UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 126 75-30

STABILITE STRUCTURELLE EQUIVARIANTE

(deuxième partie)

par

V . POENARU

INTRODUCTION

Ceci continue le programme commencé dans [9], [10]. Le principal résultat de ce travail est la "démonstration directe" du

THEOREME D'OUVERTURE : Soit G un groupe de Lie compact sur les variétés C^∞ compactes X et Y. Soit $f \in C^\infty_G(X,Y)$ une application équivariante, infinitésimalement stable. Il existe un voisinage (dans la topologie C^∞)

$$f \in N \subset C^\infty_G(X,Y)$$

tel que tout $f' \in N$ est infinitésimalement stable.

Démonstration "directe" veut dire qu'on utilise que la forme "déformations finies lisses"du théorème de stabilité et qu'on développe l' interprétation en termes de jets de la stabilité inifinitésimale.

La technique qu'on introduit constitue, en principe , un morceau important de l'implication :

stabilité ==> stabilité infinitésimale (dans le contexte équivariant).

Le résultat et les méthodes, généralisent [7] . (Voir aussi [5] , [8])

On espère pouvoir donner la démonstration complète de stabilité ==> stabilité infinitésimale dans une troisième partie de ce mémoire.

Dans ce travail on donne, aussi un théorème de smi-continuité qu'on va expliquer maintenant. Soit X une G-variété , $x \in X$ et $Gx \subset X$ l'orbite de x . On considère le groupe d'isotropie G_x et la représentation "slice", canonique :

$$G_x \xrightarrow{\Phi_x} \mathrm{Aut}(T_xX / T_xGx) .$$

A équivalence près ceci est un invariant de l'orbite Gx .

Maintenant, pour toute représentation d'un groupe de Lie compact :

$$G \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(R^n) = GL(R,n)$$

on va associer un nombre $\mathrm{ord}(G,\Phi)$ défini de la manière suivante : On considère l'algèbre $R[x]^G$ des polynômes G-invariants $(x \in R^n)$, qui, d'après Hilbert [3], [13] , possède toujours un nombre fini de générateurs $\rho_1 , \dots , \rho_k$. On définit :

$$\boxed{\operatorname{ord}(G,\Phi) = \min_{\rho}(\max_{i}(\deg \rho_i))}$$

Pour chaque G-orbite de X on peut donc attacher l'ordre de la représentation slice (voir [2]) :

$$\operatorname{ord}(Gx) = \operatorname{ord}(G_x , \Phi_x) .$$

On a le :

THEOREME DE SEMICONTINUITE : Soit G un groupe de Lie compact, opérant sur la variété X . Pour chaque orbite $Gx \subset X$, il existe un voisinage N de Gx , dans l'espace des orbites, tel que, si Gx' est dans N , alors :

$$\operatorname{ord}(Gx') \leq \operatorname{ord}(Gx)$$

Ce théorème est utilisé dans la démonstration du théorème d'ouverture, mais il peut y être remplacé, très vraisemblablement, par des arguments plus simples.

D'autre part, on a pensé qu'il présente un intérêt indépendant.

Remarquons aussi qu'une fois qu'on a prouvé que si f est infinitésimalement stable, tout germe de déformation de f de dimension finie et lisse se remonte à $\mathrm{Diff}_G X \times \mathrm{Diff}_G Y$, et que la stabilité infinitésimale est une condition ouverte, on a un nouveau moyen pour démontré le théorème de stabilité (pas forte) sans utiliser la catégorie $C^{0,\infty}$, que certains lecteurs voudront, peut être, éviter.

Je remercie J. Bochnak pour les conversations très utiles que j'ai eues avec lui.

CHAPITRE I.- ACTIONS ORTHOGONALES ET POLYNÔMES INVARIANTS.

1) COMPLEMENTS SUR LA THEORIE DES INVARIANTS.

Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement sur $R^n \ni x$. On considère l'algèbre des polynômes G-invariants $R[x]^G$. D'après Hilbert [3], [13] il est toujours possible de trouver un nombre fini de polynômes (homogènes, de degré > 0) :

$$\rho_1(x), \ldots\ldots, \rho_k(x) \in R[x]^G ,$$

qui engendrent $R[x]^G$ en tant que R-algèbres. La décomposition en polynômes homogènes (qui seront automatiquement invariants) fait de $R[x]^G$ une R-algèbre graduée :

$$R[x]^G = \sum_{i \geq 0} R[x]_i^G .$$

Soit

$$R[x]_+^G = \sum_{i \geq 1} R[x]_i^G$$

l'idéal des polynômes invariants s'annulant à l'origine.

LEMME 1.1. : *Soit*

$$\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x) \in R[x]^G$$

un système de générateurs de l'algèbre $R[x]^G$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Les* ρ_i *forment une base de l'espace R-vectoriel*

$$R[x]_+^G / (R[x]_+^G)^2 .$$

b) *Il n'existe pas de relation polynomiale du type*

$$\rho_j = P(\rho_1, \ldots, \rho_{j-1}, \rho_{j+1}, \ldots\ldots, \rho_k) .$$

Démonstration :

On suppose que les ρ_i ont été numérotés de telle façon que :

$$i \geq j \Longrightarrow \deg \rho_i \geq \deg \rho_j .$$

Supposons qu'on ait une relation

$$\rho_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \rho_i + \sum \mu_\alpha \rho^\alpha$$

où λ_i , $\mu_\alpha \in R$, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_k)$ est un multi-indice avec $\alpha_j = 0$, $|\alpha| \geq 2$.

Une telle relation implique :

$$\rho_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \rho_i \ (\mathrm{mod}(R[x]_+^G)^2) .$$

Donc a) ==> b) .

Supposons maintenant qu'il y ait une relation non-triviale

$$\sum_1^k \lambda_i \rho_i \equiv o\ (\mathrm{mod}(R[x]_+^G)^2)$$

$(\lambda_i \in R)$. Soit $i_o \in (1,\ldots,k)$ le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$. Au niveau de $R[x]^G$, la relation ci-dessus donne :

$$(1) \qquad \rho_{i_o} = \sum_{j > i_o} \mu_j \rho_j + \sum_{\alpha \in S} \chi_\alpha \rho_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \rho_k^{\alpha_k}$$

où S est un ensemble (fini) de multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_k)$ tels que $|\alpha| \geq 2$.

Soit $r_i = \deg \rho_i$. La relation (1) doit être encore vraie quand on la restreint aux termes de degré r_{i_o} . Donc :

$$(2) \qquad \rho_{i_o} = \sum_{j \in S_1} \mu_j \rho_j + \sum_{\alpha \in S_2} \chi_\alpha \rho_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \rho_k^{\alpha_k}$$

où $S_1 = \{$l'ensemble des indices $j > i_o$ tels que $\deg \rho_j = r_{i_o}\}$ et $S_2 = \{$ l'ensemble des multi-indices $\alpha \in S$, tels que $\sum_i r_i \alpha_i = r_{i_o}$ $\}$.

On remarque que dans le membre droit de (2), le polynôme ρ_{i_o} n'apparait pas . On peut donc l'exprimer à l'aide des autres ρ_i . Donc b) ==> a) .

Par définition, un système de générateurs $\{\rho_i\}$, satisfaisant aux conditions a), b) est dit minimal. C'est évident qu'on peut toujours trouver de tels systèmes.

DEFINITION. - Soit G un groupe de Lie compact et $G \xrightarrow[\Phi]{} O(n)$ une représentation orthogonale de G . Soit $\rho = \{\rho_1, \ldots\ldots, \rho_k\}$ un système de générateurs minimal de $R[x]^G$.

On définit :

$$\operatorname{ord}(G, \Phi) = \min_{\rho}\{\max_{i} \deg \rho_i\} .$$

Il est entendu que ρ parcourt, içi, les systèmes minimaux.

C'est évident que si $\{\rho_i\}$ est un système de générateurs pas nécessairement minimal, on a :

$$\max_i(\deg \rho_i) \geq \operatorname{ord}(G, \Phi) .$$

On verra plus tard que pour n'importe quel ρ minimal (pour Φ), on a que $\max r_i = \operatorname{ord}(G, \Phi)$.

LEMME 1.2. - Soient

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ & O(n) \subset GL(n,R) \\ G \arrow[ur, "\Phi_2"'] & \end{tikzcd}$$

deux représentations équivalentes, c'est à dire telles qu'il existe $\psi \in GL(n,R)$, avec

$$\Phi_2 = \psi \circ \Phi_1 \circ \psi^{-1} .$$

Alors $\operatorname{ord}(G, \Phi_1) = \operatorname{ord}(G, \Phi_2)$.

En effet, on passe d'une algèbre de polynômes invariantes à l'autre, par simple changement de coordonnées .

A partir de cette remarque on peut définir $\operatorname{ord}(G, \Phi)$ pour une représentation $G \xrightarrow[\Phi]{} GL(n,R)$.

