

117

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 191-76 56

ENSEMBLES DE CANTOR
ET FEUILLETAGES

Bernard RAYMOND

Publication mathématique d'Orsay

ERRATA

(l.h. = ligne du haut ; l.b. = ligne du bas)

- | | | |
|-------|-------|--|
| p. 11 | 1 lh | lire $\tilde{\gamma}_i$ (au lieu de γ_i) |
| | 2 lh | $\tilde{\gamma}$ (γ) |
| p. 13 | 11 lh | lire : deuxième espèce |
| p. 14 | 8 lh | lire : composante de $S \setminus \mathcal{L}$ |
| p. 16 | 12 lh | ... proprement discontinue et sans point fixe est ... |
| p. 19 | 8 lh | proprement discontinu et sans point fixe (les éléments ...) |
| | 6 lb | $2M = \{0; g, 2n; (\alpha_1, \pm \beta_1), \dots, (\alpha_n, \pm \beta_n)\}$ |
| p. 24 | 10 lh | ... agissant sur $\mathcal{D}(\Gamma) \times S$ par |
| | 9 lb | ... feuilletage de $W(k \# k^*)$ |
| p. 25 | 8 lh | $\{0; g, 2n; (\alpha_i, \pm \beta_i)\}$ |
| p. 26 | 8 lh | $\xi_2 \in [0, 1)$ (au lieu de $\xi_2 \in [0, 1]$) |
| | 15 lh | $\lambda \in [0, 1)$ (au lieu de $\lambda \in [0, 1]$) |
| p. 31 | 2 lh | ... feuilletage de $W(k \# k^*)$ |
| | 13 lh | de Reeb dans \tilde{T} est $W(\#^n k \# k^*)$. |
| p. 37 | 6 lb | de \hat{F}_S par la projection π . |
| p. 38 | 3 lh | ... le feuilletage $\hat{F}_S N$ soit défini ... |
| p. 42 | 3 lh | ... Les ensembles minimaux $\tilde{\pi}$ sont ... |
| p. 44 | 9 lh | lire : ... par translation à gauche (<u>shift</u>) : |
| p. 50 | 4 lb | $\pi_1(M)/Z = \langle a, b; a^2 = b^3 = 1 \rangle$ |
| p. 53 | 9 lh | lire : automorphisme de S^m (dans le groupe de Möbius) ... |
| | 4 lb | $(S^m \setminus K)/\Gamma$ est une somme connexe ... |
| p. 54 | 4 lb | lire : Nous allons définir des groupes de transformations conformes opérant sur la sphère S^m avec ... |
| p. 57 | 1 lh | ... G_U de réalisations de G par des sous-groupes du groupe de Möbius de S^m , et un voisinage U ... |
| p. 59 | 9 lh | ... chaque 2-plan de coordonnées |
| p. 60 | 7 lh | Les disques D_j . (au lieu de : Les disques δ_j) |
| | 16 lh | exprimé (au lieu de : exprimée) |
| p. 61 | 8 lb | $[\bar{a}_1] \leftarrow [\bar{a}_1, \bar{a}_2] \leftarrow \dots \leftarrow [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_\ell] \leftarrow \dots$ |
| p. 63 | 12 lh | $\tilde{G} * \mathbb{Z}_2$ (au lieu de : $G * \mathbb{Z}_2$) |
| | 10 lb | les résultats du § 12 (au lieu de : les constructions du § 12) |
| p. 64 | 2 lb | $RP^2 \# RP^2$ |
| p. 65 | 8 lb | isotopique (au lieu de : isotropique) |

1. - INTRODUCTION

Dans [16] et [17] G. Reeb a étendu aux feuilles d'une variété feuilletée certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques. Sur une variété compacte une notion essentielle dans l'étude du comportement asymptotique des feuilles est celle d'ensemble minimal, c'est-à-dire d'ensemble compact réunion non vide de feuilles et n'admettant pas de sous-ensemble propre ayant les mêmes propriétés. Par le théorème de Zorn, l'adhérence de toute feuille contient au moins un tel ensemble minimal qui peut être soit une feuille compacte, ou toute la variété (supposée connexe), ou un ensemble minimal non trivial dont toute section locale est un ensemble parfait sans point intérieur (donc un ensemble de Cantor si la codimension est un). En généralisant une terminologie classique pour les équations différentielles on appellera ensemble minimal exceptionnel (c'est-à-dire réunion de feuilles exceptionnelles) tout ensemble minimal dont la trace sur une variété transverse est un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un compact métrisable parfait et totalement discontinu (deux ensembles de Cantor sont homéomorphes).

L'objet de ce travail est de montrer que ces ensembles minimaux qualifiés d'exceptionnels peuvent en fait se rencontrer dans les feuilletages d'un grand nombre de variétés fermées, et éventuellement avec une propriété forte de stabilité structurelle si la dimension des feuilles est au moins égale à 3. Les principaux résultats sont les théorèmes d'existence suivants, ainsi que le théorème B § 12 et son corollaire de stabilité.

THEOREME 1. Toute variété fermée de dimension 3 admet des feuilletages de codimension un et de classe C^∞ contenant des ensembles minimaux exceptionnels.

THEOREME 2. Toute variété fermée de dimension 3 admet des feuilletages avec singularités, de codimension un et de classe C^∞ , ne contenant pas de feuilles fermées (pour chaque variété, les ensembles minimaux peuvent être des deux types : exceptionnels ou toute la variété).

THEOREME 3. Toute sphère de dimension impaire S^{2q+1} , $q \geq 2$, admet des feuilletages de codimension un et de classe C^0 sans feuilles fermées, avec un nombre arbitraire $n > 0$ d'ensembles minimaux exceptionnels.

Pour les trajectoires des champs de vecteurs sur les surfaces fermées, on sait que ces ensembles minimaux exceptionnels ne peuvent exister sur la sphère (H. Poincaré, 1880 ; I. Bendixson, 1901), ni si le champ est de classe C^2 (A. Denjoy, 1932 ; A.J. Schwartz, 1963). Les recherches de Poincaré sur les courbes intégrales des équations différentielles sur le tore (1895) ont probablement été influencées par ses résultats antérieurs sur certains groupes discrets de transformations analytiques du cercle ou de la sphère de Riemann (groupes fuchsiens, 1891 [15]) où il reconnut l'existence d'ensembles limites parfaits et totalement discontinus. En fait, les premiers exemples de tels groupes apparaissent dans la thèse de F. Schottky (1875, [22]) et étaient déjà connus de B. Riemann.

En 1964, en réponse à une question de G. Reeb [18], R. Sacksteder exhibe un ensemble minimal non trivial dans un feuilletage de codimension un [20] et démontre une généralisation profonde des théorèmes de Denjoy et Schwartz sur les feuilletages de classe C^2 [21]. Le feuilletage décrit dans [20] est transverse aux fibres du fibré trivial en cercles au-dessus de la somme connexe de deux tores, avec un groupe structural à deux générateurs (cet exemple C^∞ peut facilement être rendu analytique réel comme l'observe G. Hector dans [4]). De façon analogue, les résultats classiques de H. Poincaré et F. Klein sur les groupes fuchsiens non horocycliques (c'est-

à-dire ayant un ensemble de Cantor de points limites) fournissent une construction simple de toute une classe de variétés orientables de dimension 3 admettant des feuilletages analytiques à ensemble minimal non trivial : ce résultat de base (théorème A, § 5) étend à certains espaces de Seifert (avec fibres singulières) une construction déjà étudiée par J. Wood [30], [31] dans le cas de fibrés en cercles localement triviaux.

L'idée de la démonstration du théorème 1 est alors de choisir dans cette classe une variété qui puisse être changée en la sphère S^3 par chirurgie en-dehors de l'ensemble minimal (lemme 8).

La même technique de chirurgie est utilisée dans la démonstration du théorème 2, qui peut être regardé comme un nouveau contre-exemple à une généralisation possible du théorème classique de S.P. Novikov sur les feuilletages de S^3 . Un autre exemple de structure d'Haefliger sans feuille fermée sur S^3 a été donné par H. Rosenberg et R. Roussarie dans [19], mais sans renseignement sur le comportement asymptotique des feuilles.

Par l'intermédiaire des feuilletages singuliers décrits par le théorème 2, le théorème 3 découle des résultats de H.B. Lawson [8] et I. Tamura [26] sur la fibration du complément de certains noeuds dans les sphères de dimension impaires. Le même théorème a été annoncé indépendamment par P. Schweitzer. Ces feuilletages ont seulement un fibré tangent continu, et le problème de l'existence de feuilletages C^1 reste ouvert.

Finalement, on construit des feuilletages avec des ensembles minimaux exceptionnels qui sont structurellement stables sous l'effet de C^1 -perturbations du champ de plans tangents. Ceci est obtenu en toute dimension $m \geq 3$ et toute codimension $p \geq 1$ par une généralisation de certains groupes fuchsien (théorème B, § 12). Cette propriété est un exemple typique de l'effet de la dimension des feuilles en dynamique topologique, puisque, à l'exception des orbites périodiques stables ou des points fixes génériques, les attracteurs stables des systèmes dynamiques classiques ne sont pas des ensembles minimaux et contiennent un ensemble dense d'orbites périodiques. La construction utilise une limite projective comme dans les modèles usuels de la dynamique symbolique.

2. - SOMME CONNEXE DE NOEUDS DANS LA SPHERE S^3

Afin de décrire la chirurgie mentionnée dans l'introduction, nous rappelons dans ce paragraphe quelques propriétés élémentaires des noeuds en dimension 3.

Le complément fermé d'un noeud k est la variété à bord $M(k)$ obtenue à partir de la sphère orientée S^3 en retirant un voisinage tubulaire ouvert $T(k)$ d'un cercle plongé orienté (noté aussi k) qui est un représentant du type de noeud k . Son groupe fondamental $\pi_1 M(k)$ est le groupe du noeud, $G(k)$. Si k n'est pas le noeud trivial et si le point-base est choisi sur $\partial M(k)$, l'injection de ∂M dans M induit un morphisme injectif de $\pi_1(\partial M)$ dans $\pi_1(M)$ et un morphisme surjectif de $H_1(\partial M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Ce groupe $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$ sera rapporté à la base standard (m, ℓ) , où m est la classe des méridiens (bords de disques dans $T(k)$, ayant un nombre d'entrelacement $+1$ avec k), et ℓ est la classe des longitudes (homologues à k dans $T(k)$ et à zéro dans $M(k)$).

Le cobordisme $W(k)$ désignera la variété obtenue à partir de $M(k)$ en retirant un voisinage tubulaire ouvert $T(\mu)$ d'une courbe fermée μ isotope à un méridien (fig. 1). Notons $\partial_1 W$ et $\partial_2 W$ les composantes du bord de W , avec $\partial_1 W$ identifié à ∂M par l'inclusion $W \rightarrow M$; définissons dans $H_1(\partial_i W, \mathbb{Z})$ les bases standard (m_i, ℓ_i) par : $(m_1, \ell_1) = (m, \ell)$ sous l'identification par inclusion ;

$$(m_2, \ell_2) \sim (m_1, -\ell_1) \text{ à travers } W(k).$$

La remarque suivante est triviale :

LEMME 1. Il y a un difféomorphisme de $W(k)$ sur lui-même préservant l'orientation et échangeant les composantes du bord avec leurs bases standard.

Démonstration : Prenons un collier $j : [0, 1] \times S^1 \times S^1 \rightarrow M(k)$ envoyant $(1 \times \cdot \times S^1)$ sur un méridien et $(1 \times S^1 \times \cdot)$ sur une longitude. Dans le tore épaissi muni de ce paramétrage, supprimons le tube $D \times S^1$, où D est un disque ouvert dans l'anneau

$(0,1) \times S^1$. Il suffit de considérer un difféomorphisme du disque à 2 trous $([0,1] \times S^1) \setminus D$ qui échange les composantes $1 \times S^1$ et ∂D du bord et laisse fixe $0 \times S^1$.

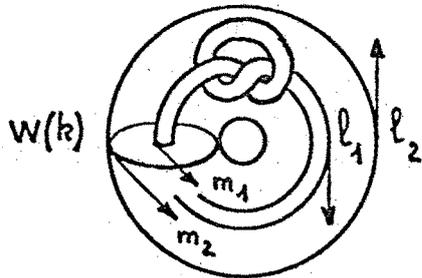


Figure 1

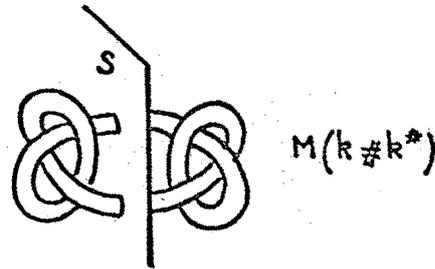


Figure 2

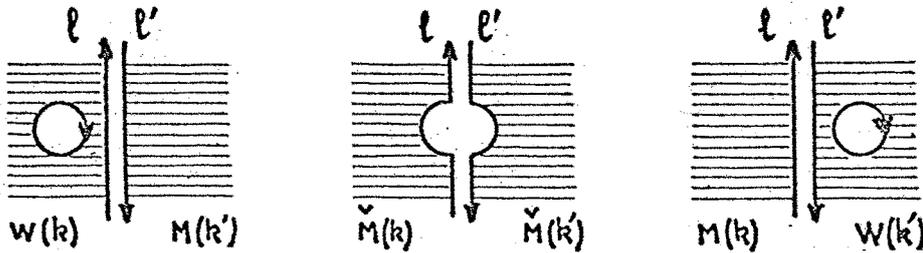


Figure 3

Somme connexe de deux noeuds. Soient B et B' les deux boules ouvertes bordées par une sphère S^2 plongée dans S^3 . Soient k et k' deux noeuds représentés par deux courbes fermées dans B et B' respectivement, à l'exception d'un arc commun a situé sur S^2 et recevant des orientations opposées de k et de k' . La suppression de a fournit un représentant de la somme connexe $k \# k'$. Supposons que ce représentant de $k \# k'$ soit lisse et coupe transversalement la sphère S^2 . Les variétés (à bord anguleux) $\check{M}(k) = \bar{B} \cap M(k \# k')$ et $\check{M}(k') = \bar{B}' \cap M(k \# k')$ sont deux boules plombées homéomorphes à $M(k)$ et $M(k')$. Elles sont recollées le long de l'anneau méridien $S^2 \cap M(k \# k')$ avec identification des méridiens m et m' et (avec orientations opposées) des arcs de longitude. En poussant le trou torique à l'intérieur de $M(k)$ ou de $M(k')$ on obtient (fig. 3) :

FORMULES DE RECOLLEMENT : $M(k \# k') = M(k) \cup_f W(k') = W(k) \cup_f M(k')$

$$W(k \# k') = W(k) \cup_f W(k')$$

où le difféomorphisme de recollement $f : \partial_i M \rightarrow \partial_j M'$ qui identifie une paire de composantes du bord satisfait la condition suivante : l'application induite $f_* : H_1(\partial_i M) \rightarrow H_1(\partial_j M')$ est définie par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dans les bases standard (d'après le lemme 1, le choix des composantes à appairer est indifférent).

Double amphicheiral d'un noeud. Soit $-k$ le noeud opposé à k (en renversant l'orientation sur le cercle) et k^* l'image de k par réflexion. Alors la variété fermée $M(k) \cup_f M(-k^*)$, avec la même condition que ci-dessus pour f , est simplement le double $2M(k)$ de la variété à bord $M(k)$. Le complément du noeud $k \# -k^*$ s'obtient en retirant un tube méridien $T(\mu)$ de la variété fermée $2M(k)$. Dans la suite, nous ne considérons que des noeuds inversibles ($k = -k$), c'est-à-dire que la variété $M(k)$ admet un autohoméomorphisme renversant les méridiens et les longitudes. C'est pourquoi nous noterons $k \# k^*$ le noeud amphicheiral obtenu par ce procédé de duplication (fig. 2).

Nous pouvons maintenant indiquer le principe de la démonstration du théorème 1 : soit k un noeud inversible, F un feuilletage de $M(k)$ transverse au bord $\partial M(k)$, et μ un cercle méridien transverse au feuilletage. En prenant le double, le feuilletage F peut être étendu en un feuilletage $2F$ dans $2M(k)$. Alors par le procédé usuel consistant à retirer un tube transverse $T(\mu)$, modifier le feuilletage le long du nouveau bord [29], et recoller une composante de Reeb (avec échange des méridiens et des longitudes) on obtient un feuilletage de S^3 où la composante de Reeb est nouée comme $k \# k^*$.

3. - FIBRATION ET FEUILLETAGE DU COMPLEMENT D'UN NOEUD TORIQUE

Dorénavant k sera un noeud torique de type (α_1, α_2) . Dans le cas le plus simple $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, k est un noeud trèfle, et $k \neq k^*$ est le noeud carré dessiné sur la figure 2.

Pour les noeuds toriques, la variété $M(k)$ a une structure bien connue d'espace fibré en cercles au sens de Seifert, complètement déterminée par la Z-surface (Zerlegungsfläche), ici un disque D^2 , et le type de chaque fibre singulière S_i (ordre α_i et valence β_i). Rappelons le calcul de ces invariants, inspiré de l'article de Seifert [24].

Ecrivons la sphère de dimension 3 comme

$$S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}.$$

Pour toute paire (α_1, α_2) d'entiers premiers entre eux ($\alpha_i > 1$), la fibration de Seifert de S^3 , de type (α_1, α_2) , est le feuilletage par cercles qui sont les orbites de l'action $\rho : S^1 \times S^3 \rightarrow S^3$ définie par

$$\rho(\exp 2\pi it; z_1, z_2) = (z_1 \exp 2\pi \alpha_1 it, z_2 \exp 2\pi \alpha_2 it).$$

Les orbites des points $(1,0)$ et $(0,1)$ sont deux cercles S_1 et S_2 , non noués et simplement enlacés. Ce sont des orbites singulières, d'ordre α_1 et α_2 (S_i est couverte α_i fois par les orbites voisines). Toute autre orbite est nouée comme un noeud torique k de type (α_1, α_2) . En supprimant de S^3 un tube invariant $T(k_0)$ autour d'une orbite non singulière k_0 , on obtient une copie de $M(k)$ munie d'une fibration de Seifert. Soient $M(S_1, S_2)$ et $M(k_0, S_1, S_2)$ les compléments fermés des enlacements $\{S_1, S_2\}$ et $\{k_0, S_1, S_2\}$, obtenus de la même façon en supprimant les tubes invariants disjoints $T(S_1)$ et $T(S_2)$ définis par $|z_2|^2 < \epsilon$ et $|z_1|^2 < \epsilon$. La variété $M(k_0)$ et sa structure périphérique sont alors complètement décrites par le lemme suivant :

LEMME 2. Soit Σ^1 la 2-sphère avec 3 trous, et $\{s_0, s_1, s_2\}$ les composantes orientées de son bord (avec la relation homologique $s_0 + s_1 + s_2 = 0$). Soit (β_1^1, β_2^1) une paire d'entiers rationnels tels que $\alpha_1 \beta_2^1 + \alpha_2 \beta_1^1 = 1$ (où α_1, α_2) est une paire donnée d'entiers positifs premiers entre eux), et soit (β_1, β_2) la paire unique telle que

$$\beta_i \equiv \beta_i^1 \pmod{\alpha_i} \quad 0 < \beta_i < \alpha_i \quad .$$

Alors

- (i) La variété $M(k_0, S_1, S_2)$ est le fibré en cercles trivial au-dessus de Σ^1 (avec les orbites de Seifert comme fibres) ;
- (ii) Il y a une trivialisation $\Sigma^1 \times S^1 \rightarrow M(k_0, S_1, S_2)$ telle que, pour $i = 0, 1, 2$ les bases (s_i, k) induites dans $H_1 \partial_i M(k_0, S_1, S_2)$ sont liées aux bases standard par

$$m_0 = s_0 - k \quad m_1 = \alpha_1 s_1 + \beta_1 k \quad m_2 = \alpha_2 s_2 + \beta_2 k$$

$$\ell_0 = -\alpha_1 \alpha_2 s_0 + (\alpha_1 \alpha_2 + 1) k$$

(Comme corollaire deux fibres non singulières ont un nombre d'entrelacement $\alpha_1 \alpha_2$ puisque $k = \alpha_1 \alpha_2 m_0 + \ell_0$).

Démonstration : Il y a une paire unique (β_1^1, β_2^1) telle que

$$0 < \beta_1^1 < \alpha_1 \quad -\alpha_2 < \beta_2^1 < 0$$

Alors $\beta_1 = \beta_1^1 \quad \beta_2 = \beta_2^1 + \alpha_2$.

