UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 73

Prolongement des fonctions holomorphes bornées et métrique de Carathéodory

par

Nessim Sibony

Analyse Harmonique d'Orsay

1974

PROLONGEMENT DES FONCTIONS HOLOMORPHES BORNEES ET METRIQUE DE CARATHEODORY

par Nessim SIBONY

INTRODUCTION.

Lorsque U est un ouvert borné du plan complexe tel que $\mathring{\bar{U}} = U$, il existe une fonction holomorphe bornée dans U, singulière en tout point du bord de U.

La situation est différente dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, même si on suppose que U est un domaine d'holomorphie. Il semble que, mis à part le prolongement des fonctions holomorphes bornées à travers des ensembles minces, il existe d'autres phénomènes de prolongement.

Plus précisément, on construit dans $\mathbb{C}^2$, un domaine d'holomorphie Ω borné, tel que $\mathring{\bar{\Omega}} = \Omega$ et pourtant tel que toute fonction holomorphe bornée f dans Ω se prolonge à un ouvert strictement plus grand indépendant de f. On en déduit que Ω n'est pas dense dans le spectre de l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans Ω, munie de la norme uniforme. Nous noterons cette algèbre $H^\infty(\Omega)$.

Cet exemple répond, en particulier, à une question de Bishop-Rossi [9].

Nous introduisons au paragraphe 3 les domaines de $\mathbb{C}^n$ qui sont domaines d'existence d'une fonction holomorphe bornée. Nous les appelons domaines de type H^∞. Nous donnons dans ce paragraphe quelques propriétés de ces domaines.

Au paragraphe 4, on étudie une classe de fonctions plurisousharmoniques liée aux domaines de type H^∞. Pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ cette classe, notée $\mathcal{P}(U)$, est constituée par les fonctions p.s.h. dans U qui s'écrivent comme un sup régularisé de fonctions du type $c \log |f|$ avec $c > 0$ et f holomorphe dans U.

On notera $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans U. Un critère d'appartenance à $\mathcal{P}(U)$ nous permet de construire un domaine Ω_1, de type H^∞ vérifiant $\mathring{\bar{\Omega}}_1 = \Omega_1$ et tel que cependant Ω_1 n'est pas dense dans le spectre de $H^\infty(\Omega_1)$, muni de la topologie de Gelfand.

Au paragraphe 5 nous esquissons l'étude des singularités non essentielles pour les fonctions de $A(\bar{U})$, l'algèbre des fonctions continues dans $\bar{U}$ et holomorphes dans $\mathring{\bar{U}}$.

Dans une seconde partie nous étudions une classe particulière de domaines de type H^∞ : ceux qui sont complets pour la métrique de Carathéodory [15]. Nous étudions également les liens entre cette notion d'espace complet et le prolongement d'applications analytiques à valeurs dans certains espaces analytiques.

Cet article développe certains résultats parus dans une note aux C. R. Acad. Sc. Paris [24].

I. PROLONGEMENT DES FONCTIONS HOLOMORPHES BORNEES.

1. Un exemple de domaine d'holomorphie.

Dans ce paragraphe on construit dans $\mathbb{C}^2$ un domaine d'holomorphie borné qui est l'intérieur de son adhérence et tel que toute fonction holomorphe bornée admet un prolongement analytique à un ouvert strictement plus grand.

Soient D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et (a_p) une suite discrète dans D.

On choisit la suite (a_p) telle que tout point du cercle unité soit limite non tangentielle d'une sous-suite extraite.

Considérons la fonction φ définie dans D par

$$\varphi(z) = \sum_p \lambda_p \log \left| \frac{z - a_p}{2} \right|$$

où (λ_p) est une suite sommable de nombres réels strictement positifs. La fonction φ est sous-harmonique négative dans D. Notons V_o la fonction définie dans D, par $V_o(z) = \exp(\varphi(z))$. La fonction V_o est sous-harmonique positive dans D, elle est inférieure à 1 car φ est négative. De plus V_o est continue car la suite (a_p) est discrète et elle ne prend la valeur 0 que sur la suite (a_p).

Définissons dans $\mathbb{C}^2$ le domaine

$$M(D,V_o) = \left\{(z,w)/z\in D,\ w\in\mathbb{C},\ |w| < \exp(-V_o(z))\right\}.$$

Le domaine $M(D,V_o)$ est d'holomorphie car c'est l'ensemble des points (z,w) de $D \times \mathbb{C}$ qui vérifient $|w|\exp(V_o(z)) < 1$. Or la fonction $|w|\exp(V_o)$ est plurisousharmonique dans $D \times \mathbb{C}$ donc $M(D,V_o)$ est pseudo-convexe, par suite c'est un domaine d'holomorphie d'après le théorème d'Oka.

PROPOSITION 1. <u>Le domaine</u> $M(D,V_o)$ <u>est strictement contenu dans</u> D^2, <u>il est égal à l'intérieur de son adhérence dans</u> $\mathbb{C}^2$ <u>et toute fonction holomorphe bornée dans</u> $M(D,V_o)$ <u>se prolonge en une fonction holomorphe bornée dans</u> D^2. <u>De plus</u> $M(D,V_o)$ <u>est un domaine de Runge</u> .

Démonstration. Il est clair que $\overset{o}{\overline{M(D,V_o)}} = M(D,V_o)$ car la fonction V_o est continue sur D. Puisque $0 \leq V_o \leq 1$ et qu'elle n'est pas identiquement nulle, le domaine

$M(D,V_o)$ est strictement contenu dans D^2.

Soit g une fonction holomorphe bornée dans $M(D,V_o)$; on supposera que $\|g\| \leq 1$. La fonction g admet dans $M(D,V_o)$ un développement en série du type suivant :

(1) $$g(z,w) = \sum_{\nu \geq 0} h_\nu(z) w^\nu$$

h_ν étant holomorphe dans D car $h_\nu(z) = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu g}{\partial w^\nu}(z,0)$.

La formule de Cauchy nous permet d'écrire pour tout $r < 1$

$$h_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{g(z, r\exp(-V_o(z)e^{i\theta})}{r^\nu \exp(-\nu V_o(z))e^{i\nu\theta}} \, id\theta \, .$$

Puisque $\|g'\| \leq 1$ on a $|h_\nu(z)| \leq r^{-\nu}\exp(\nu V_o(z))$ et, comme r est arbitrairement proche de 1, on en déduit que $|h_\nu(z)| \leq \exp(\nu V_o(z))$ pour tout $z \in D$. Donc, pour tout ν, h_ν appartient à $H^\infty(D)$. Or, pour tout p, $|h_\nu(a_p)| \leq \exp(V_o(a_p)) = 1$.

En appliquant le théorème de Fatou sur la limite non tangentielle des fonctions holomorphes bornées dans D on voit que, pour tout ν, la valeur au bord h_ν^* de la fonction h_ν vérifie presque partout sur le cercle unité la condition : $|h_\nu^*(e^{i\theta})| \leq 1$. Donc $|h_\nu(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$ et pour tout ν. Par suite la série (1) converge uniformément sur tout compact de D^2. Il en résulte que la fonction g se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ appartenant à $H(D^2)$.

Montrons que $\|\tilde{g}\| = \sup_{(z,w) \in D^2} |g(z,w)|$ est inférieure à 1.

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, $(g-\lambda)^{-1}$ est holomorphe bornée dans $M(D,V_o)$. Comme on vient de le voir cette fonction admet un prolongement analytique à D^2, il est clair que ce prolongement est égal à $(\tilde{g}-\lambda)^{-1}$ par suite la fonction $\tilde{g}$ ne prend pas la valeur λ dans D^2, donc $\|\tilde{g}\| \leq 1$.

Pour voir que $M(D,V_o)$ est un domaine de Runge, il suffit de remarquer que toute fonction f, holomorphe dans $M(D,V_o)$, admet un développement en série de la forme $f(z,w) = \sum_{\nu\geq 0} h_\nu(z)w^\nu$ et que cette série converge uniformément sur tout compact de $M(D,V_o)$. Or on peut approcher, uniformément sur tout compact de D, chaque fonction h_ν par des polynômes. On voit qu'on peut construire une suite de polynômes qui converge vers f uniformément sur tout compact de $M(D,V_o)$.

Cet exemple fournit une réponse négative à la question suivante posée dans [4] p. 350. Soit Ω un domaine d'holomorphie borné dans $\mathbb{C}^n$. Considérons le spectre de l'algèbre uniforme $H^\infty(\Omega)$, muni de la topologie de Gelfand. Est-ce que Ω est dense dans le spectre de $H^\infty(\Omega)$?

Il est clair que $M(D,V_o)$ n'est pas dense dans le spectre de $H^\infty(M(D,V_o))$ car ce spectre contient D^2 et $\overline{M(D,V_o)}$ ne contient pas D^2. En effet la topologie de Gelfand induit sur D^2 la topologie habituelle.