LEMME 1.3. - Soient $U \subset R^n$, $V \subset R^m$ deux ouverts, et $C^\infty(U)$, $C^\infty(V)$ les R-algèbres de fonctions C^∞ respectives, munies de la topologie C^∞, compacte-ouverte.

On se donne :

$$f \in C^{\infty}(U,V) \ ,$$

<u>ce qui induit</u> :

$$C^{\infty}(U) \xleftarrow{f^*} C^{\infty}(V) \ .$$

<u>Soit $\overline{f^*C^{\infty}(V)} \subset C^{\infty}(U)$ l'adhérence de $f^*C^{\infty}(V)$</u> .

<u>Pour tout $\varphi \in \overline{f^*C^{\infty}(V)}$ et $a \in U$ il existe $\psi \in C^{\infty}(V)$ tel que</u> :

$$T_a\varphi = \hat{f}_a(T_{f(a)}\psi) \ . \quad "$$

[Içi $T_a\varphi \in R[[x-a]]$ est le développement Taylorien formel de φ au point a , et $\hat{f}_a$ est le morphisme canonique

$$R[[x-a]] \xleftarrow{\hat{f}_a} R[[y-f(a)]]$$

induit par le développement Taylorien au point a de f] .

<u>Démonstration</u> : (comparer à Glaeser [4])

On considère la structure naturelle d'espace de Fréchert sur $R[[x-a]]$ et les morphismes d'espaces vectoriels topologiques :

$$R[[x-a]] \xleftarrow{T_a} C^{\infty}(U) \xleftarrow{f^*} C^{\infty}(V) \ .$$

On a :

$$T_a(f^*C^{\infty}(V)) \subset T_a(\overline{f^*C^{\infty}(V)}) \subset \overline{T_a(f^*C^{\infty}(V))}.$$

Notre conclusion est que :

$$T_a(f^*C^{\infty}(V)) = T_a(\overline{f^*C^{\infty}(V)}),$$

et pour la prouver, il suffit de montrer que $T_a(f^*C^{\infty}(V)) \subset R[[x-a]]$ est fermée. Mais Image($T_a \circ f^*$) est fermée, si et seulement si

$$\text{Image}\,(R[[x-a]]' \xrightarrow{{}^t(T_a \circ f^*)} \{\text{distribution dans } V\})$$

est fermée. $R[[x-a]]'$ s'identifie aux distributions de support a (donc aux combinaisons linéaires finies de la fonction de Dirac $\delta(x-a)$ et de ses dérivées). On voit que :

$${}^t(T_a \circ f^*)\, R[[x-a]]'$$

est un sous-espace vectoriel contenu dans les distributions de support f(a) . Mais ceci est toujours un fermé , ce qui finit la démonstration.

LEMME 1.4. Soit $x \in R^n$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$; $\psi_1, \ldots, \psi_q \in R[x]$.

On va supposer que :

a) Les φ_i , ψ_j sont homogènes.

b) Il n'existe pas de relation polynômiale de la forme

$$\psi_j = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{j-1}, \psi_{j+1}, \ldots, \psi_q) .$$

c) Il existe des relations polynômiales :

$$\varphi_i = P_i(\psi_1, \ldots, \psi_q) \quad (i=1, \ldots, p)$$

$$\psi_j = Q_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \quad (j=1, \ldots, q) .$$

Dans ces conditions :

$$\max(\deg \varphi_i) \geq \max(\deg \psi_j) .$$

Démonstration :

Soit :

$$\varphi_i = P_i(\psi_1, \ldots, \psi_q) = \Sigma \lambda_{\alpha,i} \psi_1^{\alpha_1}, \ldots, \psi_q^{\alpha_q} .$$

Par homogénéité, cette relation reste vraie si l'on garde seulement les

$$\alpha \in S_i \quad , \text{où}$$

$$S_i = \{\text{l'ensemble des } \alpha \text{ tels que } \sum_j \alpha_j \cdot \deg \psi_j = \deg \varphi_i\} .$$

Donc :

$$\varphi_i = \sum_{\alpha \in S_i} \lambda_{\alpha,i} \psi_1^{\alpha_1}, \ldots, \psi_q^{\alpha_q} .$$

Quel que soit $j \in \{1, \ldots, q\}$, il existe un $i(j) = i \in \{1, \ldots, p\}$ et un $\alpha = \alpha(j) \in S_i$ tel que

$$\alpha_j \neq 0 .$$

(autrement on pourrait exprimer ψ_j , par une fonction polynôme des $\psi_h (h \neq j)$).

Donc :

$$\deg \varphi_{i(j)} = \sum_\ell \alpha(j)_\ell \deg \psi_\ell$$

et $\alpha(j)_j \neq 0$. Il s'ensuit que

$$\deg \psi_j \leq \deg \varphi_{i(j)} ,$$

ce qui finit la démonstration.

2) DEMONSTRATION DU THEOREME DE SEMI-CONTINUITE.-

Soit $x \in X$, $Gx \subset X$ l'orbite de x et G_x le groupe d'isotropie de x, avec sa représentation slice :

$$G_x \xrightarrow{\Phi_x} \mathrm{Aut}(T_xX/\,T_xG\,x) \; .$$

On va désigner T_xX/T_xGx par $V=V_x$.

On va considérer le produit -tordu : $G \times_{G_x} V$. Je rappelle que $G \times_{G_x} V$ est le quotient du produit cartésien $G \times V$ par la relation d'équivalence

$$[g,v] \equiv [g\,h\,,\,h^{-1}v] \quad (h \in G_x) \; .$$

Ce"produit tordu" possède une structure naturelle de G-variété (en fait c'est l'espace total d'un G-fibré de base $G/G_x = Gx$) . Par un théorème classique [2], [6] il existe un voisinage tubulaire invariant de $Gx \subset X$, isomorphe à $G \times_{G_x} V$ (en tant que G-variété). Sans perte de généralité, on peut supposer l'action slice de G_x sur V_x orthogonale.

LEMME 1.5. Soit $y \in V_x$ et $G_xy \subset V_x$ l'orbite de y . Les représentations slice des orbites $G_xy \subset V_x$ et $Gy \subset X$ sont isomorphes. C'est à dire qu'on a un diagramme commutatif où les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} (G_x)_y & \xrightarrow{\text{slice}} & \mathrm{Aut}(T_yV_x/T_yG_xy) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ G_y & \xrightarrow{\text{slice}} & \mathrm{Aut}(T_yX/T_yGy) \end{array} \; .$$

Démonstration :

Un petit disque "slice" (c'est à dire transversal et de dimension minimale) à G_xy dans V_x est aussi slice à Gy dans X . Ceci donne l'isomorphisme (canonique) des espaces vectoriels T_yV_x/T_yG_xy et $T_y\,X/T_y\,Gy$.

D'autre part $(G_x)_y = G_x \cap G_y \subset G_y$.

Il faut montrer encore que $G_y \subset G_x$. Mais si $g \in G-G_x$, gV_x est une autre fibre du produit tordu $G \times_{G_x} V \longrightarrow G/G_x = Gx$; c'est la fibre V_{gx} qui est disjointe de V_x .

Donc $y \notin V_{gx}$, donc $g \notin G_y$, ce qui prouve $G_y \subset G_x$.

Maintenant, on peut passer à la démonstration du théorème de semi-continuité (comparer, aussi, à [12], [11]) .

Soit donc $V_y \subset V_x$ un petit disque orthogonal et transversal à $G_x y \subset V_x$. Soit t le paramètre linéaire de V_y , avec $t=0$ correspondant à y et V_y correspondant à $|t|<\epsilon$; c'est à dire que l'inclusion $V_y \subset V_x$ est une application linéaire non-homogène :

$$(*) \qquad z = y + L(t)$$

(où $z \in V_x$ est le paramètre linéaire de V_x et $L \in \mathrm{Hom}_R((t),(z))$).

On va considérer les représentations slice :

$$G_x \xrightarrow{\Phi_x} \mathrm{Aut}(z)$$

$$G_y \xrightarrow{\Phi_y} \mathrm{Aut}(t)$$

et les algèbres des polynômes invariants : $R[z]^{G_x}$, $R[t]^{G_y}$. Soit $\rho_1(z), \ldots\ldots, \rho_p(z)$ un système de générateurs de $R[z]^{G_x}$ et $\sigma_1(t), \ldots\ldots, \sigma_q(t)$ un système homogène, <u>minimal</u> , de générateurs de $R[t]^{G_y}$. Pour démontrer le théorème de semi-continuité, il suffit de prouver que :

$$\boxed{\max_i \deg \rho_i \geq \max_j \deg \sigma_j} \quad .$$

On commence par remarquer que $\mu_i(t) = \rho_i(y+L(t)) \in R[t]$ est encore une fonction polynôme (pas nécessairement homogène, même si ρ_i l'était), du <u>même</u> degré que $\rho_i(z)$. Soit $r_i = \deg \rho_i$ et

$$\mu_i = \mu_{i,o} + \ldots\ldots + \mu_{i,r_i}$$

la décomposition de μ_i en parties homogènes.