Considérons deux paramétrisations du tore épaissi $M(S_1, S_2)$ par $[\epsilon, 1-\epsilon] \times S^1 \times S^1$, où la première coordonnée est $|z_1|^2$. Les autres courbes coordonnées sont respectivement :

Les courbes coordonnées (z_1, z_2) , définissant la base (m_1, m_2) .

Des sections de la fibration de Seifert et les fibres, définissant la base (s^1, k) . La section est choisie de façon que

$$\begin{aligned} s^1 &= \beta_2^1 m_1 - \beta_1^1 m_2 & m_1 &= \alpha_1 s^1 + \beta_1^1 k \\ k &= \alpha_2 m_1 + \alpha_1 m_2 & m_2 &= -\alpha_2 s^1 + \beta_2^1 k \end{aligned}$$

La section annulaire $[\epsilon, 1-\epsilon] \times S^1$ est changée en Σ^1 en ôtant un disque. Avec les identifications par inclusion $s_1^1 \rightarrow s^1$ et $s_2^1 \rightarrow -s^1$ les méridiens sont définis par

$$m_0 = s_0^1 \quad m_1 = \alpha_1 s_1^1 + \beta_1^1 k \quad m_2 = \alpha_2 s_2^1 + \beta_2^1 k \quad .$$

La section peut alors être modifiée de façon que

$$s_0^1 = s_0 - k \quad s_1^1 = s_1 \quad s_2^1 = s_2 + k \quad .$$

En recollant les tubes $T(S_1)$ et $T(S_2)$, on obtient les relations homologiques dans $M(k_0)$:

$$k = (\alpha_1 \beta_2^1 + \alpha_2 \beta_1^1) k = -\alpha_1 \alpha_2 (s_1^1 + s_2^1) = \alpha_1 \alpha_2 s_0^1 = \alpha_1 \alpha_2 m_0 \quad .$$

Il en résulte que les longitudes sur $\partial M(k_0)$ sont données par

$$\ell_0 = -\alpha_1 \alpha_2 m_0 + k = -\alpha_1 \alpha_2 s_0 + (\alpha_1 \alpha_2 + 1) k \quad .$$

Par le théorème de Van Kampen, cette décomposition de $M(k)$ donne aussi la présentation usuelle du groupe du noeud :

$$G(k) = \langle a_1, a_2 ; a_1^{\alpha_1} = a_2^{\alpha_2} \rangle \quad .$$

Son centre $Z(k)$ est le sous-groupe infini cyclique engendré par la classe d'homotopie de la fibre : $[k] = a_1^{\alpha_1} = a_2^{\alpha_2}$. Le groupe quotient $G(k)/Z(k)$ est le produit libre de deux groupes cycliques :

$$G(k)/Z(k) = \langle A_1, A_2 ; A_1^{\alpha_1} = A_2^{\alpha_2} = 1 \rangle$$

où A_i représente la classe d'homotopie $[s_i]$ modulo $[k]$ d'une section $(s_i \times \circ)$ dans n'importe quelle trivialisations de $M(k_0, S_1, S_2)$ (cette classe est modifiée par une puissance de $[k]$ dans un changement de trivialisations).

Nous pouvons maintenant donner une description des feuilletages de $M(k)$ transverses aux fibres (une construction en sera donnée au § 5 à l'aide d'un revêtement de $M(k)$).

Soit S_x la fibre au-dessus d'un point base situé sur $\partial M(k)$, et soit F un feuilletage transverse aux fibres. Il induit sur $\partial T(S_1)$ et $\partial T(S_2)$ un feuilletage par méridiens, de pentes $\beta_i/\alpha_i \pmod{1}$ dans n'importe quelle trivialisations de

$M(k, S_1, S_2)$. Par le procédé usuel de relèvement dans les feuilles des lacets basés en x , il définit une antireprésentation $\bar{\Phi}$ de $G(k)/Z(k)$ dans le groupe des difféomorphismes de S_x , telle que A_i est envoyé sur un difféomorphisme périodique de nombre de rotation β_i/α_i .

Inversement soient $\{f_1\}$ et $\{f_2\}$ deux groupes cycliques de difféomorphismes du cercle, conservant l'orientation, où chaque générateur f_i a un nombre de rotation égal à $1/\alpha_i$. Alors il existe un feuilletage de $M(k)$ tel que $\bar{\Phi}(A_i) = f_i^{\beta_i}$ (la différentiabilité de ces feuilletages résulte de leur construction au § 5). Le groupe de difféomorphismes de la fibre S_x sera noté $\Gamma' = \{f_1, f_2\}$, et le feuilletage correspondant $F(\Gamma')$ ou $F(f_1, f_2)$. Il est défini à conjugaison près par un difféomorphisme déplaçant les points le long des fibres. Un point important pour la construction envisagée est le feuilletage périphérique :

LEMME 3. Soit $F(f_1, f_2)$ le feuilletage de $M(k)$ défini ci-dessus. Alors le feuilletage qu'il induit sur le bord $\partial M(k)$ est associé au difféomorphisme

$$p = f_2^{\alpha_2 - \beta_2} f_1^{\alpha_1 - \beta_1}$$
(défini à conjugaison près), et ses feuilles compactes correspondant aux éventuels points fixes de p sont des méridiens.

Démonstration : Considérons la trivialisatation de $M(k, S_1, S_2)$ définie dans le lemme 2, et faisons deux coupures c_1 et c_2 transformant la section Σ' en une région simplement connexe R' , dont le bord est la courbe fermée homotope à zéro $\gamma = s_0 * \gamma_2 * \gamma_1$ basée en x (figure 6 où s_0 est noté σ). On peut supposer que chaque lacet $\gamma_i = c_i * s_i * c_i^{-1}$ est un représentant de A_i , de sorte que son relèvement dans les feuilles définit le difféomorphisme $f_i^{\beta_i}$ de S_x . Alors le difféomorphisme p résultant du relèvement de s_0 est lié aux f_i par $f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} p = \text{id}$.

Supposons maintenant que p possède un point fixe $\zeta \in S_x$, et soit $2b\pi$ la rotation dans la fibre le long du relèvement \tilde{s}_0 de s_0 d'origine ζ . Dans la

trivialisation choisie, la rotation le long de chacun des relèvements γ_i est comprise (strictement) entre 0 et 2π . Puisque la rotation totale le long de γ est nulle, nous avons

$$-4\pi < 2b\pi < 0$$

Donc b est égal à -1 , qui est la pente des méridiens dans cette trivialisation.

4. - GROUPES FUCHSIENS ET REVETEMENTS

Ce paragraphe passe en revue la terminologie et les résultats de base concernant les groupes fuchsiens. Malgré l'existence d'une abondante littérature sur le sujet depuis les travaux célèbres de H. Poincaré et F. Klein, le traité de R. Fricke et F. Klein [2] demeure un outil précieux pour l'étude géométrique de ces groupes. D'autres références classiques sont [1], [9] et [12].

Soit Ω le groupe des automorphismes projectifs de la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$. Si $\mathbb{C}P^1$ est décrit à l'aide d'une seule carte (avec $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \infty$, où ∞ est le pôle de la projection stéréographique) un élément $g \in \Omega$ est une fonction homographique $z \mapsto g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$, avec $ad - bc \neq 0$, et sera identifiée à la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ définie à un facteur complexe près. Ainsi Ω est isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$. Les éléments de Ω sont classés comme suit

Si g a un seul point fixe ζ , g est une transformation parabolique et

$$\frac{1}{g(z) - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + \tau$$

Dans le cas de deux points fixes ζ, ζ' elle peut s'écrire

$$\frac{g(z) - \zeta}{g(z) - \zeta'} = \kappa \frac{z - \zeta}{z - \zeta'}$$

Le birapport constant $\kappa = (g(z), z, \zeta, \zeta')$ ou son inverse est le multiplicateur de g . En posant $\kappa = \rho \exp i\theta$, $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, la transformation g est elliptique si $\rho = 1$, $\theta \neq 0$; hyperbolique si $\rho \neq 1$, $\theta = 0$; loxodromique si $\rho \neq 1$, $\theta \neq 0$.

Tout $g \in \Omega$ peut être plongé dans un flot $t \mapsto g^t$, $t \in \mathbb{R}$, en remplaçant τ par $t\tau$ ou κ par κ^t . En dehors des points fixes les trajectoires de ce flot sont respectivement : un faisceau de cercles tangents en ζ (cas parabolique), un faisceau de cercles à points limites ζ, ζ' (cas elliptique), les arcs $\zeta\zeta'$ d'un faisceau à points de base ζ, ζ' (cas hyperbolique), une famille de loxodromies à points asymptotes ζ, ζ' (spirales logarithmiques si $\zeta' = \infty$).

Groupes à cercle principal. Soit S un cercle bordant deux disques ouverts D et D^* dans $\mathbb{C}P^1$, et soit Ω_S le sous-groupe de Ω constitué des éléments $g \in \Omega$ appliquant D sur D (et donc D^* sur D^*). Deux tels sous-groupes Ω_S et $\Omega_{S'}$ sont conjugués dans Ω . Par changement de carte on peut supposer que $D = U$, le disque unité $|z| < 1$, ou $D = H$, le demi-plan supérieur. Dans ce cas $\Omega_{\mathbb{R}}$ s'identifie à $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\}$. Une transformation $g \in \Omega_S$ ne peut pas être loxodromique et est de l'un des types suivants :

- (h) une transformation hyperbolique avec points fixes ζ, ζ' situés sur le cercle principal S .
- (p) une transformation parabolique avec point fixe $\zeta \in S$, telle que $S \setminus \{\zeta\}$ soit une trajectoire de g^t .
- (e) une transformation elliptique dont les points fixes ξ, ξ^* sont inverses l'un de l'autre par rapport à S .

Un groupe kleinéen Γ est un sous-groupe de type fini de Ω qui est discontinu dans un ouvert \mathcal{D} de $\mathbb{C}P^1$ (c'est-à-dire pour tout $z \in \mathcal{D}$ l'orbite Γz est une partie discrète de \mathcal{D}). Les transformations elliptiques d'un tel groupe sont donc toujours périodiques. Un groupe fuchsien est un groupe kleinéen avec cercle principal S .

Ensemble limite ([9], chap. 3). Un point limite d'un groupe kleinéen Γ est un point d'accumulation d'une orbite de Γ . L'ensemble des points limites est l'ensemble limite $\mathcal{L}(\Gamma)$, son complémentaire $\mathcal{D}(\Gamma)$ est l'ensemble de discontinuité. Les groupes avec 0, 1 ou 2 points limites sont appelés quelquefois groupes élémentaires.

Ils ont été classés par Klein (la liste en est donnée dans [1], chap. 6). Si $\mathcal{L}(\Gamma)$ contient plus de deux points, c'est un ensemble parfait qui est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des transformations hyperboliques ou loxodromiques de Γ . C'est l'unique ensemble minimal de Γ , c'est-à-dire que l'orbite Γz est dense dans $\mathcal{L}\Gamma$ pour tout $z \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Dans le cas des groupes fuchsien Poincaré a démontré que ou bien $\mathcal{L} = S$, le cercle principal, ou bien \mathcal{L} est un sous-ensemble de S sans point intérieur. Les groupes fuchsien sont ainsi divisés en deux classes :

(1) Les groupes de première espèce (groupes horocycliques, Grenzkreisgruppen) admettent tout le cercle S pour ensemble limite, et ont donc deux domaines de discontinuité D et D^* .

(2) Les groupes de deuxième espèce ont un ensemble de Cantor $K \subset S$ pour ensemble limite, à l'exception des quatre types de groupes fuchsien élémentaires (groupes cycliques elliptiques, paraboliques, hyperboliques, et le produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ engendré par deux transformations elliptiques de période deux n'ayant pas les mêmes points fixes). Ces groupes ont un domaine de discontinuité non simplement connexe $\mathcal{D} = \mathbb{C}P^1 \setminus K$.

Région fondamentale ([9], chap. 4 et 7). Une région fondamentale d'un groupe Γ discontinu dans \mathcal{D} est un ouvert maximal de \mathcal{D} , non nécessairement connexe, ne contenant pas de points distincts équivalents par Γ (son existence résulte du théorème de Zorn). Pour les groupes fuchsien, Poincaré a démontré l'existence de régions fondamentales (les polygones fondamentaux) dont les côtés sont des arcs de cercle orthogonaux à S . La construction de Poincaré (polygones normaux) est basée sur la géométrie non euclidienne dans D ; la méthode des cercles isométriques due à R.L. Ford [1] s'applique aussi aux groupes kleinéens. L'hypothèse que Γ admet un nombre fini de générateurs implique l'existence d'un polygone fondamental R ayant un nombre fini de côtés (ce résultat de M. Heins [5] résout un problème posé depuis Poincaré). Un groupe fuchsien est de deuxième espèce si et seulement si R rencontre S le long de certains arcs, appelés les côtés libres de la demi-région $R^+ = R \cap D$.

Les sommets de R^+ sont les points fixes de générateurs elliptiques et paraboliques de Γ (répartis en cycles par la Γ -équivalence), les extrémités des côtés libres, et éventuellement quelques sommets accidentels. Les côtés autres que les côtés libres sont conjugués deux-à-deux, d'où l'on peut déduire une présentation finie de Γ ([2] p. 210-398 ; [9] chap. 7). Dans le cas des groupes non horocycliques, cette présentation fait intervenir des générateurs hyperboliques libres : une transformation hyperbolique $h \in \Gamma$ est dite libre si elle engendre le stabilisateur de sa paire de points fixes (ζ, ζ') , et si ces points sont les extrémités d'une composante $S \setminus \mathcal{L}$ (si Γ n'est pas un groupe élémentaire, on dira qu'un tel arc (ζ, ζ') est une lacune de l'ensemble de Cantor $K = \mathcal{L}$, et que ζ et ζ' sont des points extrémaux de K).

Revêtements branchés. Nous faisons désormais l'hypothèse que Γ ne contient pas d'élément parabolique. Ce cas générique se produit si et seulement si le polygone fondamental n'a pas de sommet parabolique ([9] p. 151). Si Γ est horocyclique, \mathcal{D} désignera un disque principal D et R un polygone normal relatif à \mathcal{D} . Si Γ n'est pas horocyclique, \mathcal{D} sera le domaine entier $CP^1 \setminus \mathcal{L}$, et R un polygone normal entier (ainsi ∂R n'est pas nécessairement connexe). L'espace des orbites \mathcal{D}/Γ est alors une surface fermée orientable Σ_g de genre g , provenant de R par identification des paires de côtés conjugués. La projection $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$ est une application de revêtement avec un nombre fini de points de branchement $\bar{\xi}_i$ (les images des sommets elliptiques de R) qui apparaissent par paires $(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i^*)$ si Γ n'est pas horocyclique. L'indice de branchement α_i de $\bar{\xi}_i$ est l'ordre du groupe d'isotropie $\{g_i\}$ d'un représentant ξ_i de $\bar{\xi}_i$. Soit $n \geq 0$ le nombre de classes de conjugaison dans Γ des sous-groupes cycliques elliptiques, c'est-à-dire le nombre de points de branchement ou de paires de points de branchement selon que Γ est de première ou de deuxième espèce. Le symbole $(g, n ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sera appelé la signature de Γ .

Supposons que Γ soit de deuxième espèce. Le demi-espace d'identification $\Sigma^+ = (D \setminus \mathcal{L})/\Gamma$ est une surface de genre g' dont le bord a r composantes σ_j

résultant des côtés libres de R^+ par une identification de leurs extrémités. Puisque l'espace-quotient Σ_g est le double de Σ^+ , le genre g satisfait la relation $g = 2g' + r - 1$. Dans ce cas on peut considérer une signature plus précise $(g', r, n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si R^+ est un polygone canonique $([2], [9])$ on obtient une présentation de Γ par n générateurs elliptiques g_i , r générateurs hyperboliques libres h_j et $2g'$ générateurs hyperboliques $k_{\mathcal{L}}, k_{\mathcal{L}}^{-1}$, avec comme relations :

$$g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2} = \dots = g_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n g_i \prod_{j=1}^r h_j \prod_{\mathcal{L}=1}^{g'} k_{\mathcal{L}} k_{\mathcal{L}}^{-1} = 1$$

Les éléments hyperboliques libres de Γ sont les conjugués de h_j et h_j^{-1} (c'est-à-dire les automorphismes du revêtement $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$ associés aux composantes du bord de Σ^+). Le genre du groupe Γ est défini généralement comme étant le nombre g' et non g .

En résolvant la dernière relation de définition par rapport à l'un des générateurs hyperboliques libres h_j , on obtient une présentation de Γ à l'aide de $2g' + r - 1 = g$ générateurs hyperboliques, et n générateurs elliptiques g_i , avec pour seules relations $g_i^{\alpha_i} = 1$. On peut ainsi énoncer :

LEMME 4. Tout groupe fuchsien Γ de seconde espèce, sans élément parabolique, et de signature $(g, n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est isomorphe au produit libre de g facteurs infinis cycliques et n facteurs cycliques \mathbb{Z}_{α_i} .

5. - FEUILLETAGE DE CERTAINS ESPACES DE SEIFERT

Fibrations de Seifert du tore plein. Considérons le tore plein paramétré par

$$D^2 \times S^1 = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2; |z| \leq 1, |\zeta| = 1\}$$

et définissons une action de $S^0(2)$ par

$$(\exp 2\pi i t ; z, \zeta) \mapsto (z \exp 2\pi \nu i t, \zeta \exp 2\pi \alpha i t)$$

où α et ν sont deux entiers premiers entre eux, $0 < \nu < \alpha$. L'orbite du centre est une orbite singulière d'ordre α , les autres sont des orbites principales. L'application de Poincaré de l'orbite singulière est la rotation $2\pi \frac{\nu}{\alpha}$ du disque D^2 . Sur le tore du bord soit k une orbite principale (orientée par S^1), m un méridien $\{\partial D^2 \times \cdot\}$ et s une section telle que

$$m \sim \alpha s + \beta k \quad \text{avec} \quad \beta \nu \equiv 1 \pmod{\alpha} \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Ce modèle est appelé fibration de type (α, β) du tore plein.

Une construction équivalente de ce feuilletage par cercles est la suivante :

le groupe cyclique \mathbb{Z}_α engendré par $\omega = \exp \frac{2i\pi}{\alpha}$ agit sur $D^2 \times S^1$ par

$$(\omega ; z, \zeta) \mapsto (\omega z, \omega^{-\beta} \zeta).$$

Puisque cette action proprement discontinue (donc sans point fixe) est compatible avec les projections sur chaque facteur, elle induit sur l'espace-quotient $D^2 \times S^1 / \mathbb{Z}_\alpha$ (difféomorphe à $D^2 \times S^1$) deux feuilletages transverses : un feuilletage par disques D^2 et un feuilletage par cercles. Le feuilletage induit sur le bord (ou sur n'importe quel tore $|z| = \rho$) est obtenu en identifiant $(\omega z, \zeta)$ à $(z, \omega^\beta \zeta)$, donc il a pour pente $\frac{\beta}{\alpha} \pmod{1}$ par rapport à n'importe quelle trivialisaton ayant les fibres comme second facteur. Le tore plein $D^2 \times S^1 / \mathbb{Z}_\alpha$ est donc feuilleté par les orbites d'une fibration de type (α, β) .

