nos abus de notation, dans $\partial \text{ @}_3(Q_2)$)).

Démonstration du lemme 3.19.1.1 :

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 2 \otimes_3(Q_2) & \xrightarrow{\quad I \quad} & 2 \otimes_3(Q_2) \\
 \downarrow D' & & \downarrow D' \\
 2 \otimes_3(N_2) & \xrightarrow{\quad I \quad} & 2 \otimes_3(N_2)
 \end{array}$$

où D' est induit par le difféomorphisme D' décrit ci-dessus et I est l'involution canonique.

Par "isotopie", D' induit un difféomorphisme :

$$\begin{aligned}
 (xx) \quad & (2 \otimes_3(Q_2), \otimes_3(Q_2), \nu(\delta Q_2), \cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \\
 & \Sigma_1 + (S_2 \times -1)) \xrightarrow[\approx]{D'} (2 \otimes_3(N_2), \otimes_3(N_2), \nu(\delta N_2), \\
 & \cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times -1)).
 \end{aligned}$$

On remarque ici que $\cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times -1)$ est contenu dans $\otimes_3(Q_2)$ (dans $\otimes_3(N_2)$), et, qu'en fait, le chemin de Whitehead $Ch(+)$ donne lieu, par "isotopie", à un difféomorphisme :

$$\left[\begin{array}{l} \otimes_3(Q_2) \\ \cup \varphi_i(\partial D_2) + \cup g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times -1) \end{array} \right] \xrightarrow[\approx]{D'}$$

$$\left[\begin{array}{l} \Theta_3(N_2) \\ \Theta_3(N_2) \end{array} \right] \begin{array}{l} \swarrow v(\delta N_2) \\ \nwarrow U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times -1) \end{array} \right] .$$

(xx) s'obtient de là, tout simplement en doublant $\Theta_3(Q_2)$ et $\Theta_3(N_2)$.
En appliquant l'involution I (aux $(S_2 \times -1)$ dans (xx),) D' induit aussi un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} (\text{xx}) \quad & (2 \Theta_3(Q_2), \Theta_3(Q_2), v(\delta Q_2), U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \\ & \Sigma_1 + I(S_2 \times -1)) \xrightarrow[\approx]{D'} (2 \Theta_3(N_2), \Theta_3(N_2), \\ & v(\delta N_2), U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + I(S_2 \times -1)) . \end{aligned}$$

Je dis que, dans $2 \Theta_3(N_2)$, (et dans $2 \Theta_3(Q_2)$), l'ensemble $I(S_2 \times -1)$, du difféomorphisme précédent, peut être remplacé par le résultat de l'opération A_2 (déf. 3.18) appliquée à $S_2 \times 0 = S_2 = I(S_2) = \varphi(\partial D_2)$, dans $2 \Theta_3(N_2)$ (et $2 \Theta_3(Q_2)$), (donc par $S_2 \times 1$). Pour cela, on considère les anneaux $S_2 \times [-1,0]$, dans $2 \Theta_3(N_2)$ et dans $2 \Theta_3(Q_2)$. Dans $2 \Theta_3(Q_2)$, l'anneau $S_2 \times [-1,0]$ ne touche pas à $U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1$, mais dans $2 \Theta_3(N_2)$:

$(S_2 \times [-1,0]) \cap (U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1) = (S_2 \times [-1,0]) \cap \Sigma_1$,
consiste de deux points d'intersection transversale. Mais dans $2 \Theta_3(Q_2)$
et dans $2 \Theta_3(N_2)$, l'anneau $I(S_2 \times [-1,0])$ a les propriétés :

- i) $\partial I(S_2 \times [-1,0]) = \varphi(\partial D_2) - I(S_2 \times -1)$. (On remarque ici que $\partial \Theta_3(N_2) (\partial \Theta_3(Q_2))$ est l'ensemble des points fixes de l'involution I).
- ii) $I(S_2 \times [-1,0]) \cap \Theta_3(N_2) = \varphi(\partial D_2)$ et l'intersection est

transversale. La même chose est vraie pour Q_2 .

$$\text{iii) } I(S_2 \times [-1,0]) \cap (U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1) = \emptyset .$$

Ceci nous dit que, dans le difféomorphisme (\tilde{X}) on a bien le droit de remplacer, partout $I(S_2 \times -1)$ par $S_2 \times 1$.

Ceci finit la démonstration du lemme 3.19.1.1. Le lecteur remarquera qu'on ne peut pas demander à D' d'être un difféomorphisme qui transporte $S_2 \times [0,1]$ en $S_2 \times [0,1]$, ni même $\varphi(\partial D_2) = S_2 \times 0$ en $\varphi(\partial D_2)$. Les différentes conjectures, plus fortes que le lemme 3.19.1.1 qu'on est tenté de formuler, se trouvent être fausses...

A partir du lemme 3.19.1.1, on peut démontrer, par des isotopies faciles, le :

Lemme 3.19.1.2. "Considérons le chemin de Whitehead $Ch(+)$ (démonstration du lemme 3.18), qui passe de P_2 à P_2' . Soit :

$$Q_2' = P_2' \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N) .$$

$Ch(+)$ donne lieu à un difféomorphisme $D'' : \mathbb{O}_3(Q_2) \xrightarrow{\approx} \mathbb{O}_3(Q_2')$, qui, à son tour, s'étend à un difféomorphisme :

$$D'' : (2 \mathbb{O}_3(Q_2), \mathbb{O}_3(Q_2), \nu(\delta Q_2), U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) +$$

$$\Sigma_1 + (S_2 \times 1)) \xrightarrow{\approx} (2 \mathbb{O}_3(Q_2'), \mathbb{O}_3(Q_2'), \nu(\delta Q_2'),$$

$$U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times 1))$$

tel que $D''|_{\nu(\partial D_2)}$ soit compatible avec l'identification naturelle :

$$\delta Q_2 \equiv \delta Q_2' \text{ et } D''|_{U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 + (S_2 \times 1)} = \text{identité} . \square$$

On remarque, enfin que le difféomorphisme D'' reste valable si on applique à $U \varphi_i(\partial D_2) + U g_j(\partial D_2) + \Sigma_1 \cap \partial \mathbb{O}_3(Q_2)$ (respectivement $\Sigma_1 \cap \partial \mathbb{O}_3(Q_2')$), les mêmes opérations A_1 (définition 3.18), dans $2 \mathbb{O}_3(Q_2)$ comme dans $2 \mathbb{O}_3(Q_2')$.

En utilisant cette remarque et la démonstration du lemme 3.18, le lemme 3.19.1 résulte sans difficulté.

4.7) Démonstration du lemme 3.20.

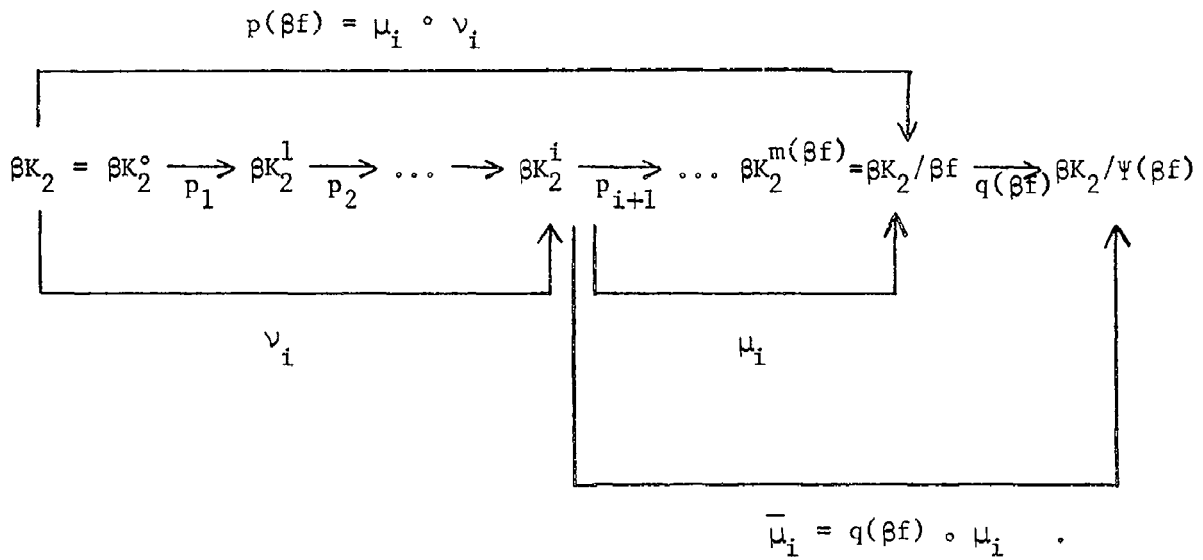
Il est utile de remarquer que, d'une façon générale, dans la démonstration qui suit, notre K_2 sera considéré comme source de l'application h (et de différentes autres applications déduites à partir de h par isotopies et glissements) et pas de f .

Les points doubles $M^2(f)$ seront considérés, comme un sous-ensemble de K_2 , muni d'une relation d'équivalence, $\Psi(f)$; ils coexistent avec les points doubles de h , $M^2(h)$, et c'est à partir de cette coexistence que notre construction va procéder. h est "bien connu"; à peu de choses près c'est la même chose que $K_2 \xrightarrow{\text{identité}} K_2$, tandis que f est (ou peut être), aussi compliquée que l'on veut.

Par des isotopies et des glissements élémentaires (qui en vertu du lemme 3.19.1 "ne changent rien"), on va essayer, non pas de rendre h comme f (ce qui serait impossible), mais à faire en telle sorte que " h se factorise par f " (à droite).

La démonstration qui suit va rendre précis et rigoureux ce préliminaire "heuristique".

On commence par considérer la séquence principale donnée au point C) du lemme 3.20. On va "détailler" $p(\beta f)$, en mettant en évidence les différentes projections d'espace quotient (de type $0(0)$, $0(1)$) qui le composent :



On va montrer qu'ils existent des nombres n_j (voir l'énoncé du lemme 3.20), tels que, si $N \geq \sum n_j$, ils existent :

I. N plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints :

$$\lambda_j^i : D_2 \longrightarrow (\beta K_2^i)_2 - M^2(\bar{\mu}_i)$$

($j \in (1, 2, \dots, N)$, $0 \leq i \leq m(\beta f)$), tels que les $\lambda_j^i(D_2)$ ne touchent pas à l'image canonique des bourgeons ($= (\beta K_2 - K_2)$), et tels que la propriété 1 - 1) de l'énoncé du lemme 3.20 soit satisfaite.

On va considérer les ensembles :

$${}_i X_1 = \beta K_2 - \bigcup_j \lambda_j^i(\overset{\circ}{D}_2) \quad (\text{où } \overset{\circ}{D}_2 = \text{int } D_2)$$

$${}_i X_2 = \beta K_2^i - \bigcup_j \lambda_j^i(\overset{\circ}{D}_2)$$

II. Ils existent, aussi, des immersions génériques, qu'on va construire :

$$h_i : {}_i X_1 \longrightarrow \mathcal{O}_3(K_2')$$

Les propriétés suivantes seront satisfaites :

1°. $\lambda_j^0 = \ell_j$; on a donc des difféomorphismes ${}_0X_1 \cong {}_0X_2 = \beta \bar{X}_1$.

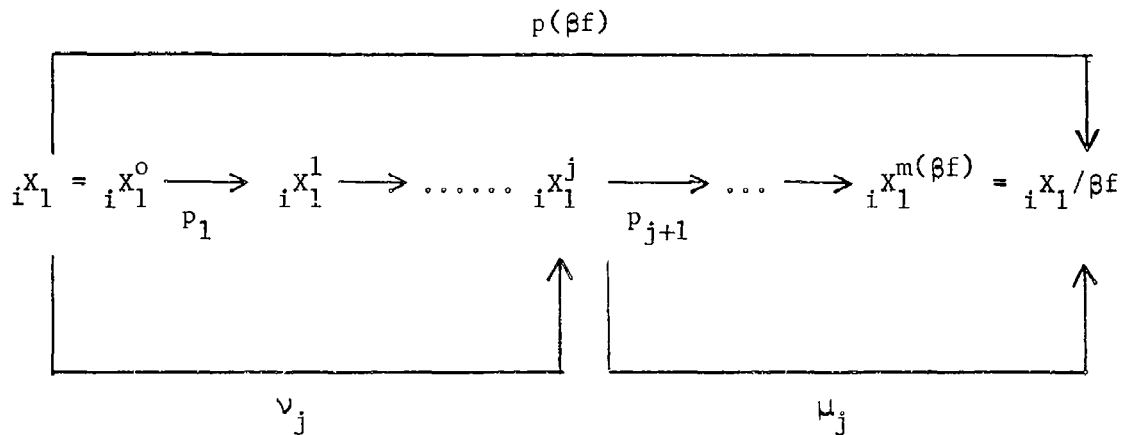
En plus $h_0 = \beta h : \beta \bar{X}_1 \longrightarrow \Theta_3(K_2^i)$.

2°. $\Psi(h_i)$ est acyclique.

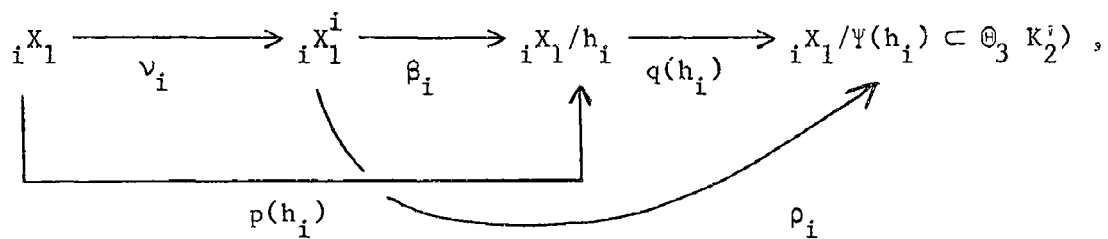
3°. On considère le 2-polyèdre singulier $({}_iX_1, \beta f, M_3)$ et sa séquence principale :

$${}_iX_1 \xrightarrow{p(\beta f)} {}_iX_1/\beta f \xrightarrow{q(\beta f)} {}_iX_1/\Psi(\beta f) \subset M_3 .$$

(On rappelle que $\lambda_j^1(D_2)$ ne touche jamais à $M^2(\beta f)$). Correspondant au "détailement" de $p(\beta f)$ pour βK_2 , on a :



Il existe une séquence principale de $({}_iX_1, h_i, \Theta_3(K_2^i))$, admettant ${}_iX_2 = {}_iX_1^i$ comme étape intermédiaire entre ${}_iX_1$ et ${}_iX_1/h_i$:



avec les propriétés suivantes :

3°. a) L'ensemble

$$M^3(\rho_i) \subset {}_i X_1^i = {}_i X_2$$

est vide.

3°. b) $M^2(\rho_i)$ et $M^2(\bar{\mu}_i)$ se coupent transversalement (dans ${}_i X_2$).

3°. c) Si $x, y \in M^2(\bar{\mu}_i) \subset {}_i X_2$ et si $x \neq y$, alors :

$$\rho_i(x) \neq \rho_i(y).$$

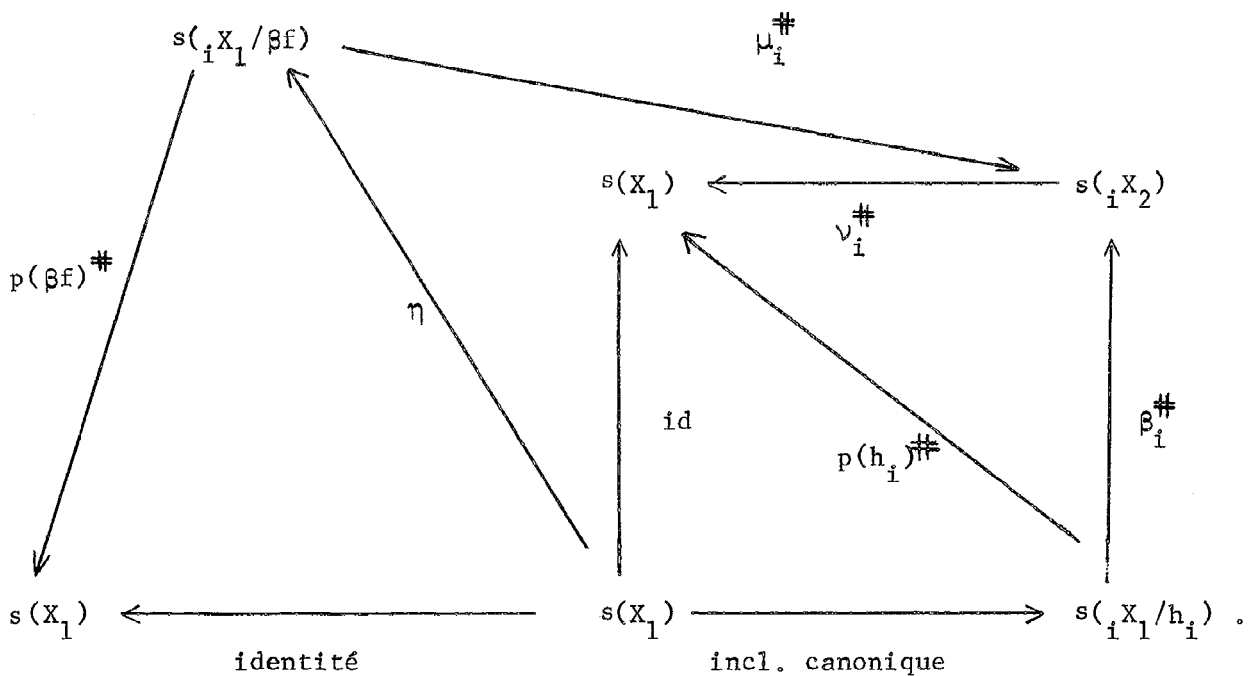
3°. d) On remarque que la propriété 1-1) de I nous donne un difféomorphisme canonique (à isotopie près) : ${}_i X_1 = {}_{i+1} X_1$.

On passe de $({}_i X_1, h_i, \otimes_3(K_2^i))$ à $({}_{i+1} X_1, h_{i+1}, \otimes_3(K_2^i))$, par un nombre fini (peut-être 0) de glissements élémentaires, et d'isotopies.

Ceci nous fournit, entre autres, une inclusion canonique :

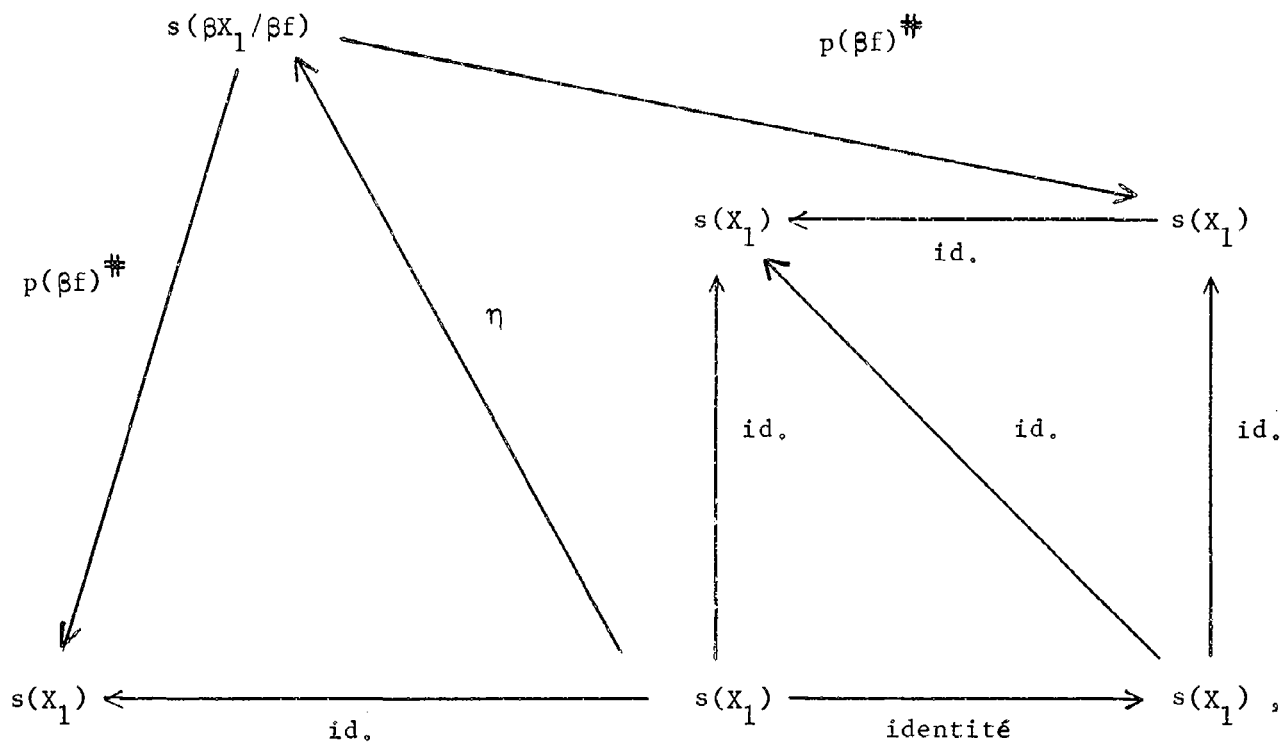
$$\begin{aligned} s({}_i X_1/h_i) \supset s({}_0 X_1/h_0) &= s(\beta X_1) = s(X_1) = s(\bar{X}_1) = s({}_i X_1) = \\ &= s(K_2) = s(\beta K_2) . \end{aligned}$$

3°. e) On a un diagramme commutatif :



(On remarque que $s({}_i X_1 / \beta f) = (\beta \bar{X}_1 / \beta f)$, e.a.d.s.)

Remarque. Au cran $i = 0$ le diagramme ci-dessus est (trivialement) commutatif, puisqu'il peut-être identifié à :



et η est une inverse de $p(\beta f)^\#$.

Je dis que, si l'on réussit à faire une construction (inductive) comme ci-dessus, le lemme 3.20 est démontré.

En effet, il suffit, à ce moment-là, de poser :

$$X_2 = m(\beta f) X_1^{m(\beta f)} = m(\beta f) X_1 / \beta f ,$$

$$f_1 = \rho_{m(\beta f)} ,$$

$$\text{et } \lambda_j = \lambda_j^{m(\beta f)} : D_2 \longrightarrow (K_2/f)_2 \subset (\beta K_2^{m(\beta f)})_2 .$$

(Ceci implique donc, que :

$$p(f_1) = \beta_{m(\beta f)} , \quad X_3 = m(\beta f) X_1 / h_{m(\beta f)} , \quad q(h_{m(\beta f)}) = q(f_1), \text{ e.a.d.s.}) .$$

La condition 1-1), pour les plongements λ_j est satisfaite ; on remarque que ;

$$\begin{aligned} X_2 &= m(\beta f) X_2 = \beta K_2 / \beta f - \cup \text{int } (\lambda_i(D_2)) = \\ &= \underbrace{\beta(K_2 - \cup \text{int } (\lambda_i(D_2)))}_{\text{par définition}} / \beta f \\ &= \beta X_1 \quad (\text{par définition}). \end{aligned}$$

Ceci est le difféomorphisme du point 1 - 2) de l'énoncé du lemme 3.20.

D'autre part, 2° implique 2), 3° - a) et 3° - b) impliquent 3), et 3° - d) implique 4).

Reste à prouver le point 5) de l'énoncé du lemme 3.20.

En regardant le diagramme 3° - e), au cran $i = m(\beta f)$, on s'aperçoit facilement qu'il contient le diagramme 5) (lemme 3.20, puisque :

$$\beta_{m(\beta f)} = p(f_1), \quad \mu_{m(\beta f)} = \text{identité},$$

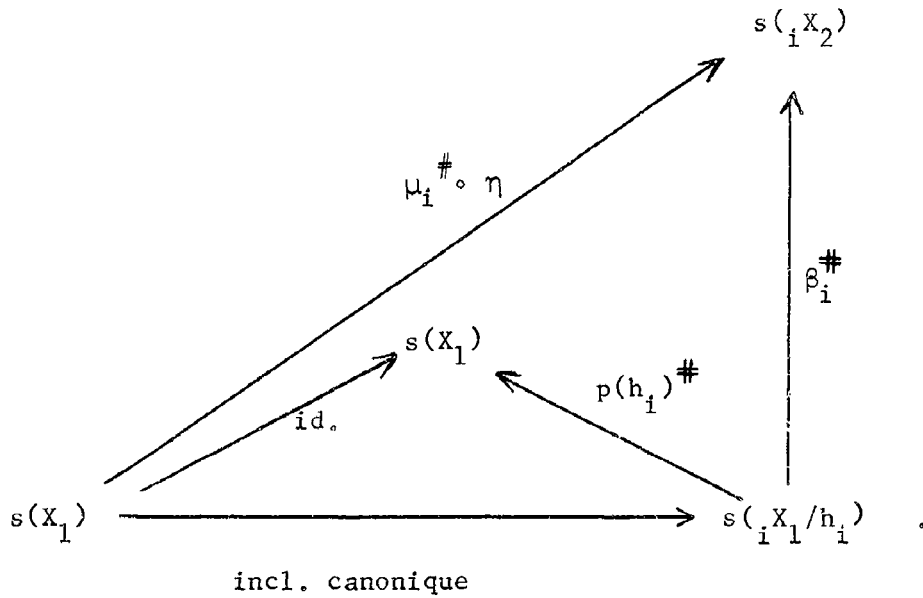
$$\nu_{m(\beta f)} = p(\beta f), \quad \text{e.a.d.s.}$$

Donc, si les λ_j^i , h_i sont construits, pour tout $i \leq m(\beta f)$ (en particulier, pour $i = m(\beta f)$), le lemme 3.20 est démontré.

Pour ce qui suit, on a intérêt à reformuler le point 3° - e).

On remarque que 3° - e) est équivalent à :

3° - e'). Le diagramme suivant est commutatif :



En effet, $3^\circ - e')$ fait partie de $3^\circ - e)$ et le reste de $3^\circ - e)$ est commutatif, comme conséquence immédiate des définitions.

Les h_i pourront être construits par induction, mais pas les λ_j^i , pour lesquels il faudra tenir compte de tous les p_i à la fois.

Pour pouvoir le faire, on commence par :

UNE CONSTRUCTION PRELIMINAIRE : On commence par reconsidérer la définition 3.20, mais en oubliant L_2 et en se concentrant sur K_2 . Le passage de (K_2, f, M_3) à (K_2, f_H, M_3) s'appellera, un sur-glissement élémentaire. Pour fixer le langage, on va appeler H ce surglissement élémentaire. On va comparer les éléments de $(K_2/\Psi(f))_2$ et $(K_2/\Psi(f_H))_2$. En utilisant les notations de la définition 3.20, on commence par considérer les composantes connexes de $(f(A) \cup f(B))_2 \subset R_3$:

$(x = 0) \cap (z < -1), (x = 0) \cap (-1 < z < 0), (x < 0) \cap (z = -1), \dots\dots\dots$

Les composantes connexes auxquelles elles correspondent dans $(K_2/\Psi(f))_2$, seront désignés par les mêmes symboles, précédés de la lettre D :

$D((x = 0) \cap (z < 1)), \dots$. Donc D peut être considérée comme "l'inclusion canonique" :

$$\pi_0((f(A) \cup f(B))_2) \xrightarrow{D} \pi_0((K_2/\Psi(f))_2),$$

qui n'est, d'ailleurs, pas nécessairement injective. (On pourrait, par exemple, très bien avoir :

$$D((x = 0) \cap (z < -1)) = D((x = \theta_1 z) \cap (z > 0)) \text{ e.a.d.s.)} .$$

On va préciser maintenant les composantes connexes de $(f_H(A) \cup f_H(B))_2 \subset R_3$. Chaque composante connexe de $f_H(B) - f_H(A) \cap f_H(B)$ est une composante connexe de $(f_H(A) \cup f_H(B))_2$. Il y en a exactement deux dont la fermeture n'est pas compacte, provenant de $(x < 0) \cap (z = -1)$ et de $(x > 0) \cap (z = -1)$. On va les désigner respectivement par :

$H((x > 0) \cap (z = -1))$ et $H((x < 0) \cap (z = -1))$. Les composantes connexes de $f_H(B) - f_H(A) \cap f_H(B)$ qui ont la fermeture compacte et qui sont du même côté de $(x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0)$ que $H((x > 0) \cap (z = -1))$ seront désignées par : $H_1((x > 0) \cap (z = -1)), H_2((x > 0) \cap (z = -1)), \dots$.

Enfin, celles qui restent, seront désignées par : $H_1((x < 0) \cap (z = -1)), H_2((x < 0) \cap (z = -1)), \dots$. Les trois composantes connexes de

$(x = 0) \cap (z \leq 0) - f_H(A)$ sont aussi des composantes connexes de $(f_H(A) \cup f_H(B))_2$. Celle qui "provient de $(x = 0) \cap (z < -1)$ " sera désignée par $H((x = 0) \cap (z < -1))$, les deux autres par :

$H_1((x = 0) \cap (-1 < z < 0)), H_2((x = 0) \cap (-1 < z < 0))$. Enfin chaque $(x = \theta_i z) \cap (z > 0)$, donne lieu à deux composantes connexes de

$(f_H(A) \cup f_H(B))_2$, l'une dont la fermeture n'est pas compacte, désignée par : $H_\infty((x = \theta_i z) \cap (z > 0))$; l'autre sera désignée par $H_0((x = \theta_i z) \cap (z > 0))$.

L'opération qui consiste à oublier les lettres $H, H_0, H_1, \dots, H_\infty$, définit une application :

$$\varphi(H) : \pi_0((f_H(A) \cup f_H(B))_2) \longrightarrow \pi_0((f(A) \cup f(B))_2).$$

On va désigner par D (comme tout à l'heure) l'inclusion canonique :

$$D : \pi_0((f_H(A) \cup f_H(B))_2) \longrightarrow \pi_0((K_2/\Psi(f_H))_2).$$

Je dis que, si $x, y \in \pi_0((f_H(A) \cup f_H(B))_2)$ sont tels que $D(x) = D(y) \in \pi_0((K_2/\Psi(f_H))_2)$, alors :

$$D(\varphi(H)(x)) = D(\varphi(H)(y)) \in \pi_0((K_2/\Psi(f))_2).$$

La démonstration est laissée au lecteur, (qui pourra se convaincre, aussi, que la réciproque est fausse).

On peut construire alors une application $\Phi(H)$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0((f_H(A) \cup f_H(B))_2) & \xrightarrow{D} & \pi_0((K_2/\Psi(f_H))_2) \\ \downarrow \varphi(H) & & \downarrow \Phi(H) \\ \pi_0((f(A) \cup f(B))_2) & \xrightarrow{D} & \pi_0((K_2/\Psi(f))_2) \end{array} ,$$

avec les deux propriétés suivantes :

- 1) le diagramme ci-dessus est commutatif.
- 2) On commence par remarquer que :

$$K_2/\Psi(f) - R_3 \equiv K_2/\Psi(f_H) - R_3 \subset M_3$$

(égalité entre sous-ensembles de M_3). On veut que, en dehors de l'image de D , $\Phi(H)$ coïncide avec :

$$\pi_0(K_2/\Psi(f) - R_3) \equiv \pi_0(K_2/\Psi(f_H) - R_3) .$$

(Ceci est la propriété 2)).

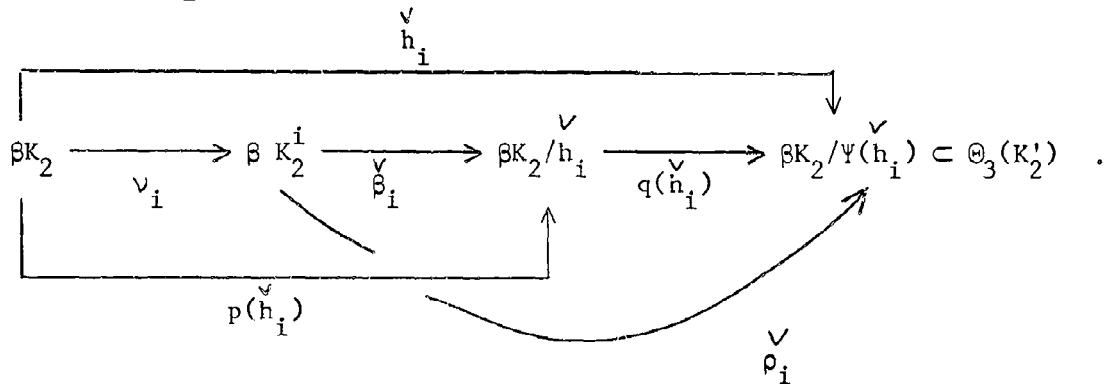
On revient maintenant au "détailement" de $p(\beta f)$ (Voir le début de la démonstration) ; Notre CONSTRUCTION PRELIMINAIRE va donner (canoniquement) pour chaque i , une immersion générique :

$$h_i^v : \beta K_2 \longrightarrow \Theta_3(K_2^i) ,$$

telle que :

1°. $h_0^v = \beta h$.

2°. Il existe une séquence principale de $(\beta K_2, h_i^v, \Theta_3(K_2^i))$, admettant βK_2^i comme étape intermédiaire :



3°. $M^3(v_{\rho_i}) = \emptyset$, (mais $\Psi(v_{\rho_i})$ ne sera pas, en général, acyclique).

4°. $M^2(v_{\rho_i})$ et $M^2(\bar{\mu}_i)$ se coupent transversalement dans βK_2^i .

5°. Si $x, y \in M^2(\bar{\mu}_i) \subset \beta K_2^i$, et si $x \neq y$, alors : $v_{\rho_i}(x) \neq v_{\rho_i}(y)$.

6°. On passe de $(\beta K_2, h_i^v, \Theta_3(K_2^i))$ à $(\beta K_2, h_{i+1}^v, \Theta_3(K_2^{i+1}))$, par un nombre fini d'isotopies et de surglissements élémentaires.

7°. Pour pouvoir énoncer le point 7°, il nous faudra donner quelques définitions préliminaires. On va commencer par considérer un 2-polyèdre singulier (P_2, h, M_3) , tel que $\Psi(h)$ soit acyclique, une séquence principale :

$$P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2/h \xrightarrow{q(h)} P_2/\Psi(h),$$

et une succession : $\Sigma = \{(p_{i_1}, \chi(p_{i_1})), \dots, (p_{i_\ell}, \chi(p_{i_\ell}))\}$ (définition 3.26).

Je rappelle que $\chi(p_{i_j})$ est une paire qui consiste du germe de l'une des branches $(x = \theta_{i_j} z) \cap (z \geq 0)$ correspondant à p_{i_j} (celle dont le germe est $[\Sigma \rightarrow p_{i_j}]$) et d'une projection de type $O(1)$ (le p_α de la définition 3.26), qu'on va appeler $p_{\alpha(i_j)}$, qui succède à p_{i_j} , de telle façon qu'on ait :

$$\sigma(p_{\alpha(i_j)}) = (p_{i_j}^\#)^{-1} (\sigma(p_{i_j})) \cap \left[(x = \theta_{i_j} z) \cap (z \geq 0) \right].$$

La partition canonique de la succession Σ , est, par définition, une décomposition en morceaux 2-à-2 disjoints :

$$\begin{aligned} \{i_1, \dots, i_\ell\} &= \\ &= \{i_{\beta(1,1)}, i_{\beta(1,2)}, \dots, i_{\beta(1,\ell(1))}\} + \\ &+ \{i_{\beta(2,1)}, i_{\beta(2,2)}, \dots, i_{\beta(2,\ell(2))}\} + \dots \\ &+ \{i_{\beta(k,1)}, i_{\beta(k,2)}, \dots, i_{\beta(k,\ell(k))}\}, \text{ où :} \end{aligned}$$

a) $\ell(1) + \dots + \ell(k) = \ell$ et :

$$\beta(j,1) < \beta(j,2) < \dots < \beta(j, \ell(j)).$$

b) $p_{i_{\beta(j, n+1)}} = p_{\alpha(i_{\beta(j,n)})}$

pour : $2 \leq n+1 \leq \ell(j)$.

c) $p_{\alpha(i_{\beta,\ell(j)})}$ n'est jamais l'une des projections $p_{i_1}, \dots, p_{i_\ell}$ de la succession Σ .

On va écrire maintenant, par abus de notation, $\beta(n,m) \in \mathbb{Z}^+$ au lieu de $i_{\beta(n,m)}$. La partition canonique existe et est unique. Elle induit une partition canonique : $\Sigma = \Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$.

Soit maintenant $P_2^{i'-1} \xrightarrow{P_{i'}} P_2^{i'}$ l'une des projections (du type $O(0)$ ou $O(1)$) qui constituent $p(h)$. On va désigner par $\Sigma|i' \subset \Sigma$, l'ensemble des $(p_{i_j}, \chi(p_{i_j})) \in \Sigma$ avec $i_j \leq i'$. D'une manière similaire on va définir : $\Sigma_n|i' = \Sigma_n \cap (\Sigma|i')$.

Enfin, si l'on considère $p_j \in \Sigma$:

$$P_2^{j-1} \xrightarrow{P_j} P_2^j,$$

on va noter par $[p_j]$ l'intervalle fermé unique contenu dans $p_j(M^2(p_j)) \subset P_2^j$, d'extrémités $\sigma(p_j)$ et $\sigma(p_{\alpha(j)})$.

Lemme 3.20.1. "Soit $P_{i+1}^i : P_2^i \longrightarrow P_2^{i+1}$ l'une des projections de $p(h)$ comme avant, et pour chaque $\Sigma_j|i$, l'ensemble $L(j,i) \subset P_2^i$ défini par :

$L(j,i) =$ la réunion des images des $[p_{\beta(j,n)}]$, $\beta(j,n) \leq i$ dans P_2^i .

Alors, la restriction de la projection canonique $P_2^{\beta(j,n)} \longrightarrow P_2^i$ à $[p_{\beta(j,n)}]$ est un plongement, et les

$$L(j,i) = \bigcup_{\beta(j,n) \leq i} [p_{\beta(j,n)}] \subset P_2^i$$

sont des intervalles fermés, 2-à-2 disjoints." \square

La démonstration est facile ; elle se fait par induction ; on utilise le fait que (d'après la définition des successions) les $[p_{\beta(j,n)}]$ ne touchent jamais à

$$M^3(\bar{\mu}_{\beta(j,n)}) = M^3(\dots \circ p_{\beta(j,n)+2} \circ p_{\beta(j,n)+1}) .$$

Soit :

$$L(j,i) = [p_{\beta(j,1)}] + [p_{\beta(j,2)}] + \dots + [p_{\beta(j,w)}],$$

(où $\omega = \omega(j,i)$). On remarque que :

$$\partial L(j,i) = \sigma(p_{\alpha(\beta(j,\omega))}) - \sigma(p_{\beta(j,1)}) .$$

On dira que $L(j,i)$ est maximal si $L(j,i) = L(j,i+1) = L(j,i+2) = \dots$ e.a.d.s.

Si $L(j,i)$ n'est pas maximal :

$$\alpha(\beta(j,\omega)) \geq i + 1 \quad (\text{mais pas r\u00e9ciproquement}),$$

parce que, si $L(j,i)$ n'est pas maximal (et seulement dans ce cas l\u00e0)

$P_{\alpha(\beta(j,\omega))}$ appartient \u00e0 Σ , donc \u00e0 Σ_j .

Ces pr\u00e9liminaires une fois finis, on peut \u00e9noncer le point 7\u00b0.

On consid\u00e8re maintenant la succession Σ du lemme 3.20, et :

$$\bigcup_j L(j,i) \subset \beta K_2^i \xrightarrow{\rho_i^\vee} \Theta_3(K_2^i) .$$

Le point 7\u00b0) dit, d'une part, que $\rho_i^\vee | \bigcup_j L(j,i)$ est un plongement, d'autre part, qu'ils existent des voisinages (de coordonn\u00e9es) $R_3^j \subset \Theta_3(K_2^i)$, 2-\u00e0-2 disjoints, contenant (respectivement) les $L(j,i)$, tels que si

$\alpha(\beta(j, \omega(j,i))) \geq i + 1$, le 2-poly\u00e8dre singulier :

$$\rho_i^{\vee-1}(R_3^j) \xrightarrow{\rho_i^\vee} R_3^j \subset \Theta_3(K_2^i)$$

puisse \u00eatre d\u00e9crit comme suit :

Dans R_3^j on consid\u00e8re des coordonn\u00e9es (x,y,z) , avec $-1 < y < +1$ et les sous-ensembles qu'on va d\u00e9crire ci-dessous.

Dans $(y = 0)$ on consid\u00e8re les droites :

$(z = 1) \cap (y = 0), \dots, (z = N) \cap (y = 0)$. Dans $(x,y,z) = R_3^j$ on consid\u00e8re des demi-plans (images d'un plongement lin\u00e9aire $R_2^+ \hookrightarrow R_3^j$) :

$\Delta_1, \dots, \Delta_n$, tels que :

$$(i) \quad \cup \partial \Delta_i = \bigcup_{j=1}^N (z = j) \cap (y = 0) .$$

$$(ii) \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \partial \Delta_i \cap \partial \Delta_j \quad (\text{si } i \neq j) .$$

$$(iii) \quad \Delta_i \cap (y = 0) = \partial \Delta_i \quad (\text{donc, } \Delta_i \text{ coupe } (y = 0) \text{ transversalement}).$$

On va supposer que l'angle entre Δ_i et le plan horizontal $(z = 0)$ est "très petit".

On considère aussi un plongement propre : $H : R \longrightarrow (y = 0)$, tel que

$$H(R) \cap (y = x = 0) = H((-\infty, 0]) = (y = x = 0) \cap (z \leq N+1).$$

On va supposer que $H(R)$ coupe chaque plan $z = i$ ($i = 1, \dots, N$) transversalement, en deux points.

Le point 7° dit que le polyèdre singulier :

$$(\rho_i^{-1}(R_3^j), \rho_i \mid \rho_i^{-1}(R_3^j), R_3^j), \text{ est isomorphe à :}$$

$$[(y = 0) \cup (\bigcup_k \Delta_k)] \oplus \underbrace{[(-1 < y < 1), (x, y) \in H(R)]}_{(y=x=0) \cap (z \leq N+1)}, \pi, R_3^j$$

où π est induite par les plongements naturels :

$$(y = 0) \cup (\bigcup_k \Delta_k) \subset R_3^j \supset (-1 < y < +1, (x, z) \in H(R)). \text{ De plus, } \nu_i M^2(\beta f) \cap \rho_i^{-1}(R_3^j), \text{ est décrit par :}$$

$$a) \quad (y = x = 0) \cap (z \leq N + 1) \subset \nu_i M^2(\nu_i) \subset$$

$$((y = x = 0) \cap (z \leq N + 1)) \cup \bigcup_{j=1}^N ((z = j) \cap (y = 0)).$$

$$b) \quad L(j, i) = (y = x = 0) \cap (0 \leq z \leq N+1) .$$

$$c) \quad (0, 0, 0) = s(p_{\beta(j, 1)}) \text{ et } (0, 0, N+1) = s(p_{\alpha(\beta(j, i))}) = \\ = \rho_i \nu_i (s(\beta K_2^i)) \cap R_3^j .$$

$$d) \quad \nu_i M^2(\bar{\mu}_i) \cap \nu_i^{-1}(R_3^j) = ((x=y=0) \cap (z \geq N+1)) \cup h(0, \infty)$$

où $h : [0, \infty) \longrightarrow (-1 < y < +1, (x, z) \in H(\mathbb{R}))$ est un plongement propre, tel que :

$$d - 1) \quad h(0) = (x = 0, y = 0, z = N + 1) ,$$

$$d - 2) \quad h([0, \infty)) \text{ coupe transversalement les } \Delta_i$$

et le plan $(y = 0)$.

$$d - 3) \quad h(0, \infty) \cap (z \geq 0) \cap ((y = 0), (x, z) \in H(\mathbb{R})) = \emptyset.$$

Ceci finit la description du point 7°.

On va construire, maintenant, les ν_i , par induction. On suppose que le polyèdre $(\beta K_2, \nu_i, \Theta_3(K_2^i))$ est déjà construit. On va traiter séparément les cas où p_{i+1} est du type $0(0)$ ou $0(1)$.

Le cas où p_{i+1} est du type $0(0)$: On commence par considérer la suite :

$$\beta K_2^i \xrightarrow{p_{i+1}} \dots \beta K_2^j \xrightarrow{p_{j+1}} \beta K_2^{j+1} ,$$

où p_{j+1} est la première projection de la séquence principale de βK_2 , venant après p_{i+1} , et qui ne soit pas du type $0(0)$ (elle est du type $0(1)$ ou $0(2)$). Soit $y = \sigma(p_{i+1}) \in s(\beta K_2^i)$. Parmi les deux branches de $M_y^2(p_{i+1})$ (définition 3.19) on va en "spécifier" une, de la façon suivante : (ceci est nécessaire seulement pour la canonicité de notre construction).

On considère $x = \sigma(p_{j+1}) \in s(\beta K_2^j)$ et l'isomorphisme canonique :

$$\pi_o(M_x^2(p_{j+1})) \xrightarrow{\approx} \pi_o(M_y^2(p_{i+1})) .$$

Si p_{j+1} est du type $0(2)$, la résolution des singularités

$\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(\beta K_2 / \beta F)$ (du point D) de l'énoncé du lemme 3.20), spécifie l'une des deux branches de $M_x^2(p_{j+1})$. On va "spécifier" la branche correspondante de $M_y^2(p_{i+1})$. Si p_{j+1} est du type $0(1)$, on va "spécifier" la branche de $M_y^2(p_{i+1})$ qui correspond à l'unique composante connexe de $M_x^2(p_{j+1})$ contenant

des points où βK_2^j ne soit pas localement homéomorphe à R_2 .

Soit maintenant $I \subset \beta K_2^i$ l'intervalle fermé déterminé par $\hat{M}^2(p_{i+1})$. On va supposer que $\frac{1}{2} \in I$ correspond à $\sigma(p_{i+1}) = y$. Dans tous les points de $I - (\frac{1}{2})$, βK_2^i est localement comme R_2 . D'après le point 5° ci-dessus

$$\overset{v}{\rho}_i | I : I \longrightarrow \mathbb{O}_3(K'_2)$$

est un plongement. On va travailler maintenant dans un petit voisinage de $\overset{v}{\rho}_i(I) \subset \mathbb{O}_3(K'_2)$. Dans βK_2^i , on a un nombre fini d'intersections transversales disjointes : $I \cap M^2(\overset{v}{\rho}_i)$ et $I \cap M^2(\beta f) = I \cap M^2(\mu_i)$

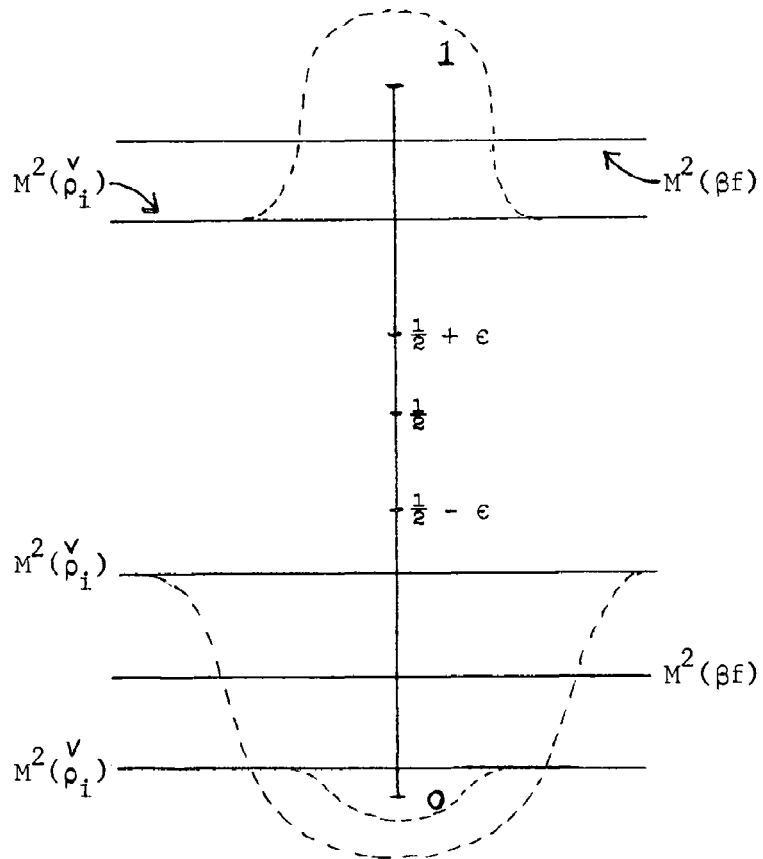


Figure 3.20.1.

$$\hat{M}^2(p_{i+1}) \subset \beta K_2^i$$

On peut considérer un difféomorphisme $d_i : \beta K_2 \longrightarrow \beta K_2$ avec son support dans un petit voisinage de $[0, \frac{1}{2} - \epsilon] \cup [\frac{1}{2} + \epsilon, 1] \subset (\beta K_2)_2$ et qui élimine les intersections de $M^2(\overset{v}{\rho}_i)$ avec I , en les poussant au-delà de 0 et 1 (voir la figure 3.20.1 où ceci est fait canoniquement).

On commence par remplacer $\overset{\vee}{h}_i$ avec $h'_i = \overset{\vee}{h}_i \circ d_1^{-1}$. A difféomorphisme (à la source), près, $\overset{\vee}{h}_i$ et h'_i sont la même chose. Mais, en passant de $\overset{\vee}{h}_i$ à h'_i on a modifié les intersections $M^2(\beta f) \cap M^2(\overset{\vee}{h}_i)$. En particulier :

$$M^2(p_{i+1}) \cap M^2(h'_i) = \emptyset .$$

(En effet, l'isotopie de la figure 3.20.1 a pour effet que : $d_1(M^2(\overset{\vee}{\rho}_i)) \cap M^2(p_{i+1}) = \emptyset$. D'autre part : $h'_i = \overset{\vee}{h}_i \circ d_1^{-1} = \overset{\vee}{\rho}_i \circ \nu_i \circ d_1^{-1} = \overset{\vee}{\rho}_i \circ d_1^{-1} \circ \nu_i$ (puisque $(\text{support } d_1) \cap M^2(\nu_i) = \emptyset$). On va désigner $\overset{\vee}{\rho}_i \circ d_1^{-1}$ par ρ'_i , et clairement :

$$M^2(p_{i+1}) \cap M^2(h'_i) = M^2(p_{i+1}) \cap M^2(\rho'_i).$$

(égalité dans βK_2^i). Si $x \in M^2(\rho'_i) : \overset{\vee}{\rho}_i d_1^{-1}(x) = \overset{\vee}{\rho}_i d_1^{-1}(y)$, pour un certain $y \neq x$, donc $d_1^{-1}(x) \in M^2(\overset{\vee}{\rho}_i)$, donc $x \in d_1(M^2(\overset{\vee}{\rho}_i))$ donc $x \notin M^2(p_{i+1})$, e.a.d.s.).