On remarque que les $\mu_i(t)$, (donc les $\mu_{i,k}(t)$) sont dans $R[t]^{G_y}$. On a donc des relations polynômiales :

$$\mu_{i,k} = P_{i,k}(\sigma_1 , \ldots\ldots , \sigma_q) \quad .$$

Soit $\lambda : V_y \subset V_x$ le plongement naturel donné par les formules $(*)$, et $G_x V_y \subset V_x$ le voisinage invariant de $G_x y \subset V_x$ obtenu par translation de la slice V_y .

On a : $G_xV_y = G_x \times_{G_y} V_y$ (isomorphisme de G_x-espaces) et, au niveau des fonctions C^∞ , l'application

$$C^\infty(V_y)^{G_y} \xleftarrow{\lambda^*} C^\infty(G_xV_y)^{G_x}$$

est un <u>isomorphisme</u> (de R-algèbres), [2] .

On considère, aussi :

$$V_y \xrightarrow{\lambda} V_x \xrightarrow{\rho} R^p$$

qui induit

$$C^\infty(V_y) \supset C^\infty(V_y)^{G_y} \xleftarrow{(\rho\circ\lambda)^*} C^\infty(R^p) \ .$$

Soit $\varphi \in \overline{(\rho\circ\lambda)^* C^\infty(R^p)} \subset C^\infty(V_y)^{G_y}$ et $y_o \in V_y$. D'après le lemme 1.3, il existe un

$$\Phi(u_1 , \ldots\ldots , u_p) \in R[[u]]$$

tel que

(**) $$T_{y_o}\varphi = \Phi(T_{y_o}\mu_1 - \mu_1(y_o) , \ldots\ldots , T_{y_o}\mu_p - \mu_p(y_o)) \ .$$

(ceci est une égalité dans $R[[t-y_o]]$) .

Maintenant, je dis que :

$$\sigma_j \in \overline{(\rho\circ\lambda)^* C^\infty(R^p)} \ .$$

En effet : $\sigma_j \in C^\infty(V_y)^{G_y}$, et vu l'isomorphisme λ^* considéré plus haut, il suffit de montrer que :

$$C^\infty(G_xV_y)^{G_x} \subset \overline{\rho^* C^\infty(R^p)} \ .$$

Mais $G_xV_y = K$ est un compact (invariant). Toute fonction C^∞ sur K peut être approchée par un polynôme, donc, en appliquant l'opérateur Av , toute fonction C^∞(sur K) , G_x- invariante peut être approchée par un polynôme G_x-invariant , et ainsi de suite.

On peut donc réécrire (**) avec $\varphi = \sigma_j$ et $y_o = y$:

(***) $$\sigma_j(t) = \Phi_j(\mu_1(t) - \mu_1(0) , \ldots\ldots , \mu_p(t) - \mu_p(0))$$

où $\Phi_j \in R[[u_1, \ldots\ldots , u_p]]$. Il est entendu qu'on vient d'écrire une identité au niveau de $R[[t]]$.

C'est clair qu'on peut trouver une autre série formelle

$$\Psi_j(v_{11}, \ldots\ldots, v_{1r_1} \ ; \ v_{21}, \ldots\ldots, v_{2r_2} \ ; \ \ldots\ldots v_{pr_p}) ,$$

telle que (∗∗∗) devienne :

$$\sigma_j(t) = \Psi_j(\mu_{11}(t), \ldots\ldots, \mu_{pr_p}(t)) .$$

Cette dernière relation reste encore valable si l'on garde de $\Psi_j(\mu(t))$ seulement la partie homogène de degré $\deg \sigma_j$. On peut donc supposer, sans perte de généralité que les Ψ_j sont des polynômes. Maintenant, le théorème de semi-continuité résulte du lemme 1.4.

3) "PARAMETRISATION" LOCALE DES APPLICATIONS EQUIVARIANTES :

Soient V et V' deux espaces vectoriels (de dimension finie) sur lesquels G agit (orthogonalement). On considère une petite boule invariante $o \in B \subset V$ et $C^\infty_G(B,V')$ qui est muni d'une structure naturelle de $C^\infty(B)^G$-module.

[Si $f : B \longrightarrow V'$ est équivariante, et $\xi : B \longrightarrow R$ est invariante, on remarque que $B \ni x \longmapsto \xi(x)f(x) \in V'$ est une application C^∞ équivariante].

D'après le lemme 1.4.1., de [10] , il existe un nombre fini d'éléments :

$$L_1, \ldots\ldots, L_K \in C^\infty_G(B,V')$$

qui engendrent $C^\infty_G(B,V')$ en tant que $C^\infty(B)^G$-module. On obtient ainsi une surjection (linéaire-continue) entre espaces de Fréchet , dépendant du choix des L_i :

$$\underbrace{C^\infty(B)^G \times \ldots\ldots \times C^\infty(B)^G}_{K\text{-fois}} \longrightarrow C^\infty_G(B,V') .$$

D'après un théorème de Banach, cette surjection est automatiquement ouverte.

En anticipant sur les jets invariants du chapitre suivant, ceci donne une surjection ouverte au niveau des jets :

$$(J^r_o C^\infty(B)^G)^K \longrightarrow J^r_o C^\infty_G(B,V') .$$

On va conisdérer maintenant deux produits tordus :

$$\begin{array}{ccc} X = G \times_H V & , & X_1 = G \times_{H_1} V_1 \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi_1 \\ G/H & & G/H_1 \end{array} ,$$

et étudier $C^{\infty}_G(X,X_1)$, ou plutôt :

$$G^{\infty}_G(G \times_H B , X_1)$$

(où $o \in B \subset V$ est une petite boule invariante, comme avant).

Soit $f \in C^{\infty}_G(G \times_H B, X_1)$ et supposons (ce qu'on peut faire sans perte de généralité) que :

$$f(\{H\} \times o) = \{H_1\} \times o$$

Içi $\{H\}$ désigne la classe d'équivalence de H : $\{H\} \in G/H$. Donc puisque f est G-équivariante, ceci va induire une inclusion :

$$\underbrace{(\text{groupe d'isotropie de } \{H\} \times o)}_{H} \hookrightarrow \underbrace{(\text{groupe d'isotropie de } \{H_1\} \times o)}_{H_1} .$$

Par $H \hookrightarrow H_1$ on a une action linéaire (orthogonale)

$$H \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_1)$$

Soient U , U_1 des petits voisinages euclidiens de $\{H\}$, $\{H_1\}$ dans les variétés lisses G/H , G/H_1 . Puisque G/H et G/H_1 sont des G-variétés, en particulier des H-variétés, et puisque $\{H\}$, $\{H_1\}$ sont dans $[\mathrm{Fix}\, H]$, on peut supposer les U_1 , U_2 comme étant H-invariants.

En utilisant le théorème du voisinage tubulaire en topologie équivariante ([2], [6]) , on pourra supposer qu'il existe une action orthogonale $H_1 \xrightarrow{\varphi} O(\dim X_1)$ et un voisinage H_1-invariant : $\{H_1\} \times o \in W \subset X_1$

qui soit H_1-isomorphe à $(\mathbb{R}^{\dim X_1}, \varphi)$.

En particulier, H_1 va agir <u>linéairement</u> sur W .

Si B est suffisamment petit, on pourra supposer que $f(\{H\} \times B) \subset W$.

LEMME 1.7. Il existe une bijection canonique entre

{Un voisinage de f dans $C^{\infty}_{G}(G\times_{H}B\ , X_1)$}

et

{Un voisinage de $f|B$ dans $C^{\infty}_{H}(B,W)$} .

Démonstration :

Tout $\varphi \in C^{\infty}_{H}(B,W)$ s'étend à un élément de $C^{\infty}_{G}(G\times_{H}B, X_1)$; d'autre part, deux éléments de $C^{\infty}_{G}(G\times_{H}B, X_1)$ qui coïncident sur $B \approx \{H\}\times B$ sont égaux.

Soit maintenant un système

$$L_1\ , \ldots\ldots, L_K \in C^{\infty}_{H}(B,W)$$

qui engendre $C^{\infty}_{H}(B,W)$ sur $C^{\infty}(B)^H$.

En particulier, il existe des $\varphi_i \in C^{\infty}(B)^H$ tels que :

$$f|B = \sum_i \varphi_i \cdot L_i \quad .$$

En considérant $u_i \in C^{\infty}(B)^H$ et $(u_1,\ldots,u_K) \longrightarrow \sum_i (\varphi_i + u_i).L_i$,

on obtient une surjection ouverte entre :

$$\begin{array}{c}\{\text{un voisinage de } o \ \text{ dans } (C^{\infty}(B)^H)^K\}\\ \big\downarrow \\ \{\text{un voisinage de } f|B \text{ dans } C^{\infty}_{H}(B,W)\}\ .\end{array}$$

Ceci est notre "paramétrisation" locale des applications équivariantes . Elle passe aux jets.