Remarquons qu'il existe une classe, plus vaste que $H^\infty(M(D,V_o))$, de fonctions holomorphes dans $M(D,V_o)$ prolongeables en fonctions holomorphes dans D^2.

Soit ψ une fonction positive et continue sur $[0,1[$. Supposons que $f \in H(M(D,V_o))$ et que pour tout $(z,w) \in M(D,V_o)$ on a $|f(z,w)| \leq \psi(|w|)$; alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans D^2. L'hypothèse sur f autorise cette fonction à ne pas être bornée au voisinage d'une partie du bord de $M(D,V_o)$.

Reprenons la démonstration précédente. On a

$$f(z,w) = \sum_\nu h_\nu(z)\, w^\nu \tag{1'}$$

où les fonctions h_ν sont bornées. En effet, $M(D,V_o)$ contient $D \times \{|w| < \varepsilon\}$ pour ε assez petit et sur ce dernier ensemble la fonction f est bornée : $|f(z,w)| \leq \psi(\varepsilon)$

si on suppose que ψ est croissante or on peut toujours le supposer.

De plus, pour tout $r < 1$, on a pour tout ν et pour tout p fixés

$$|h_\nu(a_p)| \leq r^{-\nu} \exp(\nu V_o(a_p))\, \psi(r V_o(a_p)) = r^{-\nu} \psi(r).$$

Le nombre ν étant fixé, soit $r_\nu = \sup\left\{r/r<1 \text{ et } \psi(r) \leq (1+\nu^{-\frac{1}{2}})^\nu\right\}$.

On a alors, d'après l'inégalité précédente, pour tout p,

$$|h_\nu(a_p)| \leq r_\nu^{-\nu} \psi(r_\nu).$$

En utilisant à nouveau le théorème de Fatou, on montre que pour tout $z \in D$

$$|h_\nu(z)| \leq r_\nu^{-\nu} \psi(r_\nu).$$

Par suite $|h_\nu(z)|^{1/\nu} \leq r_\nu (1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}})$. Or $\lim\limits_{\nu \to \infty} r_\nu = 1$ car $\lim\limits_{\nu} (1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}})^\nu = \infty$.

D'où il résulte que $\overline{\lim\limits_{\nu}} |h_\nu(z)|^{1/\nu} \leq 1$, donc le rayon de convergence de la série (1') est supérieur à 1. La fonction f admet donc un prolongement analytique à D^2.

2. Une classe de singularités non essentielles pour les fonctions bornées.

Notons M la marmite de Hartogs dans $\mathbb{C}^2$, i. e. $M = (\overline{D} \times \{0\}) \cup (S^1 \times [0,1])$ où $S^1 = \{z/z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$; et soit $\hat{M}$ la marmite pleine $\hat{M} = \overline{D} \times [0,1]$.

Il est bien connu que toute fonction holomorphe dans un voisinage de M dans $\mathbb{C}^2$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $\hat{M}$.

Nous allons donner un résultat du même type, mais pour des fonctions bornées. Pour cela introduisons la notion suivante :

DEFINITION 2. <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et</u> E <u>un sous-ensemble de</u> Ω. <u>On dit que</u> E <u>est</u> $H^\infty(\Omega)$ <u>dominant si, pour toute fonction</u> $f \in H^\infty(\Omega)$, <u>on a</u>

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

Dans l'exemple construit au paragraphe 1, nous avons montré à l'aide du théorème de Fatou qu'il existe des ensembles discrets dans D qui sont $H^{\infty}(D)$ dominants. On vérifie facilement qu'un ensemble E est $H^{\infty}(\Omega)$ dominant si et seulement si son adhérence $\bar{E}$, dans le spectre de $H^{\infty}(\Omega)$ muni de la topologie de Gelfand, contient la frontière de Silov de $H^{\infty}(\Omega)$.

Soit E un ensemble $H^{\infty}(D)$ dominant. Posons $M(D,E) = (D\times\{0\})\cup(E\times D) \subset \mathbb{C}^2$ et notons D_r le disque de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}$. On peut alors énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. Soit f une fonction holomorphe bornée sur un voisinage de $M(D,E)$ contenant $D\times D_r$, $r>0$ arbitrairement petit. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe bornée dans D^2.

Démonstration. Comme f est holomorphe bornée dans $D\times D_r$ on a

$$f(z,w) = \sum_{\nu\geq 0} h_{\nu}(z)\, w^{\nu} \tag{2}$$

avec $h_{\nu} \in H(D)$. Puisque f est bornée dans $D\times D_r$ il en résulte que $|h_{\nu}(z)| \leq C\, r^{-\nu}$ pour tout $z \in D$.

Or, pour tout $z_o \in E$, la fonction $f(z_o, w)$ est holomorphe dans D donc $\overline{\lim}\, |h_{\nu}(z_o)|^{1/\nu} \leq 1$.

Soit χ un point adhérent à E dans le spectre de $H^{\infty}(D)$, $\chi = \lim\limits_{i} z_i$. Soit $g \in H(D)$ une fonction adhérente à la famille $(f(z_i,w))_i$, lorsqu'on munit $H(D)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Comme $h_{\nu}(z_i)$ converge vers $\frac{g^{\nu}(0)}{\nu!}$ et que $h_{\nu} \in H^{\infty}(D)$, on en déduit que

$$g(w) = \sum_{\nu\geq 0} \hat{h}_{\nu}(\chi)\, w^{\nu},$$

$\hat{h}_\nu$ désignant la transformée de Gelfand de h_ν. Or la fonction g est holomorphe dans D, par suite $\overline{\lim} |\hat{h}_\nu(\chi)|^{1/\nu} \leq 1$ pour tout $\chi \in \overline{E}$.

Soit $z \in \overline{D}$. Il existe une mesure de Jensen positive portée par $\overline{E}$ et représentant l'évaluation au point z ; en particulier on a

$$\frac{\log |h_\nu(z)|}{\nu} \leq \int_{\overline{E}} \frac{\log |\hat{h}_\nu|(\chi)}{\nu} \, d\mu_z(\chi).$$

Or $\|h_\nu\| \leq C\, r^{-\nu}$, donc en appliquant le lemme de Fatou, on a

$$\overline{\lim_\nu} \frac{\log |h_\nu(z)|}{\nu} \leq \int_{\overline{E}} \overline{\lim} \frac{\log |\hat{h}_\nu(\chi)|}{\nu} \, d\mu_z(\chi) \leq 0.$$

Par suite la série (2) converge uniformément sur tout compact de D^2 et, par un argument semblable à celui utilisé au paragraphe 1, on montre qu'elle est bornée sur D^2.

REMARQUES 4.

a) Nous avons en fait démontré que, lorsque f est une fonction bornée sur $(D \times D_r) \cup E \times D$, holomorphe dans $D \times D_r$ et telle que pour tout $z \in E$, la fonction $f(z, \ )$ est holomorphe dans D, alors f se prolonge en une fonction holomorphe et bornée dans D^2.

b) On obtient un résultat semblable en considérant des ensembles de la forme $M(\omega, E) = (\omega \times \{0\}) \cup (E \times D)$ où ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et E un ensemble $H^\infty(\omega)$ dominant : les fonctions holomorphes bornées sur un voisinage de $M(\omega, E)$ contenant $\omega \times D_r$ se prolongent en fonctions appartenant à $H^\infty(M(\omega, E))$. Dès que ω est à frontière de classe $\mathscr{C}^2$, on peut construire des ensembles discrets dans ω qui soient $H^\infty(\omega)$ dominants. En effet, dans ce cas, on a un théorème de Fatou sur les limites non tangentielles de fonctions holomorphes bornées [26].

c) Il serait intéressant de s'affranchir de l'hypothèse f définie dans $D \times D_r$.

Soit φ une fonction s. c. s. positive sur D. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $H(D,k\varphi)$ l'espace des fonctions f holomorphes dans D qui vérifient :

$\sup_{z\in D} |f(z)|\exp(-k\varphi(z)) < \infty$.

Posons $\mathcal{H}(D,\varphi) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H(D,k\varphi)$.

On dira qu'un ensemble $E \subset D$ est φ dominant si, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{H}(D,\varphi)$, on a $\sup_{z\in D} |f(z)| = \sup_{z\in E} |f(z)|$. De tels ensembles ne sont intéressants que s'ils sont suffisamment minces.

Nous allons donner un exemple d'un ensemble $E \subset D$, φ-dominant et discret. Soit $C_n = \left\{z/ |z| = 1-n^{-1}\right\}$. Notons $E_\varphi^n = \left\{z_1^n, \ldots, z_{k(n)}^n\right\}$ un ensemble de $k(n)$ points sur C_n tels que la distance de tout point $\zeta \in C_n$ à l'ensemble E_φ^n soit inférieure à d_n. Nous verrons plus loin qu'il suffit de choisir une suite d_n convergeant assez vite vers 0, pour que l'ensemble $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_\varphi^n$ soit φ-dominant.

