

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 78.10

ETUDE NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES NON LINEAIRES

APPARAISSANT EN PHYSIQUE DES PLASMAS

H. GOURGEON

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 78.10

ETUDE NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES NON LINEAIRES

APPARAISSANT EN PHYSIQUE DES PLASMAS

HERVÉ GOURGEON

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PLAN

	Pages
INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE I : PROBLEMES A FRONTIERE FIXE</u>	
1. <u>Problème initial, rappels</u>	
1.1 - Définition de β	3
1.2 - Formulation "forte" et "faible" du problème	4
1.3 - Un problème d'optimisation	5
1.4 - Comparaison de ces problèmes	6
1.5 - Deux problèmes plus proches de la réalité physique	6
2. <u>Méthodes numériques et problèmes approchés</u>	
2.0 - Le domaine physique	8
2.1 - Approximation de $H_0^1(\Omega)$	9
2.2 - Le problème approché	10
2.3 - Le calcul de β_h	13
2.4 - L'algorithme	22
3. <u>Résultats numériques</u>	
3.1 - Le cas général	26
3.2 - Le cas particulier $f = 0$	31
4. <u>La résolution numérique des problèmes voisins</u>	
4.1 - Le problème P_3	33
4.2 - Le problème P_4	33
5 - <u>Le problème physique et une étude en dimension 1</u>	35
6 - <u>Conclusion du chapitre I</u>	38
<u>CHAPITRE II : UN PROBLEME NON COERCIF A FRONTIERE LIBRE</u>	39
1 - <u>Position du problème</u>	
1.1 - Le problème à frontière libre (1)	40
1.2 - Modification du problème (1) en un problème à frontière fixe (2)	40

2 - <u>Résolution de (2)</u>	
2.1 - Existence d'une solution de (2)	44
3 - <u>Etude du problème à frontière libre en dimension 1</u>	
3.1 - Dans l'ouvert $] -1, +1[$	48
3.2 - Solutions possédant la symétrie de révolution lorsque Ω est un disque	51
4 - <u>Calcul numérique d'une solution du problème à frontière libre</u>	
4.1 - Les données du problème	54
4.2 - Les résultats numériques.	56

CHAPITRE III - UN PROBLEME D'EVOLUTION NON LINEAIRE

1 - <u>Un théorème général d'existence</u>	
1.1 - Le cadre général	63
1.2 - Théorème d'existence	64
1.3 - Démonstration	64
2 - <u>Application du théorème 1 au problème d'évolution</u>	
2.1 - Définition de l'opérateur β	68
2.2 - Le problème d'évolution	69
3 - <u>Un opérateur monotone lié à β</u>	
3.1 - La monotonie de $\beta(.,.)$	75
3.2 - Le problème d'évolution associé : P_ϕ	76
3.3 - Monotonie de la solution de P_ϕ	76
3.4 - Méthode des suites monotones.	77

I N T R O D U C T I O N

Le comportement d'un plasma confiné à l'intérieur d'une machine Tokamak est connu par le potentiel magnétique en tout point du domaine de la machine : un tore de section Ω , ouvert borné de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Selon certaines hypothèses physiques, dont en particulier la symétrie de révolution du potentiel, la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est solution d'un problème aux dérivées partielles, non linéaire, qui fait intervenir en un point $x \in \Omega$ la surface S du domaine intérieur à la courbe de niveau passant par x , lorsqu'on peut la définir. Plus précisément S sera définie comme un opérateur appliqué à la fonction $u : \beta(u)$. Il sera multivoque.

Au moins pour prendre conscience des problèmes théoriques et numériques inhérents à la résolution de ce genre d'équations, nous nous intéressons, dans la première partie, à un problème modèle à frontière fixe :

$$(1) \quad -\Delta u + \beta(u) \ni f$$

Ce problème a été étudié d'un point de vue théorique par J. MOSSINO [1]. Cet ouvrage sera la référence première tout au long de ce travail pour les résultats concernant le problème (1) ainsi que de nombreux problèmes voisins.

Dans la première partie, nous décrivons un algorithme de résolution numérique qui converge vers une solution de (1). Nous modifierons quelque peu le problème (1) pour essayer de mieux modéliser le problème physique (dans le cas où la frontière du plasma est connue). Nous étudierons quels sont les résultats que nous pouvons alors conserver.

La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un problème à frontière libre. En collaboration avec J. MOSSINO, nous montrons que l'on peut se ramener d'une manière non standard à l'étude d'un problème à frontière fixe qui reste dans le cadre des problèmes étudiés dans la première partie.

Nous donnons alors quelques résultats numériques de ce problème et nous montrons l'efficacité de la méthode.

Comme dans la première partie, nous terminons par une petite étude en dimension 1 (avec unicité de la solution).

Dans la troisième partie, nous considérons un problème d'évolution associé au problème du chapitre 1.

Nous montrons l'existence d'une solution d'un problème affaibli, par deux méthodes déjà utilisées pour le problème stationnaire. Quelques généralisations du terme $B(u)$ sont également étudiées.

1.- PROBLEME INITIAL - RAPPELS1.1 - Définition de l'opérateur β

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de frontière régulière, soit u une application mesurable de Ω dans \mathbb{R} définie pour presque tout $x \in \Omega$, on pose alors pour presque tout $x \in \Omega$

$$\bar{\beta}(u)(x) = \text{mes} \{y \in \Omega ; u(y) \leq u(x)\}$$

$$\underline{\beta}(u)(x) = \text{mes} \{y \in \Omega ; u(y) < u(x)\}$$

Les premières propriétés de $\bar{\beta}$ et $\underline{\beta}$ résident dans quelques lemmes :

Lemme 1.1.1.- si u est une fonction mesurable, alors $\underline{\beta}(u)$ et $\bar{\beta}(u)$ sont deux fonctions mesurables, elles appartiennent à $L^\infty(\Omega)$.

Démonstration dans ([1] p. II.23).

Définition de l'opérateur multivoque β :

$$\beta(u) = \{\psi \in L^\infty(\Omega) / \underline{\beta}(u)(x) \leq \psi(x) < \bar{\beta}(u)(x), \text{ pour presque tout } x \in \Omega\}$$

on a en particulier le

Lemme 1.1.2.- $\beta : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{C} L^2(\Omega)$

($\mathcal{C} \mathcal{F}$ sera l'ensemble des parties convexes fermées non vides de \mathcal{F}). La démonstration est immédiate.

Une propriété très importante qui nous servira dans la suite et qui justifie entièrement l'emploi de l'opérateur multivoque est la propriété (de continuité) suivante :

Propriété 1.1.3 :

$$\text{Le Graphe de } \beta : G(\beta) = \{ (v, \beta(v)) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \}$$

est fermé dans $L^2(\Omega)$ fort $\times L^2(\Omega)$ faible.

La démonstration qui sera reprise et généralisée au chapitre III, à $L^2(\Omega)$ (où $\Omega = \Omega \times]0,1[$), nécessite le théorème d'Egoroff (cf. [1] p. IV.74).

Lemme 1.1.3. et définition :

Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\text{mes}\{x \in \Omega / u(x) = t\} = 0$; alors $\overline{\beta(u)}(x) = \beta(u)(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, une telle fonction u sera dite sans palier.

Dans le cas contraire, l'ensemble

$P_t = \{x \in \Omega / u(x) = t\}$ sera un palier de u si et seulement si sa mesure est strictement positive.

1.2 - Les formulations "forte" et "faible" du problème

Nous pouvons alors poser le problème suivant

$$P_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u + \overline{\beta(u)} = f \end{array} \right.$$

f étant une fonction donnée $\in L^2(\Omega)$,

et considérer une formulation plus faible :

$$P_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u + \beta(u) \ni f \end{array} \right.$$

f étant toujours une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$. Les adjectifs "fort" et "faible" sont justifiés par la proposition suivante de démonstration immédiate.

Proposition 1.2.1 : Toute solution de P_0 est solution de P_1 . "Inversement" toute solution de P_1 qui est sans palier est solution de P_0 .

Remarque : Toute solution de P_1 est sans palier, si par exemple, pour presque tout $x \in \Omega$, $f(x) \notin [0, |\Omega|]$, puisque sur un palier le Laplacien de la solution est presque partout nul.

Théorème 1.2.2. :

Le problème P_1 admet au moins une solution.

Plusieurs démonstrations se trouvent dans [1]. L'une d'elles utilise le théorème de point fixe de Kabutani-Ky-Fan.

1.3 - Un problème d'optimisation (voir MOSSINO-ZOLESIO [2])

Nous considérons la fonctionnelle $J : H^1_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{L^2(\Omega)} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{|\Omega|}{2} - f \right) v(x) dx + \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} (v(x) - v(y))_+^2 dx dy$$

$$\text{avec } t_+ = t \quad \text{si } t > 0$$

$$t_+ = 0 \quad \text{si } t \leq 0$$

Proposition 1.3.1. : J est une fonctionnelle strictement convexe, continue et coercice sur $H^1_0(\Omega)$.

Formulons le problème P_2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ telle que} \\ J(u) = \text{Min}_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v) \end{array} \right.$

Il est immédiat que P_2 a une solution unique.

1.3.1.- Caractérisation de la solution de P_2

La fonctionnelle J n'est pas Gateaux-différentiable sur tout son domaine néanmoins on peut calculer son sous-différentiel.

La solution unique de P_2 est caractérisée par :

Théorème 1.3.1. : Le problème P_2 a une solution unique dans $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Une fonction u de $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est la solution de P_2 si et seulement s'il existe $\psi \in \mathfrak{A}$ telle que :

$$(1) \quad -\Delta u(x) + \frac{1}{2} [\underline{\beta}(u)(x) + \overline{\beta}(u)(x)] = f(x) + \int_{P(u,x)} \Psi(x,y) dy \quad \text{pp. } x \in \Omega$$

$$\text{où } \mathfrak{A} = \{ \psi \in L^\infty(\Omega \times \Omega) / \psi(x,y) = -\psi(x,y) \text{ et } |\psi(xy)| \leq \frac{1}{2} ; \text{ pp. } (xy) \in \Omega \times \Omega \}$$

$$\text{et } P(u,x) = \{ y \in \Omega / u(y) = u(x) \} .$$

Démonstration dans [2], où le calcul du sous-différentiel utilise un résultat de CASTAING.

Remarque : si u est sans palier, J est Gateaux différentiable en u et sa différentielle a pour expression :

$$(2) \quad J'(u) = -\Delta u + \beta(u) - f$$

Si la solution de P_2 est sans palier, elle est caractérisée par $J'(u) = 0$ c'est-à-dire $-\Delta u + \beta(u) = f$ au sens des distributions.

De cette remarque, on déduit le corollaire :

1.4.- Comparaison des 3 problèmes

Corollaire 1.4.1 -

Les solutions sans palier de P_0 , P_1 et P_2 sont identiques ; P_0 et P_1 ont, au plus, une solution sans palier.

Corollaire 1.4.2 (voir [2])

La solution de P_2 est solution de P_1 .

Nous allons systématiquement utiliser ce problème d'optimisation pour calculer numériquement une solution de P_0 .

Néanmoins, on peut montrer qu'une solution de P_2 avec palier n'est pas nécessairement solution de P_0 .

Il suffit de considérer $f \equiv \frac{|\Omega|}{2}$, par exemple ; la solution de P_2 est alors $u \equiv 0$ sur tout Ω , qui n'est pas solution de P_0 (cf. [2], III). Le cas $0 < f \equiv \text{cte} < |\Omega|$ correspond à une situation analogue.

1.5.- Deux problèmes plus proches de la réalité physique

1.5.1- Une généralisation de $\beta(u)$

Posons le problème P_3 $\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u + g(\beta(u)) \ni 0 \end{array} \right.$

où g est une fonction continue de $[0, |\Omega|]$ dans \mathbb{R} .

Nous avons les mêmes résultats d'existence que pour le problème P_1 précédent (cf. [1], IV). De même, si la solution de P_3 est sans palier alors elle est solution du problème fort obtenu en remplaçant $\beta(u)$ par $\overline{\beta(u)}$. C'est précisément le cas si par exemple $0 \notin g$ ($]0, |\Omega|$).

Mais ici, nous n'avons plus à notre disposition de fonctionnelle J pouvant donner des informations sur les solutions de P_3 .

Nous n'avons plus alors de résultats d'unicité, et l'on ne peut pas appliquer la théorie de l'optimisation pour la recherche d'une solution.

Néanmoins, nous essayerons d'exhiber numériquement une solution approchée de P_3 de la même manière que pour P_1 (cf. § 4)

1.5.2 - Un problème plus élaboré

Nous introduisons dans cette partie la fonction $\bar{\mu}(u, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega / u(y) \leq t \}$ pour toute fonction u mesurable. Nous remarquons que $\bar{\mu}(u, u(x)) = \bar{\beta}(u)(x)$.

Propriété : soit u une fonction mesurable, alors la fonction $\bar{\mu}_u : t \rightarrow \bar{\mu}(u, t)$ est croissante de \mathbb{R} dans $[0, |\Omega|]$; c'est une fonction à variation bornée/

Remarque : si la fonction mesurable u admet un palier : c'est-à-dire si l'ensemble $\{x \in \Omega / u(x) = t_0\}$ n'est pas de mesure nulle, alors $\bar{\mu}_u$ n'est pas continue en t_0 . Inversement, nous énoncerons la propriété.

Proposition 1.5.2 - Soit $u \in L^2(\Omega)$ et sans palier, alors la fonction $\bar{\mu}_u$ est uniformément continue de \mathbb{R} dans $[0, |\Omega|]$; elle admet une dérivée presque partout sur \mathbb{R} et $\bar{\mu}'_u \in L^1(\mathbb{R})$.

On démontre simplement cette propriété grâce aux résultats sur la dérivation des applications à variation bornée, (voir [4] Rudin p. 118).

Nous avons même le résultat :

$$\bar{\mu}_u(t_2) - \bar{\mu}_u(t_1) \geq \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mu}'_u(t) dt$$

L'égalité n'étant réalisée que si $\bar{\mu}'_u$ est absolument continue sur $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$.

Nous poserons le problème :

$$P_4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u + \left[\int_{u(x)}^{\infty} |\bar{\mu}'_u(t)|^n dt \right]^m = f \\ f \in L^2(\Omega) \text{ et } (n, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \end{array} \right.$$

Il faudrait caractériser la classe de fonctions dans laquelle nous pourrions trouver une solution de ce problème.

Pour $n = 1$: si $u \in L^2(\Omega)$ et est sans palier et

si \bar{u}_u est absolument continue alors

$$\int_{u(x)}^{\infty} u'_u(t) dt = |\Omega| - \beta(u)(x)$$

et ainsi le problème P_4 rentre dans le cadre du problème P_3 en écrivant

$$g(\beta(u)) = (|\Omega| - \beta(u))^m \quad m \in \mathbb{R}^{*+}$$

Donc, nous pourrions avoir une solution de P_4 dans ce cas si l'on sait que la solution de P_3 est sans palier et absolument continue.

Pour $n \neq 1$. Nous avons aussi quelques difficultés à définir les conditions sur u pour que l'opérateur $u \rightarrow \left[\int_{u(x)}^{\infty} |\bar{u}'_u(t)|^n dt \right]^m$ ou même un opérateur multivoque associé, ait quelques propriétés analogues à celles de β .

Nous conservons néanmoins ce problème, car malgré le peu de résultats théoriques, le problème discrétisé se résoud bien puisqu'alors on montrera que les solutions u_h et u_{u_h} auront les bonnes propriétés désirées.

2.- METHODES NUMERIQUES ET PROBLEMES APPROCHES

2.0 - Le Domaine Physique

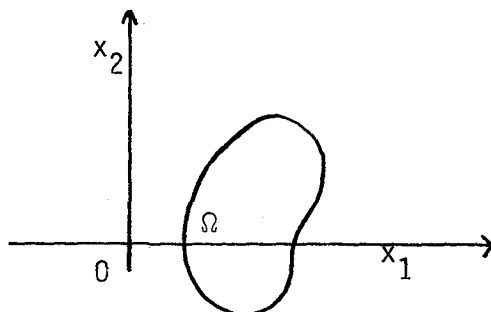
Le domaine est l'intérieur d'une machine TOKAMAK : c'est un tore, nous ne nous intéressons qu'aux solutions ayant la symétrie axiale du tore ; après réduction par certaines constantes, l'équation de P_0 devient :

$$(3) \quad -\nabla \cdot \left(\frac{1}{x_1} \nabla u \right) + \bar{\beta}(u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

où $\bar{\beta}$ a toujours la même définition que précédemment, tandis que $\mathcal{L} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{x_1} \nabla \right)$ est l'opérateur linéaire du problème physique. Il a les mêmes propriétés que le Laplacien, si nous imposons que Ω , la section du tore, soit telle que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_1^* < x_1 < x_1^{**} \\ c < x_2 < d \end{cases} ,$$

l'axe du tore étant porté par $0 x_2$



Nous noterons $a(u, v) = \int_{\Omega} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{x_1} \nabla u \right) \cdot \nabla v \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\Omega} \frac{1}{x_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx_1 \, dx_2$,

$\forall u$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. C'est une forme bilinéaire symétrique positive sur $H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de P_0 équivalente à (3) est alors

$$(4) \quad a(u, v) + \int_{\Omega} \bar{\beta}(u) \cdot v \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\Omega} f v \, dx_1 \, dx_2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Les autres problèmes P_i $i = 1 \dots 4$ s'expriment de la même manière en remplaçant l'opérateur Laplacien par l'opérateur $-\nabla \cdot \left(\frac{1}{x_1} \nabla \right)$

2.1 - Approximation de l'espace $H_0^1(\Omega)$

Nous utiliserons la méthode classique des éléments finis :

2.1.1 - La triangulation \mathcal{T}_h

Nous définissons une triangulation de Ω (ou de Ω_h , polygône qui l'approche). T_i sont des triangles ouverts disjoints,

- $\Omega_h = \bigcup_i T_i$; chaque côté d'un triangle n'appartient qu'à 1 ou 2 triangles T_i ,

- h est un paramètre comparable à la longueur d'un côté d'un triangle, destiné à tendre vers 0.

Les conditions que nous imposons sur les triangulations \mathcal{T}_h sont :

- $\forall x \in \Omega \exists h_0 \forall h < h_0 \Rightarrow x \in \Omega_h$

- $\forall x \notin \Omega \exists h_1 \forall h < h_1 \Rightarrow x \notin \Omega_h$

- que le rapport du plus petit côté d'un triangle au plus grand côté du même triangle ne tende pas vers 0.

Nous avons triangulé deux domaines Ω_C et Ω_R

Ω_C est le carré $[10,20] \times [0,10]$ \mathcal{T}_h a 121 sommets, 200 triangles et les triangles sont tous semblables,

Ω_R est un demi cercle : centre (2,0), rayon = 1, qui figurera (grâce à la symétrie supposée des données), la 1/2 section de la coque toroïdale de la machine.

\mathcal{T}_h admet 192 triangles et 117 sommets.

2.1.2 - L'espace V_h de dimension finie

Ce sera l'espace P_1 des fonctions continues sur Ω_h , nulles sur le bord et linéaires sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Nous avons donc $V_h \subset H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset H^1_0(\Omega)$ (cf. [6]). La dimension de l'espace vectoriel V_h est NSI : nombre de sommets intérieurs à Ω_h .

Nous définissons également $W_h \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω_h , linéaires sur chaque triangle. La dimension de W_h est NS : nombre de sommets de Ω_h . Nous noterons P_h l'opérateur de projection de $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ sur W_h défini par $P_h u(M) = u(M) \forall M \in \{\text{noeuds de } \mathcal{T}_h\}$ et $P_h u \in W_h$; nous noterons également P_h la restriction à $H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ qui s'envoie sur V_h . Etant donné que $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on peut prolonger P_h à tout $L^2(\Omega)$ de manière standard. Les espaces W_h et V_h réalisent des approximations internes de $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, en ce sens qu'on peut énoncer le résultat :

Il existe une suite de paramètre h_n , tels que les espaces W_{h_n} soient une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $L^2(\Omega)$ dont la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_{h_n}$ soit dense dans $L^2(\Omega)$. De plus $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$P_{h_n} u \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Il s'agit là de résultats classiques sur la méthode des éléments finis [6].

2.2 - Le problème approché

Nous voulons résoudre numériquement le problème :

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \quad / \quad \mathcal{L} u + \beta(u) \ni f$$

Grâce aux approximations internes de $H^1_0(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ par V_h et W_h , nous allons chercher des solutions du problème discrétisé :

$$\text{trouver } u_h \in V_h \quad / \mathcal{L}_h u_h + \beta_h(u_h) \ni P_h f$$

où \mathcal{L}_h sera une approximation de l'opérateur \mathcal{L}

où β_h sera un opérateur multivoque de V_h dans W_h ,

et où $P_h f$ est la projection de f sur W_h .

Pour que l'approximation présente un intérêt, il faut que :

- 1/ le problème discrétisé ait une solution,
- 2/ que cette solution soit facile à calculer
- 3/ et qu'une suite de solutions des problèmes discrétisés "converge" vers une solution du problème continu.