CHAPITRE II. - LE THEOREME D'OUVERTURE.-

1) LE LANGAGE DES JETS.-

Soit G un groupe de Lie compact, opérant orthogonalement sur R^n. On va considérer les polynômes G-invariants $R[x]^G \subset R[x]$ et les germes des fonctions G-invariantes, à l'origine : $C^\infty(x)^G$.

LEMME 2.1. <u>Si</u> $P(x) \in R[x]$ <u>alors</u> $Av.P(x)$ <u>est un polynôme, de même degré que</u> $P(x)$.

<u>Démonstration :</u>

Il suffit de remarquer que si

$$L : (R^n)^k \longrightarrow R$$

est multilinéaire, alors :

$$Av.L(x_1, \ldots, x_k) = \int_G L(gx_1, gx_2, \ldots, gx_k) d\mu(g)$$

est encore multilinéaire.

Ensuite on remarque que les polynômes homogènes de degré k sont toujours de la forme $L(x, \ldots, x)$, et ainsi de suite.

LEMME 2.2. <u>Soit</u> $\varphi \in C^\infty(x)^G$ <u>et</u>

$$T_o^m \varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(o) \in R[x]$$

<u>le polynôme Taylorien d'ordre m de</u> φ.

<u>On a</u> :

$$T_o^m \varphi(x) \in R[x]^G.$$

<u>Démonstration :</u>

On a :

$$\lim_{|x|\to o} \frac{|\varphi(x) - T_o^m \varphi(x)|}{|x|^m} = o$$

Vu que l'action de G est orthogonale, donc que $|gx| = |x|$, il en résulte

que

$$\lim_{|x|\to o} \frac{|\varphi(x) - Av.T_o^m \varphi(x)|}{|x|^m} = o \quad .$$

Mais, puisque $\varphi \in C^\infty$, cette dernière propriété caractérise son polynôme Taylorien d'ordre m , donc :

$$T_o^m \varphi(x) = Av \circ T_o^m \varphi(x) \in R\,[x]^G .$$

Par définition :

{l'espace des polynômes $R[x]^G$ tronqué à l'ordre p} = $J^p(n,1)^G$ =

={l'ensemble des jets G-invariants , d'ordre p, de R^n dans R }.

$J^p(n,1)^G$ hérite une structure de R-algèbre de $R[x]^G$.

Par $R[x]^G \subset R\,[x]$, on a une inclusion naturelle

$$J^p(n,1)^G \subset J^p(n,1) \quad ,$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C^\infty(x)^G \arrow[r, "j^p = j_o^p"] \arrow[d, hook] & J^p(n,1)^G \arrow[d, hook] \\ C^\infty(x) \arrow[r, "j^p"] & J^p(n,1) \end{tikzcd}$$

$(j^p = T_o^p)$.

Jusqu'içi on n'a parlé que des jets finis (des fonctions G-invariantes). On peut introduire le J^∞, en travaillant avec le développement (infinis, formel) dans $R[[x]]^G$.

Le lecteur remarquera que, par l'opération Av , le théorème classique d' Emil Borel se généralise .

L'application

$$C^\infty(x)^G \xrightarrow{j^\infty} R[[x]]^G \longrightarrow O$$

est surjective.

LEMME 2.3. - "Considérons l'anneau local $C^{\infty}(x)^{G}$ et

$(j^{\infty})^{-1}(o) = C^{\infty}(x;o)^{G} = \{$ l'ensemble des germes plats, à l'origine $\}$.

On a :

$$(j^{\infty})^{-1}(o) = \bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{m}^{q}(C^{\infty}(x)^{G}) \ .$$

Démonstration :

L'inclusion $\supset$ est évidente.

Pour l'inclusion $\subset$ on considère les polynômes fondamentaux $(\rho_1, \ldots\ldots, \rho_k) = \rho$ du théorème de finitude de Hilbert (voir paragraphe 3, [10], chapitre O), et $y = \rho(x)$.

Les ρ_i seront (homogènes et) de degré > 0.

Donc $\rho_i \in \mathfrak{m}(C^{\infty}(x)^{G})$.

On peut montrer la

PROPOSITION 2.4. Si $f \in C^{\infty}(x)^{G}$ est dans $(j^{\infty})^{-1}(o)$, il existe $h \in C^{\infty}(y)$, ∞-platte, telle que :

$$f(x) = h(\rho(x)) \ .$$

Cette proposition est démontrée au chapitre IV de [11] ; elle résulte en regardant de près le travail de G. Schwarz [12].

Donc puisque h est ∞-platte, quel que soit $q > 0$, h est de la forme :

$$h(y) = \sum_{|\alpha|=q} y^{\alpha} h_{\alpha}(y) \ , \text{ avec } h_{\alpha} \in C^{\infty}(y) \ .$$

(Içi $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_k)$, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$).

Donc :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|} \rho(x)^{\alpha} h_{\alpha}(\rho(x)) \in \mathfrak{m}^{q}(C^{\infty}(x))^{G}, \quad \text{pour } q \text{ arbitraire}$$

On considère maintenant l'anneau des polynômes G-invariants $R[x]^{G}$, muni de sa graduation naturelle, donnée par les polynômes homogènes (invariants) :

$$R[x]^G = \sum_{i\geq 0} R[x]_i^G .$$

On considère l'idéal :

$$\sum_{i\geq 1} R[x]_i^G = R[x]_+^G$$

et on remarque que $R[x]_0^G = R$. Puisque $R[x]^G$ est une $R[x]_0^G$-algèbre à nombre <u>fini</u> de générateurs, $R[x]^G$ est noetherien. (On applique içi la proposition 10.7 de [1] qui dit que, pour un anneau gradué A , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est un anneau noetherien .

ii) A_0 est noetherien et A est une A_0 - algèbre finie).

Sur $R[x]^G$ on considère la topologie $R[x]_+^G$-adique.

LEMME 2.5. <u>Considérons, sur</u> $R[x]^G$ <u>la topologie définie par la filtration des</u>

$$\sum_{j\geq i} R[x]_j^G = T_i \quad . \qquad (T_1 = R[x]_+^G) \; .$$

<u>Cette topologie coïncide avec la topologie</u> $R[x]_+^G$ <u>-adique</u>.

<u>Démonstration</u> :

Soit $P(x) \in R[x]_j^G$. D'après Hilbert, on peut représenter $P(x)$ sous la forme :

(*) $$P(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha \rho_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \rho_k^{\alpha_k} \qquad (a_\alpha \in R) \; .$$

Soit $r_i = \deg \rho_i > 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $a_\alpha \neq 0$ implique que :

(**) $$r_1\alpha_1 + \cdots\cdots\cdots + r_k\alpha_k = j \; .$$

On a, clairement :

$$r.|\alpha| \leq j \leq R.|\alpha|$$

où $r = \min_i r_i$ et $R = \max_i r_i$.

On trouve donc :

$$R[x]_j^G \subset (R[x]_+^G)^{[\frac{j}{R}]} \quad ,$$

donc

$$T_j \subset (R[x]_+^G)^{[\frac{j}{R}]} \quad .$$

D'autre part :

$$(R[x]_+^G)^h \subset T_{r.h} \quad \text{, d'où notre lemme.}$$

Pour la représentation linéaire de G considérée, on a maintenant le $O(G,\Phi) = \text{ord}\,(G,\Phi)$ défini au chapitre précédent et

$$o(G;\Phi) = \min_i(\deg \rho_i) = r \quad .$$

(o ne dépend pas du choix de ρ) .

G agit au niveau des séries formelles, et on va considérer l'anneau des séries formelles invariantes :

$$R[[x]]^G \approx \prod_{i \geq 0} R[x]_j^G \; .$$

LEMME 2.6. L'anneau $R[[x]]^G$ possède les propriétés suivantes :

a) $R[[x]]^G$ est local .

b) $R[[x]]^G$ est noetherien.

c) $R[[x]]^G = (R[x]^G)^\wedge$. C'est à dire que $R[[x]]^G$ est le séparé-complété de $R[x]^G$, pour la topologie considérée avant.

d) On a :

$$R[[x]]^G \supset \prod_{i \geq j} R\,[x]_i^G = \hat{T}_j$$

($\hat{T}_j$ = la fermeture de T_j dans $R[[x]]^G$) .

e) On a :

$$\mathfrak{m}^{[\frac{j}{o(G,\Phi)}]+1} R\,[[x]]^G \subset \hat{T}_j \subset \mathfrak{m}^{[\frac{j}{O(G,\Phi)}]} R[[x]]^G \; .$$

f) La topologie de Krull de $R[[x]]^G$ coïncide avec la topologie définie par la filtration des $\hat{T}_j$.

g) $\hat{T}_j \subset \hat{\rho}^*(\mathfrak{m}^{[\frac{j}{O(G,\Phi)}]} R\,[[y]])$.