Par abus de notation on va rebaptiser, maintenant, h'_i, ρ'_i avec $\overset{\vee}{h}_i, \overset{\vee}{\rho}_i$.

On peut décrire maintenant, localement, la situation au voisinage de $\overset{\vee}{\rho}_i(I)$ comme suit :

Il existe un voisinage de coordonnées $R_3 \subset \mathbb{O}_3(K_2^i)$, tel que $\overset{\vee}{h}_i^{-1}(R_3) \subset \beta K_2$, consiste exactement de deux composantes connexes, difféomorphes, à $R_2 : R_2^1$ et R_2^2 , plongées proprement dans R_3 par $\overset{\vee}{h}_i$. La description détaillée de la situation est donnée dans la figure 3.20.2.

On aura aussi des plongements propres :

$$H^j : R \longrightarrow R_2^j \quad (j = 1, 2), \quad F^j : R \longrightarrow R_2^j ,$$

$$F_\ell^j : R \longrightarrow R_2^j \quad (\ell = 1, \dots, M < \infty), \text{ tels que :}$$

$$a) \quad H^j|_{R^-} \equiv F^j|_{R^-} \quad (\text{où } R^+ = [0, \infty) \text{ et } R^- = (-\infty, 0]) \text{ et}$$

$$H^j((0, \infty)) \cap F^j((0, \infty)) = \emptyset .$$

b) $H^j(R) \cap F_\ell^j(R) = \emptyset$ et $F_\ell^j(R) \cap F_k^j(R) = \emptyset$ (si $\ell \neq k$).

c) Ils existent des nombres réels :

$$0 < t_1 < \dots < t_M < 2$$

tels que : $F_\ell^j(R) \cap F^j(R) = F^j(t_\ell)$ et l'intersection est toujours transversale.

d) $F^j(R) \cup (\cup F_\ell^j(R)) = M^2(\beta f) \cap R_2^j$.

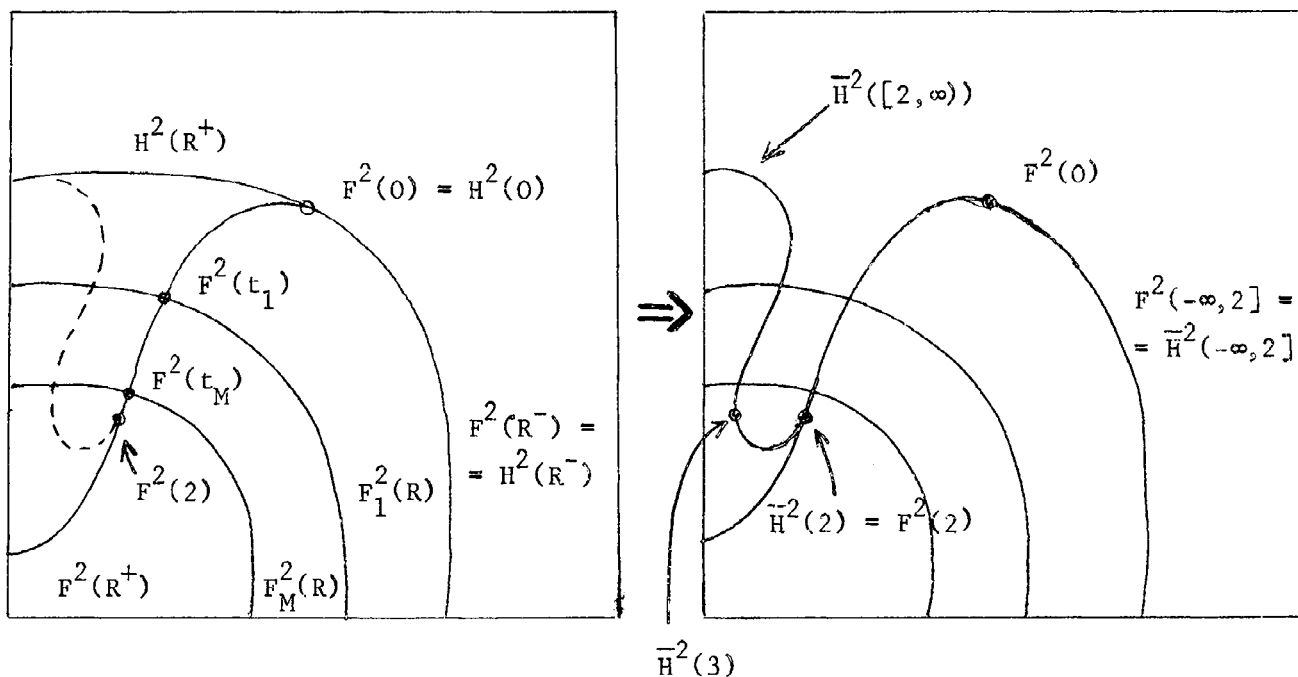
e) $H^j(R) = M^2(h_i) \cap R_2^j$.

Plus précisément on va supposer que $h_i \circ H^1(t) \equiv h_i \circ H^2(t)$, et que ceci définit en points doubles de h_i , dans R_3 .

f) $H^j(R^-) = F^j(R^-) = M^2(v_i) \cap R_2^j$. Donc l'unique point de $s(\beta K_2^i)$ tué par p_{i+1} est $\sigma(p_{i+1}) = H^1(0) = H^2(0)$ (dans βK_2^i , chaque $H^1(t)$ est identifié avec $H^2(t)$ si $t \leq 0$).

g) $M^2(p_{i+1}) \cap R_2^j = F^j([0,2])$ et $F^1([0,2])$ est la branche "spécifiée", de $M^2(p_{i+1})$. On va supposer que p_{i+1} identifie chaque $F^1(t)$ ($t \in [0,2]$) à $F^2(t)$.

Figure 3.20.2 (on est à la source dans R_2^2)



On va choisir un nouveau plongement propre : $\bar{H}^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_2^2$

tel que :

a') $\bar{H}^2|_{(-\infty, 2]} \equiv F^2|_{(-\infty, 2]}$, et \bar{H}^2 coïncide avec H^2 en dehors

d'un compact.

b') $\bar{H}^2(2, \infty) \cap F^2(2, \infty) = \emptyset$.

c') $\bar{H}^2(\mathbb{R})$ et $F_\lambda^2(\mathbb{R})$ ont en commun exactement deux points d'inter-

section transversale.

d') $\bar{H}^2[2, 3] \cap F_\lambda^2(\mathbb{R}) = \emptyset$. (voir figure 3.20.2)

On considère maintenant un difféomorphisme à support compact

$d_2 : \mathbb{R}_2^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2^2$, tel que $d_2(H^2(t)) = \bar{H}^2(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Comme tout à l'heure on remplace \check{h}_i par $\check{h}_i \circ d_2^{-1}$, ce qui ne modifie que les intersections $M^2(\check{h}_i) \cap M^2(\beta f)$ et rien d'autre. ($\check{h}_i \circ d_2^{-1}$ sera appelé dorénavant \check{h}_i).

Jusqu'ici toutes les isotopies étaient à la source. On va changer maintenant $\check{h}_i | \mathbb{R}_2^2$, par une isotopie au but. (Voir figure 3.20.3). Plus précisément

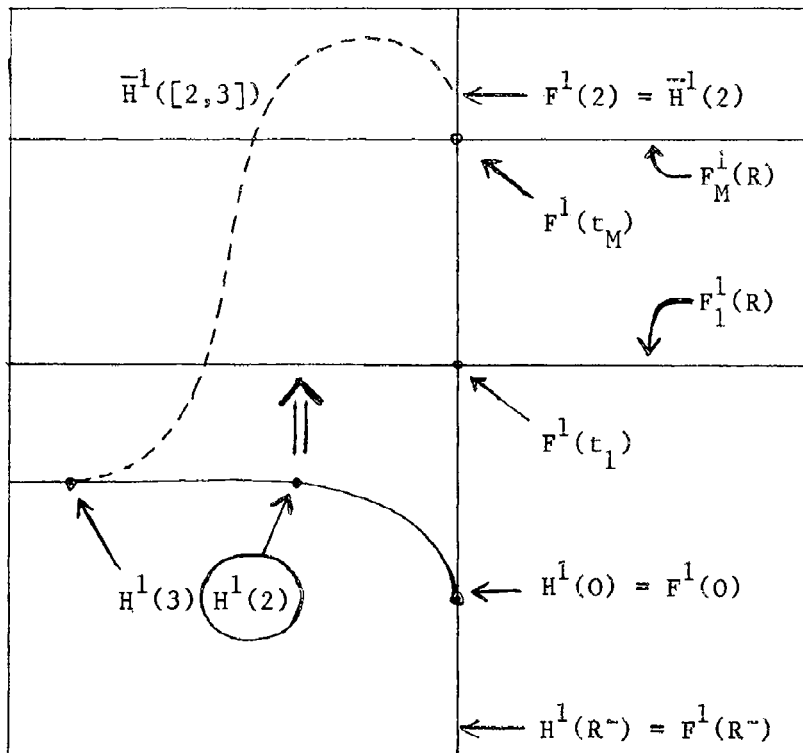


Figure 3.20.3
(on est au but, dans le plan $\check{h}_i(\mathbb{R}_2^1)$).

on considère un plongement propre $\bar{H}^1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_2^1$, tel que :

a") $\bar{H}^1 | (-\infty, 2] \equiv F^1 | (-\infty, 2]$.

b") $\bar{H}^1((2, \infty)) \cap F^1((2, \infty)) = \emptyset$.

c") $\bar{H}^1 | [3, \infty) \equiv H^1 | [3, \infty)$.

d") $\bar{H}^1(\mathbb{R})$ coupe chaque $F_\ell^1(\mathbb{R})$ transversalement, en deux points exactement.

On considère une isotopie de plongements propres :

$$H_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_2^1, \quad t \in I$$

telle que $H_0 = H^1$, $H_1 = \bar{H}^1$, $H_t | (-\infty, 0] = F^1 | (-\infty, 0]$, $H_t | [3, \infty) \equiv H^1 | [3, \infty)$, e.a.d.s. (Ceci est fait canoniquement dans la figure 3.20.3)

On peut considérer maintenant une isotopie $h_i^t : \beta K_2 \longrightarrow \mathcal{O}_3(K_2')$, telle que $h_i^t | \beta K_2 - \mathbb{R}_2^2 \equiv h_i^v | \beta K_2 - \mathbb{R}_2^2$, $h_i^0 = h_i^v$, $h_i^t(\mathbb{R}_2^2) \subset \mathbb{R}_3$, et que les points doubles de h_i^t , dans \mathbb{R}_3 soient donnés par les équations :

$$h_i^t \bar{H}^2(\theta) = h_i^t H_t(\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

(On remarque que $h_i^t \bar{H}^2(\theta) = h_i^v H_t(\theta)$). Ceci détermine h_i^t univoquement (à difféomorphisme près). On définit maintenant

$$h_{i+1}^v = h_i^1$$

Reste à vérifier que les propriétés :

1° - 7°, énoncées ci-dessus sont satisfaites pour h_{i+1}^v . Il n'y a, clairement, aucun problème pour 1° - 6°. Quant à 7°, on doit faire les remarques (importantes) suivantes : puisque p_{i+1} est du type $O(0)$, on a, d'abord :

$$\bigcup_j L(j, i) = \bigcup_j L(j, i+1) .$$

D'autre part, chaque fois que :

$$\alpha(\beta(j, w(j, i))) \geq i+1$$

on a aussi $\alpha(\beta(j, w(j, i))) \geq i + 2$, puisque $p_{\alpha(\beta(j, w))}$ est toujours du type $O(1)$, tandis que notre p_{i+1} , est, par hypothèse, du type $O(0)$. Il nous faut vérifier donc que nos isotopies faites ci-dessus, ne perturbent pas "la description des R_3^j , du point 7° ". On remarque bien que tout ce qui compte c'est qu'on ne touche pas à la région δ de $(y = 0)$ comprise entre $(x, z) \in H(R)$ et $(z = 0)$ (parce que, alors, on peut "amincir" R_3^j et retomber sur la même description...).

De toute façon, $\delta \cap M^2(\bar{\mu}_i) = \emptyset$, en particulier $\delta \cap M^2(p_{i+1}) = \emptyset$. Ce qu'on a fait avant, commence par une isotopie à la source (figure 3.20.1) qui a son support dans un voisinage de

$$V = M^2(p_{i+1}) - \text{un voisinage de } \sigma(p_{i+1}) \text{ dans } M^2(p_{i+1}).$$

Sans perdre la généralité, on peut donc supposer que cette première isotopie ne touche pas à δ . Le reste de l'opération (isotopies à la source et au but) se fait dans un petit voisinage de $\hat{M}^2(p_{i+1})$, et on peut le faire sans toucher à δ . (Puisque $\delta \cap \hat{M}^2(p_{i+1}) = \delta \cap \{\sigma(p_{i+1})\} = \emptyset$; en effet, la seule singularité que δ contient est : $\sigma(p_{\alpha(\beta(j, w(j, i)))}) \neq \sigma(p_{i+1})$ ($p_{\alpha(\dots)}$ est du type $O(1)$ et p_{i+1} du type $O(0)$)).

Cas où p_{i+1} est du type $O(1)$:

On va considérer le voisinage

$$k(1; n) = \underbrace{k(x; n) \oplus k(y)}_{(x=y=0) \cap (z \leq -1)} \subset \beta K_2^i$$

correspondant à la projection p_{i+1} (voir la définition 3.15). On va considérer $M^2(p_{i+1}) \subset \beta K_2^i$. $\rho_i | M^2(p_{i+1})$ est un plongement. Par des isotopies à la source, et au but comme avant, on peut modifier "canoniquement" h_i (c'est-à-dire

modifier $M^2(\beta f) \cap M^2(h_i^v)$, de telle façon qu'il existe un voisinage de coordonnées $R_3 \subset \Theta_3(K_2^i)$, contenant $\rho_i^v(M^2(p_{i+1}))$, et ayant les propriétés suivantes : (la démonstration de ce fait sera donnée ci-dessous).

8°. $\rho_i^v | k(x;n)$ et $\rho_i^v | k(y)$ sont des plongements propres dans $R_3 = \{(x,y,z)\}$. Donc $h_i^v | k(y)$ est un plongement (égal, en fait, à $\rho_i^v | k(y)$). De plus, $\rho_i^v | k(x;n)$ est isomorphe au plongement canonique :

$$k(x,n) = ((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup \left(\bigcup_1^n (x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \right) \subset R_3 .$$

9°. On va choisir la branche $(x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0)$ (définition 3.20 ; on rappelle, que $\theta_{i_0} = 0$), de telle façon que son germe soit $[\Sigma \rightarrow p_{i+1}]$ où Σ est la succession du point C , lemme 3.20, et " $[\Sigma \rightarrow p_{i+1}]$ " se réfère à la notation de la définition 3.27.

10°. Ils existent des nombres réels :

$$0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > -1 \quad (k \geq 0)$$

et un plongement propre : $H : R \rightarrow (x = 0) \cap (z < \alpha_k)$, ayant la propriété :

$$H(R) \cap (x = y = 0) = H(R) \cap M^2(\beta f) = (x = y = 0) \cap (z \leq -1),$$

tels que :

$$M^2(h_i^v) \cap k(x ; n) \cap (z \leq 0) = H(R) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k ((x=0) \cap (z = \alpha_i)) \right)$$

et :

$$M^2(\rho_i^v) \cap k(x;n) = (H(R) - (x = y = 0, z \leq -1)) + \left(\bigcup ((x = 0) \cap (z = \alpha_i)) \right).$$

11°. L'image du plongement $h_i^v | k(y)$ est la surface $(x, (y,z) \in H(R)) \subset R_3$.

On peut supposer que H est tel que :

$$H(\theta) = (0,0,\theta) \in R_3 \quad \text{si} \quad \theta \leq -1.$$

On va considérer le plongement naturel :

$$H : R \longrightarrow \overset{\vee}{h}_i(k(y)), \text{ qui est bien défini, puisque}$$

$$\overset{\vee}{h}_i(k(y)) \cap \overset{\vee}{h}_i(k(x;n)) = H(R).$$

Soit, par définition, $E(n)$ l'ensemble

$$E(n) = k(x;n) \cap k(y) \subset R_3. \text{ (définition 3.15).}$$

On va supposer que, dans $\overset{\vee}{h}_i(k(y))$ il existe un plongement :

$$\varphi : E(n) \longrightarrow \overset{\vee}{h}_i(k(y)),$$

tel que :

$$\varphi(E(n)) \cap H(R) = H((-\infty, -1]) \text{ et :}$$

$$\varphi(E(n)) = \overset{\vee}{h}_i(k(y)) \cap M^2(\beta f).$$

(D'autre part, c'est clair que :

$$\overset{\vee}{h}_i(k(y)) \supset H(R) = M^2(\overset{\vee}{h}_i) \cap \overset{\vee}{h}_i(k(y)) \text{ .)}$$

12°. $\overset{\vee}{h}_i^{-1}(R_3)$ contient $k + 2$ composantes connexes : $k(y)$, $k(x;n)$ et k composantes connexes difféomorphes à $R_2 : R_2^1, \dots, R_2^k$, dont les images dans R_3 sont (respectivement) :

$$(z = \alpha_1), \dots, (z = \alpha_k) \text{ .}$$

$\overset{\vee}{h}_i$ restreint à R_2^i est un plongement.

$$13°. M^2(\beta f) \cap R_2^i = \emptyset \text{ .}$$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer brièvement comment on réalise 8°-13°, sans modifier 1°-7°. En faisant référence aux notations de la définition 3.15, on va décomposer $M^2(p_{i+1})$ comme suit :

$$M^2(p_{i+1}) = (M^2(p_{i+1}) \cap k(y)) +$$

$$(M^2(p_{i+1}) \cap ((x = 0) \cap (z \leq 0))) + (M^2(p_{i+1}) \cap ((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0))).$$

Les points 8° et 10°-13° seront satisfaits, si :

$$(x) \quad (M^2(p_{i+1}) \cap k(y)) \cap M^2(\rho_i^v) = \emptyset \text{ et :}$$

$$(xx) \quad (M^2(p_{i+1}) \cap (\bigcup_j (x = \theta_j z) \cap (z \geq 0))) \cap M^2(\rho_i^v) = \emptyset.$$

Quant au point 9° c'est tout simplement un choix (très important, d'ailleurs).

(x) La condition peut être réalisée par une isotopie à la source, analogue à celle de la figure 3.20.1, de support contenu dans un petit voisinage de :

$$(M^2(p_{i+1}) \cap k(y)) - (\text{un voisinage de } \sigma(p_{i+1})).$$

La condition (xx) peut être réalisée par une isotopie au but, ayant comme

support un nombre de "voisinages de coordonnées" $R_2^j \subset \beta K_2^i$, tels que $R_2^j \cap M^2(\beta f) = \emptyset$ mais ayant la propriété que : $\rho_i^v | R_2^j$ est un plongement, $M^2(\rho_i^v) \cap R_2^j =$ une droite, $\rho_i^v(R_2^j)$ coupe $\rho_i^v(M^2(p_{i+1}))(\rho_i^v(M^2(\beta f)))$ transversalement, en exactement un point. C'est juste ces intersections qu'on élimine par l'isotopie au but. Maintenant, en se référant à l'analyse faite à la fin du cas 0(0), les isotopies à la source ne touchent sûrement pas à δ , puisque $\hat{M}^2(p_{i+1}) \cap \delta$, contient, au plus, le point $\sigma(p_{i+1})$. Quant aux isotopies au but, elles ont comme support des petits "voisinages de coordonnées", dans $\beta K_2^i, R_2^j$, qui sont tels que $h_i^v(R_2^j)$ a des intersections transversales avec $h_i^v(M^2(\beta f))$. Mais dans δ de telles intersections transversales n'existent pas, donc les isotopies au but ne touchent pas δ . Donc, jusqu'à présent nos isotopies ne détruisent pas la condition 7°.

En appliquant successivement des surglissements disjoints à $(z = \alpha_1), \dots, (z = \alpha_k)$ on peut modifier h_i^v de telle manière que $k = 0$. Ce nouveau h_i^v sera désigné, par abus de notation, avec h_i^v . Il n'y a aucun problème pour faire ceci canoniquement.

On applique maintenant un surglissement à $h_i^v(k(y))$, qui ne touche pas à $\varphi(E(n))$. On va désigner le résultat par $h_{i+1}^v : k(y) \hookrightarrow R_3$. Dans $h_{i+1}^v(k(y))$ on a un plongement :

$$\varphi(E(n)) = h_{i+1}^!(k(y)) \cap M^2(\beta f) \quad ,$$

et un autre plongement :

$$\psi(F(n)) = h_{i+1}^!(k(y)) \cap k(x;n) = h_{i+1}^!(k(y) \cap M^2(h_{i+1}^!)) \quad .$$

(où on utilise la notation :

$$F(n) = k(x;n) \cap (z = h(x,y)) \quad ,$$

$h(x,y)$ étant la fonction de la définition 3.20.)

Sans perdre la généralité, on peut considérer un système de coordonnées (u,v) sur $h_{i+1}^!(k(y))$, tel que :

$$\psi(F(n)) \cap \varphi(E(n)) = \{(u \leq -1, v = 0)\}$$

$$(v = 0) = h_{i+1}^!(k(y)) \cap (x = 0) \quad ,$$

(on rappelle que $\theta_{i_0} = 0$),

$$\psi(F(n)) \cap ((x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0)) = \{(1 \geq u \geq 0, v = 0)\}$$

et

$$[\psi(F(n)) \cap ((x = \theta_{i_0} z) \cap (z \leq 0))] - (\varphi(E(n))) = (u \geq 1, v = 0) \quad .$$

Enfin, on peut choisir le surglissement de telle façon que, dans $k(x;n)$:

$$M^2(p_{i+1}) \cap k(x;n) \subset k(x;n) \cap h_{i+1}^!(k(y)),$$

et que $M^2(p_{i+1}) \cap k(x;n)$ soit la seule intersection de $h_{i+1}^!(k(y))$ avec $M^2(\beta f) \cap k(x;n)$.

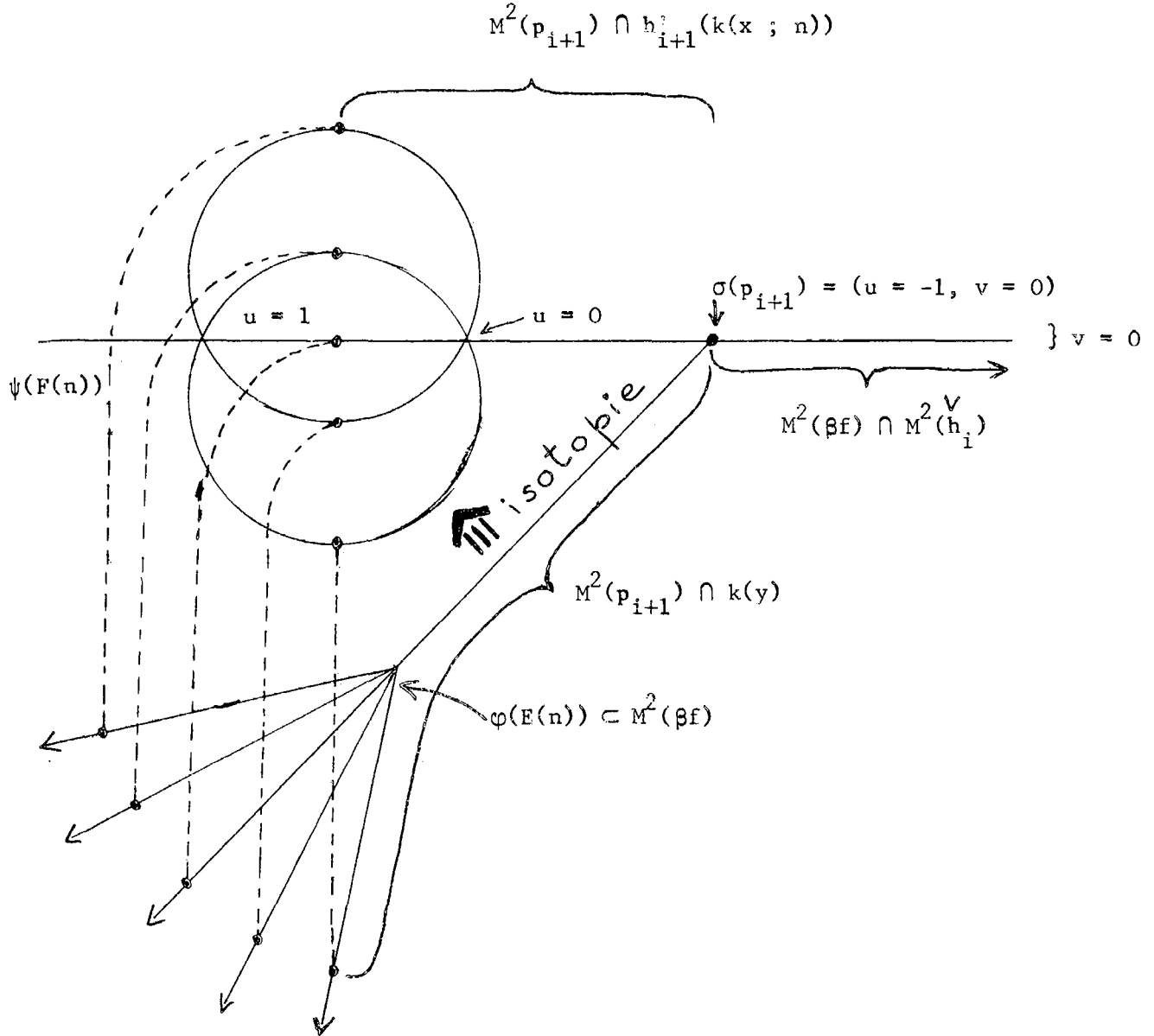
Maintenant, on peut appliquer une isotopie à la source, de support (compact) contenu dans $h_{i+1}^!(k(y)) = k(y)$, qui ne touche pas à $(u \leq -1, v = 0)$, et qui identifie la partie correspondant à :

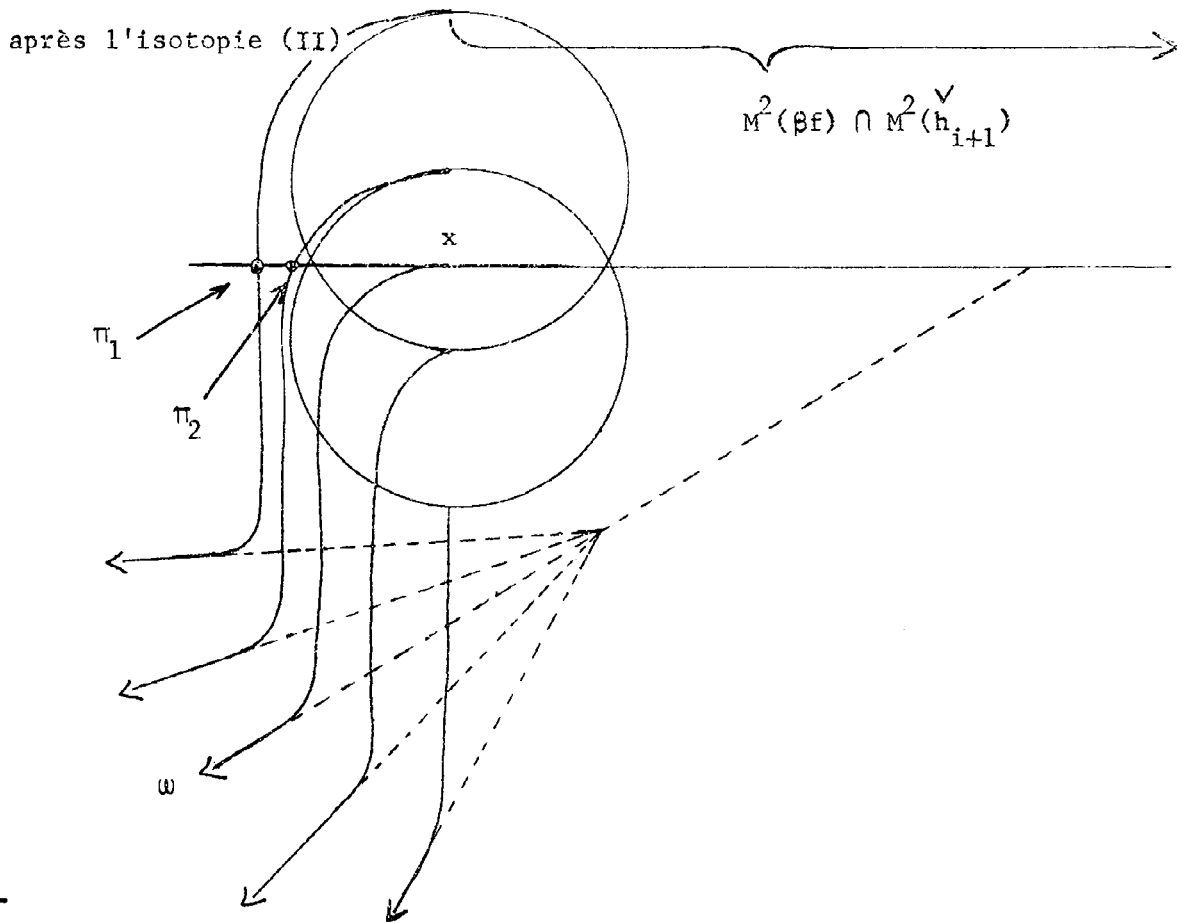
$$M^2(p_{i+1}) \cap k(x;n), \text{ dans } \psi(F(n)) \subset h_{i+1}^!(k(y))$$

(qu'on va appeller, par abus de langage, $M^2(p_{i+1}) \cap k(x;n)$), avec $M^2(p_{i+1}) \cap \varphi(E(n)) = M^2(p_{i+1}) \cap k(y)$. Ceci est réalisé "canoniquement", dans la figure 3.20.4.

Figure 3.20.4 (le plan de la figure est $h_{i+1}^i(k(y))$; l'orientation des axes est : $\leftarrow \begin{matrix} \uparrow v \\ u \end{matrix} \right)$.

avant l'isotopie (I)





[Si p_{i+1} n'est pas dans la succession Σ , on va composer cette isotopie avec une autre. Dans ce cas, la branche de $M^2(\mu_{i+1})$ qui sort de $x \in s(\beta K_2^{i+1})$ et qui est désignée par ω dans la figure 3.20.4, correspond à une intersection avec bourgeon. C'est donc un intervalle fermé, dont l'une extrémité est x , l'autre un point de $\text{int}(\beta K_2^{i+1})_2$.

Par une autre isotopie à la source on s'arrange pour que ω ne touche plus à $M^2(\rho_{i+1}^v)$, comme dans la figure 3.20.5, ci-dessous :

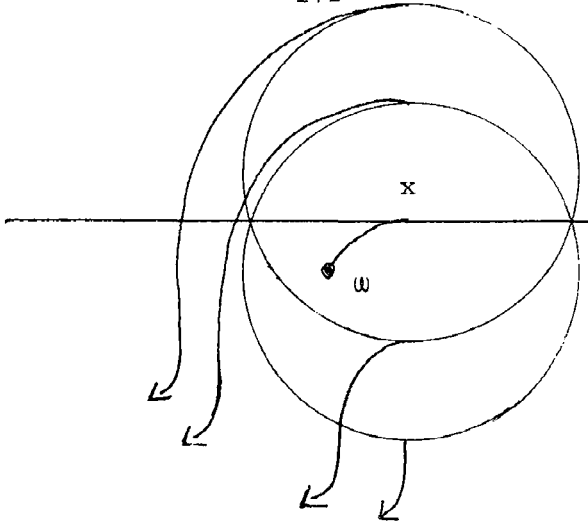


Figure 3.20.5
(une isotopie supplémentaire)

]

Ce que devient h_{i+1}^i par cette isotopie, sera appelé h_{i+1}'' ;
 l'on remarque, déjà, que h_{i+1}'' se factorise par $\beta K_2 \xrightarrow{\vee_{i+1}} \beta K_2^{i+1}$.
 Reste à montrer comment on déduit notre h_{i+1}^i à partir de h_{i+1}'' . On va
 décrire une isotopie à la source $D_t^{i+1} \in \text{Diff}((\beta K_2^{i+1})_2)$, avec $D_0^{i+1} = \text{identité}$,
 à support compact, et notre h_{i+1}^i sera $h_{i+1}'' \circ D_1^{i+1}$. Donc h_{i+1}'' c'est déjà
 h_{i+1}^i , si l'on oublie $M_2(\beta f)$, (en particulier), on a l'identité :

$$(E_{i+1}) : \beta K_2 / \Psi(h_{i+1}'') \cong \beta K_2 / \Psi(h_{i+1}^i) ,$$

(identité entre sous-ensembles de $\Theta_3(K_2^i)$), mais la passage de h_{i+1}'' à
 h_{i+1}^i va changer les intersections $M^2(\beta f) \cap M^2(h_{i+1}^i)$.

Je vais supposer, par induction, que pour tous les p_j du type $O(1)$,
 $j < i+1$, D_t^j est déjà défini, donc que $h_j^i = h_j'' \circ D_1^j$ et que l'égalité (E_j)
 à lieu.

Pour pouvoir construire D_t^{i+1} , h_{i+1}^i , on aura besoin de quelques
 préliminaires.

Pour chaque $j \leq i$ on aura des applications naturelles :

$$\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+1}^i))) \xrightarrow{\Phi_j} \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j^i)))$$

(où il est entendu qu'on lit, provisoirement, $(\beta K_2 / \Psi(h_{i+1}''))_2$ au lieu
 de $(\beta K_2 / \Psi(h_{i+1}^i))_2$), définies comme suit :

a) Si p_{j+1} est du type $O(0)$, donc si le passage de h_i^i à h_{i+1}^i
 se fait par isotopie, Φ_j est l'isomorphisme naturel.

b) Si p_{j+1} est du type $O(1)$, on remarque que, le passage de
 h_j^i à h_{j+1}^i se fait (à isotopies à la source près), par $(k+1)$ surglissements
 successifs, appliqués aux surfaces disjointes $(z = \alpha_1), \dots, (z = \alpha_k)$,
 $h_j^i(k(y))$. Φ_j sera alors la composition des $(k+1)$ applications $\Phi(H)$ corres-
 pondantes (voir le début de notre CONSTRUCTION PRELIMINAIRE).

En restant dans le cas b) on a besoin, aussi, des définitions suivantes : pour chacun des (k+1) surglissements considérés ci-dessus, on peut considérer les éléments de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2)$, qui jouent le rôle de :

$$D((x > 0) \cap (z = -1)), \quad D((x < 0) \cap (z = -1)) ,$$

$D((x = \theta_i z) \cap (z > 0))$ (avec $i \neq i_0$). On va les appeler les éléments actifs, de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2)$.

Pour fixer les idées, on va utiliser, aussi, la terminologie suivante : Dans la définition 3.20, les plongements $f_i : D_2 \longrightarrow K_2$, avec $i \leq 2(p-1)$ seront appelés actifs. Dans la même définition 3.20, si l'on considère le surglissement H, chaque intersection : $f_H(B) \cap ((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0))$, ($i \neq i_0$), sera appelée une intersection du surglissement H. On remarque que, même si $\Psi(f)$ est acyclique, $\Psi(f_H)$ ne l'est plus, justement à cause des intersections. Mais $\Psi(f_H|_{L_2})$ est bien acyclique (si $\Psi(f)$ est acyclique), parce que les plongements actifs $f_i(D_2)$, "tuent" les cycles parasites créés par les intersections du surglissement

[On a, aussi, pour chacun des (k+1) surglissements élémentaires, l'élément de $\pi_0((\beta K_2 / \Phi(h_j))_2)$ qui joue le rôle de $D((x = \theta_{i_0} z) \cap (z > 0))$. Dans tous les (k+1) cas c'est le même : la composante qui correspond à $[\Sigma \longrightarrow p_{j+1}]$. On va l'appeler l'élément passif *) de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2)$.]

Enfin, dans $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+1}))_2)$, on peut distinguer (k+1) éléments, provenant de $(x = \theta_{i_0} z) \cap (z > 0)$, du type $D(H_0((x = \theta_{i_0} z) \cap (z > 0)))$. (Voir la définition de $H_0, H_1, \dots, H_\infty$, plus haut). On va les appeler les mauvais éléments de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+1}))_2)$.

On va introduire, aussi, la notation :

$$\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+l}))_2) \xrightarrow{\Phi_{l,j} = \Phi_{j+l-1} \circ \dots \circ \Phi_j} \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2) ,$$

*) A priori l'élément passif (au niveau de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2)$) pourrait se confondre avec l'un des éléments actifs.

et désigner par $M_{j+1} \subset \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+1}^{\vee}))_2)$ l'ensemble des mauvais éléments de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+1}^{\vee}))_2)$. On définit $\bar{M}_{j+l} \subset \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{j+l}^{\vee}))_2)$, ($j + l \leq i$) par :

$$\bar{M}_{j+l} = \bigcup_{j < j+l} \phi_{l,j}^{-1}(M_j) + M_{j+l} .$$

Je vais supposer (inductivement) que pour chaque $j \leq i$, l'ensemble \bar{M}_j satisfait à la condition $C(j)$, énoncée ci-dessous, (et ensuite définir les isotopies D_t^{i+1} , de telle manière que $C(i+1)$ soit satisfaite aussi).

LA CONDITION $C(j)$: ils existent des voisinages de coordonnées :

$R_3^k = \{(x, -1 < y < +1, z)\}$, contenus dans $\Theta_3(K_2^i)$, 2-à-2 disjoints, dépendant de j , avec $k = 1, \dots, m(j) = m$, tels que : $\bar{M}_j \subset \bigcup_k R_3^k$, et que chaque

$$\rho_j^{-1}(R_3^k) \xrightarrow{\rho_j^{\vee}} R_3^k \subset \Theta_3(K_2^i)$$

admette la description suivante : (comparer avec le point 7°) du début de la CONSTRUCTION PRELIMINAIRE). Dans $(y = 0) \subset R_3^k$ on considère les droites $(z = 1) \cap (y = 0), \dots, (z = N) \cap (y = 0)$, et (toujours dans R_3^k) des demi-plans : $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, faisant un angle très petit avec le plan horizontal $(z = 0)$, et satisfaisant, aussi, aux conditions suivantes :

- (i) $\bigcup \partial \Delta_i = \bigcup_{j=1}^N (z = j) \cap (y = 0)$,
- (ii) $\Delta_i \cap \Delta_j = \partial \Delta_i \cap \partial \Delta_j$ (si $i \neq j$),
- (iii) $\Delta_i \cap (y = 0) = \partial \Delta_i$ (donc Δ_i coupe $(y = 0)$ transversalement).

On considère, aussi, un plongement propre :

$$H_0 : \mathbb{R} \longrightarrow (y = 0) , \text{ tel que :}$$

$$H_0(\mathbb{R}) \cap (y = x = 0) = H_0((-\infty, 0]) = (y = x = 0) \cap (z \leq N+1).$$

On va supposer que H_0 est tel, qu'il existe un plongement propre (demi-voisinage tubulaire de $H_0(\mathbb{R})$) :

$$H : \mathbb{R} \times I \longrightarrow (y = 0),$$

tel que $H(\mathbb{R} \times 0) = H_0$, tel que $H(\mathbb{R} \times 1)$ sépare $H_0(\mathbb{R})$ du point $+\infty$ de l'axe $(0,0,z)$, et que chaque $H_t(\mathbb{R}) = H(\mathbb{R} \times t)$, $t > 0$ soit transverse à $(x = y = 0)$ et le coupe en exactement un point.

On va supposer, aussi, qu'il existe une suite de nombres réels :

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq 1$$

et une application :

$$a : (1, \dots, M) \longrightarrow (1, \dots, N),$$

telle que : i) $(a(p) - a(q))(p - q) \geq 0$.

ii) Chaque $H_{t_i}(\mathbb{R}) \subset (y = 0)$ coupe les plans $(z = j')$ avec $j' \geq a(i)$, transversalement, en deux points, et ne touche pas aux $(z = j')$ avec $j < a(i)$. (j', j sont des entiers compris entre 1 et N).

Enfin, on va supposer que $H(\mathbb{R}) = H_0(\mathbb{R})$ coupe chaque plan $(z = 1), \dots, (z = N)$, transversalement, en exactement deux points.

La condition $C(j)$, comprend les points suivants :

$C(j) - 1$). Le 2-polyèdre singulier :

$(\rho_j^{-1}(\mathbb{R}_3^k), \bigvee \rho_j | \rho_j^{-1}(\mathbb{R}_3^k), \mathbb{R}_3^k)$ est isomorphe à :

$$\begin{aligned} & ([(y=0) \cup (\bigcup_i \Delta_i)] \oplus (-1 < y < +1, (x, z) \in H_0(\mathbb{R})) + \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(x=y=0) \cap (z \leq N+1)} \\ & + \sum_{i=1}^M (-1 < y < +1, (x, y) \in H_{t_i}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}_3^k) \end{aligned}$$

où $0 < t_1 < \dots < t_M \leq 1$ est la suite considérée avant et π est induit par les plongements naturels. ("+" signifie, ici, réunion disjointe).

$$C(j) - 2) \quad (y = x = 0) \cap (z \leq N + 1) \subset M^2(v_j) \subset \\ ((y = x = 0) \cap (z \leq N + 1)) \cup \bigcup_{i=1}^N ((z = i) \cap (y = 0)) .$$

C(j) - 3). $\bar{M}_j \cap R_3^k$ est l'ensemble des $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_j))_2)$, contenus dans $(y = 0)$ et dont la fermeture (dans $(y = 0)$) est compacte. $(\bar{M}_j \cap R_3^k)$ s'identifie donc aux éléments pré-compacts de

$$\pi_0([(y=0) \cup (\bigcup_i \Delta_i) \cup (\bigcup_{i=1}^M (-1 < y < +1, (x,z) \in H_{t_i}(R)) \cup \\ \cup (-1 < y < +1, (x,z) \in H_0(R))]_2 \cap (y = 0)) .$$

$$C(j) - 4). \quad M^2(\bar{\mu}_j) \cap \rho_j^{-1}(R_3^k) = ((x = y = 0) \cap (z > N + 1)) \cup \varphi_j(0, \infty),$$

où $\varphi_j : [0, \infty) \longrightarrow (-1 < y < +1, (x,z) \in H_0(R))$, est un plongement propre, C^∞ , tel que :

- 1) $\varphi_j(0) = (x = 0, y = 0, N + 1)$.
- 2) $\varphi_j(R)$ coupe transversalement les Δ_i .
- 3) $\varphi_j(0, \infty) \cap (y = 0, (x,z) \in H_0(R)) \cap (z \geq 0) = \emptyset$.

C(j) - 5) . Tous les

$$(\rho_{i'}^{-1}(R_3^{j'}), \rho_{i'}^{-1}(\rho_{i'}^{-1}(R_3^{j'})), R_3^{j'})$$

du point 7°) (on a remplacé (i,j) du point 7°) par (i',j') pour éviter la confusion de notation) sont contenus dans la description ci-dessus, dans le sens suivant : pour chaque j' (point 7°), au cran $i' = j$, il existe un $k = k(j')$, tel que $R_3^{j'}$ soit un voisinage de la région (compacte) du plan $(y = 0)$ comprise entre $(z = 0)$, $(x, z) \in H_0(R)$. (Dans R_3^k).

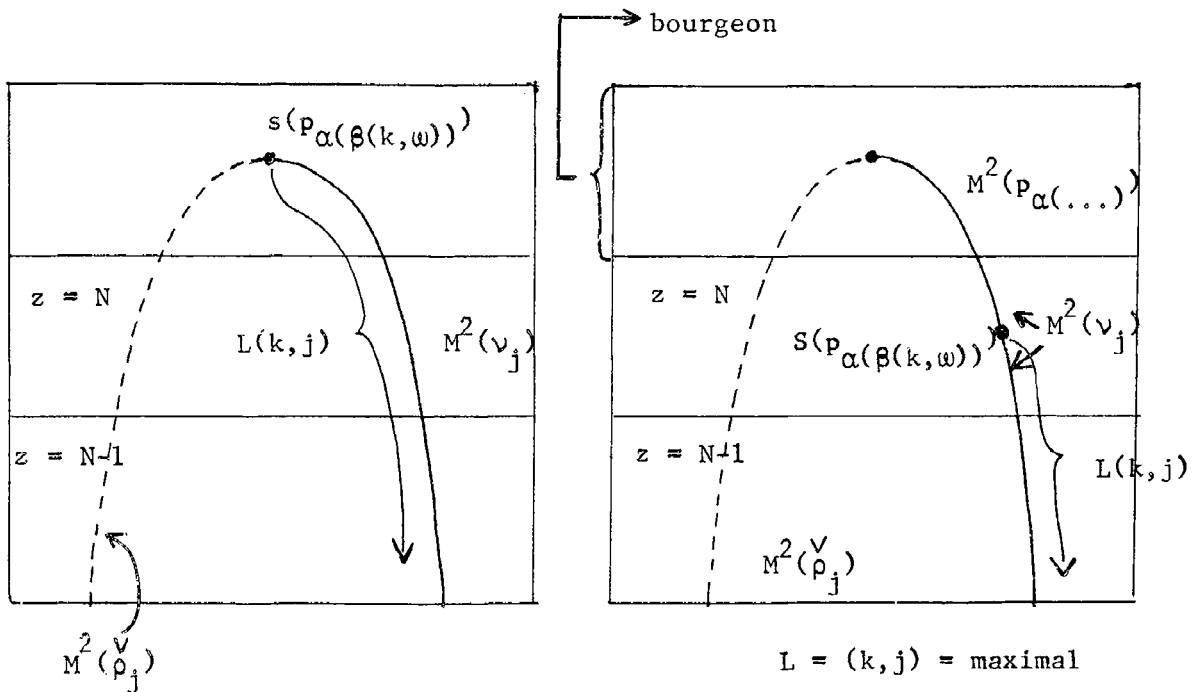
C(j) - 5), nous dit, en particulier que C(j) entraîne la condition 7°) (au cran j).

$C(j) = 6$). Si $(\rho_j^{-1}(R_3^k), \rho_j^V \mid \rho_j^{-1}(R_3^k), R_3^k)$ n'est pas comme au point $C(j) = 5$ (donc ne contient pas un modèle local du point 7°), alors $(y = 0) \cap (z \geq N)$ est toujours contenu dans un bourgeon, (et réciproquement).

Si, en plus $N > 1$, notre modèle contient un $L(k, \omega)$ (maximal) avec :

$$\alpha(\beta(k, \omega)) \leq j .$$

Remarque. En supposant que R_3^k touche à la succession Σ , la différence entre $C(j) = 5$, $C(j) = 6$ est montrée dans la figure 3.20.5 (le plan de la figure est $y = 0$)



$C(j) = 5$ ($\omega \leq \ell(k)$),
 $\alpha(\beta(k, \omega)) > j$

$C(j) = 6$ ($\omega = \ell(k)$),
 $\alpha(\beta(k, \omega)) \leq j$

Figure 3.20.5

Ceci finit la description de la condition $C(j)$.

Lemme 3.20.2. "Si la condition $C(j)$ est satisfaite (au cran j), et p_{j+1} est du type $O(0)$, la condition $C(j+1)$ est satisfaite" \square

Démonstration. On vérifie sans peine que les isotopies, à la source et au but, du cas $O(0)$, ne touchent pas à la condition $C(j)$.

Lemme 3.20.3. "Supposons que p_{i+1} soit du type $O(1)$ et que la condition $C(i)$ est satisfaite. Il existe alors une isotopie à la source, à support compact : $D_t^{i+1} \in \text{Diff}((\beta K^{i+1})_2)$, $D_0^{i+1} = \text{identité}$, canonique, telle que, si $h_{i+1}^v = h_{i+1}'' \circ D_1^{i+1}$, la condition $C(i+1)$ soit satisfaite". \square

Démonstration. On commence par remarquer que, si $(\rho_i^{v-1}(R_3^k), \rho_i^v | \rho_i^{v-1}(R_3^k), R_3^k)$ est comme dans le cas $C(i) - 6$: $\sigma(p_{i+1}) \neq (0,0,N+1)$, donc, $\sigma(p_{i+1}) \notin \rho_i^{v-1}(R_3^k)$.

On voit facilement que $\sigma(p_{i+1})$ se trouve dans l'une des deux situations suivantes (qui sont mutuellement exclusives) :

I. Il existe un $(\rho_i^{v-1}(R_3^k), \rho_i^v | \rho_i^{v-1}(R_3^k), R_3^k)$ comme au point $C(i) - 5$, tel que : $\sigma(p_{i+1}) = (0,0,N+1) = \sigma(p_{\alpha(\beta(k,w))})$ (voir la figure 3.20.5, $C(j) - 5$).

II. $\sigma(p_{i+1}) \notin \bigcup_k \rho_i^{v-1}(R_3^k)$.

Dans les deux cas, on commence par remarquer que les premières isotopies à la source, celles qui nous fournissent un "nouveau" h_i^v , satisfaisant à $8^\circ-13^\circ$, ne touchent pas à la condition $C(i)$ (ou, plus exactement ne touchent pas à un voisinage très mince de $(y=0) \cap R_3^k$;) on l'a vu, en fait, quand on a remarqué que ces isotopies ne modifiaient pas la condition 7° .

Dans le cas I, on considère les deux germes de $M_{\sigma(p_{i+1})}^2(p_{i+1})$.

A partir du fait que les branches $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)$ sont toujours de la

forme $[\Sigma \longrightarrow p_j]$, (point 9° ci-dessus), et du fait que Σ est une succession, on voit facilement que celui des deux germes qui correspond au point de $M^2(p_{i+1})$ où βK_2^i n'est pas une variété, se trouve sur $(x = y = 0)$. D'une manière plus précise, on peut trouver un voisinage \bar{R}_3 de coordonnées dans $\mathcal{O}_3(K_2')$, qui contienne, en même temps R_3^k et le voisinage R_3 , correspondant à p_{i+1} (points 8°-13°), avec la description suivante :

En se référant à la description de la condition $C(j)$, on considère un $A \geq 0$ tel que le plan $(z = A)$ ne touche pas à $H(R \times I)$, et sépare $H(R \times I)$ du point $z = \infty$. On considère des demi-plans $\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_m$, faisant un angle très petit avec $(z = 0)$ et ayant les mêmes propriétés que les Δ_i , sauf que $\partial \bar{\Delta}_i = (z = A) \cap (y=0)$. On considère aussi des plans :

$(z = A_1), \dots, (z = A_f)$ où $A > A_1 > \dots > A_f$ et $(z = A_i)$ se trouve entre $(z = A)$ et $H(R \times I)$.