Nous allons donc étudier le problème discrétisé pour savoir comment choisir \mathcal{L}_h et β_h pour répondre à ces 3 problèmes :

La formulation variationnelle du problème discrétisé $P_{0,h}$ est :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) + \int_{\Omega_h} \bar{\beta}_h(u_h) v_h \, dx = \int_{\Omega_h} P_h f \cdot v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \{v_i\}_{i=1, \dots, NSI} \text{ une base de } V_h \quad \left\{ \begin{array}{l} v_i(M_i) = 1 \\ v_i(M_j) = 0 \quad \forall j \neq i \end{array} \right.$$

et de même $\{v_i\}_{i=1, \dots, NS}$ la base de W_h

$$\text{alors } P_h f = \sum_{i=1}^{NS} f(M_i) v_i$$

En exprimant (u_h) dans cette base, on peut réécrire (5) en l'appliquant à chaque élément de la base de V_h : l'équation (5) devient donc le système

$$(6) \quad \left[\sum_{i=1}^{NSI} u_h(M_i) a_h(v_i, v_j) + \sum_{i=1}^{NS} \bar{\beta}_u(u_h)(M_i) \int_{\Omega} v_i v_j \, dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^{NS} f(M_i) \int_{\Omega} v_i v_j \, dx_1 dx_2 \right]$$

$$\forall j=1, \dots, NSI.$$

Les coefficients $a_h(v_i, v_j)$ sont les coefficients de la matrice \mathcal{L}_h de la partie linéaire de (6) ; ils doivent être des approximations de

$$a(v_i, v_j) = \int_{\Omega} \frac{1}{x_1} \nabla v_i \nabla v_j \, dx_1 \, dx_2$$

Nous prendrons $a_h(v_i, v_j) = \int_T \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x_1(M_1)} + \frac{1}{x_1(M_2)} + \frac{1}{x_1(M_3)} \right) \nabla v_i \nabla v_j \, dx_1 \, dx_2$

où M_1, M_2 et M_3 sont les 3 sommets du triangle T ; l'intégrale relative à T au second membre n'est ^{non} nulle que si T admet M_i et M_j pour sommets.

La forme bilinéaire symétrique a_h approche a dans le sens suivant :

Lemme 2.2.1 : Soit h_n une suite de paramètres réels tels que v_{h_n} soit une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $H^1_0(\Omega)$, pour toute suite $\{u_{h_n}\}$ qui converge faiblement dans $H^1_0(\Omega)$ vers u et pour toute suite $\{v_{h_n}\}$ qui converge fortement dans $H^1_0(\Omega)$ vers v , alors $a_h(u_h, v_h) \rightarrow a(u, v)$.

Démonstration :

$a(u, v)$ est l'intégrale du produit de 3 fonctions $\nabla u, \nabla v$ et $g(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1}$.

On sait que ∇u_{h_n} converge faiblement vers ∇u dans $(L^2(\Omega))^2$
 ∇v_{h_n} converge fortement vers ∇v dans $(L^2(\Omega))^2$

et nous considérons les projections de g sur W_{h_n} : la suite $P_{h_n} g$ converge uniformément vers g , alors $P_{h_n} g \rightarrow g$ dans $L(\Omega)$ fort.

Considérons $\int_{\Omega} P_{h_n} g \nabla u_{h_n} \nabla v_{h_n} \, dx_1 \, dx_2 = \sum_{i,j,k} g(M_i) U_h(M_j) v_h(M_k) \int_{\Omega} v_i \nabla v_j \nabla v_k$

l'intégrale $\int_{\Omega} v_i \nabla v_j \nabla v_k$ n'est non nulle que si M_i, M_j et M_k appartiennent à un même triangle.

De plus $\int_T v_i \nabla v_j \nabla v_k = \frac{1}{3} \int_T \nabla v_j \nabla v_k$, puisque $\nabla v_j \nabla v_k$ est constant sur un triangle.

On peut écrire symboliquement :

$$\int_{\Omega} P_{h_n} g \nabla u_{h_n} \nabla v_{h_n} \, dx_1 \, dx_2 = \sum_{j,k \in T} u_h(M_j) v_h(M_k) \left(\frac{1}{3} \sum_{i \in T} g(M_i) \int_T \nabla v_j \nabla v_k \right)$$

c'est-à-dire grâce aux définitions de la page précédente :

$$\int_{\Omega} P_{h_n} g \nabla u_{h_n} \nabla v_{h_n} dx_1 dx_2 = a_{h_n} (u_{h_n}, v_{h_n})$$

d'après les convergences $n \rightarrow \infty$ on a

$$a_{h_n} (u_{h_n}, v_{h_n}) \rightarrow a(u, v) \quad \blacksquare$$

Nous avons également une autre propriété :

Propriété 2.2.2 - Les formes bilinéaires a_h sont uniformément elliptiques :

$$(7) \quad \exists \alpha > 0 / \forall h > 0 ; \forall u_h \in V_h \quad a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Dem.: Il suffit de remarquer $\frac{1}{x_1^*} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x_1^{**}}$, et $\alpha = \frac{1}{x_1^{**}}$.

2.3 - Le calcul de l'opérateur β_h

2.3.0 - Le calcul d'une approximation de l'opérateur β est la principale difficulté du problème.

Si l'on utilise une méthode itérative, il faut par exemple calculer une suite $\bar{\beta}_h(u_n)$; mais, du fait que β_h ne saurait être continu et que sa définition n'est pas locale, il faudra recalculer $\bar{\beta}_h(u_n)$ à chaque itération. Il importe donc que le calcul coûteux de $\bar{\beta}_h(u)$ soit simplifié, utilisé le moins possible, et néanmoins d'une précision suffisante pour rendre crédible l'algorithme utilisé.

2.3.1 - Calcul exact de $\beta(u_h)$

$$\bar{\beta}(u_h)(x) = \text{mes} \{ y \in \Omega_h / u_h(y) \leq u_h(x) \}$$

Mais, pour notre problème approché, nous n'avons besoin que de la projection de cette fonction sur l'espace V_h .

Nous pouvons calculer facilement :

$$(8) \quad \bar{\mu}(u_h, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega_h / u_h(y) \leq t \}$$

En effet, nous pouvons réécrire (8), puisque les triangles forment une partition de Ω_h

$$\bar{\mu}(u_h, t) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} \text{mes} \{ \underbrace{y \in T_i / u_h(y) \leq t}_{=A(T_i)} \}$$

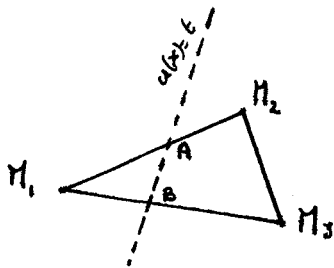
sur le triangle T_i , les valeurs de la fonction u_h sont déterminées par les valeurs aux trois sommets du triangle

$$u_1, u_2 \text{ et } u_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } t < u_1 < u_2 < u_3 \quad A(T_i) = 0$$

$$\text{si } u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq t \quad A(T_i) = \text{mes}(T_i)$$

Dans les autres cas, comme u est linéaire sur ce triangle, on peut calculer $A(T_i)$ par des calculs simples :



$$M_1 A = M_1 M_2 \times \frac{u_1 - t}{u_1 - u_2} \quad \text{etc...}$$

on peut ainsi calculer l'aire de $M_1 A B$ ou celle du trapèze ABM_3M_2 .

Nous pouvons ainsi calculer exactement la fonction $\bar{\beta}(u_h)(x)$ pour tous les points $x \in \Omega$ $\bar{\beta}(u_h)(x) = \bar{\mu}(u_h, u_h(x))$; $\bar{\beta}(u_h)$ n'est pas une fonction appartenant à V_h , mais pour avoir sa projection sur V_h , il suffit de connaître sa valeur aux sommets et $P_h \bar{\beta}_h(u_h)$ sera la fonction appartenant à V_h dont les valeurs aux points M_i sont connues: $P_h \bar{\beta}_h(u_h)(M_i) = \bar{\mu}(u_h, u_h(M_i))$.

Donc, on peut connaître exactement $P_h \bar{\beta}(u_h)$, mais il nécessite N fois le calcul de $\bar{\mu}(u_h, t)$.

2.3.2- Convergence des solutions "approchées"

Le problème discrétisé de P_0 est :

trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$(9h) \quad \mathcal{L}_h u_h + P_h \bar{\beta}(u_h) = P_h f$$

Nous définissons également un problème faible :

Définition : $\beta_h(u_h) = \{\psi_h \in W_h ; P_h \underline{\beta}(u_h)(x) \leq \psi_h(x) \leq P_h \bar{\beta}(u_h)(x) \forall x \in \Omega_h\}$

β_h est alors une partie fermée, convexe et non vide de W_h .

Problème faible :

$$P_{1,h} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \\ \mathcal{L}_h u_h + \beta_h(u_h) \geq P_h f \end{array} \right.$$

Théorème 2.3.2 : Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution au problème $P_{1,h}$

La démonstration est analogue à celle du problème continu, dans les espaces de Hilbert V_h et W_h . Il suffit de montrer que le graphe de β_h est fermé dans $V_h \times W_h$:

$$G(\beta_h) = \{ (u_h, \psi_h) \in V_h \times W_h / \psi_h \in \beta_h(u_h) \}.$$

Soit une suite $\{ u_h^n \}_{n \in \mathbb{N}}$ dans V_h , qui converge (fortement) vers u_h :

alors $\psi_h^n \in \beta_h(u_h^n) \subset W_h$ est bornée dans W_h indépendamment de u .

Il existe une sous-suite telle que $\psi_h^{n_i} \rightarrow \psi_h$ dans W_h alors

$$(10) \quad P_h \underline{\beta}(u_h^{n_i})(x) \leq \psi_h^{n_i}(x) \leq P_h \bar{\beta}(u_h^{n_i})(x) \quad \forall x \in \Omega$$

On peut encore extraire une sous-suite telle que

$$\underline{\beta}(u_h^{n_i}) \rightarrow \psi_1 \quad \text{et} \quad \bar{\beta}(u_h^{n_i}) \rightarrow \psi_2 \quad \text{alors on sait, grâce à la}$$

propriété 1.1.3, que ψ_1 et ψ_2 appartiennent à $\beta(u_h)$. Etant donné que P_h conserve la relation d'ordre, on a

$$(11) \quad P_h \underline{\beta}(u_h)(x) \leq P_h \psi_{1,h}(x) \leq \psi_h(x) \leq P_h \psi_{2,h}(x) \leq P_h \bar{\beta}(u_h)(x) \quad \forall x \in \Omega$$

et donc $\psi_h \in \beta_h(u_h)$. C.Q.F.D.

Théorème 2.3.3 - Soit u_h une solution du problème $P_{1,h}$, alors il existe une sous-suite notée u_{h_n} convergeant fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une solution du problème P_1 .

Démonstration : Si u_h est solution de $P_{1,h}$, on a

$$(12) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_h u_h + \psi_h = P_h f \\ \text{avec } \psi_h \in \beta_h(u_h) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad \underline{\beta}(u_h)(x) \leq \psi_h(x) \leq \overline{\beta}(u_h)(x) \quad \forall x \in \Omega$$

ce qui est équivalent à : $\forall M$ un noeud de la triangulation :

$$(14) \quad \underline{\beta}(u_h)(M) \leq \psi_h(M) \leq \overline{\beta}(u_h)(M)$$

La projection P_h est surjective sur W_h , et de plus elle conserve l'ordre, donc il existe une fonction $\tilde{\phi}_h$ de $L^2(\Omega)$ telle que $\tilde{\phi}_h \in \beta(u_h)$ et $\psi_h = P_h \tilde{\phi}_h$.

De plus, $0 \leq \tilde{\phi}_h(x) \leq |\Omega| \quad \forall x \in \Omega$, donc

$$(15) \quad \|\tilde{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{3/2}$$

De (12) nous déduisons

$$a_h(u_h, u_h) = (P_h f - P_h \tilde{\phi}_h, u_h)_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha \|u_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{3/2}) \|u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

puisque P_h a une norme égale à 1, comme opérateur de L^2 dans L^2 , et donc

$$(16) \quad \|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

On en déduit alors qu'il existe une suite u_{h_n} qui converge vers une fonction u dans $H_0^1(\Omega)$ faible et $L^2(\Omega)$ fort par compacité.

De même, grâce à (15) nous pouvons affirmer qu'il existe une suite, notée encore h_n , telle que Φ_{h_n} converge vers Φ dans $L^2(\Omega)$ faible. L'opérateur de projection P_{h_n} est auto-adjoint, on peut donc encore écrire :

$$(\Phi_{h_n}, \Phi_{h_n}, \phi)_{L^2(\Omega)} = (\Phi_{h_n}, P_{h_n} \phi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in L^2(\Omega)$$

comme $\Phi_{h_n} \rightarrow \Phi$ dans $L^2(\Omega)$ faible

et $P_{h_n} \phi \rightarrow \phi$ dans $L^2(\Omega)$ fort, on en déduit

$$(\Phi_{h_n}, \Phi_{h_n}, \phi)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (\Phi, \phi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in L^2(\Omega)$$

ou $P_{h_n} \Phi_{h_n} \rightarrow \Phi$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

On a également $P_{h_n} f \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Du lemme 2.2.1, on peut déduire que si $u_h \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible

$$\text{alors } a_h(u_h, v) \rightarrow a(u, v)$$

soit encore $(\mathcal{L}_h u_h, v)_{H^{-1}, H^1} \rightarrow (\mathcal{L}u, v)_{H^{-1}, H^1} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

mais aussi, en particulier puisque $\mathcal{L}_h u_h$ et $\mathcal{L}u$ appartiennent à $L^2(\Omega)$

si bien que $(\mathcal{L}_h u_h, v)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in L^2(\Omega)$
 dans $L^2(\Omega)$ faible et $H^{-1}(\Omega)$ fort ; tous les termes de (12) convergent fortement dans $H^{-1}(\Omega)$, la limite faible de u_h dans $H_0^1(\Omega)$ vérifie :

$$(17) \quad \mathcal{L}u + \Phi = f \text{ dans } (\Omega).$$

D'après la propriété (1.1.3) si $\begin{cases} u_{h_n} \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \Phi_{h_n} \rightarrow \Phi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible et } \Phi_{h_n} \in \beta(u_{h_n}) \end{cases}$

alors $\Phi \in \beta(u)$.

On en déduit que u est solution du problème P_1 .

Convergence dans $H_0^1(\Omega)$ fort :

Il nous reste alors à montrer que u_{h_n} tend vers u pour la topologie forte de $H_0^1(\Omega)$.

Si nous appelons encore P_h la projection de $H_0^1(\Omega)$ sur W_h , alors on sait qu'il nous suffit de définir P_h sur un sous-espace dense de $H_0^1(\Omega)$, par exemple $\mathcal{D}(\Omega)$.

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad P_h u(M) = u(M) \quad \forall M \text{ noeud de } \mathcal{T}_h$$

et $P_h u \in W_h$: linéaire sur chaque triangle

alors, on peut montrer que : (*) $\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} = O(h)$

Considérons alors l'expression χ_h , où u_h est solution de $\mathcal{P}_{1,h}$

$$\begin{aligned} \chi_h &= a_h(u_h - P_h u, u_h - P_h u) \\ &= a_h(u_h, u_h) - 2 a_h(u_h, P_h u) + a_h(P_h u, P_h u) \end{aligned}$$

mais $u_h \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible

et $P_h u \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort

donc $\chi_h \rightarrow a_h(u_h, u_h) - a(u, u)$ d'après le lemme 2.2.1

c'est-à-dire $\chi_h \rightarrow (\phi_h - P_h f, u_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi - f, u)_{L^2(\Omega)}$

mais

$u_h \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort

$\phi_h \rightarrow \phi$ dans $L^2(\Omega)$ faible donc : $\chi_h \rightarrow 0$

d'après l'uniforme coercivité de a_h :

$$\|u_h - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$$

et grâce à (*) $\|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$

donc $u_h \rightarrow u$ pour la topologie forte dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque : Cette démonstration peut aussi s'étendre au problème P_3 de la façon suivante :

soit u_h une solution du problème $P_{3,n}$: $\mathcal{L}_h u_h + P_h g(\beta_h(u_h)) = P_h f$
alors une suite de solutions $\{u_{h_n}\}_{h_n \rightarrow 0}$ converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$
où u est solution de P_3

$$\mathcal{L} u + g(\beta(u)) = f.$$

Le seul changement à apporter à la démonstration précédente est que si $\Phi_h \in P_h g(\beta_h(u_h))$, puisque g est continue, alors il existe une sous-suite de (Φ_{h_n}) qui converge faiblement vers $\Phi \in g(\beta(u))$. Ce résultat de J. MOSSINO est dans [1].

2.3.4. - Amélioration, β_h simplifié

Le calcul de $\bar{u}(u_h, t)$ nécessite lui-même un balayage sur l'ensemble des triangles de \mathcal{T}_h . Sur chaque triangle, il faut classer les 3 valeurs de la fonction u_h aux sommets par rapport à t , puis calculer l'aire d'un sous-triangle.

Un tel calcul serait coûteux, ou pourrait d'ailleurs avoir $u_h(M_i) = u_h(M_j)$ ou très peu différent et faire ainsi des calculs redondants.

Nous pouvons encore simplifier le calcul de $\beta(u_h)$: nous partageons le segment $u_h(\Omega_h) = [u_{h,\min}, u_{h,\max}]$ en NP parties grâce à la subdivision $t_0 = u_{h,\min} < t_1 \dots < t_{NP} = u_{h,\max}$. Nous calculons les $\gamma_i = \bar{u}(u_h, t_i)$ $i=0, \dots, NP$

$$\gamma_0 = 0 < \dots < \gamma_i < \dots < \gamma_{NP} = |\Omega_h|$$

Nous construisons alors la fonction $\gamma_{NP}(t)$, linéaire dans chaque intervalle t_i , t_{i+1} et $\gamma_{NP}(t_i) = \gamma_i$ $i = 0, \dots, NP$.

$\gamma_{NP}(t)$ est donc une approximation par éléments finis sur un segment réel de la fonction $\bar{u}(u_h, t)$.

Nous définirons alors une approximation de $\bar{\beta}(u_h)$ par :

$$\bar{\beta}_{h, NP}(u_h) \in V_h \text{ et } \bar{\beta}_{h, NP}(u_h)(M_i) = \gamma_{NP}(u_h(M_i)) \quad \forall M_i \in \{\text{noeuds de } \mathcal{T}_h\}$$

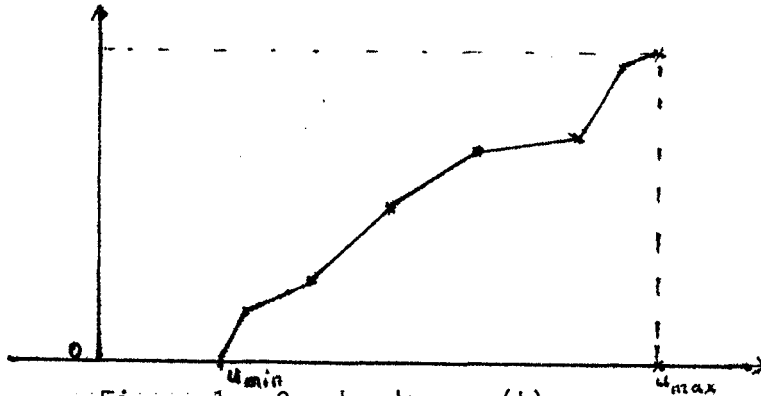


Figure 1 : Graphe de $\gamma_{NP}(t)$.

Le calcul de $\bar{\beta}_{h, NP}(u_h)$ ne nécessite plus que le calcul de $\gamma_{NP}(t_i)$ $i = 0, \dots, NP$, plus quelques calculs d'interpolation linéaire, alors que le calcul de $\bar{\beta}_h = P_h \bar{\beta}$ du paragraphe précédent nécessite NS calculs de $\bar{u}(u_h, u_h(M_i))$. Donc le rapport du temps de calcul des deux méthodes est environ $\frac{NP}{NS}$.

D'autre part, lorsque $NP \rightarrow \infty$, $\bar{\beta}_{h, NP}(u_h) \rightarrow \bar{\beta}_h(u_h)$ dans W_h (topologie de R^{NS}).

Donc il existe une sous-suite de couples (h, NP) qui tend vers $(+0, +\infty)$ tel que $\bar{\beta}_{(h', NP')}(u_h) \rightarrow \psi \in \beta(u)$, ainsi qu'une sous-suite de solution de

$$P_{h, NP} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_h u + \bar{\beta}_{h, NP}(u) = P_h f \\ u \in V_h \end{array} \right.$$

qui converge vers une solution u de P_1 dans $H_0^1(\Omega)$ fort

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} u + \beta(u) \ni f \\ u \in H_0^1(\Omega) . \end{array} \right.$$

Nous utiliserons dans nos essais numériques $NS = 120$ et $NP \approx 20$, donc nous divisons le temps de calcul de β_h par 6, ce qui est appréciable puisque ce calcul va intervenir dans une méthode itérative (voir § 2.4).

Remarque 2.3.5 :

La pente de la courbe $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$ sera considérée comme une approximation que $\bar{u}'(u_h, t)$ et nous fournira l'approximation du terme non linéaire du problème P_4 (cf. I, 1.5.2).