Démonstration :

Une manière rapide de se convaincre de a) est la suivante : Soit

$$\tau(x) = a_o + a_1 x + \dots\dots$$

un élément de $R[[x]]^G$, avec $a_o \neq O$.

D'après le lemme d'Emil Borel équivariant, il existe $\psi(x) \in C^\infty(x)^G$ avec $T_o\psi = \tau$. On a $\psi(o) \neq o$. $\psi^{-1}(x)$ est encore G-invariant, donc $T_o\psi^{-1} \in R[[x]]^G$. On a $\tau . T_o\psi^{-1} = 1$ dans $R[[x]]^G$.

Le point c) est évident et implique le point b) via le théorème suivant (théorème 10.26 de [1]) : Si A est un anneau noetherien et $I \subset A$ un idéal, alors le I-séparé complété, $\hat{A}$, est noetherien.

Le point d) est évident et e) résulte de la démonstration du lemme précédent.

f) résulte de e) . g) est immédiat.

Remarque : Si $G = 1$ les deux filtrations de e) coïncident. Dans un certain sens l'invariant $O(G,\Phi)$ mesure la difficulté de l'utilisation des jets G-invariants, par rapport à la théorie ordinaire.

2) LE THEOREME DE PREPARATION FORMEL .-

On a le :

LEMME 2.7. Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement $R^n \ni x$ et trivialement sur $R \ni t$.

Soit

$$f(o,t) = t^p(\alpha_o + O(t)) \quad \text{avec } \alpha_o \neq O .$$

Alors chaque $g(x,t) \in R[[x,t]]^G$ peut être divisé par $f(x,t)$:

$$g(x,t) = f(x,t)q(x,t) + \sum_{i=O}^{p-1} t^i r_i(x)$$

où $q \in R[[x,t]]^G$ et $r_i \in R[[x]]^G$.

Démonstration :

Ce lemme est vrai dans le cadre C^∞ (lemme 9 de [9]).

Ceci, et le lemme d'Emil-Borel équivariant, cité plus haut, implique le cas formel.

Remarquons , aussi, que si G agit (orthogonalement) sur $R^n \ni x$, $R^m \ni y$, on peut parler "d'applications formelles $(x \to y)$ G-équivariantes" :

$$y_i = \varphi_i(x) \in R[[x]] \ .$$

D'une manière explicite, si

$$\varphi_i(x) = \sum_j \varphi_{i,j}(x)$$

est la décomposition en somme (infinie) de polynômes homogènes, on demande que :

$$(\varphi_{1,j}(gx), \ldots\ldots, \varphi_{m,j}(gx)) = g.(\varphi_{1,j}(x), \ldots\ldots, \varphi_{m,j}(x)).$$

Avec ceci. on a :

LEMME 2.8. - Le développement Taylorien (formel) d'un $f \in C^\infty_G(R^n, R^m)$ (autour de O) est une application formelle G-invariante.

Démonstration :

On commence par étendre l'opérateur Av aux applications $x \to y$. Ceci se fait par :

$$Av \ . \ \varphi(x) = \int_G g^{-1} \ . \ \varphi(gx) \, d\mu(g)$$

En utilisant cette opération, la démonstration du lemme 2.2 se généralise.

Par définition, les applications formelles G-invariantes tronquées à l'ordre r seront les r-jets G-équivariants .

En particulier, considérons un (germe de) G-fibré

$$(\xi) \qquad E \longrightarrow X$$

Localement les sections G-invariantes de (ξ) sont des applications G-équivariantes

$$(R^{\dim X} \text{, avec action linéaire de } G) \longrightarrow (\text{fibre de } E) \ .$$

On peut donc introduire les r-jets invariants des sections (invariantes)

$$J^r \Gamma^\infty(\xi)^G$$

Enfin, on a le Théorème de préparation formel : c'est à dire que, les analogues formels du théorème 3 de [10] et de son corollaire 2.3 sont vrais. A partir du lemme 2.7, la démonstration est la même que dans le cas C^∞.

3) TUBES ET STABILITE INFINITESIMALE MULTI-LOCALE.

Soit

$$(\xi) \qquad E \xrightarrow{p} X$$

un G-fibré (C^∞) . Le fibré des r-jets de sections de ξ :

$$(\xi^r) \qquad J^rE \xrightarrow{p^r} X$$

admet une structure naturelle de G-fibré, et

$$j^r\Gamma^\infty(\xi)^G \subset \Gamma^\infty(\xi^r)^G \ .$$

Considérons maintenant $x \in G$ et $Gx \subset X$ l'orbite de X . Comme on l'a déjà dit, il existe un voisinage tubulaire invariant de $Gx \subset X$, G-isomorphe au produit tordu : $G \times_{G_x} V$. (Théorème du voisinage tubulaire invariant [2], [6]) .

On se donne maintenant une application

$$f \in C^\infty_G(X,Y) \ .$$

Soient $z_1 , \ldots\ldots , z_k \in X$ tels que :

a) $\qquad f(z_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f(z_k) = z \in Y$.

b) $\qquad$ Les orbites Gz_i sont <u>distinctes</u>.

Par définition $|S| = k$. On remarque que (puisque G agit transitivement sur chaque orbite), chaque fois qu'on se donne des orbites distinctes $Gz'_1, \ldots, Gz'_k \subset X$ avec $f(Gz'_i) = Gz' \subset Y$, on peut changer les z'_i , z' à l'intérieur des orbites respectives, pour se ramener à la situation a),b) ci-dessus.

On remarque qu'au niveau des groupes d'isotropie on a des inclusions :

$$G_{z_i} \subset G_z \ .$$

En utilisant le paragraphe 3 du chapitre précédent, on peut considérer, pour chaque z_i une petite boule G_{z_i}-invariante orthogonale à l'orbite Gz_i , $B_i = B_{z_i}$ et un voisinage G_z invariant de $z : W = W_z$.

A $f(f|$ un voisinage tubulaire de $\bigcup_i Gz_i)$, on associe les :

$$f_i \in C^\infty_{G_{z_i}}(B_i, W)$$

(définis par $f_i = f|B_i$) .

Soit $S = \bigcup_i Gz_i$. On va considérer $C^\infty_S(X) = \{$les germes des fonctions C^∞ le long de $S \subset X\}$. On va désigner par $C^\infty(x_i)^{G_{z_i}}$, $C^\infty(y)^{G_z}$ les germes de fonctions invariantes sur (B_i, z_i) , (W,z) .

On laisse au lecteur le soin de vérifier le lemme suivant. (On comparera avec les notations du théorème 3 de [10]) :

LEMME 2.8. <u>On a un diagramme commutatif canonique, où les flèches verticales sont des isomorphismes</u> :

$$\begin{tikzcd} \prod_i C^\infty(x_i)^{G_{z_i}} \arrow[d, leftrightarrow, "\approx"] & C^\infty(y)^{G_z} \arrow[l, "(f_1,\ldots,f_k)^*"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\approx"] \\ C^\infty_S(X)^G & C^\infty_{Gz}(Y)^G \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

On va considérer le <u>multi-germe</u> de f le long de $S \subset X$: f_S . Quelquefois, par abus de notation, on va identifier S avec l'ensemble <u>fini</u> des orbites respectives, dans l'espace des orbites X/G .

Par définition , f_S est <u>infinitésimalement stable</u> (ou f est infinitésimalement stable le long de S) si l'on a :

$$(1) \qquad \alpha_f(\Gamma^\infty_{Gz}(TY)^G) + \beta_f(\Gamma^\infty_S(TX)^G) = \Gamma^\infty(f^*_S TY)^G \quad .$$

Par le lemme 2.8, au lieu de concevoir ceci au niveau des $C^\infty_S(X)^G$-modules, on peut interpréter $\Gamma^\infty_{Gz}(TY)^G$ (respectivement $\Gamma^\infty(f^*_S TY)^G$) comme des modules finis sur $C^\infty(y)^{G_z}$ (respectivement sur $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_{z_i}}$) . On est ainsi ramené au contexte du théorème 3 de [10] .

Le lecteur remarquera que

stabilité infinitésimale ==> stabilité infinitésimale (multi)-locale .

LEMME 2.9 : <u>Soient</u> $X, Y, G, S = \bigcup_1^k Gz_i$ <u>comme ci-dessus et</u> $\mathrm{ord}(G_{z_i})$

les ord correspondant aux représentations slice respectives des G_{z_i}. Il existe un

$$N = N(\dim Y\ ,\ \{\mathrm{ord}(G_{z_i})\})\ ,$$

tel que, si :

$$f \in C^\infty_G(X,Y)\ ,\qquad fS = Gz\qquad ,\ \text{et si :}$$

$(*)_q$ $\alpha_f(J^q\Gamma^\infty_{Gz}(TY)^G) + \beta_f(J^q(\Gamma^\infty_S(TX))^G) = J^q(\Gamma^\infty(f^*_S TY)^G)$, pour un $q \geq N$, alors f_S est infinitésimalement stable."