Espaces de Seifert orientés. Un espace fibré de Seifert, de classe C^r

est une variété compacte de dimension 3 munie d'une C^r -action de S^1 sans point fixe. Considérons le modèle suivant :

Soient $b \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{N}$ des entiers arbitraires, et n paires (α_i, β_i) d'entiers premiers entre eux, $0 < \beta_i < \alpha_i$. Soit Σ_g la surface fermée orientable de genre g et $\Sigma_g^! = \Sigma_g \setminus \bigcup_{i=0}^n D_i$ la surface obtenue en ôtant $(n+1)$ disques D_i ($0 \leq i \leq n$) avec des bords orientés $s_i = \partial D_i$. Sur le produit $M^! = \Sigma_g^! \times S^1$

considérons l'action standard de $SO(2)$ (agissant sur le facteur S^1). Pour chaque valeur de l'indice i , $1 \leq i \leq n$, recollons le long du bord $\partial D_i \times S^1$ un tore plein muni d'une fibration de type (α_i, β_i) par un difféomorphisme équivariant tel que

$$m_i \sim \alpha_i s_i + \beta_i k_i .$$

Enfin le long du dernier tore $\partial D_0 \times S^1$ recollons un tore plein muni d'une action standard de $SO(2)$ selon la règle

$$m_0 \sim s_0 + b k_0 .$$

Alors un résultat fondamental de la théorie des espaces de Seifert [14], [24], [27], est que toute fibration de Seifert d'une variété fermée orientable M^3 peut être conjuguée à un modèle de ce type (par un C^r -difféomorphisme conservant l'orientation) pour une valeur unique du système d'invariants et peut être désignées par un symbole tel que

$$\{ b ; g, n ; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \}$$

(d'autres paramètres sont nécessaires dans le cas non-orientable). Plus généralement ce modèle est valable pour tout feuilletage par cercles d'une variété fermée orientable de dimension 3, selon un résultat profond dû à D.B.A. Epstein (Ann. of Math. 95, pp. 66-82). La surface fermée Σ_g (la Z-surface) est l'espace transverse de ce feuilletage. L'entier b , qui définit l'obstruction à une section globale, est la classe caractéristique du $SO(2)$ -fibré au-dessus de $\Sigma^n = \Sigma^g \cup D_0$, avec des sections données s_1, \dots, s_n (une classe de cohomologie dans $H^2(\Sigma^n, s_1 \cup \dots \cup s_n ; \mathbb{Z})$). Par le lemme 2, la fibration de type (α_1, α_2) de la sphère S^3 est caractérisée par

$$\{ -1 ; 0, 2 ; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \} \text{ avec } -\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 = 1 .$$

Plus généralement ([24], th. 12) Seifert démontre qu'une variété de Seifert orientable M^3 est une sphère d'homologie (distincte de S^3) si et seulement si

$$M = \{ b ; 0, n ; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \} \quad n \geq 3$$

où les α_i sont des entiers premiers deux à deux satisfaisant à

$$b \alpha_1 \dots \alpha_n + \beta_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \alpha_1 \beta_2 \dots \alpha_n + \dots + \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \beta_n = 1 .$$

Espaces de Seifert amphicheiraux. On dira qu'un espace de Seifert orientable est amphicheiral si c'est le double $2M$ d'un espace de Seifert M avec bord. Ceci a lieu si et seulement si $b = 0$ et si les fibres singulières apparaissent par paires de types (α_i, β_i) et $(\alpha_i, \alpha_i - \beta_i)$. Puisque β peut être défini mod α quand la valeur de b est précisée, un tel espace amphicheiral sera noté

$$2M = \{0 ; g, 2n ; (\alpha_1, \pm\beta_1), \dots, (\alpha_n, \pm\beta_n)\} .$$

En particulier $\{0 ; g, 0\}$ est le fibré trivial au-dessus de Σ_g . Finalement on peut dire qu'un feuilletage (de codimension un) de $2M$ est amphicheiral si c'est le double $2F$ d'un feuilletage F sur M .

Le théorème de base peut alors s'énoncer :

THEOREME A. Tout espace fibré de Seifert, orientable et amphicheiral

$$2M = \{0 ; g, 2n ; (\alpha_1, \pm\beta_1) \dots (\alpha_n, \pm\beta_n)\} \text{ avec } g \geq 0, n \geq 0, g + n \geq 2$$

excepté $\{0 ; 0, 4 ; (2, \pm 1), (2, \pm 1)\}$, admet des feuilletages analytiques, amphicheiraux et transverses aux fibres, possédant un ensemble minimal exceptionnel.

Démonstration : Admettons l'existence d'un groupe fuchsien Γ de deuxième espèce, sans élément parabolique, et de signature $(g, n ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (cf. lemme 5 ci-dessous).

Selon le lemme 4, le groupe Γ est un produit libre de rang $g + n$. Soit

$\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^r(S^1)$ une représentation de Γ par des C^r -difféomorphismes du cercle

($r = 0, 1, \dots, \infty, \omega$) conservant l'orientation. En particulier le groupe image

$\Gamma' = \Phi(\Gamma)$ peut être un sous-groupe de Ω_S , discontinu ou non, dont l'action est res-

treinte au cercle principal S . Pour chaque indice i , $1 \leq i \leq n$, soit γ_i un entier défini mod α_i et premier avec α_i . On dira que Φ est de degré $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Chaque sous-groupe cyclique elliptique $\{g_i\}$ a pour image par Φ un sous-groupe cyclique $\{f_i\}$ de même ordre α_i .

(2) Si g_i a pour dérivée $\frac{dg_i}{dz}(\xi_i) = \exp \frac{2i\pi}{\alpha_i}$ au point fixe $\xi_i \in D$ et si f_i a pour nombre de rotation $\frac{1}{\alpha_i}$, alors $\Phi(g_i) = f_i^{\alpha_i}$.

Comme produit libre de ses facteurs cycliques, Γ admet des représentations de n'importe quel degré. Soit Φ une représentation de degré $(-\beta_1, \dots, -\beta_n)$. Définissons une action du groupe abstrait Γ sur le produit $\tilde{M}_1 = \mathcal{D}(\Gamma) \times S$ par

$$(g ; z, \zeta) \mapsto (gz, \Phi g \zeta) \quad g \in \Gamma, \quad z \in \mathcal{D}(\Gamma), \quad \zeta \in S.$$

Alors Γ devient un groupe de C^Γ -automorphismes de \tilde{M}_1 , conservant l'orientation, et proprement discontinu (les éléments périodiques n'ont pas de point fixe sur la fibre S). L'espace des orbites $M_1 = \tilde{M}_1 / \Gamma$ est donc une variété fermée orientable de dimension 3. Puisque l'action de Γ est compatible avec la structure de produit de \tilde{M}_1 , la variété M_1 hérite de son revêtement \tilde{M}_1 deux feuilletages transverses (comme dans le cas des fibrés localement triviaux, [3] p. 373), à savoir un feuilletage de codimension un $F_1(\Gamma^\dagger)$ transverse à une fibration de Seifert. Clairement la Z -surface est $\Sigma_g = \mathcal{D}(\Gamma) / \Gamma$ et chaque point de branchement $\bar{\xi}_i$ est l'image d'une fibre singulière S_i d'ordre α_i . Plus précisément soit $\delta_i \subset D$ un disque fermé invariant autour de ξ_i , bordé par une trajectoire du flot g_i^t et ne contenant pas d'autre point fixe que ξ_i . Alors le tube invariant $\delta_i \times S / \Gamma$ admet le modèle $D^2 \times S^1 / Z_\alpha$ décrit plus haut, et S_i est une fibre singulière de type (α_i, β_i) . La réflexion à travers S dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, $z \mapsto z^*$, induit une involution de M_1 compatible avec chacun des feuilletages et M_1 peut être séparé en une paire (M, M^*) d'un espace de Seifert à bord et de son inverse par réflexion. Ainsi M_1 est l'espace fibré amphicheiral $2M = \{0 ; g, n ; (\alpha_1, \pm\beta_1), \dots, (\alpha_n, \pm\beta_n)\}$ muni d'un feuilletage amphicheiral $F_1(\Gamma^\dagger) = 2F(\Gamma^\dagger)$.

Choisissons maintenant pour groupe Γ^\dagger la restriction de Γ au cercle principal S , et pour Φ un automorphisme de degré $(-\beta_1, \dots, -\beta_n)$. Les cas écartés par le théorème correspondent aux groupes fuchsien élémentaires (isomorphes à \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_α ou $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$). Ainsi $\mathcal{L}(\Gamma)$ est un ensemble de Cantor K et le feuilletage

$F(\Gamma)$ admet un ensemble minimal exceptionnel, les autres feuilles étant des feuilles propres

Reste à prouver l'hypothèse initiale, à savoir :

LEMME 5. Toute signature dans la classe (g, n) , $g \geq 0$, $n \geq 0$, $g + n \geq 1$, est la signature d'un groupe fuchsien de seconde espèce sans élément parabolique.

Démonstration : Cette construction classique est due à F. Klein, qui introduisit le concept de produit libre (Composition der Gruppen [2] p. 190). Elle se déduit du lemme suivant :

LEMME 6. Soit (Γ_i) , $i = 1, \dots, n$ une famille finie de groupes discontinus avec des régions fondamentales R_i telles que $\text{Ext } R_i \subset R_j$ si $i \neq j$. Alors le groupe qu'ils engendrent est le produit libre $\Gamma = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_n$, et Γ est un groupe discontinu admettant $\bigcap_{i=1}^n R_i$ comme région fondamentale.

Ce lemme est purement topologique. Une démonstration est donnée dans [9] p. 118 ou dans [12]. Au paragraphe 12 il fournira une construction d'un groupe Γ d'automorphismes de la sphère S^m ($m \geq 1$) ayant un ensemble de Cantor comme ensemble limite, et isomorphe à n'importe quel produit libre de groupes cycliques (finis ou non), pourvu que ce produit ait au moins deux facteurs (non égaux à \mathbb{Z}_2 s'il n'y a que deux facteurs). La démonstration générale du lemme 5 est reportée à la fin du paragraphe. On examine déjà le cas particulier utilisé dans la démonstration du théorème 1.

LEMME 7. Tout produit libre de deux groupes cycliques finis, excepté $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, admet une représentation fidèle par un groupe fuchsien non horocyclique ayant un ensemble de Cantor minimal.

Démonstration : Soit (ξ_i, ξ_i^*) un couple de points inverses l'un de l'autre par rapport au cercle principal S , $\xi_i \in D$, $\xi_i^* \in D^*$. Soit (D_i, D_i') un couple de disques fermés dont les bords se coupent en ξ_i, ξ_i^* et tels que le polygone à deux côtés $R_i = CP^1 \setminus (D_i \cup D_i')$ ait des angles $\frac{2\pi}{\alpha_i}$ en ξ_i, ξ_i^* . Alors R_i est le polygone fondamental d'une transformation elliptique g_i telle que $\frac{dg_i}{dg}(\xi_i) = \exp \frac{2i\pi}{\alpha_i}$, et on peut supposer que g_i applique int D_i sur ext D_i' . Etant donné un couple d'entiers (α_1, α_2) , $\alpha_i \geq 2$, on peut faire cette construction pour $i = 1, 2$ de façon que $D_1 \cup D_1'$ et $D_2 \cup D_2'$ soient disjoints. D'après le lemme 6 le groupe $\Gamma = \{g_1, g_2\}$ est le produit libre $\{g_1\} * \{g_2\}$ et admet $R = R_1 \cap R_2$ comme polygone fondamental. Le demi-polygone $R^+ = R \cap D$ a au moins un côté libre, d'extrémités (x, x') . Le groupe Γ est un groupe non horocyclique de signature $(0, 2; \alpha_1, \alpha_2)$ qui a plus de deux points limites si $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (2, 2)$. (Le cas dessiné figure 4 correspond à $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$). Cette construction s'étend clairement à tout produit libre $\mathbb{Z}_{\alpha_1} * \dots * \mathbb{Z}_{\alpha_n}$.

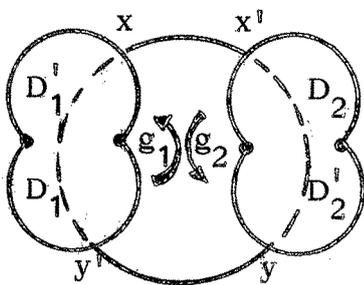


Figure 4

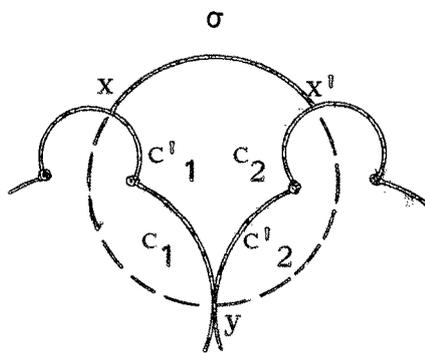


Figure 5

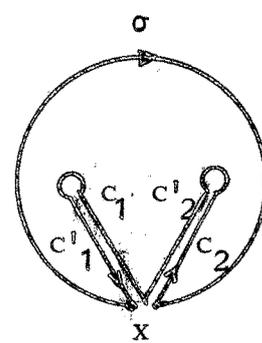


Figure 6

Dans ce cas très simple, il est facile de construire un polygone canonique et d'en déduire la présentation standard de Γ donnée par le théorème de Poincaré. En faisant tourner l'une des paires de disques (D_i, D_i') autour des points fixes ξ_i, ξ_i^* on peut

rendre les disques D_1 et D_2 tangents en un point y (fig. 5). Le nouveau polygone R^+ reste un polygone fondamental relativement à D (le lemme 6 exige seulement que les intérieurs de $D_i \cup D_i'$ soient disjoints), avec un seul côté libre σ . Les cycles elliptiques sont constitués d'un seul sommet ξ_i , il y a un cycle accidentel $(x x' y)$, et les côtés ont l'ordre cyclique prescrit : $\sigma c_2 c_2' c_1 c_1'$. Alors R^+ est un polygone canonique, et le théorème de Poincaré affirme que la relation correspondant au chemin fermé ∂R^+ homotope à zéro (fig. 6), c'est-à-dire $g_1 g_2 h = 1$, jointe aux relations de périodicité : $g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2} = 1$, constitue un système de relations de définition pour le système de générateurs (g_1, g_2, h) . Cette présentation, naturellement, n'est pas minimale et peut être réduite à $\Gamma = \langle g_1, g_2 ; g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2} = 1 \rangle$ en résolvant la relation par rapport au générateur hyperbolique libre $h = (g_1 g_2)^{-1}$. Les autres éléments hyperboliques libres de Γ sont les conjugués de $g_1 g_2$ ou $(g_1 g_2)^{-1}$. L'ensemble $\pi_0(S \setminus K)$ des lacunes de K est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison du sous-groupe cyclique infini $\{h\}$, c'est-à-dire avec l'ensemble $\Gamma / \{h\}$ des classes à gauche puisque $\{h\}$ est son propre normalisateur.

Une étude algébrique des représentations vérifiant le lemme 7 est faite dans [11]. Elle utilise les représentants suivants dans $SL(2, \mathbb{R})$:

$$[g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos \frac{\pi}{\alpha_1} \end{bmatrix}, \quad [g_2]_\rho = \begin{bmatrix} 2\cos \frac{\pi}{\alpha_2} & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \quad \rho > 0$$

et l'on vérifie aisément que

$$\xi_1 = \exp \frac{i\pi}{\alpha_1} \in H \quad \xi_2 = -\rho \exp -\frac{i\pi}{\alpha_2} \in H$$

$$\frac{dg_1}{dz}(\xi_1) = \exp \frac{2i\pi}{\alpha_1} \quad \frac{dg_2}{dz}(\xi_2) = \exp \frac{2i\pi}{\alpha_2}$$

COROLLAIRE 1. Pour tout noeud torique k la variété fermée $2M(k)$ admet des feuilletages analytiques amphicheiraux avec un ensemble minimal exceptionnel.

Démonstration : Si (α_1, α_2) est le type du noeud torique k et si (β_1, β_2) sont les entiers définis par la condition

$$(1) \quad -\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 = 1$$

la variété $2M(k)$ est l'espace fibré $\{0; 0, 4; (\alpha_1, \pm\beta_1), (\alpha_2, \pm\beta_2)\}$ auquel s'applique le théorème A.

Voici enfin le lemme-clé pour les théorèmes 1 et 2 :

LEMME 8. Soit k un noeud torique et $F(\Gamma)$ un feuilletage de son complémentaire fermé $M(k)$ construit par le théorème A. Alors il existe un méridien μ transverse à la partie discrète du feuilletage si et seulement si k est un noeud trèfle (c'est-à-dire de type 3, 2).

Démonstration : Le feuilletage périphérique est défini par le difféomorphisme d'holonomie $p = g_2^{-\beta_2} g_1^{-\beta_1}$ qui est clairement un élément hyperbolique du groupe fuchsien $\Gamma = \{g_1\} * \{g_2\}$ (il ne peut être périodique puisque c est un mot cycliquement réduit pour les relations $g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2} = 1$). D'après le lemme 3 ce feuilletage de $\partial M(k)$ a deux feuilles compactes méridiennes μ_ζ et $\mu_{\zeta'}$ passant par les points fixes de p sur la fibre-base S_x . Elles peuvent être déformées isotopiquement en des cercles transverses au feuilletage et disjoints de l'ensemble minimal \mathfrak{m} si et seulement si l'un des deux arcs de S_x d'extrémités ζ, ζ' est une lacune de l'ensemble de Cantor $K = S_x \cap \mathfrak{m}$. Donc p doit être une puissance d'un élément hyperbolique libre, et par conséquent un élément hyperbolique libre puisque Φ est un automorphisme de Γ . Ceci se produit dans deux cas :

$$(2) \quad p = g_2 g_1 \quad \text{ou} \quad \text{deg } \Phi = (1, 1) \quad (2') \quad p = g_2^{-1} g_1^{-1} \quad \text{ou} \quad \text{deg } \Phi = (-1, -1)$$

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = 1$$

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_1 - 1 \quad \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_2 - 1$$

Les équations (1) et (2) ont l'unique solution (à l'échange des indices près)

$$\alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = 2 \quad \beta_1 = 2 \quad \beta_2 = 1$$

puisque l'élimination de β_1 et β_2 conduit à la relation

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) = 2 \quad .$$

Les équations (1) et (2') n'ont pas de solution acceptable puisque l'élimination des β_i fournit

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) = 0 \quad .$$

(En fait le cas (2') correspond au noeud inverse par réflexion k^*).

Démonstration du théorème 1. : Soit k un noeud trèfle et Γ un groupe fuchsien de deuxième espèce de signature $(0, 2 ; 3, 2)$ agissant sur $(\Gamma) \times S$ par $g(z, \zeta) = (gz, g\zeta)$. L'application du revêtement

$$\mathcal{D}(\Gamma) \times S \rightarrow (\mathcal{D}(\Gamma) \times S) / \Gamma = 2M(k)$$

définit un feuilletage analytique admettant un unique ensemble minimal $\mathfrak{m} = (\mathcal{D}(\Gamma) \times \mathcal{L}(\Gamma)) / \Gamma$.

On peut trouver deux méridiens μ_1 et μ_2 sur $\partial M(k)$, transverses aux feuilles et disjoints de \mathfrak{m} . En retirant deux voisinages tubulaires $T(\mu_1)$ et $T(\mu_2)$ disjoints et extérieurs à \mathfrak{m} on obtient un feuilletage de $W(k = k^*)$ induisant un feuilletage longitudinal sur chaque composante $\partial_i W$ du bord de W . Ce feuilletage peut être modifié à l'intérieur d'un voisinage collier de chaque tore $\partial_i W$ en un feuilletage C^∞ tangent au bord [29] ayant le même ensemble minimal \mathfrak{m} . En recollant une composante de Reeb on obtient un feuilletage du tore plein qui peut être prolongé en un feuilletage de toute variété fermée de dimension 3 par un procédé standard [29].

Démonstration du lemme 5 : Prenons sur la sphère CP^1 n paires de disques (D_i, D_i') dont les bords se coupent sous l'angle $\frac{2\pi}{\alpha_i}$, et g paires de disques disjoints (D_j, D_j') , toutes ces paires étant disjointes et orthogonales à un même cercle S (fig. 7). Il y a

une application elliptique g_i de période α_i appliquant int D_i sur ext D_i^{\vee} , et une application hyperbolique h_j appliquant int D_j sur ext D_j^{\vee} . Le groupe Γ engendré par $(h_1, \dots, h_g, g_1, \dots, g_n)$ admet S pour cercle principal. Par le lemme 6 c^{\vee} est un groupe fuchsien de deuxième espèce admettant pour région fondamentale le complémentaire de la réunion des disques D_i, D_i^{\vee} et D_j, D_j^{\vee} . Il est clair que Γ a pour signature $(g, n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ce qui complète la démonstration du théorème A.

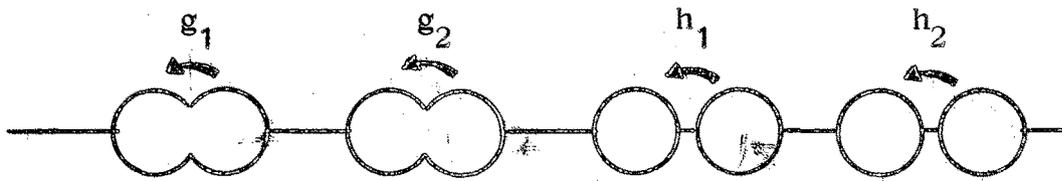


Figure 7

Remarque 1. Si le genre g n'est pas nul, l'espace de Seifert amphicheiral $\{0; g, n; (\alpha_i, \pm \beta_i)\}$ admet une infinité de feuilletages dont les ensembles minimaux ne sont pas deux à deux homéomorphes, puisque chaque facteur cyclique infini $\{h_j\}$ de Γ peut agir sur la fibre par un groupe cyclique $\{\Phi h_j\}$ de n'importe quelle période. Par exemple le feuilletage de Sacksteder dans [20] correspond au cas $g = 2, n = 0$, avec une représentation $\Phi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

On peut noter aussi que tous les espaces de Seifert du théorème A admettent une fibration localement triviale sur le cercle S^1 , en utilisant une représentation Φ appliquant Γ sur un groupe abélien de rotations $\Gamma^{\vee} \cong \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n}$.