$(\rho_i^{v-1}(\bar{R}_3), \bigvee \rho_i | \rho_i^{v-1}(\bar{R}_3), \bar{R}_3)$ est isomorphe à :

$$[(y = 0) \cup (\bigcup_j \Delta_j) \cup (\bigcup_j \bar{\Delta}_j)] \oplus \underbrace{(-1 < y < +1, (x,y) \in H_0(R))}_{(x=y=0) \cap (z \leq N+1)} +$$

$$+ \sum_1^M (-1 < y < +1, (x,y) \in H_{t_i}(R)) + \sum_{j=1}^f (-1 < y < +1, (z = A_j)), \pi, \bar{R}_3).$$

La partie qui est dans $z < A_f$ est comme R_3^k , celle qui est dans $z > N$ est comme le R_3 correspondant à p_{i+1} (8°-13°). Tous les éléments \bar{M}_i , qui touchent à \bar{R}_3 , sont ceux contenus dans R_3^k .

Le lecteur pourra s'assurer maintenant que, au moment où h''_{i+1} a été construit, $C(i+1) - 1$, $C(i+1) - 2$, $C(i+1) - 3$ et tout le reste de la condition $C(j)$ ($j = i + 1$, voir en particulier le début de la condition $C(j)$), sont automatiquement satisfaits, mais que $C(i+1) - 4$ ne l'est pas. Plus

exactement des points comme π_1, π_2 de la figure 3.20.4 représentent des intersections transversales de $h''_{i+1}(M^2(\beta f))$ avec $(y = 0) \cap (z \geq 0)$. D_t^{i+1} sera, par définition, une isotopie à la source (qu'on peut aisément rendre canonique) qui pousse ces intersections en-dessous de $(z = 0)$:

On laisse au lecteur le soin de vérifier que 1°-6°, et C(i+1) (qui entraîne 7°) sont satisfaites.

Dans le cas II, on prend $D_t^{i+1} \equiv$ identité, $h''_{i+1} = h_{i+1}^{\vee}$, e.a.d.s. Ceci finit notre CONSTRUCTION PRELIMINAIRE.

Lemme 3.20.4. "Soit $a \in \pi_0((\beta K_2/\Psi(h_i^{\vee}))_2)$ un élément mauvais et $\Phi_{\ell, j}$ l'application :

$$\pi_0((\beta K_2/\Psi(h_{j+\ell}^{\vee}))_2) \longrightarrow \pi_0((\beta K_2/\Psi(h_j^{\vee}))_2) .$$

$$\Phi_{\ell, j} = \Phi_{j+\ell-1} \circ \dots \circ \Phi_j$$

Alors $\Phi_{\ell, j}^{-1}(a)$ est toujours un élément unique, qui n'est jamais actif." \square

C'est une conséquence immédiate des conditions C(i) et de la démonstration du lemme précédent. (Les \bar{M}_i ne coupent jamais $M^2(\beta f)$ transversalement, e.a.d.s)

On fait maintenant la remarque suivante :

(R) Soient a_1, \dots, a_r les éléments actifs de $\pi_0((\beta K_2/\Psi(h_i^{\vee}))_2)$ et b_1, \dots, b_q les éléments de $\pi_0((\beta K_2/\Psi(h_{i+1}^{\vee}))_2)$ qui ne sont ni mauvais, ni dans $\bigcup_j \Phi_i^{-1}(a_j)$. Désignons par c_1, \dots, c_p les éléments de $\pi_0((\beta K_2/\Psi(h_{i+1}^{\vee}))_2)$ qui sont dans $\bigcup_j \Phi_i^{-1}(a_j)$.

Soient $\beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ des nombres entiers ≥ 0 , arbitraires. En remontant aux définitions, on peut montrer sans aucune difficulté le fait suivant : soient $\chi(a_i)$ le nombre total d'intersections (de nos $(k + 1)$ surglissements), où a_i apparaît. (On remarque que chaque intersection sera comptée deux fois, donc $\sum_i \chi(a_i)$ sera un nombre pair). Soit Q le nombre :

$$Q = \sum_i \chi(a_i) + \sum_i \beta_i + \sum_i \gamma_i .$$

Ils existent Q plongements différentiables 2-à-2 disjoints :

$$f_j : D_2 \longrightarrow (\beta K_2 / \Psi(h_i^v))_2, \quad (j = 1, \dots, Q)$$

uniques, à isotopie près, et une succession de $(k+1)$ -glissements élémentaires de :

$$(\beta K_2 - \bigcup_j f_j(\text{int } D_2), h_i^v | \beta K_2 - \bigcup_j f_j(\text{int } D_2), \Theta_3(K'_2)) ,$$

correspondant (comme dans la définition 3.20) à nos $(k + 1)$ surglissements, et passant à :

$$(\beta K_2 - \bigcup_j f_j(\text{int } D_2), h_{i+1}^v | \beta K_2 - \bigcup_j f_j(\text{int } D_2), \Theta_3(K'_2)), \text{ de telle}$$

façon que les conditions qui suivent soient vérifiées :

$$R - 1 : \Phi_i(b_j) \text{ contient : } \underbrace{\sum_{\ell \in \Phi_i^{-1}(\Phi_i(b_j))} \beta_\ell}_{\text{disques } f_\ell(D_2)} .$$

$$R - 2 : a_j \text{ contient :}$$

$$(\chi(a_j) + \sum_{\ell \in S_j} \gamma_\ell) \text{ disques } f_{k'}(D_2) ,$$

où ℓ parcourt l'ensemble S_j des indices $\ell \in (1, \dots, p)$, tels que $C_\ell \in \Phi_i^{-1}(a_j)$.

R - 3 : Pour chaque a_j , $\chi(a_j)$ des disques $f_{k'}(D_2)$ contenus dans a_j seront marqués. Les $\sum \chi(a_i)$ disques marqués sont exactement les disques actifs de nos $(k + 1)$ glissement élémentaires.

R - 4 : Si l'on oublie les disques actifs, $b_i, (c_j)$ reçoivent exactement $\beta_i (\gamma_j)$ disques non marqués par les $(k + 1)$ glissements élémentaires. (Ces disques ne toucheront pas à $M^2(h_{i+1}^v)$). Ceci finit la remarque \textcircled{R} .

Maintenant on est en mesure de déterminer les nombres n_j de l'énoncé du lemme 3.20. On considère :

$$C_j \in \pi_0((K_2)_2 - M^2(h)) \approx \pi_0((\beta K_2 / \Psi(\beta h))_2) = \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_0^v))_2),$$

et l'application :

$$\Phi_{i,0} : \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_i^v))_2) \longrightarrow \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_0^v))_2),$$

pour $i \geq 0$ quelconque. Alors, on va prendre :

$$n_j = \sum_{i \geq 0} \sum_{\ell} \chi(a_{i,\ell})$$

où $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots$ sont tous les éléments actifs de $\Phi_{i,0}^{-1}(C_j)$. (Si $i = 0$ on met $\chi(C_j)$ si C_j est actif (pour le passage de $h_0^v = h$ à h_1^v) et, autrement, 0, comme contribution de $i = 0$).

Je dis tout de suite que $h_i : {}_i X_1 \longrightarrow \Theta_3(K'_2)$ sera construit de telle manière que, par l'inclusion :

$${}_i X_1 = \beta K_2 - \bigcup_j \lambda_j^i(\text{int } D_2) \subset \beta K_2, \text{ on aura :}$$

$$h_i = h_i^v \mid \beta K_2,$$

et que, en plus, le passage de h_i à h_{i+1} se fait par :

a) isotopie (si le passage de h_i^v à h_{i+1}^v se fait par isotopie).

b) Par $(k+1)$ glissements élémentaires si le passage de h_i^v à h_{i+1}^v se fait par $(k+1)$ surglissements (les glissements vont correspondre aux surglissements,

comme dans la définition 3.20). Il faut dire maintenant comment choisir les plongements :

$$\lambda_j^i : D_2 \longrightarrow (\beta K_2^i)_2 - M^2(\bar{\mu}_1).$$

On commence par considérer $E \subset \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{m(\beta f)}^v))_2)$ tel que $\alpha \in E$ si et seulement si quelque soit $(i+1)$:

$$\Phi_{m(\beta f)-i-1, i+1}(\alpha) \in \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_{i+1}^v))_2)$$

n'est jamais un élément mauvais.

Soient : e_1, \dots, e_x les différents éléments de E . On va choisir des nombres entiers ≥ 0 , $\epsilon_1, \dots, \epsilon_x$, correspondant aux e_i .
A partir de ce choix tout sera "canoniquement" déterminé à isotopie près.
 C'est dans ce sens que $(X_2, f_1, \oplus_3(K'_2))$, dans l'énoncé du lemme 3.20 est "presque canoniquement déterminé". (On rappelle que les $\overset{\vee}{h}_i$, eux, sont bien canoniquement déterminés).

On va commencer par introduire les notations suivantes : Soit $\alpha \in \pi_0((\beta K_2 / \Psi(\overset{\vee}{h}_1))_2)$. On définit deux entiers ≥ 0 , $n(\alpha)$ et $m(\alpha)$ comme suit :

$$n(\alpha) = \sum_{j \geq i} \sum_{\ell} \chi(a_{j,\ell})$$

où $a_{j,1}, a_{j,2}, \dots$ sont tous les éléments actifs de $\Phi_{j-i,i}^{-1}(\alpha) \subset \pi_0((\beta K_2 / \Psi(\overset{\vee}{h}_j))_2)$. (Donc $n(C_\ell) = n_\ell$, défini comme avant).

On définit aussi les nombres $m(\alpha)$, par :

$$m(\alpha) = \sum \epsilon_j$$

où ϵ_j correspond aux e_j parcourant : $e_j \in \Phi_{m(\beta f)-i,i}^{-1}(\alpha)$. Le lemme 3.20.4 implique que, si α est mauvais : $n(\alpha) = m(\alpha) = 0$.

Enfin, le nombre N du lemme 3.20 sera :

$$N = \sum n_j + \sum \epsilon_j = \sum n(\alpha) + \sum m(\alpha) ,$$

où α parcourt : $\alpha \in \pi_0((\beta K_2 / \Psi(\beta h))_2) = \pi_0((\beta K_2 / \Psi(\beta h))_2)$. Le nombre des

$$\lambda_j^0(D_2) = \iota_j(D_2) \subset \alpha$$

sera égal à $n(\alpha) + m(\alpha)$. Le passage de $\{\lambda_j^i(D_2)\}$ à $\{\lambda_j^{i+1}(D_2)\}$ se fait de la manière suivante : Supposons d'abord que $i = 0$. On remarque que le passage de $\overset{\vee}{h}_i$ à $\overset{\vee}{h}_{i+1}$ se fait par une composition de : isotopies à la source, isotopies au but, surglissements. Correspondant à chacune de ces

opérations les $(\lambda_j^0(D_2))$ vont changer de la manière suivante :

1) Dans le cas des isotopies à la source l'image de $\lambda_j^0(D_2)$ dans $\Theta_3(K'_2)$ doit rester inchangée. (Ce qui modifie la position de $\lambda_j^0(D_2)$ par rapport à $M^2(\beta f)$, par une isotopie dans βK_2).

2) Dans le cas des isotopies au but, l'image de $\lambda_j^0(D_2)$ suit l'isotopie. Dans les deux cas 1), 2) (qu'on vient de considérer), on s'arrange "canoniquement" pour ne pas toucher (dans $\Theta_3(K'_2)$) à l'image de $M^2(\beta f)$ (donc, à fortiori, à la source, à $M^2(\beta f)$.)

3) Dans le cas des surglissements, on utilise la remarque (R) ci-dessus. Pour chaque élément actif $\alpha \in \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_o))_2)$, $\chi(\alpha)$ plongements $\lambda_j^0(D_2) \subset \alpha$, seront marqués ("au hasard") et utilisés comme disques actifs qui permettent de transformer les surglissements en glissements. Au but (c'est-à-dire en oubliant la position par rapport à $M^2(\beta f)$) tout est canoniquement défini puisque la succession Σ nous indiquera ce qu'on doit prendre comme élément passif. Dans la suite ces disques marqués, qui sont les seuls à toucher $M^2(h_1)$ ne bougent plus. Quant aux autres, ils ont le sort suivant : chaque $\beta \in \Phi_{1,0}^{-1}(\alpha)$ reçoit (comme dans la définition 3.20) $n(\beta) + m(\beta)$ parmi les $n(\alpha) + m(\alpha) - \chi(\alpha)$ disques non marqués de α . La nouvelle position des disques $\lambda_j(D_2)$ nous définit les plongements :

$$\lambda_j^1 : D_2 \longrightarrow (\beta K_2^1)_2$$

(qui sont bien isotopes aux λ_j^0 dans $(\beta K_2^0)_2 = (\beta K_2)_2$, où on les remonte par $(p_1)^{-1}$). Pour que la construction soit complète on s'arrange à ne pas toucher $M^2(\beta f)$, au but $\Theta_3(K'_2)$. On peut faire ça "canoniquement"

En général, (c'est-à-dire pour i quelconque, $i \geq 1$) on fait la même chose. Si l'on fait abstraction de ce qui se passe à la source, et on regarde au but, on fait les opérations suivantes : parmi les plongements

$\lambda_j^i(D_2)$ il y en aura exactement

$$\sum_j \chi(\bar{a}_{j,i})$$

(où $\bar{a}_{1,i}, \bar{a}_{2,i} \dots$ sont tous les éléments actifs de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_i^v))_2)$, "marqués" à l'étape i ; ce sont ceux qui (avec les disques qui ont déjà été marqués aux étapes antérieures, et auxquels on n'a plus touché depuis) touchent à $M^2(h_i^v)$, qui tuent les cycles parasites, et font que $\Psi(h_i)$ soit acyclique.

(On a :

$$h_i = h_i^v \mid \beta K_2 - \bigcup_j \lambda_j^i(\text{int } D_2) .$$

Autrement (si l'on oublie les disques marqués aux étapes antérieures),

$\alpha \in \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_i^v))_2)$ contient $n(\alpha) + m(\alpha)$ disques $\lambda_j^i(D_2)$. $\chi(\alpha)$ parmi eux seront marqués et utilisés comme disques actifs des glissements

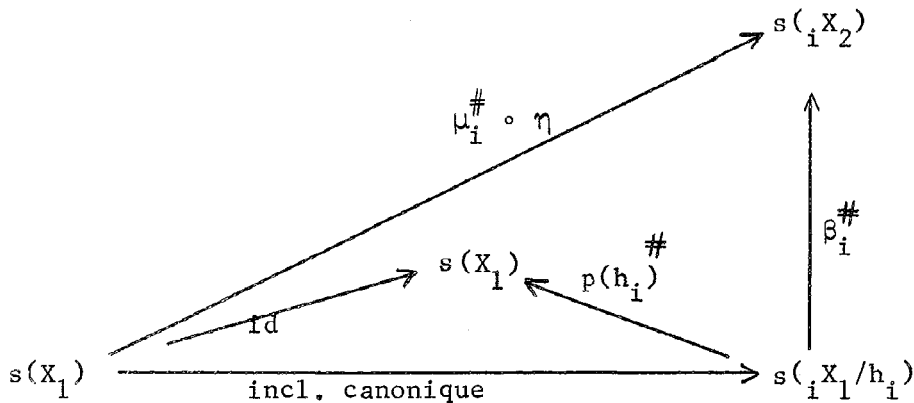
$h_i \implies h_{i+1}$ (correspondant aux surglissements $h_i^v \implies h_{i+1}^v$). Comme avant,

chaque $\beta \in \Phi_{1,i}^{-1}(\alpha)$ recevra $n(\beta) + m(\beta)$ disques, parmi les $n(\alpha) + m(\alpha) - \chi(\alpha)$ disques non marqués de α , qui restent disponibles.

Ceci nous définit complètement λ_j^i , et $h_i : {}_i X_1 \longrightarrow \Theta_3(K_2')$.

Il est facile à vérifier que les propriétés 1°, 2°, 3°-a, 3°-b, 3°-c, 3°-d, du début de la démonstration du lemme 3.20 sont satisfaites.

Le point 3°-e (sous la forme 3°-e') se démontre par induction sur i . Supposons donc, que pour l'indice i , le diagramme 3° -e' :



est bien commutatif. On veut montrer que le diagramme correspondant, pour $(i + 1)$ est aussi commutatif. On peut se restreindre au cas où le passage de h_i à h_{i+1} se fait par $(k + 1)$ glissements élémentaires (l'autre cas étant trivial). Les premiers k glissements (voir la description exacte de notre construction préliminaire) "ne modifient pas le diagramme 3°-e", dans le sens qu'il nous donnent successivement des 2-polyèdres singuliers :

$({}_i X_1, h_i^j, \Theta_3(K_2^j))$ $j = 0, 1, \dots, k$, avec $h_i^0 = h_i$, se déduisant l'un de l'autre par un seul glissement élémentaire, tels que $p(h_i^j)$ se factorise par v_i :

$${}_i X_1 \xrightarrow[v_i]{} {}_i X_1^i \xrightarrow[\beta_i^j]{} {}_i X_1/h_i^j, \quad \beta_i^0 = \beta_i$$

et que, si :

$$I^j : s(X_1) \xrightarrow{\quad} s({}_i X_1/h_i^j)$$

est l'inclusion canonique, on ait :

$$(\beta_i^j)^\# \circ I^j = (\beta_i^{j+1})^\# \circ I^{j+1},$$

et

$$p(h_i^j)^\# \circ I_j = p(h_i^{j+1})^\# \circ I_{j+1}.$$

(On remarque ici que : $s(X_1) = s({}_i X_1)$).

On peut donc supposer, sans perdre la généralité, que $k = 0$.

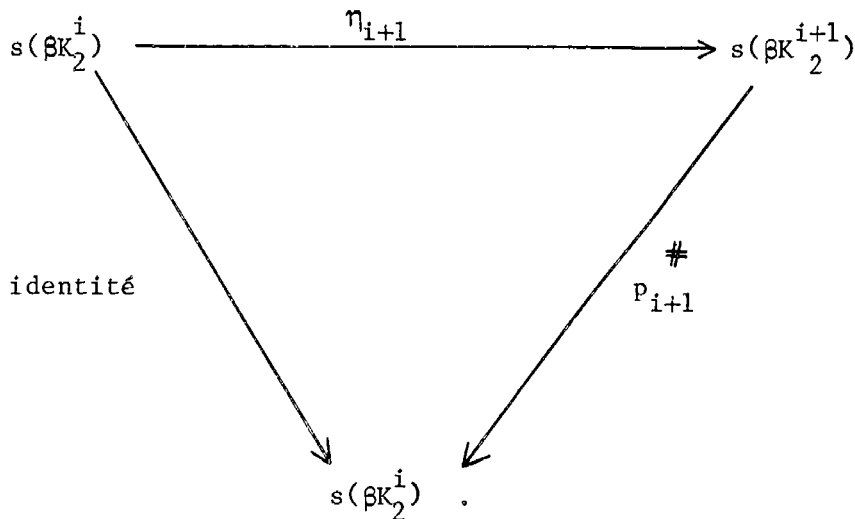
Définition 3.20.0. Considérons les conditions du lemme 3.20. On définit une application

$$\eta_{i+1}(\Sigma) = \eta_{i+1} : s(\beta K_2^i) \longrightarrow s(\beta K_2^{i+1}), \quad i+1 \leq m(\beta f)$$

comme suit : si $x \in s(\beta K_2^i)$ et si $p_{i+1} : s(\beta K_2^i) \longrightarrow s(\beta K_2^{i+1})$ ne touche pas à x , ou si p_{i+1} est du type $0(0)$ on définit : $\eta_{i+1}(x) =$ le point unique de $(p_{i+1}^\#)^{-1}(x)$.

Si p_{i+1} est du type $0(1)$ et $x = \sigma(p_{i+1})$ alors $\eta_{i+1}(x) =$ le point unique de $(p_{i+1}^\#)^{-1}(x)$ qui se trouve sur $[\Sigma \longrightarrow p_{i+1}]$. \square

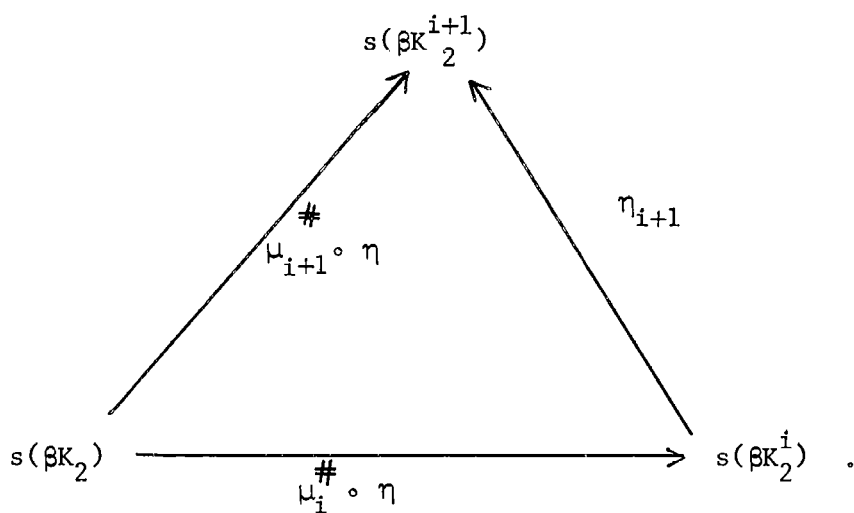
Donc η_{i+1} est une inverse de $p_{i+1}^\#$:



On peut vérifier sans peine les propriétés qui suivent :

(i) $\eta = \eta_m(\beta f) \circ \eta_{m(\beta f)-1} \circ \dots \circ \eta_1$.

(ii) Le diagramme suivant est commutatif :



Pour démontrer (ii) on fait, par exemple, les calculs suivants :

$$\mu_i^\# = p_{i+1}^\# \circ \dots \circ p_m^\# . \text{ Donc :}$$

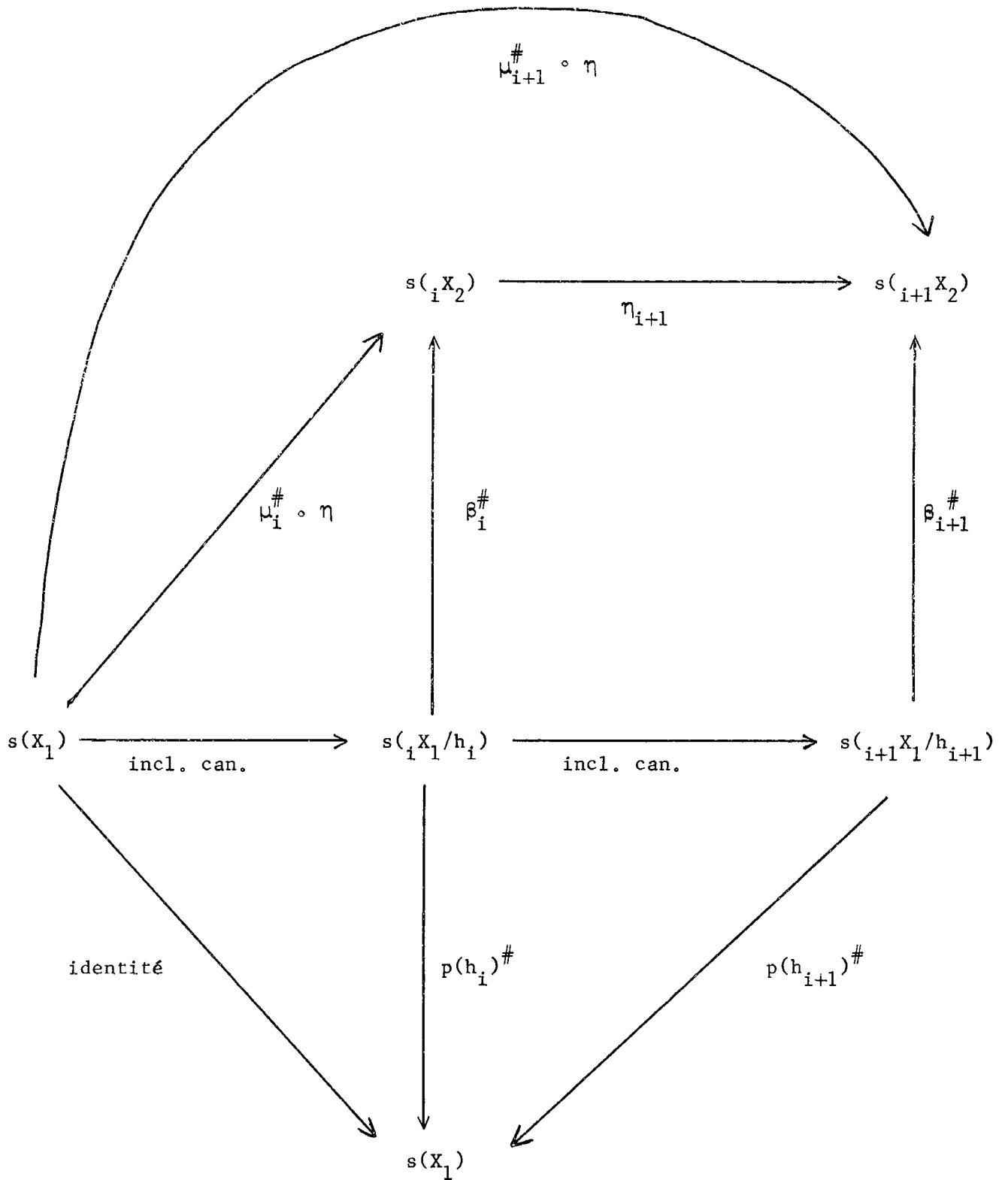
$$\begin{aligned} \mu_i^\# \circ \eta &= p_{i+1}^\# \circ \dots \circ p_m^\# \circ \eta_m \circ \dots \circ \eta_1 = p_{i+1}^\# \circ \dots \circ p_{m-1}^\# \circ \eta_{m-1} \circ \dots \circ \eta_1 = \\ &= \dots = \eta_i \circ \dots \circ \eta_1 . \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\eta_{i+1} \circ \mu_i^\# \circ \eta = \eta_{i+1} \circ \eta_i \circ \dots \circ \eta_1 = \mu_{i+1}^\# \circ \eta . \text{ q.e.d.}$$

Remarque. Le diagramme suivant, en revanche, n'est pas commutatif :

$$\begin{array}{ccc} s(\beta K_2) & \xrightarrow{\eta} & s(\beta K_2 / \beta f) \\ \uparrow \mu_i^\# & & \downarrow \mu_{i+1}^\# \\ s(\beta K_2^i) & \xrightarrow{\eta_{i+1}} & s(\beta K_2^{i+1}) \end{array} .$$

Maintenant, si l'on sait que le diagramme 3° - e') est commutatif au cran i , on peut montrer tout de suite qu'il est commutatif au cran $(i+1)$ à partir du diagramme suivant :



La preuve que ce dernier diagramme est commutatif est laissée au lecteur.

Ceci finit la démonstration du lemme 3.20. Une récapitulation de cette démonstration, avec quelques commentaires, se trouve en début de la démonstration du lemme 3.22.

4.8) Démonstration du lemme 3.21.

La démonstration du lemme 3.21 est triviale (vu la démonstration du lemme 3.20) à partir du fait suivant : on considère la CONSTRUCTION PRELIMINAIRE de la démonstration du lemme 3.20, en particulier, pour un i' quelconque :

$$\checkmark h_{i'} : \beta K_2 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2')$$

On considère $M^2(\beta f) \subset \beta K_2$. Je dis que :

$$\checkmark h_{i'}(M^2(\beta f)) \cap \checkmark h_{i'}(A) = \checkmark h_{i'}(M^2(\beta f) \cap A)$$

(A priori, les points de $\checkmark h_{i'}(M^2(\beta f)) \cap \checkmark h_{i'}(A)$ pourraient être de deux sortes :

I. Points provenant de $M^2(\beta f) \cap A$.

II. Points provenant d'intersections transversales de $\checkmark h_{i'}(M^2(\beta f))$ et $\checkmark h_{i'}(A)$, c'est-à-dire qu'on pourrait avoir dans $\mathbb{O}_3(K_2')$ un voisinage de coordonnées R_3 , tel que :

$$(x = 0) = R_3 \cap \checkmark h_{i'}(A)$$

$$(y = 0) \subset R_3 \cap \checkmark h_{i'}(\beta K_2 - A)$$

$$(y = 0) \supset (z = y = 0) \subset (R_3 \cap \checkmark h_{i'}(M^2(\beta f) \cap (\beta K_2 - A))).$$

Je dis que de telles situations du type II n'arrivent pas). Remarquons, de toute façon que $A - A \cap K_2$ est une composante connexe de $(\beta K_2)_2$, donc que les différentes isotopies à la source ne vont pas changer le type de difféomorphisme de la paire :

$$(A, A \cap M^2(\beta f) = \text{un segment}) .$$

On va remarquer le fait suivant :

Lemme 3.21.1. "Considérons la CONSTRUCTION PRELIMINAIRE de la démonstration du lemme 3.20, dans le cas où la succession $\Sigma = \emptyset$, (ce qui fait, en particulier, que les isotopies D_t^{i+1} sont : $D_t^{i+1} \equiv \text{identité}$), et une composante

connexe $Z \in \pi_0((\beta K_2)_2)$, telle que Z ne possède pas d'intersection transversale avec $\check{h}_i(M^2(\beta f))$. Alors : 1) Si p_{i+1} est du type $O(0)$, Z ne possèdera pas d'intersection transversale avec $\check{h}_{i+1}(M^2(\beta f))$ non plus, à condition que $\sigma(p_{i+1})$ ne soit pas adhérent à Z .

2) Si p_{i+1} est du type $O(1)$ et

$$Z \cap R_3 = (x = \theta_{i_0} z) \cap (z > 0),$$

Z ne possèdera pas d'intersection transversale avec $\check{h}_{i+1}(M^2(\beta f))$, non plus". \square

On revient maintenant à notre $A = A(p_i)$. Clairement A n'est adhérent à aucun point de la forme $\sigma(p_j)$, avec p_j du type $O(0)$, et c'est facile à voir que si $x \in A$ et $i' < i$:

$$\check{h}_{i'}^{-1}(\check{h}_{i'}(x)) = \{x\}.$$

Pour p_i , A est dans la situation de Z du point 2), lemme 3.21.1, donc $\check{h}_i|_A$ est un plongement et A n'a pas d'intersections transversales avec $\check{h}_i(M^2(\beta f))$. A partir de là (pour $i' > i$) on ne touchera donc plus à A . Ceci suffit pour démontrer le lemme 3.21. \square

4.9) Démonstration du lemme 3.22.

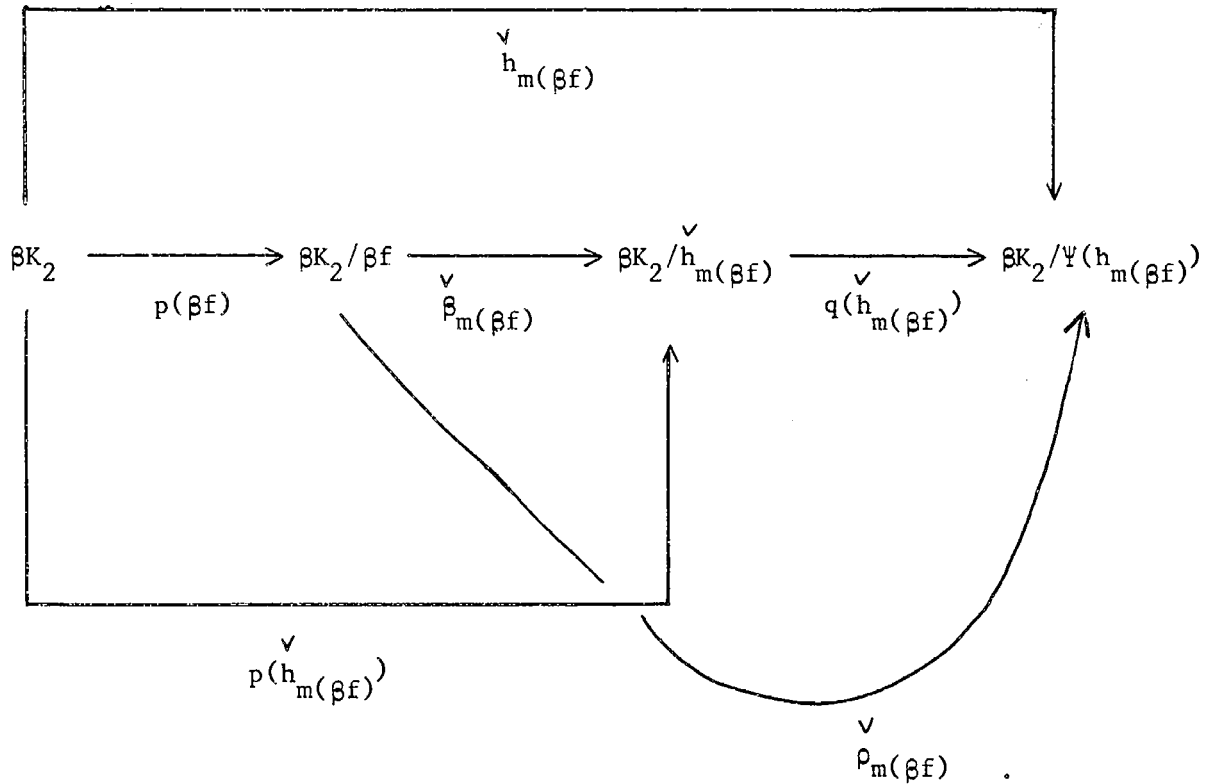
On commence par une récapitulation générale de la démonstration du lemme 3.20.

On est parti du 2-polyèdre singulier (K_2, h, M_3) , qu'on a fait bourgeonner, par le bourgeonnement β , ce qui nous a donné : $(\beta K_2, \beta h, \Theta_3(K'_2))$ et, par LA CONSTRUCTION PRELIMINAIRE, on a fabriqué, d'une manière canonique, un 2-polyèdre singulier $(\beta K_2, \check{h}_m(\beta f), \Theta_3(K'_2))$ tel que :

a) $(\beta K_2, \check{h}_m(\beta f), \Theta_3(K'_2))$ s'obtient à partir de $(\beta K_2, \beta h, \Theta_3(K'_2))$ par un nombre fini de surglissements élémentaires et d'isotopies (à la source et au but).

b) $\overset{v}{h}_m(\beta f)$ se factorise (à droite) par $p(\beta f)$:

$$\overset{v}{h}_m(\beta f) = \overset{v}{\rho}_m(\beta f) \circ p(\beta f) :$$



c) $M^3(\overset{v}{\rho}_m(\beta f)) = \emptyset$ et :

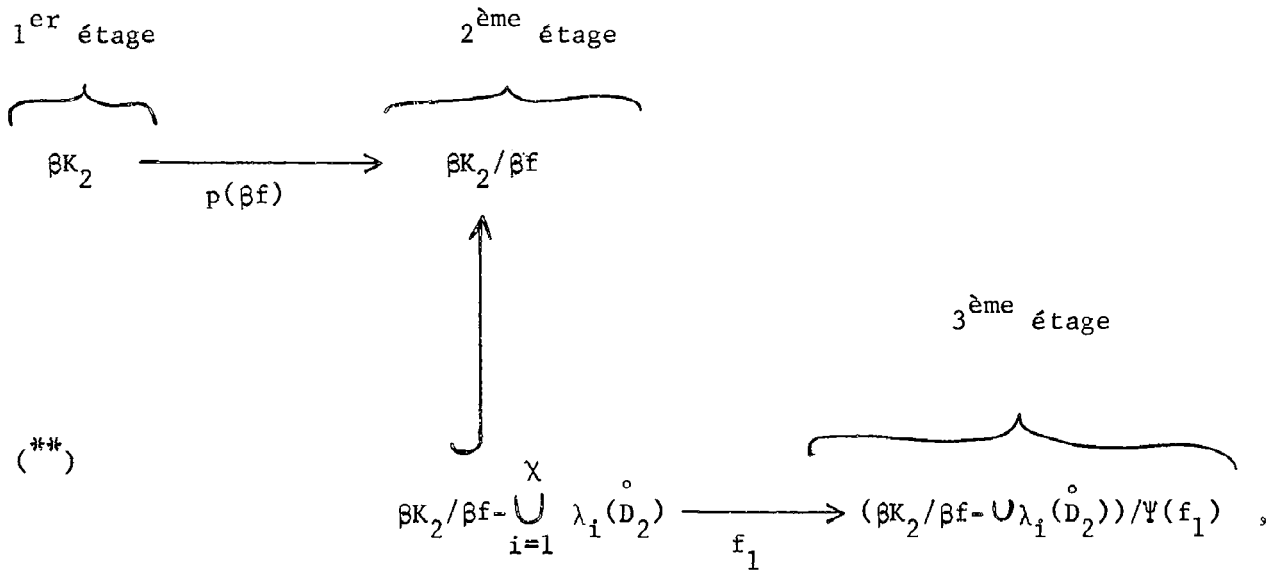
$M^2(\overset{v}{\rho}_m(\beta f))$ coupe $M^2(q(\beta f))$ transversalement (dans $\beta K_2 / \beta f$).

d) Dans $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(\overset{v}{h}_m(\beta f)))_2)$ on a défini un sous-ensemble E (voir la fin de la démonstration du lemme 3.20), qui est constitué d'éléments qui n'ont, parmi leur antécédents, (dans les différents $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(\overset{v}{h}_i))_2)$, $i \leq m(\beta f)$) aucun élément mauvais. On a désigné par e_1, e_2, \dots les différents éléments de E . On a déjà remarqué que $\Psi(\overset{v}{\rho}_m(\beta f))$ n'était pas acyclique, puisque les surglissements produisent des cycles parasites (qui se trouvent toujours en dehors des branches $(x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0) = [\Sigma \longrightarrow p_{i+1}]$, associées aux surglissements respectifs...). Le nombre des cycles parasites est égal à

$\chi/2$, où $\chi =$ le nombre des intersections : $\chi = \sum n_j = \sum \chi(a_i)$ (où a_i parcourt tous les éléments actifs fabriqués au cours de la construction préliminaire).

On se donne, enfin, des entiers : $\epsilon(e_i) = \epsilon_i \geq 0$, arbitrairement.

La démonstration du lemme 3.20, nous fournit χ disques de dimension 2, 2-à-2 disjoints : $\lambda_j(D_2) \subset (\beta K_2 / \beta f)_2$ ($j = 1, \dots, \chi$) (en fait $\lambda_j(D_2) \subset (K_2 / f)_2 \subset (\beta K_2 / \beta f)_2$) qui touchent à $M^2(\overset{\vee}{\rho}_m(\beta f))$ et tuent les cycles parasites. Le diagramme du point b) va nous fournir, alors, le diagramme suivant :



où $f_1 = \overset{\vee}{\rho}_m(\beta f) \mid (\beta K_2 / \beta f - \bigcup \lambda_i(D_2))$.

Enfin, on se donne aussi des 2-disques 2-à-2 disjoints :

$\lambda_{\chi+1}(D_2), \dots, \lambda_{\chi+\sum \epsilon_i}(D_2)$, dans $(\beta K_2 / \Psi(\overset{\vee}{h}_m(\beta f)))_2$, disjoints des images de $\lambda_1(D_2), \dots, \lambda_\chi(D_2)$, ϵ_i dans chaque $e_i \in E$. Dans le diagramme (***) on a trois étages. Les disques $\lambda_1(D_2), \dots, \lambda_\chi(D_2)$ sont au second étage (on va les désigner parfois par $\lambda_1(D_2) = \underbrace{\lambda_1(D_2)}_2$, etc) tandis que les disques $\lambda_{\chi+1}(D_2), \dots$ sont au troisième étage (on va les désigner parfois par : $\lambda_{\chi+1}(D_2) = \underbrace{\lambda_{\chi+1}(D_2)}_3$, etc.) Tous les disques $\lambda_i(D_2)$ ($i=1, \dots, \chi + \sum \epsilon_i$)

ont un sens précis à chacun des 3 étages. On va les écrire, considérés au premier, second ou troisième étage : $\underbrace{\lambda_i(D_2)}_1$, $\underbrace{\lambda_i(D_2)}_2$, ou $\underbrace{\lambda_i(D_2)}_3$.

f) On peut passer de :

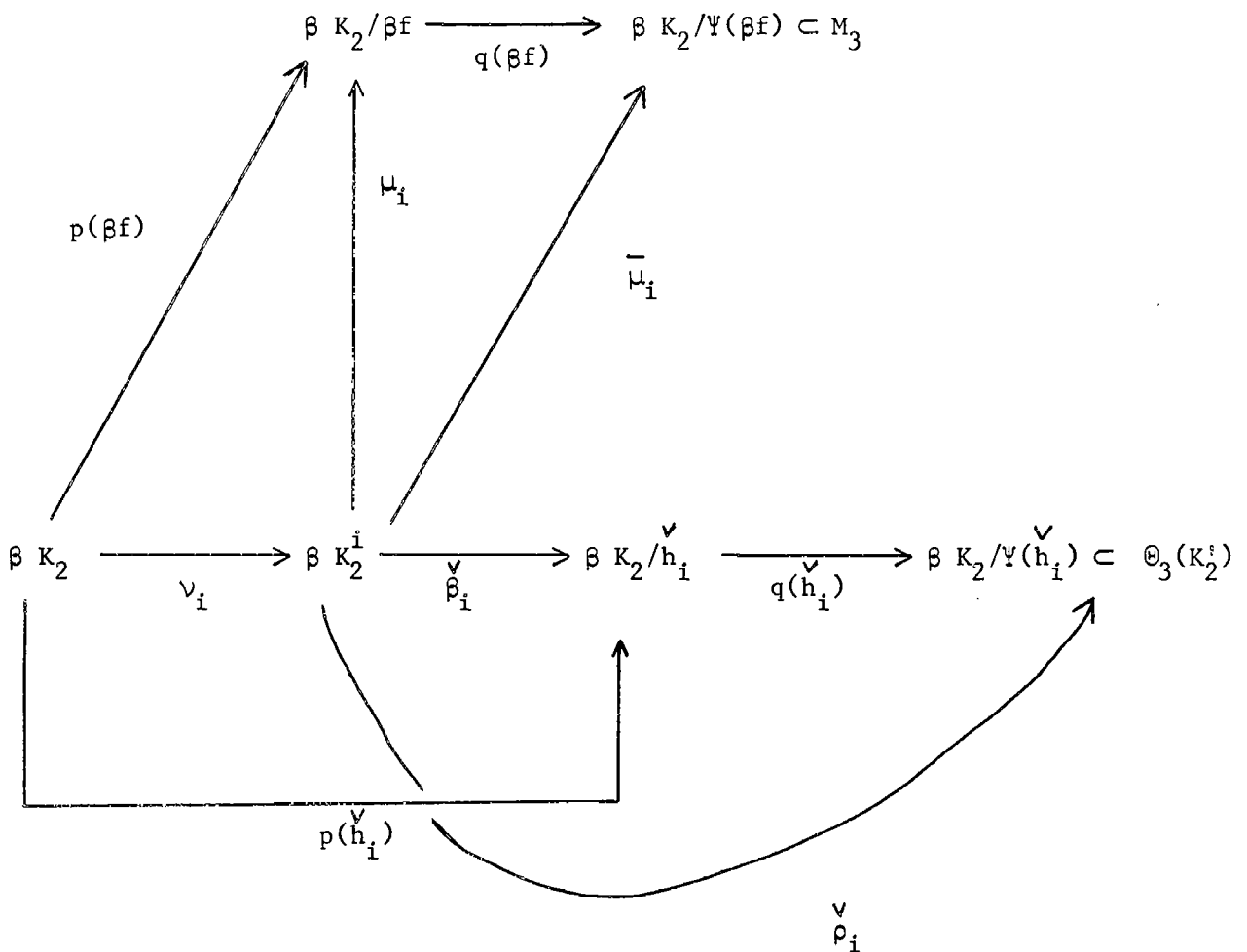
$$(\beta K_2 - \underbrace{\bigcup \lambda_j(D_2)}_1, \beta h, \Theta_3(K'_2)) \text{ à :}$$

$$(\beta K_2 - \underbrace{\bigcup \lambda_j(D_2)}_1, \overset{\vee}{h}_m(\beta f) \mid (\beta K_2) - \underbrace{\bigcup \lambda_j(D_2)}_1 = \overset{\vee}{h}_m(\beta f), \Theta_3(K'_2)), \text{ par un}$$

nombre fini d'isotopies et de glissements élémentaires. (Ici $1 \leq j \leq \chi + \sum \epsilon_i$.)

Remarque importante. Les isotopies du point f) sont "au but" ou "à la source".

Les premières sont ce à quoi on peut s'attendre, mais les secondes ont un caractère non trivial. Elles peuvent être décrites comme suit : on considère une étape intermédiaire de la construction préliminaire :



(où l'on rappelle que $\beta f = q(\beta f) \circ p(\beta f)$).

On se donne une variété ouverte $V_2 \subset (\beta K_2^i)_2$ contenant en son intérieur les disques $\lambda_{j_1}(D_2), \dots, \lambda_{j_r}(D_2)$, et ne touchant pas aux autres. On suppose que ces disques ne touchent ni à $M^2(\bar{\mu}_i)$ ni à $M^2(\check{\rho}_i)$.

On se donne une isotopie de support compact, contenu dans V_2 : $H_t : \beta K_2^i \longrightarrow \beta K_2^i$, $t \in [0,1]$, $H_0 =$ identité, telle que $H_1^{-1} \circ \lambda_{j_i}(D_2) \cap M^2(\bar{\mu}_i) = \emptyset$.

Notre isotopie remplace :

$$\check{\rho}_i \text{ par } \check{\rho}_i \circ H_1 \quad (\text{donc } h_i \text{ par } h_i \circ H_1)$$

et les $\lambda_{j_1}(D_2), \dots, \lambda_{j_r}(D_2)$ par :

$$H_1^{-1} \circ \lambda_{j_1}(D_2), \dots, H_1^{-1} \circ \lambda_{j_r}(D_2) .$$

On remarque que $H_1^{-1} \circ \lambda_{j_1}(D_2), \dots$, continuent à ne pas toucher à $M^2(\check{\rho}_i \circ H_1) = H_1^{-1} \circ (M^2(\check{\rho}_i))$.

Nos isotopies changent la position relative de $\lambda_{j_1}(D_2), \dots$ et de $M^2(\beta f)$, parce que, en général, l'isotopie $H_t M^2(\beta f)$ touche à $\lambda_{j_1}(D_2), \dots$.

C'est pour cela qu'on a fait une différence entre ι_i et λ_i dans l'énoncé du lemme 3.20, et qu'on a distingué entre X_2 , et $\beta X_1/\beta f$ qui sont difféomorphes mais "par identiques".

En termes plus précis, tout ce qu'on sait c'est qu'en partant de $(\beta K_2 - \underbrace{\bigcup \lambda_j(\overset{\circ}{D}_2)}_1, \beta h, \mathcal{O}_3(K_2^i))$, par des isotopies (comme ci-dessus) et des

glissements, on trouve un

$(\beta K_2 - \underbrace{\bigcup \lambda_j(\overset{\circ}{D}_2)}_1, h_m(\beta f), \mathcal{O}_3(K_2^i))$, qui "miraculeusement", a les propriétés de se factoriser (à droite) par : $\beta K_2 - \bigcup \lambda_j(\overset{\circ}{D}_2) \xrightarrow{p(\beta f)} (\beta K_2 - \bigcup \lambda_j(\overset{\circ}{D}_2))/\beta f$. \square

Le $(X_2, f_1, \mathcal{O}_3(K_2'))$ du lemme 3.20 est, en fait :

$$(X_2, f_1, \mathcal{O}_3(K_2')) = ((\beta K_2 - \lambda_j(D_2)) / \beta f, \rho_m(\beta f) | [(\beta K_2 - \cup \lambda_j(D_2)) / \beta f], \mathcal{O}_3(K_2')) .$$

g) On va expliquer maintenant comment les $\lambda_i(D_2)$ du lemme 3.20, apparaissent, à la lumière de tout ce qu'on vient de dire. D'abord, sans perte de généralité on peut supposer que :

$$\underbrace{\lambda_i(D_2)}_1 \cap M^2(h) = \emptyset$$

où $1 \leq i \leq \chi + \sum \epsilon_j$. Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_b$ les composantes connexes de $(K_2)_2$ et soit b_j le nombre des $\underbrace{\lambda_i(D_2)}_1$ qui tombent dans Γ_j .

Les disques $\lambda_i(D_2)$ "donnés" au début du lemme 3.20 sont des disques de $(K_2')_2 - M^2(f) - M^2(h)$ tel que le nombre des $\lambda_i(D_2)$ dans chaque Γ_j soit égal à b_j . C'est tout ; le fait qu'on "se donne les $\lambda_i(D_2)$ " (lemme 3.20) n'est qu'une manière de dire qu'on se donne les b_j . En fait les b_j sont calculables à partir de la construction préliminaire et des ϵ_i , et c'est les ϵ_i qu'on ne donne vraiment.

Ceci finit notre récapitulation de la démonstration du lemme 3.20.

Supposons maintenant qu'on choisisse des nombres $\epsilon^*(e_i) = \epsilon_i^* \geq \epsilon_i$. On peut considérer des disques λ_i^* comme tout à l'heure et sans perte de généralité on peut toujours supposer que : $\lambda_i^* = \lambda_i$ si $i \leq \chi$, que les λ_j ($\chi+1 \leq j \leq \chi + \sum \epsilon_i$) sont parmi les λ_i^* ($\chi+1 \leq j \leq \sum \epsilon_i^*$), et :

$$f_1^* = f_1 | (\beta K_2 - \cup \lambda_j^*(D_2)) / \beta f .$$

Par abus de notation f_1^* sera désigné par f_1 .

L'opération qui remplace tout le processus décrit, avec ϵ_i^* au lieu de ϵ_i sera appelé un élargissement.

(Remarque: On pourrait être tentés de croire que l'élargissement peut-être décrit, aussi, de la façon suivante : on applique tout le processus décrit ci-dessus à $(\beta K_2 - \bigcup_{j=\chi+1}^{\chi+\Sigma} \epsilon_i \lambda_j(D_2), \beta f, \mathcal{O}_3(K'_2))$ avec ϵ_i remplacé par $\epsilon_i^* - \epsilon_i$. En fait ceci est faux. Ce qu'on obtiendrait serait différent de notre élargissement, à cause de la différence qu'il y a, entre les disques $\lambda_i(D_2)$ et $\lambda_i(D_2)$, dans le lemme 3.20, et la remarque importante faite plus haut).

Après ces remarques de caractère général, la démonstration du lemme 3.22 se fait en plusieurs étapes.