Démonstration :

Avant de passer à la démonstration proprement dite, on donne la

PROPOSITION 2.9.1. Soit G un groupe de Lie compact, opérant linéairement sur les espaces vectoriels $V \ni x$, $W \ni y$. On considère $C^\infty_G(x \to y)$ les germes d'applications équivariantes $(V,o) \to (W,o)$ et le développement Taylorien

$$C^\infty_G(x \to y) \xrightarrow{\quad j^\infty \quad} R_G[[x \to y]]\ .$$

Dans le $C^\infty(x)^G$-module $C^\infty_G(x \to y)$ on a :

$$\mathrm{Ker}\, j^\infty = \mathrm{Ker}(C^\infty(x)^G \xrightarrow{\ j^\infty\ } R[[x]]^G).C^\infty_G(x \to y).$$

Démonstration de la proposition 2.9.1. :

On va utiliser les notations (et le procédé) du lemme 1.4.1 de [10] . Soit $z \in W^*$ et $f \in \mathrm{Ker}\, j^\infty$. Si l'on définit $f_1(x,z) = \langle f(x),z\rangle$, on remarque que $f_1 \in \mathrm{Ker}\,(C^\infty(x,z)^G \xrightarrow{\ j^\infty\ } R[[x,z]]^G)$.

On procède ensuite comme au lemme 1.4.1 (de [10]) mais on remarque que d'après la proposition 2.4 ci-dessus on peut choisir $P \in C^\infty(u_1, \ldots, u_K)$ infiniment platte (à l'origine). On laisse au lecteur le soin des détails . On a un analogue formel du 2.9.1 : $\mathrm{Ker}\, j^q \subset \hat{T}^{N(q)} \times$ (applications formelles $x \to y$).

Maintenant, la démonstration de notre lemme 2.9 se fait en deux étapes :

i) $(*)_\infty \Rightarrow$ stabilité infinitésimale.

ii) $(*)_q$ pour un q suffisamment grand ===> $(*)_\infty$

Pour i) on a le contexte suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & B \arrow[r, bend right, "\beta"'] & C = \Gamma^\infty (f_S^* TY)^G \end{tikzcd}$$

où B, C sont des $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$-modules finis, A un $C^\infty(y)^G$-module fini, et α , β sont des morphismes de modules . Vu la proposition 2.9.1., l'hypothèse $(*)_\infty$ revient à écrire quelque chose comme :

$$\alpha(A) + \beta(B) + \prod_i (\mathrm{Ker}(C^\infty(x_i)^{G_i} \xrightarrow{j^\infty} R[[x_i]]^{G_i})).C = C \quad .$$

En utilisant le lemme 2.3 ci-dessus, et le corollaire 2.3 du chapitre I de [10] , ceci implique :

$$\alpha(A) + \beta(B) = C \quad ,$$

ce qui est la condition de stabilité infinitésimale locale (le long de S) .

Le point ii) résulte du théorème de préparation formel, des points e) , f du lemme 2.6 ci-dessus, et de l'analogue formel du lemme 2.9.1.

REMARQUE IMPORTANTE : D'après le théorème de semi-continuité du ch tre précédent (ou par des arguments plus simples), on peut choisir un N=N(X,Y,G) ; valable pour tous les multi-germes (à la fois), tel que $(*)_{q \geq N}$ implique la stabilité infinitésimale locale. (Un seul q suffit).

4) POINTS CRITIQUES :

Par définition $x \in X$ est un point critique de $f \in C_G^\infty(X,Y)$ si $T_x f$ n'est pas surjectif . Ceci est manifestement une propriété de l'orbite Gx et on va considérer l'ensemble des orbites critiques $\Sigma_f \subset X/G$. Soit $y \in Gz$.

Pour $Gz \subset Y$ on va désigner par $\Sigma_y = \Sigma_{Gz}$ l'ensemble des orbites critiques contenues dans $f^{-1}Gz \subset X$.

Le morphisme (de G-fibrés)

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[rr, "Tf"] \arrow[dr] & & f^{*}TY \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est <u>surjectif</u> sur $X-\Sigma_f$.

LEMME 2.10 : <u>Soit</u> $k \geq \dim Y + 1$ <u>un entier fixé . Supposons que</u> f <u>possède la propriété que pour tout ensemble d'orbites distinctes</u>

$S = Gz_1 \cup \ldots\ldots \cup Gz_{k_1} \subset X$ tel que :

a) $k_1 \leq k$

b) $fS = Gz$,

<u>le multi-germe</u> f_S <u>est infinitésimalement stable.</u>

<u>Dans ces conditions, pour</u> $y \in Y$ <u>quelconque, on a</u> :

$$\text{card } \Sigma_y \leq \dim Y \ .$$

<u>Démonstration</u> :

Supposons qu'il existe un y qui ne satisfait pas à la conclusion du lemme.

Supposons donc qu'il existe un

$$S_1 \subset \Sigma_y$$

de cardinalité égale à $(\dim Y+1)$. Notre hypothèse <u>implique</u> que f_{S_1} est infinitésimalement stable.

Soit, pour fixer les idées :

$$S_1 = \bigcup_{1}^{\dim Y+1} Gz_i \ .$$

On considère $\sum_i \Gamma^{\infty}(f^{*}_{Gz_i} TY)^G = \Gamma^{\infty}(f^{*}_{S_1} TY)^G$

et le sous-espace vectoriel

$$N_i \subset \Gamma^{\infty}(f^{*}_{Gz_i} TY)^G$$

formé par les sections qui s'annulent identiquement quand on les évalue sur Gz_i .

Notre hypothèse $S_1 \subset \Sigma_y$ implique que :

$$\Gamma^{\infty}(f^{*}_{Gz_i}\,TY)^G \underset{\neq}{\supset} N_i + \beta_i(\Gamma^{\infty}_{Gz_i}(TX)^G) \ .$$

Donc :

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\Gamma^{\infty}(f^{*}_{S_1}\,TY)^G}{\sum_i N_i + \text{Image } \beta_f} \geq \text{card } S_1 = \dim Y + 1 \ .$$

D'autre part, l'espace vectoriel qui figure au membre gauche de l'inégalité ci-dessus, est égal à :

$$\frac{\text{Image } \alpha_f + \text{Image } \beta_f}{\sum_i N_i + \text{Image } \beta_f} = \frac{\alpha_f \Gamma^{\infty}_{Gz}(TY)^G}{(\sum_i N_i) \cap \alpha_f \Gamma^{\infty}_{Gz}(TY)^G} \ .$$

Le dernier espace vectoriel est de dimension $\leq \dim Y$, car il est de dimension plus petite que :

$$\frac{\Gamma^{\infty}_{Gz}(TY)^G}{\{\text{les éléments de } \Gamma^{\infty}_{Gz}(TY)^G \text{ identiquement nuls sur } Gz\}} \ ,$$

et ceci finit la démonstration.

LEMME 2.11. *Soient* $E \longrightarrow B$, $F \longrightarrow B$ *des* G*-fibrés vectoriels et*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

un morphisme de G*-fibrés, surjectif sur chaque fibre. Il existe une décomposition en somme directe de* G*-fibrés* :

$$E = E_1 \oplus E_2$$

telle que $\varphi | E_1$ *soit un isomorphisme, et* $\varphi | E_2 \equiv 0$.

La démonstration est laissée au lecteur (on met une métrique G-invariante).

LEMME 2.12. *Soit*

$$f \in C^{\infty}_{G}(X,Y) \ .$$

Supposons qu'il existe un $k \geq \dim Y+1$ *, tel que pour tout*

$S = \bigcup_{i}^{k_1} Gz_i$, $fS = Gz$, <u>le multi-germe</u> f_S <u>soit infinitésimalement stable</u> , si $k_1 \leq k$.

<u>Alors f est infinitésimalemant stable</u> .

Démonstration :

On se donne un

$$\zeta \in \Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^{G} .$$

Notre hypothèse et le lemme 2.10 impliquent que, pour tout $y \in Y$, on a que $\operatorname{card} \Sigma_y \leq \dim Y$.

Donc f_{Σ_y} est infinitésimalement stable.

Disons que $\Sigma_y = Gz_1 \cup \ldots\ldots \cup Gz_{k_1} \subset X$. On peut trouver un petit voisinage G-invariant :

$$Gz_1 \cup \ldots\ldots \cup Gz_{k_1} \subset U_y$$

et des

$$\xi_y \in \Gamma^{\infty}(TX)^G \quad , \quad \eta_y \in \Gamma^{\infty}(TY)^G$$

tels que :

$$(\alpha_f(\eta_y) + \beta_f(\xi_y)) \mid U_y = \zeta \mid U_y .$$

L'ensemble $\Sigma = \bigcup_y \Sigma_y \subset X$ est un compact (invariant) qui peut être recouvert par un nombre fini de U_y : $U_{y_1}, \ldots\ldots, U_{y_r}$.