De la façon dont on calcule $\gamma(t)$, on a $0 < \varepsilon < \gamma'(t) < A < +\infty$ partout où $\gamma'(t)$ est défini (c'est-à-dire sur $\mathbb{R} - \{t_0, t_1, \dots, t_{NP}\}$). Donc

$\gamma'_{NP} \in L^n([u_{\min}, u_{\max}])$ si n est positif et même uniformément par rapport à la fonction $u \in H_0^1(\Omega)$. Nous avons alors $[\int_{u(x)}^{\infty} |\mu'(t)|^m dt]^m \in L^\infty(\Omega)$,

Nous pourrions donc trouver une solution, pour NP fixé, mais lorsque ce paramètre varie, nous ne pouvons pas garder d'estimations uniformes, et donc aucun renseignements sur le problème continu.

2.3.6. - Les tests de ce calcul

Nous avons considéré le polynôme le plus simple appartenant à $H_0^1(\Omega)$:
 $P(x, y) = - (x-10)(x-20) y (y-10)$, dont la projection dans V_h sera P_h .

Nous avons calculé par des méthodes de quadrature très précises la fonction $\beta(P)$, puis par notre méthode $\beta_h(P_h)$.

La comparaison de ces deux fonctions aux noeuds de la triangulation fait apparaître une erreur de l'ordre de 1 %, ce qui est satisfaisant.

Sur Ω_h , nous avons pris la fonction $u(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$ pour laquelle on a $\beta(u)(x, y) = \pi (x-2)^2 + y^2$ et $\beta_h(u_h)$ en est une meilleure approximation $\frac{|\beta(u)(M) - \beta_h(u_h)(M)|}{\beta(u)(M)} < 0,01$

Pour ces deux exemples simples de fonctions régulières, l'erreur ne décroît plus beaucoup en fonction de NP lorsque $NP \geq 10$, et le temps de calcul de β_h est quand même assez faible.

Dans l'algorithme que nous utiliserons, nous prendrons définitivement

NP = 20, des intervalles (t_i, t_{i+1}) égaux sauf les trois premiers au voisinage du minimum que nous prendrons plus petits puisqu'en ce point la fonction u est souvent plate et $\frac{1}{\beta}$ varie rapidement.

Une vérification simple que l'on peut effectuer est de calculer $\int_{\Omega_h} \bar{\beta}_h(u_h) dx$. En effet, la valeur exacte est $\int_{\Omega} \bar{\beta}(u) dx = \frac{|\Omega|^2}{2}$ (cf. [1]), si la fonction est sans palier. Lors des essais numériques, j'ai systématiquement calculé l'intégrale de $\bar{\beta}_h(u_h)$ que j'ai comparée à la valeur connue $\frac{|\Omega|^2}{2}$, afin d'éliminer des résultats qui auraient pu être aberrants.

2.4 - L'algorithme

Nous devons résoudre

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{L} u + \bar{\beta}(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

avec l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{x_1} \nabla \cdot \right)$

En fait, nous résolvons le problème approché dans V_h , qui a la même formulation que (9) avec des indices h partout que désormais nous n'indiquerons plus.

2.4.1 - Description : On définit la suite de fonctions u_n de V :

soit u_0 fonction donnée dans $V (\approx \mathbb{R}^{NS})$

⋮

u_n connue dans V

- on calcule $\bar{\beta}_h(u_n)$ comme en (2.3)

$$\text{- on résoud } \begin{cases} \mathcal{L} u_{n+\frac{1}{2}} = f - \bar{\beta}_h(u_n) & \text{sur } \Omega \\ u_{n+\frac{1}{2}} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases}$$

C'est un problème de Dirichlet, \mathcal{L} est un opérateur elliptique coercif, qui admet un inverse lui aussi coercif.

- Soit $\rho_n \rightarrow 0$ on définit $u_{n+1} = (1-\rho_n) u_n + \rho_n u_{n+\frac{1}{2}}$

u_{n+1} est alors connue etc...

⋮

2.4.2 - Les fonctions avec palier

Ce sont des fonctions de V_h qui prennent aux trois sommets d'au moins 1 triangle des valeurs égales ; ces valeurs sont des nombres calculables par la machine (au moins 8 décimales significatives). Je considérerai donc que les éléments de la suite n'ont pas de palier. Ce qui d'ailleurs n'implique pas qu'une valeur d'adhérence éventuelle de la suite est sans palier.

Je peux alors confondre $\bar{\beta}_h(u_n)$ avec $\beta_h(u_n)$.

2.4.3 - Etude de l'algorithme

Nous étudierons l'algorithme du problème continu, pour ensuite le discrétiser :

si u_n est connu, nous calculons :

$$\text{avec } \begin{cases} u_{n+1} = (1-\rho_n) u_n + \rho_n u_{n+1/2} \\ u_{n+1/2} = f - \bar{\beta}(u_n) \text{ et } u_{n+1/2} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$u_{n+1/2}$ est bien défini car \mathcal{L} est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Le système se réduit donc à

$$u_{n+1} = u_n + \rho \mathcal{L}^{-1} (f - \bar{\beta}(u_n)) - u_n$$

soit encore grâce à (2) dans la partie (1.3.1) :

$$(18) \quad u_{n+1} = u_n - \rho_n \mathcal{L}^{-1} (J'(u_n))$$

si nous supposons que u_n est sans palier. L'égalité (18) entraîne que l'algorithme est un algorithme de type gradient :

En effet, \mathcal{L}^{-1} est un opérateur coercif :

$$(\mathcal{L}^{-1}(v), v)_{(H_0^1, H^{-1})} \geq \alpha_1 |v|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^{-1}(\Omega)$$

Donc, si par exemple $J'(u_n)$ était Lipschitzienne : l'algorithme (18) serait une méthode de descente pour $0 < \rho_n < \frac{K}{c_0}$ où c_0 est la constante de Lipschitz de J'

Par la méthode de descente, u_n convergerait vers l'unique valeur u où $J'(u) = 0$, si les ρ_n étaient bornés inférieurement.

Si nous revenons à notre cas particulier : $J'(u)$ défini en (1.3) n'est pas Lipschitzienne à cause de $\bar{\beta}(u)$ qui n'est pas même continue en u , si u admet un palier. Donc, dans le cas général, on ne peut pas choisir des $\rho_n > 0$ tels que la méthode converge vers le minimum de la fonctionnelle J . Néanmoins, si la suite d'itérés u_n , qui sont sans palier, converge vers u sans palier, on peut imaginer que $|\bar{\beta}(u_n) - \bar{\beta}(u)|_{\mathcal{E}^0} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Alors, si nous vérifions que $J(u_n)$ est une suite réelle décroissante pour un choix $\rho_n > \alpha > 0$, l'algorithme décrira une méthode de descente qui convergera vers le minimum (unique) de la fonctionnelle J : $J(u_n) \rightarrow \ell$ en décroissant

$$\begin{aligned} \text{alors } \mathcal{L}^{-1} J'(u_n), J'(u_n) &\rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow |J'(u_n)|_{H^{-1}(\Omega)} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

et la limite vérifie : $\mathcal{L}u + \bar{\beta}(u) = f$.

Si la limite u n'est pas a priori sans palier, on sait néanmoins que toute la suite u_n (suite minimisante) tend vers une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, et que $J'(u_n) = \mathcal{L}u_n + \bar{\beta}(u_n) - f \rightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ fort, puisque $\bar{\beta}(u_n)$ est borné indépendamment de n dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite telle que $\bar{\beta}(u_{n_i}) \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

D'après la propriété 1.1.3 : $\psi \in \beta(u)$ donc la limite u (de toute la suite u_n) vérifie l'équation du problème

$$P_1 : \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{L}u + \beta(u) \ni f. \end{cases}$$

Mais dans ce cas : u admet un palier, $J'(u)$ n'est pas Lipschitzienne dans un voisinage de u et l'on aura beaucoup de mal à obtenir numériquement une suite u_n minimisante pour J .

Dans la plupart des cas, la limite de $P_{1,h}$ sera sans palier. Nous affirmerons alors avoir une approximation d'une solution de P_0 , P_1 et P_2 .

2.4.4 - Mise en place de l'algorithme

Nous employons donc une méthode itérative et nous considérons avoir localisé la solution quand

$$\frac{\|u_{n+1} - u_n\|_{RNS}}{\|u_n\|_{RNS}} < EPS$$

Nous définissons alors $u_h = u_{n+1}$ qui est l'approximation de u solution de P_0 dans V_h . $NOB = n+1$.

Pour cette algorithme, nous partons de $u_0 = 0$, sauf si cela entraîne des difficultés.

Pour passer de u_n à u_{n+1} , on doit :

- 1) calculer $\beta_h(u_n)$: calcul effectué en entier par (2.3) dont nous ne contrôlons pas la précision,
- 2) résoudre un problème de Dirichlet.

Méthode de surrelaxation avec paramètre ω optimum, obtenu de façon standard :

on effectue des itérations $u_n = u_n^0 \dots u_n^{p+1}$
 si $\frac{\|u_n^{p+1} - u_n^p\|}{\|u_n^p\|} < EPSI$ alors $u_{n+1} = u_n^{p+1}$

2.4.5 - Stratégie

Notre but est d'obtenir une convergence de l'algorithme, puis de l'obtenir rapidement.

Bien que la surrelaxation puisse donner la solution du problème de Dirichlet de façon aussi précise que possible, on n'a pas intérêt à calculer cette solution avec une précision meilleure que celle désirée pour le problème général P_0 .

Et même, dans certains cas, les deux ou trois premières itérations de la surrelaxation suffisent pour obtenir la convergence de l'algorithme. Donc, nous prendrons $\text{EPS} = 10^{-3} \ll \text{EPSI} = 10^{-5}$ ou 10^{-7} , ou encore nous limiterons $P < 3$ dans la surrelaxation, pour un gain de temps souvent appréciable.

3.- RESULTATS

Nous avons vérifié la validité de l'algorithme en prenant encore le polynôme $Q(x,y) = (x-10)(x-20)y(y-10) \in H_0^1(\Omega_c)$. $\mathcal{L}(Q)$ s'exprime simplement, $\bar{\beta}_h(Q_h)$ est une excellente approximation de $\bar{\beta}(Q)$ et on pose $\rho_{1h}(x,y) = \mathcal{L}_n(Q) + \beta_h(Q_h)$. On cherche u_h la solution du problème approché avec $f = \rho_{1h}$. Comme Q est sans palier, elle est l'unique solution de $P_2(\rho_{1h})$. Notre algorithme nous fournit une solution u_{1h} . Si nous la comparons à Q , nous trouvons que la différence relative, $\frac{|u_{1h} - Q_h|}{|Q_h|}$, croît régulièrement du bord du carré au centre (là où β_h est le moins précis) et que $0 < \frac{|u_{1h} - Q_h|}{Q_h} \leq 0,03$, ce qui est fort raisonnable.

D'autre part, les symétries de Q se retrouvent exactement dans u_{1h} , ce qui prouve que la matrice de \mathcal{L}_h est bien conditionnée et que la relaxation donne de bons résultats.

3.0 - Le programme PL/I

Nous avons utilisé ce langage pour faciliter la gestion des fichiers, l'utilisation de programmes préexistants et l'allocation dynamique qui réalise un gain de places mémoires. Par contre, il nécessite un plus grand temps de compilation que le FORTRAN.

Les essais ont eu lieu au CIRCE sur les IBM 168-370.

3.1 - Le cas général

Nous montrons sur le domaine quelques courbes de niveau de la fonction $u(x)$ solution du problème ou de la fonction $\beta_{\bullet}(u)(x)$. On obtient, dans ces cas-là, avec des seconds membres f négatives, une excellente convergence en $\text{NOB} = 7$ itéra-

$$u \text{ solution de } \begin{cases} -\nabla_0 \left(\frac{1}{x_1} \nabla u \right) + \beta(u) = -10 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

NOB = 7 itérations

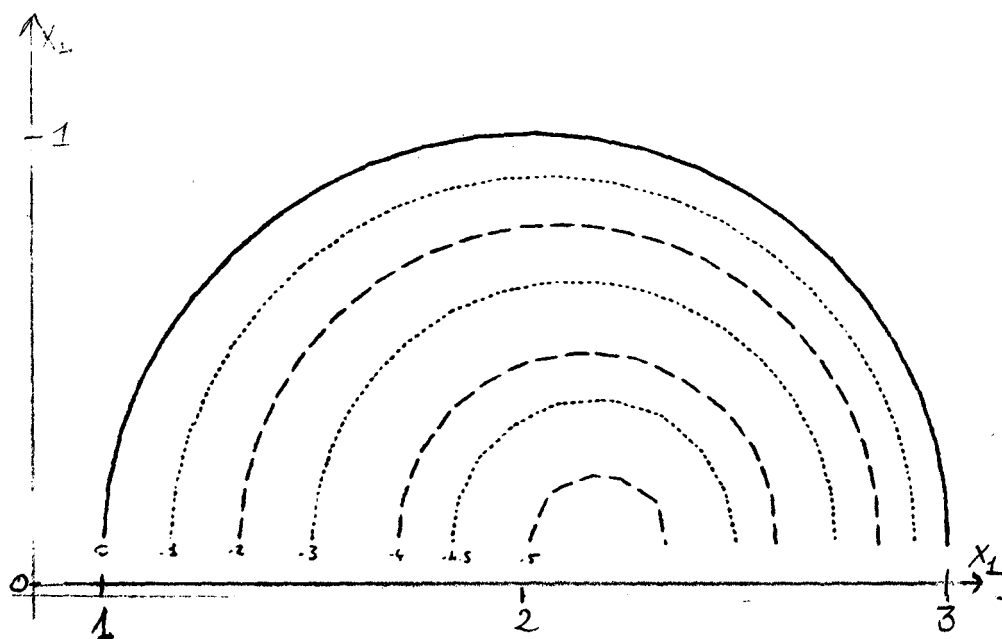
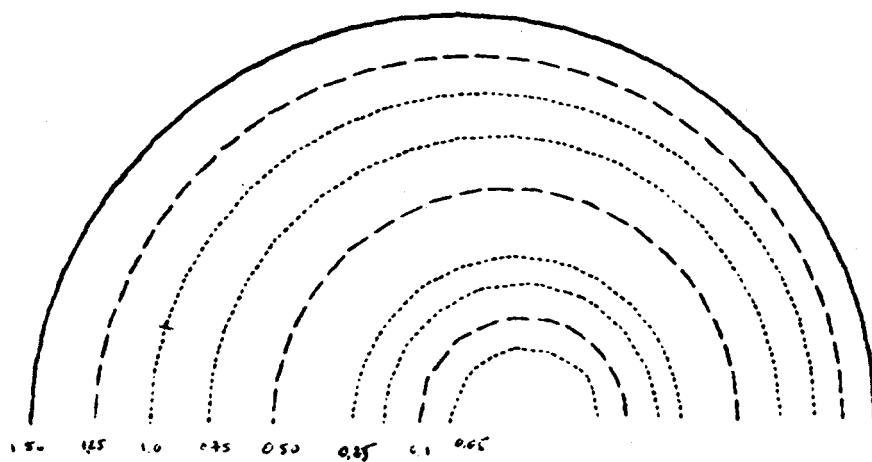
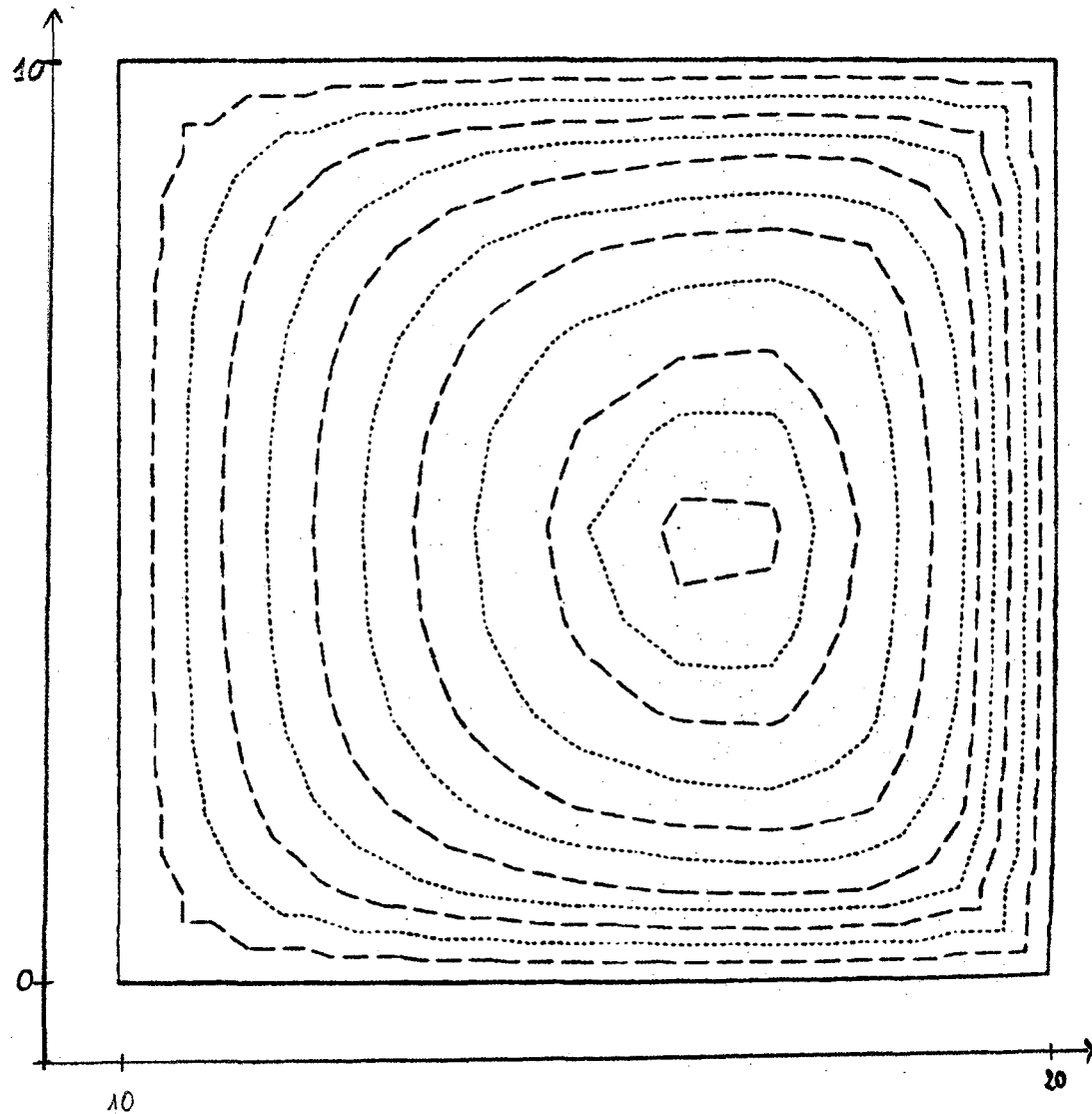
Figure 2 : Courbes de niveau de $u(x)$ 

Figure 3 : Courbes de niveau de $u(x)$ $\beta(u)(\partial\Omega) = \frac{\pi}{2} = 1.56\dots$
 $|\Omega_h| = 1.56\dots$

$$f(x,y) = -\frac{y}{1 + (x-10)^2}$$

NOB = 12 itérations

niveau de la fonction $\beta(u)(x)$.