Etape 1°. On commence par appliquer le lemme 3.20 (c'est-à-dire la construction qu'on vient de passer en revue ci-dessus) à (K_2, f, M_3) , avec les données (A_1, B_1, C_1, D_1) (énoncé du lemme 3.22), les ϵ_i étant choisis comme suit. Pour chaque bourgeon $A = A(p) \subset \beta K_2 - K_2$, on considère un petit disque de dimension 2, $D_2(A)$, tel que :

$$1) \quad D_2(A) \subset (K_2)_2 \quad \text{et} \quad p(\beta f) (\overset{\circ}{D}_2(A)) \subset (\beta K_2 / \beta f)_2 .$$

2) Il existe un intervalle fermé $I(A) \subset D_2(A)$ (tel que $I(A) \cap \partial D_2(A) = \partial I(A)$, coupant $\partial D_2(A)$ transversalement), tel que $I(A) = D_2(A) \cap M^2(\overset{\vee}{h}_{m(\beta f)})$, et :

$$\overset{\vee}{h}_{m(\beta f)} (I(A)) = \overset{\vee}{h}_{m(\beta f)} (x^2 + y^2 = \epsilon_0^2, x \leq 0, y \geq 0) .$$

(On se réfère ici à la description de

$$M^2(f_1 \circ p(\beta f)) \cap A = M^2(\overset{\vee}{h}_{m(\beta f)}) \cap A$$

du lemme 3.21).

On choisit des petits disques

$$L'(p) (D_2) \subset \overset{\circ}{D}_2 - I(A) .$$

La composante connexe de $\pi_0((\beta K_2 / \Psi(\overset{\vee}{h}_{m(\beta f)}))_2)$, dans laquelle se

trouve $L'(p) (D_2)$, est toujours dans E . Ceci résulte du fait que, le bourgeonnement β est total ($\Sigma = \emptyset$) et tous les mauvais éléments introduits par la construction se trouvent à l'intérieur des bourgeons $\beta K_2 - K_2$; d'autre part, on a : $(\beta K_2 - [\beta K_2]) \cap (\beta K_2 - K_2) = \emptyset$, e.a.d.s.

On va prendre comme $\epsilon(e_i) = \epsilon_i$, le nombre des $L'(p) (D_2)$ qui se trouvent dans $e_i \in E$.

Cette première application du lemme 3.20, nous fournit des :

$$\beta X_1 = \beta K_2 - \bigcup_i \lambda_i (\overset{\circ}{D}_2) \approx \beta \bar{X}_1 = \beta K_2 - \bigcup_i \ell_i (\overset{\circ}{D}_2),$$

et un $(X_2 = \beta X_1 / \beta f, f_1, \Theta_3(K'_2))$, tels que I et II (lemme 3.22) soient satisfaits.

En effet, si l'on regarde le diagramme à trois étages (**), pour le cas dont il s'agit ici :

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta X_1 & \xrightarrow{p(\beta f)} & \beta X_1 / \beta f = X_2 & \xrightarrow{f_1} & X_2 / \Psi(f_1) \subset \Theta_3(K'_2), \\
 & \searrow f & \downarrow q(\beta f) & & \\
 & & \beta X_1 / \Psi(\beta f) \subset M_3 & &
 \end{array}$$

on peut considérer les inclusions naturelles de $D_2(A(p))$ dans la source de la flèche f_1 , entre le deuxième et le troisième étage :

$D_2(A(p)) \hookrightarrow X_2 = \beta X_1 / \beta f$. De plus on peut considérer des intervalles fermés emboîtés $j(A(p)) \subset J(A(p)) \subset D_2(A(p))$ tels que :

a) $J A(p)$ a une extrémité dans $s(p) \in \partial D_2(A(p))$, l'autre dans $\partial L'(p) (D_2)$.

b) $\text{int } J A(p) \subset \text{int } D_2(A(p))$ et $J A(p)$ est transversal à $\partial D_2(A(p)) + \partial L'(p) (D_2)$; $\text{int } J(A(p) \cap L'(p) (D_2)) = \emptyset$.

c) $j A(p)$ a une extrémité dans $s(p)$.

d) $j A(p) = J A(p)$ (respectivement $j A(p) \neq J A(p)$) si $A(p)$ déborde dans $[\beta K_2]$ (respectivement, si $A(p)$ ne déborde pas ; voir la définition 3.30).

(On fixera, plus tard, le choix de qui déborde dans qui ...).

Considérons $X_2 \subset \beta K_2 / \beta f \supset L(p) (D_2)$ (où $L(p) (D_2)$ est le disque de la définition 3.30). Il est facile à voir qu'on a un difféomorphisme $\beta K_2 / \beta f \xrightarrow{\delta} \beta K_2 / \beta f$, induisant l'identité sur :

$s(\beta K_2 / \beta f) + M^2(q(\beta f)) - \mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2 / \beta f)) \cap p(\beta f) K_2$, et tel que :

$$\delta(L(p) (D_2)) = L'(p) (D_2) \text{ et :}$$

$$\delta(\mu(q(\beta f) \mid [\beta K_2], s(p)) - p(\beta f) A(p)) = j A(p).$$

Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $L(p) (D_2)$, $\mu(q(\beta f) \mid [\beta K_2], s(p)) - p(\beta f) A(p)$ sont remplacés par $L'(p) (D_2)$, $j A(p)$. La source de f_1 est donc bien telle que :

$$X_2 = \beta X_1 / \beta f \xrightarrow{q(\beta f)} \beta X_1 / \Psi(\beta f) \subset M_3$$

soit excellente ! (comparer aussi avec l'isotopie de la figure 3.20.5 démonstration du lemme 3.20).

On peut donc ajouter aux propriétés a, b, c, d :

$$e) \mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2 / \beta f)) - p(\beta f) (\text{Cl}(\beta K_2 - K_2)) \subset \bigcup_p J A(p) ,$$

(il s'agit ici de $q(\beta f) \mid [\beta K_2] \cong q(\beta f) \mid X_2$).

f) $J A(p) \cap M^2(f_1) = \emptyset$.

Ces propriétés impliquent que :

$(\mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2/\beta f)) - (\text{les bourgeons } \beta)) \cap M^2(f_1) = \emptyset$, c'est-à-dire la propriété III du lemme 3.22.

Etape 2°. A partir de II, on peut démontrer sans aucune peine IV - (a) et IV - (b), en utilisant les isotopies de seconde espèce, au but, décrites par la figure 3.22.

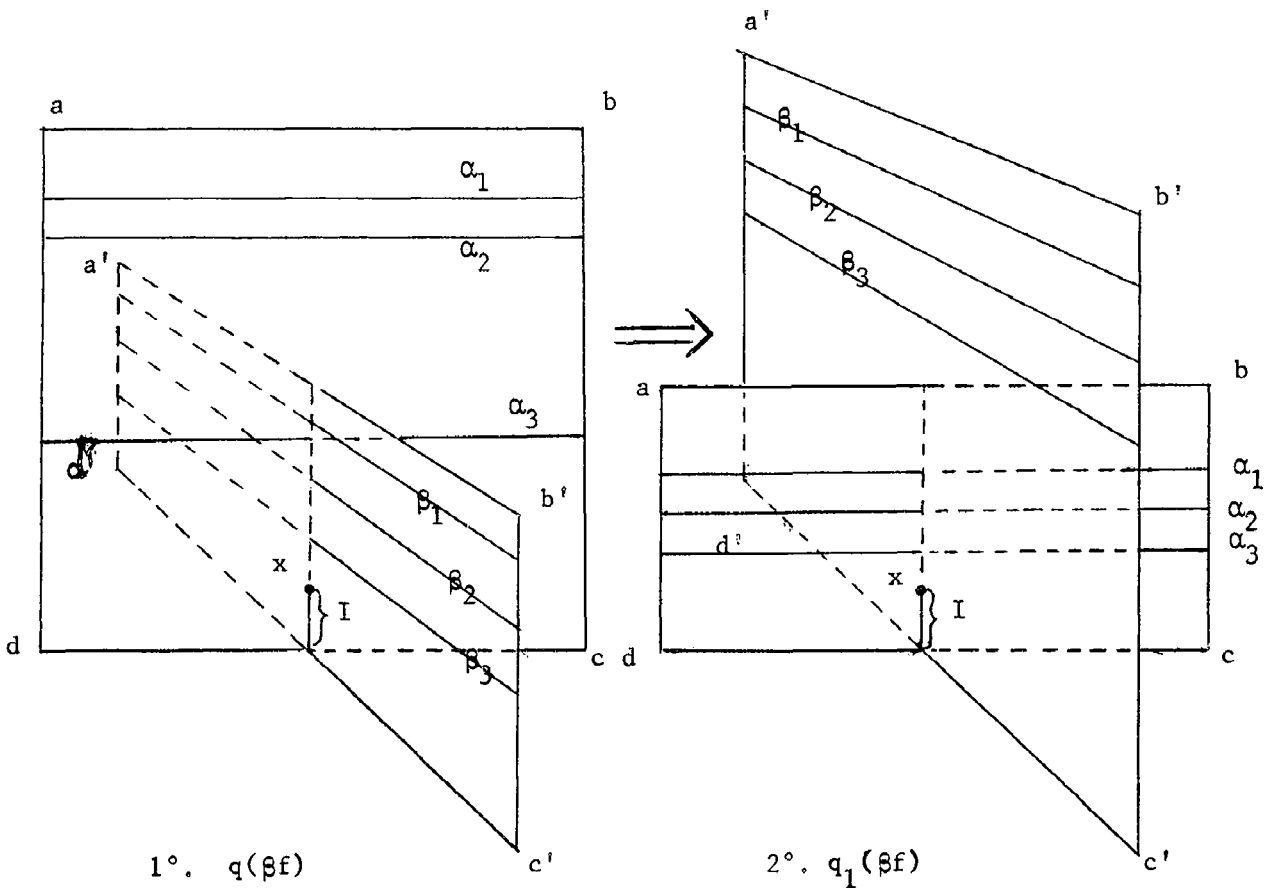


Figure 3.22.

EXPLICATION DE LA FIGURE 3.22. La figure est dans M_3 . Soit A le rectangle (a, b, c, d) , A' le rectangle (a', b', c', d') . X_2 contient $A \oplus_I A' \ni x \in s(X_2)$, où $(a, b) \cup (a', b') = (A \oplus_I A') \cap \partial X_2$. Il est entendu que :

$$A \cap M^2(q(\beta f)) \subset M^2_+(q(\beta f)) \text{ et}$$

$$A' \cap M^2(q(\beta f)) \subset M^2_-(q(\beta f)) .$$

La figure 1° représente $q(\beta f) (A \oplus A')$ et la figure 2° représente $q_1(\beta f) (A \oplus A')$. $(x, y]$ est l'image des points doubles de $q(\beta f)$ (respectivement de $q_1(\beta f)$).

$$\text{Enfin : } \bigcup \alpha_i = M^2(f_1) \cap A,$$

$$\bigcup \beta_i = M^2(f_1) \cap A',$$

$$\mu_+(q_1(\beta f), x) = (x, y] \text{ considéré dans } A \text{ (fig. 2°) et}$$

$$\mu_-(q_1(\beta f), x) = (x, y] \text{ considéré dans } A' \text{ (fig. 2°). } \square$$

On peut supposer, sans perdre la généralité que IV - (C):

$$(C) \quad M^2(q_1(\beta f)) \cap [\text{Cl}(\bar{\beta} x_2 - x_2) + \bigcup_i I(\bar{x}_i)] = \emptyset, \text{ est aussi satisfaite.}$$

(Ceci parce que $\bar{\beta}(\bar{x}_i) \cup I(\bar{x}_i)$ est dans un voisinage aussi petit que l'on veut de \bar{x}_i et $(\bar{\beta}(\bar{x}_i) \cap x_2) \cup I(\bar{x}_i)$ est un arbre ...)

Etape 3°. On considère $(x_2 = \beta x_1 / \beta f, f_1, \Theta_3(K'_2))$ et le bourgeonnement $\bar{\beta}$ du lemme 3.21.2 :

$$(\bar{\beta} x_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K'_2)) .$$

On considère, aussi, la succession Σ_2 du lemme 3.21.2. On va décrire un bourgeonnement compatible avec Σ_2 :

$$(\beta_1 \bar{\beta} x_2, \beta_1 \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K'_2)) .$$

Les projections du type 0(1) qui sont représentées dans Σ_2 , sont exactement les p'_i du lemme 3.21 et les P_j du lemme 3.21.2.

En particulier, les $P(p)$ de la fin du lemme 3.21 (où p parcourt les projections du type 0(1) de $K_2 \xrightarrow[p(f)]{} K_2/f \xrightarrow[q(f)]{} K_2 / \Psi(f)$), ne

sont jamais représentées dans Σ_2 . Si \bar{p} est une projection du type 0(1), quelconque, de :

$$\bar{\beta} X_2 \xrightarrow{p(\bar{\beta} f_1)} \bar{\beta} X_2 / \bar{\beta} f_1 \xrightarrow{q(\bar{\beta} f_1)} \bar{\beta} X_2 / \Psi(\bar{\beta} f_1),$$

qui n'est pas représentée dans Σ_2 , le bourgeonnement β_1 va lui attacher un bourgeon désigné par $A_1(\bar{p})$. On va imposer une condition précise aux $A_1(P(p))$. Les autres $A_1(\bar{p})$ pourront être pris arbitrairement.

Soit $P(p)$ comme à la fin du lemme 3.21, et $\sigma(P(p)) = s(p) \in \sigma(\beta K_2/\beta f) \subset s(\bar{\beta} X_2) = s(X_2)$. On va désigner par $\mu_{\pm}(q_1(\beta f), s(p))$ la branche qui est dans $A(p)$ et par $\mu_{\mp}(q_1(\beta f), s(p))$ la branche qui ne touche pas à $A(p)$. On remarque que l'intervalle $J(A(p))$ de la fin de l'étape 1°, a les propriétés suivantes :

$\alpha)$ $J A(p) \cap M^2(\bar{\beta} f_1) = \emptyset$.

$\beta)$ $\mu_{+}(q_1(\beta f), s(p)) \subset J A(p)$.

$\gamma)$ $\text{int } J A(p) \subset \text{int } (X_2)_2$.

$\delta)$ $J A(p)$ a une extrémité dans $s(\bar{\beta} X_2)$, l'autre sur ∂X_2

(en fait $J A(p) \cap s(\bar{\beta} X_2) = s(p)$.)

Lemme 3.22.0. "Il existe une manière (et une seule, à isotopie près), de choisir le bourgeon $A_1(P(p))$, de telle façon que la condition suivante soit satisfaite : ils existent des voisinages (de coordonnées) : $R_3 = R_3(p) \subset M_3$, contenant $\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f) s(p) \in M_3$, tel que les différents $R_3(p)$ soient deux-à-deux disjoints, et que

$$(\beta_1 \bar{\beta} q_1^{-1}(\beta f)(R_3), \beta_1 \bar{\beta} q_1, R_3)$$

soit isomorphe à la description suivante :

On munit R_3 de coordonnées (x, y, z) et on considère :

$$\eta = ((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup ((x = 0) \cap (y^2 + z^2 \leq 1)) \cup$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^N ((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)) \subset R_3$$

où : $\boxed{0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N}$.

On se donne un plongement propre :

$$h : R \longrightarrow (x = 0) \cap (z < 0) ,$$

tel que $h(-\infty, 0] = (x = y = 0) \cap (z \leq -1)$, et que $h(0, \infty) \cap (x = y = 0) = \emptyset$.

On considère

$$\zeta = \{x, (y, z) \in h(R)\} \subset R_3 , \text{ et}$$

"l'immersion" naturelle $j : \underbrace{\eta \oplus \zeta}_{h(-\infty, 0]} \longrightarrow R_3$.

On a un isomorphisme :

$$(\beta_1 \bar{\beta} q_1^{-1}(\beta f)(R_3), \beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f), R_3) = (\eta \oplus \zeta, j, R_3)_{h(-\infty, 0]}$$

tel que :

1) $s(p) = ((x = 0), h(0)) = (x = 0, y = 0, z = -1)$.

2) $A(p) \cap (\eta \oplus \zeta)_{h(-\infty, 0]} = (x = 0, z \leq 0)$.

3) $A_1(P(p)) = (x = 0) \cap (y^2 + z^2 \leq 1) \cap (z \geq 0)$.

4) $(\eta \oplus \zeta)$ ne touche pas aux bourgeons $\bar{\beta}$.

5) $\eta \cap M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) = \eta \cap (y = 0) \cap (z > -1)$.

6) $\zeta \cap M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1)$ se trouve du même côté de $(x = 0)$ que

les $(x = \theta_1 z) \cap (z \geq 0)$, c'est-à-dire, que :

$$\zeta \cap M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) \subset \zeta \cap (x \geq 0) \quad " . \quad \square$$

La démonstration est laissée au lecteur. On verra l'intérêt de ce lemme, plus loin.

Remarquons que, de toute façon, vu la définition de Σ_2 , les bourgeons β et $\bar{\beta}$ sont disjoints.

Il est important de remarquer, aussi, que les propriétés α), β), γ), δ) énoncés ci-dessus impliquent :

$$[\mu(q_1(\beta f)) , \sigma(\beta K_2 / \beta f)) - p(\beta f) (Cl(\beta K_2 - K_2))] \cap M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) = \emptyset .$$

Donc, si l'on considère :

$$q_1(\beta f) : X_2 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K'_2) ,$$

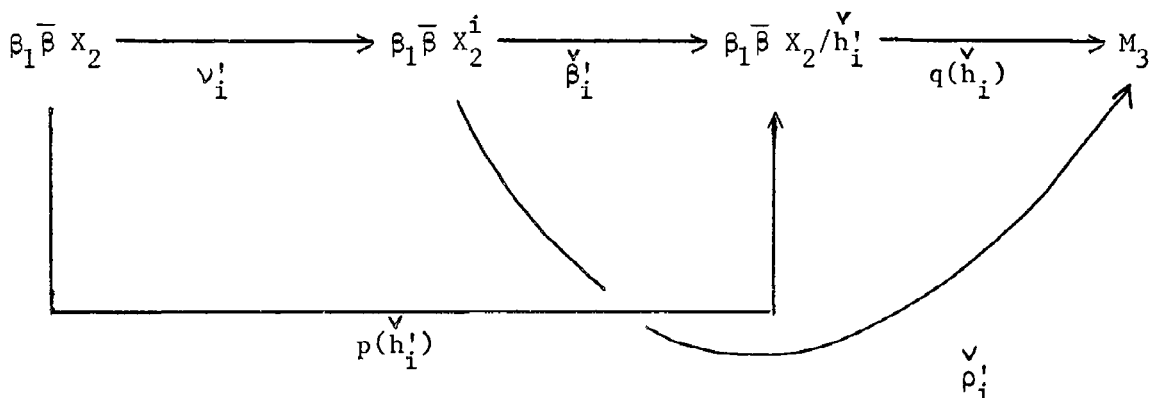
alors, au but, les bourgeons (du bourgeonnement β , ne coupent jamais transversalement $q_1(\beta f) [M^2(f_1)]$.

Etape 4°. On prend maintenant :

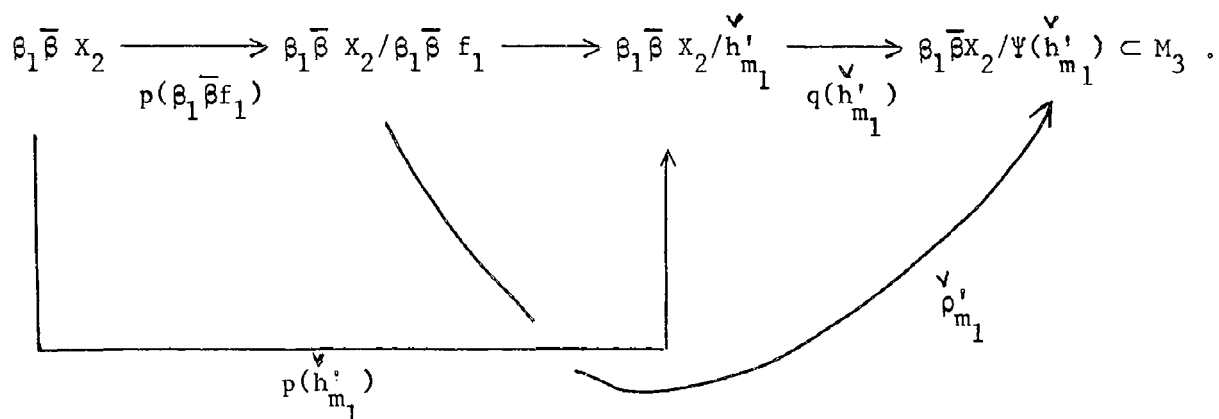
$$(\bar{\beta} X_2 = \bar{\beta}(\beta X_1 / \beta f), \bar{\beta} f_1, \mathbb{O}_3(K'_2))$$

comme point de départ pour une nouvelle CONSTRUCTION PRELIMINAIRE (voir les données du point V (lemme 3.22) : A', B', C', D', et la démonstration du lemme 3.20).

La succesion Σ_2 induit le bourgeonnement : $(\beta_1 \bar{\beta} X_2, \beta_1 \bar{\beta} f_1, \mathbb{O}_3(K'_2))$ qu'on a déjà vu, et la construction préliminaire donne des diagrammes du type :



En particulier, à la fin, on a un diagramme :



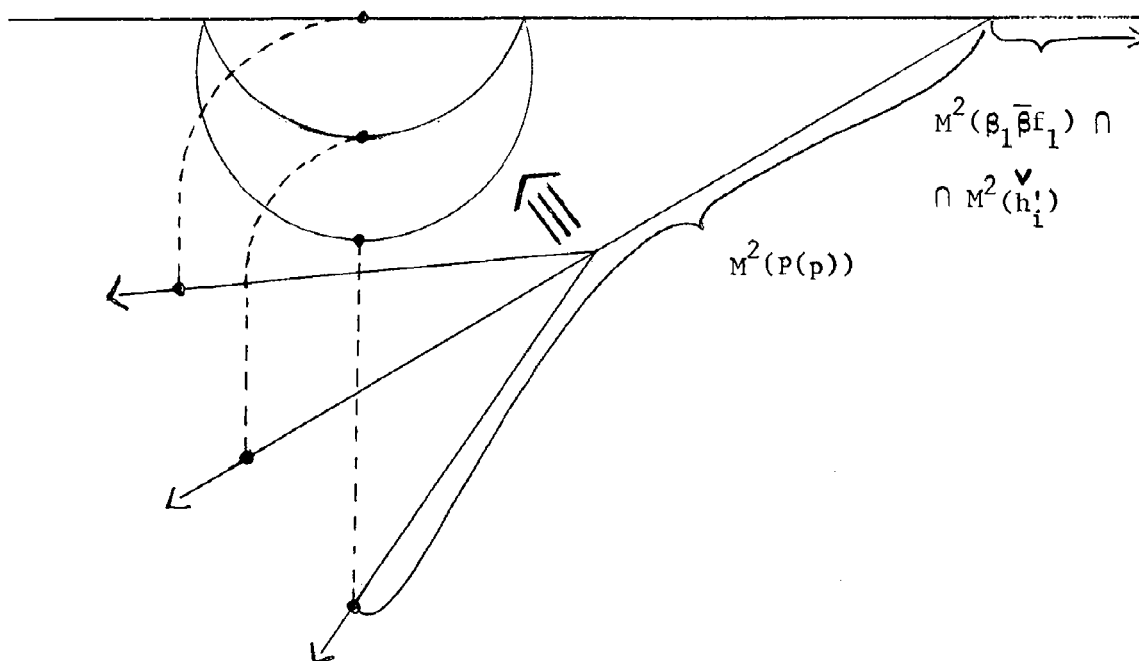
(où, par définition $m_1 = m(\beta_1 \bar{\beta} f_1)$.)

Remarque (importante).

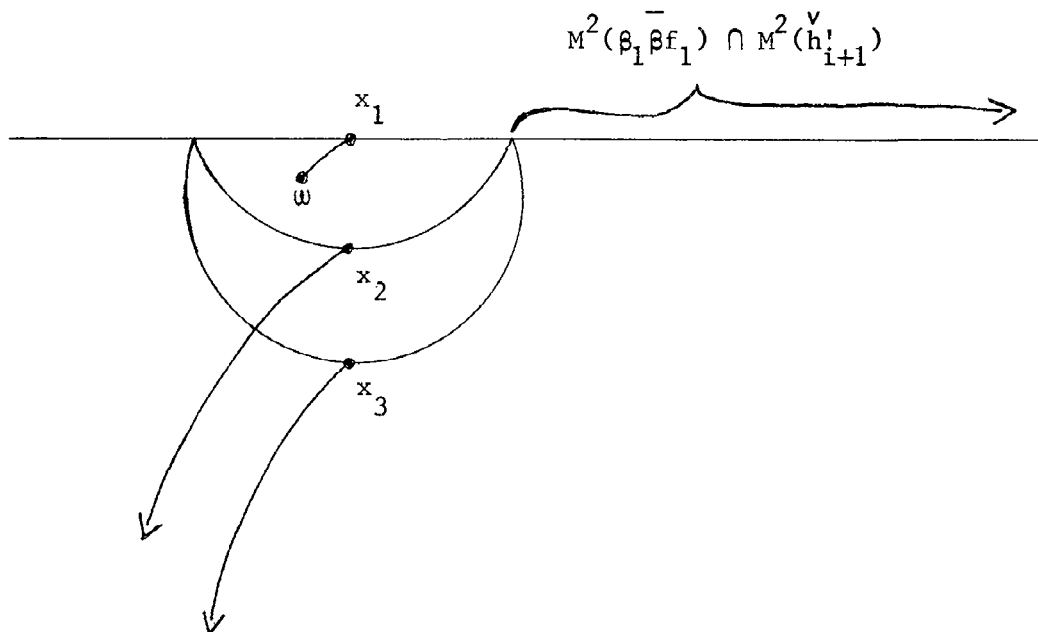
Considérons l'étape de la construction préliminaire ci-dessus, correspondant à la projection du type $O(1) : P(p)$. Disons que c'est le passage de h'_i à h'_{i+1} . On remarque que, à cause du lemme 3.22.0, la figure 3.20.4 (5) (démonstration du lemme 3.20) devient ici, la figure 3.22.1

Figure 3.22.1

avant l'isotopie (I)



après l'isotopie (II)



Donc des points comme π_1, π_2 de la figure 3.22.1 n'existent pas. (Ceci fait, que, dans ce cas l'isotopie D_t^{i+1} (lemme 3.20.3 - démonstration du lemme 3.20) est constamment égale à l'identité). Ceci fait aussi que, sur les branches de $M^2(h_{i+1}^v)$, qui partent de $x_1, x_2, x_3 \dots$ (figure 3.22.1), points de $s(\beta_1 \bar{\beta} X_2^{i+1})$, il n'y aura pas d'intersection transversale des bourgeons β avec $h_{i+1}^v(M^2((\beta_1 \bar{\beta} f_1)))$ (voir aussi le lemme 3.22.1 ci-dessous).

On aura maintenant deux sortes de bourgeons : ceux du bourgeonnement β (les "vieux"), qu'on va désigner par A_1, A_2, \dots et ceux des bourgeonnements $\bar{\beta}$ et β_1 (les "jeunes"), qu'on va désigner par A'_1, A'_2, \dots . Il est entendu que

$$(\cup A_\ell) \cup (\cup A'_\ell) \subset \beta_1 \bar{\beta} X_2$$

et que les bourgeons $\bar{\beta}$ ne touchent pas aux bourgeons β et β_1 . On a le :

Lemme 3.22.1.

" 1) les $\bigvee_i h_i^v A_\ell$, $\bigvee_i h_i^v A'_\ell$ n'ont jamais d'intersection transversale avec $\bigvee_i h_i^v (M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1))$. (Comparer avec III, lemme 3.22).

2) $\bigvee_i h_i^v \mid ((\bigcup A_\ell) \cup (\bigcup A'_\ell))$ est un plongement.

3) Les éléments passifs (et les éléments mauvais) de la construction préliminaire, appliquée à $(\bar{\beta} X_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2^v))$, sont tous contenus dans $(\bigcup A_\ell) \cup (\bigcup A'_\ell)$, (de même les \bar{M}_j ; de la démonstration du lemme 3.20).

4) Aucun élément actif de la construction préliminaire, ci-dessus, ne touche à l'intérieur de $(\bigcup A_\ell) \cup (\bigcup A'_\ell)$ ". \square

Le lemme est une conséquence directe de la manière dont Σ et Σ_2 ont été définies et de la manière dont le lemme 3.20 a été démontré (particulièrement de la condition C(i) et du lemme 3.21) et de la remarque qu'on vient de faire (qui elle-même est une conséquence du lemme 3.22.0). Les détails sont laissés au lecteur.

On se contente de remarquer ici, que pour les bourgeons $\bar{\beta}$ ou les bourgeons β_1 qui ne touchent pas aux vieux bourgeons, l'analogie du lemme 3.21 est valable. On va se contenter ici de décrire $M^2(\rho_{m_1}^v \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1)) \cap (A + (\text{les bourgeons } \beta_1 \text{ qui touchent } A))$ où A est un vieux bourgeon. Pour fixer les idées, supposons que $M^2(f_1 \circ p(\beta f)) \cap A$ et $M^2(q_1(\beta f)) \cap A$ soient données par la figure 3.22.1. a.

Les jeunes bourgeons (du bourgeonnement β_1) qui touchent à A seront désignés par A_1^v, A_2^v, \dots

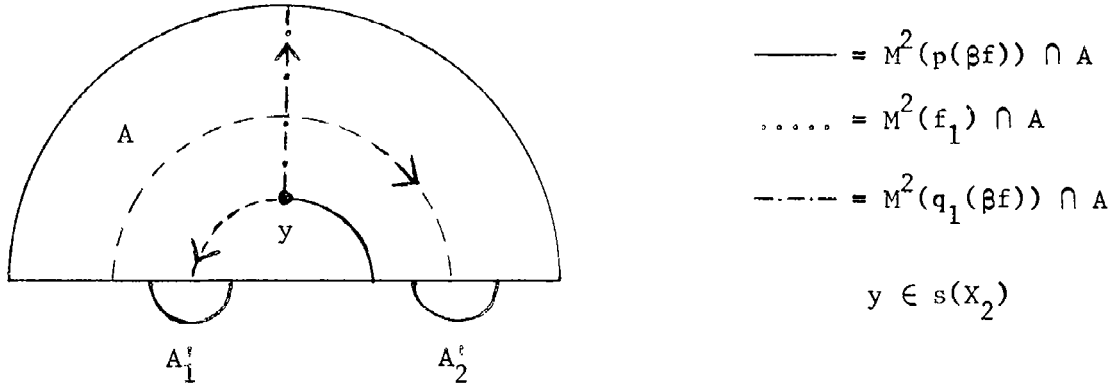


Figure 3.22.1. a.

Quant à $M^2(\rho_{m_1}^v \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1)) \cap (A \cup A'_1 \cup A'_2)$, il est donné par la figure 3.22.1. b.

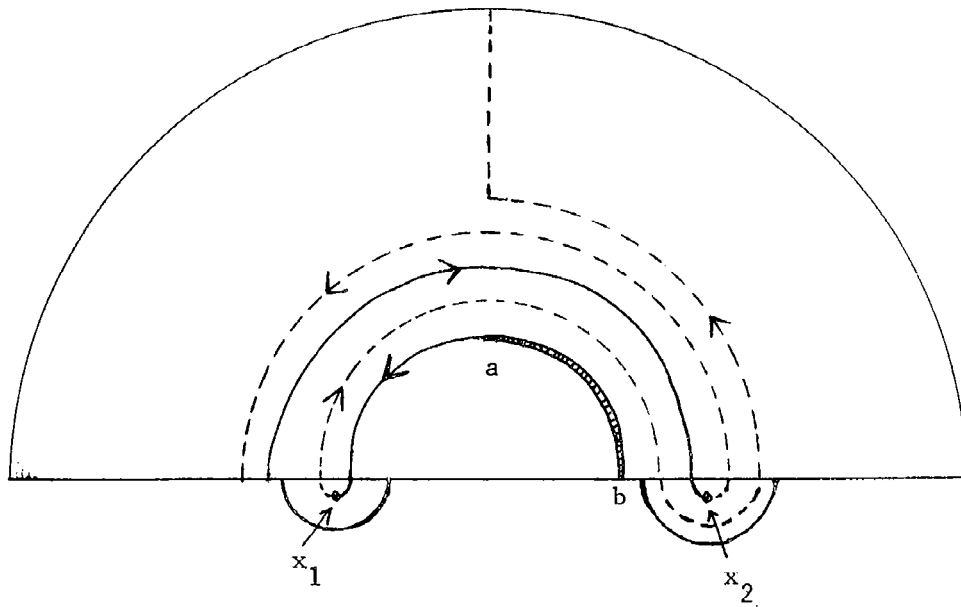


Figure 3.22.1. b.

Revenons maintenant à notre construction préliminaire. Soit $\bar{\chi}$ le nombre d'intersections (donc le nombre des cycles parasites est $\bar{\chi}/2$). Comme au point d) du début de la démonstration, on a des disques 2-à-2 disjoints $\bar{\lambda}_1(D_2), \dots, \bar{\lambda}_{\bar{\chi}}(D_2) \subset (\bar{\beta} X_2 / \bar{\beta} f_1)_2 \subset (\beta_1 \bar{\beta} X_2 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)_2$, qui tuent les cycles parasites.

Sans perte de généralité, les disques $\bar{\lambda}_i(D_2)$ qui tombent dans le plan de la figure 3.22.1 (II), sont placés comme il est indiqué dans la figure 3.22.1. c

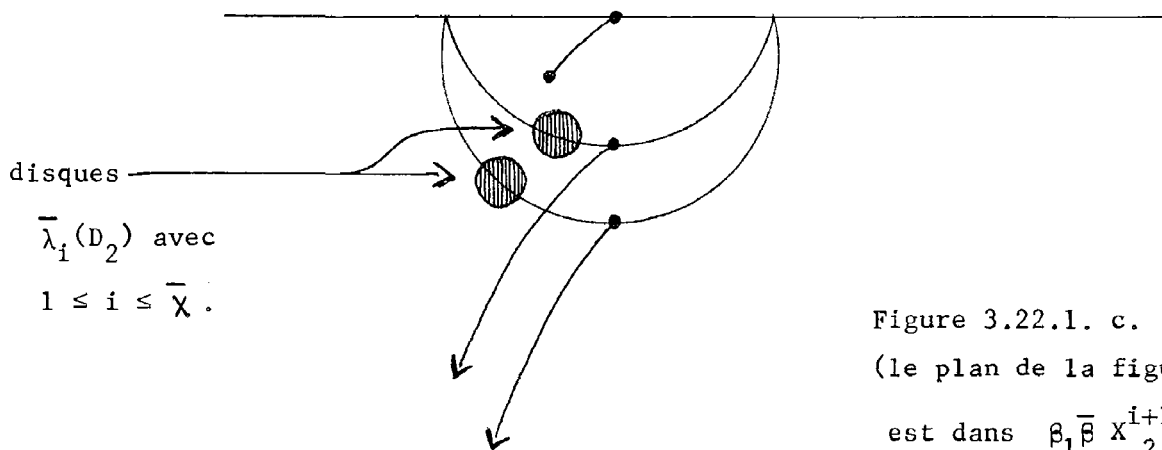


Figure 3.22.1. c.
(le plan de la figure est dans $\beta_1 \bar{\beta} X_2^{i+1}$).

Soient, aussi, $e_1', e_2', \dots \in E' \subset \pi_0((\beta_1 \bar{\beta} X_2 / \Psi(h_{m_1}'))_2)$. On va choisir les nombres $\epsilon(e_i') = \epsilon_i'$, comme suit : il faut préciser d'abord la structure exacte de $[\beta_1 \bar{\beta} X_2]$ (on rappelle que, $[\beta_1 \bar{\beta} X_2]$ est défini de telle manière que, pour : $([\beta_1 \bar{\beta} X_2], [\beta_1 \bar{\beta} f_1], \Theta_3(K_2'), q([\beta_1 \bar{\beta} f_1]))$ soit excellente (définition 3.30)).

ON VA SUPPOSER QUE CHAQUE BOURGEON JEUNE DEBORDE SI ET SEULEMENT S'IL CONTIENT LA BRANCHE SPECIFIEE DE $q([\beta_1 \bar{\beta} f_1])$ QUI LUI CORRESPOND. (A partir de là, on peut admettre, sans perte de généralité, que V - 7 est satisfait). Ce

choix étant précisé, on applique aux jeunes bourgeons $(\bar{\beta}$ et $\beta_1)$ le même procédé qui avait déjà été appliqué aux vieux bourgeons (β) dans l'étape 1°. Ceci nous donnera des 2-disques analogues aux $L'(p) (D_2)$, qui, à cause du lemme 3.22.1 tombent dans les composantes connexes de $E' \subset \pi_0((\beta_1 \bar{\beta} X_2 / \Psi(h_{m_1}^y))_2)$.

On va choisir comme e_i^1 le nombre de ces disques qui se trouvent à l'intérieur de e_i^1 . Ceci fera que $V - 4$ est satisfaite.

En passant au deuxième étage (de la nouvelle construction préliminaire) on trouve donc, en fin de compte, des disques :

$$\bar{\lambda}_1(D_2), \dots, \bar{\lambda}_{\chi}^-(D_2), \bar{\lambda}_{\chi+1}^-(D_2), \dots, \bar{\lambda}_{\chi}^+ + \sum e_i^1(D_2) \subset (\beta_1 \bar{\beta} X_2 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)_2 .$$

A cause du lemme 3.22.1 ces disques ne touchent à aucun bourgeon $(\beta, \bar{\beta}$ ou $\beta_1)$.

Tout à fait comme on avait construit les $JA(p)$ (étape 1°), on peut fabriquer, pour chaque $x \in \sigma(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) = \sigma(Y_2)$ (correspondant à un jeune bourgeon), un intervalle fermé : $J'(x) \subset \beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1$, tel que :

α') $J'(x)$ a une extrémité en x , l'autre sur $\partial(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)$, (sur le bord du 2-disque analogue à $L'(p) D_2$), correspondant à x).

β') $\text{int } J'(x) \subset \text{int } (\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)_2$ et $J'(x)$ rencontre $\partial(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)$ transversalement.

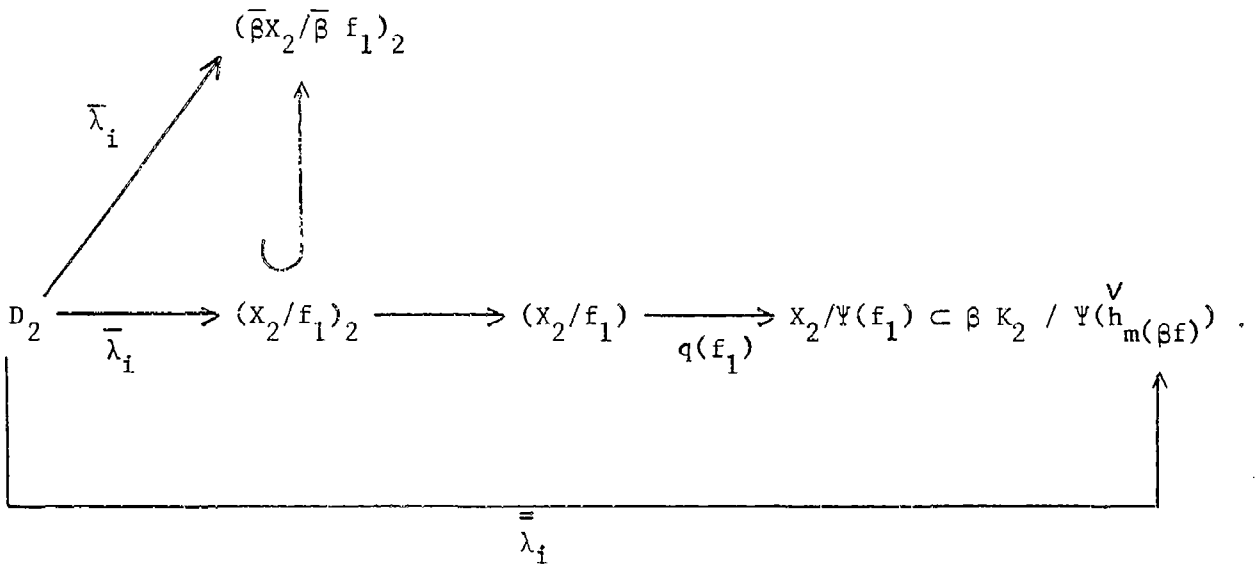
γ') $J'(x) \cap M^2(\beta_1) = \emptyset$.

δ') $(\mu(q(\beta_1 \bar{\beta} f_1), x) - (\text{les bourgeons})) \subset J'(x)$.

Ceci nous définit complètement la (seconde) application du lemme 3.20, celle du point V. 2) et 3) (point V) sont des conséquences immédiates du lemme 3.20. Pour que la démonstration du lemme 3.22 soit complète, il faut prouver, aussi $V - 1$, $V - 5$, $V - 6$.

Démonstration de V - 1. Les disques $\bar{\lambda}_i(D_2)$ considérés ci-dessus sont au deuxième étage de la construction préliminaire (étape 4°), donc au troisième étage de la construction préliminaire des étapes 1°-2°. (Puisqu'il y a décalage d'un cran entre les étages respectifs des deux construction préliminaires). Ils ne touchent pas aux bourgeons $\bar{\beta}$.

D'une manière plus précise, on a le diagramme :



Sans perte de généralité, les $\bar{\lambda}_i$ sont des plongements 2-à-2 disjoints, tombant dans $(\beta K_2 / \Psi(h_m^v(\beta f)))_2$. D'après le lemme 3.22.1 ils tombent tous dans des éléments de $E \subset \pi_0((\beta K_2 / \Psi(h_m^v(\beta f)))_2)$. (C'est-à-dire, que les disques $\bar{\lambda}_i(D_2)$ ne touchent pas aux vieux bourgeons.) Soit γ_i le nombre des $\bar{\lambda}_i(D_2)$ qui tombent dans $e_i \in E$.

On peut élargir la construction de l'étape 1° en remplaçant e_i par $e_i + \gamma_i$. Ceci nous donne une nouvelle application du lemme 3.20, avec point de départ (K_2, f, M_3) . La propriété 4) de l'énoncé du lemme 3.20 implique alors que l'on peut passer de

$$(\beta K_2 - \bigcup \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2) - \bigcup \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2) = \beta X_1 - \bigcup \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2), \beta h, \textcircled{3}(K'_2)) \text{ à}$$

$$(\beta X_1 - \bigcup \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2), f_1 \circ p(\beta f), \textcircled{3}(K'_2)) \text{ par un nombre fini de glissements élémentaires. C'est la propriété V - 1) du lemme 3.22.}$$

Démonstration de V - 5.

La propriété V - 5 - 1) résulte de V -4) exactement de la même manière que IV résulte de II. V - 5-2) résulte du lemme suivant et de IV :

Lemme 3.22.2. " Considérons le lemme 3.20 avec les conditions supplémentaires suivantes :

- 1) $M^3(f) = \emptyset$.
- 2) $M_-^2(h) \cap M_+^2(f) = \emptyset$.

[3) $(K_2/f, q(f), M_3)$ possède une séquence principale qui consiste seulement de projections du type $O(2)$ dégénérées.]

Soit $(X_2, f_1, \Theta_3(K'_2))$ le résultat de l'application du lemme 3.20. On peut identifier X_2 à une partie de $\beta K_2 / \beta f$, [et on va supposer que $(X_2, q(\beta f), M_3)$ possède une séquence principale qui consiste seulement de projections du type $O(2)$, dégénérées. (Ceci n'est pas très essentiel).]

Alors : 4) Dans X_2 :

$$M_-^2(f_1) \cap M_+^2(q(\beta f)) = \emptyset \text{ " . } \square$$

(C'est important de remarquer que 4) est une condition à la source).

Démonstration. On va se référer à la démonstration du lemme 3.20, plus précisément à la construction préliminaire. On peut montrer, inductivement, que, dans chaque βK_2^i , on a :

$$M_-^2(\rho_i) \cap M_+^2(\bar{\mu}_i) = \emptyset .$$

Pour $i = 0$ c'est notre hypothèse, et pour $i = m(\beta f)$ c'est notre conclusion.

Considérons $p_{i+1} : \beta K_2^i \longrightarrow \beta K_2^{i+1}$ et $x = \sigma(p_{i+1}) \in \beta K_2^i$.

Soient $M_{\pm}^2(p_{i+1})$ les branches (spécifiée et non-spécifiée) de $M^2(p_{i+1}) \subset \beta K_2^i$.

Puisque $M^3(f) = \emptyset$, on sait définir $M_{\pm}^2(f) \subset M^2(f)$, et

$$\boxed{M_{\pm}^2(p_{i+1}) \subset M_{\pm}^2(f)} .$$

(Autrement ceci pourrait être faux pour des p_{i+1} du type $0(0)$;
c'est-à-dire que, si $M^3(f)$ était $\neq \emptyset$ on pourrait avoir :

$$M_{\pm}^2(p_{i+1}) \cap \hat{\pi}(M_2^{\mp}(f)) \neq \emptyset . !!) .$$

La construction préliminaire procède par étapes élémentaires qui sont, en gros,
du type suivant : ils existent des voisinages A_{\pm} de $M_{\pm}^2(p_{i+1})$ dans βK_2^i .
On considère le voisinage :

$$M^2(p_{i+1}) \subset A_{-} \underbrace{\oplus}_{M^2(v_i)} A_{+} \subset \beta K_2^i .$$

D'après l'hypothèse de l'induction :

$$A_{+} \cap M_{-}^2(v_i) = \emptyset .$$

(Et de toute façon, dans un très petit voisinage de la singularité x , les
germes en x :

$$(*) \quad \boxed{(M_{\pm}^2(v_i))_x \subset A_{\pm}} \quad) .$$

Il existe un voisinage (de coordonnées) $R_3 \subset M_3$ tel que $\rho_i^{-1}(R_3) = (A_{-} \underbrace{\oplus}_{M^2(v_i)} A_{+}) +$
+ (des voisinages de coordonnées, disjoints, $R_2^1, \dots, R_2^k \subset \beta K_2^i$). On a aussi :

(i) $\rho_i^{\vee} | A_{-}$, $\rho_i^{\vee} | A_{+}$, $\rho_i^{\vee} | R_2^j$ sont des plongements.

(ii) $R_2^j \cap M^2(\bar{\mu}_i) = \emptyset$. (à la source) .

(iii) $\rho_i^{\vee}(R_2^j) \cap \rho_i^{\vee}(A_{\pm}) \neq \emptyset$ si et seulement si $\rho_i^{\vee}(R_2^j)$ coupe
transversalement $\rho_i^{\vee}(M_{\pm}^2(p_{i+1}))$.

On passe de ρ_i^{\vee} à ρ_{i+1}^{\vee} en isotopant les $\rho_i^{\vee} | A_{-}$, $\rho_i^{\vee} | A_{+}$, $\rho_i^{\vee} | R_2^j$,
par des isotopies qui n'introduisent pas d'autres intersections de R_2^j avec
 A_{\pm} que celle qui existent déjà.

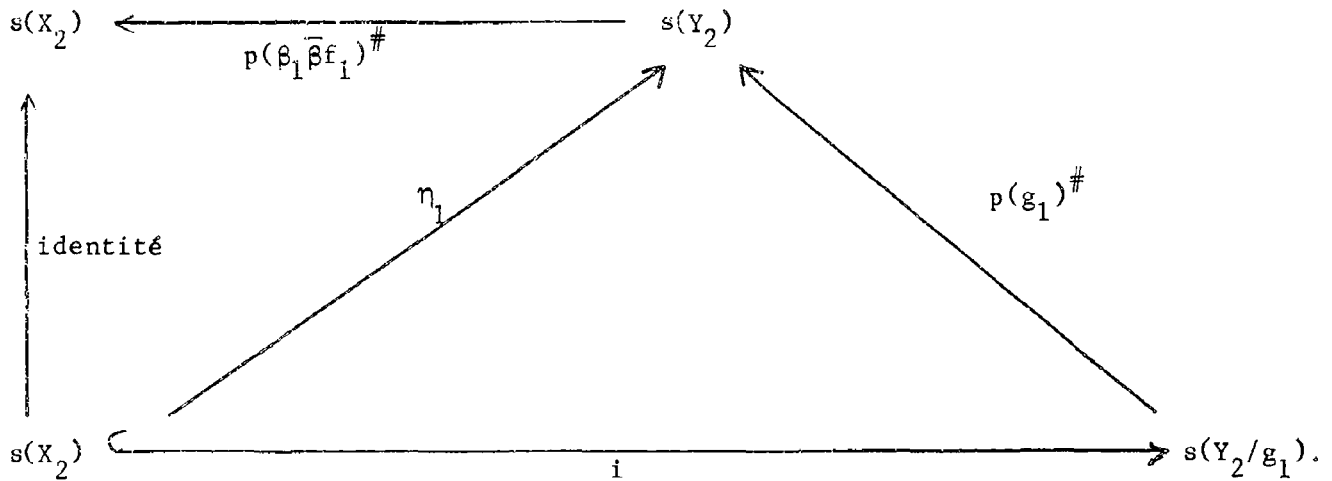
En plus :

(**) $\# \pi_0(\rho_i^{\vee}(A_+) \cap \rho_i^{\vee}(A_-)) = \# \pi_0(\rho_{i+1}^{\vee}(A_+) \cap \rho_{i+1}^{\vee}(A_-)) = 1$. C'est clair qu'on ne peut pas faire apparaître des intersections $A_+ \cap M_-^2(\rho_{i+1}^{\vee})$ par ce procédé.

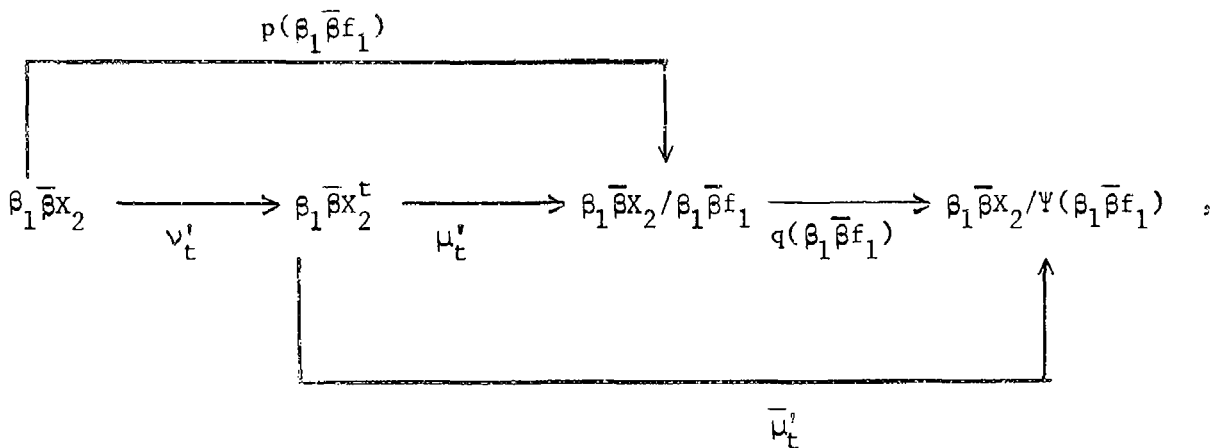
(**) et (***) nous disent que des mauvaises intersections ne vont pas apparaître sur $A_+ \oplus A_-$; et de même il n'y en aura pas entre A_+ et les R_2^j contenant des points de $M_+^2(\rho)$.