En effet, pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(D,\varphi)$ et pour tout point $\zeta \in C_n$ on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$|g(\zeta)| \leq \sup_{z\in E_\varphi^n} |g(z)| + d_n \sup_{\eta\in C_n} |g'(\eta)|.$$

On peut donc choisir d_n, en fonction de la croissance de φ, de manière à avoir pour tout $\zeta \in C_n$ et pour toute $g \in H(D,n\varphi)$ la majoration :

$$|g(\zeta)| \leq \sup_{z\in E_\varphi^n} |g(z)| + 1.$$

D'où l'on conclut que pour $g \in \mathcal{H}(D,\varphi)$ et $z' \in D$ on a

$$|g(z')| \leq \sup_{z\in E} |g(z)| + 1. \tag{3}$$

Il suffit en effet d'appliquer le principe du maximum et de remarquer que

$H(D,k\varphi) \subset H(D,(k+1)\varphi)$. De l'inégalité (3) on déduit que E est φ-dominant car $\mathcal{H}(D,\varphi)$ est une algèbre.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat suivant.

Soit V un voisinage de $D \times \{0\}$ dans $\mathbb{C}^2$, contenant l'ensemble

$$\{(z,w)/z \in D,\ w \in \mathbb{C},\ |w| < \exp(-\varphi(z))\},$$

φ étant une fonction s. c. s.

Soit $E \subset D$ un ensemble φ-dominant. Si f est une fonction holomorphe bornée dans un voisinage U de $(D \times \{0\}) \cup (E\ \ D) \subset \mathbb{C}^2$ et si U contient V, alors f se prolonge en une fonction de $H^\infty(D^2)$.

La démonstration utilise les mêmes idées que précédemment.

3. Domaines de type H^∞.

Les exemples précédents conduisent à adopter la définition suivante [5].

DEFINITION 5. Un ouvert Ω est un domaine de type H^∞ s'il n'existe pas d'ouverts Ω_1 et Ω_2 dans $\mathbb{C}^n$ avec les propriétés suivantes

i) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$.

ii) Ω_2 est connexe et non contenu dans Ω.

iii) Pour toute fonction u appartenant à $H^\infty(\Omega)$, il existe $u_2 \in H(\Omega_2)$ telle que $u = u_2$ dans Ω_1.

Il est équivalent de dire que pour tout point z appartenant à un ensemble dense sur la frontière de Ω il existe une fonction de $H^\infty(\Omega)$ singulière en z. En effet, désignons par $B(z\ ,\ r)$ la boule de centre z et de rayon r, l'application de restriction de $H^\infty(\Omega \cup B(z,r))$ est, soit surjective, soit d'image maigre.

Choisissons une famille dénombrable de boules $(B(z_j,r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ telle que tout ouvert qui rencontre $\partial\Omega$ en contienne une. Le théorème de Baire permet d'affirmer qu'il existe une fonction de $H^\infty(\Omega)$ qui n'appartient à aucun des $H^\infty(\Omega \cup B(z_j,r_j))$ c'est-à-dire qu'elle est singulière en tout point du bord de Ω. Le raisonnement est le même que celui de [17] p. 32.

Donnons quelques exemples de domaines de type H^∞.

a) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Si $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$ alors Ω est de type H^∞. Plus généralement si F désigne l'ensemble $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} \setminus \Omega$, pour que le domaine Ω soit de type H^∞ il faut et il suffit que pour tout $z\in F$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, la capacité analytique de l'ensemble $F \cap B(z,n^{-1})$ soit strictement positive.

Au paragraphe 1 on a donné un exemple d'un domaine d'holomorphie Ω dans $\mathbb{C}^2$ tel que $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$ et qui cependant n'est pas de type H^∞ ; la situation est donc différente dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

b) Si Ω est borné dans $\mathbb{C}^n$ avec $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$ et si $\overline{\Omega}$ est une intersection de domaines d'holomorphie, alors Ω est de type H^∞. On peut même montrer qu'il existe une fonction indéfiniment dérivable sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω et singulière en tout point du bord de Ω.

c) Tout ouvert Ω convexe dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ est de type H^∞.

d) Si Ω_β est de type H^∞ pour tout β appartenant à un ensemble B l'intérieur de $\bigcap_{\beta\in B} \Omega_\beta$ est encore de type H^∞.

e) Si Ω est de type H^∞ et si $f_1,\dots,f_N$ sont des fonctions holomorphes dans Ω alors l'ouvert

$$\Omega_f = \left\{z/z\in\Omega,\ |f_j(z)|<1,\ j=1,..N\right\}$$

est de type H^∞.

Soit Φ une application holomorphe d'un ouvert Ω de type H^∞ et à valeurs dans $\mathbb{C}^m$. En général l'image réciproque par Φ d'un ouvert de type H^∞ n'est pas de type H^∞.

EXEMPLE 6. Soit Φ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par

$$\Phi(z,u) = (z,uz).$$

Posons $\Delta = \left\{(z,w)/z\in\mathbb{C},\ w\in\mathbb{C},\ |w|<|z|<1\right\}$. on a $\Phi^{-1}(\Delta) = \left\{(z,u)/0<|z|<1,\ |u|<1\right\}$. L'ouvert $\Phi^{-1}(\Delta)$ n'est pas de type H^∞ car toute fonction holomorphe bornée dans $\Phi^{-1}(\Delta)$ se prolonge à D^2 (théorème de prolongement de Riemann).

L'ouvert Δ est cependant de type H^∞, il existe même une fonction de $A(\overline{\Delta})$ singulière en tout point du bord de Δ. En effet, nous allons montrer que le spectre de $A(\overline{\Delta})$ se projette sur $\overline{\Delta}$ par l'application $\pi : SpA(\overline{\Delta}) \to \mathbb{C}^2$ qui à tout homomorphisme χ associe $\pi(\chi) = (\chi(z),\chi(w))$. Or il est clair que pour tout $\chi\in SpA(\overline{\Delta})$ on a $|\chi(z)|\leq 1$. Considérons les fonctions f_n définies par $f_n(z,w) = w^{n+1}z^{-n}$ si $z\neq 0$ et $f_n(0,0) = 0$. Il est clair que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f_n\in A(\overline{\Delta})$ et que $\|f_n\| = 1$. Par suite $|\chi(f_n)|\leq 1$. Or $w^{n+1} = f_n(z,w)z^n$, d'où $|\chi(w)|^{n+1} \leq |\chi(z)|^n$ pour tout entier n. Il en résulte que $|\chi(w)|\leq |\chi(z)|$.

Si toute fonction de $A(\overline{\Delta})$ se prolongeait au voisinage d'un point du bord, on n'aurait pas $\pi(SpA(\overline{\Delta})) = \overline{\Delta}$. Cela résulte d'un raisonnement semblable à celui qui suit la définition 5.

Nous avons cependant la proposition suivante.

PROPOSITION 7. <u>Soient</u> Ω <u>et</u> Ω' <u>des domaines de type</u> H^∞ <u>contenus respectivement dans</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et</u> $\mathbb{C}^m$; <u>et soit</u> Φ <u>une application holomorphe ouverte de</u> Ω <u>dans</u> $\mathbb{C}^m$. <u>Alors</u> $\Phi^{-1}(\Omega)$ <u>est un domaine de type</u> H^∞ <u>dans les deux cas suivants</u> :

i) $\mathring{\overline{\Omega}}' = \Omega'$ <u>ou</u> ii) <u>L'application</u> Φ <u>est propre</u>.

Démonstration. Posons $\Omega_1 = \Phi^{-1}(\Omega')$. Il s'agit de trouver, pour tout point z_o d'un ensemble dense sur la frontière de Ω_1, une fonction de $H^\infty(\Omega_1)$ singulière en z_o. Si $z_o \in \partial\Omega$ on utilise l'hypothèse Ω de type H^∞. On peut donc se limiter au cas où $\Phi(z_o) \in \overline{\Omega}' \setminus \Omega'$.

Soit $\tilde{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_1 \cap \Omega$. On a alors $\tilde{\Omega}_1 = \overline{\Phi^{-1}(\Omega')} \cap \Omega \subset \Phi^{-1}(\overline{\Omega}')$ et, puisque Φ est ouverte, on a aussi $\mathring{\tilde{\Omega}}_1 \subset \widehat{\Phi^{-1}(\overline{\Omega}')}^{\,o} \subset \Phi^{-1}(\mathring{\overline{\Omega}}')$.

Si Φ est de rang maximum en z_o il existe une application $\tilde{\Phi}$, définie au voisinage de $\Phi(z_o)$, telle que $\Phi o \tilde{\Phi} = Id_{\mathbb{C}^m}$. Or $\Phi(z_o) \in \partial\Omega'$ donc par hypothèse il existe $g \in H^\infty(\Omega')$ singulière en $\Phi(z_o)$. La fonction $f = g o \Phi$ est alors singulière en z_o. En effet, si elle admettait un prolongement $\tilde{f}$ on aurait $\tilde{f} o \tilde{\Phi} = g$ dans un voisinage de $\Phi(z_o)$ et g ne serait pas singulière en ce point.