6. - QUELQUES AMELIORATIONS DU THEOREME 1

Soit D le disque unité $|z| < 1$, S le cercle unité ∂D , et soit $\Gamma \subset \Omega_S$ un groupe fuchsien non horocyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Nous considérons les représentations $\Phi : \Gamma \rightarrow \Omega_S$ de degré $(1, 1)$. Pour plus de simplicité les générateurs

périodiques de Γ seront rebaptisés g_2, g_3 , et leur image f_2, f_3 , où l'indice est égal à la période. Si $F(f_2, f_3)$ est le feuilletage correspondant du complémentaire fermé $M(k)$ d'un noeud trèfle, le feuilletage périphérique ∂F induit sur le tore ∂M est associé au difféomorphisme $p = f_2 f_3$ de la fibre.

Il est clair que les classes de conjugaison dans Ω_S de telles représentations Φ forment une famille à un paramètre. Par conjugaison on peut prendre pour f_3 la rotation $R_3 : z \rightarrow z \exp \frac{2i\pi}{3}$; l'autre générateur f_2 ne dépend alors que de son point fixe $\xi \in D$, qui peut être pris sur le demi-axe réel positif $\xi_2 \in [0, 1]$ après une nouvelle conjugaison par une rotation centrée en 0 (qui laisse donc f_3 invariante). De plus on peut tirer parti du fait que $\Gamma^1 = \{f_2, f_3\}$ est un groupe de Hecke (c'est-à-dire que l'un des facteurs cycliques est d'ordre 2) et caractériser l'involution f_2 par un autre paramètre, son point de Frégier λ relativement à S (cela signifie que les paires $(z, f_2 z)$ de points conjugués sur S sont les extrémités d'une corde pivotant autour de λ). Les deux paramètres ξ_2 et λ sont liés par la relation $\lambda = \frac{2\xi_2}{1 + |\xi_2|^2}$.

La famille (Φ_λ) , $\lambda \in [0, 1]$, peut alors être classifiée par le type du produit $p = f_2 f_3$, qui dépend de la position de λ par rapport au cercle $|z| = \frac{1}{2}$ (inscrit dans les triangles équilatéraux $\{z, f_3 z, f_3^2 z\}$, $z \in S$); la classification comporte 4 cas :

(A) $\lambda = 0$. Le groupe $\Gamma^1 = \{f_2, f_3\}$ est un groupe abélien fini isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6$. Les feuilles du feuilletage $F(\Gamma^1)$ sont des surfaces compactes et la projection de $M(k)$ sur l'espace transverse S/Γ^1 est une fibration analytique sur S^1 . La fibre est décrite § 10.

(E) $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Alors p est une transformation elliptique, conjuguée dans Ω_S à une rotation dont l'amplitude θ peut prendre toute valeur de l'intervalle $(-\frac{2\pi}{6}, 0)$, puisque la trace $2 \cos \frac{\theta}{2}$ de la matrice unimodulaire $[p]$ dépend continûment de λ . De façon plus précise la démonstration du lemme 3 montre que le feuilletage périphérique ∂F_λ a une pente moyenne comprise entre $-\frac{7}{6}$ et -1 dans la trivialisation du

lemme 2, et ces valeurs extrêmes sont respectivement les pentes des longitudes et des méridiens. On a ainsi obtenu :

LEMME 9. Soit k le noeud trèfle orienté défini au paragraphe 3, et $M(k)$ son complément fermé. Pour tout nombre positif ν , $0 < \nu \leq +\infty$, il existe un feuilletage analytique de $M(k)$ induisant sur le bord un feuilletage linéaire de pente ν dans une trivialisation analytique $S^1 \times S^1 \rightarrow \partial M(k)$ par méridiens et longitudes.

Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est un nombre irrationnel, le groupe Γ n'est pas discontinu, sinon c est un groupe fuchsien horocyclique. Ainsi les feuilletages du lemme 9 (excepté la fibration $\nu = \infty$) ne contiennent que des feuilles partout denses.

Remarque 2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois entiers positifs tels que

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} < 1 .$$

La réunion d'un triangle d'angles $\frac{\pi}{\alpha_1}, \frac{\pi}{\alpha_2}, \frac{\pi}{\alpha_3}$ dans le disque D et de son inverse par rapport à l'un des côtés est le polygone fondamental R d'un groupe horocyclique Γ_T de signature $(0, 3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ces groupes triangulaires (découverts par H.A. Schwartz en 1872) admettent une présentation

$$\Gamma_T = \langle f_1, f_2, f_3; f_1^{\alpha_1} = f_2^{\alpha_2} = f_3^{\alpha_3} = f_1 f_2 f_3 = 1 \rangle .$$

Nous pouvons définir une action libre de Γ_T sur $D \times S^1$ en prenant comme action sur la fibre S^1 la restriction de l'action de Γ_T au cercle principal. L'espace de Seifert $(D \times S^1)/\Gamma_T$ a 3 orbites singulières de type $(\alpha_i, \alpha_i - 1)$ puisque Φ est de degré $(1, 1, 1)$. L'invariant b est ici égal à -2 (c'est l'opposé de la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace transverse D/Γ_T : en regardant $D \times S^1$ comme une trivialisation du fibré des vecteurs tangents unitaires, le calcul de la rotation dans la fibre est la démonstration classique de la formule de Gauss-Bonnet). On obtient donc un feuilletage partout dense sur la variété de Seifert

$$(D \times S)/\Gamma_T = \{-2 ; 0, 3 ; (\alpha_1, \alpha_1-1), (\alpha_2, \alpha_2-1), (\alpha_3, \alpha_3-1)\} .$$

D'après le résultat de Seifert rappelé au § 5, c'est une sphère d'homologie si

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 = 1$$

relation qui est vérifiée par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 3, 7)$. Le pavage associé au groupe triangulaire $\Gamma_T = (0, 3 ; 2, 3, 7)$ est dessiné dans [2] ou [9]. On a ainsi obtenu :

Certaines sphères d'homologie admettent des feuilletages analytiques sans feuille fermée.

(P) $\lambda = \frac{1}{2}$. La transformation p est parabolique, avec le point fixe $\zeta = \exp(-\frac{i\pi}{3})$ (tel que la corde $\zeta, f_2\zeta$ soit tangente au cercle $|z| = \frac{1}{2}$). Le groupe Γ^p est un groupe triangulaire horocyclique $(0, 3 ; 2, 3, \infty)$ isomorphe à $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Le feuilletage dense $F(\Gamma^p)$ de $M(k)$ induit sur $\partial M(k)$ un feuilletage avec une feuille compacte méridienne (instable).

Prenons le conjugué de Γ^p par l'homographie $g \in \Omega$ qui envoie le quadruple harmonique $(e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}, +1, -1)$ sur $(0, \infty, -1, +1)$. On obtient alors la réalisation habituelle de Γ^p dans Ω_H par le groupe modulaire classique $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$, avec les générateurs périodiques

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dont le produit est la translation}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

(H) $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Dans ce cas p est hyperbolique et Γ^p est un groupe non horocyclique $(0, 2 ; 2, 3)$ isomorphe à $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Le pavage correspondant est dessiné fig. 8, où un polygone fondamental est la réunion d'une région hachurée et d'une région non hachurée. La figure 9 montre la construction de quelques lacunes de l'ensemble limite K , où $J = (\zeta, \zeta^p)$ est la lacune associée au générateur hyperbolique libre p . On verra au paragraphe 9 que tous les feuilletages $F(\Gamma^p)$ correspondant à ce cas

hyperbolique (H) ont des ensembles minimaux m homéomorphes.

On peut remarquer que $PSL(2, \mathbb{Z})$ admet une filtration infinie par des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, et que tous ces sous-groupes propres Γ' sont du type hyperbolique (H). Ainsi le feuilletage de $2M(k)$ utilisé dans la démonstration du théorème 1 peut être entièrement décrit à l'aide de matrices 2×2 unimodulaires à éléments entiers, par exemple

$$[g_2] = BAB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad [g_3] = ABA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

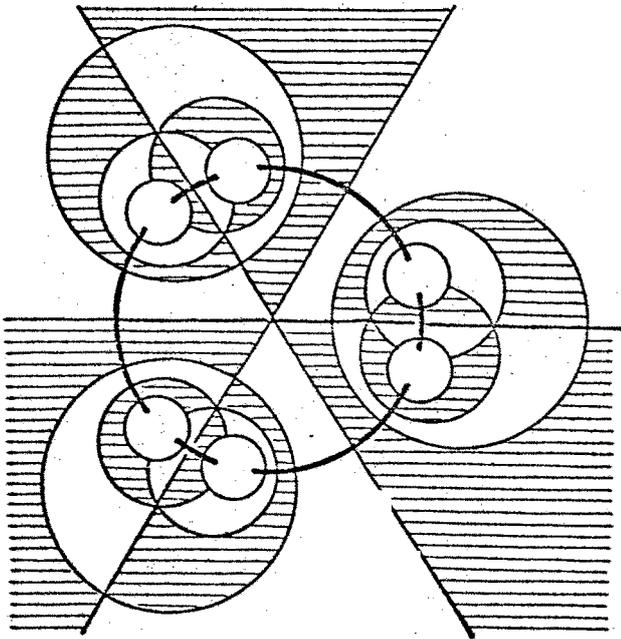


Figure 8

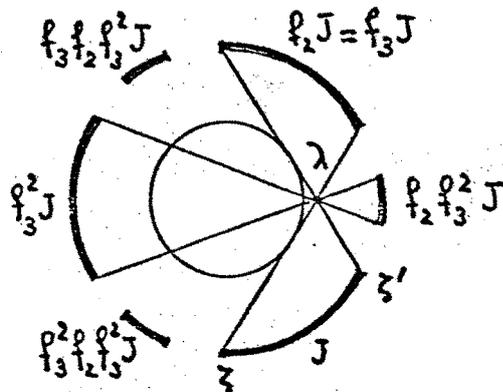


Figure 9

Plus généralement tout produit libre fini ou infini de facteurs cycliques \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_2 ou \mathbb{Z}_3 admet une représentation fidèle par un sous-groupe non horocyclique de $PSL(2, \mathbb{Z})$ comme conséquence immédiate du lemme 6 (inversement tout sous-groupe du groupe modulaire est isomorphe à un produit libre de tels facteurs d'après le théorème de Kurosh). Cependant un sous-groupe propre Γ'' de Γ' peut avoir le même ensemble minimal que Γ' . Par exemple soit Γ'^n le sous-groupe invariant de Γ' engendré par les puissances n -ièmes des éléments de Γ' (tous ces sous-groupes

sont libres si n est un multiple de 6). Alors tout élément hyperbolique $h \in \Gamma^1$ engendre un élément hyperbolique $h^n \in \Gamma^{1n}$ ayant les mêmes points fixes, de sorte que Γ^1 et Γ^{1n} ont le même ensemble minimal. Un exemple typique est

$$\Gamma^{13} = \{f_2\} * \{f_3 f_2 f_3^2\} * \{f_3^2 f_2 f_3\}$$

produit libre des 3 groupes cycliques d'ordre 2 engendrés par les 3 involutions de points de Frégier λ , $\lambda e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\lambda e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Il admet pour générateur hyperbolique libre le produit des 3 involutions :

$$(f_2) (f_3 f_2 f_3^2) (f_3^2 f_2 f_3) = (f_2 f_3)^3$$

ayant mêmes points fixes (ζ, ζ') que $f_2 f_3$ (cf. fig. 9).

Cette longue description d'une homotopie (à travers les groupes fuchsien) entre le cas abélien (A) et le cas hyperbolique (H) montre qu'une assez grande perturbation de la fibration provoque l'apparition d'un ensemble minimal non trivial. Le cas elliptique (E) et le cas hyperbolique (H) peuvent maintenant être combinés par une somme connexe.

PROPOSITION 1. Soit T un tore plein muni d'une trivialisation par $D^2 \times S^1$. Alors tout feuilletage linéaire de son bord $\partial D^2 \times S^1$ peut être étendu en un feuilletage C^∞ de T avec une seule composante de Reeb et un nombre arbitraire n d'ensembles minimaux exceptionnels contenus dans l'intérieur de T , excepté le feuilletage par méridiens $(\partial D^2 \times \cdot)$ qui nécessite deux composantes de Reeb.

COROLLAIRE 2. La sphère S^2 et les espaces lenticulaires $L^3(\alpha)$ admettent des feuilletages C^∞ avec une seule composante de Reeb et n ensembles minimaux exceptionnels.

Démonstration :

1) Il existe un feuilletage de $W(k = k^*)$ transverse au bord, induisant un feuilletage longitudinal sur chaque tore $\partial_1 W$ et $\partial_2 W$ et contenant un ensemble minimal exceptionnel \mathfrak{m} dans l'intérieur de W (démonstration du théorème 1). Par modification du feuilletage le long de $\partial_2 W$ et recollement d'une composante de Reeb on obtient un tore plein T qui peut être paramétré par $D^2 \times S^1$ avec $(\cdot \times S^1)$ comme feuilles sur le bord. Ceci prouve la proposition pour $n = 1$ et un feuilletage longitudinal sur le bord.

2) Il existe un anneau connectant deux méridiens de $\partial_1 W$ et $\partial_2 W$ sans rencontrer \mathfrak{m} (résultant d'un anneau méridien sur $\partial M(k)$). On peut l'étendre en un disque isotope à $(D^2 \times \cdot)$ dans $D^2 \times S^1$. Alors un revêtement cyclique \tilde{T} à n feuillets de T contient n copies de l'ensemble minimal \mathfrak{m} . Le complémentaire de la composante de Reeb dans T est $W(\#^n k \#^n k^*)$.

3) Considérons un feuilletage de $M(k)$ donné par le lemme 9, avec une pente $\nu > 0$ sur le bord. En retirant un tube transversal $T(\mu)$ autour d'une courbe transverse méridienne μ on obtient un feuilletage de $W(k)$ longitudinal sur $\partial_2 W$ et de pente ν sur $\partial_1 W$. Il peut être recollé au feuilletage précédent de \tilde{T} avec identification des feuilletages longitudinaux de $\partial_2 W$ et ∂T . Par le lemme 1 le feuilletage du tore plein qui en résulte apparaît avec une pente positive ν sur le bord. Quand le tore plein est plongé de façon standard dans \mathbb{R}^3 , la composante de Reeb est nouée comme un noeud composé $\#^n (k \# k^*) \# k$ (fig. 10). Pour une pente $\nu < 0$ il suffit de prendre l'inverse par réflexion. Et pour $\nu = 0$ il suffit de prendre le double du feuilletage précédent et de retirer de $S^2 \times S^1$ un voisinage tubulaire d'une fibre $(\cdot \times S^1)$.



Figure 10

Remarque 3. Le recollement le long du bord de deux variétés à bord munies de feuilletages transverses au bord, avec identification des feuilletages induits sur le bord, repose sur l'existence de voisinages colliers adaptés : le cas analogue des voisinages tubulaires feuilletés est détaillé dans [29].

Remarque 4. La deuxième étape de la démonstration précédente peut être remplacée par l'emploi itéré de la formule $W(k_1) \cup_f W(k_2) = W(k_1 \# k_2)$. Notons alors que l'un des générateurs de Γ^0 peut être altéré par une modification C^∞ dans le complémentaire de K de façon que l'ensemble des points fixes de $p = f_2 f_3$ contienne un intervalle fermé $[\eta, \eta']$ inclus dans la lacune (ζ, ζ') (fig. 12). Les méridiens transverses μ_{x_1} et μ_{x_2} issus des points $x_1 \in (\zeta, \eta)$ et $x_2 \in (\eta', \zeta')$ rencontrent des ensembles disjoints de feuilles propres. Si $W(k \# k^*) = 2M(k) \setminus [T(\mu_{x_1}) \cup T(\mu_{x_2})]$ aucune feuille ne rencontre à la fois $\partial_1 W$ et $\partial_2 W$. En insérant un tel exemplaire de W dans la chaîne on peut donc réduire le nombre d'ensembles minimaux contenus dans l'adhérence d'une feuille sans réduire le nombre total d'ensembles minimaux contenus dans la composante de Novikov : les feuilletages de S^3 sont loin d'être classifiés par l'enlacement des composantes de Reeb.

PROPOSITION 2. Toute sphère de dimension impaire admet des feuilletages C^∞ contenant une feuille compacte et un nombre arbitraire d'ensembles minimaux exceptionnels.

Démonstration : Il suffit d'utiliser un feuilletage de $D^2 \times S^1$ donné par la proposition 1 à la place d'un feuilletage de Reeb dans les constructions de H. Lawson [8] et I. Tamura [26]. Nous omettons les détails.

7. - FEUILLETAGES AVEC SINGULARITES

Un feuilletage de codimension un avec singularités sur une variété différentiable M est défini par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et une collection de fonctions de Morse locales $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, reliées par des difféomorphismes locaux de \mathbb{R} :

$$\varphi_i |_{U_i \cap U_j} = \varphi_{ij} \circ \varphi_j |_{U_i \cap U_j}$$

Toutes ces applications sont ici C^∞ .

Selon un théorème bien connu de S.P. Novikov, tout feuilletage de la sphère S^3 contient au moins une feuille compacte. La démonstration de Novikov utilise un champ de vecteurs sans zéro et transverse aux feuilles ; elle ne peut donc s'appliquer aux feuilletages avec singularités. En fait le théorème 2 signifie que le résultat de Novikov n'est plus vrai en présence de singularités. D'autre part les feuilletages construits dans ce paragraphe sont seulement lisses et non analytiques, résultat qui ne peut être amélioré d'après un théorème d'Haefliger [3] p. 390.

LEMME 10. Il existe un feuilletage C^∞ du tore plein $D^2 \times S^1$, avec deux singularités coniques, transverse au bord, induisant sur $\partial(D^2 \times S^1)$ le feuilletage longitudinal ayant $(\cdot \times S^1)$ pour feuilles, et ne contenant pas d'autre ensemble minimal qu'un ensemble minimal exceptionnel $m \subset \text{int}(D^2 \times S^1)$.

Démonstration : Considérons la chirurgie usuelle permettant de réaliser la somme connexe de deux surfaces feuilletées avec introduction de deux cols (éventuellement de façon analytique). Elle est schématisée sur la figure 11 sous forme de deux plongements

$$j_1 = S^0 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad j_2 : D^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 .$$

Une identification des colliers $\partial(D^1 \times S^1) \times [0, \epsilon] \rightarrow \partial(S^0 \times D^2) \times [0, \epsilon]$ via la projection $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ permet de conjuguer les germes (le long des bords) des deux fonctions de Morse $\varphi_1 = p_1 \circ j_1$ et $\varphi_2 = p_1 \circ j_2$ (où p_1 est la projection $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1$).

Par révolution autour de l'axe z (fig. 11) on en déduit un feuilletage F_S de $D^2 \times S^1$ avec deux points conique w, w' ; un feuilletage F_p de $S^1 \times D^2$ induit par un plongement standard dans \mathbb{R}^3 ; et une identification des colliers :

$$\chi = N_2 \rightarrow N_1 \quad N_1 = S^1 \times \partial D^2 \times [0, \epsilon] \quad N_2 = \partial D^2 \times S^1 \times [0, \epsilon]$$

telle que $\chi^{-1}(F_p |_{N_1}) = F_S |_{N_2}$.

Soit alors F un feuilletage d'une variété M de dimension 3, et soit μ un cercle plongé dans une feuille L de F , tel que sa classe d'homotopie dans $\pi_1(L)$ appartienne au noyau de la représentation d'holonomie. Il existe un plongement du tore plein $j : S^1 \times D^2 \rightarrow M$ tel que $j(S^1 \times 0) = \mu$ et $j^{-1}(F) = F_p$. En retirant l'âme $j(S^1 \times D^2 \setminus N_1)$ et en greffant le feuilletage F_S par l'application $j \circ \chi$, on obtient un feuilletage \widehat{F}_S avec deux singularités coniques w, w' sur la variété \widehat{M} déduite de M par cette chirurgie sur μ . De plus si F peut être défini par une unique fonction de Morse sur un voisinage saturé U de la feuille L , il en est de même du feuilletage \widehat{F}_S sur un voisinage saturé \widehat{U} des points critiques w, w' .