Des raisonnements analogues s'appliquent aux isotopies D_t^{i+1} (lemme 3.20.3).

Démonstration de V - 6. Pour la seconde application du lemme 3.20 (étape 4°, ci-dessus) le diagramme commutatif du point 5) (lemme 3.20) devient :

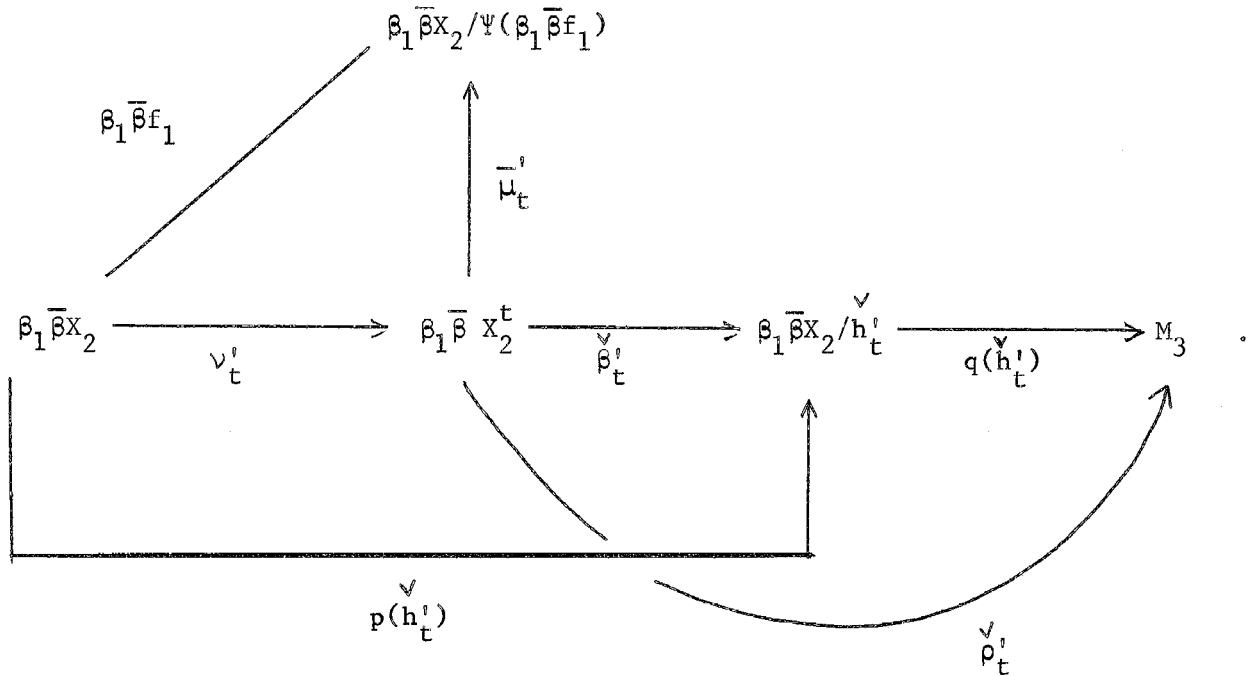


Donc $J = \eta_1$, ce qui démontre le point V - 6 - 1. Le point V - 6 - 2-a) résulte de IV - (a) et de V - 2. En se référant aux notations du lemme 3.21.2, considérons le détaillage de la séquence principale de $(\beta_1 \bar{\beta} X_2, \beta_1 \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2^i))$:



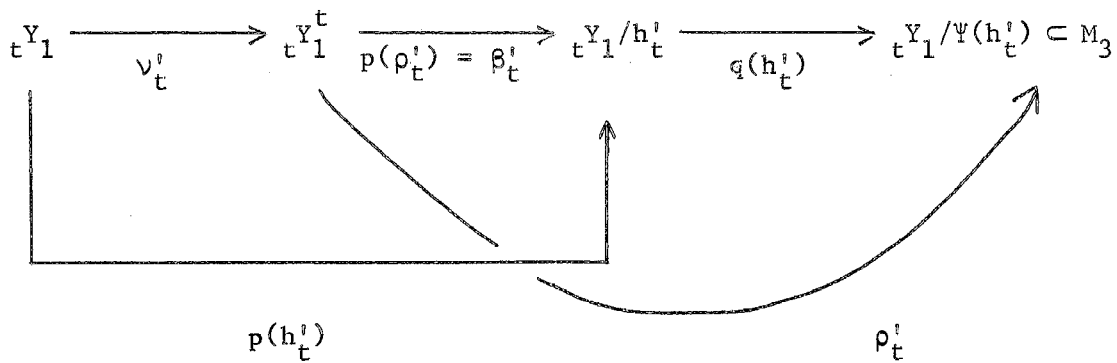
où $v'_t =$ la composition des projections $P_1, \dots, P_r, \{P(p)\}$.

Dans la construction préliminaire appliquée à $(\bar{\beta}x_2, \bar{\beta}f_1, \Theta_3(\kappa'_2))$ (début de l'étape 4°), on a, d'une manière correspondante, une t -ème étape :



Evidemment, $\Psi(\rho'_t)$ n'est pas acyclique. Mais on le rend acyclique, en passant de $\beta_1 \bar{\beta} x_2$ à ${}_t Y_1 \approx \beta_1 Y_1 = \beta_1 \bar{\beta} x_2 - \cup \bar{\lambda}_1(\text{int } D_2)$.

Comme dans la démonstration du lemme 3.20, on obtient alors un nouveau diagramme (dérivé du précédent) :



où $\Psi(\rho'_t)$ est bien acyclique. En se référant aux notations du début de la

démonstration du lemme 3.20, disons que le dernier des ${}_i Y_1^i$ soit :
 ${}_{\bar{m}} Y_1^{\bar{m}} = Y_2$, où $\bar{m} = m(\beta_1 \bar{\beta} f_1)$.

Les singularités correspondant aux bourgeons $\bar{\beta}$ et aux bourgeons $A_1(P(p))$ (du bourgeonnement β_1) forment un sous-ensemble :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) &\subset \sigma(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) \subset s(\beta_1 \bar{\beta} X_2 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) = \\ &= s(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) = s(Y_2) . \end{aligned}$$

Je dis que les éléments de $\sigma_1(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)$ "pré-existent" déjà dans $s({}_t Y_1^t)$. Par cela, je veux dire que, dans le passage au quotient :

$${}_t Y_1^t \subset \beta_1 \bar{\beta} X_2^t \xrightarrow{\mu_t'} \beta_1 \bar{\beta} X_2 / \beta_1 \bar{\beta} f_1 \supset Y_2 ,$$

il existe, pour chaque $y_i \in \sigma_1(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)$, un $y_i^t \in s({}_t Y_1^t)$ défini univoquement par la propriété : $\mu_t'(y_i^t) = y_i$. D'une manière analogue, pour chaque ℓ tel que $\bar{m} \geq \ell \geq t$, il existe un $y_i^\ell \in s({}_\ell Y_1^\ell)$, (unique), tel que $\mu_\ell'(y_i^\ell) = y_i$, et $y_i^{\bar{m}} \equiv y_i$.

Vu que $J = \eta_1$, on a : si (comme dans le lemme 3.21.2) $\bar{x}_i \in s(X_2) - \sigma(\beta X_1 / \beta f)$ alors : $J(\bar{x}_i) = s(P_i) =$ la singularité de $s(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1)$ (= $s(Y_2)$) contenue dans le bourgeon $\bar{\beta}(\bar{x}_i)$;
 si : $A(p) \ni x \in \sigma(\beta X_1 / \beta f)$, alors : $J(x) = s(P(p)) =$ la singularité de $s(Y_2)$ contenue dans le bourgeon $A_1(P(p))$. On peut donc considérer J comme une bijection naturelle :

$$s(X_2) \xrightarrow[\approx]{J} \sigma_1(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) .$$

Pour chaque ℓ , tel que : $\bar{m} \geq \ell \geq t$, on peut définir une application J_ℓ :

$$\begin{array}{ccc} s(X_2) & \xrightarrow{\text{inclusion canonique } i(\ell)} & s({}_\ell Y_1 / h'_\ell) & \xrightarrow{p(\rho'_\ell) \#} & s({}_\ell Y_1^\ell) \\ & \downarrow & & & \uparrow \\ & & & & J_\ell \end{array}$$

On a : $i(\bar{m}) = i$, $J_{\bar{m}} = J$ et, si $x_j \in s(X_2)$ et $J(x_j) = y_j$ on a : $J_{\bar{m}}(x_j) = y_j^{\bar{m}}$. Pour chaque ℓ tel que : $\bar{m} \geq \ell \geq t$, et chaque $x \in s(X_2)$ on considère : $\mu_{\pm}(\rho_{\ell}^i, J_{\ell}(x)) \subset \ell Y_1^{\ell}$ et $\mu_{\pm}(q(\rho_{\ell}^i), i(\ell)(x)) = \mu_{\pm}(q(h_{\ell}^i), i(\ell)(x)) \subset \ell Y_1^{\ell} / h_{\ell}^i$. Soit $\alpha_{\pm}^{\ell}(x)$ l'unique bout de $\mu_{\pm}(q(\rho_{\ell}^i), i(\ell)(x))$ et

$$j_{\ell} : \{\alpha_{\pm}^{\ell}(x)\} \longrightarrow \partial \mu_{\pm}(\rho_{\ell}^i, J_{\ell}(x)) ,$$

l'inclusion naturelle. On peut vérifier sans peine que

$$j_{\ell} \alpha_{-}^{\ell}(x) \in \text{int}(\ell Y_1^{\ell})_2 \text{ et :}$$

$$j_{\ell} \alpha_{+}^{\ell}(x) \in \partial(\ell Y_1^{\ell}) .$$

(la démonstration est la même que pour V - 6-2 - a).

Pour chaque $\bar{m} \geq \ell \geq t$ on va considérer deux assertions :

Assertion A(ℓ) : "Si $x_i \in s_1(X_2)$, alors sur l'unique intervalle fermé de $\mu_{+}(\rho_{\ell}^i, J_{\ell}(x_i))$, d'extrémités $J_{\ell}(x_i)$ et $j_{\ell} \alpha_{+}^{\ell}(x_i)$, il existe au moins un point π_i^{ℓ} où ℓY_1^{ℓ} ne soit pas une variété de dimension 2" . \square

(On rappelle que $x \in s_1(X_2) \subset s(X_2)$ si et seulement si, x se trouve dans l'une des deux situations suivantes :

- a) $x \in s(X_2) - \sigma(\beta X_2 / \beta f)$
- b) $x = s(p) \in A(p)$, où $A(p)$ est un bourgeon β qui est spécifié).

Assertion B(ℓ) : "Si $x_i \in s_2(X_2)$, on a :

$$(i) \mu_{+}(\rho_{\ell}^i, J_{\ell}(x_i)) \subset (\ell Y_1^{\ell})_2$$

$$(ii) \mu_{\pm}(q_1(\beta_1 \bar{\beta} f_1), J_{\ell}(x_i) = y_i^{\ell}) \cap M^2(\rho_{\ell}^i) = \emptyset . " \square .$$

(On remarque que, si la condition (ii) est vraie à un moment $\ell \geq t$, elle est automatiquement vraie à tout moment $\ell_1 \geq \ell$).

Lemme 3.22.2. "L'assertion A(t) est vraie". \square

Démonstration: Si $x_i = \bar{x}_i \in s(X_2) - \sigma(\beta X_1 / \beta f)$ (lemme 2.21.2), alors :

$$\pi_i^t = \{ \mu_+(p_t^i, J_t(x_i)) \cap (\bar{\beta}(\bar{x}_i) \cap X_2) \} .$$

(On rappelle ici, que les bourgeons $\bar{\beta}$ sont ajoutés aux branches spécifiées.)

Si $A(p) \ni x_i \in \sigma(\beta X_1 / \beta f)$ alors :

$$\pi_i^t = \{ \mu_+(p_t^i, J_t(x_i)) \cap (A_1(P(p)) \cap X_2) \} . \quad \square$$

Lemme 3.22.3. " $A(\ell) \implies A(\ell+1)$ " . \square

Démonstration : Le passage de la ℓ -ième à la $(\ell + 1)$ -ième étape de la construction préliminaire, est engendré par une certaine projection (de type $O(0)$ ou $O(1)$), (de la séquence principale de $\beta_1 \bar{\beta} f_1$): $p'_{\ell+1}$, telle que : $v'_{\ell+1} = p'_{\ell+1} \circ v_\ell$. Or, du fait que les éléments de $\sigma_1(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1) = J(s(X_2))$ pré-existent déjà à tous les niveaux $\ell \geq t$ on a :

$$J_\ell(x_i) = y_i^\ell \neq \sigma(p'_{\ell+1}) .$$

On en déduit que le passage de $\mu_\pm(p'_\ell, J_\ell(x_i))$ à $\mu_\pm(p'_{\ell+1}, J_{\ell+1}(x_i))$, se fait par le même genre d'opérations que les glissements élémentaires font subir aux points doubles (isotopies et glissements ...). A partir de cette remarque, la démonstration est facile. \square

Lemme 3.22.4. "L'assertion B(t) est vraie. De plus, on a :

$$(iii) \quad \mu_\pm(p_t^i, J_t(x_i)) \cap M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) = \emptyset . \quad " \quad \square .$$

Démonstration. On se rappelle que

$$A(p) \ni x_i \in \sigma(\beta X_1 / \beta f)$$

et que le bourgeon $A(p)$ contient seulement la branche non spécifiée

$$\mu_-(\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f), x_i) .$$

Notre figure 3.22.2 représente un voisinage de $\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f) (A(p)) \subset M_3$ et 3.22.3 un voisinage de $h'_t(A(p)) \subset M_3$. On laisse au lecteur le soin de finir la démonstration du lemme 3.22.4, en utilisant ces figures.

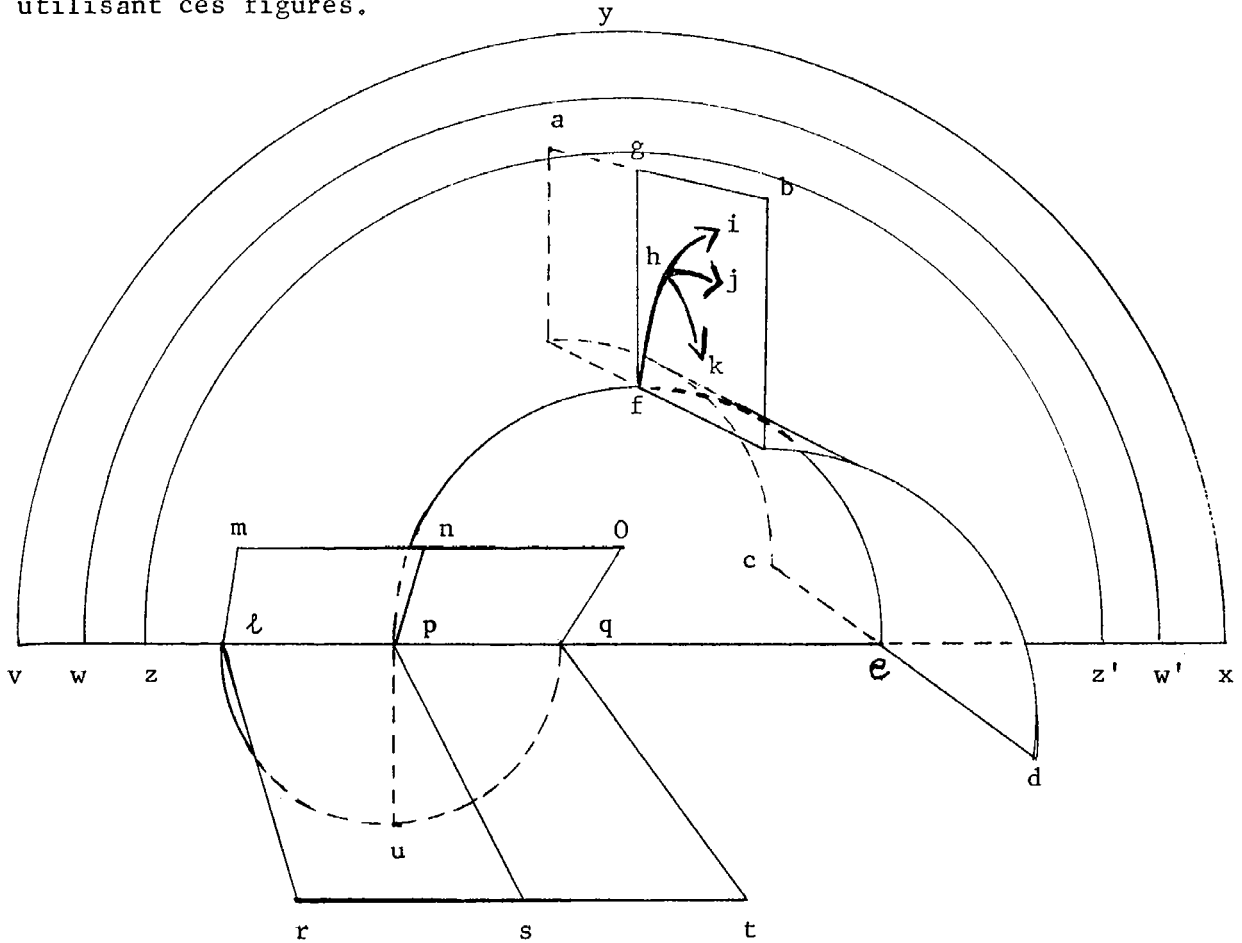


Figure 3.22.2 (la figure est dans M_3 , but de $\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f)$).

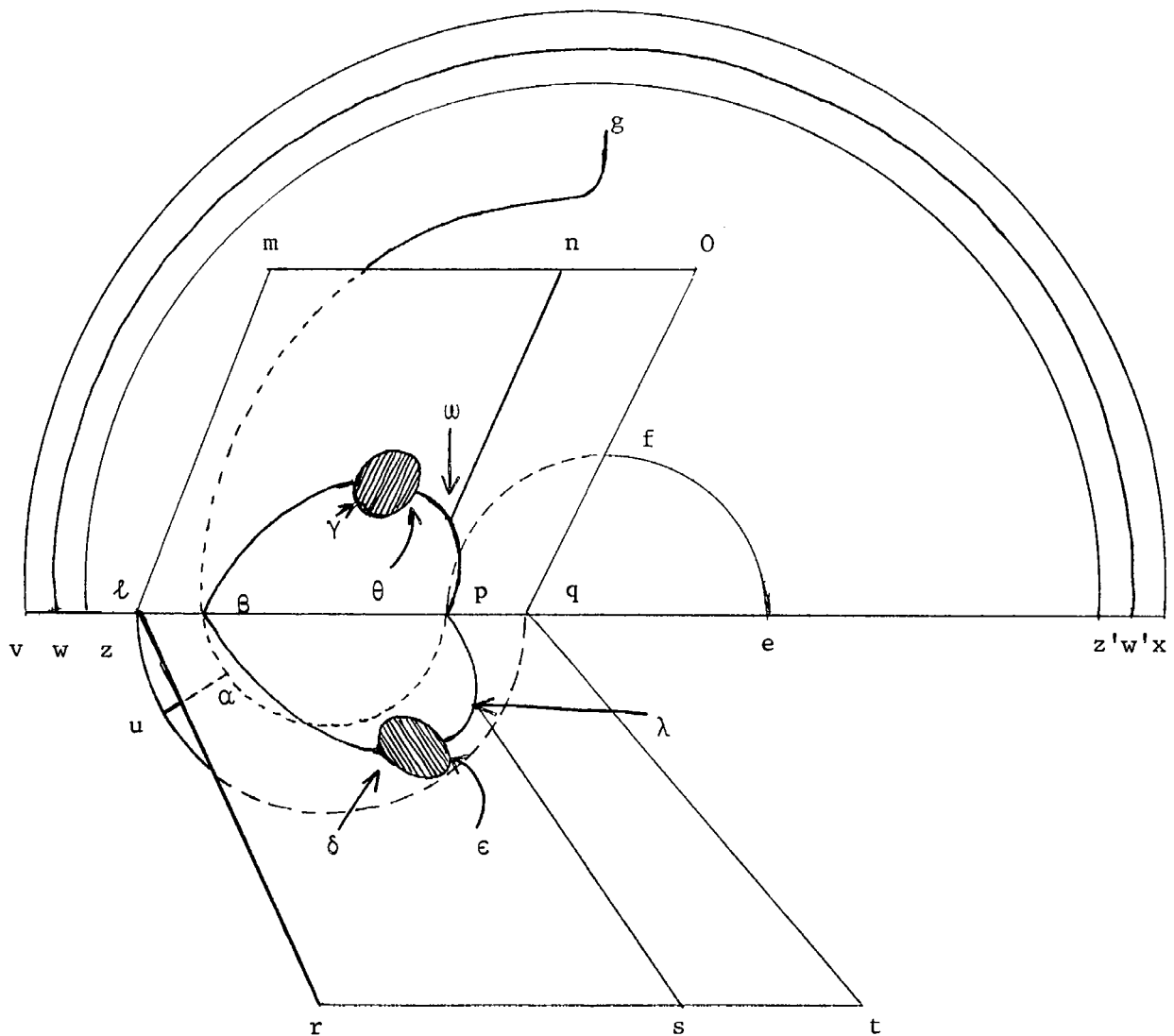
Explication de la figure 3.22.2.

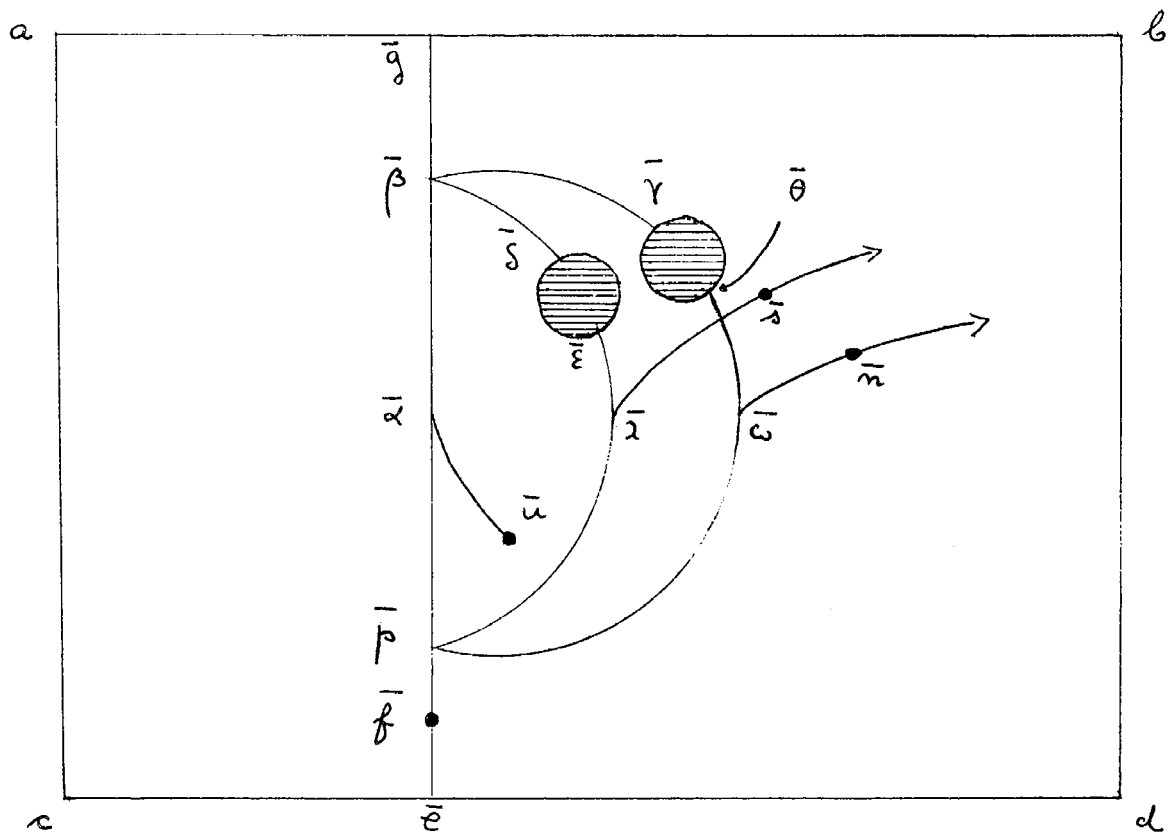
$(v \times y) = A(p)$, $(l \ u \ q) = A_1(P(p))$, $(l \ m \ o \ q) \cup (l \ r \ t \ q) \cup (a \ b \ c \ d) \subset X_2$ -
 (les bourgeons β), $f = s(p) = x_i$, $(w, w') = (x^2 + y^2 = \epsilon_i^2, y \geq 0, i \geq 2)$
 (lemme 3.20.1), $(z, z') = (x^2 + y^2 = \epsilon_1^2, y \geq 0)$, $(p, f, e) = (x^2 + y^2 = \epsilon_0^2, y \geq 0)$,
 $(f, g) = M^2(q_1(\beta f), x_i) = M^2(\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f), x_i)$, $(fhijk) \cup (fpu) \cup (pn) \cup (ps) \subset$
 $\subset M^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1)$. \square

La figure 3.22.3 représente ce qui se passe à la figure 3.22.2 quand on applique le glissement élémentaire (et les isotopies), qui nous font passer de $\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f)$ à h'_t . Pour des raisons de commodité on a dessiné cette fois ci la source (de h'_t) et pas le but. Mais sur les deux dessins qui représentent :

$(v \times y) \cup (\lambda moq) \cup (\lambda qrt) \cup (\lambda uq)$, et $(abcd)$, les points doubles des différentes applications qu'on considèrent sont marqués, ce qui nous permet, si l'on veut, de reconstituer ce qui se passe au but.

Figure 3.22.3





Explication de la figure 3.22.3.

/// = un disque $\bar{\lambda}_i(D_2)$; les points doubles de ν'_t , dans la figure, sont $e = \bar{e}$, $f = \bar{f}$, $p = \bar{p}$, $\omega = \bar{\omega}$, $\lambda = \bar{\lambda}$, et : $\alpha = \bar{\alpha} = s(P(p)) = J_t(x_i) = y_i^t$. Les points doubles correspondant à $\mu_{\pm}(\rho'_t, J_t(x_i))$ sont : $\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$, $\delta = \bar{\delta}$, $g = \bar{g}$. Les autres points doubles de ρ'_t (dans la figure) sont : $\epsilon = \bar{\epsilon}$, $\theta = \bar{\theta}$. Les points doubles de $\bar{\mu}_t^i$ (c'est-à-dire les points doubles de $\beta_1 \bar{\beta} f_1$ qui ne sont pas déjà identifiés dans Y_1^t) sont : $u = \bar{u}$, $n = \bar{n}$, $s = \bar{s}$. \square

Lemme 3.22.5. "L'assertion $B(\ell)$ est toujours vraie". \square

Démonstration. A cause de (iii) (lemme 3.22.4) les étapes suivantes de la construction préliminaire ne touchent plus jamais à $\mu_{\pm}(\rho'_t, J_t(x_i))$. Plus exactement $\mu_{\pm}(\rho'_t, J_t(x_i)) \equiv \mu_{\pm}(\rho'_\ell, J_\ell(x_i))$ pour tout $\ell \geq t$. Alors $B(t) \implies B(\ell)$. \square

Ceci finit la démonstration du lemme 3.22, car les assertions $B(\bar{m})$, $A(\bar{m})$ impliquent les points V - 6-2-b, V - 6-2-c, V - 6-2-d. \square

4.10. Démonstration du lemme 3.23.

On va commencer par une définition : On va considérer une variété à bord, de dimension 3, M_3 , avec $\partial M_3 \neq \emptyset$, et $2k$ arcs différentiablement plongés :

$$\varphi_1^i, \varphi_1'' : I \longrightarrow M_3 \quad (i = 1, \dots, k),$$

tels que : $\alpha - 1$). Pour chaque $i = 1, \dots, k$, φ_1^i est dans l'une des deux situations suivantes :

ou bien : $\varphi_1^i(I) \subset \partial M_3$,

ou bien : $(\varphi_1^i)^{-1}(\partial M_3) = \partial I$ et $\varphi_1^i(I)$ rencontre ∂M_3

transversalement.

$\alpha - 2$) Pour chaque $i = 1, \dots, k$, φ_1'' , aussi est l'une des deux situations du point $\alpha - 1$, (indépendamment de φ_1^i).

$\alpha - 3$) Si $i \neq j$:

$$\varphi_1^i(I) \cap \varphi_1^j(I) = \varphi_1^i(I) \cap \varphi_1''(I) = \varphi_1''(I) \cap \varphi_1^j(I) = \emptyset.$$

$\alpha - 4$) Pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, ou bien $\varphi_1^i(I) \cap \varphi_1''(I) = \emptyset$,

ou bien $\varphi_1^i \equiv \varphi_1''$.

On va désigner $(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^k ; \varphi_1'', \dots, \varphi_1'')$ symboliquement, par $(\varphi' ; \varphi'')$.

Par définition, un α -système associé à $(\varphi' ; \varphi'')$ est un ensemble de $2k$ disques de dimension 2, différentiablement plongés dans M_3 :

$$(f ; g) = (f_1, \dots, f_k ; g_1, \dots, g_k)$$

(avec $f_i, g_j \subset M_3$), tels que les propriétés suivantes soient vraies :

$\beta - 1)$ $\varphi_i^1(I) \subset \partial f_i$ et $\varphi_i''(I) \subset \partial g_i$.

$\beta - 2)$ $\partial M_3 \cap f_i = \partial M_3 \cap \partial f_i$. $\partial M_3 \cap \partial f_i$ est égal : à ∂f_i (si $\varphi_i^1(I) \subset \partial M_3$)
ou à $\partial f_i - \varphi_i^1(I)$ (si $(\varphi_i^1)^{-1}(\partial M_3) = \partial I$). La même chose est vraie pour $\partial M_3 \cap \partial g_i$.

$\beta - 3)$ f_i et g_i sont transverses à ∂M_3 .

$\beta - 4)$ Si $i \neq j$:

$$f_i \cap f_j = g_i \cap g_j = \emptyset.$$

$\beta - 5)$ $\varphi_i^1(I) \cap (\bigcup_j (g_j - \varphi_j''(I))) = \varphi_i''(I) \cap (\bigcup_j (f_j - \varphi_j^1(I))) = \emptyset$.

$\beta - 6)$ f_i et g_i se coupent transversalement, suivant des arcs fermés
(dont l'un peut-être $\varphi_i^1(I) = \varphi_i''(I)$ si $i = j$ et $\varphi_i^1 \equiv \varphi_i''$).

Exemples: Soient $J_i^1 \subset \partial \delta_i$ et $J_i^2 \subset \partial \eta_i$ des très petits intervalles fermés, tels que $a_i \times b_i \in \text{int } J_i^1$ et $(\eta_i \cap \Sigma_1^i) \in \text{int } J_i^2$. Alors (χ, δ) , (χ, η) , (δ, η) sont des α -systèmes, associés à $(I; J^1)$, $(I; J^2)$, $(J^1; J^2)$ respectivement.

Par définition :

$\pi_0(f, g) = \pi_0(\bigcup_{i,j} ((f_i - \varphi_i^1(I)) \cap (g_j - \varphi_j''(I))))$. Soit $\pi_0(f, g) \ni x \in \pi_0(f_i \cap g_j)$.
 x divise f_i (respectivement g_j) en deux disques de dimension 2, dont celui qui ne contient pas $\varphi_i^1(I)$ (respectivement $\varphi_j''(I)$) sera désigné par $\Phi(f, g; x)$ (respectivement par $\Phi(g, f; x)$). Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, $\Phi(f, g; x)$, (respectivement $\Phi(g, f; x)$) sera désigné par $\Phi(f, x)$ (respectivement par $\Phi(g, x)$).
Sur $\pi_0(f, g)$ on va introduire deux relations d'ordre partiel

$$x <_{f,g} y \iff \Phi(f, x) \subset \Phi(f, y) \text{ et,}$$

$$x <_{g,f} y \iff \Phi(g, x) \subset \Phi(g, y).$$

Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, on écrira $<_f$ au lieu de $<_{f,g}$ (et $<_g$ au lieu de $<_{g,f}$). Enfin, on introduit les notations suivantes :

$$\pi_0(f_i, g) = \pi_0\left(\bigcup_j ((f_i - \varphi_i'(I)) \cap (g_j - \varphi_j''(I)))\right) \text{ et}$$

$$\pi_0(f, g_i) = \pi_0\left(\bigcup_j ((f_j - \varphi_j'(I)) \cap (g_i - \varphi_i''(I)))\right).$$

On va désigner par $A(f_i) \subset \pi_0(f_i, g)$ l'ensemble de tous les $x \in \pi_0(f_i, g)$ tels que : il n'existe aucun $y \in \pi_0(f_i, g)$, $y \neq x$, $y > x$. Donc, si $x, y \in A(f_i)$, $x \neq y$: $\Phi(f, x)$ et $\Phi(f, y)$ sont deux disques disjoints de f_i , et :

$$\psi_i = \mathcal{C}\ell (f_i \dot{-} \bigcup_{x \in A(f_i)} \Phi(f, x))$$

sera un disque de dimension 2, tel que :

$$f_i = \psi_i + \bigcup_{x \in A(f_i)} \Phi(f, x), \quad \partial \psi_i \supset \varphi_i'(I) + \bigcup_{x \in A(f_i)} x, \quad \text{et :}$$

$$(\text{int } \psi_i) \cap \left(\bigcup_j g_j\right) = \emptyset .$$

Par définition, le α -système $(f ; g)$, sera dit trivial si $f_i \cap g_j \subset \varphi_i'(I) \cap \varphi_j''(I)$.

On va décrire maintenant un processus général qui nous fait passer d'un α -système $(f ; g)$ associé à $(\varphi' ; \varphi'')$, à un α -système trivial $(h ; g)$ associé à $(\varphi' ; \varphi'')$, appelé le TRANSFORMÉ de $(f ; g)$. Dans un langage approximatif :

$$(*) \quad h_i = \psi_i + \bigcup_{x \in A(f_i)} \Phi(g, x) .$$

Pour rendre ce langage approximatif plus précis, on commence par numéroter les éléments de $\bigcup_i A(f_i)$, d'une manière compatible avec la relation d'ordre $<_g$, ce

qui veut dire que, si : $x_n, x_m \in \bigcup_i A(f_i)$, on aura :

$$x_n <_g x_m \implies n < m .$$

Ceci est possible, car pour tout ensemble (fini), partiellement ordonné, X ,

il existe un ordre total, tel que, l'application $X \xrightarrow{\text{identité}} X$ soit un morphisme allant de l'ordre partiel, dans l'ordre total. De toute façon, une fois cette numérotation choisie, le α -système $(h ; g)$ sera complètement déterminé.

On commence par choisir des (demi) - voisinages tubulaires :

$$A_i : \psi_i \times I \hookrightarrow M_3, \quad (I = [0, 1]);$$

$$B_j : g_j \times [-1, +1] \hookrightarrow M_3, \quad \text{et :}$$

$$C_m : x_m \times [0, -1] \hookrightarrow \psi_i$$

(où $x_m \in A(f_i)$), tels que :

$\gamma - 1)$ Si $p \in \psi_i, q \in g_j, t \in x_m$, on a :

$$A_i(p, 0) = p, \quad B_j(q, 0) = q, \quad C_m(r, 0) = r.$$

$\gamma - 2)$ $A_i((\psi_i \cap \partial M_3) \times I) = A_i(\psi_i \times I) \cap \partial M_3$, et de même pour B_j, C_m .

$\gamma - 3)$ $A_i(\varphi_i'(I) \times I) \cap B_j(\varphi_j''(I) \times [-1, +1]) = \varphi_i'(I) \cap \varphi_j''(I)$.

$\gamma - 4)$ $(f_i - \varphi_i'(I)) \cap B_j(g_j \times [-1, +1]) =$
 $= B_j(((f_i - \varphi_i'(I)) \cap g_j) \times [-1, +1]).$

Donc, si $y \in \pi_0(f_i, g)$, $y \subset f_i \cap g_j$, alors $B_j|_y \times [-1, +1]$ est un voisinage tubulaire de y dans f_i .

$\gamma - 5)$ Pour $x_m \in A(f_i), x_m \subset f_i \cap g_j$, on a : $A_i(x_m \times I) \subset g_j$.

De plus, si (pour un i donné) $x_n \in A(f_i)$ a l'indice le plus grand, on a :

$$A_i(x_n \times I) \subset \Phi(g_j, x_n) \subset g_j.$$

$\gamma - 6)$ D'après le point précédent, $A_i(x_m \times I)$ est un petit demi-voisinage tubulaire de $x_m \subset g_j$. On supposera que, pour chaque $p \in x_m \in A(f_i), (x_m \subset f_i \cap g_j)$ et chaque $-1 \leq \theta \leq 0, 0 \leq t \leq 1$, on a l'égalité :

(E) $A_i(C_m(p, \theta), t) = B_j(A_i(p, t), \epsilon(m) \theta) \in M_3$ (où $\epsilon(m) = \pm 1$ dépend de m).

On va se donner, aussi, pour chaque ψ_i , une fonction $C^\infty : r_i : \psi_i \rightarrow I$, telle que :

$$\delta - 1) \quad r_i^{-1}(0) = \varphi'_i(I) .$$

$\delta - 2)$ Pour chaque $x_m \in A(f_i)$:

$$r_i | C_m(x_m \times [0, -1]) \equiv 1 .$$

On peut considérer :

$$\text{graph } r_i = \{(p \in \psi_i, r_i(p) \in I)\} \subset \psi_i \times I,$$

et $A_i(\text{graph } r_i) \subset M_3$. Pour chaque $x_m \in A(f_i)$, on considère :

$$C_m(x_m \times [0, -\frac{1}{m}]) \subset \psi_i ,$$

et l'on désigne par R_i le sous-ensemble de M_3 :

$$R_i = A_i(\text{graph } r_i | (\psi_i - \bigcup_{x_m \in A(f_i)} C_m(x_m \times [0, -\frac{1}{m}]))).$$

Le disque déterminé par $A_i(x_m \times 1)$, dans g_j , ne contenant pas $\varphi''_j(I)$, sera désigné par : $\Psi(g, x_m)$. (C'est "presque" le même ensemble que $\Phi(g, x_m)$).

On définit maintenant le 2-disque plongé, $h_i \subset M_3$, par :

$$h_i = R_i + \bigcup_{x_m \in A(f_i)} B_j(\Psi(g, x_m) \times \left(\frac{-\epsilon(m)}{m}\right)).$$

On aura, ainsi :

$$B_j(A_i(p \times 1), \frac{-\epsilon(m)}{m}) = A_i(C_m(p, \frac{-1}{m}), 1)$$

et le lecteur en déduira que h_i est bien un 2-disque plongé. On peut le rendre C^∞ par une petite isotopie.

$(f ; h)$ et $(h ; g)$ sont des α -systèmes associés à $(\varphi' ; \varphi')$ (resp. à $(\varphi' ; \varphi'')$).

$(h ; g)$ est trivial. Il est appelé le TRANSFORMÉ de $(f ; g)$.

Si $(f ; g)$ est un α -système associé à $(\varphi' ; \varphi'')$ on va construire aussi son MODIFIÉ : $(f ; g^1)$, qui est aussi un α -système associé à $(\varphi' ; \varphi'')$, tel que $(g ; g^1)$ soit un α -système trivial, associé à $(\varphi'' ; \varphi'')$. Dans un langage approximatif, analogue à celui de la formule (*), on va définir g^1 comme suit : soit $x \in \pi_0(f, g)$ un élément minimal par rapport à $<_f$. Supposons que $x \subset f_i \cap g_j^{(*)}$. Alors, la formule approximative sera

$$(**) \quad g_k^1(x) = g_k^1 = \begin{cases} g_k & \text{si } k \neq j \\ \mathcal{C}l(g_j - \Phi(g, x) + \Phi(f, x)) & \text{si } k = j. \end{cases}$$

En prenant des voisinages tubulaires, e.a.d.s. comme ci-dessus, on peut rendre cette définition précise, et faire en telle sorte que : $\epsilon - 1) (g ; g^1)$ est un α -système trivial associé à $(\varphi'' ; \varphi'')$.

$\epsilon - 2) (f ; g^1)$ est un α -système associé à $(\varphi' ; \varphi'')$ (le MODIFIÉ de $(f ; g)$). On a une inclusion canonique : (monomorphisme)

$$i : \pi_0(f, g^1) \longrightarrow \pi_0(f, g),$$

et $x \notin \text{Image } i$. Donc :

$$\# \pi_0(f, g^1) < \# \pi_0(f, g) .$$

(Voir la figure 3.23.1).

*) Il est entendu que $g^1 = g^1(x)$ dépend du choix de x .

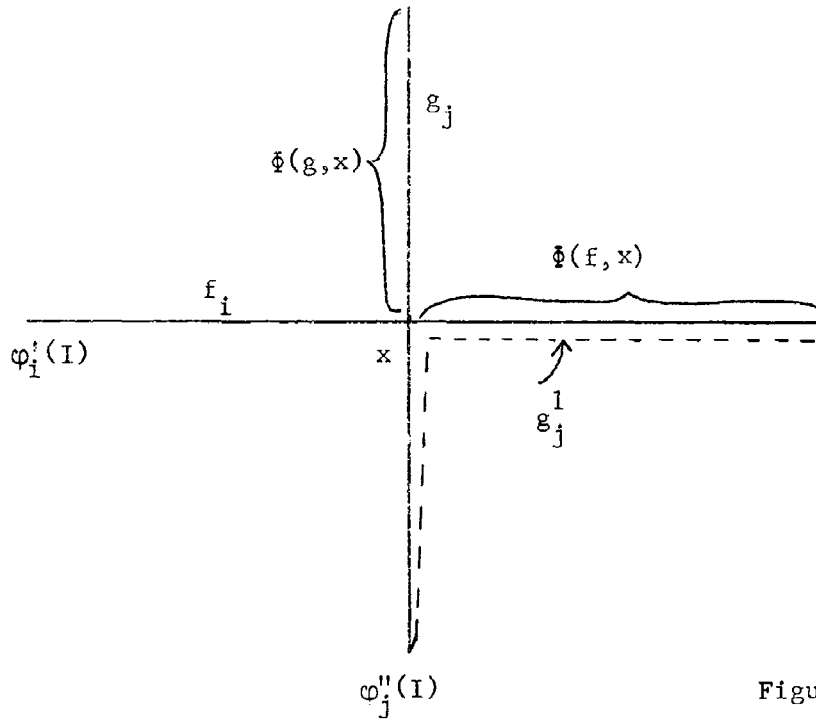


Figure 3.23.1
La modification .

$\epsilon - 3$) Si $(f ; g), (g^1 ; e), (e^1 ; f)$ sont trois α -systèmes, associés à $(\varphi^1 ; \varphi^2), (\varphi^2 ; \varphi^3), (\varphi^3 ; \varphi^1)$, tels que (g, e) et (e, f) soient triviaux alors (g^1, e) (α -système associé à $(\varphi^2 ; \varphi^3)$) est aussi trivial. \square .

Après tous ces préparatifs on revient à la démonstration du lemme 3.23.

On commence par considérer le α -système $(\eta ; \chi)$ associé à $(J^2 ; I)$. Pour la commodité on peut noter $\chi^0 = \chi$ ($\chi_1^0 = \chi_1$). D'après les propriétés $\epsilon - 1, \epsilon - 2$, on peut construire une suite finie de modifications successives :

$$(\eta ; \chi^0), (\eta ; \chi^1), \dots, (\eta ; \chi^N) ,$$

α -systèmes associés à $(J^2 ; I)$, tels que :

$\omega - 1$) $(\eta ; \chi^N)$ est trivial.

$\omega - 2$) $(\chi^i ; \chi^{i+1})$ est un α -système trivial associé à $(I ; I)$.

On considère maintenant le α -système trivial $(\delta ; \chi) = (\delta^0 ; \chi^0)$ associé à $(J^1 ; I)$. Le système $(\delta^0 ; \chi^1)$ n'est plus nécessairement trivial.

On va définir son transformé : $(\delta^1 ; \chi^1)$ qui est un α -système trivial associé à $(J^1 ; I)$. Par induction $(\delta^i ; \chi^i)$ est le α -système trivial, associé à $(J^1 ; I)$ obtenu par la transformation de $(\delta^{i-1} ; \chi^i)$. (Voir la figure 3.23.2 ci-dessous).

Lemme 3.23.1. " (δ^i, χ^{i-1}) est un α -système trivial". \square

Démonstration. En se référant aux formules (**), il existe exactement un χ_j^i qui diffère de χ_j^{i-1} :

$$\chi_j^i = \text{Cl}(\chi_j^{i-1} - \Phi(\chi^{i-1}, \eta ; x) + \Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x)) ,$$

où $\eta_k \cap \chi_j^{i-1} \ni x \in \pi_0(\eta, \chi^{i-1})$ est un élément minimal par rapport à la relation d'ordre $\leq_{\eta, \chi^{i-1}}$. On a : $(\Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x) - x) \cap \chi_j^{i-1} = \emptyset$, et :

$$(\alpha) \quad \Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x) \supset \bigcup_{\ell, k} \chi_\ell^i \cap \delta_k^{i-1} ,$$

(puisque le système $(\chi^{i-1}, \delta^{i-1})$ est trivial.)

Vu que $(\delta^{i-1}, \chi^{i-1})$ est trivial, le lemme résulte sans peine; dans le langage approximatif déjà utilisé, on a : (à cause de (α))

$$\chi^i \subset \chi^{i-1} \cup \Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x) , \text{ donc :}$$

$$\delta^i \subset \delta^{i-1} \cup \Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x) \text{ et :}$$

$$\delta^i \cap \chi^{i-1} \subset (\delta^{i-1} \cap \chi^{i-1}) \cup (\Phi(\eta, \chi^{i-1} ; x) \cap \chi^{i-1}) = \emptyset . \quad \square$$

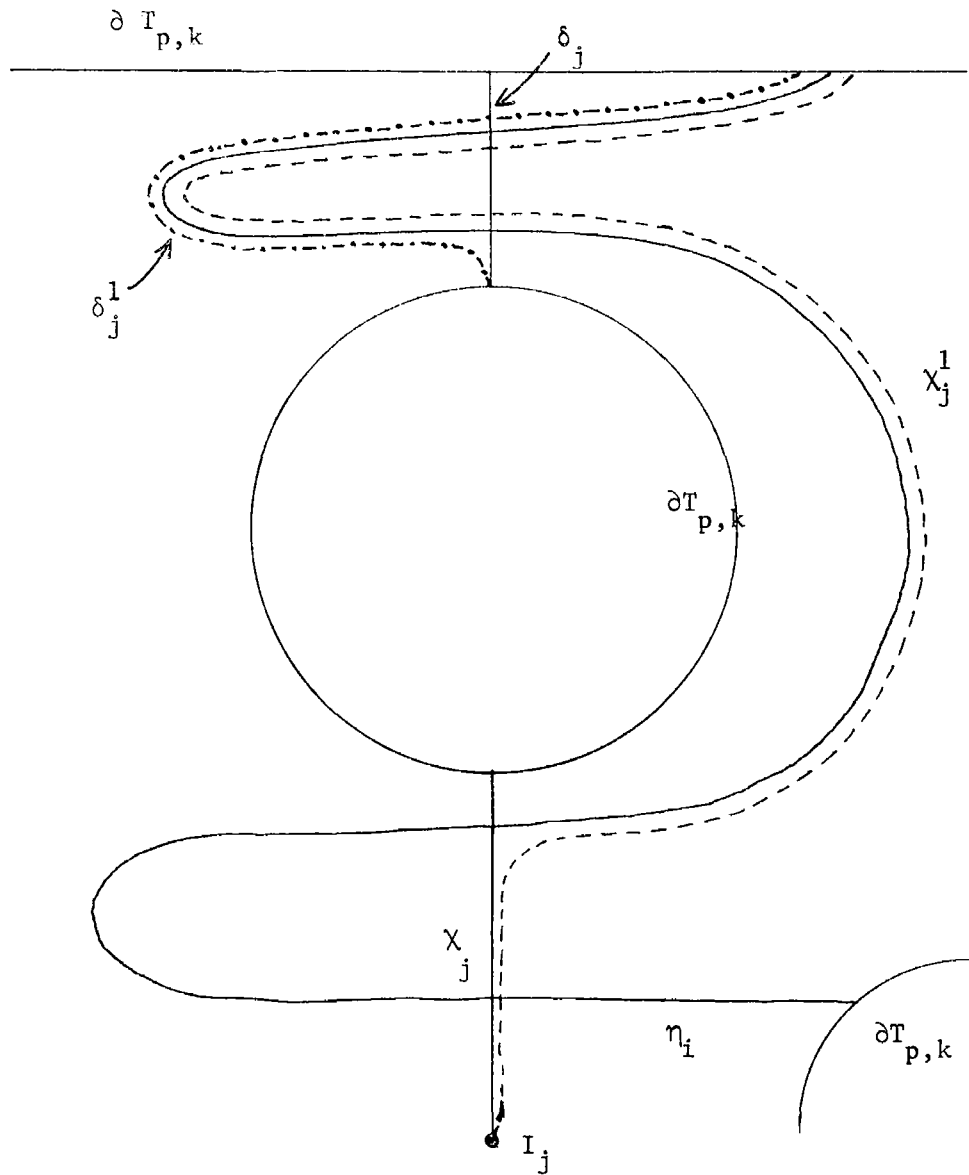


Figure 3.23.2 (La construction de $(\delta^1 ; \chi^1)$).

On considère les sous-ensembles de $T_{p,k}$:

$$X = \bigcup_i \eta_i + \bigcup_{i,j} \chi_j^i + \bigcup_{i,j} \delta_j^i \quad \text{et}$$

$$Y = \bigcup_{i,j} \eta_i \cap \delta_j^o + \bigcup_{i,j} \eta_i \cap \chi_j^o .$$

Soit Z un voisinage tubulaire très mince de Y dans $T_{p,k}$, tel que $Z \cap (\bigcup_i \text{Image } F_i) = \emptyset$. On voit facilement que

$$(\cup \eta_i + \cup \chi_j^0 + \cup \delta_k^0) - \text{int } Z$$

est une collection de disques de dimension 2, deux-à-deux disjoints :

D_1, \dots, D_x . De même $(X - \text{int } Z)$ est une réunion de disques de dimension 2, 2-à-2 disjoints : $\Delta_1, \dots, \Delta_y$, et pour chaque Δ_i il existe un $D_{j(i)}$ tel que Δ_i soit "parallèle" à $D_{j(i)}$.