On peut fabriquer une partition C^{∞}, G-invariante de 1 sur Σ , subordonnée à $\{U_{y_1}, \ldots\ldots, U_{y_r}\}$ et à partir de là des

$$\xi_1 \in \Gamma^{\infty}(TX)^G \quad , \quad \eta_1 \in \Gamma^{\infty}(TY)^G$$

tels que

$$(\alpha_f(\eta_1) + \beta_f(\xi_1)) \mid U = \zeta \mid U \quad ,$$

où U est un voisinage ouvert de Σ . On finit la démonstration en utilisant le lemme 2.11.

5) DIAGONALES .-

On considère maintenant l'espace des orbites X/G et son k-ième produit cartésien symmétrique : $S^k(X/G)$. On va considérer la (grande) diagonale

$$\mathrm{Diag}(k) \subset S^k(X/G)$$

c'est à dire l'ensemble des $(p_1 , \ldots\ldots, p_k) \in S^k(X/G)$ qui ne sont pas 2 à 2 distincts.

LEMME 2.13. Soit

$$K \subset S^k(X/G) - \mathrm{Diag}(k)$$

un compact, et $f \in C^\infty_G(X,Y)$ une application infinitésimalement stable.

Il existe un voisinage

$$f \in W \subset C^\infty_G(X,Y)$$

tel que chaque fois que :

a) $f' \in W$

b) $S = Gz_1 \cup \ldots\ldots \cup Gz_k \in K$

et

c) $f'S = Gz$,

on a que :

f'_S est infinitésimalement stable.

Démonstration :

Vu que l'ensemble K est compact, il suffit de montrer la proposition suivante :

(P) "Pour chaque $S \in K$ il existe des voisinages :

$$S \in U_S \subset K \ , f \in W_S \subset C^\infty_G(X,Y) \ ,$$

tels que si $S' \in U_S$, $f' \in U_S$, $f' \in W_S$, alors

i) ou bien $f'S'$ n'est pas une orbite unique.

ii) ou bien $f'S'$ est une orbite unique et $f'_{S'}$ satisfait à la condition $(*)_N$ du lemme 2.9 (N étant choisi comme dans la remarque qui suit le lemme 2.9). "

(P) est évidente pour les $S \in K$ tels que f_S est dans la situation i) . Elle est vraie aussi pour les $S \in K$ avec f_S dans la situation ii) vu que $(*)_N$ est une condition linéaire faisant intervenir un nombre fini de dérivées partielles calculées aux points $z_1 , \ldots\ldots , z_k$, et que cette condition est ouverte. Ceci finit la démonstration.

On va considérer maintenant un groupe de Lie compact G opérant orthogonalement sur $R^n \ni x$ et

$$\rho_1(x) , \ldots\ldots , \rho_k(x) \in R[x]^G$$

des générateurs homogènes de degré $> O$ de l'algèbre des polynômes invariants. On considère $R^k \ni y$ et , pour chaque $N > O$ l'espace linéaire $P_N[y] \subset R[y]$ constitué par les polynômes de degré $\leq N$. On munit $P_N[y]$ d'une métrique euclidienne.

Soit $B \subset R^n$ un compact invariant. On considère $C^\infty(B)^G$ muni de sa topologie d'espace de Fréchet (la topologie C^∞) .

On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 2.14 . <u>Soit</u> $s > O$ <u>un entier positif</u> , <u>et</u> $q \geq O$. <u>Il existe un</u> $M = M(q,s)$ <u>tel que pour chaque voisinage</u>

$$A_\epsilon = \{ \varphi \in P_M[y] \ , \ |\varphi| < \epsilon \}$$

<u>il existe un voisinage</u> $o \in \Omega \subset C^\infty(B)^G$, <u>tel que la propriété suivante soit vérifiée : Chaque fois que</u> :

$$Gz_1 , \ldots\ldots , Gz_s$$

<u>sont des orbites disjointes contenues dans</u> B , <u>et</u> $F \in \Omega \subset C^\infty(B)^G$ <u>il existe</u> $Q \in A_\epsilon$ <u>avec la propriété</u> :

$$j^q(\rho^*Q)|_{Gz_i} = j^qF|_{Gz_i} \ .$$

Démonstration :

On considère le compact $\rho B \subset R^k$ et un voisinage compact $\rho B \subset K_o \subset R^k$. D'après [12] l'application linéaire continue, entre espaces de Frechet :

$$C^\infty(B)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(K_o)$$

est surjective, donc(d'après un théorème de Banach) ouverte.

Il suffit donc de montrer qu'il existe $M = M(q,s)$ tel que pour tout

$$A_\epsilon \subset P_M[y]$$

il existe un voisinage $o \in \omega \subset C^\infty(K_o)$ avec la propriété que chaque fois que

$$p_1 , \ldots\ldots , p_s \in K$$

sont distincts et $\psi \in \omega$, il existe $Q \in A_\epsilon$ avec $j^qQ(p_i) = j^q\psi(p_i)$ $(i=1 , \ldots\ldots , s)$.

En choisissant K_o convexe, ceci devient essentiellement le lemme 2.5, chapitre V de [5] , et la démonstration est terminée.

COROLLAIRE 2.14.1 . Soit G un groupe de Lie compact, $H \subset G$ un sous-groupe ,$H \longrightarrow Aut(V)$ une représentation linéaire, et $G \times_H V$ le produit tordu respectif .
On se donne une boule compacte invariante $B \subset V$, un s et un q . Il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie :

$$E \subset C^\infty(G \times_H V)^G$$

tel que, pour chaque voisinage de l'origine , suffisamment petit $\mathcal{V} \subset E$ il existe un voisinage

$$o \in \Omega \subset C^\infty(G \times_H B)^G$$

ayant la propriété suivante :

Chaque fois que $z_1 , \ldots\ldots , z_s \in B$ sont tels que $Gz_1 , \ldots\ldots, Gz_s$ sont des orbites distinctes, et $F \in \Omega$, il existe $Q \in \mathcal{V}$ tel que

$$j^qF|_{Gz_i} = j^qQ|_{Gz_i} \quad (i=1 , \ldots\ldots , s) \ . "$$

Ce corollaire combiné avec la "paramétrisation" locale de la fin du chapitre précédent (dont on emprunte les notations K, L) implique le :

COROLLAIRE 2.14.2. <u>On considère les produits tordus</u> $G \times_H V$ <u>et</u> $G \times_{H_1} V_1$. <u>On se donne une petite boule invariante</u> $B \subset V$ <u>et un</u>

$$f \in C^\infty_G(G \times_H B\,,\, G \times_{H_1} V_1)$$

<u>tel que</u> $f(\{H\} \times O) = \{H_1\} \times O$.

<u>On fixe des entiers positifs q et s</u>.

<u>Il existe un sous-espace de dimension finie</u> :

$$E \subset (C^\infty(B)^H)^K \xrightarrow[\text{surjection } \{L\}]{} \{\text{voisinage de } f \text{ dans } C^\infty_G\},$$

<u>tel que la propriété suivante soit vraie</u> :

<u>Pour chaque voisinage suffisamment petit de l'origine, dans E</u> :

$$o \in \mathcal{V} \subset E$$

<u>il existe un voisinage</u>

$$f \in \Omega \subset C^\infty_G(G \times_H B\,,\, G \times_{H_1} V_1)$$

<u>avec la propriété suivante</u> :

<u>Chaque fois que</u> $z_1, \ldots\ldots, z_s \in B$ <u>sont choisis tels que</u> $Gz_1, \ldots\ldots, Gz_s$ <u>soient des orbites distinctes, et</u>

$$f \in \Omega\,,$$

<u>il existe un</u> $Q \in \{L\}\mathcal{V}$, <u>tel que</u> :

$$j^q F|_{Gz_i} = j^q Q|_{Gz_i}$$

<u>pour $i = 1$</u>, $\ldots\ldots, s$.

<u>Remarque</u> : Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une situation globale, où

$$f \in C^\infty_G(X, Y)$$

et $G \times_H B \subset G \times_H V \subset X$ est un petit voisinage tubulaire (tordu), invariant. Le E du corollaire précédent nous donne une famille de dimension <u>finie</u> déformant $f|G\times_H B$, et qui atteint tous les multi-(s,q)-jets (dans B) , pour toutes les applications équivariantes suffisamment voisines de f .

On peut construire une boule invariante plus petite $o \in B_1 \subset \overset{o}{B}$ et une fonction C^∞ , invariante, à support compact : $\psi : \overset{o}{B} \longrightarrow [0,1]$ telle que $\psi|B_1 \equiv 1$. En multipliant (dans notre espace vectoriel local), la déformation avec ψ , on a une déformation <u>globale</u> de f , dans $C^\infty_G(X,Y)$, avec les mêmes propriétés (pour le disque, plus petit, B_1) .