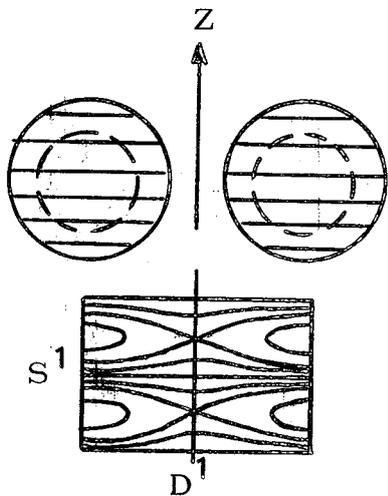


Figure 11

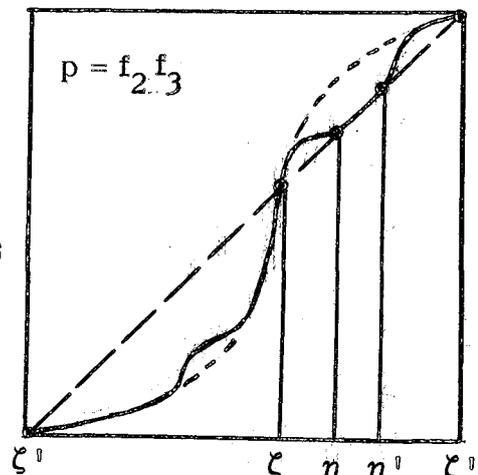
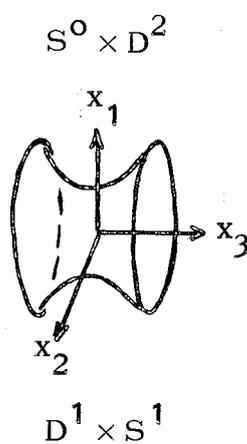


Figure 12

Il suffit maintenant d'appliquer cette construction à un feuilletage F convenable de la variété $2M(k)$. Soit $\Gamma^1 = \{f_2, f_3\}$ une réalisation de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ par un groupe de difféomorphisme du cercle, tel que $f_2 f_3$ admette un segment $[\eta, \eta']$ de points fixes contenu dans la lacune $J = (\zeta, \zeta')$ de l'ensemble de Cantor minimal K (fig 12). Un tel groupe peut être déduit d'un groupe fuchsien de deuxième espèce par une modification C^∞ du générateur f_2 à l'intérieur de la lacune $f_3 J$, avec la modification corrélative à l'intérieur de J . Munissons $2M(k)$ du feuilletage $2F(\Gamma^1)$, et soit L_x la feuille issue d'un point $x \in (\eta, \eta')$ dans la fibre de base. La chirurgie décrite plus haut peut être effectuée sur le cercle méridien $\mu_x = L_x \cap \partial M(k)$ et fournit un feuilletage \widehat{F}_S de la sphère S^3 , avec deux points coniques w et w' , et le saturé m de K est l'unique ensemble minimal de \widehat{F}_S . On peut noter qu'après cette chirurgie les cercles méridiens μ_η et $\mu_{\eta'}$ deviennent des cycles limites (plongés) au sens de la démonstration d'Haefliger de non analyticité.

Soit alors $x_1 \in (\zeta, \eta)$ un point non fixe de $f_2 f_3$ dans le domaine de discontinuité de Γ^1 . Il existe une transversale fermée méridienne μ_{x_1} passant par x_1 qui, après chirurgie, est un cercle non noué dans S^3 . Le complémentaire d'un voisinage tubulaire $T(\mu_{x_1})$ transverse aux feuilles est un tore plein satisfaisant au lemme 10 pour une trivialisat  convenable.

LEMME 11. Tout feuilletage linéaire de $\partial(D^2 \times S^1)$ peut être étendu en un feuilletage C^∞ de $D^2 \times S^1$ avec deux singularités (quatre singularités dans le cas d'un feuilletage par méridiens sur le bord) ayant pour ensembles minimaux : soit un nombre quelconque $n > 0$ d'ensembles minimaux exceptionnels m_i contenus dans l'intérieur du tore plein, soit le tore plein tout entier.

Démonstration : Comme dans la démonstration de la proposition 1, on peut agrandir le tube du lemme 10 en recollant des exemplaires de $W(k \# k^*)$ ou $W(k)$ munis des

feuilletages convenables. Pour obtenir des feuilles partout denses il suffit de partir du complémentaire $S^3 \setminus T(\mu_y)$ d'un tube non noué $T(\mu_y)$ rencontrant toutes les feuilles, et de recoller un exemplaire de $W(k)$ ou $W(k \# k^*)$ muni d'un feuilletage dense grâce à un groupe fuchsien horocyclique.

Démonstration du théorème 2 : Dans toute variété fermée M^3 de dimension 3, orientable ou non, il existe un enlacement $\{S_1, \dots, S_p\}$ à fibré normal trivial, dont le complément fermé $M^3 \setminus \bigcup_i T(S_i)$ fibre sur le cercle S^1 (dans les démonstrations de W. Lickorish et J. Wood [29] la fibre est une sphère trouée). Il suffit de prolonger ce feuilletage à l'intérieur de chaque tube $T(S_i)$ par un feuilletage convenable du tore plein donné par le lemme 11.

8. - FEUILLETAGE DES SPHERES SANS FEUILLE COMPACTE

Les feuilletages construits dans ce paragraphe sont lisses dans le complémentaire de l'un des ensembles minimaux m . Aux points de m ils sont lisses dans la direction de la feuille, mais seulement lipschitziens dans la direction transverse. Ceci est une conséquence de la grande rigidité des difféomorphismes commutants de la droite réelle (remarque 5). La méthode utilisée reproduit la construction classique des feuilletages de Reeb dans $D^m \times S^1$.

LEMME 12. Soit \widehat{F}_S le feuilletage de S^3 défini au lemme 10, avec deux points coniques w, w' , et un ensemble minimal m . Alors il existe un feuilletage F de $S^3 \times S^1$, de classe C^0 , invariant par l'action de $SO(2)$ sur le facteur S^1 , induisant \widehat{F}_S sur chaque section $S^3 \times \{\theta\}$, et ayant $m \times S^1$ pour unique ensemble minimal.

Démonstration : Revenons à la démonstration du lemme 10. Dans le feuilletage $2F(\Gamma^1)$ de $2M(k)$ chaque feuille issue d'un point fixe de $p = f_2 f_3$ est difféomorphe à $T^2 \setminus K$, où K désigne un ensemble de Cantor (cf. § 10). Paramétrons par $[-1, +1]$ le segment $[\eta, \eta^1]$ de points fixes de p sur la fibre-base. L'ouvert U_0 obtenu en saturant l'arc (η, η^1) est paramétré par $(T^2 \setminus K) \times (-1, +1)$, feuilleté par la projection φ_0 sur $(-1, +1)$. Par la chirurgie décrite au lemme 10; il devient un ouvert $U \cong S^3 \setminus m$, feuilleté par une fonction de Morse $\varphi : U \rightarrow (-1, +1)$ ayant deux valeurs critiques c, c^1 ($-1 < c < c^1 < 1$) et deux points critiques w, w^1 d'indices 2 et 1. La feuille $\varphi^{-1}(h)$ est difféomorphe à $S^2 \setminus K$ si $c < h < c^1$, à $T^2 \setminus K$ si $h < c$ ou $c^1 < h$, et à $\overset{\vee}{T}^2 \setminus K$ si $h = c$ ou $h = c^1$ ($\overset{\vee}{T}^2$ un tore pincé). La figure 13 montre un voisinage saturé de l'un des points singuliers.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que

$$\Psi(h) = 0 \text{ si } |h| \geq 1, \quad 0 < \Psi(h) \leq 1 \text{ si } |h| < 1.$$

Définissons le feuilletage $F \mid U \times S^1$ par la 1-forme intégrable sans zéro

$$\omega(x, \theta) = d(\varphi \circ \pi)_{x, \theta} + (\Psi \circ \varphi \circ \pi)(x, \theta) d\theta$$

où π désigne la projection $S^3 \times S^1 \rightarrow S^3$.

Les feuilles Λ dans $U \times S^1$ sont difféomorphes à U et spiralent (avec des sens opposés) vers $\pi^{-1}[\varphi^{-1}(-1)]$ et $\pi^{-1}[\varphi^{-1}(1)]$. Dans le complémentaire de l'ouvert $U \times S^1$, définissons les feuilles de F comme les images réciproques des feuilles de F_S par la projection π . Ainsi $S^3 \times S^1$ est décomposée en la réunion de variétés Λ de dimension 3, disjointes et immergées injectivement. Nous affirmons que cette partition est un feuilletage de classe C^0 , c'est-à-dire que si σ est l'application dont la valeur en $(x, \theta) \in S^3 \times S^1$ est l'espace tangent $T\Lambda_{x, \theta}$ à Λ en (x, θ) , alors σ est un champ de 3-plans continu et satisfaisant une condition de Lipschitz locale dans la direction transverse.

Par construction σ est déjà C^∞ dans l'ouvert $(S^3 \setminus \mathfrak{m}) \times S^1$. Soient (x_1, x_2, x_3) des coordonnées locales dans un voisinage N (dans S^3) d'un point de \mathfrak{m} , telles que le feuilletage $F_S|_N$ soit défini par $x_3 = \text{constante}$. Sur $(U \cap N) \times S^1$ on peut définir un champ de vecteurs normal à σ par

$$\nu_{x,\theta} = \text{grad } \varphi_x + (\Psi \circ \varphi)(x) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

La pente $\beta(x)$ de la direction normale à σ , qui ne dépend que de la coordonnée x_3 , est donc

$$\begin{aligned} \beta(x) &= 0 & \text{si } x \notin U \\ \beta(x) &= (\Psi \circ \varphi)(x) |\text{grad } \varphi_x|^{-1} & \text{si } x \in U. \end{aligned}$$

L'idée est que $|\text{grad } \varphi_x|^{-1}$ décroît aussi vite que l'épaisseur de U si le feuilletage \widehat{F}_S est de classe C^2 .

En identifiant $S^3 \cap N$ à $2M(k) \cap N$, on peut regarder la coordonnée x_3 comme un paramétrage d'un arc d'une fibre de Seifert S . Soit $\{J_i\}$ la collection des lacunes de $\mathfrak{m} \cap S$ contenues dans N , et Γ_N^i le pseudogroupe induit par Γ^i sur $S \cap N$. Puisque Γ^i est de classe C^2 et de type fini, il existe une constante positive C telle que, si x_3 et x_3^i sont deux points de la même lacune J_i , et si $f \in \Gamma_N^i$,

$$C^{-1} \leq \frac{f^i(x_3)}{f^i(x_3^i)} \leq C \quad (f^i = \frac{df}{dx_3})$$

(Ce résultat de R. Sacksteder se trouve dans [21], inégalité 4.2).

Soient x et y deux points de N situés sur une même feuille de \widehat{F}_S et $f \in \Gamma_N^i$ tel que $y_3 = f(x_3)$. Alors $\beta(y) = f^i(x_3) \beta(x)$. De plus si x_3 et x_3^i sont dans une même lacune J_0 , il existe $x_3^{ii} \in J_0$ tel que $f(x_3) = f(x_3^i) = (x - x_3^i) f^i(x_3^{ii})$.

Il en résulte que si C_0 est une constante de Lipschitz pour la fonction β sur l'intervalle J_0 , le produit CC_0 est une constante de Lipschitz valable sur chaque intervalle J_i , donc aussi sur N . Ceci complète la démonstration du lemme 12.

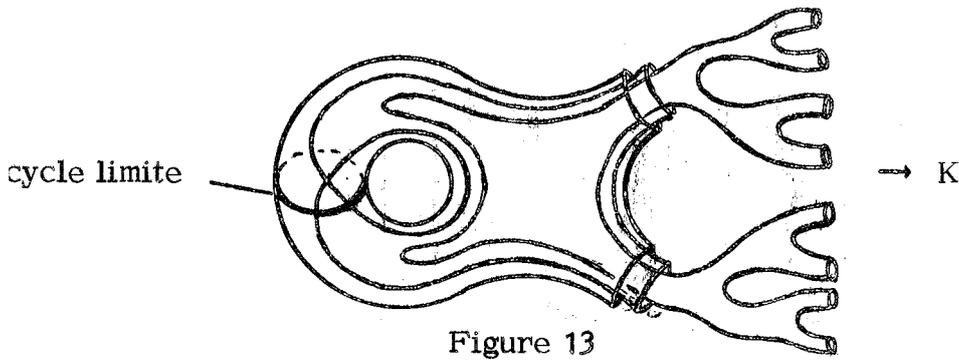


Figure 13

Remarque 5. Selon le théorème fondamental de R. Sacksteder [21], th. 1, il existe au moins une feuille $L_x \in \mathfrak{m}$ ayant un groupe d'holonomie linéaire non trivial si le feuilletage \hat{F}_S est de classe C^2 , c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in K$ qui est un point fixe transversal d'un élément $f \in \Gamma^1$ (en fait il y a une infinité dénombrable de feuilles ayant cette propriété si Γ^1 est déduit d'un groupe fuchsien, cf § 9). Dans la représentation d'holonomie de la feuille $\Lambda = L_x \times S^1$ du feuilletage \hat{F} , le difféomorphisme local \bar{f} associé au chemin fermé $\{x\} \times S^1$ admet au moins tous les points de K assez voisins de x comme points fixes, mais son germe en x n'est pas celui de l'identité. D'autre part f et \bar{f} commutent puisque ce sont les images de deux éléments commutants de $\pi_1(L_x \times S^1)$. Un lemme de N. Kopell ([7], lemme 1) implique alors que \bar{f} ne peut pas être de classe C^1 . En fait on peut montrer que la fonction β de la démonstration ci-dessus n'admet pas de dérivée en un point tel que x .

Remarque 6. On peut noter l'analogie suivante avec le feuilletage de Reeb de $D^2 \times S^1$: Le feuilletage F induit un feuilletage par cercles avec un centre sur des 2-disques Δ bordés par un cycle limite tel que μ_η . Ce cycle est évanouissant au sens de Novikov : il n'est pas homotope à zéro dans sa feuille, mais tout cercle intérieur $\Delta \cap \Lambda$ est homotope à zéro dans sa feuille, $\Lambda \subset U \times S^1$. Cependant les deux feuilles $\varphi^{-1}(-1)$ et $\varphi^{-1}(1)$ qui bordent la composante $U \times S^1$ et portent ces cycles évanouissants ne sont pas compactes.

Remarque 7. On peut montrer le résultat suivant : si f_2 et f_3 sont deux difféomorphismes périodiques du cercle, de périodes 2 et 3, tels que l'ensemble $\text{Fix}(p)$ des points fixes de $p = f_2 f_3$ contienne plus d'un point, alors le groupe $\Gamma = \{f_2, f_3\}$ qu'ils engendrent est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, et admet pour unique ensemble minimal un ensemble de Cantor K . L'ensemble $\text{Fix}(p)$ est contenu dans l'adhérence J d'une lacune de K dont les extrémités ζ, ζ' sont des points fixes de p . En utilisant un groupe Γ' tel que $\text{Fix}(p)$ soit un segment $[\zeta, \zeta']$, on obtient un feuilletage de $S^3 \times S^1$ ayant une seule composante discrète $U \times S^1 = (S^3 \setminus \mathfrak{m}) \times S^1$ bordée par les deux feuilles extrêmes de $\mathfrak{m} \times S^1$. Cependant la présence d'une deuxième composante est nécessaire pour le lemme 10 et les corollaires suivants :

COROLLAIRE 3. Il existe des feuilletages C^0 de codimension un de $D^2 \times T^2$ sans feuille fermée, transverses au bord, et tels que le feuilletage périphérique soit induit par la projection $\partial D^2 \times T^2 \rightarrow \partial D^2$. Ces feuilletages peuvent contenir un nombre $n > 0$ arbitraire d'ensembles minimaux.

COROLLAIRE 4. Pour toute variété fermée M^3 de dimension 3, le produit $M^3 \times S^1$ admet des feuilletages C^0 sans feuille fermée.

Ces corollaires résultent du lemme 12 en retirant de S^3 un tube transverse non noué dans le complémentaire de $\mathfrak{m} \cup U$ et en utilisant les techniques de recollement du paragraphe 7. On peut noter que le bord $\partial(D^2 \times S^1)$ est disjoint de l'adhérence de U , de sorte que les feuilletages du corollaire 3 peuvent être induits par la projection $(D^2 \times S^1) \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1$ sur tout un voisinage de $(n - 1)$ ensembles minimaux : le manque de différentiabilité est limité à un seul ensemble minimal.

Démonstration du théorème 3 : Empruntons la définition suivante à I. Tamura [26] :

Une variété différentiable M^m de dimension m admet une sous-variété plongée

A^{m-2} de dimension $(m - 2)$ pour axe de rotation si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Le fibré normal de A est trivial ;

2) Le complément fermé $M \setminus \text{int } T(A)$ d'un voisinage tubulaire de A est l'espace total d'une fibration différentiable sur le cercle ;

3) La projection de cette fibration, restreinte à $\partial T(A)$, coïncide avec la projection $A \times \partial D^2 \rightarrow \partial D^2$ pour une trivialisat. $A \times D^2$ de $T(A)$.

Dans ces conditions tout feuilletage de $A \times D^2$ transverse au bord, avec $(A \times \cdot)$ comme feuilles sur le bord, peut se prolonger en un feuilletage de M .

En utilisant le théorème de fibration de J. Milnor, H. Lawson [5] a montré que la sphère S^5 admet une telle structure avec pour axe A^3 un fibré en cercles au-dessus du tore T^2 . Il existe donc une submersion $\pi : A^3 \times D^2 \rightarrow T^2 \times D^2$, et l'image réciproque par π d'un feuilletage du corollaire 3 fournit la solution pour S^5 .

Pour les sphères de dimension supérieure, on utilise les résultats de I. Tamura [26] : pour tout entier $p \geq 2$, les sphères S^{4p-1} et S^{4p+1} admettent des axes de rotation

$$A^{4p-3} = S^{2p-2} \times S^{2p-1} \quad \text{et} \quad A^{4p-1} = S^{2p} \times S^{2p-1} .$$

La construction procède alors par récurrence : à chaque étape le feuilletage de S^{2p+1} fournit un feuilletage de $S^{2p-1} \times D^2$ ayant les mêmes ensembles minimaux, transverse au bord, avec $(S^{2p-1} \times \cdot)$ comme feuilles sur le bord. Ceci s'obtient en retirant un voisinage tubulaire $\text{int } T(\gamma)$ d'une courbe fermée $\gamma = (\cdot \times \partial D^2)$ sur $\partial T(A^{2p-1})$. Les tubes $T(A^{4p-3})$ et $T(A^{4p-1})$ peuvent donc être feuilletés par les projections

$$S^{2p-2} \times S^{2p-1} \times D^2 \rightarrow S^{2p-1} \times D^2 \quad \text{et} \quad S^{2p} \times S^{2p-1} \times D^2 \rightarrow S^{2p-1} \times D^2 .$$

COROLLAIRE 5. Toute variété fermée M^{2p+1} de dimension $2p + 1$ ($p \geq 2$) et $(p-1)$ -connexe admet des feuilletages de codimension un et de classe C^0 sans feuille fermée.

En effet selon Tamura [26] une telle variété admet S^{2p-1} pour axe de rotation.

Dans tous ces feuilletages les ensembles minimaux m sont les images réciproques du même modèle m par des submersions. Les deux paragraphes suivants donnent quelques renseignements sur la structure de m .

9. - STABILITE ET MORPHISMES D'ENSEMBLES MINIMAUX

On se limite dans ce paragraphe aux actions du groupe modulaire abstrait $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ sur le cercle; afin de décrire l'holonomie de l'ensemble minimal m . Cette étude est reprise de façon plus générale et plus précise au § 12.

Soient Φ_1 et Φ_2 deux représentations de G dans $\text{Diff}_+^0(S^1)$, les homéomorphismes du cercle conservant l'orientation. Un morphisme d'actions de Φ_1 à Φ_2 est une application continue $\Pi : S^1 \rightarrow S^1$ telle que

$$\Pi \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ \Pi \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Par restriction de l'espace de phase S^1 à des ensembles minimaux m_1 et m_2 de $\Phi_1(G)$ et $\Phi_2(G)$ on obtient la notion de morphisme d'actions minimales (un tel morphisme est toujours surjectif).