Soient $\Delta_{a(1)}, \dots, \Delta_{a(\alpha)}$ les disques Δ_i qui proviennent de δ_j^i, η_j et $\Delta_{b(1)}, \dots, \Delta_{b(\beta)}$ les disques Δ_i qui proviennent de χ_j^i . On définit les ensembles E_i', E_i'' comme suit :

$$F_i(E_i' \times I) = (\text{Image } F_i) \cap (\Delta_{a(1)} + \dots + \Delta_{a(\alpha)})$$

$$F_i(E_i'' \times I) = \text{Cl}(\text{Image } F_i - T_{p,k}) \cap (\Delta_{b(1)} + \dots + \Delta_{b(\beta)}) .$$

On vérifie facilement e-1, e-2, e-3, e-4.

Lemme 3.23.2. "On considère dans $\partial T_{p,k}$ les cercles différentiables 2-à-2 disjoints (pour j fixé) :

$$(\partial \chi_i^j \cap \partial T_{p,k}) + I_i''$$

où : $i = 1, \dots, k, j = 0, 1, \dots, N$.

(Ces cercles sont plongés, et disjoints, à cause du fait que nos modifications successives ne touchent jamais aux I_i''). Ils existent des disques de dimension 2, différentiablement plongés, deux-à-deux disjoints (pour j donné) :

$$e_i^j \subset [p \# (S_1 \times S_2) - ((\text{int } T_{p,k}) + (\cup_i \text{Image } G_i))]$$

tel que : 1) $e_i^0 = e_i$.

2) $\partial e_i^j = e_i^j \cap \partial T_{p,k} = (\partial \chi_i^j \cap \partial T_{p,k}) + I_i''$ et e_i^j est transverse à $\partial T_{p,k}$.

3) $\partial e_i^j \cap \partial \delta_{k'}^j = \partial e_i^j \cap \partial \delta_{k'}^{j+1} = \emptyset$ si $i \neq k'$, et ∂e_i^j coupe $\partial \delta_i^j$ (respectivement $\partial \delta_i^{j+1}$) transversalement, en un point exactement.

4) $\partial e_i^N \cap \partial \eta_{k'} = \emptyset$ si $i \neq k'$, et ∂e_i^N coupe $\partial \eta_i$ transversalement, en un point exactement.

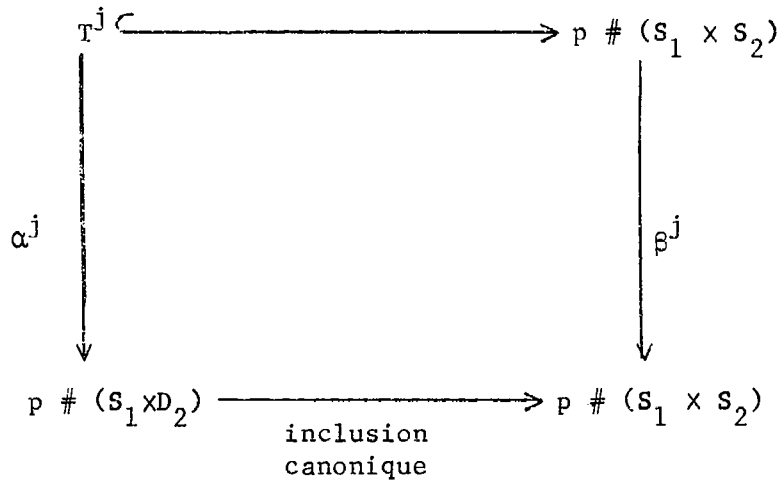
5) $e_i^j \cap \bigcup \bar{\Gamma}^{k'} = \emptyset$.

6) Considérons les anses d'indice 2 correspondant aux e_i^j :

$$T^j = T_{p,k} + (\phi_2(e_1^j)) + \dots + (\phi_2(e_k^j)) \subset 2T_3^p$$

(On peut choisir ces anses de telle manière qu'elles ne touchent pas à $\bigcup \bar{\Gamma}^{k'}$ où à Image C_i).

Ils existent des difféomorphismes α^j, β^j , qui rendent commutatif le diagramme suivant :



7) Le diagramme commutatif du point précédant, nous permet de construire, par transport de structures, à partir de l'involution canonique :

$$p \# (S_1 \times S_2) = 2(p \# (S_1 \times D_2)) \xrightarrow{J} 2(p \# (S_1 \times D_2)) = p \# (S_1 \times S_2),$$

une involution canonique :

$$p \# (S_1 \times S_2) = 2T_3^p = 2T^j \xrightarrow{J_j} 2T^j = 2T_3^p = p \# (S_1 \times S_2),$$

dont l'ensemble des points fixes soit exactement ∂T^j . J_j est déterminé modulo une isotopie de $2T_3^p$, laissant fixe ∂T^j . Par un choix convenable de cette isotopie on peut réaliser les conditions suivantes :

- a) $J_j \bar{\Gamma}^i \equiv J \bar{\Gamma}^i \subset 2 T_3^p$
- b) $J_j \bar{\Gamma}^i \cap \text{Image } G_k = \emptyset$

(pour tous les choix de i, k)" . \square

Démonstration. On va procéder par induction, en supposant le théorème déjà vérifié au cran j . (Donc e_i^j est déjà construit). Remarquons seulement que, d'après la propriété d - 1) de l'énoncé du lemme 3.23, on peut toujours supposer que :

$$\boxed{T_{p,k} \supset \bar{\Gamma}^i \cap \chi^l = \emptyset} .$$

On considère l'ensemble :

$$\bar{T}^j = T_{p,k} \cup \left(\bigcup_i e_i^j \right) \subset 2 T_3^p ,$$

et

$\bar{e}_i^{j+1} = e_i^j \cup \chi_i^j \cup \chi_i^{j+1} \subset \bar{T}^j$. Les \bar{e}_i^{j+1} , sont des disques de dimension 2 plongés, 2-à-2 disjoints (puisque $(\chi^j ; \chi^{j+1})$ est un α -système trivial associé à $(I ; I)$) (voir la figure 3.23.3).

On remarquera aussi que :

$$\bar{e}_i^{j+1} \cap \left(\bigcup_l \text{cl} (\text{Image } G_l - T_{p,k}) \right) = \emptyset .$$

Soit N^j un "voisinage régulier C^∞ " de \bar{T}^j dans $p \# (S_1 \times S_2)$, qu'on peut toujours supposer tel que :

- 1) $\text{Int } N^j \supset \text{int } \bar{e}_i^{j+1}$.
- 2) $\text{Int } N^j \supset \text{Image } G_l$.

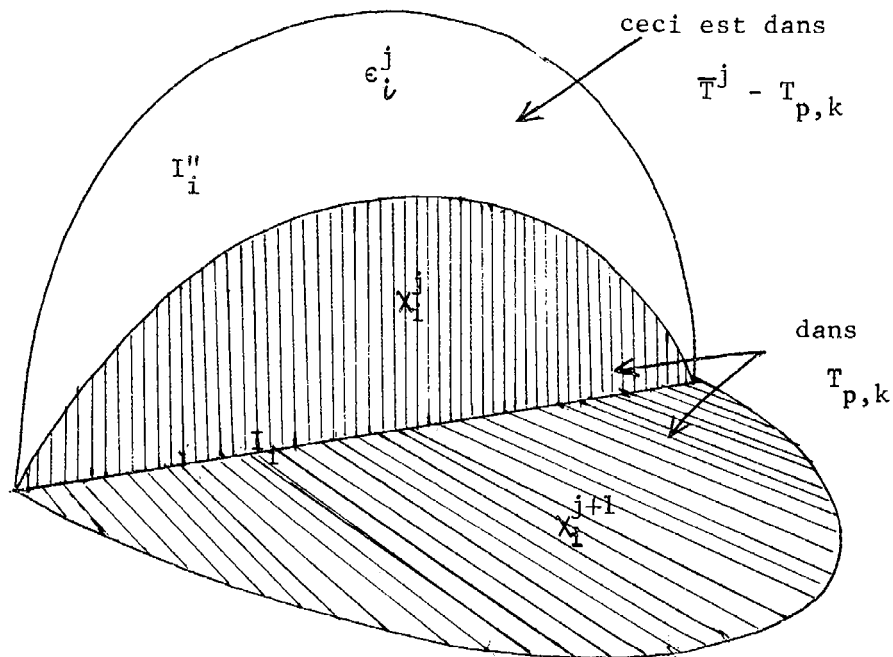
(On doit remarquer ici que $T_{p,k} + (\bigcup_{\ell} \text{Image } G_{\ell})$ (respectivement $T_{p,k} + (\bigcup_{\ell} \text{Image } F_{\ell})$) collapse sur $T_{p,k}$).

$$3) \quad \partial \bar{\epsilon}_i^{j+1} \subset \partial N^j .$$

La paire $(2T_3^p, N^j)$ peut être identifiée à $(2T_3^p, T^j = T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1^j)) + \dots + (\Phi_2(\epsilon_k^j)))$.

Figure 3.23.3

(le disque $\bar{\epsilon}_i^{j+1} = \epsilon_i^j \cup \chi_i^j \cup \chi_i^{j+1} \subset \bar{T}^j$)



On peut donc considérer l'involution canonique

$$J_j : 2T_3^p \longrightarrow 2T_3^p$$

dont l'ensemble des points fixes est ∂N^j . Par définition : $J_j \bar{\epsilon}_i^{j+1} = \epsilon_i^{j+1}$.

Il faut vérifier les propriétés 2, 3, 5, 6, 7 au cran $(j+1)$ (et la propriété 4) qui se place au cran $N).2)-(j+1)$ est une conséquence immédiate de la définition. On remarque aussi que χ_i^j n'apparaît pas dans $\partial \epsilon_i^{j+1}$

(mais seulement χ_i^{j+1}). Alors, le lemme 3.23.1 et le fait que le α -système $(\delta^i; \chi^i)$ est toujours trivial, impliquent 3)- (j+1). De la même façon 4) résulte du fait que (η, χ^N) est un α -système trivial et de la propriété b - 3) du lemme 3.23.

D'après 3)- j et 3)- (j+1), les anses négatives δ_{\pm}^{j+1} ont la propriété de ne pas toucher aux anses positives $e_k^j, (e_{k'}^{j+1})$ si $i \neq k'$ et de couper $\partial e_i^j (\partial e_i^{j+1})$ transversalement en un point. Donc $T^j = T_{p,k} + (\Phi_2(e_1^j)) + \dots \subset 2 T_3^p$ et $T^{j+1} = T_{p,k} + (\Phi_2(e_1^{j+1})) + \dots \subset 2 T_3^p$ s'effondrent (collapsent) sur $T_{p,k} - (\delta_1^{j+1}) - \dots - (\delta_k^{j+1}) \subset 2 T_3^p$.

Ceci fait que 6)- j implique 6)- (j+1).

Enfin, à partir de d - 1) du lemme 3.23, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$T_{p,k} \supset \bar{\Gamma}^i \cap \delta^{j+1} = \emptyset .$$

Donc le passage :

$$(*) \left\{ T^j \begin{array}{c} \searrow \\ \rightarrow T_{p,k} - (\delta_1^{j+1}) - \dots - (\delta_k^{j+1}) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow T^{j+1} \end{array} \right\} \subset 2 T_3^p ,$$

ne touche pas à $\bar{\Gamma}^i$. Supposons que 7)- j - a soit satisfaite. On a : $\bar{\Gamma}^i \subset T^j \supset \bar{e}^{j+1}$ et : $\bar{\Gamma}^i \cap \bar{e}^{j+1} = \emptyset$ (à cause de la condition d - 1) du lemme 3.23). On a donc :

$$2 T_3^p \supset J_j \bar{\Gamma}^i \cap J_j \bar{e}^{j+1} \equiv J \bar{\Gamma}^i \cap J_j \bar{e}^{j+1} \equiv J \bar{\Gamma}^i \cap e^{j+1} = \emptyset$$

(ce qui est la condition 5), au cran j + 1).

Puisque : $J_j \bar{\Gamma}^i \cap e^{j+1} = \emptyset$ le passage (*), considéré ci-dessus, ne touche pas à $J_j \bar{\Gamma}^i$, non plus. On peut donc choisir J_{j+1} de telle manière que :

$$J_{j+1} \bar{\Gamma}^i \equiv J_j \bar{\Gamma}^i .$$

$$\Delta_a(1) + \dots + \Delta_a(\alpha) = \bigcup_i \delta_i + \bigcup_j \eta_j; \text{ et :}$$

$$\Delta_b(1) + \dots + \Delta_b(\beta) = \bigcup_l \chi_l .$$

En utilisant e - 6 - 2) et ces égalités, on trouve :

$$E'_i = E''_i = \emptyset . \text{ Donc } E_i = \emptyset . \quad \square$$

4.11. Démonstration du lemme 3.24.

On va commencer par considérer le foncteur θ du lemme 3.5 :

$$\theta(V_3 \xrightarrow{\pi} \Theta_3(K'_2)) = (\Theta_4(\Theta_3(K'_2)), \theta(\pi), V_3) .$$

On remarque qu'il existe une inclusion naturelle $\Theta_3(K_2) \xrightarrow{i} V_3$ et un difféomorphisme naturel I , qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Theta_3(K_2) & \xrightarrow{i} & V_3 \\ \text{incl. canonique} \downarrow & & \downarrow \theta(\pi) \\ 2 \Theta_3(K_2) & \xrightarrow[\approx]{I} & \Theta_4(\Theta_3(K'_2)) \end{array} .$$

On va considérer aussi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}'_2 & \subset & V_3 \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ K'_2 & \subset & \Theta_3(K'_2) \end{array}$$

de la définition 3.13, et on va décrire explicitement l'inclusion :

$$\hat{i} : \hat{K}'_2 \subset V_3 \xrightarrow{I^{-1} \circ \theta(\pi)} 2 \Theta_3(K_2) .$$

On a $K_2 \subset \hat{K}'_2$ et $I|_{K_2}$ est la même chose que l'inclusion naturelle

$$K_2 \subset \Theta_3(K_2) \subset 2 \Theta_3(K_2) .$$

On peut considérer la paire canonique (voir déf. 3.13) : (S_3, \hat{k}_2) , définie par :

$$\begin{aligned} \hat{k}_2 &= ((x=0) \cap (4 \leq y^2 + (z-2)^2 \leq 9)) \oplus ((y=0) \cap (x^2 + z^2 \leq 1)) \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (-1 \leq z \leq 0)} \\ &\subset \{ (x, y, z) \} = R_3 \subset R_3 \cup (\infty) = S_3 . \end{aligned}$$

Alors \hat{i} est défini par la somme connexe :

$$(2 \Theta_3(K_2), \hat{i}(\hat{K}'_2) = \hat{K}'_2) = (2 \Theta_3(K_2), K_2) \# (S_3, \hat{k}_2^1) \# \dots \# (S_3, \hat{k}_2^s) ,$$

modélée d'après : $K'_2 = K_2 \# \bar{k}_2^1 \# \dots \# \bar{k}_2^s$.

(Il est entendu que les recollements considérés tiennent compte des branches spécifiées ; on n'essaie pas d'introduire cela dans la notation ...).

Pour chacun des modèles locaux \hat{k}_2^i , on va considérer le segment Δ^i correspondant à :

$$\begin{aligned} \Delta^i &= ((x=y=0) \cap (4 \leq z \leq 5)) \subset (x=0) \cap (4 \leq y^2 + \\ &\quad + (z-2)^2 \leq 9) \subset \hat{k}_2^i . \end{aligned}$$

On remarque que $\partial \Delta^i \subset \partial \hat{K}'_2$ et $\overset{\circ}{\Delta}^i \subset (\hat{K}'_2)_2$. Sans perte de généralité on suppose que : $M^2(f') \subset \cup \bar{k}_2^i$ et que Δ^i est l'image réciproque (via $\hat{\pi}^{-1}$) de la branche spécifiée :

$$\Delta^i = \hat{\pi}^{-1} (\bar{k}_2^i \cap M^2_+(f')) .$$

On peut supposer aussi que :

$$(x = y = 0) \cap (0 \leq z \leq 1) = \hat{\pi}^{-1}(k_2^i \cap M_-^2(f')),$$

et que $\Delta^i \cap M_+^2(\varphi)$ consiste d'un nombre fini de points d'intersection transversale. D'autre part, d'après 3°) (lemme 3.24) on a : $\Delta^i \cap M_-^2(\varphi) = \emptyset$.

On va utiliser maintenant la notation suivante : si (X_2, χ, N_3) est un 2-polyèdre singulier, et $I \subset X_2$ un segment plongé différemmentiellement, tel que : $I \cap \partial X_2 = \partial I$, $I \cap s(X_2) = \emptyset$, $\overset{\circ}{I} \subset (X_2)_2$, I rencontre ∂X_2 transversalement, on va désigner par $X_2 - (I)$ le 2-polyèdre singulier compact, obtenu en coupant X_2 suivant I (chaque point de I éclate en deux). Ceci est essentiellement la même chose que l'adjonction d'une anse négative d'indice 2, puisqu'il existe un plongement :

$$\psi^2 : D_2 \longrightarrow \Theta_3(X_2) - s(\Theta_3(X_2))$$

tel que $(\psi^2)^{-1}(\partial \Theta_3(X_2)) = \partial D_2$, transversal sur $\partial \Theta_3(X_2)$, ayant la propriété :

$$\Theta_3(X_2 - (I)) = \Theta_3(X_2) - (\psi^2).$$

(Voir les notations relatives aux anses (positives ou négatives), du paragraphe 0.2).

Lemme 3.24.1. "On a un difféomorphisme de triples :

$$(2 \Theta_3(K_2) ; \Theta_3(K_2) ; \sum_i \Gamma_i) = (2 \Theta_3(K_2) ; \Theta_3(\hat{K}_2' - (\Delta^1) - \dots - (\Delta^s)) ; \sum_i \Gamma_i)." \quad \square$$

La démonstration est immédiate.

Définition 3.24.01. Soit Γ un arbre (c'est-à-dire) un graphe (= complexe simplicial de dimension 1) acyclique, $x \in \partial \Gamma$ un bout de Γ et

$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$$

un fibré singulier (voir la définition 3.33) de base Γ . Désignons par

$\partial\Gamma$ l'ensemble des bouts de Γ . On va considérer l'arbre $\bar{\Gamma}_x$ (qu'on va désigner par abus de notation $\bar{\Gamma}$) défini de la manière suivante :

Pour chaque $y \in \partial\Gamma - x$, on considère un intervalle fermé $I_y = [0,1]$ et on pose :

$$\bar{\Gamma}_x = \Gamma \oplus I_{y_1} \oplus \dots \oplus I_{y_k} ,$$

où $\partial\Gamma - x = \{y_1, \dots, y_k\}$ et chaque $0 \in [0,1] = I_{y_i}$ est identifié avec $y_i \in \Gamma$.

On va considérer le fibré singulier, élargissement de ξ :

$$\bar{\xi} : \bar{\Gamma} \xrightarrow{\bar{i}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{p}} \bar{\Gamma}$$

caractérisé par la condition $\bar{\xi}|_{\Gamma} = \xi$. \square

Quelquefois, pour mettre en évidence $x \in \partial\Gamma$, le diagramme ci-dessus, s'écrira :

$$\bar{\xi}_x : \bar{\Gamma}_x \xrightarrow{\bar{i}} \bar{E}_x \xrightarrow{\bar{p}} \bar{\Gamma}_x .$$

Définition 3.24.02. Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que K_2 est connexe, $s(K_2) = \emptyset$, (et que f soit un plongement,) Γ un arbre, $x \in \partial\Gamma$ et :

$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$$

un fibré singulier de base Γ .

On va supposer qu'il existe un plongement $\bar{E} = \bar{E}_x \subset K_2$, avec les propriétés suivantes :

$$\text{cl}(K_2 - \bar{E}) \cap \bar{E} = \bigcup_{z \in \bar{\Gamma}} \partial \bar{p}^{-1}(z) .$$

(Donc, en particulier :

$$\bar{E} \cap \partial K_2 = p^{-1}(\partial \bar{\Gamma}) .)$$

L'éclatement standard de Γ , sera, par définition, un 2-polyèdre singulier connexe (K_2, f, M_3) , muni d'une projection d'espace-quotient $\overset{\vee}{\pi} : \overset{\vee}{K}_2 \longrightarrow K_2$. $\overset{\vee}{K}_2, f, \overset{\vee}{\pi}$ seront uniques, à isotopies près, et sont décrites par les propriétés suivantes :

a) si $x' \in (K_2 - \Gamma + \partial\Gamma) - (x)$ alors $\overset{\vee}{\pi}^{-1}(x')$ est unique.

b) Si $x' \in \Gamma - \partial\Gamma - \rho\Gamma = (\Gamma)_1$, alors $\overset{\vee}{\pi}^{-1}(x')$

consiste exactement de deux points, appartenant à $\overset{\vee}{\partial}K_2$.

c) Si $x' \in \rho(\Gamma)$, et x' est du type A, x' éclate en deux ; si x est du type A^* il éclate en $(\dim_{\mathbb{Z}} H_1(\Gamma \text{ mod } (\Gamma - x')) + 1)$ points.

d) x éclate en deux.

K_2 est donc obtenu en "coupant" K_2 le long de Γ , en commençant par x . $\overset{\vee}{K}_2$ est donc isomorphe à $\mathcal{C}\ell(K_2 - E)$ et $\overset{\vee}{f} = f|_{\mathcal{C}\ell(K_2 - E)}$ (à isotopie près). \square

Un éclatement de (K_2, f, M_3) le long de Γ , sera un 2-polyèdre singulier :

$$(K'_2 = K_2 \setminus \Gamma, f' = f \setminus \Gamma, M_3) ,$$

donné avec une projection d'espace quotient : $\pi : K'_2 \longrightarrow K_2$ et obtenu par une construction qu'on va décrire. Cette construction ne sera pas univoque, donc, en général il y aura plusieurs éclatements possibles. Mais tous, ils vont s'obtenir en éclatant (un peu plus) l'éclatement standard.

Notre construction va dépendre de plusieurs choix :

I. On va choisir une filtration :

$$x \in \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_r = \Gamma ,$$

comme dans le lemme 3.25. (Remarque. Les Γ_i qu'on vient d'écrire n'ont aucune relation avec les Γ_i du lemme 3.24).

II. Ensuite, on considère les éléments : ρ_1, \dots, ρ_r de $\rho(\Gamma) \subset \Gamma$, qu'on numérote de telle façon que $\{\rho_i\} = \rho(\Gamma_i)$. (Lemme 3.25). On remarque que, sur l'ensemble fini $\partial\gamma_i \subset \Gamma$, le point ϵ_{i-1} est plus petit que tous les autres, (par rapport à l'ordre $\omega(\Gamma, x)$ de la définition 3.32) et les points de $\partial\gamma_i - \epsilon_{i-1}$ sont incomparables entre eux.

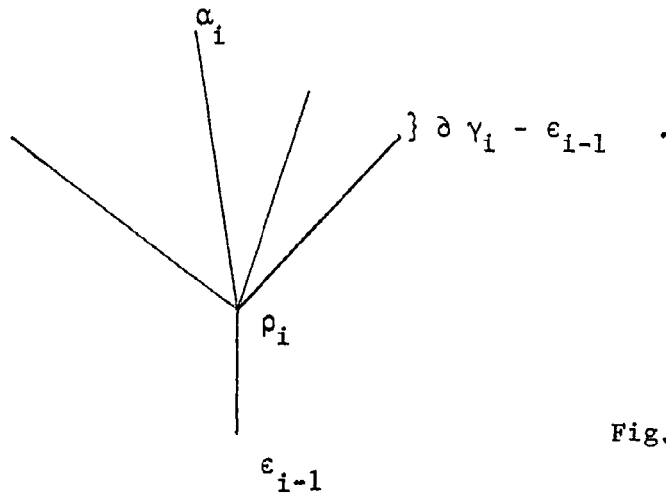


Fig. 3.24.02 a.

L'arbre γ_i .

On va choisir, pour chaque i , un élément $\alpha_i \in \partial\gamma_i - \epsilon_{i-1}$.

Une fois que ces choix sont faits, on va définir inductivement l'éclatement le long de Γ_i (pour chaque i).

L'éclatement le long de Γ_r (obtenu à la fin du processus inductif), sera, par définition, l'éclatement de (K_2, f, M_3) , le long de Γ , déterminé par les choix I et II faits ci-dessus.

On considère $\xi_i = \xi | \Gamma_i$, son espace total $E_i = E | \Gamma_i$ et son "élargissement": $\bar{E}_i = (\bar{E}_i)_x$. Si (K_2^i, f^i, M_3^i) est tel qu'il y ait une inclusion $\bar{E}_i \subset K_2^i$, avec les mêmes propriétés que l'inclusion $\bar{E} \subset K_2$, on va définir l'éclatement :

$$\{(K_2^i \setminus \Gamma_i, f_i \setminus \Gamma_i, M_3^i) \quad , \quad \pi_i : K_2^i \setminus \Gamma_i \longrightarrow K_2^i \} .$$

Pour Γ_0 , on coupe tout simplement \bar{E}_0 suivant $i(\Gamma_0) \subset \bar{E}_0$. (Ici, il ne faut pas confondre $i =$ inclusion : $i : \Gamma \longrightarrow E$ et $i =$ indice appliqué à Γ_i).
Donc chaque point de $\Gamma_0 - (\partial\Gamma_0 - x)$ éclate en deux et $i(I_{(\partial\Gamma_0 - x)}) \subset \bar{\Gamma}_0$ n'éclate pas du tout.

En général l'éclatement le long de Γ_i fera "éclater" certains points de Γ_i . Supposons qu'on sâche déjà lesquels vont éclater pour Γ_i , et qu'on veuille le faire pour Γ_{i+1} . Tout ce qui a éclaté au cran i , restera éclaté au cran Γ_{i+1} .

On aura les "règles du jeu" suivantes :

A-1 : Supposons que ρ_{i+1} soit du type A (définition 3.33), et que dans l'éclatement le long de Γ_i , aucun point de $I_{\epsilon_i} \subset \bar{\Gamma}_i$ n'éclate. (On rappelle ici que $\epsilon_i \in \partial\Gamma_i - x$). Alors, dans l'éclatement le long de Γ_{i+1} on fait éclater : ϵ_i , tous les points de γ_{i+1} sauf α_{i+1} , et tous les segments $I_z \subset \bar{\Gamma}_{i+1}$, où $z \in \partial\gamma_{i+1} - (\epsilon_i) - (\alpha_{i+1})$. Aucun point de $I_{\alpha_{i+1}}$ n'éclate.

A-2 : Supposons que ρ_{i+1} soit du type A et que dans l'éclatement le long de Γ_i , tous les points de $I_{\epsilon_i} \subset \bar{\Gamma}_i$ éclatent. Alors, dans l'éclatement le long de Γ_{i+1} , chaque point de :

$$\gamma_{i+1} \cup (\cup I_z)$$

(où z parcourt $\partial\gamma_{i+1} - \epsilon_i$) éclate (en deux exactement).

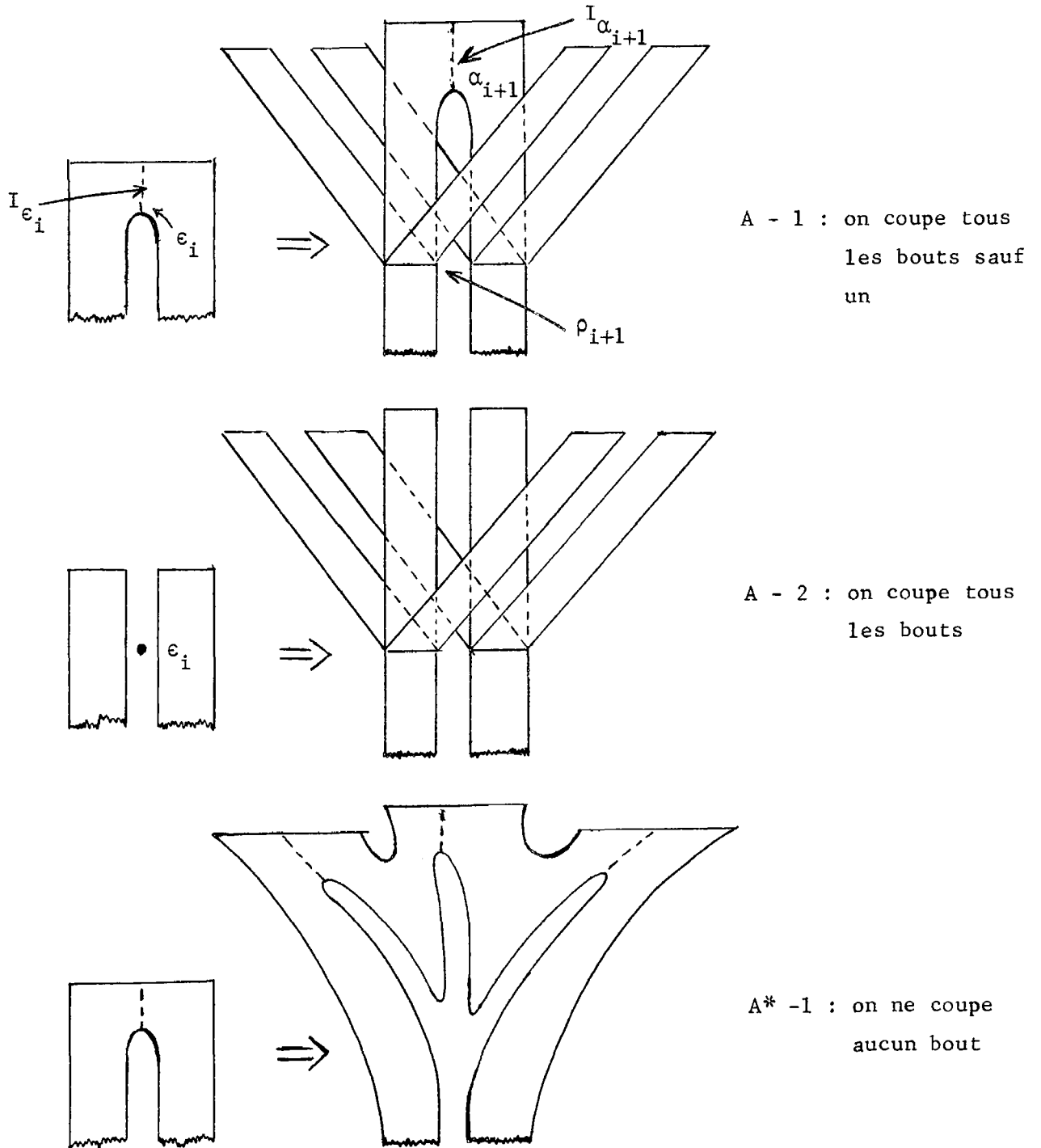
A*-1 : Supposons que ρ_{i+1} soit du type A* et que dans l'éclatement le long de Γ_i aucun point de I_{ϵ_i} n'éclate. Alors, dans l'éclatement le long de Γ_{i+1} , on éclate tous les points de $\gamma_{i+1} - (\partial\gamma_{i+1} - \epsilon_i)$. (Donc aucun point de I_z ($z \in \partial\gamma_{i+1} - \epsilon_i$) n'éclate).

A*-2 : Supposons que ρ_{i+1} soit du type A*, et que dans l'éclatement le long de Γ_i tous les points de I_{ϵ_i} éclatent. Alors dans l'éclatement

le long de Γ_{i+1} , on fera éclater tous les points de $\gamma_{i+1} - \partial\gamma_{i+1} + (\alpha_{i+1})$
 et le segment $I_{\alpha_{i+1}} \subset \bar{\Gamma}_{i+1}$.

Aucun point des segments I_z ($z \in \partial\gamma_{i+1} - \alpha_{i+1}$) n'éclate.

La figure 3.24.02. b donne une description schématique des "règles du jeu". \square



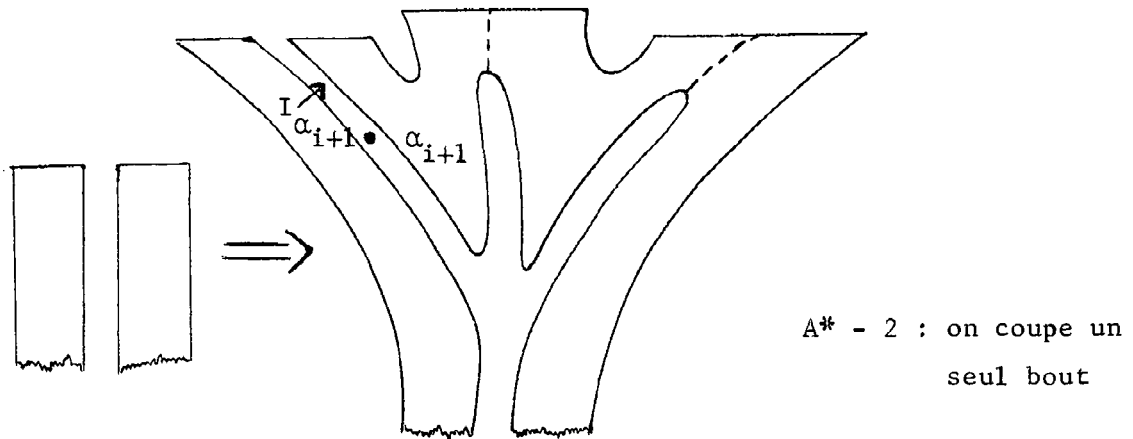


Fig. 3.24.02. b : Les "règles du jeu" .

Lemme 3.24.2. "Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que $s(K_2) = \emptyset$ et que f soit un plongement. On considère aussi un arbre Γ , un fibré singulier : $\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$, et un plongement $\bar{E}_x = \bar{E} \subset K_2$, comme dans la définition 3.24.02 ($x \in \partial\Gamma$).

On va considérer :

$M_3 \supset \Theta_3(K_2) = \Theta_3(\bar{E}) \oplus \Theta_3(\text{Cl}(K_2 - \bar{E}))$, et un fermé $F \subset M_3$ tel que $F \cap \Theta_3(\bar{E}) = \emptyset$.

Considérons l'éclatement de K_2 le long de $\Gamma : K_2 \setminus \Gamma \subset M_3$. Il existe un difféomorphisme :

$$J : (M_3 ; \Theta_3(K_2), F) \xrightarrow{\approx} (M_3 ; \Theta_3(K_2 \setminus \Gamma), F),$$

qui est l'identité en dehors d'un voisinage de $\Theta_3(\bar{E}), (\Theta_3(\bar{E} \setminus \Gamma))$. Ce difféo-

morphisme est décrit "canoniquement", à isotopie près, dans la démonstration qui suit". \square

Démonstration du lemme 3.24.2. Tous les 2-polyèdres singuliers (P_2, g, N_3) qu'on va considérer ci-dessous, seront tels que : $s(P_2) = \emptyset$ et g est un plongement. On va procéder par induction. Le lemme est clairement vrai pour l'éclatement le long de Γ_0 . On va supposer qu'il est vrai pour n'importe quel éclatement, (d'un (K_2^i, f_i, M_3^i)) le long de Γ_i . On veut le prouver pour un éclatement arbitraire (d'un $(K_2^{i+1}, f_{i+1}, M_3^{i+1})$) le long de Γ_{i+1} .

Il y a deux cas : si ρ_{i+1} est du type A, on commence par considérer :

$$\widetilde{\gamma}_{i+1} = \gamma_{i+1} - (\text{le segment qui unit } \alpha_{i+1} \text{ à } \epsilon_i) + \underbrace{\bigcup_{z \in \partial \gamma_{i+1} - \epsilon_i - \alpha_{i+1}} I_z}_{\subset \Gamma_{i+1}}.$$

On remarque, sans peine, que si $F_{i+1} \subset M_2^{i+1}$ est un fermé tel que :

$$\Theta_3(\overline{E}_{i+1}) \cap F_{i+1} = \emptyset, \text{ on a un difféomorphisme :}$$

$$J_0 : (M_2^{i+1} ; \Theta_3(K_2^{i+1}), F_{i+1}) = (M_2^i = M_2^{i+1} ; \Theta_3(\text{Cl}(K_2^{i+1} - \overline{E} \mid \widetilde{\gamma}_{i+1})), F_i = F_{i+1}),$$

égal à l'identité en dehors d'un voisinage de $\Theta_3(\overline{E} \mid \gamma_{i+1})$. On remarque, aussi, que $K_2^i = \text{Cl}(K_2^{i+1} - \overline{E} \mid \widetilde{\gamma}_{i+1})$, contient $\overline{E}_{i+1} \mid (\overline{\Gamma}_{i+1} - \widetilde{\gamma}_{i+1})$, qu'on peut identifier avec \overline{E}_i . Par un simple raisonnement local on trouve un difféomorphisme :

$$J_1 : (M_2^{i+1} ; \Theta_3(K_2^{i+1} \setminus \Gamma_{i+1}), F_{i+1}) = \\ = (M_2^i ; \Theta_3(K_2^i \setminus \Gamma_i), F_i),$$

égal à l'identité en dehors d'un voisinage de $\Theta_3(\overline{E}_{i+1} \setminus \Gamma_{i+1})$ ($\Theta_3(\overline{E}_i \setminus \Gamma_i)$).

(Pour trouver J_1 on considère les "règles du jeu" A-1 et A-2). L'hypothèse de l'induction, et les difféomorphismes J_0 et J_1 nous montrent que le lemme est vrai pour l'éclatement le long de Γ_{i+1} .

Si ρ_{i+1} est du type A^* on procède d'une manière tout à fait analogue, mais avec une autre définition du K_2^i .

Dans le cas A^*-1 , (voir les "règles du jeu"), on considère le plongement "naturel" : $\bar{E}_i \subset \bar{E}_{i+1}$ obtenu en oubliant toutes les branches de γ_{i+1} sauf celles qui correspondent à e_i et à α_{i+1} . On prend $K_2^i = K_2^{i+1}$ et $\bar{E}_i \subset \bar{E}_{i+1} \subset K_2^i$, e.a.d.s.

Dans le cas A^*-2 , on prend :

$$K_2^i = \text{Cl}(K_2^{i+1} - \bar{E} \mid (\gamma_{i+1} + I_{\alpha_{i+1}})), \quad \bar{E}_i = \bar{E}_{i+1} - \bar{E}_{i+1} \mid \bar{\gamma}_{i+1}, \text{ e.a.d.s. } \square$$

Définition 3.24.03 : Soit (P_2, g, N_3) un 2-polyèdre singulier tel que $s(P_2) = \emptyset$ et que g soit un plongement. Une courbe tracée sur P_2 est une application $\varphi : I \longrightarrow P_2$ donnée avec un plongement du mapping-cylinder $M(\varphi)$:

$$\Phi : M(\varphi) \subset N_3$$

tel que $\Phi \mid P_2 = \text{le plongement } g$. (Par définition $M(\varphi) = P_2 \oplus \underbrace{IX[0,1]}_{(I, \varphi, i)}$,

où $i : I \longrightarrow IX[0,1]$ est définie par :

$$i(t) = t \times 0 \text{) } .$$

Il est entendu que Φ est donné à une isotopie près (isotopie qui laisse invariant chaque point de P_2).

Si $\varphi : I \longrightarrow P_2$ est une courbe tracée sur P_2 on peut définir d'une manière naturelle un plongement $I \subset \partial \Theta_3(P_2)$ correspondant à φ . Par abus de notation ce plongement sera toujours désigné par $\varphi : I \longrightarrow \partial \Theta_3(P_2)$.

Pour simplifier la notation on va oublier Φ ; on se contentera de φ .

Si $\varphi, \psi : I \longrightarrow P_2$ sont deux courbes tracées sur P_2 , telles que $\varphi(0) = \psi(0) = p \in (P_2)_2$ on définit d'une manière évidente le fait que

$\varphi(0), \psi(0)$ sont (ou ne sont pas) du même côté de P_2 .

On va considérer aussi des cercles $\varphi : S_1 \rightarrow P_2$ tracés sur P_2 . \square

Lemme 3.24.3. "Considérons la situation de la définition 3.24.02. Il existe une courbe tracée sur $K_2 \setminus \Gamma$:

$$C_{\Gamma}^+ : I \longrightarrow K_2 \setminus \Gamma ,$$

avec les propriétés suivantes :

1) C_{Γ}^+ est une injection ; les extrémités de C_{Γ}^+ sont les deux points résultés de l'éclatement de x .

2) $C_{\Gamma}^+(I) \subset \pi^{-1}(\Gamma)$. Pour chaque Γ_i on aura une définition de $C_{\Gamma_i}^+ : I \longrightarrow K_2^i \setminus \Gamma_i$ (en particulier de :

$$C_{\Gamma_i}^+ : I \longrightarrow \bar{E}_i \setminus \Gamma_i) .$$

D'une manière précise, $\pi(C_{\Gamma}^+(I))$ est le sous-ensemble de Γ défini de la manière suivante:

2-1) $\Gamma_0 \subset \pi(C_{\Gamma}^+(I))$.

2-2) Dans la situation de la "règle du jeu" A-2 :

$$\gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma_{i+1}}^+(I)) = \gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma}^+(I)) = \emptyset .$$

2-3) Dans la situation de la "règle du jeu" A-1 :

$\gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma_{i+1}}^+(I)) = \gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma}^+(I)) =$ l'unique intervalle fermé qui unit e_i avec α_{i+1} , si $e_i \in \pi_i(C_{\Gamma_i}^+(I))$, et \emptyset autrement.

2-4) Dans la situation de la "règle du jeu" A^k-2 :

$$\gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma_{i+1}}^+(I)) = \gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma}^+(I)) = \emptyset .$$

2-5) Dans la situation de la "règle du jeu" A^k-1 :

$$\gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma_{i+1}}^+(I)) = \gamma_{i+1} \cap \pi(C_{\Gamma}^+(I)) = \gamma_{i+1} \quad \text{si } \varepsilon_i \in \pi_i(C_{\Gamma}^+(I)) ,$$

et \emptyset autrement.

C_{Γ}^+ est déterminé d'une manière univoque par ces propriétés, à un automorphisme de la source près." \square

La démonstration (qui se fait par induction sur les Γ_i) est facile, et sera laissée au lecteur.

Lemme 3.24.4. "Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier tel que $s(K_2) = \emptyset$ et que f soit un plongement. On va considérer un arbre Γ , un bout $x \in \partial\Gamma$, un fibré singulier de base Γ : $\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$, et son dual :

$$\xi^* : \Gamma \xrightarrow{i^*} E^* \xrightarrow{p^*} \Gamma . \quad (\text{Voir la définition 3.34}).$$

On va considérer deux plongements disjoints : $\bar{E} \subset K_2$ et $E^* \subset K_2$ tels que : $\bar{E} \subset K_2$ a les propriétés de la définition 3.24.02 et que :

$$\mathcal{C}\ell(K_2 - E^*) \cap E^* = \bigcup_{z \in \Gamma} \partial(p^*)^{-1}(z) + (p^*)^{-1}(x) .$$

On va supposer que $i^*(x) \in (K_2)$. (Ceci n'est pas vraiment essentiel, mais permet de faciliter l'exposition qui suit).

Il existe une courbe tracée sur $E^* \subset K_2 \setminus \Gamma$:

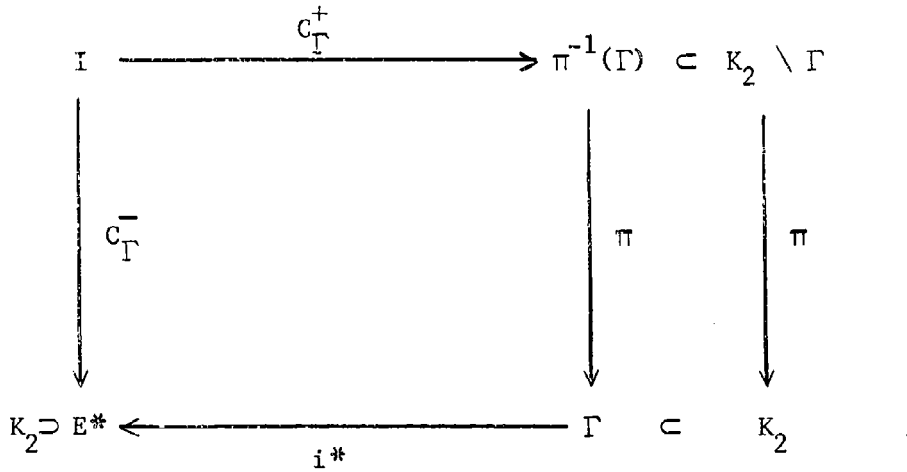
$$C_{\Gamma}^- : I \longrightarrow K_2 \setminus \Gamma ,$$

avec les propriétés suivantes :

1) L'image de l'application C_{Γ}^- est :

$$C_{\Gamma}^-(I) = i^* \pi(C_{\Gamma}^+(I)) \subset i^* \Gamma .$$

D'une manière plus précise, le diagramme suivant est commutatif :



2) $C_{\Gamma}^-(0) = C_{\Gamma}^-(1) = x$ et $C_{\Gamma}^-(0)$, $C_{\Gamma}^-(1)$ ne se trouvent pas du même côté de K_2 . En général, chaque fois que $t', t'' \in I$, $t' \neq t''$, et : $C_{\Gamma}^-(t') = C_{\Gamma}^-(t'') \in (K_2)_2$, on a que $C_{\Gamma}^-(t')$ et $C_{\Gamma}^-(t'')$ ne se trouvent pas du même côté de K_2 .

C_{Γ}^- est déterminée d'une manière univoque par ces propriétés, à un automorphisme de la source près". \square

La démonstration (qui se fait par induction sur les Γ_i) est facile, et sera laissée au lecteur.

Lemme 3.24.5. " On considère le 2-polyèdre singulier (sans singularités) $(\hat{K}'_2, \hat{i}, 2 \otimes_3(K_2))$, où $\hat{i} : \hat{K}'_2 \longrightarrow 2 \otimes_3(K_2)$ est le plongement considéré au début de la démonstration.

Soient x_1, \dots, x_s les points de $s(K_2)$. En faisant référence aux notations de l'énoncé du lemme 3.24, on va désigner $X(x_i)$ par $\Gamma^i \ni x_i$, ce qui fait que $\ell(x_i) = \Gamma^i \vee \Gamma^i$. Soit Γ^i_+ l'exemplaire de Γ^i qui correspond à $M^2_+(\varphi)$, et Γ^i_- celui qui correspond à $M^2_-(\varphi)$. On peut identifier Γ^i avec :

$$\Gamma^i_+ \cup \left(\bigcup_j \psi_j(x_i)(I) \right) = X_+(x_i) \cup \left(\bigcup_j \psi_j(x_i)(I) \right) .$$

(voir la figure 3.24).

On remarque que, dans K'_2 , un voisinage régulier assez petit de Γ^i_+ s'identifie à l'espace total E^i d'un certain fibré singulier :

$$\xi^i : \Gamma^i \xrightarrow{i} E^i \longrightarrow \Gamma^i ,$$

tandis qu'un voisinage régulier de Γ^i est l'espace total $(E^i)^*$, du fibré dual :

$$(\xi^i)^* : \Gamma^i \xrightarrow{i^*} (E^i)^* \longrightarrow \Gamma^i .$$

Si l'on considère la projection $\hat{\pi} : \hat{K}'_2 \longrightarrow K'_2$, on peut remonter les $\bar{E}^i =$ voisinage régulier de $(\bar{\Gamma}^i = \Gamma^i_+ \cup (\bigcup \psi_j(x_i) (I))) \subset K'_2$ et $(E^i)^* \subset K'_2$ en 2s plongements 2-à-2 disjoints $\bar{E}^i, (E^i)^* \subset \hat{K}'_2$. Ces plongements ont toutes les propriétés du lemme 3.24.4 (sauf que $i^*(x_i) \notin (\hat{K}^i)_2$, mais a un voisinage isomorphe à $(x = 0) \cup [(y = 0) \cap (z \leq 0)] \subset R_3$; mais ceci n'a aucune importance. Toutes nos considérations faites ci-dessus s'étendent mot à mot pour ce cas ...).

Si l'on revient au modèle local \hat{k}_2 du début de la démonstration, correspondant, disons, à la singularité x_i , on peut considérer le cercle $C_j = (x = 0) \cap (y^2 + (z - 2)^2 = 4) = (\hat{\pi})^{-1}(x_j \in s(K_2))$.

Les germes de $i(\bar{\Gamma}^j) = \bar{\Gamma}^j_+$, $i^*(\Gamma^j) = \Gamma^j$ autour de $i(x_j)$, $i^*(x_j)$, dans \hat{K}'_2 , peuvent être décrits sans perdre la généralité de la manière suivante : on considère un point $x_j^+ \in C_j = C_j \cap \Delta^j = (0,0,0)$. Le germe de $i(\bar{\Gamma}^j)$ est un petit arc, dans $(x = 0) \cap (4 \leq y^2 + (z - 2)^2 \leq 9)$ commençant en $x_j^+ = i(x_j)$. Le germe de $i^*(\Gamma^j)$ est un petit arc de $(y = 0) \cap (x^2 + z^2 \leq 1) - (z < 0)$ commençant en $(0,0,0)$. (Voir la figure 3.24.5, ci-dessous).

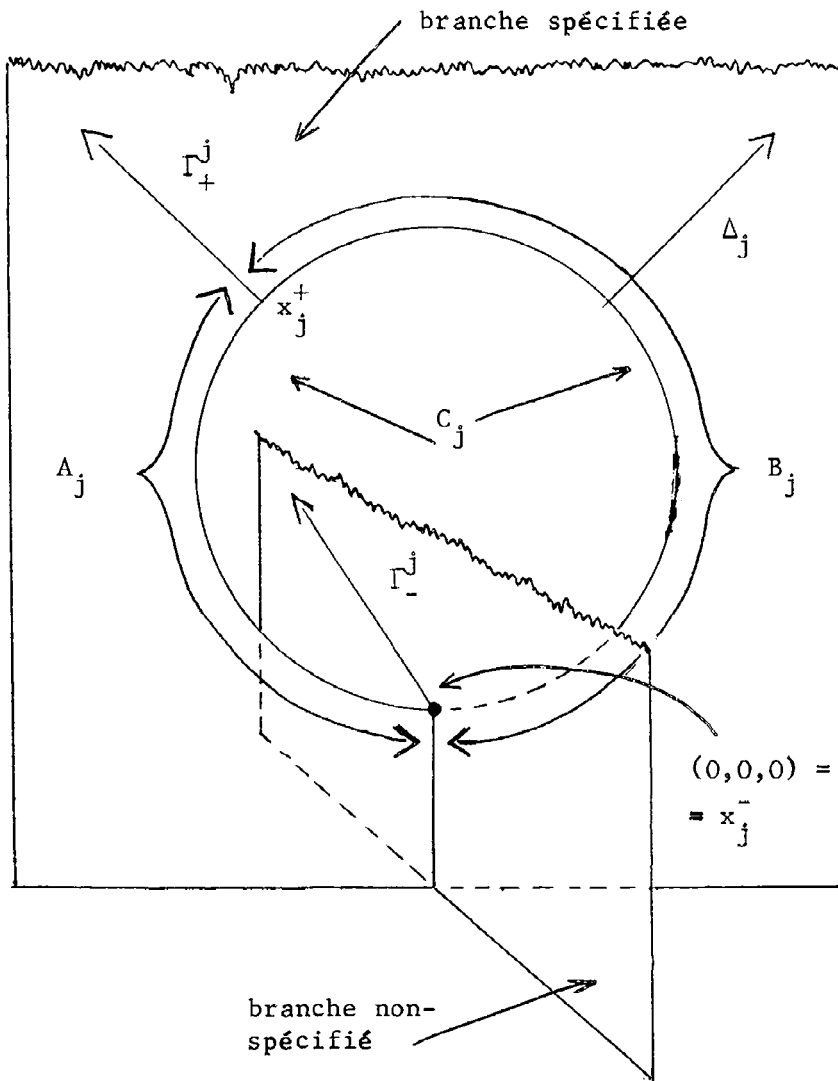


Fig. 3.24.5 Le voisinage du cercle $C_j = \hat{\pi}^{-1}(x_j \in s(K_2))$, éclatement du point singulier x_j , dans $\hat{K}_2^0 =$ résolution des singularités de K_2 .