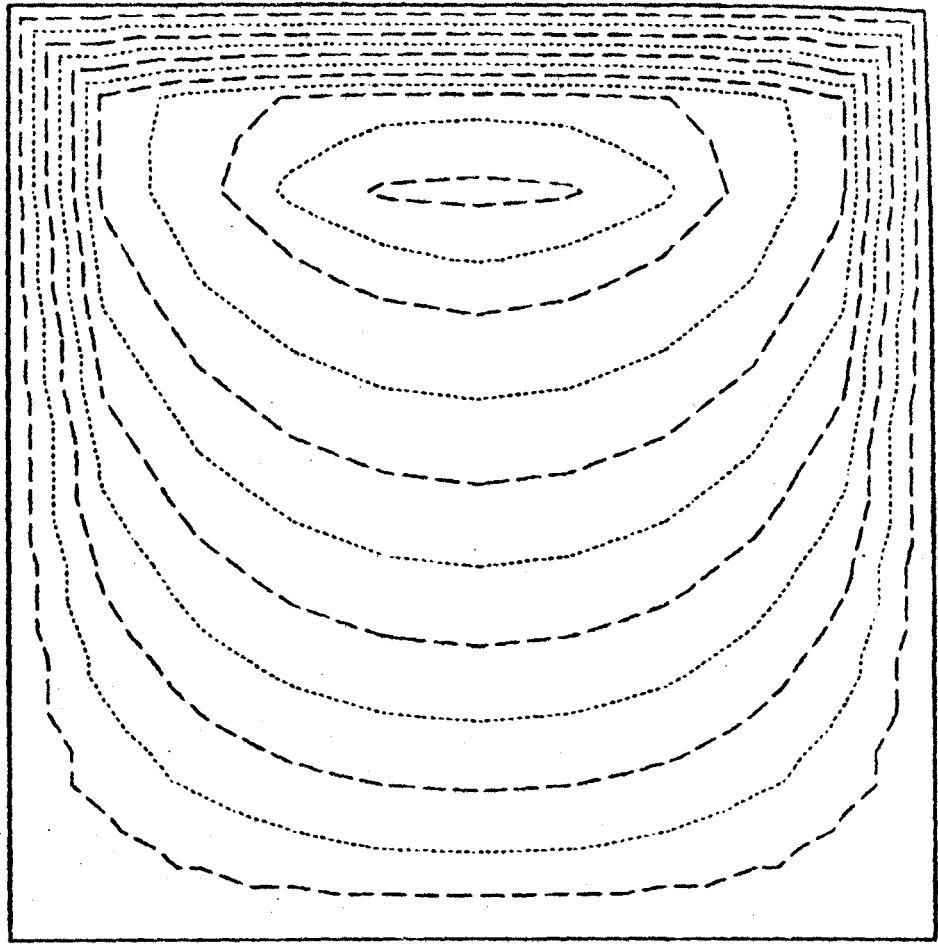
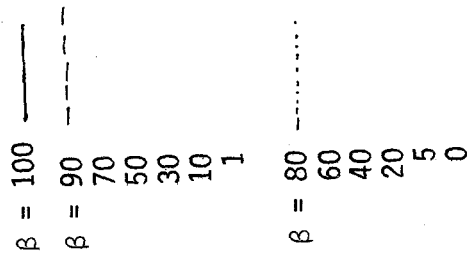


$\beta = 100$
 $\beta = 90$
70
50
30
10
1
 $\beta = 80$
60
40
20
5
5

$$f(x,y) = -e^{-(x-10)} \log(1+y)$$

18 itérations

Courbes de niveau de $\beta(u)(x)$



RHO= 0.90

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION*	* ERREUR DE RELAXATION*	* ERREUR GENERALE*
1	20	2.105E-04	1.000E+00
2	12	9.018E-04	2.224E-02
3	8	4.409E-04	2.536E-04
4	4	4.712E-04	5.798E-06

RHO= 1.00

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION*	* ERREUR DE RELAXATION*	* ERREUR GENERALE*
1	20	2.105E-04	1.000E+00
2	16	5.440E-04	8.513E-02
3	4	9.059E-04	2.599E-05
4	4	1.641E-04	1.096E-06

RHO= 1.10

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION*	* ERREUR DE RELAXATION*	* ERREUR GENERALE*
1	20	2.105E-04	1.000E+00
2	16	7.471E-04	2.310E-01
3	12	1.928E-04	2.055E-03
4	4	7.855E-04	1.242E-05
5	4	1.327E-04	1.467E-06

RHO= 1.20

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION*	* ERREUR DE RELAXATION*	* ERREUR GENERALE*
1	20	2.105E-04	1.000E+00
2	16	9.549E-04	5.413E-01
3	12	4.259E-04	1.646E-02
4	8	9.059E-04	6.882E-04
5	4	7.587E-04	9.361E-06

Ce tableau montre le nombre d'itérations nécessaires pour une convergence dans un cas favorable. On peut comparer les résultats pour différentes valeurs de ρ . La valeur $\rho = 1.0$ est la meilleure. Ici, nous avons $EPS1 = 10^{-3}$ et $EPS = 10^{-5}$.

tions environ. Lors de ces essais, nous avons pu mettre en évidence le paramètre $\rho_{\text{opt}} = 1.0$ sur les deux domaines considérés Ω_C et Ω_R .

3.2 - Un cas particulier important.

C'est le cas où $f \equiv 0$ sur Ω , ce cas a une importance parce qu'il correspond à l'apparition d'une bifurcation ; on résoud donc

$$P_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} u \in -\beta(u) \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur le bord} \end{array} \right.$$

\mathcal{L} vérifie le principe du maximum, donc la solution de ce problème est négative.

3.2.1 - $u \equiv 0$ est solution de P_1

Néanmoins, ce n'est pas la solution de P_2 . En effet, d'après ([2], corollaire 3), la solution de P_2 lorsque f est constante est caractérisée par

$$(14) \quad \mathcal{L} u + \frac{1}{2} (\underline{\beta}(u) + \overline{\beta}(u)) = f = 0$$

$u \equiv 0$ ne vérifie pas (14) donc n'est pas la solution de P_2 .

Si l'on prend pour notre algorithme $u_0 \equiv 0$, alors on aura $u_1 = u_0 = 0$ et l'algorithme se termine à la première itération. Si l'on perturbe un peu u_0 par exemple $u_0(M_i) = 1$ et $M_0(M_j) = 0$, il y a alors convergence vers une fonction sans palier u_n . Mais la convergence est plus délicate à établir. Si je demande une précision $\text{EPS} = 10^{-7}$, alors il faut faire décroître ρ jusqu'à 0,2 et les itérations deviennent plus chaotiques. La décroissance de $J(u_n)$ devient aussi plus difficile à réaliser. Mais si l'on change de fonction de départ perturbée u_0 , alors il y a toujours convergence vers cette fonction u_n .

Si l'on prend $f = \text{cte} < 0$, alors il y a unicité d'une solution sans palier de $P_2(P_0$ et $P_1)$ et l'algorithme converge parfaitement. Si l'on fait tendre cette constante vers 0, 0 est le point où il n'y a plus unicité de la solution. C'est un point de bifurcation, ce qui justifie sans doute les difficultés numériques de l'algorithme.

RFD= 0.40

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION	* ERREUR DE * RELAXATION	* ERREUR * GENERALE	* CRITERE
1	2	1.076E+00	6.086E-01	-3.32976E-01
2	2	7.352E-01	1.319E-01	1.19554E-01
3	2	4.603E-01	5.586E-02	3.19742E-02
4	2	3.077E-01	2.523E-02	-7.99800E-03
5	2	2.165E-01	1.186E-02	-2.80065E-02
6	2	1.564E-01	5.537E-03	-3.86459E-02
7	2	1.134E-01	2.426E-03	-4.56059E-02
8	2	8.432E-02	1.144E-03	-4.91281E-02
9	2	6.354E-02	5.246E-04	-5.10613E-02
10	2	4.535E-02	2.364E-04	-5.27059E-02
11	2	3.653E-02	1.186E-04	-5.32468E-02
12	2	3.090E-02	5.431E-05	-5.34821E-02
13	2	2.486E-02	2.497E-05	-5.35859E-02
14	2	2.022E-02	1.268E-05	-5.36622E-02
15	2	1.657E-02	7.735E-06	-5.39112E-02
16	2	1.354E-02	4.588E-06	-5.40573E-02
17	2	1.105E-02	2.879E-06	-5.41402E-02
18	2	9.107E-03	1.874E-06	-5.41639E-02
19	2	7.486E-03	1.277E-06	-5.41563E-02
20	2	6.161E-03	9.252E-07	-5.41269E-02
21	2	5.061E-03	1.842E-07	-5.41050E-02
22	2	4.637E-03	1.723E-07	-5.40814E-02
23	2	4.238E-03	1.649E-07	-5.40556E-02
24	2	3.877E-03	1.612E-07	-5.40274E-02
25	2	3.554E-03	1.615E-07	-5.39934E-02
26	2	3.265E-03	1.672E-07	-5.39581E-02
27	2	3.016E-03	1.754E-07	-5.39216E-02
28	2	2.792E-03	1.849E-07	-5.38835E-02
29	2	2.596E-03	1.956E-07	-5.38466E-02
30	2	2.422E-03	2.060E-07	-5.38106E-02
31	2	2.268E-03	5.390E-08	-5.37933E-02

Tableau 1

Ce tableau montre la difficulté de convergence de l'algorithme pour $f \equiv 0$. Pour éviter des oscillations d'amplitude croissante, il faut faire diminuer ρ jusqu'à 0,2; ici, on a limité les relaxations à 2 itérations, ce qui justifie un peu les 30 grandes itérations nécessaires pour la convergence. Mais l'erreur générale et le critère $J(u_n)$ ne décroissent pas régulièrement au voisinage de la solution.

4.- LA RESOLUTION NUMERIQUE DES AUTRES PROBLEMES VOISINS

4.1 - Soit le problème P_3

$$\mathcal{L} u + g(\bar{\beta}(u)) = f \quad \text{dans } \Omega .$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

g étant une fonction continue de $[0, \Omega]$ dans \mathbb{R} .

Nous avons fait de nombreux essais avec

$$\left\{ \begin{array}{l} g_p(x) = (|\Omega| - x)^p \quad p = 1, 1/2, 3, \text{ etc...} \\ g(x) = \frac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

et avec des fonctions f très diverses.

Dans tous les cas, nous obtenons des convergences vers des fonctions u sans palier ayant la même allure que sur les figures précédentes.

Tous ces calculs nécessitent à peu près 4 ou 4,5 secondes de temps de calcul effectif sur IBM 168-370 (plus une compilation relativement longue) avec un programme en FORTRAN.

Voici, à titre d'exemple, l'allure des courbes de niveau de la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} u + |\Omega| - \bar{\beta}(u) = -1 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \text{(Figure n° 4)}$$

Comme on le voit, la solution est très régulière. La convergence a eu lieu plus vite que dans le cas du problème (P_2).

4.2 - Le problème P_4

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \quad \mathcal{L} u + \left[\int_{u(x)}^{\infty} \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^n du \right]^m = 0$$

pour $n = 1$, le problème P_4 rentre dans le cadre du problème P_3 , ce qui nous a permis de vérifier ces calculs, puisque pour ce problème nous calculons $|\Omega| - \beta(u)(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \gamma'(t) dt$ avec les notations introduites en (1.5.2).

Nous avons utilisé d'abord $n \times m = 1$ pour garder des ordres de grandeur satisfaisants. Alors, pour deux exemples, nous avons obtenu des convergences très

Problème P_3 sur le cercle

$$F = -1$$

$$G(x) = \text{mes}(\omega) - x$$

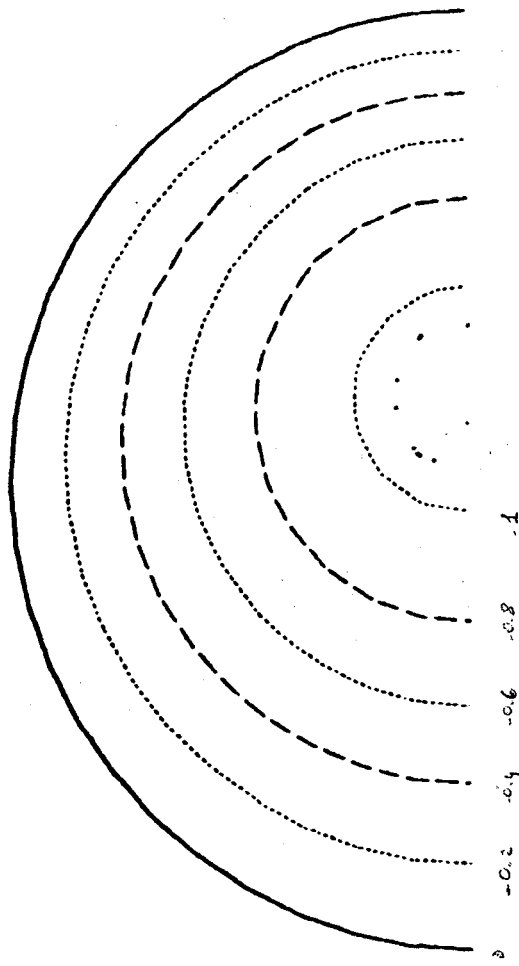


Figure n° 4

rapides vers des solutions régulières : $n = 2, n = 5$.

Nous avons testé l'algorithme pour $n = -1$ et $m = 1,5$. Alors, une solution est trouvée en 5 secondes de calcul, c'est le temps le plus court que nous ayons pu obtenir avec le programme PL/I pour une précision toujours égale à $FPS = 10^{-5}$.

5.- LE PROBLEME PHYSIQUE

Sous certaines hypothèses, il apparaît que le comportement du plasma dans une coque qu'il occuperait totalement (pas de vide entre le plasma et la coque), dépendrait de la solution du problème

$$P_\phi \quad \begin{cases} \mathcal{L} u + (|\Omega| - \beta(u))^m = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce problème rentre dans le cadre des problèmes P_3 avec $g(x) = (|\Omega| - x)^m$ qui vérifie les hypothèses requises si $m > 0$.

Si les solutions sont sans palier, elles peuvent aussi être considérées comme solution de P_4 avec $n = 1$.

Pour mieux se rendre compte des différences et des ressemblances de ce problème avec le problème initial

(19) $\mathcal{L} u + \beta(u) = f$, nous allons étudier sommairement le problème en dimension 1 :

$$\begin{array}{ll} \Omega = [-1, +1] & \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \begin{cases} -u'' - \beta(u) = \lambda \\ u(1) = u(-1) = 0 \end{cases} \\ \lambda \text{ réel} & P_\lambda \end{array}$$

Le problème (19) en dimension 1 a été étudié pour le même domaine en ([1], Appendice A.1).

5.1 - Le problème en dimension 1

Lemme 1 : Si u_λ est solution de P_λ , alors $-u_\lambda$ est solution de $P_{-2-\lambda}$

Dem : en effet $\beta(-u)(x) = |\Omega| - \beta(u)(x)$

si $\lambda \in -u''_{\lambda}(x) - \beta(u_{\lambda})(x)$ pour presque tout $x \in [-1, +1]$ et $v = -u_{\lambda}$

alors $\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \in -v''(x) + |\Omega| - \beta(v)(x) \text{ dans } \Omega \\ \text{et } v(1) = v(-1) = 0 \end{array} \right.$ donc v solution de $P_{-2-\lambda}$

on a donc des résultats symétriques en λ par rapport à la valeur $\lambda = -\frac{|\Omega|}{2} = -1$.

Nous étudions ces problèmes pour $\lambda \in [-1, +\infty]$

1er cas : $\lambda > 0$:

Prop. : une solution éventuelle de ce problème est strictement concave, positive, sans palier, $C^2(\Omega)$ et paire.

Dem : D'après [1] la solution de P_{λ} est $C^1(\Omega)$ et $C^2(\Omega)$ aux points où $\beta(u)$ est continue.

Dans ce premier cas, il ne peut y avoir de palier donc $u \in C^2(\Omega)$.
On démontre de la même façon qu'en ([1] § A.2) / u_{λ}^{que} est alors paire

Théorème : La solution de P_{λ} est unique et est donnée par la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in]0,1[\\ u''(x) = -\lambda - 2(1-x) \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Dem : Il n'y a qu'à appliquer u_{λ} solution de P_{λ} et $u_{\lambda} \in C^2(\Omega)$. Finalement :

$$u_{\lambda}(x) = -\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)(|x|^2 - 1) + \frac{(|x|^3 - 1)}{3}$$

Pour le cas $\lambda < 0$, nous pouvons remarquer :

Cette solution est concave pour $\lambda > 0$

mais elle est encore paire et positive pour $\lambda \geq -1$ car $u'(x) = -(\lambda+2)x + x^2$

et u' est négatif entre les racines : $x \in [0, \lambda+2]$

et l'on a $\beta(u)(x) = 2(1-x) \quad \forall x \in [0,1]$

Donc, pour $\lambda \in [1,0]$ u_{λ} est encore une solution du Problème mais elle n'est pas nécessairement unique.

2ème cas : $\lambda = 0$: $-u'' \in \beta(u)$ dans Ω
 $u(1) = u(-1) = 0$

son minimum est atteint au bord, si une solution a un palier elle y prendrait la valeur 0. Il est impossible en vertu du principe du maximum que la solution de $P_{\lambda=0}$ ait un support $\subset \Omega$.

Théorème : il y a 2 solutions :

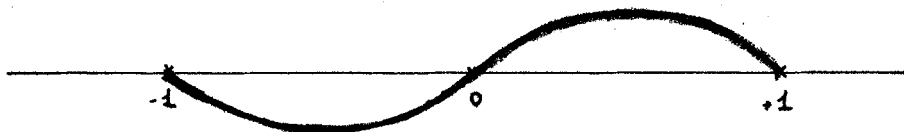
$u \equiv 0$
 et $u_{\lambda=0}$ décrite ci-dessus, sans palier.

3ème cas : $-1 < \lambda < 0$

Pour $\lambda = -1$, nous connaissons déjà plusieurs solutions :

u_{-1} décrite ci-dessus
 - u_{-1} en vertu du principe de symétrie du lemme 1,
 et $u \equiv 0$ qui est solution du problème faible $\forall \lambda \in [-1, 0]$.

Nous pouvons encore mettre en évidence d'autres solutions sans palier. Nous cherchons a priori une solution impaire $u(0) = u'(0) = 0$ positive pour $x \in [0, 1]$.



Elle sera solution de :

$$\begin{cases} x \in [0, 1] \\ -u'' = -1 + \beta(u) \\ u(x) > 0 \quad \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

si $x \in [0, 1]$ $\beta(u)(x) = 1 + \beta_{u|_{[0,1]}}(x)$

Nous cherchons sur un nouveau domaine $\Omega = [0, 1]$ la solution de

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \beta(u)(x) \\ u(x) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Il existe une telle solution positive sans palier, symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$

$$u(x) = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{3} \quad \text{sur } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

ou

$$u(x) = -\frac{1}{4} \left| \frac{1}{2} - x \right| + \frac{\left| \frac{1}{2} - x \right|^3}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \quad \text{sur } x \in [0, 1]$$

$$(20) \quad u(x) = \frac{x}{|x|} - \frac{1}{4} \left| \frac{1}{2} - x \right| + \frac{\left| \frac{1}{2} - x \right|^3}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \quad \text{sur } x \in [(-1, +1)]$$

Proposition : La fonction u définie en (20) est solution du problème avec $\lambda = -1$, son opposée aussi d'ailleurs.

Donc P_{-1} a déjà 5 solutions dont 4 sont sans palier,

Pour $-1 < \lambda < 0$, il y a au moins 2 solutions : u_λ décrite dans le premier cas, et $u \equiv 0$. Il serait plus difficile d'obtenir toutes les solutions. Mais l'étude du cas P_{-1} suggère que les solutions sans palier peuvent être multiples et que l'analyse de ces problèmes est moins aisée que pour le problème étudié dans ([1], appendice).

6.- CONCLUSION

De l'étude numérique de ces problèmes, nous concluons que nous pouvons exhiber une solution approchée dans tous les cas. Néanmoins, la convergence est plus ou moins rapide suivant les données, par exemple avec le problème initial, il y a unicité pour $f < 0$ et dans ce cas, nous obtenons rapidement une solution avec toute la précision voulue, les cas de non unicité faisant apparaître, par contre, des difficultés numériques.

Nous avons explicité une méthode de calcul d'une solution de problèmes physiques. Pour juger de son efficacité, il faudrait comparer les résultats aux expériences réelles. Mais ce problème n'est, en fait, que l'introduction aux problèmes à frontière libre et aux problèmes d'évolution d'un plasma confiné qui doivent décrire le comportement d'un plasma dans la coque d'une machine Tokamak tout au long d'une expérience.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec J. MOSSINO, et feront l'objet de la publication d'un article.

1.- POSITION DU PROBLEME

Ω est toujours un ouvert borné, régulier de \mathbb{R}^N , de mesure $|\Omega| > 0$.
 Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, nous noterons $\Omega_-(u)$ l'ensemble des points du domaine Ω où u prend une valeur négative

$$\Omega_-(u) = \{ x \in \Omega \quad / \quad u(x) < 0 \}$$

Nous posons le problème :

trouver $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \Delta u + \lambda g(|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)) = 0 & \text{dans } \Omega_-(u) \\ - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_-(u) \\ u|_{\partial\Omega} = \gamma \quad (\text{cte inconnue } > 0) \\ \int \frac{\partial u}{\partial n} = I > 0 \end{array} \right.$$

Le nombre λ est un paramètre réel inconnu des physiciens. Le nombre réel I est une donnée du problème.

La fonction g est supposée continue de $[0, |\Omega|]$ dans \mathbb{R} , et vérifier

$$(2) \quad g(0) = 0$$

$$(3) \quad g(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

Dans les exemples numériques, nous utilisons $g(x) = x^n$, pour $n > 0$, ce cas rentre bien dans les hypothèses (2) et (3) et, en outre, est intéressant en physique.

L'opérateur β est celui qui a été défini et utilisé au chapitre précédent ;

ce qui nous permet d'écrire l'identité :

$$|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)(x) = \text{mes}\{y \in \Omega ; u(x) < u(y) < 0\} .$$

1.1 - Le problème à frontière libre

Nous faisons a priori une partition de Ω en deux sous-ensembles qui dépendent d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$. Une solution de (1) vérifie des équations très distinctes dans ces deux sous-ensembles et, de plus, la mesure du sous-ensemble $\Omega_-(u)$ intervient explicitement dans l'une des équations. C'est donc bien un problème à frontière libre. J. MOSSINO a étudié dans [1], un problème voisin de (1), l'opérateur $-\Delta u$ étant remplacé par $u - \Delta u$.

Mais ici, le problème n'est pas coercif, ce qui introduit quelques difficultés supplémentaires.

L'idée générale dans ce chapitre est qu'en fait $|\Omega_-(u)|$ n'est pas une inconnue et peut être calculée en fonction de λ . Et ainsi l'étude du problème (1) peut se ramener à l'étude d'un problème à frontière fixe étudié au chapitre I. Moyennant certaines hypothèses physiques, sur la pression du plasma, le problème (1) modélise le comportement et la position du plasma à l'intérieur de la coque Tokamak.