Il suffit donc de prouver que l'ensemble des points où Φ est de rang maximum est dense dans la partie de la frontière de Ω_1 contenue dans Ω.

Dans le cas i) on a $\mathring{\tilde{\Omega}}_1 \subset \Phi^{-1}(\mathring{\overline{\Omega}}') = \Omega_1$. Donc la mesure de Hausdorff H_{2n-1} au voisinage de tout point appartenant à la frontière de Ω_1 relativement à Ω est strictement positive. En effet, il en est ainsi pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ tel que $\mathring{\overline{U}} = U$.

Or l'ensemble F des points où Φ n'est pas de rang maximum est un ensemble analytique de codimension strictement positive, il est donc de mesure de Hausdorff H_{2n-1} nulle.

Dans le cas ii) l'application Φ étant propre $\Phi(F)$ est un ensemble analytique [11]. Soit $z_o \in \partial\Omega_1 \cap \Omega$. Supposons qu'il existe un voisinage U de z_o tel que $V(z_o) = U \cap \partial\Omega_1$ soit contenu dans F. On voit facilement que dans ce cas $\Phi(U) \cap \partial\Omega' \subset \Phi(F)$. Donc $\Phi(F)$ est un ensemble analytique contenant un ouvert de la frontière de Ω'. Or on a $(\mathring{\bar{\Omega}}' \setminus \Omega') \cap \Phi(U) \subset \Phi(F)$. Le théorème d'extension de Riemann permet alors d'affirmer que les fonctiond de $H^{\infty}(\Omega')$ se prolongent à travers $\Phi(F)$, ce qui contredit l'hypothèse Ω' de type H^{∞}.

On peut utiliser la proposition précédente pour obtenir une condition de régularité des domaines de type H^{∞}.

COROLLAIRE 8. Soit Ω' un domaine de type H^{∞} contenu dans $\mathbb{C}^m$ tel que $\mathring{\bar{\Omega}}' = \Omega'$. Notons $M(\bar{D}^{n-1} \times \{0\}) \cup (E \times D)$ où E est un ensemble contenu dans D^{n-1} et qui est $H^{\infty}(D^{n-1})$ déterminant. Si Φ est une application holomorphe, ouverte, définie dans un voisinage de $\bar{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ et telle que $\Phi\left[M(\bar{D}^{n-1}, E)\right] \subset \Omega'$, alors on a $\Phi(D^n) \subset \Omega'$.

Démonstration. On vérifie que, sous les hypothèses précédentes, il existe $r > 0$ tel que $\Phi^{-1}(\Omega')$ contient l'ensemble $M(D,E) \cup D^{n-1} \times D_r$. D'après la proposition 7 l'ouvert $\Phi^{-1}(\Omega')$ est un domaine de type H^{∞}. Or on a vu que toute fonction holomorphe et bornée dans un voisinage de $M(D,E)$ qui contient $D^{n-1} \times D_r$ se prolonge à D^n. Il en résulte que $\Phi^{-1}(\Omega')$ contient $D^{n-1} \times D$.

On peut généraliser la notion de domaine de type H^{∞} aux domaines étalés sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $(\Omega, p_o, \mathbb{C}^n)$ un domaine étalé sur $\mathbb{C}^n$. D'après un théorème de Thullen [19] p. 91, pour toute famille $S \subset H(\Omega)$ il existe une S-enveloppe d'holomorphie. Plus précisément, il existe un domaine étalé $(X, p, \mathbb{C}^n)$ et une application continue φ telle que $p \circ \varphi = p_o$ et telle que, pour toute $f \in S$, il existe $F_f \in H(\ )$ avec $F_f o \varphi = f$. De plus l'espace $(X, p, \mathbb{C}^n)$ est "maximal" pour ces deux propriétés. On renvoie à [19] pour plus de détails.

Posons $S = H^\infty(\Omega)$; comme on vient de le voir, il existe un espace étalé sur $\mathbb{C}^n$ qui est l'enveloppe d'holomorphie pour la famille $H^\infty(\Omega)$. Nous le noterons $E_\infty(\Omega)$. Il est clair que les fonctions F_f associées aux fonctions $f \in H^\infty(\Omega)$ sont bornées. Donc $H^\infty(\Omega)$ est isomorphe à $H^\infty(E_\infty(\Omega))$.

On voit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est de type H^∞ si et seulement si Ω est isomorphe à $E_\infty(\Omega)$. On peut donc généraliser la notion de domaine de type H^∞ aux domaines étalés sur $\mathbb{C}^n$: un domaine étalé Ω est de type H^∞ s'il est isomorphe à $E_\infty(\Omega)$.

Remarquons que lorsque $H^\infty(\Omega)$ sépare les points de Ω l'application φ est injective, ce qui permet d'identifier Ω à l'ouvert $\varphi(\Omega) \subset E_\infty(\Omega)$.

On peut montrer à l'aide du lemme 1, p. 94 [9], que $E_\infty(E_\infty(\Omega))$ est isomorphe à $E_\infty(\Omega)$.

Il est naturel de se demander si lorsque un domaine Ω est convexe par rapport à $H^\infty(\Omega)$ il est de type H^∞. Rappelons qu'un domaine est convexe par rapport à $H^\infty(\Omega)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$ l'ensemble $\hat{K}_\infty$ défini par

$$\hat{K}_\infty = \left\{ z / z \in \Omega, \quad |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| \quad \text{pour} \quad f \in H^\infty(\Omega) \right\}$$

est compact. Le domaine $M(D, V_o)$ introduit au paragraphe 1 fournit un contre-exemple. En effet, c'est un domaine de Runge borné.

4. Une classe de fonctions plurisousharmoniques ; application aux domaines de type H^∞.

Nous allons introduire dans ce paragraphe une classe de fonctions p.s.h. liée aux domaines de type H^∞.

Soit V une fonction plurisousharmonique dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Nous noterons V^1 la fonction p.s.h. définie dans Ω par

$$V^1(z) = (\sup_i c_i \log |f_i|)^*(z),$$

la borne supérieure étant prise sur les fonctions $c_i \log |f_i|$, où $c_i > 0$, f_i est holomorphe dans Ω et $c_i \log |f_i| \leq V$; l'étoile désigne la régularisé s.c.s. On déduit des propriétés classiques des fonctions p. s. h. que V_1 est p. s. h. Il est clair que $V^1 \leq V$ sur Ω. Cependant, on n'a pas toujours $V_1 = V$ comme le montre l'exemple du paragraphe 2. En effet pour la fonction $V_o = \exp(\varphi)$ introduite dans ce paragraphe on vérifie à l'aide du théorème de Fatou que $V_o^1 \equiv 0$, donc $V_o^1 \neq V_o$.

Nous noterons $\mathcal{P}(\Omega)$ le cône des fonctions V p.s.h. dans Ω qui vérifient $V^1 = V$.

Propriétés du cône $\mathcal{P}(\Omega)$.

a) $\mathcal{P}(\Omega)$ est un cône convexe. Si ψ est une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$ et si on pose $\psi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \psi(x)$ alors pour toute fonction V appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$ la fonction $\psi o V$ appartient à $\mathcal{P}(\Omega)$.

b) Un lemme de G. Choquet [3] permet d'affirmer que toute fonction V de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un sup régularisé d'une suite dénombrable de fonctions $c_p \log |f_p|$, $c_p > 0$, $f_p \in H(\Omega)$ et $c_p \log |f_p| \leq V$.

c) Si $V_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ et si la famille $(V_i)_{i \in I}$ est localement majorée alors $(\sup V_i)^* \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Ces trois propriétés sont de démonstration immédiate.

d) Si $V \in \mathcal{P}(\Omega)$, V est continue en dehors d'un ensemble négaligeable, donc en particulier de mesure nulle. Pour les propriétés des ensembles négligeables on renvoie à [17].

En effet, on a vu, propriété b), que V peut s'écrire sous la forme $V = (\sup_{p\in\mathbb{N}} c_p \log|f_p|)^*$ avec $c_p > 0$ et $f_p \in H(\Omega)$. Posons $W = \sup_{p\in\mathbb{N}} c_p \log|f_p|$ et $\eta = \{z/z\in\Omega$ tel que $W(z) < V(z)\}$. Par définition l'ensemble η est négligeable. Soit $z_o \in \Omega\setminus\eta$; puisque V est plurisousharmonique et que η est de mesure nulle on a

$$W(z_o) = V(z_o) = \overline{\lim_{z\to z_o}}\, V(z) = \overline{\lim_{\substack{z\to z_o\\ z\notin\eta}}}\, V(z).$$

Or W est s.c.i. donc $W(z_o) = \underline{\lim}_{z\to z_o} W(z) \leq \underline{\lim}_{z\to z_o} V(z)$. Par suite $\overline{\lim}_{z\to z_o} V(z) \leq \underline{\lim}_{z\to z_o} V(z)$; donc ces deux limites sont égales et la fonction V est continue en z_o.