On va considérer maintenant une certaine <u>filtration</u> de $\mathrm{Diag}(k) \subset S^k(X/G)$.

On commence par considérer l'ensemble $P_k = \{z_1 , \ldots\ldots , z_\ell\}$ où $\ell < k$, z_i est un entier ≥ 1 et $\sum_i z_i = k$ (donc au moins un $z_i \geq 2$) .

Dans P_k on introduit l'ordre partiel suivant :

$$\{z_1 , \ldots\ldots , z_\ell\} > \{z'_1 , \ldots\ldots , z'_\lambda\}$$

si $\ell < \lambda$ et s'il existe une application

$$\alpha : (1, \ldots\ldots , \lambda) \longrightarrow (1, \ldots\ldots , \ell) \text{ , telle que :}$$

$$z_i = \sum_{j\in\alpha^{-1}(i)} z'_j \quad .$$

Pour chaque $\Pi = (z_1, \ldots\ldots , z_\ell) \in P_k$ on considère

$$\mathrm{Diag}_\Pi(k) \subset \mathrm{Diag}(k)$$

où , par définition, $(p_1 , \ldots\ldots , p_k) \in \mathrm{Diag}_\Pi(k)$ si et seulement si il existe une partition disjointe :

$$(p_1 , \ldots\ldots , p_k) = A_1 \cup \ldots\ldots \cup A_\ell$$

avec les conditions suivantes :

a) $\quad \mathrm{card}\ A_i = z_i$.

b) $\quad p_\lambda = p_\mu \Longleftrightarrow \lambda$ et μ appartiennent au même A_i .

Pour $\Pi \in P_k$ on considère

$$\Delta_\Pi = \bigcup_{\mu \geq \Pi} \mathrm{Diag}_\mu(k) \quad .$$

Alors : 1) Δ_{Π} est un fermé de $S^k(X/G)$

2) Si $\Pi_1 > \Pi_2 \longrightarrow \Delta_{\Pi_1} \subset \Delta_{\Pi_2}$.

On a le lemme suivant :

LEMME 2.15 . Soit

$$f \in C^{\infty}_G(X,Y)$$

infinitésimalement stable et

$$\Pi = (\chi_1, \ldots\ldots \chi_\ell) \in P_k \ .$$

Soit :

$$(Gz_1 , \ldots\ldots, Gz_k) \in \mathrm{Diag}_{\Pi}(k) \subset S^k(X/G) \ .$$

Il existe des voisinages

$$f \in U \subset C^{\infty}_G(X,Y)$$

et

$$(Gz_1 , \ldots\ldots , Gz_k) \in V \subset S^k(X/G)$$

tels que

1) $V \cap \mathrm{Diag}(k) \subset \mathrm{Diag}_{\Pi}(k)$.

2) Pour chaque $f' \in U$ et chaque

$$S = (Gz'_1 , \ldots\ldots , Gz'_k) \in V - \mathrm{Diag}_{\Pi}(k) = V - \mathrm{Diag}(k)$$

le germe f'_S est infinitésimalement stable.

[Il s'agit içi de multi-germes f'_S tels que $f'S$ soit une orbite unique de Y].

Pour simplifier l'écriture on va réindexer les z_i sous la forme :

$$z_{11} , \ldots\ldots , z_{1\chi_1} ; z_{21} , \ldots\ldots , z_{2\chi_2} ; \ldots\ldots\ldots ; z_{\ell 1} \ldots\ldots, z_{\ell\chi_\ell} ,$$

de telle manière que

$$Gz_{11} = Gz_{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots = Gz_{1\chi_1} ,$$

$$Gz_{21} = Gz_{22} = \ldots\ldots\ldots\ldots = Gz_{2\chi_2} ,$$

et ainsi de suite.

On choisit des voisinages tubulaires invariants disjoints :

$$Gz_{i1} \subset G \times_{G_{z_{i1}}} V_i \subset X \qquad (i=1,\ldots\ldots,\ell) .$$

Soit N le nombre fourni par le lemme 2.9 (et la remarque qui le suit). Pour chaque V_i on choisit un B_i très petit comme dans le corollaire 2.14.2 , et on pose $q = N$, $s = \chi_i$. Les B_i définissent canoniquement un voisinage :

$$(Gz_1 , \ldots\ldots , Gz_k) \in V \subset S^k(X/G)$$

ayant la propriété 1) .

En utilisant le corollaire 2.14.2 (et la remarque qui le suit) et en travaillant sur plusieurs voisinages tubulaires tordus, disjoints, à la fois on peut trouver une application C^∞ :

$$(R^{grand}, o) \xrightarrow{\Phi} (C^\infty_G(X,Y),f) ,$$

avec la propriété suivante :

Pour chaque voisinage $o \in M_o \subset R^{grand}$, il existe un voisinage

$$f \in M_1 \subset C^\infty_G(X,Y) ,$$

avec la propriété que, pour chaque $f' \in M_1$, et chaque $S \in V - \mathrm{Diag}_\Pi(k)$ il existe $\lambda \in M_o$ avec :

$$j^{N'}_S f' \equiv j^N_S \Phi(\lambda) .$$

Maintenant , puisque f est infinitésimalement stable on peut choisir notre M_o suffisamment petit pour qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diff}_G(X) \times \mathrm{Diff}_G(Y) \arrow[d, "\Phi_f"] \\
M_o \arrow[ur, "\Psi \in C^\infty"] \arrow[r, "\Phi"'] & C^\infty_G(X,Y) .
\end{tikzcd}$$

Ceci résulte du théorème de stabilité [10] .

Donc, chaque $(\Phi(\lambda),S)$ (ayant comme image une orbite unique, au but) va satisfaire à la condition $(*)_N$ du lemme 2.9 (puisqu'elle est satisfaite au niveau de

$f = \Phi(o)$ et qu'elle est invariante pour les changements de coordonnées G-équivariants.).On pourrait remarquer, aussi, que chaque $\Phi(\lambda)$ est infinitésimalement stable, et tirer la même conclusion .

Donc, pour $S \in V - \mathrm{Diag}_{\Pi}(k)$, chaque $f' \in M_1$ (avec $f'S$ une orbite unique, au but), est tel que f'_S satisfait à $(*)_N$, ce qui implique que f'_S est infinitésimalement stable. Ceci finit la démonstration du lemme 2.15.

Les lemmes 2.12, 2.13 et 2.15 , ensemble , impliquent le théorème d'ouverture de la stabilité infinitésimale.

6) QUELQUES PROBLEMES OUVERTS :

I) Soit G un groupe de Lie compact, opérant linéairement sur $R^n \ni x$. Soit

$$R[x]^G \xleftarrow{\rho^*} R[y]$$

l'application de Hilbert .

Existe-t-il deux suites d'entiers , ℓ_i , $\lambda_i \to \infty$ tels que

$$\{ \text{ les éléments de } C^\infty(x)^G \text{ , } \ell_i\text{-plats}\} \subset \rho^* \{ m^{\lambda_i} C^\infty(y)\} \text{ . } \quad ?$$

II) L'ensemble des r-jets équivariants ne possède pas une structure de variété lisse, mais plutôt d'ensemble stratifié . Etudier cette stratification.

Est-t-elle assez bonne pour qu'on puisse interpréter la stabilité (infinitésimale) en termes de transversalité (sur les orbites) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH-I.G. MACDONALD. - "Introduction to commutative algebra". Addison-Wesley (1969). -

[2] G. BREDON.-"Introduction to compact transformation groups". Acad. Press (1972).-

[3] J. DIEUDONNE- J.CARREL . - "Invariant theory old and new". Adv. in Math. (1970).-

[4] G. GLAESER. - " Fonctions composées différentiables". Ann. of Math. 77 (1963) pp.193-209.-

[5] M. GOLUBITSKY-V.GUILLEMIN . - "Stable mappings and their Singularities". Springer (1973).-

[6] K.JÄNICH .- " Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten". Springer L.N. 59 (1968).-

[7] J. MATHER . - "Stability of C^∞ mappings".
III. Publi. Math. I.H.E.S., 35 (1968) pp.279-308
V. Adv. in Math, 4, (1970) pp.301-335 .-

[8] V. POENARU. - "Analyse différentielle". Springer L.N. 371(1974).-

[9] V. POENARU.- "Déploiement des fonctions G-invariantes". (à paraître).-

[10] V. POENARU .-"Stabilité structurelle équivariante", première partie (à paraître).-

[11] V. POENARU.- " Théorie des invariants C^∞ " (notes de cours à paraître).-

[12] G. SCHWARZ. - "Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group". (à paraître).-

[13] H.WEYL. - "The classical groups". Princeton (1946).-