Le plasma occupe le domaine $\Omega_-(u)$, tandis que le domaine $\Omega \setminus \Omega_-(u)$ est vide.

Il faudrait que le plasma soit éloigné de la coque ; d'où la supposition a priori que γ est strictement positif.

1.2 - Modification du problème (1) :

Puisque la fonction g vérifie les conditions (2) et (3), sa primitive G , qui s'annule en 0, est continue et strictement croissante de $[0, |\Omega|]$ dans \mathbb{R}^+ ; elle est donc inversible

$$G^{-1} : [0, G(|\Omega|)] \rightarrow [0, |\Omega|] \quad \text{et strictement croissante.}$$

Nous posons un problème (4) :

$$(4) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda g \left(\left[G^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \bar{\beta}(u) \right]_+ \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = \gamma \quad (\text{cte inconnue } > 0) \quad \text{sur } \partial \Omega \\ |\Omega_-(u)| = G^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{cases}$$

Nous allons montrer que les problèmes (1) et (4) sont équivalents. Plus précisément nous énonçons le théorème :

Théorème 1.2. :

soit $u \in H^2(\Omega)$, solution de (1) alors :

- (i) u est sans palier dans $\Omega(u)$
- (ii) $\lambda > \frac{I}{G(|\Omega|)}$
- (iii) u est solution de (4).

Réciproquement : Si $\lambda \geq \frac{I}{G(|\Omega|)}$ et si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de (4) on a (i), (ii) et (iii') : u est solution de (1).

Démonstration : soit u solution de (1), alors $\lambda \neq 0$

sinon on aurait $\Delta u = 0$ sur Ω en contradiction avec $I > 0$

soit u solution de (1) ou de (4), alors

$$\Delta u \in L^\infty(\Omega)$$

d'après un résultat de STAMPACCHIA [3], on a alors

$$u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}).$$

Puisque $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, on a pour $x \in \Omega_-(u)$:

$$|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)(x) = \text{mes} \{ y \in \Omega / u(x) < u(y) < 0 \} > 0$$

ce qui implique $\Delta u(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_-(u)$ ce qui nie l'existence d'un palier dans $\Omega_-(u)$ et prouve (i).

. soit u solution de (1), alors

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\Omega} \Delta u = \lambda \int_{\Omega_-(u)} g(|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)) dx$$

$$= (\text{d'après le lemme 1 ci-après}) \lambda G(|\Omega_-(u)|) \text{ d'où (iii)}$$

. soit u solution de (1) ou (2), puisque $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ on a

$$0 < |\Omega_-(u)| < |\Omega|$$

soit, en prenant les images par G : $0 < \frac{I}{\lambda} < G(|\Omega|)$ ce qui prouve (ii).

. soit u solution de (2). Alors $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \int_{\Omega(u)} g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \bar{\beta}(u)) dx$
 $=$ (par le lemme 1) $\lambda G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}))$
 $= I$, ce qui implique (iii').

Il nous reste à établir le lemme fondamental suivant :

Lemme 1 :

Soit $v(\Omega \rightarrow \mathbb{R})$ une fonction continue, et soit E un ensemble mesurable inclus dans Ω tel que :

$$(5) \quad \forall x \in E \quad \underline{\beta}(v)(x) = \bar{\beta}(v)(x) \quad (v \text{ sans palier dans } E)$$

$$(6) \quad \forall x \in E \quad \forall y \in \Omega \setminus E \quad v(x) < v(y) .$$

alors, pour toute fonction continue $g : [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$, dont G est la primitive qui s'annule en 0 on a l'égalité :

$$(7) \quad \int_E g[\bar{\beta}(v)(x)] dx = \int_E g(|E| - \bar{\beta}(v)(x)) dx = G(|E|) .$$

Remarquons d'abord que le lemme pouvait s'appliquer dans la démonstration du théorème précédent : u était continue et $\Omega(u)$ vérifie bien les hypothèses (5) et (6).

Démonstration du lemme :

Nous définissons $\mu_v(s) = \text{mes} \{y \in E / v(y) \leq s\}$

on a, bien sûr $\mu_v(v(x)) = \bar{\beta}(v)(x)$.

De plus μ_v est continue de $[\min_{x \in E} v(x), \max_{x \in E} v(x)]$ dans $[0, |E|]$

et μ_v est strictement croissante.

Définition : nous appelons réarrangement symétrique de v la fonction

$$v^* = \mu^{-1} : E^* = [0, |\Omega|] \rightarrow [\min_{x \in E} v(x), \max_{x \in E} v(x)]$$

On peut alors remarquer que, puisque v^* est une fonction croissante dans E^*

$$(8) \quad \bar{\beta}(v^*)(\tau) = \text{mes}\{ \theta \in E^*, v^*(\theta) \leq v^*(\tau) \} = \tau$$

$$\text{et donc } \int_{E^*} g(\bar{\beta}(v^*)(\tau)) d\tau = \int_{E^*} g(\tau) d\tau = G(|E|)$$

L'égalité entre les 2 termes extrêmes de (7) sera prouvée si l'on prouve :

$$(9) \quad \int_E g(\bar{\beta}(v)(x)) dx = \int_{E^*} g(\bar{\beta}(v^*)(\tau)) d\tau \quad \text{pour tout } g \text{ continue.}$$

Au lieu de le prouver pour tout g continue, par combinaisons linéaires et passage à la limite, il suffit de prouver (9) pour tout $g = 1_{]-\infty, t[}$, fonctions caractéristiques de l'élément générique des boreliens de \mathbb{R} . Dans $1_{]-\infty, t[}$ cas, (9) se réduit à

$$(10) \quad \int_E 1_{]-\infty, t[}(\bar{\beta}(v)(x)) dx = \int_{E^*} 1_{]-\infty, t[}(\bar{\beta}(v^*)(\tau)) d\tau$$

le premier membre de (10) s'écrit :

$$\text{si } t > |E| \quad \text{mes}\{ x \in E / \bar{\beta}(v)(x) < t \} = |E|$$

$$\text{si } t < 0 \quad = 0$$

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < t \leq |E| &= \text{mes}\{ x \in E / \mu(v)(x) < t \} \\ &= \text{mes}\{ x \in E / v(x) < v^*(t) \} \\ &= \mu(v^*(t)) = t \end{aligned}$$

le deuxième membre de (10) s'écrit, par (8) :

$$\begin{aligned} \text{mes}\{ \tau \in E^* / \tau < t \} &= 0 \quad \text{si } t \leq 0 \\ &= t \quad \text{si } 0 < t < |E| \\ &= |E| \quad \text{si } |E| < t \end{aligned}$$

on a donc bien l'égalité (10).

$$\begin{aligned} \text{Dans (10) on peut remplacer } \bar{\beta}(v)(x) &\text{ par } |E| - \bar{\beta}(v)(x) \\ \text{et } \bar{\beta}(v^*)(\tau) &\text{ par } |E| - \bar{\beta}(v)(\tau) \end{aligned}$$

et démontrer ainsi l'autre égalité de (7). Fin de la démonstration du lemme.

Nous avons montré l'identité de l'ensemble des solutions du problème (1) et du problème (4) lorsque $\lambda > \frac{1}{G(\Omega)}$. Le problème (4) n'est plus un problème à frontière libre et le domaine $\Omega_-(u)$ est caractérisé par

$$\Omega_-(u) = \{ x \in \Omega, \bar{\beta}(u)(x) < G^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \}.$$

Mais il n'est pas coercif sous cette forme, et il faut encore un peu le transformer pour affirmer l'existence d'une solution de (4).

2.- RESOLUTION DE (4)

Si u est solution de (4), sa translatée par $-\gamma$: $v = u - \gamma$ (cte inconnue) sera solution de

$$(11) \quad \begin{cases} -\Delta v + \lambda g \left[\left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \bar{\beta}(v) \right)_+ \right] = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Inversement une solution de (11) fournira une solution de (4) si l'on sait trouver un réel γ telle que $|\Omega - (u)| = \mu(v) (-\gamma) = G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right)$

Théoriquement, on ne saura le faire que si v solution de (11) est sans palier. Ce n'est pas toujours le cas.

En particulier, étant donné que $x \rightarrow g \left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - x \right)_+$ vérifie les hypothèses du théorème d'existence cité en (I.1.5), celui-ci affirme l'existence d'une solution du problème faible associé à (11). Mais ce peut être la fonction $v \equiv 0$ qui est toujours solution de (11), et qui évidemment ne permet pas de déterminer une solution de (4).

2.1 - Existence d'une solution de (4)

Nous décrivons un procédé de régularisation du problème (11) qui permet d'établir de façon constructive le

Théorème 2.1 : Pour tout $\lambda > \frac{I}{G(|\Omega|)}$, il existe $u \in H^2(\Omega)$ solution du problème (4).

Cette solution est limite ($\varepsilon \rightarrow 0$) dans $H^1(\Omega)$ fort et $H^2(\Omega)$ faible d'une suite $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$: où v_ε est solution de (11 $_\varepsilon$):

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + \lambda g \left(\left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \bar{\beta}(v_\varepsilon) \right)_+ \right) = -\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et où γ_ε est défini de façon unique à partir de v_ε par $\gamma_\varepsilon = - (v_\varepsilon)^* \cdot \left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) \right)$

Démonstration :

Nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 2.2 - Soit $\Gamma : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} L^2(\Omega)$, l'opérateur multivoque défini par $\Gamma(v) : \{ \psi \in L^2(\Omega) / \psi(x) \in g \left(\left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \beta(v)(x) \right)_+ \right) \text{ pp } \forall x \in \Omega \}$, alors le Graphe de Γ : $G(\Gamma) = \{ (v, \psi) \in L^2(\Omega)^2 / \psi \in \Gamma(v) \}$ est fermé dans $L^2(\Omega)$ fort x $L^2(\Omega)$ faible.

La démonstration est dans ([1], chap. IV p. 76) et fait intervenir le théorème d'Egoroff.

Nous nous servons aussi d'un autre lemme qui nécessite une définition supplémentaire : soit v et ϕ , deux fonctions mesurables

$\bar{\beta}(v, \phi)(x) = \text{mes}\{y \in \Omega / v(y) < \phi(x)\}$ qui est défini là où $\phi(x)$ l'est, c'est-à-dire pp $\forall x \in \Omega$. $\underline{\beta}(v, \phi)$ et $\beta(v, \phi)$ sont définis de manière analogue.

Lemme 2.3 : Soit (v_m, ϕ_m) une suite dans $(L^2(\Omega))^2$ telle que $v_m \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ fort
 $\phi_m \rightarrow \phi$ dans $L^2(\Omega)$ fort

$\beta(v_m, \phi_m) \ni \psi_m \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ faible

alors $\psi \in \beta(v, \phi)$.

Démonstration dans [1].

Démonstration du théorème 2.1 -

D'après le théorème d'existence d'une solution des problèmes faibles, le problème

$$(11'_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta v_\epsilon + \lambda g \left(\left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \beta(v_\epsilon) \right)_+ \right) = -\epsilon & \text{dans } \Omega \\ v_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $H^2(\Omega)$. Elle est sans palier car le Laplacien de v_ϵ est presque partout strictement positif. Donc $(11'_\epsilon)$ admet une solution sans palier; Soit une suite ϵ_n qui tend vers 0, alors une suite de solutions $\{v_{\epsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ (d'après STAMPACCHIA [3]). Puisque v_{ϵ_n} est continue et sans palier, $\mu_{v_{\epsilon_n}}$ est inversible et l'on peut choisir $\gamma_{\epsilon_n} = -v_{\epsilon_n}^* \left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) \right)$, $\{\gamma_{\epsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R} .

Alors, $u_{\epsilon_n} = v_{\epsilon_n} + \gamma_{\epsilon_n}$ vérifie :

$$(12_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u_{\epsilon_n} + \lambda g \left(\left[G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \bar{\beta}(u_{\epsilon_n}) \right]_+ \right) = -\epsilon_n & \text{dans } \Omega \\ u_{\epsilon_n} = \gamma_{\epsilon_n} & \text{sur } \partial\Omega \\ |\Omega(u_{\epsilon_n})| = G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) \end{cases}$$

On en déduit $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \epsilon_n = \int_{\Omega} \Delta u_{\epsilon_n} = \lambda \int_{\Omega} g \left(\left(G^{-1} \left(\frac{I}{\lambda} \right) - \bar{\beta}(u_{\epsilon_n}) \right)_+ \right) + \epsilon_n |\Omega|$

et puisque $u_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_-(u_{\varepsilon_n})$ $\beta(u_{\varepsilon_n})(x) > |\Omega_-(u_{\varepsilon_n})| = G^{-1}(\frac{I}{\lambda})$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial n} = \lambda \int_{\Omega_-(u_{\varepsilon_n})} g(|\Omega_-(u_{\varepsilon_n})| - \bar{\beta}(u_{\varepsilon_n}))_+ + \varepsilon_n |\Omega|$$

par le lemme 1

$$(13_\varepsilon) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = I + \varepsilon |\Omega|.$$

Nous passons maintenant à la limite ($n \rightarrow \infty$) :

Puisque $\{v_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $H^2(\Omega)$, $\{\gamma_{\varepsilon_n}\}$ bornée dans \mathbb{R} et

$\psi_{\varepsilon_n} = g((G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \bar{\beta}(v_{\varepsilon_n}))_+)$ est borné dans $L^2(\Omega)$, il existe

une sous suite de ε_n telle que :

$$(14) \quad v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v \text{ dans } H^2(\Omega) \text{ faible et } H^1_0(\Omega) \text{ fort}$$

$$(15) \quad \gamma_{\varepsilon_{n'}} \rightarrow \gamma \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$(16) \quad \psi_{\varepsilon_{n'}} \rightharpoonup \psi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Le lemme 2.2 nous permet d'affirmer : $\psi \in g((G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \beta(v))_+)$. Nous appliquons maintenant le lemme 2.3 à $G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - |\Omega_-(u_{\varepsilon_{n'}})| = \beta(u_{\varepsilon_{n'}}, 0) = \beta(v_{\varepsilon_{n'}}, \gamma_{\varepsilon_{n'}})$.

La conclusion du lemme est alors que :

$$G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) \in \beta(u, 0).$$

Le passage à la limite dans (12 $_\varepsilon$) et (13 $_\varepsilon$) nous donne alors :

$$(12) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda \psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \gamma & \text{sur } \partial\Omega \\ |\Omega_-(u)| < G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) \leq |\Omega_-(u)| + \text{mes}\{y \in \Omega / u(y) = 0\} \end{cases}$$

$$(13) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I$$

Soit P un palier de μ alors :

$$\text{pour presque } \forall x \in P \quad 0 = \frac{1}{\lambda} \Delta u(x) = \psi(x) \in g\left(\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right)_+\right)$$

$$\text{mais alors} \quad 0 = g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right)_+ = \psi(x)$$

$$\text{donc} \quad \psi(x) = g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right)_+ \text{ pp } \forall x \in \Omega$$

D'autre part, par (15), on sait que $\gamma \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{si } \gamma = 0 \quad \text{alors} \quad & -\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega \\ & u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

D'après le principe du maximum, on aurait alors $u \equiv 0$ ou $u(x) < 0$, pp $\forall x \in \Omega$.

La condition $I > 0$ rend impossible la première éventualité. Donc

$$|\Omega| = |\Omega_-(u)| \leq G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) \text{ d'après (12), en contradiction avec l'hypothèse } \lambda > \frac{I}{G(|\Omega|)},$$

ce qui prouve que :

$$(17) \quad \gamma > 0$$

si $u(x) > 0$

$$\text{alors} \quad G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x) \leq \text{mes}\{y / u(y) < 0\} - \text{mes}\{g/u(y) \leq u(x)\}$$

$$= - \text{mes}\{y / 0 < u(y) \leq u(x)\} \leq 0$$

$$\text{donc} \quad \psi(x) = 0$$

$$\text{si } u(x) < 0 \quad G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x) \geq \text{mes}\{y / u(x) < u(y) < 0\}$$

D'après (12), $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ donc u est encore continue, ce qui implique que

$$G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x) > 0.$$

$$\text{Donc, dans ce cas, } \psi(x) = g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right)$$

Ainsi

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \geq 0 \\ g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right) & \text{si } u(x) < 0 \end{cases} \quad \text{pp } \forall x \in \Omega$$

de (12) et (13) on tire :

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\Omega} \lambda \psi(x) dx = \lambda \int_{\Omega(u)} g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right) dx$$

d'après le lemme 1, et en intégrant en prenant soin des translations, on trouve :

$$\lambda = \left[G \cdot (G^{-1}(\frac{I}{\lambda})) - G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - |\Omega_-(u)|) \right]$$

La condition $G(x) = 0 \quad x = 0$ entraîne que

$$(18) \quad G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) = |\Omega_-(u)|$$

finalement, en combinant tous ces calculs (12) se transforme en :

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda g([G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \bar{\beta}(u)]_+) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \gamma > 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\Omega_-(u)| = G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) \end{cases}$$

et $u \in H^2(\Omega)$. Le théorème est ainsi démontré.

Par voie de conséquence, on a prouvé l'existence de solutions au problème (1) pour $\lambda > \frac{I}{G(|\Omega|)}$ et aucune solution pour $\lambda \leq \frac{I}{G(|\Omega|)}$.

Avant de considérer les applications numériques, nous faisons une étude en dimension 1.

3.- ETUDE DU PROBLEME A FRONTIERE LIBRE EN DIMENSION 1

$$3.1 - \quad \Omega =]-1, +1[\quad \mathbb{R}.$$

Nous cherchons une solution $u \in H^2(\Omega)$ de

$$(1^*) \quad \begin{cases} -u'' + \lambda g(|\Omega(u) - \bar{\beta}(u)|) = 0 & \text{dans } \Omega(u) \\ -u'' = 0 & \text{dans } \Omega - \Omega(u) \\ u(1) = u(-1) = \gamma > 0 & \text{inconnue} \\ u'(1) - u'(-1) = I > 0 \end{cases}$$

De telles conditions aux limites sont acceptables puisque en dimension 1 $H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$.

D'après le § 2, une solution de (1*) nous est fournie par une solution sans palier dans $C^2(\Omega)$ de :

$$(11^*) \quad \begin{cases} -v'' + \lambda g(G^{-1}(\frac{1}{\lambda}) - \bar{\beta}(v))_+ = 0 & \text{dans} \\ v(1) = v(-1) = 0 \end{cases}$$

si v est sans palier, alors $\bar{\beta}(v)$ est continue sur Ω (cf. [1]) et ainsi $v'' \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Le problème (11^*) est alors une équation différentielle; quelques remarques a priori sur la solution vont nous permettre de l'intégrer.

Prop. 3.1 :

Le problème (11^*) admet exactement 2 solutions $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

$$\text{et } \begin{cases} v_1 \equiv 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2(x) = \frac{1}{2} (|x| - 1) - \frac{\lambda}{2} \int_{|x|}^1 G((G^{-1}(\frac{1}{\lambda}) - 2t)_+) dt & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

3.1.1 - Une solution \mathcal{C}^2 de (11^*) est convexe :

En effet, $v''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, et ainsi une solution $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ de (11^*) ne peut avoir qu'un palier en son minimum.

3.1.2 - Les solutions $\mathcal{C}^2(\Omega)$ de (11^*) qui ne sont pas identiquement nulles sont sans palier

En effet, supposons que v possède un palier P en son minimum. Alors

$$\forall x \in P \quad v''(x) = 0 = g(G^{-1}(\frac{1}{\lambda}) - \bar{\beta}(v)(x))_+$$

$$\text{ce qui implique} \quad |P| = \bar{\beta}(v)(x) \geq G^{-1}(\frac{1}{\lambda})$$

Par contre $\forall x \notin P$ alors $\bar{\beta}(v)(x) > |P| \geq G^{-1}(\frac{1}{\lambda})$ et par (11^*)

$$v''(x) = 0 \quad \forall x \notin P.$$

Finalement v vérifie l'équation $v''(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

et donc $v \equiv 0$ sur Ω .

3.1.3 - Toute solution $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ de (11*) est paire :

La démonstration est identique à celle utilisée dans [1], pour un problème similaire. L'idée est que, en tout point où la fonction prend la même valeur, la dérivée seconde prend aussi des valeurs égales, et l'on montre ainsi la symétrie de la solution.

Corollaire 3.1.4 : Si v est solution sans palier de (11*), alors $\bar{\beta}(v)(x) = 2x$ $\forall x \in \Omega$.

Donc, une solution sans palier de (11*) est solution de

$$(19) \quad \begin{cases} -v''(x) + \lambda g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2x)_+ = 0 & \forall x \in [0,1] \\ v'(0) = 0 & v(1) = 0 \\ v \in C^2 [0,1] \end{cases}$$

Réciproquement : soit v_1 solution de (19), $w(x) = v_1(|x|)$ sur Ω est convexe, $\bar{\beta}(w)(x) = 2x$ et w est solution $\mathcal{C}^2(\Omega)$ de (11*).