[La possibilité d'une telle description résulte du lemme suivant, qui est une conséquence immédiate des définitions du début du chapitre III.

Lemme 3.24.5.0. "Soit (P_2, h, N_3) un 2-polyèdre singulier quelconque, $x \in s(P_2)$, et $V = V(x) \subset P_2$ un petit voisinage ouvert de x , isomorphe à :
 $(x = 0) \oplus (y = 0)$.
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{(z \leq 0)}$

Alors :

- 1) Le germe de $\hat{M}^2(h)$ au point x est isomorphe au germe de $[0,1]$ au point $\frac{1}{2}$.
- 2) Si V est assez petit $h|_{(x=0)}$ et $h|_{(y=0)}$ sont des plongements.
- 3) En se référant à l'isomorphisme du point 1) chacun des $(x=0)$, $(y=0) \subset V$ contient exactement l'un des germes de $\frac{1}{2}$ dans $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, respectivement. En plus s'il y a une résolution des singularités de P_2 , le germe correspondant à $M_+^2(h)$ est envoyé dans la branche spécifiée." \square]

Tout ceci est, bien entendu, trivial, mais on a trouvé utile de le dire, tout de même, explicitement. Soient A_j, B_j les deux arcs déterminés sur C_j par x_j^+ et x_j^- . On va choisir la notation de telle façon que B_j contienne l'unique point d'intersection $C_j \cap \Delta^j$.

Les hypothèses du lemme 3.24 nous disent que :

1°. $i^*(\Gamma^i) = \Gamma_-^i$ et $(\bigcup_j \Gamma_j)$ ne touchent pas à Δ^i . (Le lecteur ne devra pas confondre $i =$ section nulle du fibré ξ ($i : \Gamma \rightarrow E$) et $i =$ indice de Γ^i, Δ^i , e.a.d.s. De même il ne confondra pas $\Gamma^i = X(x_i)$ avec $\Gamma_i = S_1 \times I \subset 2k_1(S_1 \times I) \subset K_2''$ (lemme 3.24)).

2°. Les \bar{E}^i ne touchent pas à l'ensemble fermé $F = (\bigcup_j \Gamma_j)$.

On va considérer maintenant l'éclatement le long de : $\Gamma_+^1, \Gamma_+^2, \dots, \Gamma_+^s$:

$P_2 = \hat{K}_2' \setminus \Gamma_+^1 \setminus \Gamma_+^2 \setminus \dots \setminus \Gamma_+^s \subset 2 \otimes_3(K_2)$ et les s cercles tracés sur P_2 , 2-à-2 disjoints :

$$S_1^i = C_{\Gamma^i}^+(I) + A_i + C_{\Gamma^i}^-(I) + B_i \quad (i=1, \dots, s).$$

Ils induisent s cercles différemment plongés, 2-à-2 disjoints :

$$S_1^i \subset \partial \otimes_3(P_2).$$

Je dis qu'ils existent s disques différemment plongés, 2-à-2 disjoints :

$$\varphi_i : D_2 \longrightarrow 2 \Theta_3(K_2)$$

tels que : 3°) $\varphi_i(D_2) \cap \Theta_3(P_2) = \varphi_i(\partial D_2) \cap \partial \Theta_3(P_2) = S_1^i$, et $\varphi_i(D_2)$ coupe $\partial \Theta_3(P_2)$ transversalement.

4°) $F \cap \varphi_i(D_2) = \emptyset$, (où $F = \bigcup_j \Gamma_j$. On remarque que, à cause du point 2°), F n'est pas touché par les éclatements).

5°) Soient $\Phi_i(D_2)$ les anses d'indice 2, plongées, correspondant à $\varphi_i(D_2)$. Il existe un difféomorphisme :

$$(2 \Theta_3(K_2) ; \Theta_3(P_2) + (\Phi_1(D_2)) + \dots + (\Phi_s(D_2)), \sum_i \Gamma_i) = (2 \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) ; \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) , \sum_i \Gamma_i) \quad \square$$

Démonstration du lemme 3.24.5. La démonstration de ce lemme va utiliser le foncteur θ du lemme 3.5. "Heuristiquement" l'usage du foncteur θ est justifié par le fait que l'information "non singulière" qu'on a au début, se réfère à : $\theta(V_3 \xrightarrow{\pi} \Theta_3(K_2'))$ et que ce qu'on veut connaître est : $(2\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) ; \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi))) = \theta(\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) \xrightarrow{id} \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)))$. C'est donc les "propriétés d'invariance du foncteur θ " (lemmes 3.6 et 3.9) qui vont nous aider. Mais parce qu'on a en plus les $\sum_i \Gamma_i$ on doit commencer par quelques développements sur le foncteur θ lui-même. Ces développements vont nous servir aussi, ultérieurement.

Plaçons-nous dans les conditions du lemme 3.24 et considérons un détaillement (quelconque) de la séquence principale : $K_2^i \xrightarrow{\varphi} K_2^i / \Psi(\varphi) \subset \Theta_3(K_2^i / \Psi(\varphi)) :$

$$K_2^0 = K_2^i \xrightarrow{p_1} K_2^1 \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{i+1}} K_2^i \xrightarrow{p_{i+1}} \dots \xrightarrow{p_n} K_2^n = K_2^i / \Psi(\varphi)$$

Pour chaque i , on peut considérer

$$\bar{K}_2^i = K_2^i \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ({}_{2k_j} (S_1 \times I)) \right)$$

\bar{K}_2^i collapse sur K_2^i , et les projections p_i ont un sens naturel comme
 $p_i : \bar{K}_2^{i-1} \longrightarrow \bar{K}_2^i$.

Les $\Gamma_j \subset \bar{K}_2^0$ ont exactement les propriétés des Σ^j du lemme 3.9.
 Soient $\pi_i : V_3^i \longrightarrow \Theta_3(K_2^i)$ les résolutions des singularités induites par
 $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2^i)$. Appliquer θ à K_2^i c'est la même chose qu'appliquer
 θ à \bar{K}_2^i (puisque $\Theta_3(K_2^i) = \Theta_3(\bar{K}_2^i)$), et enlever ensuite $\bar{K}_2^i - K_2^i$. Ceci fait
 que $p_i(\Gamma_j) = \Gamma_j$ se définit naturellement dans $\Theta_4(\Theta_3(K_2^i))$. Le passage de
 $(2 \Theta_3(K_2^i) = \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^i) ; \Theta_3(\hat{K}_2^i), \Sigma \Gamma_j))$ à $(\partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^i) / \Psi(\varphi)) = 2 \Theta_3(K_2^i / \Psi(\varphi)) ;$
 $\Theta_3(K_2^i / \Psi(\varphi), \Sigma \Gamma_j))$, peut donc se décrire par la succession de triples :

$$(\partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^i)) ; V_3^i, \Sigma \Gamma_j) = (i = 0, \dots, n).$$

Le passage $i \implies i+1$ se fait comme dans le lemme "d'invariance" 3.6, à ceci
 près, que le lemme s'applique directement à \bar{K}_2^i , et qu'ensuite on enlève les
 pellicules 2-dimensionnelles $\text{int}(\bar{K}_2^i - K_2^i)$, ce qui fait qu'au lieu d'avoir
 3 espaces emboîtés :

$$\Sigma \Gamma_j \hookrightarrow \hat{K}_2^i \hookrightarrow \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^i)) = \partial \Theta_4(\Theta_3(\bar{K}_2^i))$$

on a un (vrai) triple :

$$\Sigma \Gamma_j \hookrightarrow \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^i)) \longleftarrow \hat{K}_2^i.$$

Maintenant, vu les bonnes propriétés de "recollement" du foncteur θ (lemme 3.5),
 le lemme 3.24.5 résulte tout de suite du lemme local suivant : (en effet, il
 suffit de regarder comment ça se passe au voisinage de $\ell(x_i) = \Gamma_+^i \cup \Gamma_-^i \dots$) :

Lemme 3.24.5.1. "Soit Γ un arbre, $\bar{x} \in \partial \Gamma$,

$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma \quad \text{et}$$

$$\xi^* : \Gamma \xrightarrow{i^*} E^* \xrightarrow{p^*} \Gamma$$

deux fibrés singuliers duaux : Soit $I \subset \Gamma$ un petit "voisinage tubulaire" de \bar{x} , et $\partial I = \bar{x} - x$. On considère le 2-polyèdre singulier :

$(\bar{E} \oplus_I E^*, g, N_3)$ où $M^2(g)$ est défini exactement par :

$g(i(t)) = g(i^*(t))$ pour chaque $t \in \Gamma - I$, et $g(E), g(E^*)$ se coupent transversalement, x est l'unique point singulier de $s(\bar{E} \oplus_I E^*)$. Pour chaque bout :

$\partial \bar{E} \ni 1 \in I = \bigcup_{y_j} (y_j \in \partial \Gamma - \bar{x})$, on considère un petit 2-disque δ_j tel que $\delta_k \cap \delta_j = \emptyset$ et

$$\delta_j \cap \bar{E} = \partial \delta_j \cap \partial \bar{E} = \bar{p}^{-1}(1) .$$

Soit A_j l'arc : $A_j = \mathcal{C}(\partial \delta_j - \bar{p}^{-1}(1))$.

On considère une résolution des singularités : $\pi : V_3 \rightarrow \mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)$ qui spécifie la branche \bar{E} . A_j a un sens dans $(\partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*))) = S_3, V_3$ (comme un arc $A_j \subset \partial(\mathcal{O}_4(\dots))$); tel que $A_j \cap V_3 = \partial A_j = \partial A_j \cap \partial V_3$, et qui coupe ∂V_3 transversalement) et dans $(\partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*/\Psi(g))), \mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*/\Psi(g)))$.

On considère un nombre fini de points :

$$z_1, \dots, z_\ell \in \Gamma - I - \rho(\Gamma) - \partial(\Gamma), \text{ et les fibres : } (p^*)^{-1}(z_i) \subset E^* .$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\left(\bigcup_{z \in \bar{\Gamma}} \partial \bar{p}^{-1}(z) \right) \cup \left(\bigcup_{z' \in \Gamma} \partial (p^*)^{-1}(z') \right) \cup (p \cup p^*)^{-1}(\bar{x}) \subset \partial \mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*) ,$$

et considérer un voisinage tubulaire Δ_2 de cet ensemble dans $\partial \mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)$.

Δ_2 existe aussi dans un sens naturel, dans ∂V_3 et dans $\partial \mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*/\Psi(g))$.

Par $\theta(\pi) : V_3 \hookrightarrow \partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)) = \partial D_4$, Δ_2 existe dans $\partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*))$, e.a.d.s.

On peut considérer la résolution des singularités de $\bar{E} \oplus_I E^*$:

$$\hat{\pi} : \bar{E} \hat{\oplus}_I E^* \longrightarrow \bar{E} \oplus_I E^* , \text{ (voir la fin de la définition 3.13). On suppose}$$

bien entendu que :

$$\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*) = v_3 .$$

On va considérer, aussi, le plongement :

$$\bar{E} \hat{\oplus}_I E^* \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*)),$$

l'éclatement de $\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*$, le long de $\Gamma = i\Gamma$:

$$p_2 = \widehat{\bar{E} \oplus_I E^* \setminus \Gamma} \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)) ,$$

et le cercle S_1^i tracé sur p_2 , défini exactement de la même manière que S_1^i dans l'énoncé du lemme 3.24.5.

Il existe alors un 2-disque :

$$\varphi(D_2) \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)) = S_3 ,$$

avec les propriétés suivantes :

- 1°) $\varphi(D_2) \cap \mathbb{O}_3(p_2) = \varphi(\partial D_2) \cap \partial \mathbb{O}_3(p_2) = \varphi(\partial D_2) = S_1^i .$
- 2°) $\varphi(D_2)$ coupe $\partial \mathbb{O}_3(p_2)$ transversalement.
- 3°) $\varphi(D_2) \cap A_j = \emptyset .$
- 4°) Il existe un difféomorphisme :

$$H : (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^*)), \mathbb{O}_3(p_2) + (\Phi(D_2))) \xrightarrow{\approx} (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^* / \Psi(g))), \mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_I E^* / \Psi(g)))$$

(où $\Phi(D_2)$), est l'anse d'indice 2 correspondant à $\varphi(D_2)$), tel que :

$$\begin{aligned} H(\Delta_2 + (\cup_j A_j) + (\cup_i (p^*)^{-1}(z_i))) &= \\ &= \Delta_2 + (\cup_j A_j) + (\cup_i (p^*)^{-1}(z_i)) , \end{aligned}$$

et que la restriction de H à l'ensemble qu'on vient d'écrire soit l'identité". \square

(Remarque : Quant on passe du lemme 3.24.5.1 au lemme 3.24.5, les A_j correspondent à des intersections $\Gamma_+^i \cap (\mathcal{C}\ell_{2k_j}(S_1 \times I) - K_2^i)$. Plus précisément on considère un intervalle fermé :

$$I \subset \mathcal{C}\ell_{2k_j}(S_1 \times I) - K_2^i, \text{ tel que}$$

$I \cap \partial(\mathcal{C}\ell_{2k_j}(S_1 \times I)) = \partial I$, que $0 \in \Gamma_+^i$ et $1 \in \Gamma_j$. A_j est un "germe du cercle Γ_j , autour de $1 \in \Gamma_j$ ". De même, les $(p^*)^{-1}(z_i)$ vont correspondre aux intersections $\Gamma_-^i \cap \Gamma_j$. A partir de là, le lecteur pourra déduire, sans peine, le lemme 3.24.5, comme conséquence du lemme 3.24.5.1 et des "bonnes propriétés de recollement" du foncteur θ).

Démonstration du lemme 3.24.5.1. Si $\#p(\Gamma) = 1$ le lemme est une conséquence facile du lemme 3.6. Dans le cas général, la démonstration se fait (toujours en utilisant le lemme 3.6), comme suit :

On commence par considérer l'éclatement standard de Γ_+ , dans, $\widehat{\bar{E} \oplus E^*} \subset \partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus E^*))$. On va le désigner par $G \subset \partial \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\bar{E} \oplus E^*))$. La projection canonique sera : $\pi : G \longrightarrow \widehat{\bar{E} \oplus E^*}$. On remarque que cette opération d'éclatement standard, ne touche pas à :

$$X = \Delta_2 + \cup A_j + \cup_i (p^*)^{-1}(z_i) .$$

Si $x \in s(\bar{E} \oplus E^*)$ est l'unique singularité de $\bar{E} \oplus E^*$, on va considérer le cercle $C = \pi^{-1}(x) \subset \widehat{\bar{E} \oplus E^*}$, et lui appliquer toutes les notations de la figure 3.24.5 (en omettant, bien entendu, d'écrire les indices j).

Soit \bar{E} le 2-polyèdre singulier "abstrait" (c'est-à-dire considéré à difféomorphisme près, seulement) obtenu par l'éclatement standard de $\Gamma \subset \bar{E}$, et $\pi : \bar{E} \longrightarrow \bar{E}$ la projection d'espace quotient associée. (Je veux dire, que \bar{E} est la partie correspondant à \bar{E} dans G). On a : $\pi^{-1} \Gamma \subset \partial \bar{E}$, et on a un

isomorphisme unique (à isotopie près):

$$j : \pi^{-1} \Gamma \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}l(\partial \bar{E} - \pi^{-1} \Gamma) .$$

D'une manière plus explicite, on a un isomorphisme naturel :

$$\bar{E} = (\pi^{-1} \Gamma) \times [0,1] ,$$

tel que $\pi^{-1} \Gamma \xrightarrow{\text{incl.}} \partial \bar{E}$ et j , s'identifient, respectivement à :

$$\pi^{-1} \Gamma = \pi^{-1} \Gamma \times 0 \text{ et}$$

$$\pi^{-1} \Gamma \approx (\pi^{-1} \Gamma \times 1) \cup ((\partial \pi^{-1} \Gamma) \times [0,1]) .$$

On remarquera, aussi, à la même occasion, que $C_{\Gamma}^{+}(I)$ vit, naturellement, dans $\pi^{-1} \Gamma \subset \partial \bar{E}$; je veux dire, par cela que l'application :

$$I \xrightarrow[C_{\Gamma}^{+}]{} \bar{E} \setminus \Gamma \xrightarrow{\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{projection canonique d'espace-quotient}}} \bar{E}$$

est injective.

En appliquant le lemme 3.6, on peut démontrer, sans peine que l'on peut obtenir :

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus E^* / \Psi(g))) ; \otimes_3(\bar{E} \oplus E^* / \Psi(g)), X) ,$$

par le procédé suivant :

On part de

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus E^*)) ; G, X) .$$

Il existe un plongement

$$\psi : \bar{E} \longrightarrow \partial \otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus E^*)) = S_3 ,$$

ayant les propriétés suivantes :

$$1^\circ) \quad \psi(\overset{\vee}{E}) \cap X = \emptyset .$$

$$2^\circ) \quad \psi(\overset{\vee}{E}) \cap G = \psi(\partial \overset{\vee}{E}) = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} C \cup (\Gamma_- = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_-) .$$

3°) On remarque que

$$\overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} C = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} A \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} B \quad (\text{voir les}$$

notations de la figure 3.24.5), peut-être identifié, par un isomorphisme "canonique", unique (à isotopie près), à $\overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma$. On écrit cette identification :

$$\overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} C .$$

On veut que :

$$\psi(C\mathcal{L}(\partial \overset{\vee}{E} - \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma)) = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} C$$

(et que

$$\overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma \xrightarrow{j} C\mathcal{L}(\partial \overset{\vee}{E} - \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma) \xrightarrow{\psi} \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma_+ \cup \overset{\vee}{\pi}^{-1} C = \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma$$

soit (isotope à) l'identité). D'autre part, on veut aussi que :

$$\psi(\overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma) = \Gamma_- .$$

En plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \overset{\vee}{\pi}^{-1} \Gamma & \xrightarrow{\psi} & \Gamma_- \\
 \searrow \overset{\vee}{\pi} & & \nearrow \approx \text{(identification naturelle)} \\
 & \Gamma &
 \end{array}$$

et : $\psi(\overset{\vee}{E})$ coupe E^* transversalement et prolonge $\overset{\vee}{\pi}^{-1} \bar{E}$ d'une manière "lisse", (dans un sens facile à deviner...).

Le lemme 3.6 nous permet de montrer comment $\psi(\bar{E})$ est construit et nous donne un difféomorphisme :

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^* / \Psi(g))) ; \otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^* / \Psi(g)), X) = (\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^*)) ; \otimes_3(G \oplus_{\partial \bar{E}} \psi(\bar{E})), X)$$

qui est l'identité sur X . C'est un bon exercice d'utilisation du foncteur θ , qu'on laisse au lecteur.

Maintenant, en enlevant des voisinages tubulaires, au lieu d'éclater des graphes, on peut identifier $p_2 = \bar{E} \hat{\oplus}_{\mathbb{I}} E^* \setminus \Gamma$ à une partie de G . Soit aussi le plongement :

$$D_2 = C_{\Gamma}^+(I) \times [0,1] \subset \pi^{-1} \Gamma \times [0,1] = \bar{E} \xrightarrow{\psi} \partial \otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^*)).$$

$\varphi(D_2)$ est un disque de bord :

$$S'_1 = C_{\Gamma}^+(I) + A + C_{\Gamma}^-(I) + B,$$

qui rencontre p_2 de telle manière que les propriétés 1°, 2°, 3° de la fin de l'énoncé du lemme 3.24.5.1 soient satisfaites.

Pour finir la démonstration du lemme 3.24.5.1, il suffit donc de trouver un difféomorphisme :

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^*)) ; \otimes_3(G \oplus_{\partial \bar{E}} \psi(\bar{E})), X) = (\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} E^*)) ; \otimes_3(p_2) + (\Phi(D_2)), X)$$

qui soit l'identité sur X .

Or, l'existence d'un tel difféomorphisme résulte du fait que $G \underset{\partial \bar{E}}{\oplus} \psi(\bar{E})$ collapse sur $P_2 \underset{\partial D_2}{\oplus} \varphi(D_2)$, par des contractions de Whitehead qui ne touchent pas à X.

Ce dernier fait, peut se démontrer comme suit : on considère de nouveau la filtration

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_r = \Gamma$$

qui est intervenue dans les "règles du jeu" (définition 3.24.02).

On a, d'abord, la remarque (importante), suivante, qui sera d'intérêt, aussi, plus tard.

Remarque. (Au cours de la démonstration du lemme 3.24.5.1) : "Dans les conditions du lemme 3.24.5.1 les deux faits suivants sont équivalents :

(i) Le fibré singulier $\xi : \Gamma \rightarrow E \rightarrow \Gamma$ ne possède pas des singularités du type A .

(ii) Aucun des bouts $z \in \partial \Gamma - x$ n'explose (= n'est pas coupé en deux), dans l'éclatement de $\bar{E} \underset{I}{\oplus} E^*$, le long de $\Gamma = \Gamma_+$.

Dans ces conditions si $\pi : \bar{E} \underset{I}{\oplus} E^* \setminus \Gamma \rightarrow \bar{E} \underset{I}{\oplus} E^*$ est la projection naturelle, on a :

$$\pi(C_{\Gamma}^+(I)) = \Gamma_+ \quad , \quad \pi(C_{\Gamma}^-(I)) = \Gamma_- \quad ,$$

et $\psi(\bar{E})$ est un 2-disque de bord :

$$S_1' = C_{\Gamma}^+(I) + A + C_{\Gamma}^-(I) + B \quad .$$

(Donc, dans ce cas le lemme 3.24.5.1 est "trivialement" vrai). □

La démonstration de (i) \iff (ii) est une conséquence plus ou moins immédiate des définitions, tandis que la dernière ligne est une conséquence (facile) du lemme 3.6.

Donc, si ξ n'a pas des fibres du type A, on a même :

$$G \underset{\partial E}{\oplus} \psi(\overset{v}{E}) = p_2 \underset{\partial D_2}{\oplus} \varphi(D_2), \text{ (et il n'y a plus rien à démontrer).}$$

Si $\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$ possède des fibres du type A, on considère le γ_{i_0} avec l'indice le plus grand, tel que ρ_{i_0} soit du type A. Parmi les bouts de $\partial\gamma_{i_0} - \epsilon_{i_0} - 1$ il y a au moins un, appelons-le β_{i_0} qui éclate dans l'éclatement de $\bar{E} \underset{I}{\oplus} E^*$ le long de $\Gamma = \Gamma_+$ (ceci résulte des "règles du jeu").

Soit $[\beta_{i_0}, \rho_{i_0}] \subset \gamma_{i_0}$ le segment qui unit β_{i_0} à ρ_{i_0} et $\Gamma(i_0) \subset \Gamma$ le sous-ensemble des points $y \in \Gamma$ tels que $y \geq \beta_{i_0}$ (par rapport) $\omega(\Gamma, x)$.

$\Gamma(i_0) \cup [\beta_{i_0}, \rho_{i_0}]$ est un arbre et :

$$\partial(\Gamma(i_0) \cup [\beta_{i_0}, \rho_{i_0}]) - \rho_{i_0} \subset \partial\Gamma.$$

Parmi ces bouts, il y a un et un seul qui éclate (dans l'éclatement de $\bar{E} \underset{I}{\oplus} E^*$ le long de Γ). Appelons-le z_{i_0} . On passe de

$$G \underset{\partial \bar{E}}{\oplus} \psi(\overset{v}{E}) \text{ à } Y = \text{Cl} (G \underset{\partial \bar{E}}{\oplus} \psi(\overset{v}{E}) - \bar{E} \mid I_{z_{i_0}} -$$

-(la partie de $\psi(\overset{v}{E})$ correspondant à $\Gamma(i_0) \cup [\beta_{i_0}, \rho_{i_0}]) \supset p_2 \underset{\partial D_2}{\oplus} \varphi(D_2)$

par des contractions de J.H.C. Whitehead. D'une manière plus précise, désignons

$\Gamma(i_0) \cup [\beta_{i_0}, \rho_{i_0}]$ par $\Gamma_1(i_0)$. On remarque que

$$\Gamma_1(i_0) \underset{\partial\Gamma_1(i_0) - \rho_{i_0}}{\oplus} \Gamma_1(i_0) \subset \pi^{-1} \Gamma.$$

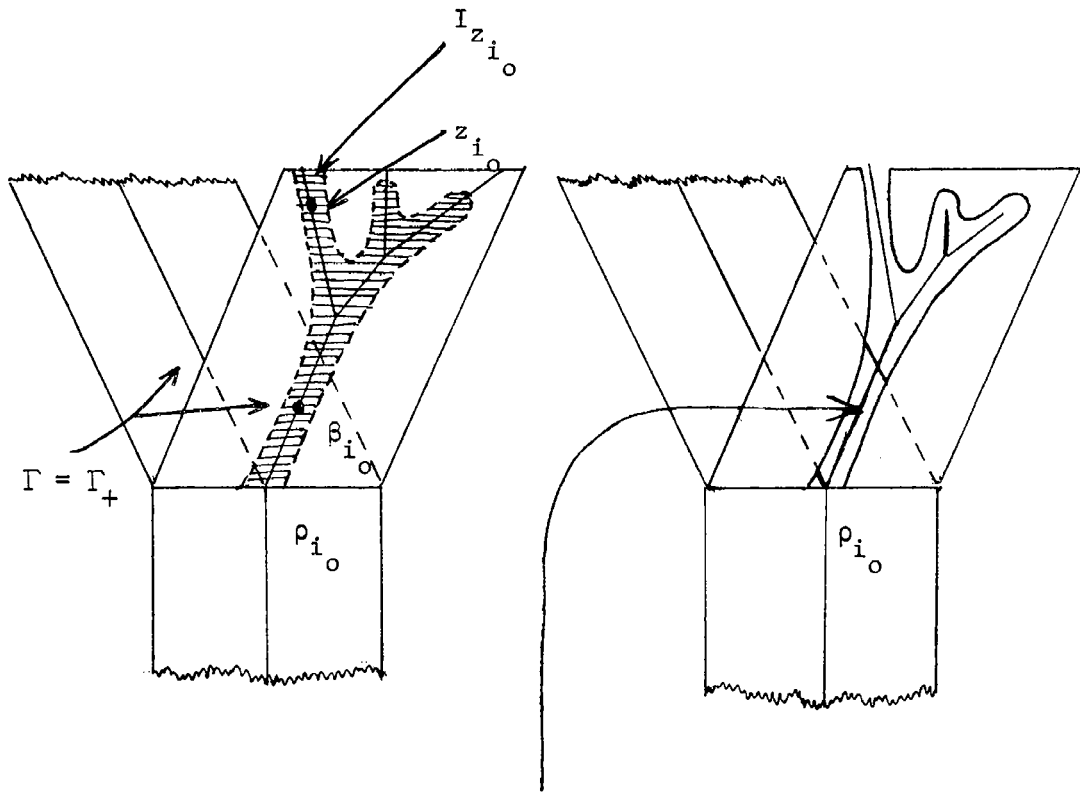
La "partie de $\psi(\overset{v}{E})$ correspondant à $\Gamma(i_0) \cup [\beta_{i_0}, \rho_{i_0}]$ " est :

$(\psi((\Gamma_1(i_0) \oplus \Gamma_1(i_0)) \times [0,1]) - (\rho_{i_0} \times [0,1]) - (\rho_{i_0} \times [0,1]))$, (où le premier ρ_{i_0}

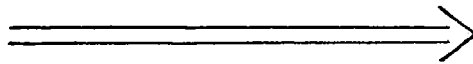
appartient au premier terme $\Gamma_1(i_0)$ et le second ρ_{i_0} au second $\Gamma_1(i_0)$)

et on remarque que dans $\frac{v}{E}$:

$$D_2 \cap [(\Gamma_1(i_0) \oplus \Gamma_1(i_0)) \times [0,1] - (\rho_{i_0} \times [0,1]) - (\rho_{i_0} \times [0,1])] = \emptyset .$$



dans E^* (on n'y touche pas !)



ce passage se fait par collapsing

Fig. 3.24.5.1. Elimination de $\Gamma_1(i_0)$.

Bien entendu, "abstraitement" (c'est-à-dire à difféomorphisme près) :

$$G \oplus_{\partial \bar{E}} \psi(\bar{E}) = \bar{E} \oplus_I E^* / \Psi(g) = \bar{E} \oplus_{\Gamma} E .$$

Vu ces isomorphismes :

$$Y = \mathcal{C}\ell(\bar{E} - N(i_0)) \oplus \underbrace{E^*}_{\mathcal{C}\ell(\Gamma - \Gamma_1(i_0))} ,$$

où $N(i_0)$ est un petit voisinage régulier de $\Gamma_1(i_0) \subset \bar{E}$, dans \bar{E} . Au niveau de \bar{E} , nos contractions de Whitehead sont montrées dans la figure 3.24.5.1.

Maintenant, on peut raisonner avec $(Y, \mathcal{C}\ell(\Gamma - \Gamma_1(i_0)))$ comme avec $(\bar{E} \oplus E^*, \Gamma)$, et ainsi de suite, par induction. Pour montrer qu'on obtient Γ ce qu'on veut, il nous faut, aussi, le lemme suivant :

Lemme 3.24.5.2. "Considérons un arbre Γ , un bout $x \in \partial\Gamma$ et un fibré singulier de base Γ :

$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma .$$

On suppose qu'on s'est donné une filtration :

$$x \in \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_r = \Gamma ,$$

et qu'on a choisi des $\alpha_i \in \partial\gamma_i - \epsilon_{i-1}$ comme dans la définition 3.24.02.

(On remarque que α_i est défini indépendamment de la filtration, comme étant le choix d'un des éléments incomparables (pour la relation $\omega(\Gamma, x)$), dans $\partial k(\rho_i)$, $\rho_i = \rho(\gamma_i)$.) Je dis que :

$\pi C_{\Gamma}^+(I) \subset \Gamma$ peut être caractérisé comme suit : on considère dans les éléments de type A de $\rho(\Gamma)$, un élément, ρ_{i_0} , maximal pour $\omega(\Gamma, x)$ et on construit $\Gamma_1(i_0) \subset \Gamma$, comme ci-dessus. Ensuite on passe de Γ au sousgraphe : $\Gamma' = \Gamma - \Gamma_1(i_0) + \rho_{i_0}$. Pour Γ' on fait la même opération et l'on obtient $\Gamma'' \subset \Gamma'$.

Après un nombre fini de pas, on obtient un arbre $\Gamma^{(m)} \subset \Gamma$ tel que, si l'on considère le fibré : $E | \Gamma^{(m)}$, $\rho(\Gamma^{(m)})$ ne contienne plus d'éléments du type A. Alors $\Gamma^{(m)} = \pi C_{\Gamma}^+(I)$." \square

Démonstration du lemme 3.24.5.2. On considère la filtration de Γ' induite par celle de Γ :

$$\Gamma_0 \cap \Gamma' \subset \Gamma_1 \cap \Gamma' \subset \dots \subset \Gamma_r \cap \Gamma' = \Gamma' .$$

(où il est entendu que la filtration écrite ci-dessus est redondante). Ceci nous permet de définir $C_{\Gamma'}^+(I)$ et $\pi' C_{\Gamma'}^+(I) \subset \Gamma'$. On vérifie sans peine que $\pi' C_{\Gamma'}^+(I) = \pi C_{\Gamma}^+(I)$, e.a.d.s. \square

(Remarque : Tout ceci nous montre, aussi, que C_{Γ}^+ dépend seulement du choix des α_i , pour les points de $\rho(\Gamma)$ qui sont du type A , et de rien d'autre).

Le lemme 3.24.5.2 une fois démontré, on sait que $G \oplus_{\partial E} \psi(\frac{V}{E})$ collapse sur $p_2 \oplus_{\partial D_2} \varphi(D_2)$ sans toucher à X . Le lemme 3.24.5.1 est démontré. Donc, le lemme 3.24.5 est démontré, aussi. \square

Lemme 3.24.6. "Considérons les cercles tracés (déf. 3.24.03) sur \hat{K}_2^i :

$$\Sigma_1^i = C_i + C_{\Gamma_i}^-(I) .$$

Ce sont des "cercles" 2-à-2 disjoints qui induisent des cercles différentiables 2-à-2 disjoints :

$$\Sigma_1^i \subset \partial \otimes_3 (\hat{K}_2^i) \quad (i = 1, \dots, s) .$$

Le difféomorphisme J du lemme 3.24.2 (appliqué à \hat{K}_2^i , au lieu de K_2) induit un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3(K_2) ; \otimes_3(P_2), \cup_i S_1^i, F = \sum_i \Gamma_i) = (2 \otimes_3(K_2) ; \otimes_3(\hat{K}_2^i), \cup_i \Sigma_1^i, F) .$$

Ce difféomorphisme, transforme les 2-disques $\varphi_1(D_2)$ du lemme précédent en des 2-disques $\psi_i(D_2) \subset 2 \otimes_3(K_2)$, du bord Σ_1^i , qui ne touchent toujours pas à F . " \square .

Avant de démontrer le lemme 3.24.6, on peut déjà montrer comment, avec tout ce qui précède, il implique le lemme 3.24 :

Fin de la démonstration du lemme 3.24.

Les Δ^i ne touchent ni à Γ_{-}^i ni à $\Sigma \Gamma_j$ (propriété 1° du lemme 3.24.5).

D'autre part :

$$\Delta^i \cap C_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \text{ et :}$$

$$\Delta^i \cap C_i = \text{exactement un point.}$$

Par l'application du foncteur $\otimes_3(\dots)$, les Δ^i induisent des anses négatives, d'indice 2 :

$$\Delta_2^i \subset \otimes_3(\hat{K}_2^i),$$

qui ont la propriété :

$$\partial \Delta_2^i \cap \Sigma_1^i = \emptyset \text{ si } i \neq j, \partial \Delta_2^i \cap \Sigma_1^i = \text{un point unique}$$

d'intersection transversale. D'autre part, $\Delta_2^i \cap (\Sigma_j \Gamma_j) = \emptyset$. Le lemme 0.1 implique alors, l'existence d'un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3(K_2) ; \{(\otimes_3(\hat{K}_2^i) - \cup_i (\Delta_2^i)) \approx \Delta_3(\hat{K}_2^i - \cup_i (\Delta_2^i))\},$$

$$\Sigma_j \Gamma_j) \xrightarrow{\approx} (2 \otimes_3(K_2) ; \otimes_3(\hat{K}_2^i) + (\Psi_1(D_2)) + \dots + (\Psi_s(D_2)), \Sigma_j \Gamma_j) .$$

(où $\Psi_i(D_2)$ est l'anse d'indice 2, correspondant à $\psi_i(D_2)$).

Les difféomorphismes fournis par les lemmes 3.24.1, 3.24.2, 3.24.5, 3.24.6, impliquent alors, l'existence du difféomorphisme de la fin du lemme 3.24. \square

Démonstration du lemme 3.24.6. Pour simplifier les notations, on va supposer que $s = 1$ (le cas général, se traite exactement de la même manière, seulement avec des notations plus compliquées ; on peut, aussi, traiter les singularités les unes après les autres ...).

Ceci, nous permet de toute façon, de ne considérer qu'un seul $\Gamma^i : \Gamma^1 = \Gamma$ (le C_1 correspondant - voir figure 3.24.5 - étant désigné par C), et d'écrire, sans ambiguïté de notation, la filtration : $\Gamma^0 \subset \Gamma^1 \subset \dots \subset \Gamma^r = \Gamma$.

Soit K_2^i un 2-polyèdre singulier qui contient $(\bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i) \oplus E^*$ (tout à fait comme K_2 contient $\bar{E} \oplus E^*$; les inclusions de $(\bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i)$, E^* ayant les propriétés du début de l'énoncé du lemme 3.24.4). On va considérer une résolution des singularités $\hat{K}_2^i \longrightarrow K_2^i$ qui spécifie la branche $\bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i$ et la courbe tracée sur $\hat{K}_2^i \setminus \Gamma_+^i = P_2^i$:

$$S_i = C_{\Gamma_i}^+(I) + A + C_{\Gamma_i}^-(I) + B$$

Enfin, on se donne un fermé $F_i = \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i))$, qui ne touche pas à $\mathbb{O}_3(\bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i)$. (On considère ici une décomposition : $\mathbb{O}_3(\hat{K}_2^i) = \mathbb{O}_3(\bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i) \oplus \mathbb{O}_3(\mathcal{C}\mathcal{L}(\hat{K}_2^i - \bar{E} \mid \bar{\Gamma}^i))$). Considérons, maintenant, l'assertion :

A(i) : "Dans les conditions ci-dessus, on a un difféomorphisme

$$(\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i)) ; \mathbb{O}_3(P_2^i), S_i, F_i) = (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i)) ;$$

$$\mathbb{O}_3(\hat{K}_2^i), C + C_{\Gamma_i}^-(I), F_i)$$

Ce difféomorphisme, transforme tout 2-disque $\varphi(D_2) \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i))$, de bord S_i , tel que $\varphi(D_2) \cap P_2^i = S_i$, $\varphi(D_2) \cap F_i = \emptyset$, dans un disque similaire, de bord $C + C_{\Gamma_i}^-(I)$, ne touchant pas F_i ."

On voit facilement que A(0) est vrai, que $A(i) \implies A(i+1)$ (démonstration analogue au lemme 3.24.2), et enfin, que $A(r) \implies$ le lemme qu'on veut démontrer. \square

4.12. Démonstration du lemme 3.26.

On va utiliser, largement, la démonstration du lemme 3.24. En reprenant le début de la démonstration du lemme 3.24, on remarque que le lemme 3.24.1 reste valable, pour la nouvelle situation.

Pour tous les $\Gamma^i(x_i \in s(K'_2))$ on va choisir, maintenant, des filtrations et des α_j^i , comme dans la définition 3.24.02. Il est entendu que les : $Y_i \subset {}_iE \subset \partial \Gamma_+^i - x_i$ ($x_i \in S_2$), du lemme 3.26, se réfèrent à ces α_j^i - là, qu'on ne va plus changer, au cours de la démonstration.

Lemme 3.26.1. "Si $x_i \in S_2$, les bouts ${}_iE \subset \partial \Gamma_+^i - x_i$, sont exactement ceux qui éclatent, dans l'éclatement le long de Γ_+^i , (définition 3.24.02)". \square

C'est une conséquence immédiate "règles du jeu" et de la définition de ${}_iE$.

Avec cette remarque, on reprend, mot-à-mot, tout ce qu'il y a dans la démonstration du lemme 3.24, jusqu'au lemme 3.24.5, sauf que, si $x_i \in S_2$, $\bar{\Gamma}^i = \bar{\Gamma}_+^i = (\bar{\Gamma}_+^i)_{x_i} \supset \Gamma_+^i = \Gamma^i$, est défini par :

$$\bar{\Gamma}_+^i = \Gamma^i \oplus I_{y_1} \oplus \dots \oplus I_{y_k}$$

où : $\{y_1, \dots, y_k\} = \{\partial \Gamma_+^i - x_i - Y_i\}$.

Quand on arrive au lemme 3.24.5, on commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} (2 \otimes_3(K_2) ; V_3 = \otimes_3(\hat{K}_2^i), \sum_i \Gamma_i) &= \\ &= (2 \otimes_3(K_2) ; \otimes_3(\hat{K}_2^i \setminus \Gamma^1 \setminus \dots \setminus \Gamma^s), \sum_i \Gamma_i) \end{aligned}$$

est défini tout à fait comme avant. Quant à

$$(2 \otimes_3(K_2^i / \Psi(\varphi)) ; \otimes_3(K_2^i / \Psi(\varphi)), \sum_i \Gamma_i) ,$$

on ne peut plus (si $S_2 \neq \emptyset$), le définir tout simplement, comme dans le lemme 3.24,

mais on doit le définir, d'une manière plus subtile (en faisant appel au foncteur θ) comme à la fin du lemme 3.26. Néanmoins l'analogie du lemme 3.24.5 reste vrai :

Lemme 3.26.2. "Considérons, comme dans le lemme 3.24.5, les s cercles, 2-à-2 disjoints, tracés sur $P_2 = \hat{K}_2^i \setminus \Gamma^1 \setminus \dots \setminus \Gamma^s \subset 2 \mathbb{O}_3(K_2)$:

$$S_1^i = C_{\Gamma^i}^+(I) + A_i + C_{\Gamma^i}^-(I) + B_i \quad .$$

où ($i = 1, \dots, s$). Ils induisent des cercles différenciablement plongés, 2-à-2 disjoints : $S_1^i \subset \partial \mathbb{O}_3(P_2)$. Je dis qu'ils existent s disques différenciablement plongés, 2-à-2 disjoints :

$$\varphi_i : D_2 \longrightarrow 2 \mathbb{O}_3(K_2) \quad ,$$

tels que : (i) $\varphi_i(D_2) \cap \mathbb{O}_3(P_2) = \varphi_i(\partial D_2) \cap \partial \mathbb{O}_3(P_2) = S_1^i$, et $\varphi_i(D_2)$ coupe $\partial \mathbb{O}_3(P_2)$ transversalement.

$$(ii) \quad \left(\sum_i \Gamma_i \right) \cap \varphi_j(D_2) = \emptyset \quad .$$

(iii) Si $\Phi_i(D_2)$ sont les anses d'indice 2, correspondant aux $\varphi_i(D_2)$, on a un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} & (2 \mathbb{O}_3(K_2) ; \mathbb{O}_3(P_2) + (\Phi_1(D_2)) + \dots + (\Phi_s(D_2)) , \sum_i \Gamma_i) = \\ & = (2 \mathbb{O}_3(K_2^s / \Psi(\varphi)) ; \mathbb{O}_3(K_2^s / \Psi(\varphi)) , \sum_i \Gamma_i) \quad " \quad \square \end{aligned}$$

Démonstration. Tout à fait comme dans lemme 3.24.5, vu les propriétés de recollement du foncteur θ , il suffit de regarder ce qui se passe localement, au voisinage de chaque $\lambda(x_i) = \Gamma_+^i \cup \Gamma_-^i$. Si $x_i \in S_1$ on appliquera le lemme 3.24.5.1, tandis que si $x_i \in S_2$ on aura besoin du lemme suivant : (qui avec 3.24.5.1, suffit pour démontrer le lemme 3.26.2) :

Lemme 3.26.2.1. "Soit Γ un arbre, $\bar{x} \in \partial \Gamma$,

$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma, \text{ et}$$

$$\xi^* : \Gamma \xrightarrow{i^*} E^* \xrightarrow{p^*} \Gamma,$$

deux fibrés singuliers duaux. On va utiliser la notation $i\Gamma = \Gamma_+$, $i^*\Gamma = \Gamma_-$.

Soit $I \subset \Gamma$ un petit voisinage tubulaire de $\bar{x} \in \partial \Gamma$ et : $\partial I = \bar{x} - x$.

On va supposer que $\rho_A(\Gamma_+) \neq \emptyset$. On choisira pour Γ une filtration et des $\alpha_j \in \partial \gamma_j - \epsilon_{j-1}$ (comme dans la définition 3.24.02, ou dans le lemme 3.26). Ceci nous définit, comme dans le lemme 3.26, un sous-ensemble :

$\mathcal{E} \subset \partial \Gamma_+ - \bar{x}$. On va considérer un sous-ensemble (bon) : $Y \subset \mathcal{E}$, $Y \neq \emptyset$.

Le complément de Y (dans $\partial \Gamma_+ - \bar{x}$) sera désigné par $Y^* \subset \partial \Gamma_+ - \bar{x}$. On va considérer :

$$\bar{\Gamma}_+ = \Gamma_+ \oplus \left(\bigcup_{y_i \in Y^*} I_{y_i} \right) \text{ et :}$$

$$\bar{\Gamma}_- = \Gamma_- \oplus \left(\bigcup_{z_i \in Y} I_{z_i} \right).$$

Ceci nous permet d'étendre les fibrés ξ , ξ^* :

$$\bar{\xi} : \bar{\Gamma}_+ \xrightarrow{i} \bar{E} \xrightarrow{p} \bar{\Gamma}_+$$

$$\bar{\xi}^* : \bar{\Gamma}_- \xrightarrow{i^*} \bar{E}^* \xrightarrow{p^*} \bar{\Gamma}_-.$$

On va considérer le 2-polyèdre singulier : $(\bar{E} \oplus \bar{E}^*, g, N_3)$, où $M^2(g)$ est donné par : $g(i(t)) = g(i^*(t))$ (pour chaque $t \in \Gamma - I$), $\{x\} = s(\bar{E} \oplus \bar{E}^*)$, et $g(\bar{E})$, $g(\bar{E}^*)$ se coupent transversalement. On donne une résolution des

singularités : $\pi : V_3 \longrightarrow \bigoplus_3^I (\bar{E} \oplus \bar{E}^*)$ qui spécifie $\Gamma_+(\bar{E})$.

Pour chaque $y_j \in Y^*$, on considère $\bar{E} \ni 1 \in I = I_{y_j}$, et un petit 2-disque δ_j , tel que $\delta_k \cap \delta_j = \emptyset$ et :

$$\delta_j \cap \bar{E} = \partial \delta_j \cap \partial \bar{E} = \bar{p}^{-1}(1) .$$

Soit A_j l'arc : $A_j = \text{Cl}(\partial \delta_j - \bar{p}^{-1}(1))$. Pour $y_k \in Y$, on va définir un arc A_k (tout à fait analogue à l'arc A_j , défini ci-dessus pour $y_j \in Y^*$).

On considère un petit 2-disque δ_k , tel que :

$$\delta_k \cap \bar{E} = \partial \delta_k \cap \partial \bar{E} = \bar{p}^{-1}(y_k) = p^{-1}(y_k) .$$

On pose :

$$A_k = \text{Cl}(\partial \delta_k - p^{-1}(y_k)) .$$

De même, pour chaque $z_j \in Y$ on considère $\bar{E}^* \ni 1 \in I = I_{z_j}$ et :

$B_j = \bar{p}^{-1}(1) \subset \partial \bar{E}^*$. On considère, aussi, un nombre fini de points :

$z'_1, \dots, z'_\lambda \in \Gamma_- - I - \rho(\Gamma_-) - \partial(\Gamma_-)$, et les fibres $(p^*)^{-1}(z'_i) \subset E^* \subset \bar{E}^*$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\left(\bigcup_{z \in \bar{\Gamma}_+} \partial \bar{p}^{-1}(z) \right) \cup \left(\bigcup_{z' \in \bar{\Gamma}_-} \partial (\bar{p}^*)^{-1}(z') \right) \cup ((p \cup p^*)^{-1}(\bar{x})) \cup \left(\bigcup B_j \right) \subset$$

$\subset \partial \bigoplus_3^I (\bar{E} \oplus \bar{E}^*)$, et considérer un voisinage tubulaire, $\bar{\Delta}_2$, de cet ensemble, dans $\partial \bigoplus_3^I (\bar{E} \oplus \bar{E}^*)$. $\bar{\Delta}_2$ existe, aussi, dans un sens naturel, dans : ∂V_3 et dans $\partial \bigoplus_3^I (\bar{E} \oplus \bar{E}^* / \Psi(g))$.

Quant aux A_j , ils sont définis tout naturellement dans

$(\partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*))) = S_3 ; V_3$ (de telle manière que $A_j \cap V_3 = \partial A_j = \partial A_j \cap \partial V_3$, e.a.d.s.), et par le même procédé qui nous a permis de définir :

$$(2 \otimes_3 (K_2^i / \Psi(\varphi)) ; \otimes_3 (K_2^i / \Psi(\varphi)) , \sum_i \Gamma_i) ,$$

les A_j sont définis dans :

$$(\partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g))) ; \otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g))) .$$

On considère la résolution des singularités de $\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* : \hat{\pi} : \hat{\bar{E}} \oplus_{\mathbb{I}} \hat{\bar{E}}^* \rightarrow \bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*$
 (où $\otimes_3 (\hat{\bar{E}} \oplus_{\mathbb{I}} \hat{\bar{E}}^*) = V_3$) et l'éclatement de $\hat{\bar{E}} \oplus_{\mathbb{I}} \hat{\bar{E}}^* \subset \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*))$,
 le long de Γ_+ :

$$p_2 = \hat{\bar{E}} \oplus_{\mathbb{I}} \hat{\bar{E}}^* \setminus \Gamma_+ \subset \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*)) .$$

On considère, aussi, le cercle S_1^i , tracé sur p_2 :

$$S_1^i = C_{\Gamma}^+(I) + A + C_{\Gamma}^-(I) + B .$$

(voir le lemme 3.24.5.1).

Sous ces conditions, il existe un 2-disque

$$\varphi(D_2) \subset \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*)) = S_3 ,$$

avec les propriétés suivantes :

- 1°) $\varphi(D_2) \cap \otimes_3(p_2) = \varphi(\partial D_2) \cap \partial \otimes_3(p_2) = \varphi(\partial D_2) = S_1^i$.
- 2°) $\varphi(D_2)$ coupe $\partial \otimes_3(p_2)$ transversalement.
- 3°) $\varphi(D_2) \cap A_j = \emptyset$.
- 4°) Il existe un difféomorphisme :

$$H : (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*))) ; \mathbb{O}_3(p_2) \oplus \mathbb{O}(D_2) ; \bar{\Delta}_2 + (\underbrace{\bigcup_{x_j \in \partial \Gamma_+^{-x}} A_j}_{\text{}}) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z'_i)) \xrightarrow{\sim}$$

$$(\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g)))) ; \mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g)) ; \bar{\Delta}_2 + (\bigcup_j A_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z'_i))$$

tel que : $H|_{\bar{\Delta}_2 + (\bigcup_j A_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z'_i))} = \text{identité.}$ " \square

Démonstration du lemme 3.2.6.2.1.

On va considérer le 2-polyèdre plongé dans $\partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*))$, obtenu en éclatant $\Gamma_+ \subset \bar{E} \hat{\oplus}_{\mathbb{I}} \bar{E}^* \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*))$, et qui sera désigné par :

$$G_1 \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*)) .$$

(il s'agit ici de l'éclatement standard de la déf. 3.24.02). Donc $\bar{E} \hat{\oplus}_{\mathbb{I}} \bar{E}^* \setminus \Gamma_+$, s'obtient à partir de G_1 en faisant éclater tous les I_y , $y \in \mathcal{E} - Y \subset \partial \Gamma_+^{-x}$.