Prenons un groupe fuchsien Γ de deuxième espèce comme représentant de G , opérant sur son domaine de discontinuité $\mathfrak{D}(\Gamma) = S^2 \setminus \mathfrak{L}(\Gamma)$. Considérons deux actions libres ψ_1 et ψ_2 de Γ sur le produit $\mathfrak{D}(\Gamma) \times S^1$, définies par $\psi_i : (g ; z, \theta) \rightarrow (gz, \Phi_i(g)\theta)$. Soit F_i le feuilletage induit sur l'espace-quotient $2M(k)$, soit m_i un ensemble minimal de $\Phi_i(\Gamma)$ et m_i l'ensemble minimal correspondant de F_i . Alors si une application continue $\Pi : S^1 \rightarrow S^1$ induit un morphisme d'actions minimales $(\Phi_1\Gamma, m_1) \rightarrow (\Phi_2\Gamma, m_2)$, elle induit aussi une application continue de m_1 sur m_2 (feuille sur feuille) compatible avec la projection sur la Z -surface $S^2 = \mathfrak{D}(\Gamma)/\Gamma$.

Finalement soit \mathcal{C} l'ensemble des représentations $\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^1(S^1)$ de degré (1, 1). Le choix d'un couple de générateurs canoniques (g_2, g_3) pour Γ permet d'identifier \mathcal{C} au produit $\mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, où \mathcal{D}_α désigne l'ensemble des C^1 -difféomorphismes du cercle qui ont un nombre de rotation $\frac{1}{\alpha}$. On munit \mathcal{C} de la topologie produit des C^1 -topologies sur chaque facteur \mathcal{D}_α . Enfin soit $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}$ l'ensemble des représentations par des groupes fuchsien de deuxième espèce. On peut alors énoncer :

PROPOSITION 3. Il y a un voisinage \mathcal{U} de \mathfrak{F} dans \mathcal{C} ayant la propriété suivante : pour tout couple $(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, il y a un isomorphisme d'actions minimales $K_1 \rightarrow K_2$ induit par un homéomorphisme Π du cercle (les ensembles minimaux m_1 et m_2 des feuilletages correspondants sont donc homéomorphes par un autohoméomorphisme de $2M(k)$ déplaçant les points le long des fibres).

Démonstration : On utilisera cette propriété élémentaire de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$: tout élément non périodique du groupe $\langle a, b ; a^2 = b^3 = 1 \rangle$ est conjugué par a, b ou b^2 à un élément du semi-groupe libre Δ de rang 2 engendré par ab et ab^2 (par réduction cyclique tout mot se réduit à : a, b, b^2 ou un mot W sur les syllabes ab et ab^2).

Définissons un groupe fuchsien $\Gamma^{\text{lim}} = \Phi(\Gamma)$ par sa paire de générateurs $(f_2, f_3) \in \mathfrak{F} \subset \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, et regardons l'ensemble limite du semi-groupe Δ engendré par $p_0 = f_2 f_3$ et $p_2 = f_2 f_3^2$. Les 3 lacunes $J, f_3 J, f_3^2 J$ de la figure 9 divisent le cercle en 3 segments que nous noterons $[0.]$, $[2.]$, $[4.]$ avec l'ordre cyclique

$$J \quad [0.] \quad f_3 J \quad [2.] \quad f_3^2 J \quad [4.]$$

On remarque que p_0 et p_2 sont contractantes sur $[0.]$, qui est appliqué sur deux sous-segments disjoints $p_0[0.] = [0.0]$ et $p_2[0.] = [0.2]$. L'ensemble de Cantor $K_0 = K \cap [0.]$ est alors obtenu par le procédé usuel de dichotomie. Si $[0.a_1 a_2 \dots a_n]$ est l'image de $[0.]$ par l'application $p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_n}$ (avec

$a_i \in \{0, 2\}$), chaque point $x \in K_0$ est de façon unique l'intersection d'une suite décroissante de segments emboîtés :

$$[0.] \supset [0.a_1] \supset [0.a_1a_2] \supset \dots \supset [0.a_1a_2\dots a_n] \supset \dots$$

et sera indexé par la suite $(a_i) : x = [0.a_1a_2\dots]$. Ainsi K_0 est identifié à l'ensemble $2^{\mathbb{N}}$ des suites infinies sur deux symboles, muni de la topologie de limite projective des suites finies, où la projection $p_{n,n+1} : E_n \leftarrow E_{n+1}$ de l'espace discret des suites de longueur $(n+1)$ sur l'espace des suites de longueur n est la troncature : $[0.a_1a_2\dots a_n] \leftarrow [0.a_1a_2\dots a_na_{n+1}]$. Chaque générateur p_ϵ de Δ ($\epsilon \in \{0,2\}$) opère sur cette limite projective par translation à droite (shift) :

$$p_\epsilon : [0.a_1a_2a_3\dots] \rightarrow [0.\epsilon a_1a_2a_3\dots];$$

Finalement K est identifié à l'union de 3 copies de $2^{\mathbb{N}}$, et les générateurs canoniques opèrent par

$$\begin{aligned} f_2 &: [0.a_1a_2a_3\dots] \leftrightarrow [(a_1+2).a_2a_3\dots] & a_0 \in \{0, 2, 4\} \text{ mod } 6 \\ f_3 &: [a_0.a_1a_2a_3\dots] \rightarrow [(a_0+2).a_1a_2a_3\dots] & a_i \in \{0, 2\} \text{ si } i \geq 1 \end{aligned}$$

Maintenant il est clair que les propriétés des applications contractantes utilisées dans la construction de ce modèle demeurent valables dans tout un voisinage U_Φ de Φ , et l'on prend $U = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{F}} U_\Phi$. Alors si deux actions Φ_1, Φ_2 appartiennent à U , l'identification de leurs ensembles de Cantor K_1, K_2 via le modèle $2^{\mathbb{N}} \cup 2^{\mathbb{N}} \cup 2^{\mathbb{N}}$ est un isomorphisme d'actions minimales. Puisqu'il préserve l'ordre cyclique des points il peut être prolongé en un homéomorphisme $\Pi : S^1 \rightarrow S^1$ en identifiant par paires les lacunes homologues.

Remarque 8. Dans le modèle précédent, deux points sont dans la même orbite si et seulement si les deux suites coïncident après des translations vers la gauche. Les points fixes de Γ^1 sont les suites périodiques, par exemple la suite

$$[0, a_1 a_2 \dots a_q (b_1 b_2 \dots b_r) (b_1 b_2 \dots b_r) (b_1 b_2 \dots b_r) \dots]$$

est un point fixe des puissances de

$$h_1 = ghg^{-1} \quad \text{avec } g = p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_q} \quad h = p_{b_1} p_{b_2} \dots p_{b_r} .$$

L'autre point fixe de h_1 a la période complémentaire $(\overline{b}_r \overline{b}_{r-1} \dots \overline{b}_2 \overline{b}_1)$ avec $\overline{b}_i = b_i + 2 \pmod{4}$ puisque $p_0^{-1} = f_2 p_2 f_2$.

Appelons cycles les suites finies modulo une permutation circulaire, et disons qu'un cycle est primitif s'il n'est pas un revêtement cyclique d'un cycle plus court (par exemple le cycle ((002002)) est un revêtement d'ordre deux du cycle primitif ((002))). Alors les orbites ayant un groupe d'isotropie isomorphe à \mathbb{Z} sont en bijection avec les cycles primitifs sur les symboles 0 et 2. Les deux orbites extrêmes correspondent aux cycles de longueur 1, c'est-à-dire aux suites se terminant par 000... ou 222...

Cette action minimale de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ peut en particulier être décrite par un modèle PL dont l'idée est empruntée à Sacksteder [20] : le cercle est regardé comme le segment $[0, 6]$ de la droite réelle avec identification de ses extrémités, et le groupe Γ est défini par les générateurs suivants :

f_2 est la bijection affine $[0, 1] \leftrightarrow [2, 5]$, complétée n'importe comment ;

f_3 est la rotation $x \rightarrow x + 2 \pmod{6}$.

Alors K_0 est l'ensemble triadique de Cantor dans $[0, 1]$ et l'indexation de $x \in K$ par $[a_0, a_1 a_2 a_3 \dots]$ est simplement son développement triadique :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k 3^{-k} \quad a_0 \in \{0, 2, 4\} \pmod{6} \quad a_k \in \{0, 2\} \quad \text{si } k \geq 1$$

Dans ce modèle les points fixes de Γ sont les nombres de $Q \cap K$.

Considérons maintenant l'action standard du groupe modulaire sur le cercle avec une orbite de points fixes paraboliques (le cas (P) du § 6). Ces points paraboliques sont appelés les pointes (cusps) du groupe, par référence au pavage modulaire.

Dans l'action naturelle de $PSL(2, \mathbb{Z})$ sur la droite projective $\mathbb{R} \cup \infty$, les points sont les nombres rationnels. Si les générateurs de Δ sont rebaptisés $p_0 = f_2 f_3$ et $p_1 = f_2 f_3^2$, et si $[0.]$ est le segment dont les extrémités sont les points de p_0 et p_1 , chaque point de $[0.]$ est identifié à une suite infinie sur les symboles 0 et 1 grâce au procédé de dichotomie par les points. Les générateurs de Δ opèrent sur $[0.]$

par

$$p_\epsilon : [0. b_1 b_2 b_3 \dots] \rightarrow [0. \epsilon b_1 b_2 \dots].$$

Par conjugaison on étend cette action au cercle entier, identifié à l'ensemble des suites $[b_0. b_1 b_2 \dots]$, $b_i \in \{0, 1, 2\} \text{ mod } 3$.

Par construction l'application $\Pi : K \rightarrow S^1$ qui envoie $[a_0. a_1 a_2 \dots]$ sur $[b_0. b_1 b_2 \dots]$ avec $b_i = \frac{a_i}{2}$ est un morphisme d'action minimale, et on peut énoncer :

PROPOSITION 4. Soit Φ_1 (resp. Φ_2) une représentation fidèle de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ par un groupe fuchsien de première espèce (resp. de deuxième espèce) ayant pour ensemble minimal S (resp. K). Si Φ_1 et Φ_2 ont le même degré, l'application continue $\Pi : K \rightarrow S$ définie par fusion de chaque paire de points extrémaux de K est un morphisme d'actions minimales.

De façon plus imagée : l'ensemble minimal m est obtenu en fendant le long de la feuille parabolique le feuilletage partout dense de $2M(k)$ défini par l'action standard du groupe modulaire.

Stabilité. Une conséquence immédiate de la proposition 3 est le

COROLLAIRE 6. Dans la variété à bord $M(k)$, tout feuilletage F dont le groupe structural est un groupe fuchsien Γ de deuxième espèce à un ensemble minimal m structurellement stable.

En fait la proposition 3 montre seulement la stabilité faible : tout feuilletage F'' assez proche de F' dans la C^1 -topologie des champs de plans a un ensemble minimal m'' homéomorphe à m' . On verra (§ 12) que F' a aussi la stabilité forte : l'homéomorphisme qui envoie m'' sur m' est arbitrairement C^0 -proche de l'identité si F'' est assez voisin de F' .

Malheureusement cette stabilité n'existe plus pour les feuilletages de la variété fermée $2M(k)$, qui admet aussi des feuilletages non amphicheiraux. Ceux-ci ont pour groupe structural une image du produit libre amalgamé

$$\langle a, b, \bar{a}, \bar{b} ; a^2 = \bar{a}^2 = b^3 = \bar{b}^3 = 1, ab = \bar{a}\bar{b} \rangle.$$

La stabilité des feuilletages amphicheiraux exigerait l'injectivité locale de l'application $\mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \rightarrow \text{Diff}(S^1)$ définie par le produit $(f_2, f_3) \rightarrow f_2 f_3$. Trivialement ceci n'a pas lieu si le générateur périphérique $p = f_2 f_3$ peut être plongé dans un flot. De façon plus précise :

PROPOSITION 5. Dans la variété fermée $2M(k)$, tout feuilletage amphicheiral F dont le groupe structural Γ' est un groupe fuchsien peut être approché arbitrairement (dans toute C^r -topologie) par un feuilletage $F(\Gamma', \bar{\Gamma}')$ dont toutes les feuilles sont partout denses.

Démonstration : Soient (f_2, f_3) les générateurs canoniques de Γ' , et $p = f_2 f_3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ définissons $\bar{\Gamma}' = p^t \Gamma' p^{-t}$. Ses générateurs \bar{f}_2 et \bar{f}_3 dépendent continûment de t (dans toute C^r -topologie) et satisfont la condition $\bar{f}_2 \bar{f}_3 = f_2 f_3$. Considérons l'action du sous-groupe $\{f_3, \bar{f}_3\}$ dans CP^1 . Pour les petites valeurs de t , \bar{f}_3 a un point fixe $\bar{\xi}_3 = p^t \xi_3$ proche de ξ_3 sur la trajectoire du flot p^t , et il existe dans le disque principal D un triangle géodésique d'angles $\frac{\pi}{3}$ aux sommets ξ_3 et $\bar{\xi}_3$. Ainsi le sous-groupe $\{f_3, \bar{f}_3\}$ est soit un groupe horocyclique, soit un groupe non discontinu. Dans tous les cas le groupe $\{\Gamma', \bar{\Gamma}'\}$ opère sur le cercle

principal avec des orbites partout denses.

La signification géométrique est la suivante : le feuilletage induit sur $\partial M(k)$ est invariant sous l'action des rotations qui conservent les méridiens, de sorte que les feuilletages amphicheiraux de $2M(k)$ peuvent être gauchis pas une rotation relative de $M(k)$ et $M(k^*)$ autour du miroir torique $\partial M(k)$.

Dimensions supérieures à 3. La même construction peut être effectuée en dimension quelconque, en définissant une action libre de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ sur $(S^m \setminus K) \times S^1$, et fournit un feuilletage de codimension un sur une variété de dimension $(m + 1)$, avec un ensemble minimal stable si $m \geq 3$.

Décrivons la variété quotient par une somme connexe (le long des fibres) de variétés élémentaires. Pour $\alpha = 2$ ou $\alpha = 3$, considérons l'action libre de \mathbb{Z}_α sur $S^m \times S^1$, où le générateur $\omega = \exp \frac{2i\pi}{\alpha}$ opère sur S^m par une rotation $\frac{2\pi}{\alpha}$ avec comme axe une sphère S^{m-2} (plongée de façon standard) et sur S^1 par la rotation R_α d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$. Alors l'espace-quotient $S^m \times S^1 / \mathbb{Z}_\alpha \cong S^m \times S^1$ hérite deux feuilletages de son revêtement : un feuilletage par sphères S^m transverse à une fibration par cercles, à savoir un fibré trivial $S^{m-2} \times S^1$ de fibres singulières (fibres courtes) revêtu par un fibré localement trivial (fibres longues). Retirons de chaque copie un tube invariant $T(S)_\alpha$ autour d'une fibre longue et recollons leurs bords par une application $\text{id} \times \varphi : (S^{m-1} \times S^1)_2 \rightarrow (S^{m-1} \times S^1)_3$, où la trivialisation de chaque bord $\partial T(S)_\alpha$ est induite par les feuilletages. La variété qui en résulte est un espace de Seifert M^{m+1} muni d'un feuilletage transverse dont le groupe structural Γ est engendré par $(R_2, \varphi R_3 \varphi^{-1})$, c'est-à-dire toute paire $(f_2, f_3) \in \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ à conjugaison près dans $\text{Diff}(S^1)$.

Pour $m = 2$ on obtient ainsi les feuilletages amphicheiraux de $2M(k)$. Pour $m \geq 3$ on obtient tous les feuilletages de M^{m+1} transverses aux fibres, puisque les feuilletages du revêtement sont isomorphes à la trivialisation $(S^m \setminus K) \times S^1$ (car $S^m \setminus K$ est simplement connexe). Puisque $\pi_1(M)/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, la stabilité de

l'ensemble minimal du feuilletage résulte de la même propriété pour l'action de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ sur la fibre. On peut maintenant faire une chirurgie en-dehors de l'ensemble minimal si la dimension $(m+1)$ est impaire. En effet il existe une courbe fermée μ transverse à la composante discrète des feuilletages de M^{m+1} , et qui est un représentant de la classe $a^{-1}b$ dans $\pi_1(M) = \langle a, b ; a^2 = b^3 \rangle$ (la démonstration est analogue à celle faite au § 5 pour $2M(k)$). D'autre part il existe un feuilletage lisse de la sphère S^{m+1} avec une feuille compacte [8], [26]. Soit μ' une courbe fermée transverse à ce feuilletage. Par somme connexe de la paire (M^{m+1}, S^{m+1}) le long des cercles (μ, μ') on obtient une variété simplement connexe Σ^{m+1} puisque le groupe $\langle a, b ; a^2 = b^3, a^{-1}b = 1 \rangle$ est trivial. Ceci conserve la stabilité de l'ensemble minimal car la codimension m de μ dans M^{m+1} est ≥ 3 . On peut enfin modifier Σ^{m+1} par d'autres sommes connexes. D'où

THEOREME 4. Pour toute dimension impaire $2q + 1 \geq 5$, il existe des variétés simplement connexes Σ^{2q+1} admettant des feuilletages C^∞ de codimension un, et possédant (avec quelques feuilles compactes) des ensembles minimaux exceptionnels structurellement stables.

10. - LES FEUILLES DONT L'ADHERENCE EST MINIMALE

L'ensemble minimal m introduit au § 5 contient deux types de feuilles, qui se déduisent facilement de leur revêtement $S^2 \setminus K$, grâce au sous-groupe d'isotropie de l'orbite correspondante dans la fibre S^1 sous l'action de $\Gamma^1 = \{f_2, f_3\}$. Un ensemble non dénombrable de feuilles a un sous-groupe d'isotropie trivial : elles sont donc difféomorphes à $S^2 \setminus K$. Un ensemble infini dénombrable a un sous-groupe d'isotropie isomorphe à \mathbb{Z} : elles sont donc difféomorphes à $T^2 \setminus K$.

La décomposition en morceaux élémentaires utilisée à la fin du § 9, et qui est valable pour toute dimension $m \geq 2$, fournit une bonne visualisation de ces revêtements. Quand la variété M^{m+1} est séparée en deux variétés à bord $(S^m \times S^1) \setminus T(S)_\alpha$ avec $\alpha \in \{2, 3\}$, les feuilles dans chaque moitié sont des m -sphères avec α trous. Dans une feuille de M^{m+1} , ces sphères trouées sont attachées de la même façon que les cycles $((f_2, f_2))$ et $((f_3, f_3, f_3))$ dans le graphe de l'orbite sur les générateurs f_2 et f_3 (c'est-à-dire le graphe des classes à gauches modulo le sous-groupe d'isotropie dans Γ^1). A un sous-groupe d'isotropie trivial correspond une feuille $(m-2)$ -connexe $S^m \setminus K$. Dans les autres cas le générateur du sous-groupe d'isotropie définit un cycle supplémentaire dans le graphe, et donne naissance à une anse dans la feuille $(S^{m-1} \times S^1) \setminus K$. Ce cycle primitif sur deux symboles a, b est la classe d'homotopie dans $\pi_1(M)/K = \langle a, b ; a^2 = b^3 = 1 \rangle$ du générateur d'holonomie de la feuille.

Quand le feuilletage de M^{m+1} est une fibration sur le cercle, la fibre est décrite de la même façon par le graphe du groupe abélien $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Elle est difféomorphe à $(S^{m-1} \times S^2) \# (S^{m-1} \times S^1)$ comme le montre la figure 14.

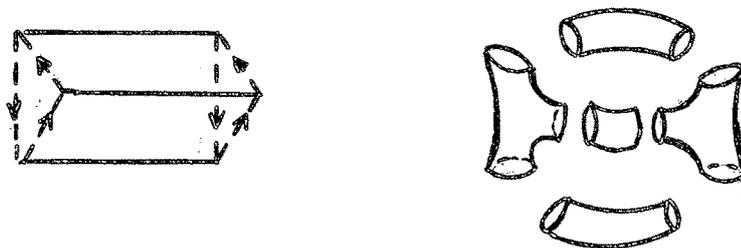


Figure 14

11. - LES GROUPES DE SCHOTTKY GENERALISES

En codimension $p > 1$, les ensembles minimaux non triviaux peuvent être des compacts sans point intérieur de types très variés. L'exemple des groupes kleinéens montre qu'un ensemble minimal peut être une sous-variété, ou un continu très compliqué, par suite de l'existence d'un sous-ensemble dense de points fixes paraboliques et loxodromiques.