Soit $x_0 = \frac{1}{2} G^{-1}(\frac{I}{\lambda})$ alors

$$\begin{cases} v \in C^1([0,1]) \\ v'(0) = 0 \\ v(1) = 0 \\ -v''(x) + \lambda g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2x) = 0 & \forall x \in [0, x_0[\\ v''(x) = 0 & \forall x \in]x_0, 1[\end{cases}$$

par intégration on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, x_0] \quad v'(x) &= \lambda \int_0^x g[G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2t] dt \\ &= \frac{\lambda}{2} [G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda})) - G[G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2x]] \\ v'(x) &= \frac{I}{2} - \frac{\lambda}{2} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2x) \\ v'(x_0) &= \frac{I}{2} \\ v'(x) &= \frac{I}{2} \quad \forall x \in]x_0, 1[\end{aligned}$$

On en déduit par une nouvelle intégration :

$$\forall x \in]x_0, 1[\quad v(x) = \frac{I}{2} (x-1)$$

et $\forall x \in]0, x_0[$

$$v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^x v'(t) dt$$

$$= \frac{I}{2} (x_0-1) + \frac{I}{2} (x-x_0) - \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^x G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2t) dt$$

$$= \frac{I}{2} (x-1) - \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^x G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2t) dt$$

La solution sans palier de (11*) v_2 s'écrit donc :

$$\forall x \in [-1, +1] \quad v_2(x) = v(|x|)$$

v étant défini au § précédent.

Proposition 3.2 - La solution sans palier unique de (11*) fournit l'unique solution de (1*).

Démonstration : Pour $x = x_0$ on a $\bar{\beta}(v_2)(x) = 2|x| = G^{-1}(\frac{I}{\lambda})$

donc on peut déterminer $\gamma = -v^*(G^{-1}(\frac{I}{\lambda})) = v(x_0) = -\frac{I}{2}(\frac{1}{2}G^{-1}(\frac{I}{\lambda})-1)$

$$\gamma = \frac{I}{4} (2 - G^{-1}(\frac{I}{\lambda}))$$

finalement, la solution $H^2(\Omega)$ de (1*) s'écrit :

$$u(x) = \frac{I}{2} (|x| - \frac{G^{-1}(\frac{I}{\lambda})}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{|x_0|}^{|x|} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2t) dt.$$

on peut remarquer que la condition $u'(1) - u'(-1) = I$ est automatiquement vérifiée.

3.2 - Solution possédant la symétrie de révolution lorsque Ω est un cercle

Ω = cercle de centre (0,0) et de rayon 1.

Sans préjuger de la symétrie des solutions, nous pouvons calculer les solutions admettant la symétrie de révolution. Nous chercherons donc des solutions $u(x,y)$ sous la forme

$$u(x,y) = v(r) \quad r \in [0,1]$$

alors $\Delta u = v'' + \frac{1}{r} v'$ (indépendant de θ).

Le problème (11^{*}) s'écrit avec cette nouvelle variable

$$(11^{**}) \quad \begin{cases} -v'' - \frac{v'}{r} + \lambda g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \bar{B}(v))_+ = 0 \\ v(1) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad r \in [0,1]$$

puisque nous cherchons une fonction $C^1(\bar{\Omega})$

$$\text{et} \quad \bar{B}(v)(r) = \int_{\{\rho/v(\rho) \leq v(r)\}} 2\pi \rho \, d\rho$$

Comme au paragraphe précédent, nous ne nous intéressons qu'aux solutions sans palier de (11^{**}), on déduit que : $v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et

$$v'' + \frac{1}{r} v' \geq 0 \quad \forall r \in [0,1]$$

pour $r \neq 0$ on a :

$$r v'' + v' = (r v')' \geq 0 \quad \forall r \in [0,1]$$

ce qui veut dire que $rv'(r) \geq 0$ pour $r \neq 0$ et est croissante et donc $v'(r) = 0$ sur $[0, \rho_0]$ et $v'(r) > 0$ sur $]\rho_0, 1[$. Mais v est sans palier et $\rho_0 = 0$; $v(r)$ est donc une fonction strictement croissante sur $]0, 1[$, d'où

$$\bar{B}(v)(r) = \pi r^2$$

Le système (11^{*}) devient :

$$(20) \quad \begin{cases} -v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \lambda g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi r^2)_+ = 0 \\ v(1) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad \forall r \in [0,1]$$

$$\text{pour } r \geq r_0 = \sqrt{\frac{G^{-1}(\frac{I}{\lambda})}{\pi}} \quad \text{la solution est donnée par } v'(r) = \frac{K}{r}$$

K constante à déterminer

pour $r < r_0$, on résout (20) avec un second membre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} K'(r) &= \lambda g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi r^2) \\ \text{soit } K(r) &= \lambda \int_0^r g(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi \rho^2) \rho \, d\rho \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} [G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda})) - G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi r^2)] \end{aligned}$$

donc $v'(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{I}{2\pi} - \frac{\lambda}{2\pi} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi r^2) \right] + \frac{K}{r}$ pour $r \in [0, r_0]$
 $\lim_{r \rightarrow 0} r v'(r) = 0$ entraîne $K = 0$ et $v'(r) = \frac{I}{2\pi r}$ pour $r > r_0$.

Une nouvelle intégration donne

$$v(r) = \frac{I}{2\pi} \text{Log } r \quad \text{pour } r > r_0$$

$$\text{et } v(r) = v(r_0) + \int_{r_0}^r v'(t) dt$$

pour $r < r_0$; $v(r) = \frac{I}{2\pi} \text{Log } r_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^r \left(\frac{I}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi \rho^2) \right) d\rho$.

Vérifions que cette dernière intégrale est convergente pour $r = 0$, soit $a = G^{-1}(\frac{I}{\lambda})$

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\rho} [G(a) - G(a - \pi \rho^2)] d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{I}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi \rho^2) \right) d\rho$$

$$\text{Or, } G(a - \pi \rho^2) - G(a) = -\pi \rho^2 [g(a) + \varepsilon'(\pi \rho^2)]$$

donc l'intégrale ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\bar{a}}^\varepsilon (g(a) + \varepsilon'(\pi \rho^2)) \rho d\rho \leq \frac{\lambda}{2} \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sup_{\rho \in (0, \varepsilon)} g(a - \pi \rho^2)$$

donc l'intégrale est convergente pour $\rho \rightarrow 0$ et la fonction $v(r)$ solution de (11**) est ainsi définie. Alors, on peut déterminer $\gamma = -v(r_0) = \frac{I}{2\pi} \text{Log } r_0$.

La solution $C^2(\bar{\Omega})$ du problème à frontière libre est

$$v + \gamma = \begin{cases} u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^r \left(\frac{I}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - \pi \rho^2) \right) d\rho & \text{dans le plasma } r < r_0 \\ u(r) = \frac{I}{2\pi} \text{Log } \frac{r_0}{r} & \text{dans le vide } r > r_0 \end{cases}$$

On peut encore remarquer l'identité $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_0^{2\pi} K'(1) d\theta = I$.

Dans les deux cas étudiés, le problème (11) n'a que deux solutions $u \equiv 0$ et une solution sans palier, le problème (1) n'ayant alors qu'une solution, une translation de la solution sans palier de (11).

Pour les dimensions $n > 1$, nous n'avons pas de résultat d'unicité.

4.- CALCUL NUMERIQUE D'UNE SOLUTION DU PROBLEME A FRONTIERE LIBRE

L'idée de ramener le problème à frontière libre à un problème à frontière fixe est évidemment aussi très fructueuse, pour le calcul numérique d'une solution de (1).

L'algorithme développé au chapitre I permettait de calculer une solution du problème P_1 :

$$\begin{cases} -\Delta u + \bar{\beta}(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous avons dit qu'il donnait de bons résultats pour le problème P_3 :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\bar{\beta}(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où g était une fonction continue.

Nous pouvons alors calculer les solutions du problème :

$$(21) \quad \begin{cases} -\Delta u + g_1(\bar{\beta}(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $g_1(x) = \lambda g((G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - x)_+)$; effectivement g_1 est encore une fonction continue de x . Et nous nous intéressons aux solutions sans palier de (21). Alors l'algorithme convergera effectivement vers une solution sans palier, cette solution nous permettra de déterminer $\gamma(u) = -u^*(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}))$. Alors, il suffit de translater cette solution de γ pour avoir une solution approchée de (1).

4.1. - Les données du problème

Le calcul de la solution du problème 1 dépend évidemment du choix de la fonction g . Physiquement, il semble que l'on doive se contenter des fonctions $g_{(n)}(x) = x^n$, avec $n > 0$, ces fonctions vérifient les conditions imposées sur g (voir II,1). On peut, de plus, facilement exprimer leurs primitives.

Dans les calculs antérieurs aux développements théoriques, nous n'avons considéré que $g(x) = x$.

Le paramètre λ n'a pas une importance prépondérante. En effet, on peut écrire :

$$(21) \quad \begin{aligned} -\Delta\left(\frac{u}{\lambda}\right) + g\left(\left(\frac{u}{\lambda}\right) - \bar{\beta}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right)_+ &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{u}{\lambda} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

puisque $\lambda > 0$

Par contre, le paramètre $\left(\frac{I}{\lambda}\right)$ a une importance fondamentale. En fait, nous considérerons $\lambda = 1$ et nous ferons varier I de 0 à $G(|\Omega|) = \frac{|\Omega|^2}{2}$, c'est-à-dire

$$G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{2I}{\lambda}} \quad \text{de } 0 \text{ à } |\Omega| .$$

Pour $\sqrt{\frac{2I}{\lambda}}$ proche de 0, alors nous résoudrons sur une grande partie du domaine $\mathcal{L}u = 0$ et $\mathcal{L}u + g\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)\right) = 0$ sur une petite partie du domaine.

Dans ce cas là, la convergence est longue à obtenir, puisque l'allure de la solution dépend uniquement de ce qui se passe dans $\Omega(u)$, c'est-à-dire un domaine de mesure petite par rapport à celle de Ω ; on conçoit donc qu'une petite erreur dans ce domaine ait une importante relative assez grande.

Si, au contraire, nous faisons croître $\sqrt{\frac{2I}{\lambda}}$ vers $|\Omega|$, alors nous obtenons une solution beaucoup plus facilement. La valeur au bord γ va aussi décroître vers 0.

Et à la limite avec $\sqrt{\frac{2I}{\lambda}} = |\Omega|$, nous obtiendrons la même solution que le problème traité au chapitre I (frontière fixe).

En dimension 1, nous pouvons comparer les tracés des courbes de niveau des solutions des divers problèmes (voir ci-dessous).

En dimension 1, nous pouvons prouver cette assertion. En effet, d'après (I,5.1), la solution de :

$$P_{\lambda = |\Omega|} \quad \begin{cases} -u'' + |\Omega| - \beta(u) = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

est $-u_0$ d'après les symétries du problème, cette solution s'écrit :

$$u_0(x) = -(|x|^2 - 1) + \left(\frac{|x|^3 - 1}{3}\right); \quad x \in [-1, +1]$$

Dans ce chapitre-ci, nous avons obtenu en (3.1) la solution du problème à frontière libre :

$$u(x) = \frac{I}{2} (|x| - \frac{G^{-1}(\frac{I}{\lambda})}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{|x_0|}^{|x|} G(G^{-1}(\frac{I}{\lambda}) - 2t) dt$$

Si l'on considère g égale à l'identité, c'est-à-dire $G(x) = \frac{x^2}{2}$, puis si l'on prend $\lambda = 1$ et $I \rightarrow G(|\Omega|) = 2$, alors on peut vérifier que la solution du problème à frontière libre tend vers la solution du problème à frontière fixe.

4.2. - Résultats Numériques

Ci-après, nous présentons les tracés des courbes de niveau qui sont assez semblables aux tracés des solutions du problème à frontière fixe présentées dans le premier chapitre.

Nous avons fait fixer le paramètre $\sqrt{\frac{2I}{\lambda}} = \text{CTE}$, successivement à $\text{CTE} = 0,1$, $\text{CTE} = 0,2$, $\text{CTE} = 0,5$, $\text{CTE} = 1,0$ et $\text{CTE} = 1,4$. Nous rappelons que pour le domaine considéré $|\Omega| = 1,57\dots$

Après chaque graphique, nous présentons un tableau qui peut mesurer la vitesse de convergence du procédé :

Pour chaque itération (calcul de β) nous indiquons le nombre de relaxation que l'inversion de \mathcal{L} a nécessité, ainsi que l'erreur de relaxation et l'erreur des grandes itérations. On voit nettement que le calcul est d'autant plus rapide que CTE est grand.

1.000E+00

VALEUR AU BORD=0.492624
MINIMUM DE LA FONCTION=-0.225988

0.000E+00

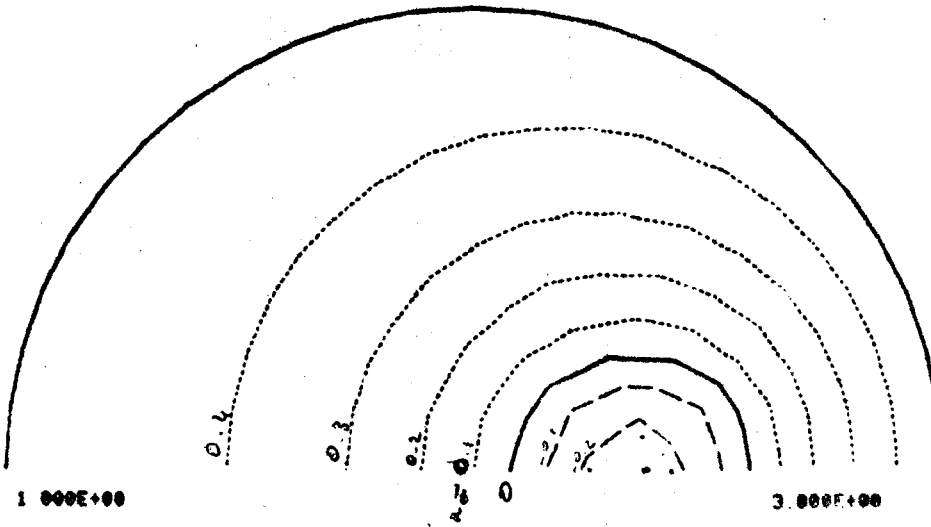


FIGURE 1 : Courbes de niveau de la solution
CTE = 0.1

Les deux traits forts représentent Ω et $\Omega_\rho = \Omega(u)$

STAT DATA

RMO= 1 00

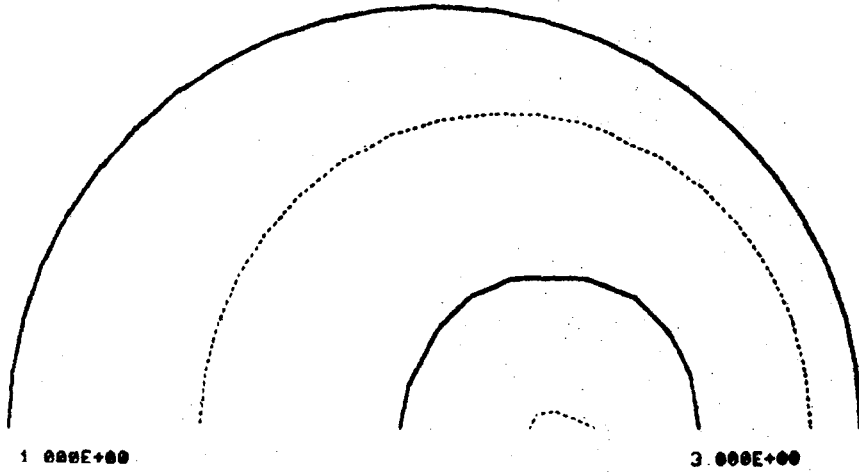
#	NOM BRE	# ITERATIONS	ERREUR DE RELAXATION	ERREUR GENERALE
#	D'ITERATIONS	# DE RELAXATIONS	RELAXATION	GENERALE
1		24	5 676E-05	1 000E+00
2		33	2 229E-04	3 321E+03
3		15	4 119E-05	8 322E-04
4		15	3 517E-05	3 633E-04
5		15	2 979E-05	3 805E-04
6		12	8 279E-05	3 522E-04
7		12	6 747E-05	3 142E-04
8		12	5 838E-05	2 453E-04
9		12	5 129E-05	3 031E-04
10		12	5 114E-05	4 247E-04
11		12	5 028E-05	2 113E-04
12		12	5 483E-05	1 217E-04
13		12	7 625E-05	2 153E-04
14		15	2 905E-05	4 181E-04
15		15	3 386E-05	4 053E-04
16		15	3 713E-05	5 388E-04
17		15	3 613E-05	5 853E-04
18		12	8 716E-05	1 614E-04
19		12	6 432E-05	8 689E-05
20		12	4 615E-05	5 890E-05
21		12	3 591E-05	3 487E-05
22		9	9 147E-05	2 631E-05
23		9	7 027E-05	1 702E-05
24		9	5 090E-05	8 904E-05
25		6	9 210E-05	4 123E-05
26		6	6 767E-05	2 534E-05
27		6	6 067E-05	1 499E-05
28		6	3 727E-05	7 713E-07
29		6	2 747E-05	4 849E-07
30		6	2 040E-05	2 782E-07
31		3	9 239E-05	1 603E-07
32		3	7 670E-05	1 005E-07
33		3	5 563E-05	6 209E-08

READY

TABLEAU n° 1 : CTE = 0,1

1.000E+00

0.000E+00



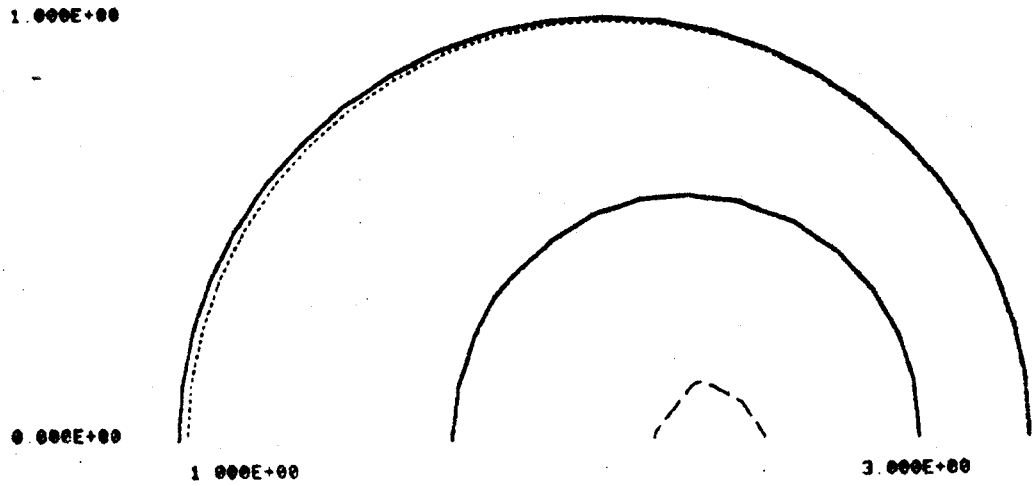
RHO= 1.00

NOM	ITERATIONS	ERREUR DE RELAXATION	ERREUR GENERALE
1	22	9.879E-05	1.000E+00
2	22	1.946E-03	3.532E+02
3	14	5.413E-05	5.865E-04
4	14	4.710E-05	4.309E-04
5	14	4.629E-05	4.068E-04
6	14	4.254E-06	4.858E-04
7	12	8.800E-05	4.306E-04
8	12	7.478E-05	3.599E-04
9	12	6.039E-05	2.461E-04
10	12	4.782E-05	2.153E-04
11	12	3.697E-05	1.088E-04
12	10	7.598E-05	5.779E-05
13	10	5.280E-05	2.987E-05
14	8	9.945E-05	1.226E-05
15	6	8.027E-05	4.533E-06
16	6	6.258E-05	1.243E-06
17	4	6.887E-05	4.407E-07
18	4	3.403E-05	9.663E-08