Remarquons qu'il existe des fonctions de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui ne sont pas continues partout. En effet, soit $T = \exp(\theta)$ avec $\theta(z) = \sum_{p\geq 1} \lambda_p \log\left|\frac{z - p^{-1}}{3}\right|$, (λ_p) étant une suite de nombres strictement positifs telle que $\sum_{p\geq 1} \lambda_p \left|\log\frac{p^{-1}}{3}\right| < \infty$.

Posons $T_n(z) = |z|^{1/n} T$. Les fonctions T_n sont continues dans $\overline{D}$, sousharmoniques dans D. On verra plus loin, corollaire 10, qu'alors $T_n \in \mathcal{P}(D)$.

Or, pour tout $z\in D\setminus\{0\}$, $T(z) = \sup_n T_n(z)$ d'où $T = (\sup T_n)^*$. Donc, d'après la propriété c), T appartient à $\mathcal{P}(D)$. Pourtant T n'est pas continue en 0 car $\lim_{p\to\infty} T(p^{-1}) = 0$ et $T(0) > 0$.

Il est assez délicat de montrer qu'une fonction p.s.h. dans un ouvert U appartient ou non au cône $\mathcal{P}(U)$. Nous allons donner une condition suffisante d'appartenance à la classe $\mathcal{P}(U)$. Cette condition est fondée sur un théorème dû à Bremermann [4]. La Démonstration qu'il en donne étant inexacte, nous le démontrons ici.

THEOREME 9. Soient Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$ et V une fonction plurisousharmonique continue dans Ω. Pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes dans Ω et des constantes positives $c_1, \ldots, c_p$ telles que, pour tout $z \in K$, on a

$$V(z) - \varepsilon \leq \sup_{i \leq p} (c_i \log |f_i|)(z) \leq V(z).$$

Démonstration. Considérons l'ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ défini par

$$\tilde{\Omega} = \left\{(z,w) \mid z \in \Omega, \quad w \in C, \quad |w| < \exp(-V(z))\right\}.$$

C'est un domaine d'holomorphie car V est plurisousharmonique.

Pour tout $z_o \in K$, posons $f_{z_o}(w) = \sum_{\nu \geq 0} \exp(\nu V(z_o)) w^\nu$. La fonction f_{z_o} est holomorphe sur la sous variété analytique de $\tilde{\Omega}$ définie par $\left\{(z,w)/z = z_o\right\}$; elle admet donc, d'après le théorème B, un prolongement holomorphe à $\tilde{\Omega}$.

Soit $f(z,w) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu(z) w^\nu$ ce prolongement. On a $a_\nu(z_o) = \exp(\nu V(z_o))$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ et $a_\nu \in H(\Omega)$.

Puisque f est définie dans $\tilde{\Omega}$ on a

$$\overline{\lim_{\nu}} \frac{\log |a_\nu|}{\nu} \leq V.$$

D'après le théorème de Hartogs, [17] p. 93, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ν_o tel que, pour $\nu \geq \nu_o$, $\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} \leq V(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in K$. C'est ici qu'on utilise la continuité de V. Or $\frac{\log |a_\nu| . (z_o)}{\nu} = V(z_o)$, donc $\frac{\log |a_{\nu_o}(z)|}{\nu_o} \geq V(z) - \varepsilon$ sur un voisinage de z_o. Il suffit ensuite de recouvrir K par un nombre fini de tels voisinages et de prendre la borne supérieure des fonctions obtenues. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 10. Soit Ω un domaine d'holomorphie borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ admet une base de voisinage d'holomorphie. Si V est une fonction p.s.h. continue au voisinage de $\bar{\Omega}$ alors, sur $\bar{\Omega}$, $V = (\sup_k c_k \log |f_k|)$ avec $c_k > 0$ et f_k holomorphe au voisinage de $\bar{\Omega}$. En particulier $V \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Cela se déduit facilement du théorème précédent.

De ce corollaire, on déduit que la fonction V_o étudiée précédemment appartient au cône $\mathcal{P}(U)$ pour tout ouvert U relativement compact dans D. Or, on a vu qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{P}(D)$; donc le cône $\mathcal{P}(D)$ n'est pas défini par des conditions locales.

COROLLAIRE 11. Soit V une fonction continue dans $\bar{D}$ et sousharmonique dans D. Alors V appartient à $\mathcal{P}(D)$.

Démonstration. Soit U la solution du problème de Dirichlet avec pour donnée au bord V restreinte à ∂D. Il existe une fonction f holomorphe dans D telle que $U = \mathrm{Re} f$. Donc $U = \log |\exp(f)|$, par suite $U \in \mathcal{P}(D)$. Il suffit donc de prouver que la fonction $\tilde{V} = V - U$ appartient à $\mathcal{P}(D)$. Or $\tilde{V}$ est sousharmonique dans D, continue dans $\bar{D}$ et vaut 0 sur ∂D.

Posons $V_n(z) = \sup(\tilde{V}(z)\ ,\ n^{-1} + n(|z|-1))$. Pour tout entier n la fonction V_n est sousharmonique sur un voisinage de $\bar{D}$. La suite V_n converge uniformément sur $\bar{D}$ vers $\tilde{V}$. Il existe donc, une suite (δ_n) de nombres positifs tels que $\tilde{V} = \sup_n (V_n - \delta_n)$ sur $\bar{D}$. Or, d'après le théorème 9, $V_n - \delta_n$ appartient à $\mathcal{P}(D)$, il en est donc de même de $\tilde{V}$.

Nous allons donner un autre critère d'appartenance au cône $\mathcal{P}(\Omega)$. Ce critère résulte d'un théorème de I. Cnop [6].

THEOREME 12 (I. Cnop). Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$. Il existe des fonctions $u_o, u_1, \ldots, u_n$ définies dans $\mathbb{C}^n \times \Omega$ vérifiant les conditions suivantes :

i) Pour tout $s \in \mathbb{C}^n$ les fonctions $u_i(s, \ )$ sont holomorphes dans Ω, $0 \le i \le n$.

ii) Pour tout $(s,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \Omega$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - s_i)\, u_i(s,\zeta) + \delta_\Omega(s) u_o(s,\zeta) \equiv 1$$

où $s = (s_1, \ldots s_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots \zeta_n)$ et $\delta_\Omega(s) = \inf((1+|s|^2)^{-1/2}, d(s,(\Omega)))$.

iii) Il existe un entier N et une constante $M > 0$ tels que

$$\delta_\Omega^N(\zeta)\, |u_i(s,\zeta)| \le M \quad \text{pour} \quad 0 \le i \le n \quad \text{et} \quad (s,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \Omega.$$

On en déduit le corollaire suivant voir [7] ou [25].

COROLLAIRE 13. Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$. Il existe une fonction f holomorphe dans Ω et un entier N tels que $\sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^N(z)\, |f(z)| < \infty$ et la fonction f n'est bornée au voisinage d'aucun point du bord de Ω.

Remarquons, en reprenant les calculs de I. Cnop, que lorsque Ω est borné, on trouve $N = 3n+4$. L'entier N qui intervient dans le corollaire est le même que celui du théorème.

L'étude faite ici se rapporte au cas où $N = 0$, ce qui signifie que le domaine est de type H^∞.

Du corollaire précédent, on déduit la proposition suivante [25].

PROPOSITION 14. Soit V une fonction plurisousharmonique dans un domaine d'holomorphie Ω, contenu dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que $V(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$ et que $\exp(-V)$ est lipschitzienne de rapport 1. Alors $V \in \mathcal{P}(\Omega)$. En particulier, la fonction $-\log \delta_\Omega(z)$ appartient à $\mathcal{P}(\Omega)$.

Nous allons appliquer les résultats précédents à l'étude des domaines de type H^∞.

THEOREME 15. Soit Ω un domaine contenu dans $\mathbb{C}^n$. Si V est une fonction p. s. h. dans Ω et bornée inférieurement, on pose

$$M(\Omega, V) = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1},\ z \in \Omega,\ w \in \mathbb{C},\ |w| < \exp(-V(z))\right\}.$$

Alors

a) Toute fonction de $H^\infty(M(\Omega,V))$ se prolonge en une fonction de $H^\infty(M(\Omega,V^1))$.

b) Si Ω est de type H^∞ ou si V tend vers l'infini au bord de Ω l'assertion, Ω de type H^∞, équivaut à $V \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Démonstration. a) Soit $f \in H^\infty(M(\Omega,V))$. Considérons le développement de f en série de Hartogs :

(1) $$f(z,w) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu(z) w^\nu .$$

Notons $R(z)$ le rayon de convergence de Hartogs de cette série, [19]. On a $-\log R(z) = \left(\overline{\lim_\nu}\ \dfrac{\log |h_\nu|}{\nu}\right)^*(z)$.

De plus, on sait que $R(z) \geq \exp(-V(z))$.

Or, pour tout $r < 1$, on a $\quad h_\nu(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(z, r\exp(-V(z))e^{i\theta}}{r^\nu \exp(-\nu V(z))e^{i\nu\theta}}\, i d\theta$.