Dans son mémoire [15] p. 282, Poincaré étudie le cas des groupes kleinéens obtenus par déformation de groupes fuchsien, et les classes en sept familles (la même classification est utilisée par Klein [2], dont les figures sont reproduites dans [12]). Dans la seconde famille, l'ensemble limite est une courbe de Jordan fermée : à chaque point fixe loxodromique elle apparaît comme la réunion de deux spirales, d'où une absence très marquée de différentiabilité. Dans d'autres familles l'ensemble limite contient l'adhérence d'une collection infinie de cercles tangents deux à deux, de sorte que son complémentaire a une infinité de composantes. Mais le cas le plus simple et le plus important est celui de la troisième famille, c'est-à-dire des groupes de Schottky déjà mentionnés dans l'introduction. Nous allons en donner une définition valable en toute dimension $m \geq 1$.

Le modèle abstrait des groupes de Schottky est le suivant :

Soit G un groupe libre de rang $g \geq 2$, avec générateurs h_1, h_2, \dots, h_g . Tout élément $h \in G$ admet une écriture unique sous forme d'un mot de longueur ℓ ,

$$h = h_{j_1}^{\epsilon_1} h_{j_2}^{\epsilon_2} \dots h_{j_\ell}^{\epsilon_\ell}, \text{ sur les } 2g \text{ symboles } h_j, h_j^{-1}, \text{ réduit par les relations}$$

$$h_j h_j^{-1} = h_j^{-1} h_j = 1. \text{ Soit } E_\ell \text{ l'ensemble des mots de longueur } \ell, \text{ et pour } \ell \leq n,$$

soit $p_{\ell, n} : E_\ell \leftarrow E_n$ la projection définie par troncature :

$$p_{\ell, n} : h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_\ell} \leftarrow h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_\ell} \dots h_{j_n}.$$

Le système projectif $(E_\ell, p_{\ell, n})$ admet pour limite projective (E, p_ℓ) l'ensemble E

des suites infinies sur les $2g$ symboles h_j, h_j^{-1} , réduites par les relations, muni de la projection $p_{\mathcal{L}} : E_{\mathcal{L}} \leftarrow E$ définie par troncature. Dans le graphe de G chaque suite $\sigma \in E$ peut être identifiée à un chemin infini, avec un sommet fixe pour point initial, donc à un bout du graphe puisque le graphe est un arbre. On dira que $E(G)$ est l'ensemble des bouts de G .

Munissons $g = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{N}} E_{\mathcal{L}}$ de la topologie discrète. Sa limite projective $E(G)$ est alors un espace topologique compact et totalement discontinu (limite projective de compacts discrets). Enfin $E(G)$ est parfait dès que $g \geq 2$. L'ensemble $\widehat{G} = G \cup E(G)$ peut alors être considéré comme une compactification de G par adjonction de l'ensemble de Cantor $E(G)$. Dans cette topologie une suite $\sigma \in E(G)$ admet un système fondamental de voisinages ouverts et fermés, $\{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\sigma)\}_{\mathcal{L} \in \mathbb{N}}$, où $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\sigma) = p_{\mathcal{L}}^{-1}[p_{\mathcal{L}}(\sigma)]$, ensemble des suites ayant mêmes \mathcal{L} premiers symboles que σ .

Maintenant l'action du groupe G sur lui-même par translation s'étend de façon naturelle en une action $G \times E(G) \rightarrow E(G)$, par composition d'une suite finie

$$h = h_{k_1}^{\epsilon_1} \dots h_{k_n}^{\epsilon_n} \in G \quad \text{et d'une suite infinie} \quad \sigma = h_{j_1}^{\epsilon_1} h_{j_2}^{\epsilon_2} \dots \in E, \quad \text{avec éventuelle-}$$

ment réduction. Cette translation $T_h : \sigma \rightarrow h\sigma$ est continue puisque $T_h^{-1}\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(h\sigma) = \mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\sigma)$ pour un \mathcal{L}' , de sorte que l'action $G \times E(G) \rightarrow E(G)$ est continue.

Finalement soient σ' et $\sigma = h_{j_1}^{\epsilon_1} h_{j_2}^{\epsilon_2} \dots$ deux bouts de G . Pour tout voisinage $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\sigma)$ il existe un $h \in G$ tel que $h\sigma' \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\sigma)$, à savoir $h = h_{j_1}^{\epsilon_1} \dots h_{j_1}^{\epsilon_1}$ (si $h_{j_{\mathcal{L}'}}^{\epsilon_{\mathcal{L}'}}$ se trouve être l'inverse du premier terme $h_i^{\epsilon_i}$ de σ' , il suffit de multiplier h à droite par un générateur h_j distinct de $h_i^{\pm 1}$ afin d'éviter une réduction). L'orbite de σ' par G est donc dense dans $E(G)$, et on a démontré :

LEMME 13. L'action naturelle d'un groupe libre de rang $g \geq 2$ sur l'espace de ses bouts est une action minimale.

On peut alors donner la définition suivante : un groupe de Schottky généralisé de rang $g \geq 2$ opérant sur la m -sphère S^m ($m \geq 1$) est un groupe Γ d'homéomorphismes de S^m , dont l'action sur l'adhérence de toute orbite est isomorphe à l'une des deux actions $G \times \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}$ ou $G \times E(G) \rightarrow E(G)$ du modèle précédent. Ainsi Γ opère librement et discontinûment dans le complémentaire $S^m \setminus K$ d'un ensemble de Cantor minimal.

Une réalisation analytique est donnée en dimension $m = 1$ ou $m = 2$ par le cas particulier $g \geq 2, n = 0$ du lemme 5. Définissons (de façon très restrictive) une transformation hyperbolique de S^m comme un automorphisme de S^m (dans $PSL(m+1, \mathbb{R})$) ayant deux points fixes ζ, ζ' , et qui induit une homothétie de \mathbb{R}^m par projection stéréographique depuis l'un des points fixes. Etant donnés $2g$ disques disjoints D_j, D'_j dans S^m , pour chaque $j \in \{1, \dots, g\}$ il existe un automorphisme hyperbolique h_j appliquant l'intérieur de D_j sur l'extérieur de D'_j . Alors le groupe Γ engendré par les h_j est un groupe de Schottky : une démonstration complète est donnée au § 12, théorème B).

Par le lemme 6, le groupe Γ admet le complémentaire des $2g$ disques comme région fondamentale, connexe si $m > 1$. Donc pour tout $m \geq 2$ l'espace quotient $(S^m \setminus K)/\Gamma$ est une somme connexe de g anses $S^{m-1} \times S^1$ (la surface fermée orientable M_g^2 de genre 2 si $m = 2$). La projection canonique $S^m \setminus K \rightarrow (S^m \setminus K)/\Gamma$ est le revêtement universel pour $m \geq 3$, et le revêtement régulier associé au groupe libre image de $\pi_1(M_g^2)$ si $m = 2$.

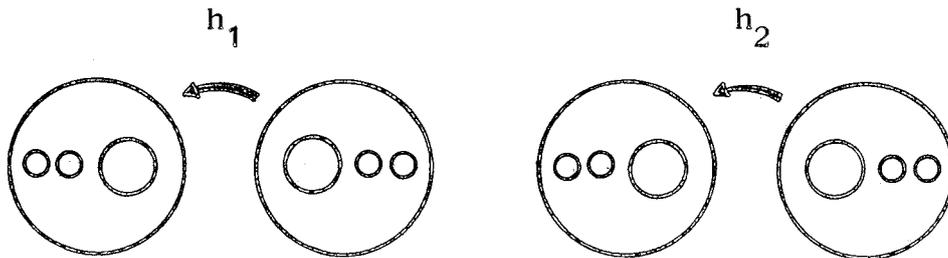


Figure 15

Considérons maintenant deux réalisations d'un même groupe libre G par des groupes de Schottky de dimensions $m \geq 2$ et $p \geq 1$, et soit K l'ensemble limite du groupe opérant sur S^m . Alors l'action produit de G sur $(S^m \setminus K) \times S^p$ est une action libre. L'espace quotient $[(S^m \setminus K) \times S^p]/G$ est le fibré trivial en sphères S^p au-dessus de $\#^p(S^{m-1} \times S^1)$. Il reçoit de son revêtement un feuilletage transverse aux fibres, ayant un ensemble minimal \mathfrak{m} dont les feuilles ont les deux types décrits au § 10. Les cycles primitifs irréductibles sur les $2g$ symboles $h_j^{\pm 1}$ indiquent la façon dont les générateurs d'holonomie des feuilles de \mathfrak{m} sont plongés dans la variété.

Un cas particulier important est celui où $m = p = 2$. Les groupes de Schottky analytiques (dans $PSL(2, \mathbb{R})$) fournissent alors des feuilletages analytiques complexes dans $(\mathbb{C}P^1 \setminus K \times \mathbb{C}P^1)/G$.

Finalement les actions minimales des groupes de Schottky sont structurellement stables par transversalité des points fixes, de sorte que les ensembles minimaux \mathfrak{m} correspondants sont stables pour $m \geq 3$ (cf. § 12 et § 13).

12. - UN THEOREME DE STABILITE

Les groupes fuchsien de deuxième espèce définis au § 4 peuvent être généralisés de deux points de vue : par action sur des sphères de dimension supérieure à deux et par introduction d'éléments renversant l'orientation. On se contente dans ce paragraphe d'esquisser ces deux idées sans prétendre à une classification complète.

Nous allons définir des groupes de transformation (dans $GL(m+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$) opèrent sur la sphère S^m avec un ensemble de Cantor K pour ensemble limite, en combinant quelques symétries élémentaires de la sphère. Quelques uns de ces groupes de symétrie de la paire (S^m, K) sont schématisés ci-dessous :

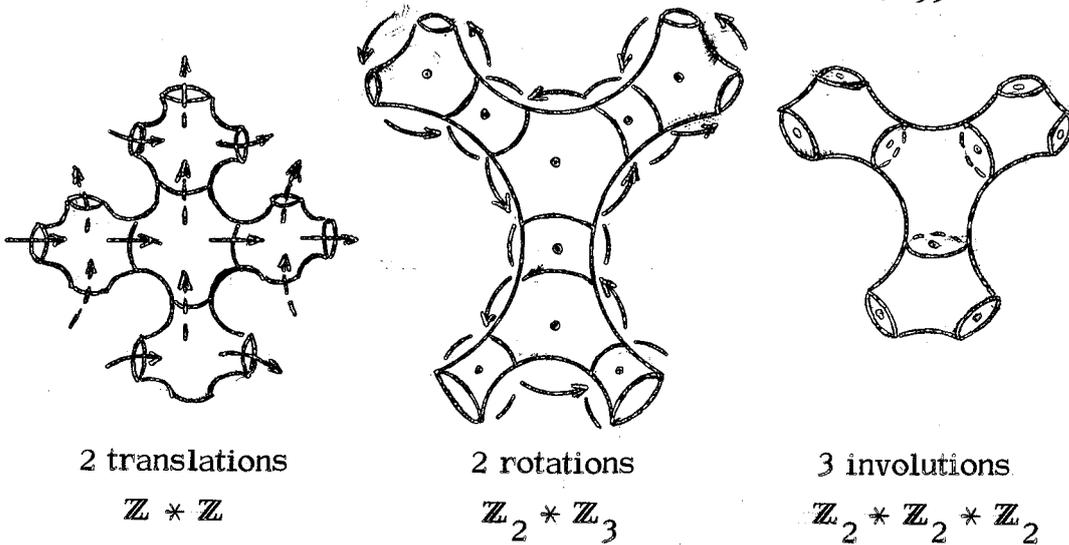


Figure 16

Définissons d'abord un modèle abstrait d'action minimale comme au § 11. Soit $G = G_1 * \dots * G_n$ un produit libre d'un nombre fini $n \geq 2$ de groupe G_i , où chaque facteur G_i est soit isomorphe à \mathbb{Z} , soit fini d'ordre α_i (non nécessairement cyclique). Soit A l'ensemble fini (alphabet) dont les éléments sont les 2 générateurs h_i, h_i^{-1} de chaque groupe infini cyclique, et la totalité des éléments non triviaux de chaque groupe G_i d'ordre fini. Alors chaque élément de G admet une écriture unique sous forme d'un mot $(a_1 a_2 \dots a_p)$ de longueur $p \geq 0$, dont les lettres a_p sont des éléments de A , et vérifient la condition :

(C) Deux lettres consécutives a_p, a_{p+1} appartiennent à des groupes G_i, G_j distincts, ou bien représentent le même générateur d'un groupe $G_i \cong \mathbb{Z}$.

Les éléments de A seront appelés éléments basiques (mots de longueur 1). La condition (C) permet d'identifier G à l'ensemble des sommets d'un arbre dont les arêtes sont les éléments de A . Soit $E(G)$ l'ensemble constitué par les suites infinies $\sigma = a_1 a_2 \dots a_p \dots$ d'éléments de A vérifiant la condition (C). On dira que $E(G)$ est l'ensemble des bouts de G (on ne se soucie pas du fait que $E(G)$ pourrait dépendre de la factorisation de G). Comme au § 11 on munit $E(G)$ de la topologie de limite projective des suites finies avec la topologie discrète. Alors $E(G)$ est un compact totalement discontinu et à base dénombrable (c'est-à-dire métrisable). De plus c'est un ensemble parfait si $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (le groupe $\langle a, b ; a^2 = b^2 = 1 \rangle$ n'a que deux bouts

ababab... et bababa...). Le groupe G opère alors par translation sur $E(G)$, par composition d'une suite finie et d'une suite infinie, suivie éventuellement d'une réduction. Comme pour les groupes libres on obtient :

LEMME 14. Soit G un produit libre de groupes finis ou cycliques infinis, et distinct de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Alors l'espace $E(G)$ des bouts de G est un ensemble de Cantor, et l'action naturelle $G \times E(G) \rightarrow E(G)$ est minimale.

Pour des raisons de simplicité, on se limite dans le théorème B ci-dessous au cas où les facteurs finis G_i sont des groupes cycliques. L'action minimale $(G, E(G))$ peut alors facilement être plongée dans une action (G, S^m) pour toute dimension m . Il suffit d'utiliser l'idée de F. Klein, qui observa la relation entre le produit libre de groupes abstraits, et la somme connexe de leurs espaces de phase lorsqu'ils sont réalisés comme groupes de transformation de la sphère. De façon plus précise : soient S_1^m et S_2^m deux copies de la sphère S^m , sur lesquelles opèrent respectivement deux groupes discontinus Γ_1 et Γ_2 . Soient $D_1^m \subset R_1$ et $D_2^m \subset R_2$ deux disques inclus respectivement dans des domaines fondamentaux de Γ_1 et Γ_2 . L'identification des 2 sphères par un difféomorphisme $\varphi : S_1^m \rightarrow S_2^m$ appliquant l'intérieur de D_1 sur l'extérieur de D_2 permet de faire opérer les deux groupes sur la même sphère. Par le lemme 6 le groupe qu'ils engendrent est le produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Pour étudier la stabilité des ensembles limites, une représentation du groupe $G = G_1 * \dots * G_n$ par un groupe Γ de C^1 -difféomorphismes de S^m sera identifié à l'image (f_1, \dots, f_n) d'un système de générateurs canoniques. Chaque f_i se déplace dans le sous-espace \mathcal{D}_i de $\text{Diff}^1(S^m)$ défini par la condition $f_i^{\alpha_i} = 1$ si le groupe $G_i \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_i}$, ou dans $\mathcal{D}_i = \text{Diff}^1(S^m)$ si $G \simeq \mathbb{Z}$. Enfin on note \mathcal{C} le produit $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ muni de la C^1 -topologie sur chaque facteur. On peut alors énoncer :

THEOREME B. Soit G un produit libre de n facteurs G_i cycliques finis ou infinis, $n \geq 2$ et $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Alors pour toute dimension $m \geq 1$, il existe un ensemble non

vide \mathcal{G}_ω de réalisations de G par des sous-groupes de $GL(m+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$, et un voisinage ouvert u de \mathcal{G}_ω dans \mathcal{G} composé de groupes de C^1 -difféomorphismes de la sphère S^m avec les propriétés :

- a) Tout groupe $\Gamma \in u$ a pour ensemble limite $\mathcal{L}(\Gamma)$ un ensemble de Cantor ;
- b) L'action minimale $(G, \mathcal{L}(\Gamma))$ est isomorphe à l'action $(G, E(G))$;
- c) On peut définir localement dans u un isomorphisme d'actions minimales :

$\Pi_\Gamma : E(G) \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma)$ tel que Π_Γ dépende continûment de Γ dans la topologie uniforme des applications de $E(G)$ dans S^m .

De plus Γ est proprement discontinu dans $S^m \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$ et cette action discontinue peut être libre si m est un nombre impair, ou si G n'a pas de facteur cyclique d'ordre α_i plus grand que deux.

La démonstration va consister à connecter des actions élémentaires. Pour raison de simplicité, on se limitera aux groupes élémentaires Γ_i engendrés par une transformation f_i de l'un des types suivants :

- (h) Les automorphismes hyperboliques définis au § 11 ;
- (r) Les rotations périodiques avec une sphère S^{m-2q} de points fixes, et les rotations périodiques sans point fixe si $m = 2q-1$ (elles sont définies en regardant S^{2q-1} comme la sphère unité de $\mathbb{R}^{2q} = \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$, et en faisant tourner chaque 2-plan \mathbb{R}^2 par une action de \mathbb{Z}_α : l'espace quotient est un espace lenticulaire) ;
- (i) Les involutions (sans point fixe) et les réflexions par rapport à une sphère S^{m-2q-1} .

La figure 16 montre un exemple très suggestif d'action de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ obtenu à l'aide de 3 involutions f_1, f_2, f_3 . Si l'involution f_i de la sphère unité de \mathbb{R}^{m+1} est définie par pivotement d'une sécante autour d'un point λ_i de l'intérieur du disque unité, il suffit que les 3 points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ soient suffisamment loin l'un de

l'autre au sens suivant : il existe 3 disques disjoints D_1^m, D_2^m, D_3^m dans S^m dont les bords $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$ sont les traces sur S^m de 3 hyperplans Π_1, Π_2, Π_3 passant respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On obtient un résultat analogue à l'aide des réflexions autour des sphères disjointes $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$.

La démonstration du théorème B peut être facilitée par l'emploi d'une métrique convenable à l'aide du lemme suivant :

LEMME 15. Identifions la sphère S^m à $\mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ par projection stéréographique, avec la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^m . Alors pour chacun des types de générateurs f_i indiqués plus haut, il existe une réalisation du groupe $\{f_i\}$ par un groupe élémentaire Γ_i admettant un domaine fondamental R_i tel que $\infty \in R_i$ et chaque élément $f \in \Gamma_i$ autre que l'identité est contractant sur R_i .

Démonstration : Pour les dimensions $m = 1$ et $m = 2$, c'est la méthode imaginée par R.L. Ford [1]. Pour toute fonction homographique $f : z \rightarrow (az + b)(cz + d)^{-1}$ avec $ad - bc = 1$, qui n'a pas ∞ pour point fixe ($c \neq 0$), la dérivée $\frac{df}{dz} = (cz + d)^{-2}$ a un module égal à 1 quand z appartient au cercle $|z + \frac{d}{c}| = |\frac{1}{c}|$, qui est appelé le cercle isométrique de f . Le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z + \frac{d}{c}| \leq \frac{1}{c}\}$ est appelé improprement disque isométrique de f , et la fonction f est contractante dans le complémentaire de D . L'extérieur de D est appliqué par f sur l'intérieur du disque isométrique D' de f^{-1} . Le complémentaire R de $D \cup D'$ est un domaine fondamental pour le groupe $\{f\}$ engendré par f , et toute puissance de f qui n'est pas l'identité applique R dans $D \cup D'$ et est contractante sur R . Les disques isométriques D et D' sont disjoints si f est hyperbolique, et sécants (sous un angle $\frac{2\pi}{\alpha}$) si f est elliptique d'ordre α (figure 17).

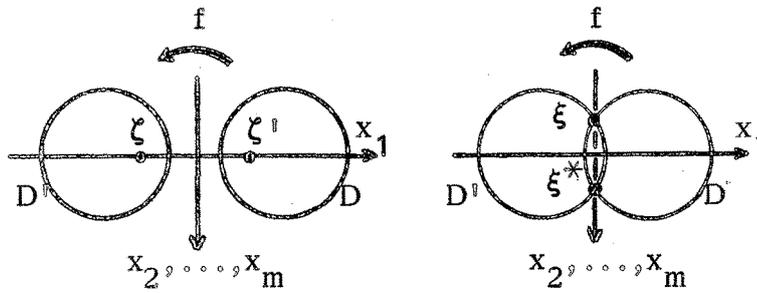


Figure 17

Supposons maintenant $m > 2$. Pour les automorphismes hyperboliques et les rotations autour d'une sphère S^{m-2} de points fixes, le résultat s'obtient par révolution des modèles plans de la figure 17 autour de l'axe x_1 dans l'espace euclidien \mathbb{R}^m , de sorte que chaque 2-plan contenant l'axe x_1 est invariant par le groupe Γ_i correspondant. Il suffit de remarquer que si $y = f(x)$ avec $x \in R_i$, $f \in \Gamma_i$, $f \neq \text{id}$, alors

$$\sum_{j=2}^m y_j^2 < \sum_{j=2}^m x_j^2.$$

Le domaine fondamental R_i est le complémentaire de la réunion

$D^m \cup D'^m$ des m -disques isométriques.