READY

FIGURE ET TABLEAU n° 2

CTE = 0,2

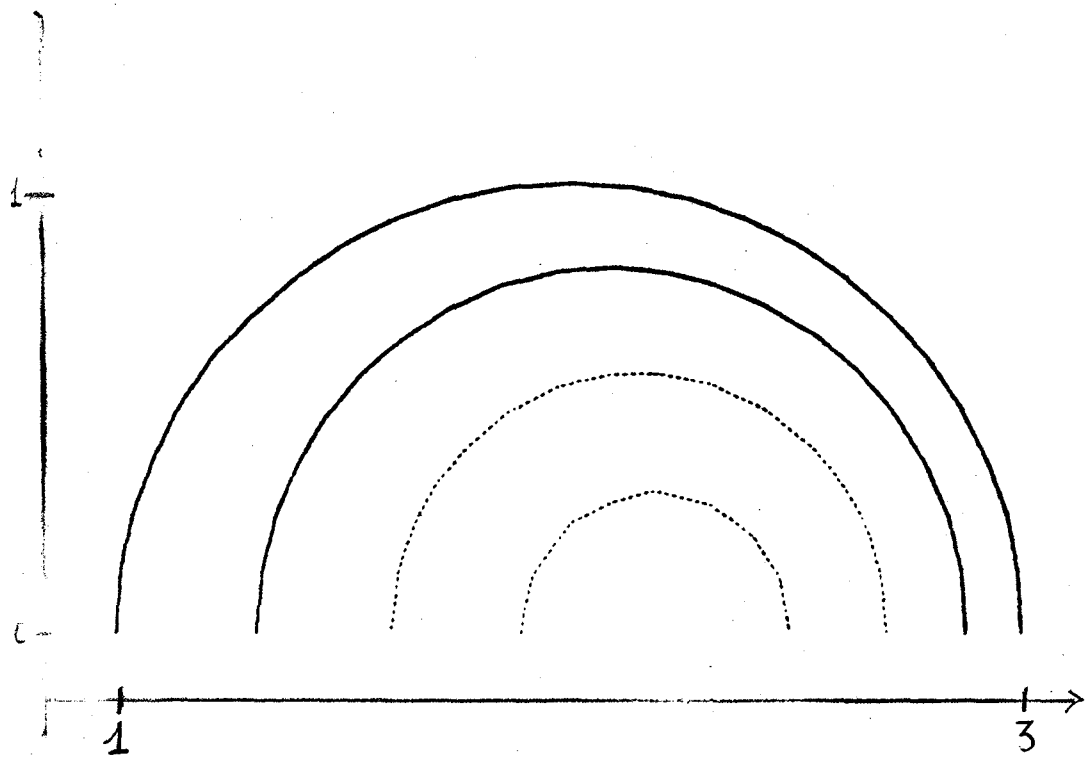


RHO = 1.00

* NOMBRE * D'ITERATIONS	* ITERATIONS * DE RELAXATION	* ERREUR DE * RELAXATION	* ERREUR * GENERALE
1	22	9.871E-05	1.000E+00
2	22	5.280E-04	2.031E+01
3	12	9.672E-05	5.905E-04
4	12	6.415E-05	2.745E-04
5	12	4.530E-05	1.407E-04
6	12	3.071E-05	6.379E-05
7	12	2.071E-05	2.876E-05
8	10	6.828E-05	1.082E-05
9	8	8.865E-05	4.239E-05
10	6	6.692E-05	1.810E-06
11	4	8.578E-05	1.867E-07
12	4	6.328E-05	1.155E-07
13	4	5.025E-05	7.344E-08

READY

FIGURE ET TABLEAU n° 3
CTE = 0,5



STAT DATA

RHO = 1.00

* * NOMBRE * D'ITERATIONS	* * ITERATIONS * DE RELAXATION	* * ERREUR DE * RELAXATION	* * ERREUR * GENERALE
1	22	9.877E-05	1.000E+00
2	22	2.278E-04	2.587E+00
3	14	4.499E-05	1.413E-04
4	12	3.368E-05	2.533E-05
5	10	7.169E-05	5.667E-06
6	6	7.499E-05	1.579E-06
7	4	9.184E-05	3.235E-07
8	2	9.523E-05	4.560E-08

READY

FIGURE ET TABLEAU n° 4 - CTE = 1,0

STAT
STAT

PHO- 1 00

* * N O M B R E * D ' I T E R A T I O N S	* * I T E R A T I O N S * D E R E L A X A T I O N	* * E R R E U R D E * R E L A X A T I O N	* * E R R E U R * G E N E R A L E	* *
1	22	9 870E-05	1 000E+00	*
2	20	7 944E-05	1 761E-02	*
3	12	6 849E-05	4 025E-05	*
4	10	7 034E-05	4 552E-06	*
5	6	5 224E-05	6 665E-07	*
6	2	8 723E-05	2 983E-08	*

READY

TABLEAU n° 5 - CTE 1,4

Existence d'une solution

1.- UN THEOREME GENERAL D'EXISTENCE

1.1 - Le cadre général

Ω sera un ouvert de \mathbb{R}^n , borné, à frontière régulière ; on considèrera le problème évoluant du temps $t = 0$ au temps $t = T$ fini, Q représentera alors l'ouvert $\Omega \times]0, T[$.

Nous considérons l'espace de Hilbert

$$V = L^2 (]0, T[; H_0^1(\Omega))$$

et nous avons l'inclusion

$$V \subset L^2(Q) \subset V' = L^2 (]0, T[; H^{-1}(\Omega))$$

$L^2(Q)$ étant identifié à son dual.

Nous désignons par A l'isomorphisme de V sur V' défini par $\langle Au, v \rangle = a(u, v) \forall u, v \in V^2$ où a est une forme bilinéaire continue coercive de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $\Gamma : L^2(Q) \rightarrow CL^2(Q)$ un opérateur multivoque, et u_0 une fonction $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons alors nous poser le problème suivant :

Existe-t-il $u \in V$ telle que :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + A u(x, t) \in \Gamma(u)(x, t) \quad \text{pour presque tout } (x, t) \in Q. \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pp } \forall x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Nous serons amenés à faire des hypothèses sur l'opérateur a priori multivoque Γ :

Nous considérons des opérateurs Γ qui vérifient les hypothèses :

(H₁) : $\Gamma(L^2(Q))$ borné dans $L^2(Q)$

(H₂) : Γ est à valeurs convexes fermées non vides de $L^2(Q)$

(H₃) : $G(\Gamma) = \{(v, \Gamma(v))\}$ est fermé dans $L^2(Q) \text{ fort} \times L^2(Q) \text{ faible}$.

Dans le cadre fonctionnel défini précédemment, nous avons le théorème abstrait suivant :

1.2 - Théorème 1 : Si Γ vérifie les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃), alors il existe une solution du problème :

$$P \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in V \\ \frac{\partial u}{\partial t} + Au \in \Gamma(u) \\ u(.,0) = u_0 \end{array} \right.$$

1.3 - Démonstration du théorème 1 :

1.3.1 - L'idée générale est d'appliquer, comme dans le cas stationnaire ([1] |), un théorème de point fixe Kakutani-Ky-Fan pour les opérateurs multivoques que nous rappelons :

Théorème : (Kakutani-Ky-Fan) (cf. [9] et [10])

Soit E un espace localement convexe séparé sur R et métrisable, C un convexe compact non vide de E, Γ une multiplication hémicontinue supérieure de C dans KC (ensemble des parties convexes compactes non vides de C). Alors Γ admet un point fixe

$$\} \underline{x \in C \text{ tel que } x \in \Gamma x.}$$

Nous ferons auparavant quelques rappels pour préparer l'application de ce théorème à notre cas particulier. Voir dans [1], p. I.13 la définition de l'hémicontinuité supérieure.

Nous avons ici seulement besoin de savoir que la semi-continuité supérieure entraîne l'hémicontinuité supérieure.

1.3.2 - Quelques rappels sur le Problème de Cauchy (cf. LIONS [7])

Considérons le problème : trouver $u \in L^2([0, T[; H_0^1(\Omega))$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ dans } \Omega & f \text{ donné dans } L^2(Q) \\ u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Définition : Nous définissons un nouvel espace de fonctions W :

$$W = \left\{ u \in L^2([0, T[; H_0^1(\Omega)), \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T[; H_0^{-1}(\Omega)) \right\}$$

W est un espace Hilbertien pour la norme :

$$|u|_W = |u|_V + |u'|_{V'}$$

Le problème (3) admet une solution unique dans W , que nous noterons $\mathcal{A}^{-1}(f)$.

Propriété 1.3.3 : L'application \mathcal{A}^{-1} est linéaire continue de $L^2(Q)$ dans W .

Démonstration : en multipliant (3) par u et en intégrant, on peut montrer que

$$(4) \quad |u|_V \leq C \|f\|_{L^2(Q)}$$

d'autre part, la dérivée vérifie :

$$(5) \quad u' = f + Au$$

ainsi (6) $|u'|_{V'} \leq |f|_{V'} + |Au|_{V'}$

mais $L^2(Q) \subset V'$ avec injection continue de norme 1 et A étant un isomorphisme de V' sur V , on a

$$(6) \quad |u'|_{V'} \leq |f|_{L^2(Q)} + C_1 |u|_V$$

et finalement, grâce à (4)

$$(7) \quad |u|_W \leq C_2 \|f\|_{L^2(Q)}$$

Remarque 1.3.4 - L'intérêt d'avoir introduit l'espace W réside dans l'existence d'un théorème de compacité (cf. J.L. LIONS [8]). Nous avons les inclusions

$$L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(Q) \subset L^2([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

D'autre part, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors :

Théorème 1.3.4 : L'injection de W (espace défini plus haut) dans $L^2(Q)$ est compacte.

1.3.5 - Le problème suivant a également une solution unique dans W

$$(8) \quad \begin{aligned} z &\in V \\ \frac{\partial z}{\partial t} + Az &= 0 \quad \text{dans } Q \\ z(x, 0) &= u_0(x) \quad \forall x \in \Omega \quad u_0 \text{ donné dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

La solution de (8) vérifie la formulation variationnelle :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}(t), v(t) \right)_{L^2(Q)} + (Az(t), v(t))_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \begin{cases} \forall v \in V \\ \text{pp } \forall t \in]0, T[\end{cases}$$

$$\text{soit encore pour } v = z : \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|z(t)|_{L^2(\Omega)}^2) + (Az(t), z(t))_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{pp } \forall t \in]0, T[$$

d'où, en intégrant de 0 à T :

$$\frac{1}{2} (|z(T)|_{L^2(\Omega)}^2 - |z(0)|_{L^2(\Omega)}^2) + (Az, z)_{V' \times V} = 0$$

d'où

$$\alpha |z|_V^2 \leq \frac{1}{2} |u_0|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\text{d'autre part} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{V'} = |Az|_{V'} \leq c_3 |z|_V$$

finalement

$$(9) \quad |z|_W \leq \frac{(1 + c_3)}{\sqrt{2\alpha}} |u_0|_{L^2(\Omega)}$$

Donc, la norme dans W de la solution de (8) peut être estimée.

1.3.6 - Démonstration proprement dite du théorème

Le théorème sera démontré si l'on montre qu'il existe une fonction $u \in V$ telle que

$$u \in \mathcal{J}_b^{-1}(\Gamma(u)) + z$$

où z est la solution de (6).

D'après l'hypothèse (H_1) : $\Gamma(L^2(\Omega))$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on déduit

$$\{\mathcal{J}_b^{-1}(\Gamma(u)) ; u \in L^2(\Omega)\} \text{ est borné dans } W.$$

Donc, l'application $u \xrightarrow{\gamma} \mathcal{J}_b^{-1}(\Gamma(u)) + z$, envoie $L^2(\Omega)$ dans une boule B de W par (7) et (9). Munissons B de la topologie de $L^2(\Omega)$; grâce à l'injection compacte de W dans $L^2(\Omega)$, B est un convexe compact de $L^2(\Omega)$. L'application γ envoie donc ce compact dans l'ensemble des parties convexes compactes, non vides de B , grâce à l'hypothèse (H_2) .

$$\mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma(\cdot) + z : B \rightarrow KB.$$

Pour appliquer le théorème de Kakutani-Ky-Fan, il suffit de prouver que cette application est s.c.s. (semi-continue supérieure).

Il suffit de montrer :

Lemme 1.3.7 - $G(\mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma) = \{(v, w), v \in B, w \in \mathcal{J}_b^{-1}(\Gamma(v))\}$ est fermé dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ fort.

Démonstration : Soit (v_m, w_m) une suite dans $G(\mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma)$ qui tend fortement vers (v, w) dans $L^2(\Omega)$.

On a $w_m = \mathcal{J}_b^{-1} \phi_m$ avec $\phi_m \in \Gamma(v_m)$. La suite ϕ_m est bornée dans $L^2(\Omega)$ donc une sous-suite extraite, notée ϕ_m , tend vers ϕ dans L^2 faible et $\phi \in \Gamma(v)$ d'après (H_3) .

\mathcal{J}_b^{-1} est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans W . Elle est donc continue de $L^2(\Omega)$ faible dans W faible.

Donc, une sous suite de w_m tend vers $\mathcal{J}_b^{-1} \phi$ dans W faible et $L^2(\Omega)$ fort : Donc $w \in \mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma(v)$: $G(\mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma)$ est fermé dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ fort.

Les hypothèses du théorème de Kakutani-Ky-Fan sont vérifiées :

$$\exists u \in W \text{ vérifiant}$$

$$u \in \mathcal{J}_b^{-1} \circ \Gamma(u) + z.$$

Le théorème 1 est démontré.

2.- APPLICATION DU THEOREME 1 AU PROBLEME D'EVOLUTION DE LA PHYSIQUE DES PLASMAS

Nous allons définir un opérateur β de $L^2(Q)$ dans $L^2(Q)$, qui généralise aux fonctions de deux variables $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, l'opérateur β utilisé dans les chapitres I et II.

2.1 - Définition de l'opérateur β

Soit encore Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , à frontière régulière, de mesure non nulle $|\Omega|$.

T est un nombre réel, strictement positif ; t représente la variable temps et $t \in [0, T]$

Q est l'ouvert $\Omega \times]0, T[$

Soit v une fonction mesurable définie presque partout sur Q , on pose

$$\underline{\beta}(v)(x, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega; v(y, t) < v(x, t) \}$$

$$\bar{\beta}(v)(x, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega \quad v(y, t) \leq v(x, t) \}$$

autrement dit, $\underline{\beta}(v)(x, t) = \underline{\beta}(v(t))(x)$ défini au chapitre I avec $x \xrightarrow{v(t)} v(x, t)$.

Ici encore le symbole $\text{mes}(A)$ représente la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N de l'ensemble A .

2.1.1 - Domaine de définition de $\underline{\beta}(v)$: puisque v est mesurable pp $\forall t$, $v(\cdot, t)$ est définie presque partout sur Ω , pour un tel t , $\underline{\beta}(v)(x, t)$ est définie dès que $v(x, t)$ existe, donc $\underline{\beta}(v)$ est définie presque partout dans Q . $\bar{\beta}(v)$ est définie également presque partout sur Q pour les mêmes raisons.

Lemme 2.1.2 - Si v est mesurable sur Q , $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$ le sont aussi.

Démonstration : Soit v mesurable sur Q , $\phi(y, x, t) = v(x, t) - v(y, t)$ est mesurable sur $\Omega \times \Omega$ soit $R^1 = \phi^{-1} (]0, +\infty[)$ et soit $R^2 = \phi^{-1} ([0, +\infty[)$, ce sont des parties mesurables de $\Omega \times \Omega$ (images réciproques d'ouverts ou de fermés de \mathbb{R}).

Soient alors pour $z \in Q$ $R_z^i = \{ y \in \Omega ; (y, z) \in R^i \}$ $i = 1, 2$,

Les sections des R^i pour un z fixé, ce sont des parties mesurables de Ω pour presque tout z et $(\phi^i(z) = \text{mes}_{R^n} R_z^i)$ sont des fonctions mesurables d'après le théorème de Fubini (voir Rudin p. 137-138). On a :

$$\underline{\beta}(v) = \phi^1 \text{ et } \bar{\beta}(v) = \phi^2 \text{ sont mesurables sur } Q$$

2.1.3 - Corollaire :

Si v est mesurable sur Q :

$$\underline{\beta}(v) \text{ et } \overline{\beta(v)} \text{ sont des fonctions appartenant à } L^\infty(Q).$$

Démonstration : On a en effet $\bar{\beta}$ mesurable et

$$0 \leq \underline{\beta}(v)(x,t) \leq \bar{\beta}(v)(x,t) \leq |\Omega| \text{ pp } \forall (x,t) \in Q .$$

2.1.4 - Définition d'un opérateur multivoque β :

$$\beta(v) = \left\{ \psi \in L^\infty(Q) ; \underline{\beta}(v)(x,t) \leq \psi(x,t) \leq \bar{\beta}(v)(x,t) \right. \\ \left. \text{pour presque tout } (x,t) \in Q \right\}$$

β est un opérateur qui envoie l'ensemble des fonctions mesurables sur Q dans l'ensemble, note $C L^\infty(Q)$, des parties fermées, non vides, convexes de $L^\infty(Q)$.

$$\beta : s(Q) \rightarrow C L^\infty(Q) .$$

2.2 - Le problème d'évolution

Trouver $u \in V = L^2([0,T]) ; H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \ni f & \text{dans } Q \quad f \in L^2(Q) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \quad u_0 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Théorème 2.2 : Il existe une solution a ce problème, $\forall f \in L^2(Q)$ et $\forall u_0 \in L^2(\Omega)$.

Démonstration : Nous appliquons le résultat d'existence du paragraphe précédent, avec $A = -\Delta$, le problème se met alors sous la forme : trouver $u \in v$ tel que :

$$u \in \mathcal{F}^{-1} (f - \beta(u)) + z$$

On pourra appliquer le théorème 1 si on prouve que l'opérateur multivoque, $f - \beta(u) = \Gamma(u)$ vérifie les trois hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) .

2.2.1 - Γ vérifie l'hypothèse (H_1) :

$$\forall u \in L^2(\Omega) ; \forall \psi \in f - \beta(u) \quad \text{alors} \quad |\psi|_{L^2(Q)} < |f|_{L^2(Q)} + |\Omega|^{3/2} \cdot T^{1/2}$$

puisque $\forall (x,t) \in Q$, $\forall u \in L^2(Q)$ $0 < \bar{\beta}(u)(x,t) < |\Omega|$.

Donc $\Gamma(L^2(Q))$ est inclus dans une boule de rayon fini.

2.2.2 - Γ vérifie l'hypothèse (H_2) :

$$\beta(u) = \{ \psi \in L(Q) / \underline{\beta}(u)(x,t) < \psi(x,t) < \bar{\beta}(u)(x,t) \text{ pp } \forall (x,t) \in Q \}$$

$\beta(u) \subset L^0(Q) \subset L^2(Q)$. De plus, $\beta(u)$ et $\beta(u)$ sont deux fonctions de $L^2(Q)$ donc $\beta(u)$ s'écrit aussi

$$\beta(u) = \{ \psi \in L^2(Q) / \underline{\beta}(u)(x,t) < \psi(x,t) < \bar{\beta}(u)(x,t), \text{ pp } \forall (x,t) \in Q \}$$

$\beta(u)$ est alors une partie convexe fermée, non vide de $L^2(Q)$. La partie translatée par f de l'opposé dans $L^2(Q)$ de cette partie : $f - \beta(u)$, est encore une partie convexe fermée non vide de $L^2(Q)$.

2.2.3 - Γ vérifie l'hypothèse (H_3) :

Il faut montrer que $G(\beta) = \{ (v, \psi) ; v \in L^2(Q), \psi \in \beta(v) \}$ est fermé dans $L^2(Q)$ fort \times $L^2(Q)$ faible.

La démonstration de cette propriété est la principale difficulté. Comme dans le cas stationnaire (cf. [1]), elle repose sur le théorème d'Egoroff.

Démonstration : Soit v_m une suite de fonctions $L^2(Q)$ qui converge vers v dans $L^2(Q)$ fort ; D'après le théorème d'Egoroff, $\forall \eta > 0$, il existe un compact K_η inclus dans Q , tel que $v_m \rightarrow v$ uniformément sur K_η et qui vérifie en outre $\text{mes}(Q - K_\eta) \leq \eta^2$.

Pour chaque $t \in]0, T[$, on définit la section $K_\eta(t) = \{ x \in \Omega / (x, t) \in K_\eta \}$.
 La fonction $M(t) : \text{mes}_{\mathbb{R}^N}(K_\eta(t))$ est une fonction mesurable sur $]0, T[$ d'après le théorème de Fubini.

Proposition : Soit $A_\eta = \{ t \in]0, T[/ M(t) \geq |\Omega| - \eta \}$, alors $\text{mes}_{\mathbb{R}} A_\eta > T - \eta$.

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned} \eta^2 &\geq \text{mes}(Q - K_\eta) = \int_0^T (|\Omega| - M(t)) dt \\ &> \int_{]0, T[\setminus A_\eta} (|\Omega| - M(t)) dt \\ &> \eta \text{mes}_{\mathbb{R}}(]0, T[\setminus A_\eta) \end{aligned}$$

donc $\text{mes}_{\mathbb{R}} A_\eta > T - \eta$.

Nous considérons alors l'ensemble

$$E_\eta = \{ (x, t) / t \in A_\eta \text{ et } x \in K_\eta(t) \}$$

ou une définition équivalente $E_\eta = K_\eta \cap (A_\eta \times \Omega)$

Nous pouvons vérifier : $\text{mes}(Q - E_\eta) = \text{mes}((Q \setminus K_\eta) \cup (Q \setminus (A_\eta \times \Omega)))$
 $\leq \text{mes}(Q \setminus K_\eta) + \text{mes}([0, T[\setminus A_\eta \times \Omega]$
 $\leq \eta^2 + \eta |\Omega|$

Et donc l'ensemble E_η "tend" en mesure vers Q lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Soit maintenant $\psi_m \in \beta(v_m)$ qui tend vers ψ dans $L^2(Q)$ faible (c'est l'hypothèse) il nous faut montrer que $\psi \in \beta(v)$.