D'où, si on suppose $\|f\|_\infty \leq 1$, $\quad |h_\nu(z)| \leq r^{-\nu}\exp(\nu V(z))$.

Par suite, en faisant tendre r vers 1, $|h_\nu(z)| \leq \exp(\nu V(z))$ et $\dfrac{\log|h_\nu|}{\nu} \leq V$. On en déduit que $\dfrac{\log|h_\nu|}{\nu} \leq V^1$, par définition de V^1.

Donc la série (1) converge uniformément sur tout compact de $M(\Omega,V^1)$; le résultat en découle.

b) Si $M(\Omega,V^1)$ est de type H^∞ on doit avoir d'après a) : $M(\Omega,V)=M(\Omega,V^1)$. Par suite $V=V^1$.

Réciproquement, supposons que Ω est de type H^∞ et que $V\in\mathcal{P}(\Omega)$. Montrons qu'alors $M(\Omega,V)$ est de type H^∞.

Soit (z_o,w_o) un point du bord de $M(\Omega,V)$ tel que $z_o\in\partial\Omega$. L'ouvert Ω étant de type H^∞, on peut trouver $f\in H^\infty(M(\Omega,V))$ indépendante de w et singulière en (z_o,w_o). Puisque $V\in\mathcal{P}(\Omega)$, on peut écrire $V=(\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\nu_k}\log|f_k|)^*$, ν_k étant une suite croissante d'entiers et $f_k\in H(\Omega)$.

Remarquons qu'on peut faire croître la suite ν_k arbitrairement vite car

$$\frac{1}{\nu_k}\log|f_k|=\frac{1}{2\nu_k}\log|f_k^2|.$$

On peut également supposer que $\overline{\lim\limits_k}\frac{1}{\nu_k}\log|f_k|=\sup\limits_k\frac{1}{\nu_k}\log|f_k|$.

Soit $\eta=\left\{z/\ V(z)>\sup\limits_k\frac{1}{\nu_k}\log|f_k|\right\}$. On sait que η est un ensemble négligeable.

Pour montrer que $M(\Omega,V)$ est de type H^∞ il nous suffit de construire une fonction de $H^\infty(M(\Omega,V))$ singulière en tout point (z_1,w_1) appartenant à la frontière de $M(\Omega,V)$ et tel que $z_1\in\Omega\backslash\eta$. On obtient ainsi un ensemble dense dans la partie de la frontière de $M(\Omega,V)$ qui se projette sur Ω.

Soit (λ_k) une suite de nombres strictement positifs telle que λ_k tend vers 0 quand k tend vers l'infini et $\sum\limits_k(1-\lambda_k)^{\nu_k}<\infty$. On vérifie que $g\in H^\infty(M(\Omega,V))$.

Posons $g(z,w)=\sum\limits_k(1-\lambda_k)^{\nu_k}f_k(z)\,w^k$.

Notons $R(z)$ le rayon de convergence de Hartogs pour g, on a

$$- \log R(z) = \left(\overline{\lim_k} \left[\log(1-\lambda_k) + \frac{\log |f_k|}{\nu_k}\right]\right)^* = V(z).$$

Mais pour $z \in \Omega \setminus \eta$ fixé, le rayon de convergence de la série considérée est égal à $V(z)$. Il en résulte que pour tout $z_1 \in \Omega\setminus\eta$ il existe un point (z_1,w_1) avec $|w_1| = \exp(-V(z_1))$ où g est singulière. En considérant les fonctions $g_\theta(z,w) = g(z,e^{i\theta}w)$ on voit qu'on peut construire une fonction holomorphe bornée singulière en (z_1,w_1) si $z_1 \in \Omega\setminus\eta$ et $|w_1| = \exp(-V(z_1))$.

Supposons à présent que Ω n'est pas de type H^∞ mais que V tend vers l'infini au bord de Ω. Alors l'ensemble des points (z,w) appartenant à la frontière de $M(\Omega,V)$ et tels que $z \in \Omega\setminus\eta$ est dense dans la frontière de $M(\Omega,V)$.
Or, d'après la construction précédente, pour chaque point du type considéré on sait construire une fonction bornée singulière en ce point. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 16. Soit Ω un domaine de type H^∞ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathring{\bar{\Omega}} = \Omega$.

Posons $M(D^q, V) = \{(z,u)/z \in D^q,\ u \in \mathbb{C},\ |u| < \exp(-V(z))\}$ où V est une fonction p. s. h. dans D^q, bornée inférieurement.

Soit Φ une application holomorphe ouverte de $M(D^q,V^1)$ dans $\mathbb{C}^n$.

Si $\Phi(M(D^q,V)) \subset \Omega$ alors $\Phi(M(D^q,V^1)) \subset \Omega$.

Démonstration. D'après la proposition 7 le domaine $\Phi^{-1}(\Omega)$ est de type H^∞. Par hypothèse, il contient $M(D^q,V)$. Le théorème précédent affirme que le plus petit domaine de type H^∞ contenant $M(D^q,V)$ est $M(D^q,V^1)$. Donc $\Phi^{-1}(\Omega) \supset M(D^q,V^1)$.

Il serait intéressant de savoir si cette propriété caractérise les domaines de type H^∞.

Donnons une autre condition nécessaire pour qu'un domaine Ω soit de type H^∞.

Notons $\delta_\Omega(z,z')$ la distance de $z\in\Omega$ au complémentaire de Ω suivant la direction $z'\in\mathbb{C}^n$, i. e. $\delta_\Omega(z,z')=\left\{\sup r,\ r>0 \text{ tel que } z+rz'D\subset\Omega\right\}$ [17].

PROPOSITION 17. <u>Si</u> Ω <u>est de type</u> H^∞ <u>la fonction</u> $-\log\delta_\Omega(z,z')$ <u>appartient</u> <u>à</u> $\mathcal{P}(\Omega\times\mathbb{C}^n)$.

Démonstration. On reprend l'idée de [17] p. 63.

Soit $F\in H^\infty(\Omega)$ singulière en tout point du bord de Ω. Posons

$$\tilde{\Omega}=\left\{(z,z',w)/z\in\Omega,\ z'\in\mathbb{C}^n,\ w\in\mathbb{C},\ |w|<\delta_\Omega(z,z')\right\}.$$

Définissons la fonction $G(z,z',w)=F(z+wz')$, G est holomorphe et bornée dans $\tilde{\Omega}$, de plus on a

$$G(z,z',w)=\sum_{q\geq 0}\frac{1}{q!}\frac{\partial^q G}{\partial w^q}(z,z',0)\,w^q.$$

Si $\delta_1(z,z')$ désigne le rayon de convergence de cette série on a

$$[-\log\delta_1(z,z')]^*=\left(\overline{\lim}\ \frac{1}{q}\log\left|\frac{1}{q!}\frac{\partial^q G}{\partial w^q}(z,z',0)\right|\right)^*=-\log\delta(z,z'),$$

car F est singulière en tout point du bord de Ω. Or $\|F\|\leq 1$ donc $\left|\frac{1}{q!}\frac{\partial^q G}{\partial w^q}(z,z',0)\right|\leq\delta^{-q}(z,z')$ et on peut remplacer $\overline{\lim}$ par un sup ; ce qui démontre la proposition.

J'ignore si la condition donnée ici est suffisante pour qu'un domaine soit de type H^∞.

18. CONSTRUCTION D'UN DOMAINE Ω_1 DANS $\mathbb{C}^3$, DE TYPE H^∞, TEL QUE Ω_1 N'EST PAS DENSE DANS LE SPECTRE DE $H^\infty(\Omega_1)$.

$M(D,V_o)$ étant le domaine construit au paragraphe 1, posons

$$\Omega_1=\left\{(z,u)/z=(z_1,z_2)\in M(D,V_o) \text{ et } |u|<\delta_{M(D,V_o)}(z)\right\}.$$

On a vu, proposition 14, que la fonction $-\log \delta_{M(D,V_o)}$ appartient à $\mathcal{P}(M(D,V_o))$ puisque $M(D,V_o)$ est un domaine d'holomorphie. Or la fonction $-\log \delta_{M(D,V_o)}$ tend vers l'infini quand z tend vers le bord de $M(D,V_o)$. Par suite, d'après le théorème 15, Ω_1 est de type H^∞.

On vérifie facilement que $\mathring{\bar{\Omega}}_1 = \Omega_1$.

Soit $f \in H^\infty(\Omega_1)$. La restriction de f à $M(D,V_o)$ appartient à $H^\infty(M(D,V_o))$. Donc, d'après l'étude faite au paragraphe 1, elle se prolonge en une fonction de $H^\infty(D^2)$ par suite les points de $D^2 \times \{0\} \setminus (\overline{M(D,V_o)} \times \{0\})$ donnent lieu à des homomorphismes de $H^\infty(\Omega_1)$ et ils n'appartiennent pas à l'adhérence de Ω_1 dans le spectre de $H^\infty(\Omega_1)$.