Pour une rotation avec une sphère S^{m-2q} de points fixes, on compose la rotation précédente avec une rotation euclidienne de chaque 2-plans de coordonnées $(x_2, x_3), \dots, (x_{2q-2}, x_{2q-1})$, d'angles $2\pi \frac{\gamma_2}{\alpha}, \dots, 2\pi \frac{\gamma_q}{\alpha}$ (γ_k premier avec α). Ceci conserve les disques isométriques D^m, D'^m , mais la sphère $S^{m-2} = \partial D^m \cap \partial D'^m$ est elle-même soumise à une action de \mathbb{Z}_α . Si $m = 2q-1$, l'action de \mathbb{Z}_α ainsi définie est libre et l'espace quotient S^m / \mathbb{Z}_α est l'espace lenticulaire $L^{2q-1}(\alpha; 1, \gamma_2, \dots, \gamma_q)$. Pour $m = 3$ le domaine fondamental $S^3 \setminus (D^3 \cup D'^3)$ est une lentille d'où le nom de l'espace-quotient. Pour $m = 1$ l'espace lenticulaire $L^1(\alpha)$ est le cercle S^1 .

Enfin la proposition est triviale pour les involutions et réflexions, qui ont un seul disque isométrique $D^m = D'^m$.

Démonstration du théorème B: Prenons n copies des modèles euclidiens décrits au lemme 15 et réalisant les conditions de périodicité des facteurs G_i du groupe abstrait G . La somme connexe s'obtient par superposition de ces n modèles euclidiens après des isométries telles que tous les compacts $D_i \cup D'_i$, $i = 1, \dots, n$, soient disjoints.

Le groupe Γ engendré par les Γ_i est isomorphe à G par le lemme 6, et on pourra représenter par le même symbole un élément de G et sa réalisation dans Γ .

Tous les éléments basiques d'un même groupe Γ_i satisfont alors une condition de Lipschitz, avec une constante de Lipschitz commune $k_i < 1$, sur l'ensemble compact

$\bigcup_{j \neq i} (D_j \cup D_j')$ qui est inclus dans l'intérieur de R_i . Soit k la plus grande de ces constantes k_i pour $i = 1, \dots, n$. Soit δ un majorant des diamètres de tous les disques δ .

Maintenant à chaque élément basique $a \in \Gamma_i$ associons un compact basique $[a]$ défini de la façon suivante : si $\Gamma_i \cong \mathbb{Z}$, $[a]$ est le disque isométrique de a^{-1} , c'est-à-dire $[a] = \bigcup_{l > 0} a^l(R_i)$. Si Γ_i est fini, $[a]$ est l'image par a de \bar{R}_i . Puisque $[a]$ est toujours inclus dans D_i ou D_i' , son diamètre est majoré par δ .

Tout élément $f \in \Gamma$ s'écrit comme mot réduit sur les éléments basiques :

$f = a_1 \dots a_{l+1}$. Définissons le symbole $[a_1 a_2 \dots a_{l+1}]$ comme étant l'image de $[a_{l+1}]$ par l'application $a_1 a_2 \dots a_l$. Le compact $[a_1 \dots a_l a_{l+1}]$ est inclus dans l'intérieur de $[a_1 \dots a_l]$ et son diamètre est majoré par $k^l \delta$.

Finalement soit $\sigma \in E(G)$ un bout de G , exprimée comme suite infinie d'éléments basiques satisfaisant la condition (C) : $\sigma = a_1 a_2 \dots a_l \dots$. Alors la suite correspondante de compacts emboîtés :

$$[a_1] \leftarrow [a_1 a_2] \leftarrow [a_1 a_2 a_3] \leftarrow \dots \leftarrow [a_1 a_2 \dots a_l] \leftarrow$$

est une base d'un filtre de Cauchy convergent vers un point $[\sigma] \in S^m$, et constitue un système fondamental de voisinages de σ . Tout point limite de Γ est atteint par une telle filtration, puisque Γ est proprement discontinu dans le complémentaire de tout ϵ -voisinage de l'ensemble des points $[\sigma]$ (en effet un tel ϵ -voisinage contient la réunion finie K_l des ensembles $[a_1, \dots, a_{l+1}]$ dès que $k^l \delta < \epsilon$). On a donc défini ainsi une application surjective $\sigma \rightarrow [\sigma]$ de l'ensemble des bouts $E(G)$ sur l'ensemble limite $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Cette application Π_Γ est injective puisque, si deux bouts distincts σ et σ' diffèrent par le l -ième terme, $a_l \neq a'_l$, les points limites $[\sigma]$ et $[\sigma']$

sont séparés par les voisinages disjoints $[a_1 \dots a_p]$ et $[a_1 \dots a_{p+1}]$. Finalement Π_Γ est continue, et donc un homéomorphisme, puisqu'un système fondamental de voisinages de σ (à savoir les $\{\cup_1(\sigma)\}_{1 \in \mathbb{N}}$ définis au § 11) est envoyé sur un système fondamental de voisinages de $[\sigma]$ dans $\mathfrak{L}(\Gamma)$ (à savoir les compacts $\{\mathfrak{L}(\Gamma) \cap [a_1 \dots a_1]\}_{1 \in \mathbb{N}}$). Par construction Π_Γ induit un isomorphisme d'actions $(G, E(G)) \rightarrow (G, \mathfrak{L}(\Gamma))$.

Dans cette construction de l'ensemble limite $\mathfrak{L}(\Gamma)$, le point fixe attractif ζ d'un élément $h \in \Gamma$ est associé à une suite périodique $\sigma \in E(G)$. Chaque orbite à sous-groupe d'isotropie \mathbb{Z} est donc associée à un cycle primitif $((a_1 \dots a_p))$ autre qu'un élément basique d'ordre fini. Si h est un conjugué de $(a_1 \dots a_p)$, le spectre de sa dérivée Dh au point fixe ζ est contenu dans le disque de rayon k^{l-1} .

On peut alors remarquer que la démonstration utilise seulement le fait que les applications basiques (a_i) , en nombre fini, sont contractantes sur les compacts basiques $[a_j]$, en nombre fini. Ainsi la stabilité de $\mathfrak{L}(\Gamma)$ sous les perturbations des générateurs canoniques (donc des $a_i \in A$) résulte d'arguments standard sur les contractions (cf. [6]) : Si l'ensemble limite $\mathfrak{L}(\Gamma)$ d'un groupe Γ est filtré comme ci-dessus, alors Γ a un voisinage \mathfrak{u}_Γ tel que pour tout $\bar{\Gamma} \in \mathfrak{u}_\Gamma$, et avec les mêmes ensembles basiques de départ $[\bar{a}] = [a]$, chaque point limite $[\bar{\sigma}]$ est la limite d'une base de filtre

$$[a_1] \leftarrow [a_1 a_2] \leftarrow \dots \leftarrow [a_1 a_2 \dots a_p] \leftarrow$$

Nous allons montrer que l'ensemble limite dépend continûment des générateurs canoniques.

Conservons les notations précédentes, où δ est un majorant des diamètres des ensembles basiques $[a_j]$, et $k < 1$ une constante de Lipschitz uniforme de toutes les applications basiques a_i sur les compacts basiques $[a_j]$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier l tel que $k^l \delta < \frac{\epsilon}{4}$. Soit K_l la réunion des ensembles $[a_1 \dots a_l a_{l+1}]$ de longueur $l+1$. C'est un voisinage compact qui approche $\mathfrak{L}(\Gamma)$ à

moins de $\frac{\epsilon}{4}$. Puisque chaque application basique dépend continûment (dans la C^1 -topologie) des générateurs canoniques, il y a un voisinage $U_\epsilon(\Gamma)$ de Γ tel que, pour tout groupe $\bar{\Gamma} \in U_\epsilon(\Gamma)$, l'ensemble fini d'applications basiques \bar{a}_i de $\bar{\Gamma}$ admet, sur le compact $\bar{K}_0 = K_0$, une constante de Lipschitz $\bar{k} < 2\frac{1}{\epsilon}k$. Alors le voisinage \bar{K}_ρ approche $\mathcal{L}(\Gamma)$ à moins de $\frac{\epsilon}{2}$ près. Enfin il y a seulement un nombre fini d'éléments de longueur $(\ell + 1)$ dans Γ , et ils dépendent continûment des générateurs. En réduisant au besoin la taille de $U_\epsilon(\Gamma)$, on peut supposer que pour tout $\bar{\Gamma} \in U_\epsilon(\Gamma)$, le point fixe attractif ζ de chaque application $(a_1 \dots a_\ell a_{\ell+1})$ est déplacé de moins de $\frac{\epsilon}{4}$. Si un point limite $\sigma \in \mathcal{L}(\Gamma)$ est dans $[a_1 \dots a_\ell a_{\ell+1}]$, le point homologue $[\bar{\sigma}] = \Pi_{\bar{\Gamma}} \circ \Pi_{\Gamma}^{-1}[\sigma]$ est dans $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_\ell \bar{a}_{\ell+1}]$. Ainsi pour tout $\bar{\Gamma} \in U_\epsilon(\Gamma)$ la distance entre $[\sigma]$ et $[\bar{\sigma}]$ est inférieure à $\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$. L'homéomorphisme $\Pi_{\bar{\Gamma}} \circ \Pi_{\Gamma}^{-1}$ qui transporte $\mathcal{L}(\Gamma)$ sur $\mathcal{L}(\bar{\Gamma})$ déplace les points de moins de ϵ , et l'application locale $\Gamma \rightarrow \Pi_{\Gamma}$ est continue dans la topologie uniforme. Ceci achève la démonstration du théorème B.

Remarque 9. Chaque groupe élémentaire Γ_i admet au moins un cercle invariant par chaque point de S^m (Dans le cas de rotations, ce sont les trajectoires d'un flot périodique qui étend l'action périodique de \mathbb{Z}_α - les fibres de la fibration de Hopf dans le cas de rotations sans point fixe). On peut alors connecter les groupes Γ_i de façon que Γ ait un cercle invariant S - un cercle principal - et induise donc un groupe fuchsien de dimension 1 sur S . L'ensemble de Cantor $\mathcal{L}(\Gamma)$ est alors situé sur S . Mais cette propriété est évidemment instable.

En dimension $m > 1$, le théorème B est encore valable pour des groupes finis G_i qui ne sont pas cycliques. Considérons l'exemple suivant : Soit $G \subset SO(3)$ le groupe de l'icosaèdre, engendré par 3 rotations d'angles $\frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ dont les axes rencontrent la sphère S^2 en 3 points ξ_2, ξ_3, ξ_5 qui sont les sommets d'un triangle sphérique d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. C'est un groupe fini d'ordre 60, opérant sur la sphère S^2 avec points fixes. Soit D^2 un disque contenu dans un domaine

fondamental, et i une involution ayant D^2 pour domaine fondamental. Le groupe $G * \mathbb{Z}_2$ engendré par G et $\{i\}$ admet pour ensemble limite un ensemble de Cantor, dont la symétrie interne est celle de l'icosaèdre, multipliée "ad infinitum" par les involutions.

Soit maintenant $\tilde{G} = \pi^{-1}(G)$ le relèvement de G dans le revêtement à deux feuillets $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$. Le groupe \tilde{G} opère donc sans points fixes sur S^3 (la variété quotient est une sphère d'homologie : c'est l'espace de Seifert $\{-1 ; 0, 3 ; (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$). Adjoignons à \tilde{G} une rotation d'ordre 2 autour d'un cercle contenu dans un domaine fondamental R de \tilde{G} , et ayant elle-même une boule $D^3 \subset R$ pour domaine fondamental. On obtient ainsi une action de $\tilde{G} * \mathbb{Z}_2$ sur S^3 , avec un cercle de points fixes, et un ensemble de Cantor K de points limites. L'action libre évidente de $G * \mathbb{Z}_2$ sur $(S^3 \setminus K) \times S^2$ munit la variété-quotient M^5 d'un feuilletage de codimension 2 dont l'ensemble minimal possède, transversalement, la symétrie de l'icosaèdre.

13. - FEUILLETAGES TRANSVERSES A DES FIBRATIONS AVEC FIBRES SINGULIERES

Les constructions du § 12 permettent de construire une large classe de variétés ayant les propriétés des espaces de Seifert du théorème A, c'est-à-dire un feuilletage avec ensemble minimal non-trivial transverse à un feuilletage par feuilles compactes.

Soit $\psi : G \rightarrow G'$ un épimorphisme entre deux produits libres de groupes cycliques satisfaisant les conditions du théorème B. Supposons G et G' réalisés par des groupes de transformations Γ et Γ' opérant sur les sphères S^m et S^p , $m \geq 2$, $p \geq 1$. Alors G opère sur le produit $[S^m \setminus \mathcal{L}(\Gamma)] \times S^p$ par $g(x, y) = (gx, \psi gy)$. Chaque fois que cette action produit est libre, l'espace des orbites est une variété fermée M^{m+p} munie de deux feuilletages transverses : un feuilletage $F(\Gamma')$ avec

ensemble minimal exceptionnel, et une fibration par sphères S^p , avec éventuellement des "fibres singulières" S^p/\mathbb{Z}_α (espaces lenticulaires ou espaces projectifs).

1) Si l'action de Γ sur $S^m \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$ est libre, la codimension p est un nombre quelconque ≥ 1 , et M^{m+p} est un fibré localement trivial en sphères S^p au-dessus d'une variété $B = [S^m \setminus \mathcal{L}(\Gamma)]/\Gamma$, qui est une somme connexe d'espaces lenticulaires $L^m(\alpha)$, d'espaces projectifs RP^m , et d'anses $S^{m-1} \times S^1$.

2) Si certains facteurs Γ_i n'opèrent pas librement sur S^m , ils doivent être représentés par des facteurs isomorphes Γ_i^p opérant librement sur la fibre S^p . Si Γ_i est d'ordre $\alpha_i > 2$, ceci exige que p soit un nombre impair et que l'action de \mathbb{Z}_{α_i} sur S^p soit réalisée par des rotations sans point fixe. Par exemple, si Γ_i est un groupe de rotations autour d'une sphère S^{m-2} , on obtient dans M^{m+p} un fibré $S^{m-2} \times L^p(\alpha)$ de fibres singulières $L^p(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_q)$ dont le type est défini par l'ordre α et un multidegré $(\beta_1, \dots, \beta_q)$, β_k premier avec α . Les fibres singulières des espaces de Seifert usuels ($p = 1$) doivent être considérées comme des espaces lenticulaires ou des espaces projectifs de dimension 1.

Comme au § 9, ces variétés peuvent évidemment être décrites comme sommes connexes le long des fibres de variétés élémentaires $S^m \times S^p/G_i$, ce qui permet de donner un modèle simple pour les divers types de fibres singulières.

Dans le cas $m = 2, p = 1$, cette classe de variétés de Seifert généralise celle du théorème A, puisque l'espace transverse à la fibration, $B^2 = M^3/G$, peut être n'importe quelle surface compacte, orientable ou non. En particulier le fibré trivial $B^2 \times S^1$ appartient à cette classe pour toute surface compacte B^2 , à l'exception de S^2, T^2, RP^2 et le tore de Klein $RP^2 = RP^2$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de stabilité pour ces feuilletages :

COROLLAIRE DU THEOREME B. Soient Γ et Γ' deux réalisations d'un même groupe G comme dans le théorème B, par des groupes de transformation opérant sur S^m et S^p , $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorphisme. Alors si l'action produit de Γ sur $[S^m \setminus \mathcal{L}(\Gamma)] \times S^p$ définie par $g(x,y) = (gx, \Phi gy)$ est libre, et si la dimension m est au moins égale à 3, le feuilletage $F(\Phi)$ induit sur la variété quotient admet un ensemble minimal exceptionnel structurellement stable.

Démonstration : Tout feuilletage \overline{F} suffisamment proche de F est encore transverse aux fibres S^p , et son image réciproque dans le revêtement $(S^m \setminus K) \times S^p$ est une déformation isotropique du feuilletage par $\{(S^m \setminus K) \times \cdot\}$, puisque $S^m \setminus K$ est simplement connexe. Il en résulte que \overline{F} définit une représentation $\overline{\Phi}$ de G dans le groupe des difféomorphismes d'une fibre-base non singulière, et $\overline{\Phi}$ est un isomorphisme sur chaque facteur cyclique. Par le théorème de continuité des équations différentielles le groupe image $\overline{\Gamma}' = \overline{\Phi}(G)$ dépend continûment du champ de plans \overline{F} dans la C^1 -topologie. Ainsi la stabilité de $\mathcal{L}(\Gamma')$ sous l'effet des perturbations de Γ' implique la stabilité de l'ensemble minimal m de F sous l'effet des perturbations du feuilletage.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.L. FORD, Automorphic functions, Mc Graw-Hill, New York (1929).
- [2] R. FRICKE and F. KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Vol 1, Teubner, Leipzig (1897), 634 p.
Vol 2, Teubner, Leipzig (1901-1912), 668 p.
- [3] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Ser 3, 16 (1962), pp. 367-397.
- [4] G. HECTOR, Quelques exemples de feuilletages, to appear in Ann. Inst. Fourier.
- [5] M. HEINS, Fundamental polygons of fuchsian and fuchsoid groups, Ann. Ac. Sci. Fenn., Ser AI, 337 (1964), pp. 3-30.
- [6] M. HIRSCH and C. PUGH, Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math. vol XIV) AMS (1970), pp. 133-163.
- [7] N. KOPELL, Commuting diffeomorphisms, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math. vol. XIV) AMS (1970), pp. 165-184.
- [8] H.B. LAWSON, Codimension-one foliations of spheres, Ann. of Math. 94 (1971), pp. 494-503.
- [9] J. LEHNER, Discontinuous groups and automorphic functions, Math. Surveys AMS n° VIII (1964), 425 p.
- [10] J. LEHNER and M. NEWMAN, Real two-dimensional representations of the modular group, Am. J. Math. 87 (1965) pp. 945-954.
- [11] ----- Real two-dimensional representations of the free product of two finite cyclic groups, Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966), pp. 135-141.
- [12] W. MAGNUS, Non euclidean tessellations and their groups, Academic Press (1974)
- [13] M. NEWMAN, Integral matrices, Academic Press (1972)
- [14] P. ORLIK, E. VOGT, H. ZIESCHANG, Zur Topologie gefaserner dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Topology 6 (1967) pp. 49-64.
- [15] H. POINCARÉ, Oeuvres vol. 2, Gauthier-Villars, Paris (1916)
Theorie des groupes fuchsien (1881), pp. 108-168
Mémoire sur les groupes kleinéens (1883), pp. 258-299.

- [16] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Herman, Paris (1952).
- [17] ----- Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955), pp. 89-115.
- [18] ----- Sur les structures feuilletées de codimension un et sur un théorème de M.A. Denjoy, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961) pp. 185-200.
- [19] H. ROSENBERG and R. ROUSSARIE, Some remarks on stability of foliations, J. differential geometry 10 (1975), pp. 207-219.
- [20] R. SACKSTEDER, On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14 (1964) pp. 221-226.
- [21] ----- Foliations and pseudogroups, Am. J. Math. 87 (1965) pp. 79-102.
- [22] F. SCHOTTKY, Über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, J. Reine Angew. Math. 83 (1877), pp. 300-351.
- [23] O. SCHREIER, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), pp. 167-169.
- [24] H. SEIFERT, Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume, Acta Math. 60 (1933), pp. 147-238.
- [25] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, Bull. AMS 73 (1967), pp. 747-817.
- [26] I. TAMURA, Foliations and spinnable structures on manifolds, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973) pp. 197-214.
- [27] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Invent. Math. 3 (1967), pp. 308-333, and 4 (1967) pp. 87-117.
- [28] R.F. WILLIAMS, One-dimensional non-wandering sets, Topology 6 (1967), pp. 473-487.
- [29] J. WOOD, Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math. 89 (1969), pp. 336-358.
- [30] ----- Bundles with totally disconnected structure groups, Comment. Math. Helvet. 46 (1971), pp. 257-273.
- [31] ----- Foliated S^1 -bundles and diffeomorphisms of S^1 , Dynamical systems (Proc. Symp. Salvador, Brazil, 1971), Academic Press (1973), pp. 671-681.