La convergence uniforme se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall \eta > 0 ; \exists m_0(\eta, \varepsilon) \text{ tel que } \forall m > m_0$$

$$\|v_m - v\|_{L^\infty(K_\eta)} < \varepsilon$$

On peut alors écrire :

$$\forall (x, t) \in E_\eta \text{ et } \forall m > m_0$$

$$\begin{aligned} \underline{\beta}(v_m)(x, t) &= \text{mes} \{ y \in \Omega / v_m(x, t) - v_m(y, t) > 0 \} \\ &> \text{mes} \{ y \in K_\eta(t) / v_m(x, t) - v_m(y, t) > 0 \} \\ &\geq \text{mes} \{ y \in K_\eta(t) / v(x, t) - v(y, t) > 2\varepsilon \} \\ &\geq -\eta + \text{mes} \{ y \in \Omega / v(x, t) - v(y, t) > 2\varepsilon \} \end{aligned}$$

De même, on aura

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(v_m)(x,t) &= \text{mes} \{ y \in \Omega / v_m(x,t) - v_m(y,t) \geq 0 \} \\ &\leq \eta + \text{mes} \{ y \in K_\eta(t) / v_m(x,t) - v_m(y,t) \geq 0 \} \\ &\leq \eta + \text{mes} \{ y \in K_\eta(t) / v(x,t) - v(y,t) > -2\varepsilon \} \\ &\leq \eta + \text{mes} \{ y \in \Omega / v(x,t) - v(y,t) > -2\varepsilon \} \end{aligned}$$

Soit alors $\phi_1(x,t)_{\eta\varepsilon} = -\eta + \text{mes} \{ y \in \Omega / v(x,t) - v(y,t) > 2\varepsilon \}$

et $\phi_2(x,t)_{\eta\varepsilon} = +\eta + \text{mes} \{ y \in \Omega / v(x,t) - v(y,t) > -2\varepsilon \}$

Alors $\forall m > m_0$ et $\forall (x,t) \in E_\eta$:

$$(11) \quad \phi_1(x,t)_{\eta\varepsilon} \leq \psi_m(x,t) \leq \phi_2(x,t)_{\eta\varepsilon}$$

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent toutes deux à $L^2(Q)$; ψ_m est donc astreint à appartenir à un convexe fermé de $L^2(Q)$, qui est également faiblement fermé et la limite faible ψ vérifie alors

$$(12) \quad \left. \begin{array}{l} \forall \eta > 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \forall (x,t) \in E_\eta \quad \phi_1(x,t)_{\eta\varepsilon} \leq \psi(x,t) \leq \phi_2(x,t)_{\eta\varepsilon}$$

L'ensemble E_η ne dépend pas de ε et l'on peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.
On remarque qu'à la limite :

$$\begin{aligned} \phi_1(x,t)_{\eta,0} &= -\eta + \underline{\beta}(v)(x,t) \\ \text{et} \quad \phi_2(x,t)_{\eta,0} &= +\eta + \bar{\beta}(v)(x,t) \end{aligned}$$

(pour cette démonstration, cf. [1] : Lemme 2.1 p. 64).

On a donc : $\forall \eta > 0$; $\exists E_\eta \subset Q$ tel que $\text{mes}(Q \setminus E_\eta) \leq \eta(|\Omega| + \eta)$

et $\forall (x,t) \in E_\eta \quad \underline{\beta}(v)(x,t) - \eta \leq \psi(x,t) \leq \bar{\beta}(v)(x,t) + \eta$.

Nous allons considérer une suite décroissante de η_n qui tend vers 0, et qui devra vérifier une condition mise en évidence plus loin, telle que la suite de compacts $\{K_{\eta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante pour l'inclusion.

Pour chaque η_n , nous pouvons définir A_{η_n} et $K_{\eta_n}(t)$.

D'ailleurs, $\forall t \in]0, T[\quad K_{\eta_n}(t) \subset K_{\eta_{n+1}}(t)$. Mais, par contre, les A_{η_n} ne sont pas emboîtés.

Nous définissons $B_N = \bigcap_{n \geq N} A_{\eta_n}$ et $E'_{\eta_N} = K_{\eta_N} \cap (B_N \times \Omega)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_N \subset A_{\eta_N} \subset]0, T[$$

$$\text{ou} \quad E'_{\eta_N} \subset E_{\eta_N} \subset Q$$

De plus, la famille $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de $]0, T[$.

$\{E'_{\eta_N}\}_{N \in \mathbb{N}}$ est également une suite croissante dans Q . Mais l'on voudrait que

$\bigcup_N E'_{\eta_N}$ "approche" Q :

$$\begin{aligned} \mu_N &= \text{mes}(Q \setminus E'_{\eta_N}) = \text{mes} \left[(Q \setminus K_{\eta_N}) \cup ((]0, T[\setminus B_N) \times \Omega) \right] \\ &\leq \eta_N^2 + [\text{mes}_{\mathbb{R}^N} \Omega \times \text{mes} (]0, T[\setminus \bigcap_{n \geq N} A_{\eta_n})] \\ &\leq \eta_N^2 + |\Omega| \times \text{mes} \left(\bigcup_{n \geq N} (]0, T[\setminus A_{\eta_n}) \right) \\ &\leq \eta_N^2 + |\Omega| \sum_{n \geq N} \text{mes} (]0, T[\setminus A_{\eta_n}) \\ &\leq \eta_N^2 + |\Omega| \sum_{n \geq N} \eta_n \end{aligned}$$

La suite μ_N tend vers 0, si et seulement si la série à termes positifs $\{\eta_n\}$ est convergente.

Nous supposons que la suite $|\eta_n|$ a été choisie ainsi ($\eta_n = \varepsilon^n$ ou $\frac{1}{n^2} \dots$) ainsi presque tout $(x, t) \in E'_{\eta_N} \subset E_{\eta_N}$

$$\underline{\beta}(v)(x, t) - \eta_N \leq \phi(x, t) \leq \bar{\beta}(v)(x, t) + \eta_N$$

La suite E'_{η_N} est maintenant croissante et presque tout $(x, t) \in Q$ appartient à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_{\eta_n}$

p. presque tout $(x, t) \in Q$; $\exists N_0 / \forall n > N_0 \quad (x, t) \in E'_{\eta_n}$

pour de tels (x, t) on a à la limite $n \rightarrow \infty$

$$(13) \quad \underline{\beta}(v)(x, t) \leq \phi(x, t) \leq \bar{\beta}(v)(x, t) .$$

(H₃) est donc établie, ainsi que le théorème 2.2.

On a donc ainsi mis en évidence l'existence d'une solution dans W du problème d'évolution lié au problème stationnaire considéré au chapitre I du présent travail.

Pour préciser ce résultat, on va montrer de la même façon qu'en [1], que le problème d'évolution admet une solution maximale et une solution minimale, par une démonstration constructive utilisant des suites monotones.

III.- UN OPERATEUR MONOTONE LIÉ A β

Nous définissons l'opérateur $\underline{\beta}(\dots)$, qui a deux fonctions mesurables sur Q (ϕ et v) associée :

$$\underline{\beta}(v, \phi)(x, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega / \phi(y, t) < v(x, t) \} \quad \text{pp. } \forall (x, t) \in Q.$$

De même, nous posons : $\bar{\beta}(v, \phi)(x, t) = \text{mes} \{ y \in \Omega / \phi(y, t) \leq v(x, t) \} \quad \text{pp. } \forall (x, t) \in Q.$

Lemme 3.1 - Si v et ϕ sont deux fonctions mesurables sur Q , alors $\underline{\beta}(v, \phi)$ et $\bar{\beta}(v, \phi)$ le sont également.

Démonstration identique à celle du lemme 2.1.2.

Enfin, l'opérateur multivoque $\beta(\dots)$ est défini par :

$$\beta(v, \phi) = \{ \psi \in L^\infty(Q) / \underline{\beta}(v, \phi)(x, t) \leq \psi(x, t) < \bar{\beta}(v, \phi)(x, t) \quad \text{pp. } \forall (x, t) \in Q \}$$

3.1 - Propriétés de monotonie de $\beta(\dots)$

3.1.1 : si $u(x, t) \leq v(x, t)$ alors $\underline{\beta}(u, \phi)(x, t) \leq \underline{\beta}(v, \phi)(x, t)$ et $\bar{\beta}(u, \phi)(x, t) \leq \bar{\beta}(v, \phi)(x, t)$

3.1.2 : si $u(x, t) < v(x, t)$

$$\underline{\beta}(u, \phi)(x, t) < \underline{\beta}(v, \phi)(x, t) \leq \bar{\beta}(u, \phi)(x, t) < \bar{\beta}(v, \phi)(x, t)$$

D'autre part, on a le

Lemme 3.1.3 : $\forall u$ et $v \in V$, pour tout ϕ et $\chi \in L^2(Q)$, telles que $\phi(x, t) \leq \chi(x, t)$ p. partout dans Q , on a :

$$(14) \quad \int_Q (\psi - \xi)(u - v)_+ dx dt \geq 0 \quad \begin{array}{l} \forall \psi \in \beta(u, \phi) \\ \forall \xi \in \beta(v, \chi) \end{array}$$

Démonstration : comme dans le cas stationnaire ([1], Lemme 4 p. ii-34) pour presque tout t on a

$$(14') \quad \int_\Omega (\psi(x, t) - \xi(x, t)) (u(x, t) - v(x, t))_+ dx \geq 0$$

et l'on obtient (14) en intégrant par rapport à t sur $]0, T[$.

3.2 - Nous posons le problème d'évolution P_ϕ : soit $\phi \in L^2(Q)$.

$$\begin{cases} u_\phi \in V \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} - \Delta u_\phi + \beta(u_\phi, \phi) \ni f \\ u_\phi(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Théorème 3.2.1 : Soit ϕ une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$ et soit u_0 une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$, alors il existe une solution u_ϕ dans W , du problème (15).

Démonstration : Si $\Gamma(u) = f - \beta(u, u)$ vérifie les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) alors l'opérateur multivoque $\Gamma_\phi(u) = f - \beta(u, \phi)$, ϕ fixé, les vérifie a fortiori. Il existe donc, par le théorème 1 une solution de (15). (On aurait pu utiliser, également, les propriétés de monotonie de $\beta(\cdot, \phi)$, avec un procédé de régularisation, pour montrer ce théorème).

Le paragraphe 3.3 ci-dessous montre en outre qu'il y a unicité de la solution u_ϕ :

3.3 - Monotonie d'une solution de P_ϕ , par rapport à la donnée ϕ

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions de $L^2(Q)$ telles que $\phi_1 \leq \phi_2$ p.partout dans Q ,

Soit $u_{\phi_1} \in W$ une solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\phi_1}}{\partial t} - \Delta u_{\phi_1} + \beta(u_{\phi_1}, \phi_1) \ni f \\ u_{\phi_1}(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

et $u_{\phi_2} \in W$ une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\phi_2}}{\partial t} - \Delta u_{\phi_2} + \beta(u_{\phi_2}, \phi_2) \ni f \\ u_{\phi_2}(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

alors $h = u_{\phi_1} - u_{\phi_2} \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega))$ vérifie :

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \Delta h + \psi_1 - \psi_2 = 0 \\ h(x, 0) = 0 \end{cases}$$

avec $\psi_1 \in \beta(u_{\phi_1}, \phi_1)$ et $\psi_2 \in \beta(u_{\phi_2}, \phi_2)$

La partie positive de h , h_+ appartient également à $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ (cf. STAMPACCHIA [3]). Nous multiplions par h_+ l'égalité (16) et nous intégrons sur Ω :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}(t), h_+(t)\right)_{L^2(\Omega)} + (\nabla h(t), \nabla h_+(t))_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)(u_{\phi_1} - u_{\phi_2})_+ dx = 0$$

soit encore en intégrant sur $[(0, T)]$:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \|h_+(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \|\nabla h_+\|_{L^2(Q)}^2 + \int_Q (\phi_1 - \phi_2)(u_{\phi_1} - u_{\phi_2})_+ dx dt = 0$$

puisque $h_+(x, 0) = 0$ pp $x \in \Omega$ et, grâce au lemme 3.1.3 :

$$(17) \quad \frac{1}{2} \|h_+(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla h_+\|_{L^2(Q)}^2 \leq 0$$

ce qui implique que h_+ est identiquement nulle dans Ω et donc

$$(18) \quad u_{\phi_1} \leq u_{\phi_2}$$

Ce résultat assure en particulier l'unicité de la solution du problème P_{ϕ} (avec ϕ et u_0 fixes).

On peut ainsi définir une application $T : L^2(\Omega) \rightarrow W$, $\phi \rightarrow T\phi = u_{\phi}$, u_0 étant fixé ; c'est une application croissante pour la relation d'ordre $\phi_1 \leq \phi_2$ ssi $\phi_1(x, t) \leq \phi_2(x, t)$ presque partout dans Ω .

3.4 - Méthodes des suites monotones

Proposition 3.4.1 : Soit u_1 et u^1 les solutions dans W des problèmes u_0 fixe :

$$(19.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = f - |\Omega| \\ u_1(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$(19.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^1}{\partial t} - \Delta u^1 = f \\ u^1(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Alors (20) $\forall \phi \in L^2(\Omega)$, $u_1 \leq u_\phi = T\phi \leq u^1$ dans W

Démonstration : D'après (15) u_ϕ vérifie : $\frac{\partial u_\phi}{\partial t} - \Delta u_\phi \in f - \beta(u_\phi, \phi)$

c'est-à-dire $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u_1(x,t) \leq (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u_\phi(x,t) \leq (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u^1(x,t)$ pour presque tout $(x,t) \in Q$.

Comme l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)$ vérifie le principe du maximum, on en déduit (20).

3.4.2 - Les approximations successives.

Nous définissons les suites :

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = T u_n \quad \text{avec } u_1 \text{ donné par (19.1)}$$

$$u^{n+1} = T u^n \quad \text{avec } u^1 \text{ donné par (19.2).}$$

Nous pouvons écrire (20) $u_1 \leq u_2 = T u_1$ puis, grâce à la monotonie de T : $T^{n-1} u_1 \leq T^n u_1$ et donc

$$(21) \quad u_n \leq u_{n+1}$$

De même

$$(22) \quad u^n \geq u^{n+1}$$

Si nous remarquons encore que

$$T^{n-1} u_1 \leq T^{n-1} u^1$$

on peut écrire l'inégalité

$$(23) \quad u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq u^n \dots \leq u^1$$

où l'on note toujours $u \leq v$ ssi $u(x,t) \leq v(x,t)$ presque partout dans Q .

Notons que, pour $t = 0$, toutes ces fonctions sont définies et égales presque partout à $u_0(x)$.

Proposition (3.4.3) : La suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $u^n, n \in \mathbb{N}$) converge dans $L^2(Q)$ vers une solution du problème (10).

Démonstration : La suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, est bornée dans W . Elle appartient donc à un compact de $L^2(Q)$ et de ce fait admet au moins une valeur d'adhérence \underline{u} (resp \bar{u}) dans $L^2(Q)$ et la relation d'ordre (23) nous assure que la suite toute entière

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \underline{u} .

De l'égalité $u_{n+1} = T_{u_n}$ (resp. $u^{n+1} = T u^n$), nous déduisons que $\underline{u} = T \underline{u}$ (resp. $\bar{u} = T \bar{u}$) grâce à la continuité de T établie ci-après.

Lemme 1 : L'application $T : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ est fortement continue.

Démonstration : Soit $\phi_m \rightarrow \phi$ dans $L^2(Q)$ fort, nous posons $\psi_m = -\frac{\partial u}{\partial t} \phi_m + \Delta u_{\phi_m} + f$ alors ψ_m est un élément de $\beta(u_{\phi_m}, \phi_m)$.

Donc, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(Q)$. Nous pouvons en extraire une sous-suite : $\psi_{m_i} \rightarrow \psi$ dans $L^2(Q)$ faible, $\{u_{\phi_{m_i}} = \mathcal{B}^{-1}(f - \psi_{m_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans W vers $u = \mathcal{B}^{-1}(f - \psi)$ puisque \mathcal{B}^{-1} est faiblement continue de $L^2(Q)$ dans W . Par la compacité de l'injection de W dans $L^2(Q)$ (cf. théorème 1.3.4) cette dernière convergence a lieu dans $L^2(Q)$ fort (quitte à extraire une nouvelle sous-suite).

Le lemme 1 serait démontré, si l'on pouvait affirmer que $\psi \in \beta(u, \phi)$, parce qu'alors on aurait $u \in \mathcal{B}^{-1}(f - \beta(u, \phi))$ et u serait l'unique solution de P_4 : $u = T_{\phi}$. De plus, la suite toute entière u_{ϕ_m} convergerait vers u dans $L^2(Q)$ par un argument classique d'unicité.

Le résultat se ramène donc à la démonstration du lemme :

Lemme 2 : Le graphe de $\beta(\dots)$:

$\{(u, \phi, \psi) \in L^2(Q)^3 / \text{tel que } \psi \in \beta(u, \phi)\}$ est fermé dans $L^2(Q)$ fort \times $L^2(Q)$ fort \times $L^2(Q)$ faible.

Le résultat de ce lemme contient la vérification de l'hypothèse (H_3) dans le § 2.2. La démonstration est similaire : nous n'indiquerons que les modifications à y apporter.

Démonstration : soit $v_m \rightarrow v$ dans $L^2(Q)$ fort et $\phi_m \rightarrow \phi$ dans $L^2(Q)$ fort pour tout $\eta > 0$, il existe un compact $K_\eta \subset Q$ tel que

$$\begin{aligned} \text{mes}(Q - K_\eta) &< \eta^2 \\ v_m &\rightarrow v \text{ uniformément sur } K_\eta \\ \phi_m &\rightarrow \phi \text{ uniformément sur } K_\eta \end{aligned}$$

Les convergences uniformes sur K_η impliquent

$$\forall \eta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists m_0(\eta, \varepsilon) \text{ tel que } \forall m > m_0$$

$$|v_m - v|_{L^\infty(K_\eta)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\phi_m - \phi|_{L^\infty(K_\eta)} < \varepsilon$$

On obtiendra les mêmes inégalités : soit $\psi_m \in \beta(v_m, \phi_m)$

$$-\eta + \text{mes} \{ y \in \Omega / v(x,t) - \phi(y,t) > +2\varepsilon \} < \psi_m(x,t) < \eta +$$

pour presque tout $(x,t) \in (K_\eta(t) \times A_y)$. $\text{mes} \{ y \in \Omega / v(x,t) - \phi(y,t) > -2\varepsilon \}$

La fin de la démonstration est identique. Si ψ_m converge vers ψ dans $L^2(Q)$ faible alors $\psi \in \beta(v, \phi)$

La démonstration de la proposition 3.4.3 est donc totalement terminée.

Evidemment, nous aurons (24) $\underline{u} \leq \bar{u}$, et ainsi nous avons mis en évidence une solution au moins du problème (10) puisque ses solutions s'écrivent $u = Tu$, et deux solutions distinctes si l'inégalité (24) est stricte. Nous précisons encore :

Théorème 3.5 - \underline{u} est la solution minimale du problème (10) et \bar{u} en est la solution maximale.

Démonstration : soit u une solution quelconque de (10), alors $u = Tu$

$$\text{et donc} \quad u_1 \leq u \leq u^1$$

Par la monotonie de T

$$u_{n+1} = T^n u_1 \leq T^n u \leq u^{n+1} = T^n u^1$$

et par la continuité de T :

$$(25) \quad \underline{u} \leq u \leq \bar{u}$$

Ainsi, nous avons montré l'existence d'au moins une solution du problème d'évolution (10), par les deux méthodes qui ont aussi servi à J. MOSSINO pour prouver l'existence de solutions du problème stationnaire. Ces méthodes (la deuxième est plus précise) s'appliquent également aux problèmes d'évolution associés aux problèmes traités dans ([1] ; chap. IV-V) qui généralisent le problème original.

En particulier, on peut remplacer l'opérateur multivoque $\beta(u, \phi)$ par $g(\beta(u, \phi))$ où g est une fonction continue de $[0, |\Omega|]$ dans \mathbb{R} . Nous démontrons alors l'existence d'au moins une solution. Si, de plus, g est une fonction croissante, la deuxième méthode des suites monotones donne alors l'existence d'une solution minimale et d'une solution maximale.

Le problème d'évolution associé au problème non coercif à frontière libre évoqué au chapitre II présente de nouvelles difficultés. Sa résolution fera l'objet d'un travail ultérieur.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] J. MOSSINO : Etude de quelques problèmes non linéaires d'un type nouveau apparaissant en physique des plasmas, Thèse d'Etat, Orsay, 1977.
- [2] J.P. ZOLESIO, J. MOSSINO,
Note au C.R.A.S., 1977, t. 285, série A, p. 1033.
- [3] G. STAMPACCHIA : Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,
Presses de l'Université de Montréal, 1966.
- [4] RUDIN : Real and complex analysis,
Mac Graw-Hill, 1966.
- [5] C. CASTAING,
Note au C.R.A.S., 1972, t. 275, série A, p. 1331.
- [6] Méthodes d'éléments finis :
Ph. CIARLET : The finite element method,
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1975.
STRANG et FIX : An analysis of the F.E.M.,
Prentice Hall, 1973.
- [7] J.L. LIONS : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,
Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1968.
- [8] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,
Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [9] K. FAN : Fixed points and minimax theorems in locally convex topological linear spaces,
Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38 (1952), pp. 121-126.
- [10] F. TERKELSEN : A short proof of Fan's fixed point theorem,
Proc. Am. Math. Soc., 42, 1974, pp. 643-644.
- [11] J. MOSSINO, R. TEMAM : Certains problèmes non linéaires de la physique des plasmas,
Proceedings of the Conference on Finite Element Method,
Rome, Déc. 1975, Lecture Notes, Springer.

N° d'Impression 331
4ème trimestre 1978