Pour ce domaine Ω_1, les restrictions des fonctions à la sous-variété $\{u = 0\}$ se prolongent. Nous avons ainsi un exemple de domaine de type H^∞ qui est H^∞ convexe et qui n'est pas complet pour la métrique de Carathéodory, cf. [15] et la deuxième partie de cet article.

5. Autres algèbres de fonctions analytiques.

Soient Ω un domaine d'holomorphie borné dans $\mathbb{C}^n$ et B une algèbre de fonctions holomorphes bornées dans Ω. On se pose le problème de l'existence d'une fonction de B dont Ω soit le domaine d'holomorphie.

Nous nous limiterons ici au cas où B est l'algèbre des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$ et holomorphe dans $\mathring{\bar{\Omega}}$. Nous munirons cette algèbre de la norme uniforme et on la notera $A(\bar{\Omega})$.

Construction d'un domaine Ω de type H^∞ tel que toute fonction de $A(\bar{\Omega})$ se

<u>prolonge analytiquement à un ouvert strictement plus grand.</u>

Soit (b_p) une suite dense sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$. On définit la fonction ψ dans D par $\psi(z) = \sum_p \lambda_p \log\left|\frac{z-b_p}{3}\right|$, (λ_p) étant une suite sommable de nombres strictement positifs. La fonction ψ est harmonique dans D et elle est sousharmonique dans un voisinage de $\bar{D}$.

Posons $\Phi(z) = \exp(\psi(z))$ et soit

$$\Omega = \left\{(z,w) \mid z\in D,\ w\in\mathbb{C},\ |w| < \exp(-\Phi(z))\right\}.$$

Puisque ψ est harmonique dans D, la fonction $\Phi \in \mathcal{P}(D)$. D'après le théorème 15 le domaine Ω est donc de type H^∞ ; de plus $\mathring{\bar{\Omega}} = \Omega$.

Pourtant toute fonction de $A(\bar{\Omega})$ se prolonge en une fonction de $A(\bar{D}^2)$. La méthode est semblable à celle du paragraphe 1.

Si $f \in A(\bar{\Omega})$ on a $f(z,w) = \sum_{\nu\geq 0} h_\nu(z)w^\nu$ avec $h_\nu \in A(\bar{D})$. En effet, Ω contient l'ouvert $\left\{(z,w) \mid z\in D,\ |w| < \exp(-1)\right\}$, ce qui permet de montrer que $h_\nu \in A(\bar{D})$ en utilisant la formule de Cauchy :

$$h_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=e^{-1}} \frac{f(z,w)}{w^{\nu+1}}\, dw.$$

On voit facilement que lorsque $\|f\| \leq 1$, alors $|h_\nu(z)| \leq (\nu\Phi(z))$ dans D. D'où l'on déduit par passage à la limite, puisque $\exp(\nu\Phi)$ est s. c. s., que $|h_\nu(b_p)| \leq \exp(\nu\Phi(b_p)) = 1$. Il en résulte que $|h_\nu| \leq 1$ partout dans $\bar{D}$. Donc la série définissant f converge uniformément sur tout compact de $\bar{D} \times D$. Or $\bar{\Omega}$ contient $S^1 \times \bar{D}$. En considérant la restriction de f à $S^1 \times S^1$ et en utilisant le fait que f se prolonge analytiquement à $\bar{D} \times D$ on voit que les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ pour $k \notin (\mathbb{Z}_+)^2$ sont nuls, et en résulte que $f \in A(\bar{D}^2)$.

Nous allons énoncer un théorème de prolongement qui rend compte du phénomène précédent.

THEOREME 19. Soit $M(\bar{D},S^1) = (\bar{D}\times\{0\}) \cup (S^1\times\bar{D}) \subset \mathbb{C}^2$ et soit K un voisinage dans $\bar{D}^2$ de $M(\bar{D},S^1)$. Alors toute fonction continue sur K holomorphe dans $\mathring{K}$ se prolonge en une fonction de $A(\bar{D}^2)$.

La démonstration est claire d'après l'exemple précédent.

Avant de terminer cette partie donnons un exemple d'un domaine Δ tel que, pour tout entier k, il existe une fonction appartenant à $A(\bar{\Delta}) \cap \mathscr{C}^k(\bar{\Delta})$ singulière en tout point du bord de Δ et pourtant toute fonction de $A(\bar{\Delta}) \cap \mathscr{C}^\infty(\bar{\Delta})$ se prolonge à un domaine strictement plus grand.

Posons $\Delta = \{(z,w)/(z,w)\in\mathbb{C}^2,\ |z|<|z|<|w|<1\}$. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\Delta}) \cap A(\bar{\Delta})$. On a $f(z,w) = \sum_{\nu\geq 0} h_\nu(z)\, w^\nu$ avec h_ν holomorphe dans $D\setminus(0)$ et $|h_\nu(z)| \leq C\,|z|^{-\nu}$. Or $h_\nu(z) = \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial w^\nu}(z,0)$ est une fonction bornée puisque $f \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\Delta})$. Donc $|h_\nu(z)| \leq C$ et h_ν est holomorphe dans D, d'où le prolongement de f à $D^2 \not\supseteq \Delta$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour prouver l'existence d'une fonction de $A^k(\bar{\Delta}) = A(\bar{\Delta}) \cap \mathscr{C}^k(\bar{\Delta})$, singulière en tout point du bord de Δ, nous allons munir l'algèbre $A^k(\bar{\Delta})$ de la norme de la convergence uniforme des fonctions ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k, et prouver que le spectre de cette algèbre de Banach se projette sur $\bar{\Delta}$ par l'application π qui à un homomorphisme χ associe $\pi(\chi) = (\chi(z),\chi(w))$.

Or on vérifie que pour tout homomorphisme χ de $A^k(\bar{\Delta})$ on a

$$|\chi(f)| \leq \sup_{(z,w)\in\bar{\Delta}} |f(z,w)|.$$

Pour tout entier n, posons $g_n(z,w) = z^{kn+1}w^{-n}$. On vérifie que $g_n \in A^k(\bar{\Delta})$ la norme uniforme de g_n est égale à 1. Il en résulte que $|\chi(g_n)| \leq 1$. Donc pour tout n, $|\chi(z)|^{kn+1} \leq |\chi(w)|^n$, d'où l'on déduit que $|\chi(z)| \leq |\chi(w)|$. Il en résulte que π est une application surjective de $SpA^k(\bar{\Delta})$ dans $\bar{\Delta}$. Or, à l'aide du théorème de Baire, on voit que si toutes les fonctions de $A^k(\bar{\Delta})$ se prolongent au voisinage d'un point $(z_o,w_o) \in \partial\Delta$, il existerait un voisinage fixe de ce point auquel elles se prolongeraient, ce voisinage serait contenu dans le spectre. D'où la contradiction.

II. ESPACES COMPLETS POUR LA METRIQUE DE CARATHEODORY.

Dans cette partie nous étudions une classe importante de domaines de type H^∞ : ceux qui sont complets pour la métrique de Carathéodory.

Rappelons la définition de cette distance.

Soit M une variété analytique complexe, on note $c_M(p,q) = \sup_{\|f\|\leq 1} \rho\,[f(p),f(q)]$, où $f \in H^\infty(M)$ et ρ désigne la métrique hyperbolique sur le disque unité [15] ; c_M est la pseudo-distance de Carathéodory sur M, c'est une distance si les fonctions de $H^\infty(M)$ séparent les points de M.

Nous replaçons cette notion, dans un cadre plus général : celui des distances sur le spectre d'une algèbre uniforme.

Soit A une algèbre uniforme, i. e. une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $f \in A$ on a $\|f\|^2 = \|f^2\|$. On sait qu'une telle algèbre, lorsqu'elle est semi-simple, se représente comme une algèbre de fonctions continues sur son spectre.

Etant donnés deux éléments p,q du spectre de A, on pose :

$$\gamma^A(p,q) = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(p) - f(q)| \quad ; \quad \alpha^A(p,q) = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f(q)=0}} |f(p)| \ ; \ c^A(p,q) = \sup_{\|f\|\leq 1} \rho(f(p),f(q))$$

où ρ désigne la distance hyperbolique sur le disque unité.

La proposition suivante montre comment ces trois distances sont reliées. Cette proposition est implicitement utilisée dans [5] pour montrer que la relation $\gamma^A(p,q) < 2$ est une relation d'équivalence sur le spectre de A ; nous reprenons la démonstration donnée dans [1] par Arenson.

PROPOSITION 1. Soit A une algèbre uniforme sur $\mathbb{C}$, (p,q) étant un couple de points du spectre de A, on a :

$$\gamma(p,q) = 2.\frac{1 - \sqrt{1-(\alpha(p,q))^2}}{\alpha(p,q)} \qquad \alpha(p,q) = \frac{\gamma(p,q)}{1 + \frac{(\gamma(p,q))^2}{4}}$$

$$c(p,q) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha(p,q)}{1-\alpha(p,q)}.$$

Démonstration [1]. Soit s la fonction définie comme suit sur l'intervalle $[0,1]$: $s(0) = 0$, $s(t) = \sup\{|\varphi(0) - \varphi(\tau)| / \varphi \in G(D),\ 0 \leq \tau < t\}$, où $G(D)$ désigne le groupe des automorphismes du disque unité.