On remarque que toutes ces opérations ne touchent pas à :

$$X = \bar{\Delta}_2 + (\bigcup_j A_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z'_i)).$$

En appliquant le lemme 3.6, on peut démontrer sans peine que l'on peut obtenir : $(\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g)))) ; \mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g)), X)$ à partir de :

$$[(\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^*)) = \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* / \Psi(g)))) ; G_1, X], \text{ par le procédé suivant :}$$

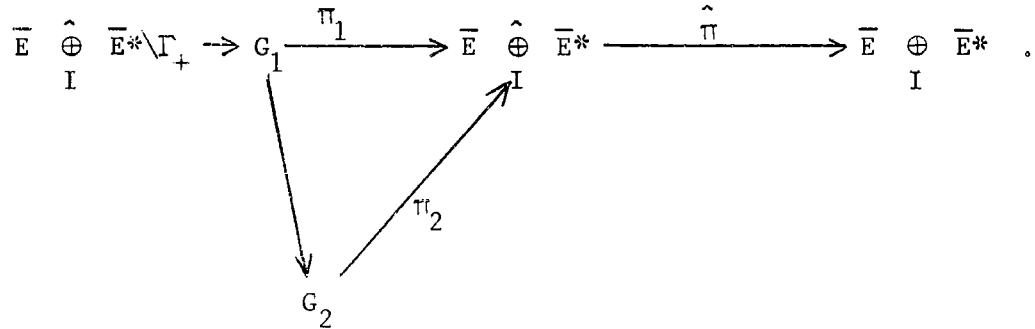
On commence par considérer des "petits" voisinages tubulaires des $z_i \in Y \subset \partial \bar{\Gamma}_+$:

$$f_i : [0,2] \hookrightarrow \bar{\Gamma}_+ , f_i(0) = z_i .$$

Soient :

$$\Gamma_+^i = \bar{\Gamma}_+ - \bigcup_{y_i \in Y} f_i [0,2) \subset \bar{E} \oplus_{\mathbb{I}} \bar{E}^* , \Gamma_+^{ii} = \bar{\Gamma}_+ - \bigcup_{y_i \in Y} f_i [0,1) ,$$

et $G_2 \subset \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus \bar{E}^*))$ le 2-polyèdre obtenu par l'éclatement standard (définition 3.24.02) de $\Gamma'_+ \subset \hat{\bar{E}} \oplus \hat{\bar{E}}^*$. On a un diagramme commutatif de projections d'espace-quotient :



Considérons : $\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \supset \partial \pi_2^{-1} \Gamma'_+ \supset \pi_2^{-1} Y'$ où $Y' = \bigcup_{y_i \in Y} \{f_i(2)\} \subset \partial \Gamma'_+$.

A partir du lemme 3.6, on peut déduire facilement qu'il existe un plongement :

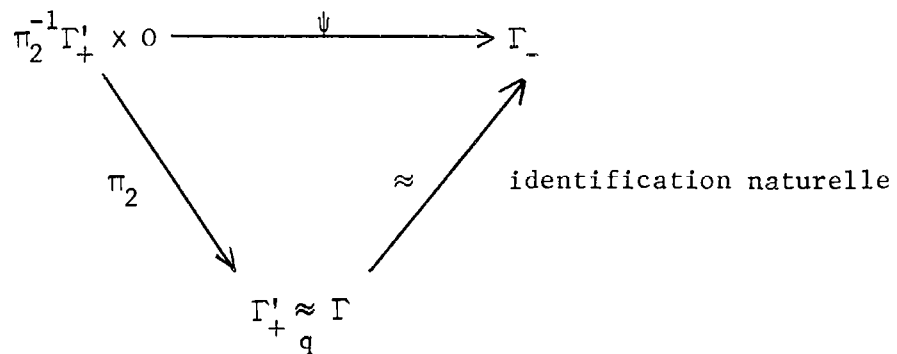
$$\psi : \pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times [0,1] \longrightarrow \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{E} \oplus \bar{E}^*)) = S_3,$$

tel que : (comparer avec le lemme 3.24.5.1)

- 1°) $\psi(\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times [0,1]) \cap X = \emptyset$.
- 2°) $\psi(\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times [0,1]) \cap G_2 = \psi(\partial(\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times [0,1]) - \pi_2^{-1} Y' \times (0,1))$.
- 3°) $\psi(\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times 0) = \Gamma_- \subset G_2$, et :

$$\psi[(\pi_2^{-1} \Gamma'_+ \times 1) \cup ((\partial \pi_2^{-1} \Gamma'_+ - \pi_2^{-1} Y') \times [0,1])] = \Gamma'_+ \cup \pi_2^{-1} C.$$

En plus on a des compatibilités analogues à celles du point 3°) de la démonstration du lemme 3.24.5.1. (Par exemple, le diagramme suivant est commutatif :



(où il est entendu que $q : \Gamma_+^i \approx \Gamma$ est le difféomorphisme "canonique, défini univoquement, à isotopie près)). $\psi(\pi_2^{-1} \Gamma_+^i \times [0,1])$ coupe $\bar{E}^* \subset G_2$ transversalement et prolonge $\pi_2^{-1} \bar{E} \subset G_2$ d'une manière "lisse".

4°) On a un difféomorphisme, qui est l'identité sur X :

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus \bar{E}^* / \Psi(g)) ; \otimes_3(\bar{E} \oplus \bar{E}^* / \Psi(g)), X) = (\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus \bar{E}^*)) ;$$

$$\otimes_3(G_2 \oplus \psi(\pi_2^{-1} \Gamma_+^i \times [0,1]) - (f_1[0,1]) - \dots - (f_\ell[0,1])), X)$$

$$\underbrace{\partial(\pi_2^{-1} \Gamma_+^i \times [0,1]) - \pi_2^{-1} Y \times (0,1)}$$

(où $\{y_1, \dots, y_\ell\} = Y$.)

Le lecteur pourra déduire tout ça, à partir du lemme 3.6.

D'autre part, c'est clair que le second membre de l'égalité ci-dessus, s'identifie à :

$$(\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus \bar{E}^*)) ; \otimes_3(G_2 \oplus \psi(\pi_2^{-1} \Gamma_+^i \times [0,1]) - (\eta_1(D_2)) - \dots - (\eta_\ell(D_2))), X) =$$

$$= (\otimes_4(\otimes_3(\bar{E} \oplus \bar{E}^*)) ; \otimes_3(G_1 \oplus \psi(\pi_2^{-1} \Gamma_+^i \times [0,1])), X) .$$

Ici, on identifie G_1 avec une partie de G_2 (en enlevant des voisinages tubulaires des $f_i[0,1]$, au lieu d'éclater les $f_i[0,1]$), et $\eta_i(D_2)$ sont les anses d'indice 2, négatives, correspondant aux mêmes $f_i[0,1]$. A partir de là, la démonstration du lemme 3.26.2.1 (donc du lemme 3.26.2) finit, de la même manière que celle du lemme 3.24.5.1. Le lecteur pourra rapprocher la construction précédente, où on fait de la chirurgie positive autour de certains bouts de Γ_+ et de la chirurgie négative, autour des autres, avec le corollaire suivant de la démonstration du lemme 3.24.5 :

Corollaire de la démonstration du lemme 3.24.5. " Considérons la situation du lemme 3.24.5.1 et soit $e \subset \partial \Gamma - \bar{x}$ l'ensemble des bouts de $\partial \Gamma - \bar{x}$ qui éclatent dans $\bar{E} \hat{\oplus}_I E^* \setminus \Gamma$.

Soient y_1, \dots, y_p les points de e et I_{y_1}, \dots, I_{y_p} les intervalles qui leur correspondent, dans $\bar{\Gamma} \supset \Gamma$. Considérons l'éclatement standard de $\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*$: $G \subset \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*))$ et le "cercle différentiable" tracé sur G : $S_1^i = C_{\Gamma}^+(I) + A + C_{\Gamma}^-(I) + B$. Il existe une anse d'indice 2 ajoutée à G le long de S_1^i : $\varphi : D_2 \longrightarrow \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*))$ (donnant lieu à une anse $\Phi(D_2) = \Phi(D_2 \times I)$) ajoutée à $\mathbb{O}_3(G)$, et des difféomorphismes :

$$\begin{aligned} & (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*))) ; \underbrace{\mathbb{O}_3(G - (I_{y_1}) - \dots - (I_{y_p})) + (\Phi(D_2))}_{(\mathbb{O}_3(G) - (\eta_1(D_2)) \dots - (\eta_p(D_2)) + \Phi(D_2))} ; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 + (UA_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z_i)) \xrightarrow{H_1} (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*))) ; \mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^* \setminus \Gamma) + \Phi(D_2) ;$$

$$\Delta_2 + (UA_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z_i)) \xrightarrow{H} (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^*))) ; \mathbb{O}_3(\bar{E} \hat{\oplus}_I E^* / \Psi(g)) ;$$

$$\Delta_2 + (UA_j) + (\bigcup_i (p^*)^{-1}(z_i)) . \quad \square$$

Enfin, l'analogie du lemme 3.24.6 reste vrai (mot-à-mot), et la démonstration du lemme 3.26, finit tout-à-fait comme celle du lemme 3.24. \square

4.13) Démonstration du lemme 3.27.

Lemme 3.27.1. "Soit (L_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que $s(L_2) = \emptyset$, et $\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_\ell \longrightarrow \hat{\partial}L_2$ des plongements différentiables 2-à-2 disjoints. Considérons :

$$L_2 \oplus \bar{\Gamma}_1 \times [0,1] \oplus \dots \oplus \bar{\Gamma}_\ell \times [0,1] ,$$

(où $\bar{\Gamma}_i \equiv \bar{\Gamma}_i \times 0$), et définissons, comme à la fin du lemme 3.26, le triple :

$$(2 \otimes_3 (L_2) , \otimes_3 (L_2) , \bar{\Gamma}_1 \times 1 + \dots + \bar{\Gamma}_\ell \times 1) .$$

Considérons, aussi, des plongements 2-à-2 disjoints : $\bar{\Gamma}_i \times [0, -1] \hookrightarrow L_2$, tels que $\bar{\Gamma}_i \times 0 \equiv \bar{\Gamma}_i$, et l'involution canonique

$$J : 2 \otimes_3 (L_2) \longrightarrow 2 \otimes_3 (L_2) .$$

On a un difféomorphisme de triples :

$$(2 \otimes_3 (L_2) , \otimes_3 (L_2) , \bar{\Gamma}_1 \times 1 + \dots + \bar{\Gamma}_\ell \times 1) = (2 \otimes_3 (L_2) , \otimes_3 (L_2) , J(\bar{\Gamma}_1 \times (-1)) + \dots + J(\bar{\Gamma}_\ell \times (-1))) ,$$

qui applique $\bar{\Gamma}_i \times 1$ sur $J(\bar{\Gamma}_i \times (-1))$. " \square

Démonstration du lemme 3.27.1. On commence par remarquer que l'involution canonique "peut être reconstituée, par un passage du local au global", de la manière suivante :

Soient M_3^1 , M_3^2 deux variétés C^∞ de dimension 3, compactes à bord $\neq \emptyset$, V_2 une variété de dimension 2 compacte à bord et :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\psi_1} & \partial M_3^1 \\ V_2 & & \\ & \xrightarrow{\psi_2} & \partial M_3^2 \end{array}$$

deux plongements C^∞ . On considère $M_3 = M_3^1 \oplus_{V_2} M_3^2$.

On peut reconstituer l'involution canonique $J(M_3) : 2 M_3 \longrightarrow 2 M_3$ à partir des involutions canoniques $J(M_3^i) : 2 M_3^i \longrightarrow 2 M_3^i$, comme suit : Dans $2 M_3^i$ on peut faire éclater $V_2 = \psi_i(V_2) \subset \partial M_3^i \subset M_3^i \subset 2 M_3^i$ (où M_3^i est le premier des deux termes $2 M_3^i = M_3^i \oplus_{\partial M_3^i} M_3^i$), en considérant le passage

au quotient :

$$M_3^i \oplus \underbrace{M_3^i}_{\partial M_3^i - V_2^o} \xrightarrow{\pi_i} M_3^i \oplus \underbrace{M_3^i}_{\partial M_3^i} = 2 M_3^i .$$

Il existe un relèvement unique de $J(M_3^i) \in \text{Diff}(2 M_3^i)$ en une involution :

$$\bar{J}(M_3^i) \in \text{Diff} \left(M_3^i \oplus \underbrace{M_3^i}_{\partial M_3^i - V_2^o} \right) .$$

On a : $\underbrace{\partial(M_3^i \oplus M_3^i)}_{\partial M_3^i - V_2^o} = 2 V_2$, et $\bar{J}(M_3^i) | 2 V_2 = 1$ 'involution canonique

$J(V_2)$. On peut vérifier que :

$$2 M_3 = \left(M_3^1 \oplus \underbrace{M_3^1}_{\partial M_3^1 - V_2^o} \right) \oplus 2 V_2 \oplus \left(M_3^2 \oplus \underbrace{M_3^2}_{\partial M_3^2 - V_2^o} \right), \text{ et :}$$

$$J(M_3) = \underbrace{\bar{J}(M_3^1)}_{J(V_2)} \oplus \underbrace{\bar{J}(M_3^2)}_{J(V_2)} .$$

Soient maintenant $L_2^i \subset L_2$ des "voisins réguliers" 2-à-2 disjoints de $\Gamma_i \times [0,1]$. Vu la manière dont $J = J(\otimes_3(L_2))$ peut être reconstituée (par passage du local au global), le lemme 3.27.1 est démontré si l'on peut prouver, pour chaque i , l'existence d'un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3(L_2^i), \otimes_3(L_2^i), \bar{\Gamma}_i \times 1) \xrightarrow{\text{id}(2 \otimes_3(L_2^i))} (2 \otimes_3(L_2^i), \otimes_3(L_2^i), \bar{\Gamma}_i \times 1) ,$$

$$J(\otimes_3(L_2^i)) (\bar{\Gamma}_i \times (-1)) .$$

(On dispose ici d'une petite marge de liberté, vu que $J(\otimes_3(L_2^i))$ n'est défini que modulo une isotopie qui laisse fixe $\partial \otimes_3(L_2^i)$).

L'existence d'un tel difféomorphisme est un lemme local qui résulte tout de suite à partir des définitions (en particulier du foncteur θ). \square

On considère maintenant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{K}'_2 & \xrightarrow{\hat{\pi}} & K'_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_3 & \xrightarrow{\pi} & \Theta_3(K'_2) \quad ,
 \end{array}$$

et, dans \hat{K}'_2 les intervalles fermés disjoints : $\mu_+(f', x_i) \subset \hat{K}'_2$ ($x_i \in s(K'_2)$) , respectivement les intervalles fermés disjoints : $[x_i, y_i] \subset \mu_+(\varphi, x_i) \subset \hat{K}'_2$.

Les $\mu_+(f', x_i)$ (respectivement, les $[x_i, y_i]$) , donnent naissance à des anses négatives d'indice 2 : $\delta_i(\eta_i)$ de $V_3 \xrightarrow[\theta(\pi)]{} 2 \Theta_3(K_2) = \partial \Theta_4(\Theta_3(K'_2))$. On peut considérer, aussi, les anses d'indice 2 , positives, ajoutées à $\theta(\pi)V_3 \subset 2 \Theta_3(K_2)$, ϵ_i , de bord $\hat{\pi}^{-1}(x_i) + \mu_-(f', x_i)$.

Dans V_3 , $\mu_-(f', x_i)$ va donner naissance à un 2-disque χ_i , tel que

$$\partial \chi_i \cap \partial V_3 = \chi_i \cap \epsilon_i, \text{ e.a.d.s.}$$

On peut définir les F_i au niveau de $2 \Theta_3(K_2)$:

$$F_i : 2k_i (S_1 \times I) \hookrightarrow 2 \Theta_3(K_2) \quad ,$$

de telle façon qu'ils touchent $V_3(\partial V_3)$ de la même manière que les F_i du lemme 3.27 touchent à K'_2 ($\partial K'_2$) .

Le lecteur remarquera sans peine que, si l'on se réfère au lemme 3.23, on a un difféomorphisme :

$$(2 T_3^p, T_{p,k}) = (2 \otimes_3(K_2), \theta(\pi) v_3) ,$$

et que, en plus, les $\delta_i, \epsilon_i, \eta_i, \chi_i, F_i$ qu'on vient de définir, ont toutes les propriétés du lemme 3.23, avec, en plus : $C^i \cap \delta_j = C^i \cap \eta_j = \emptyset$, où $C^i = F_i(S_1 \times 0)$. (Modulo cette dernière remarque : c -1, c -2 \iff VI, VII, VIII, e.a.d.s.).

Remarquons, enfin que :

$$\begin{aligned} (2 \otimes_3(K_2), \otimes_3(K_2)) &= (2 \otimes_3(K_2), \theta(\pi) v_3 - (\delta_1) - \dots - (\delta_k)) = \\ &= (2 \otimes_3(K_2), \theta(\pi) (v_3) + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots + (\Phi_2(\epsilon_k))) = (p \# (S_1 \times S_2) , \\ &p \# (S_1 \times D_2)) . \end{aligned}$$

D'une manière plus exacte, on a des collapsings :

$$(C) \quad (\theta(\pi) v_3 + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots) \searrow (\theta(\pi) v_3 - (\delta_1) - \dots) \searrow \otimes_3(K_2) ,$$

(à l'intérieur de $2 \otimes_3(K_2)$), qui ne touchent ni aux $F_i(S_1 \times 0)$ ni aux $\bar{\Gamma}_i$. On peut considérer l'involution canonique :

$$J = J(\otimes_3(K_2)) = J(\theta(\pi) v_3 + \Phi_2(\epsilon_1) + \dots) : 2 \otimes_3(K_2) \longrightarrow 2 \otimes_3(K_2) .$$

Le lemme suivant est une conséquence facile du lemme 3.27.1 :

Lemme 3.27.2. "On a un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} (2 \otimes_3(K_2), \theta(\pi) v_3 - (\delta_1) - \dots - (\delta_k), \text{Image } F_1 + \dots + \text{Image } F_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \\ \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)) \xrightarrow[\text{id}(2 \otimes_3(K_2))]{\approx} (2 \otimes_3(K_2), \\ \theta(\pi) v_3 - (\delta_1) - \dots - (\delta_k), \text{Image } F_1 + \dots + \text{Image } F_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots \\ \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J(\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times (-1)) + \dots + J(\bar{\Gamma}_q \times (-1))) . \quad \square \end{aligned}$$

Avec $(2 \otimes_3(K_2), \theta(\pi) v_3), F_i, \delta_i, \eta_i, \chi_i, \bar{\Gamma}^i = \bar{\Gamma}^i \times (-1)$, on est exactement dans les conditions du lemme 3.23, qui nous fournit des $G_i : \rho'_i(S_1 \times I) \hookrightarrow 2 \otimes_3(K_2)$, $G_i(S_1 \times 0) = \Gamma_i$, tels que :

w-1) les G_i satisfont à toutes les propriétés des F_i .

w-2) On a un difféomorphisme (analogue à celui du lemme 3.27.2) :

$$(2 \otimes_3(K_2), \otimes_3(K_2), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)) = (2 \otimes_3(K_2), v_3 - (\delta_1) - \dots - (\delta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}_q) = (2 \otimes_3(K'_2 / \Psi(f')), \dots).$$

w-3) On a un difféomorphisme (fourni par le lemme 3.23) :

$$(2 \otimes_3(K_2), v_3 - (\delta_1) - \dots - (\delta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}_q) = (2 \otimes_3(K_2), v_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}_q)$$

Pour finir la démonstration, on a donc encore besoin du lemme suivant :

Lemme 3.27.3. "On a un difféomorphisme

$$(2 \otimes_3(K_2), v_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}_q) = (2 \otimes_3(K'_2 / \Psi(\varphi)), \otimes_3(K'_2 / \Psi(\varphi)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)). \quad \square$$

Démonstration du lemme 3.27.3. (Ici on a complètement oublié les F_i ; mais on utilise l'existence des G_i). On va utiliser maintenant le lemme 3.23.2 (démonstration du lemme 3.23).

Ce lemme nous donne un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3 (K_2), v_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}_q) = (2 \otimes_3 (K_2), v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + (\phi_2(\epsilon_k^N)),$$

$$\Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J_N \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J_N \bar{\Gamma}_q), \text{ où } J_N \text{ est l'involution canonique}$$

$$2 \otimes_3 (K_2) = 2 (v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots) \xrightarrow{J_N} 2 (v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots) = 2 \otimes_3 (K_2).$$

Il est à remarquer ici que l'on a un collapsing :

$$(v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + (\bigcup_i \text{Image } G_i)) \searrow (v_3 + (\phi_2(v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots))),$$

ce qui fait que les $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ sont définis "tout bêtement" et pas de la manière "magique" de la fin du lemme 3.26.

D'après le lemme 3.27.1

$$(2 \otimes_3 (K_2), v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + (\phi_2(\epsilon_k^N)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_q \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + J_N \bar{\Gamma}_{q_1+1} + \dots + J_N \bar{\Gamma}_q) = (2 \otimes_3 (K_2), v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + (\phi_2(\epsilon_k^N)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_q \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)).$$

(Ici :

$$\Gamma_1 + \dots + \Gamma_q \subset v_3 + (\phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + \bigcup \text{Image } G_i,$$

$$\text{et } (\bar{\Gamma}_i \times 1) \cap \text{Image } G_j = \emptyset).$$

Considérons maintenant l'ensemble :

$$\{y_i\} = \bigcup_{i,j} \eta_j \cap \mathcal{C}l(\text{Image } G_j - V_3) .$$

Soient B_1, B_2, \dots les composantes connexes de $\bigcup_j \mathcal{C}l(\text{Image } G_j - V_3)$. Chaque B_i est de la forme $S_1 \times I$ (ou $I \times I / \{0 \times I + 1 \times I\}$) où il est entendu que $S_1 \times 0$ (resp. $I \times 0$) est la partie de B_i qui est dans $\bigcup \Gamma_j$ et $S_1 \times 1$ (resp. $I \times 1$) est $B_i \cap V_3$. On va désigner $B_i \cap V_3$ par A_i .

Pour chaque y_i il existe un $A_{j(i)}$ unique tel que : $y_i \in \text{int } A_{j(i)}$.

Soit $f_{i,0} : A_i \hookrightarrow \partial V_3 \subset V_3$ l'inclusion naturelle. On va considérer des isotopies :

$$f_{i,t} : A_i \hookrightarrow V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots$$

- telles que :
- a) $f_{i,0} \equiv f_i$.
 - b) $f_{i,t} \mid \partial A_i = f_{i,0} \mid \partial A_i$.
 - c) Pour chaque t fixé : $f_{i,t}(A_i) \cap f_{j,t}(A_j) = \emptyset$.
 - d) $f_{i,t}(A_i) \cap \bar{\Gamma}_j \times (-1) = \emptyset$ ($j \leq \bar{q}$).

$$\text{On a : } (V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots) \cup \left(\bigcup_j \text{Image } G_j \right) \equiv [V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots] \oplus_{\{f_{i,0}\}} \left(\bigcup_j B_j \right).$$

On peut définir aussi :

$$(C_t) : (V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots) \oplus_{\{f_{i,t}\}} \left(\bigcup_j B_j \right) ,$$

et définir, à partir de là, par le procédé de la fin du lemme 3.26, le triple :

$$(2 \otimes_3(K_2), (V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1))_{f,t} .$$

On a mis un indice t , parce que, à priori, cette définition dépend du moment t . Pour $t = 0$ c'est clairement la même définition qu'avant. D'autre part, elle ne dépend, en fait, pas de t (à difféomorphisme près). La démonstration est facile et laissée au lecteur, qui utilisera, de nouveau, le foncteur θ .

Considérons, alors, dans η_i un arc α_i qui unit $y_i \in \partial \eta_i$ à $\eta_i \cap \partial \epsilon_i^N$ et le 2-disque $\chi_i^N \subset V_3$ (voir le lemme 3.23.2) qui a la propriété que :

$$\partial \chi_i^N = I_i + (\partial \chi_i^N \cap \partial \epsilon_i^N) . \quad \partial V_3 \cap A_{j(i)}$$

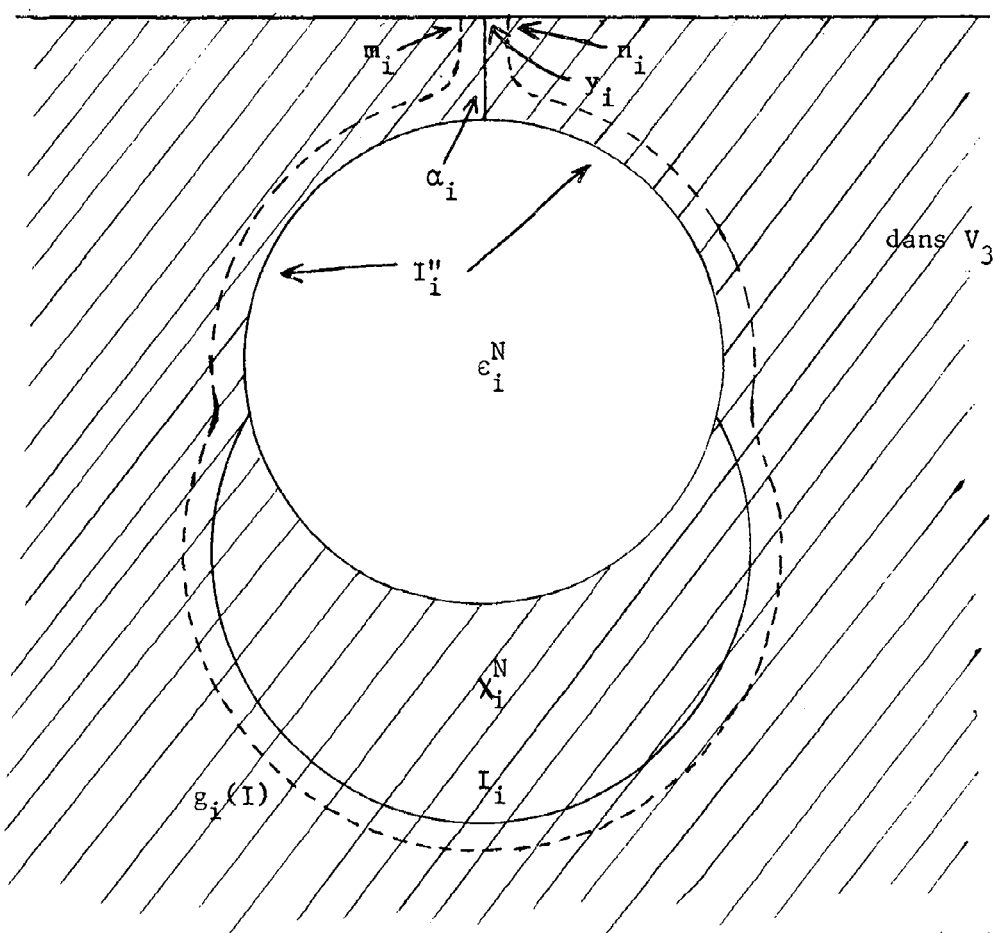


Figure 3.27.1.

Soient m_i et n_i deux points de $A_{j(i)}$ tels que $y_i \in \text{int } [m_i, n_i]$.

Considérons une courbe $g_i : I \rightarrow V_3 + (\mathbb{D}_2(\epsilon_1^N)) + \dots$ telle que $g_i(0) = m_i$,

$g_i(1) = n_i$, $g_i(I) = [m_i, n_i] + \alpha_i + \partial (\epsilon_i^N \cup \chi_i^N)$ (où : $\partial(\epsilon_i^N \cup \chi_i^N) = I_i'' + I_i$) .

Par une isotopie (dans $V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots$), on peut remplacer $[m_i, n_i] \xrightarrow{\hookrightarrow} A_{j(i)} \xrightarrow{\hookrightarrow} \partial V_3$ par g_i . (Voir la figure 3.27.1). On peut s'arranger de telle façon que le collapsing naturel :

$$V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots \rightarrow V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k)$$

ne touche pas à $g_i(I)$. On déduit de tout ça qu'il y a un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3(K_2), V_3 + (\Phi_2(\epsilon_1^N)) + \dots + (\Phi_2(\epsilon_k^N)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)) = (2 \otimes_3(K_2), V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_q \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1))_{\{g_i\}}$$

Les $\mu_i(\varphi, x_i)$ donnent naissance à des disques de dimension 2, 2-à-2 disjoints $\mu_i \xrightarrow{\hookrightarrow} V_3$, tels que $\partial \mu_i \supset I_i$, $\mu_i \cap \eta_j = \emptyset$, $\mu_i \cap I_j'' = \emptyset$. Considérons l'isotopie (dans $V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k)$), qui remplace g_i par un g_i' , où $g_i'(I) = g_i(I) - I_i + \partial \eta_i$.

On a, alors, un difféomorphisme :

$$(2 \otimes_3(K_2), V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1))_{\{g_i\}} = (2 \otimes_3(K_2), V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1))_{\{g_i'\}}$$

Enfin, à partir du lemme 3.6, le lecteur déduira sans aucune difficulté, que :

$$(2 \otimes_3(K_2), V_3 - (\eta_1) - \dots - (\eta_k), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1))_{\{g_i'\}} = (2 \otimes_3(K_2' / \Psi(\varphi)), \otimes_3(K_2' / \Psi(\varphi)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)) .$$

Ceci démontre le point d) de notre lemme. Le point e) résulte du point e) du lemme 3.23 : $M_+^2(\varphi) \cap M_-^2(f')$ est exactement $U(\eta_j \cap \chi_i)$. D'autre part e - 6-2 (lemme 3.23) est déjà satisfait, vu les hypothèses faites, avant, dans l'énoncé du lemme. Enfin, le point d') se prouve exactement comme d), vu que les constructions faites, ne touchent jamais à \bar{B}_i . Pour être plus explicite, on considère dans K_2^i les fermés disjoints $\Phi_1 = \bigcup_i (\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times (-1) \cup (\bar{E}_i \times [0,1]))$ et :

$$\Phi_2 = \bigcup_{j \leq q_1} \bar{\Gamma}_j \times (-1) .$$

Ces fermés sont disjoints des Image $F_i(G_i)$, $M^2(\varphi)$, $M^2(f')$.

Maintenant, en revenant au lemme 3.23, la conclusion reste vraie si

$\bigcup_{i \geq q_1+1} \bar{\Gamma}^i$, $\bigcup_{i \leq q_1} \bar{\Gamma}^i$ sont remplacées, respectivement, par deux fermés Φ_1 , Φ_2 ,

disjoints, ne touchant pas aux δ , ϵ , η , χ et tels que :

$$J \Phi_1 \cap (\text{Image } F_i) = J \Phi_1 \cap \epsilon = \emptyset .$$

A partir de ces remarques, le point d') découle sans aucune difficulté.

4.14. Démonstration du lemme 3.28.

La démonstration se fait par application successives des lemmes 3.19 - 3.19.1. On peut aussi bien supposer que $g_1 = g$, $g_2 = \hat{g}$, comme dans le lemme 3.19 (on suppose donc qu'il s'agit d'un seul glissement). Soient

$$F_i(S_1 \times 0) \subset M_3 - \text{int } C , \quad i = 1, \dots, p-q \text{ et}$$

$$F_i(S_1 \times 0) \subset C , \quad i = p-q+1, \dots p.$$

On peut définir

$(2 \otimes_3 ((L_2 / \Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)) ; \otimes_3 ((L_2 / \Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)) ,$

$\sum_{i=1}^{p-q} \Gamma_i$) comme à la fin du lemme 3.26. On remarque que $\delta(g,C) \subset \partial \otimes_3 ((L_2 / \Psi(g)) \cap$

$\cap (M_3 - \text{int } C))$ et que : $2 (\otimes_3 ((L_2 / \Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)) \text{ rel } \delta(g,C)) =$

$= 2 \otimes_3 ((L_2 / \Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)) - (\text{un petit voisinage tubulaire de } \delta(g,C)).$

$\sum_{i=1}^{p-q} \Gamma_i + \Phi_1$ peut jouer le rôle Φ , du lemme 3.19.1, et $(2 \otimes_3 (L_2 / \Psi(g)) ;$

$\otimes_3 (L_2 / \Psi(g)), \sum \Gamma_i$) s'obtient en recollant les parties correspondantes à $M_3 - \text{int } C$ et C (on utilise ici les propriétés de recollement du foncteur θ).

Avec toutes ces précisions le lemme 3.28 résulte tout de suite des lemmes 3.19 -

3.19.1. \square

CHAPITRE V : DEMONSTRATION DU THEOREME A.

On va utiliser le chapitre I et le paragraphe 3.1 du chapitre III.

En se référant aux notations de l'énoncé du théorème A, on peut supposer sans perdre la généralité, qu'il existe un $r \leq p$ tel que :

a) Si $i \leq r$, chaque composante connexe de $F_{2i-1}^{-1}(F_{2i-1}(S_1 \times I) \cap F_{2i}(S_1 \times I))$ est un arc ayant un bout sur $S_1 \times 0 \equiv S_1^{2i-1}$ et l'autre dans $\text{int}(S_1 \times I)$.

b) Si $p \geq i > r$, les deux composantes connexes de $F_{2i-1}^{-1}(F_{2i-1}(S_1 \times I) \cap F_{2i}(S_1 \times I))$ sont deux arcs dont l'un a les extrémités sur $S_1 \times 0$ et $S_1 \times 1$, tandis que l'autre a une extrémité sur $S_1 \times 0$, l'autre dans $\text{int}(S_1 \times I)$.

(figures 5-a et 5-b)

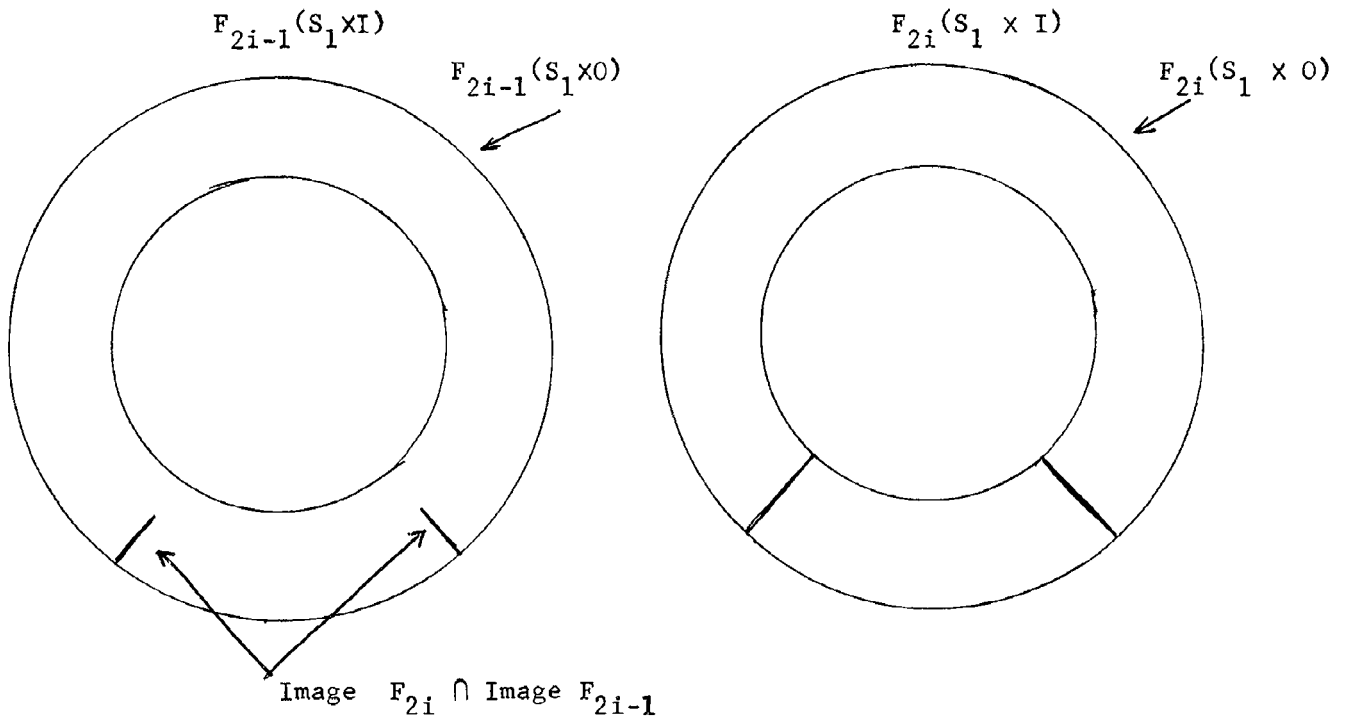


Fig. 5 - a. Le cas $i \leq r$

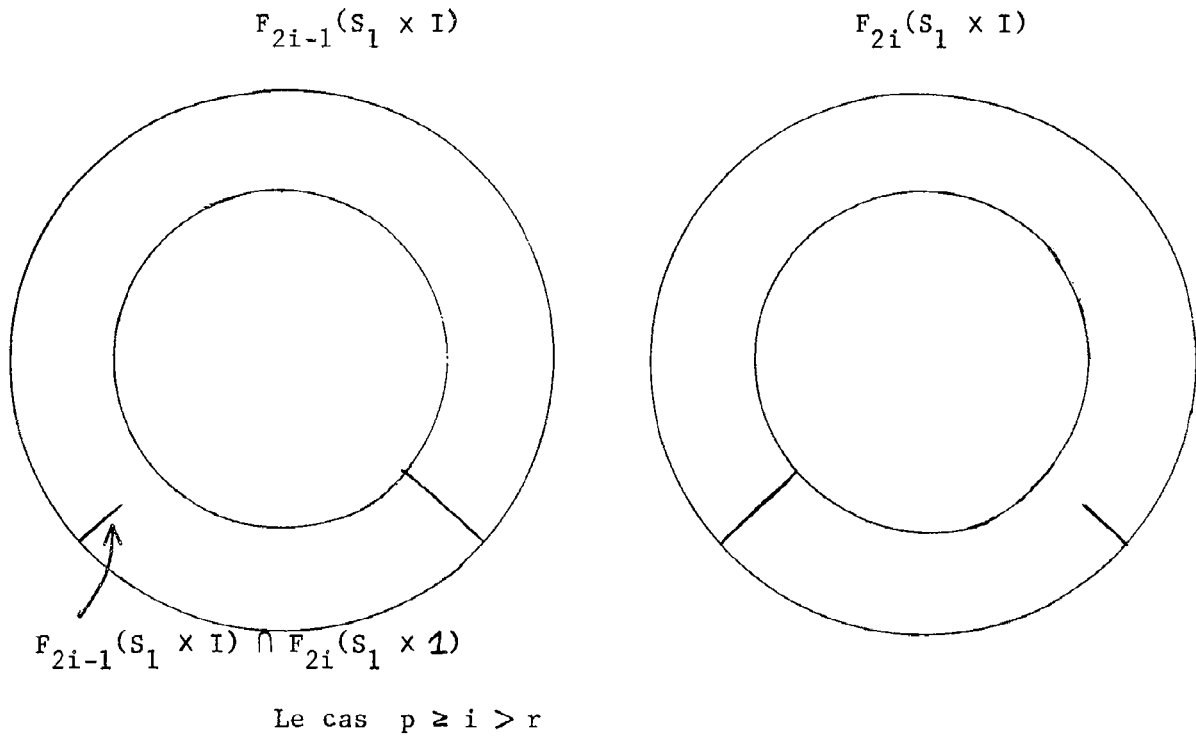


Figure 5 - b.

Pour chaque $j \in (1, \dots, 2p) - (1, 3, \dots, 2r-1) = \Sigma$, on considère un plongement C^∞ :

$$a_j : I \longrightarrow F_j(S_1 \times I)$$

tel que $a_j^{-1}(\partial F_j(S_1 \times I)) = \{0, 1\}$, transversal sur $\partial F_j(S_1 \times I)$, tel que
(si $k = r+1, \dots, p$)

$$a_{2k-1}(I) \cap F_{2k}(S_1 \times I) = \emptyset \quad \text{et}$$

$$a_{2k}(I) \cap F_{2k-1}(S_1 \times I) = \emptyset \quad .$$

Le lemme suivant est très facile :

Lemme 5.1. "Soit

$$b_j : I \longrightarrow F_j(S_1 \times I) \quad (j \in \Sigma)$$

une autre famille de plongements, ayant les mêmes propriétés que a_j .

On a un difféomorphisme :

$$\left(T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I) + \bigcup_{j \in \Sigma} a_j(I) \right) \xrightarrow{\approx} \left(T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I) + \bigcup_{j \in \Sigma} b_j(I) \right) . \quad \square$$

Considérons maintenant :

$$(S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q})$$

et, pour chaque D_2^i , un rayon $I^i \hookrightarrow D_2^i$ tel que $\partial I^i = 0^i - 1^i$ avec $1^i = \partial I^i \cap \partial D_2^i = I^i \cap \partial D_2^i$.

Lemme 5.2. " Soit

$$a_j : I \longrightarrow F_j(S_1 \times I) \quad (j \in \Sigma)$$

une famille de plongements comme ci-dessus.

On a un difféomorphisme :

$$\left(T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I) + \bigcup_{j \in \Sigma} a_j(I) \right) \xrightarrow{\approx} \left((S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q}), \left(\bigcup_{i=1}^{2p+q} S_1^i \times 0^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \Sigma} x^j \times I^j \right) \right) ,$$

où $x^j \in S_1^i$. " \square

Démonstration. D'après le lemme 5.1, il n'est pas nécessaire de travailler avec a_j (il suffit de prendre un autre système, b_j , analogue, bien choisi pour ce qu'on veut faire).

Dans $(S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q})$ considérons les 2-disques $\Delta_2^1, \dots, \Delta_2^{2p+q-1}$ qui séparent les différents facteurs $S_1^i \times D_2^i$.

Vu l'hypothèse 3° - 4, du théorème A, il existent des 2-disques $\Delta_2^i \hookrightarrow T_3^{2p+q}$, tels qu'on ait un difféomorphisme :

$$\left(T_3^{2p+q} ; \bigcup_{j=1}^{2p+q} F_j(S_1 \times I) ; \bigcup_{j=1}^{2p+q-1} \Delta_2^j \right) \xrightarrow[\approx]{H} \left((S_1^1 \times D_2^1 \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q})) , \bigcup_{j=1}^{2p+q} S_1^j \times O^j ; \bigcup_{j=1}^{2p+q-1} \Delta_2^j \right) .$$

Considérons :

$$T_3^{2p+q} \supset H^{-1}(S_1^i \times D_2^i) \supset F_i(S_1 \times I)$$

et $H^{-1}(S_1^i \times I^i) \subset H^{-1}(S_1^i \times D_2^i)$. On a :

$$F_i(S_1 \times I) \subset \partial H^{-1}(S_1^i \times I^i) .$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $F_i(S_1 \times I)$ coupe $H^{-1}(S_1^i \times I^i)$ transversalement, et que : $F_i(S_1 \times I) \cap H^{-1}(S_1^i \times I^i)$ contient un arc qui unit $F_i(S_1 \times 0)$ avec $F_i(S_1 \times 1)$. (Pour celà, il faut, peut-être, faire subir à $H^{-1}(S_1^i \times I^i)$ une "torsion" de 360°)

A partir de là, ladémonstration suit sans difficulté. \square

Après une éventuelle reparamétrisation de $S_1 \times I (F_i)$ on peut supposer que, pour chaque i ils existent des points $x_i', x_i'' \in S_1$, tels que :

$$F_i^{-1} \left(\text{Image } F_i \cap \bigcup_j \text{Image } F_j \right) \subset \{x_i' \cup x_i''\} \times I .$$

Pour chaque $j \in \{2, 4, \dots, 2r\}$, considérons un arc $J_j \subset S_1$, tel que $x_j', x_j'' \in \text{int } J_j$. De même, pour chaque $j \in \{2r+1, \dots, 2p\}$, on va supposer

que la notation a été choisie de telle façon, que :

$$x_j^i \times I \subset F_j^{-1} \left(\text{Image } F_j \cap \bigcup_{i \neq j} \text{Image } F_i \right) ,$$

(Donc :

$$x_j^i \times I \supset \{ F_j^{-1} \left(\text{Image } F_j \cap \bigcup_{i \neq j} F_i(S_1 \times I) \right) \} .$$

On va choisir un petit arc $J_j \subset S_1$ tel que

$$J_j \ni x_j^i , \quad x_j^i \notin J_j \quad (j \in \{2r+1, \dots, 2p\}) .$$

Le lemme 5.2 , implique le :

Lemme 5.3. "Soit $K_j \subset S_1^j$ un arc quelconque. On a un difféomorphisme :

$$\left(T_3^{2p+q} ; \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I) + \bigcup_{j \in \Sigma} F_j(J_j \times I) \right) \xrightarrow{\approx} \longrightarrow$$

$$\left((S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q}) \right) ;$$

$$\bigcup_{i=1}^{2p+q} (S_1^i \times O^i) + \bigcup_{j \in \Sigma} (K_j \times I^j) . \quad \square$$

En utilisant les notations du théorème A , considérons des 2-disques différentialement plongés :

$$\delta_2^i \hookrightarrow X_3 - \text{int } T_3^{2p+q}$$

tel que : a) $\partial \delta_2^i = S_1^i$, b) si $i \leq p$, $\delta_2^{2i-1} \cap \delta_2^{2i} =$ un arc (d'intersection transversale), de bord $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$, c) il n'y a pas d'autre intersection $\delta_2^j \cap \delta_2^k$. ($j \neq k$) .

Considérons un plongement :

$$D_2^i \xrightarrow{\psi_i} X_3$$

tel que $\psi_i(D_2^i) = \delta_2^i \cup F_i(S_1 \times I)$.

On considère l'espace singulier :

$$K = T_3^{2p+q} \oplus \underbrace{D_2^1}_{F_1(S_1 \times I)} \oplus \dots \oplus \underbrace{D_2^{2p+q}}_{F_{2p+q}(S_1 \times I)} \text{ et}$$

"l'immersion" :

$$\phi = (\text{identité}) \oplus \psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_{2p+q} : K \longrightarrow X_3 .$$

D'après 3°-4, K est collapsible, mais, malheureusement, $M^3(\phi) \neq \emptyset$.

Considérons un espace-quotient de K , K' , défini de la manière suivante :

Pour chaque $x \in J_j \times I$ ($j \in \Sigma$), on considère le point unique $x' \in T_3^{2p+q} \subset X_3$, tel que $F_j(x) = x'$. On identifie chaque x avec x' . Ceci nous donne un espace quotient K' et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & X_3 \\ \pi \downarrow & \searrow \phi' & \\ K' & & \end{array}$$

D'après le lemme 5.3, K' est collapsible. D'autre part, la construction est telle que $M^3(\phi') = \emptyset$.

En appliquant les lemmes 3.4.1 et 1.9 on trouve que :

$\mathbb{O}_3(K'/\Phi')$ = un 3-disque à trous, (où $\mathbb{O}_3(K'/\Phi')$ est un voisinage régulier C^∞ de $K'/\Phi' \hookrightarrow X_3$).

Remarque. Pour pouvoir appliquer les lemmes 3.4.1, 1.9, il faut montrer qu'il existe une variété singulière collapsible Y_3 et une immersion générique : $g : Y_3 \rightarrow X_3$ telle que : $M^3(g) = \emptyset$ et $Y_3/\Psi(g) \cong \mathbb{O}_3(K'/\Phi')$. Ceci est un exercice facile laissé au lecteur. On remarque enfin que $\mathbb{O}_3(K'/\Phi')$ et X_3 sont $*$ -équivalents. Ceci implique, alors, le théorème A. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Abraham and J. Robbin : Tansversal mappings and flows. Benjamin (1967).
- [2] J. Cerf : La topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math France (1961) pp.227-380. (Thèse).
- [3] A. Douady : Exposés 1°, 2°, 3° du Séminaire H. Cartan (1961-1962).
- [4] A. Gramain : Sur les immersions de codimension 1 qui sont des bords (Thèse) Annales de l'E.N.S. 4° , (1970), pp. 111-184.
- [5] М. А. Громов: Стабильное отображения слоенки в многообразия. Изв. Акад. н. С.С.С.Р. (1969) pp. 707-734
- [6] A. Haefliger : Sur les self-intersections des applications différentiables. Bull. Soc. Math. Fr. (1959) pp. 351-359.
- [7] A. Haefliger et V. Poenaru : La classification des immersions combinatoires. Pub. Math. de l'IHES n° 23 (1964) pp. 75-91.
- [8] M. Hirsch : Immersions of Manifolds. Trans. Am. Math. Soc. 93 (1959) pp. 242-276.
- [9] M. Hirsch and B. Mazur : (à paraître)
- [10] C.D. Papakyriakopoulos : On solid tori. Proc. Lond. Mat. Soc. (1957) pp. 281-299.
- [11] C.D. Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann of Math. (1957) pp. 1-26.

- [12] V. Poénaru : Sur les variétés tridimensionnelles, ayant le type d'homotopie de S_3 . Séminaire Ehresmann 1962-63 pp.1-67 (Thèse).
- [13] V. Poénaru : Sur la théorie des immersions. Topology (1962) pp 81-100 ; Regular homotopy and isotopy (miméographié) Harvard 1964.
- [14] V. Poénaru : Homotopy theory and differentiable singularities, dans : Manifolds-Amsterdam 1970 , Springer Lecture Notes n° 197) (1971) pp. 106-132.
- [15] V. Poénaru : Constructions on low-dimensional differentiable manifolds. BAMS (1968), pp. 253-257.
- [15 bis] V. Poénaru : Sur les variétés différentiables de basses dimensions (1968) dans INDAM : Symposia Mathematica II, pp. 363-369 ; Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard, Annali della Sc. Norm. Sup. Pisa (1970) pp. 37-52.
- [16] A. Phillips. Submersions of open manifolds Topology (1967) pp. 171-206.
- [17] S. Smale : The classification of immersions of sphères in euclidian spaces. Ann. of Math. (1959) pp. 327-344.
- [18] S. Smale : Generalized Poincaré conjecture in dimension > 4 . Ann. of Math. (1961) pp. 391-406.
- [19] R. Thom : La classification des immersions Sem. Bourbaki 157 (1957-1958).
- [20] R. Thom : Un lemme sur les applications différentiables. Bull. Soc. Mat. Mex. (1956) pp. 59-71.

- [21] R. Thom : Ensembles et morphismes stratifiés BAMS (1969) pp. 240-284.
- [22] C.T.C. Wall: Geometric connectivity (à paraître).
- [23] J.H.C. Whitehead : Simplicial spaces, nuclei and m-groups. Proc. Lond. Mat. Soc. (1939) pp. 243-327.
- [24] E.C. Zeeman : Séminaire de topologie combinatoire de l'IHES (1962-63).
- [25] А. Г. Купцов : Теория групп. Москва (1953).