Notons $W_1 = \{(f(p),f(q)) / \|f\| \leq 1\}$ et $W_2 = \{(\varphi(0), \varphi(\tau))\ ;\ \varphi \in G(D),\ \tau < \alpha(p,q)\}$

Nous allons montrer que $W_1 = W_2$, ce qui impliquera que : $\gamma(p,q) = s(\alpha(p,q))$.

Soit $(w,w') \in W_1$. Il existe $f \in A$, $\|f\| \leq 1$ telle que $f(p) = w$ et $f(q) = w'$.

Soit $\psi \in G(D)$ vérifiant $\psi(w) = 0$, $\psi(w') \geq 0$. Posons $g = \psi \circ f$, on a : $g(p) = 0$, $\tau = g(q) \geq 0$ et $\|g\| \leq 1$, donc $0 \leq g(q) \leq \alpha(p,q)$. On voit alors que pour $\varphi = \psi^{-1}$, $\varphi(0) = w$ et $\varphi(\tau) = w'$, par suite $W_1 \subset W_2$.

Réciproquement, si $(w,w') = (\varphi(0),\varphi(\tau))$ avec $\varphi \in G(D)$ et $\tau < \alpha(p,q)$, il existe $g \in A$ $\|g\| \leq 1$ $g(p) = 0$ $g(q) = \tau$; si on prend $f = \varphi \circ g$ on a : $f(p) = w$, $f(q) = w'$, d'où on déduit que $W_1 = W_2$.

Il suffit à présent de calculer la fonction s, ce qui est facile puisque on connaît l'expression des automorphismes analytiques de D. On trouve : $s(t) = 2\,\frac{(1-\sqrt{1-t^2})}{t}$, d'où l'expression de γ en fonction de α, les autres expressions s'en déduisent.

Remarquons que γ est la distance induite par la norme du dual de A sur le spectre de A. Les relations précédentes montrent que α et c sont aussi des distances sur le spectre de A. De plus, on voit que $\gamma(p,q) < 2$ équivaut à $c(p,q) < \infty$. Par suite l'inégalité trinagulaire pour c montre que la relation $\gamma(p,q) < 2$ est une relation d'équivalence sur le spectre de A. Les classes d'équivalence sont appelées parts de Gleason.

Dans la suite A sera une sous-algèbre fermée de $H^\infty(X)$, l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur un espace analytique X, munie $H^\infty(X)$ de la norme uniforme. Lorsque A sépare les points de X, les fonctions c, γ, α induisent des distances sur X, que nous noterons : c_X^A, γ_X^A, α_X^A. On écrira c_X, γ_X, α_X lorsque $A = H^\infty(X)$ ou lorsque aucune confusion ne sera à craindre.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> A <u>une sous-algèbre de</u> $H^\infty(X)$ <u>et</u> $p \in X$. <u>La fonction</u> $\alpha_X^A(p,\ )$ <u>est continue sur</u> X.

Démonstration. Soit $\alpha_X^A(p,z) = \sup\limits_{\substack{f(p)=0 \\ \|f\| \leq 1}} |f(z)|$. Lorsque X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, les inégalités de Harnack et le fait qu'on prend la borne supérieure d'une famille uniformément bornée montrent que $\alpha_X(p,\ )$ est localement lipschitzienne et par suite continue. On voit de même que $\alpha_X(p,\ )$ est continue lorsque X est une variété analytique, puisque localement on se ramène à un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Dans le cas d'un ensemble analytique, nous allons montrer d'abord la continuité de $\alpha_X^A(p,\ )$ au point p. D'après Hironaka-Rossi [12], il existe un voisinage U de p dans X, et une variété analytique complexe M ainsi qu'une application φ propre et surjective de M sur U. Supposons que $h(z) = \alpha_X(p,z)$ soit discontinue en p ; il existe alors un $\varepsilon > 0$ et une suite p_n de points de U convergeant vers p telle que $h(p_n) \geq \varepsilon$; φ étant surjective et propre il existe une suite $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{p}_n \in M$, vérifiant $\varphi(\tilde{p}_n) = p_n$ et $\tilde{p}_n$ convergeant vers $\tilde{p} \in M$ avec $\varphi(\tilde{p}) = p$. On a : $\alpha_X(p,p_n) = \alpha_X(\varphi(\tilde{p})\ ,\varphi(\tilde{p}_n)) \leq \alpha_M(\tilde{p}\ ,\ \tilde{p}_n)$. Or on a vu que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_M(\tilde{p}\ ,\ \tilde{p}_n) = 0$ puisque M est une variété analytique et que $\tilde{p}_n$ converge vers $\tilde{p}$, d'où l'on déduit la continuité de $\alpha_X(p,\ )$ au point p ; α_X étant une pseudo-distance, il en résulte que $\alpha_X(p,\ )$ est continue partout.

Ce dernier raisonnement, utilisant la résolution des singularités de [12] est semblable à celui utilisé par Barth [2] pour montrer la continuité de la distance de Kobayashi.

DEFINITION 3. [15]. <u>On dit que l'espace analytique</u> X <u>est</u> c_X^A <u>complet si toute boule fermée pour</u> c_X^A <u>est compacte dans</u> X <u>et si</u> c_X^A <u>est une distance</u>.

La proposition 1 montre qu'il est équivalent de dire que toute boule, pour γ_X^A, de rayon strictement inférieur à 2 est relativement compacte, ou que, p étant fixé, la fonction $\alpha_X^A(p,z)$ tend vers l'infini lorsque z tend vers l'infini, au sens du compactifié d'Alexandroff de X.

COROLLAIRE 4. <u>Si</u> X <u>est</u> c_X^A <u>complet, alors la distance</u> c_X^A <u>induit la topologie de</u> X.

Démonstration. On a vu que toute boule ouverte pour c_X^A est ouverte dans X

puisque $\alpha_X^A(p,\ )$ est continue. Soit $p\in X$ et U un voisinage de p dans X ; posons $\varepsilon = \min\limits_{q\in X\setminus U} c_X^A(p,q)$. L'espace X étant c_X^A complet, on a $\lim\limits_{q\to\infty} c_X^A(p,q) = \infty$, donc le minimum est atteint et $\varepsilon > 0$ car A sépare les points ; d'où il résulte que la boule de centre p et de rayon $\varepsilon/2$ est contenue dans U.

Remarque 5. Si A est une sous-algèbre de $H^\infty(X)$ c_X^A n'induit pas en général la topologie de X. En voici un exemple. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$, une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$ telle que $a_o = 0$ et $a_n > 0$ pour $n > 0$. Posons $X = D\setminus \{(a_n)_{n\geq 1}\}$ et soit A la restriction à X des fonctions de $H^\infty(D)$, constantes sur la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. On vérifie, en utilisant le fait que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'interpolation, que les fonctions de A séparent les points de X.

Si on choisit convenablement une suite (r_n) de nombres strictement positifs, tendant vers 0, on voit que la suite $(a_n + r_n)$ converge vers 0 pour la distance c_X^A. Il suffit en effet d'appliquer le lemme de Schwartz : si $g\in A$ vérifie $g(0) = 0$ et $\|g\| \leq 1$, alors $|g(a_n + r_n)| \leq r_n(1-a_n)^{-1}$ puisque $g(a_n) = 0$.

Il serait intéressant de savoir si, lorsque $A = H^\infty(X)$ sépare les points de X, la distance c_X induit la topologie de X.

On a toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 6. Si X est un ouvert relativement compact d'un espace de Stein M, alors c_X induit la topologie de X.

Démonstration. Soit $H(M)$ l'algèbre de Fréchet des fonctions holomorphes sur M, munie de la topologie de la convergence compacte. L'espace M est isomorphe au spectre de $H(M)$ muni de sa topologie faible puisque M est de Stein [11]. Donc la topologie de X est la moins fine rendant continues les restrictions à X des fonctions de $H(M)$; or $H(M)|X$ est inclus dans $H^{\infty}(X)$ et la distance c_X rend continues les fonctions de $H^{\infty}(X)$. Par suite la topologie induite par c_X est plus fine que celle de X, en utilisant la proposition 2 on voit qu'elles coïncident.

Nous verrons plus loin que la proposition précédente reste vraie lorsque X est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $H^{\infty}(X)$ sépare les points de X.

DEFINITION 7. $\mathcal{A}$ étant une famille de fonctions holomorphes sur un espace analytique X, nous dirons que X est $\mathcal{A}$ convexe si, pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble :

$$\hat{K}_{\mathcal{A}} = \left\{ z/z \in X \quad |f(z)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{A} \right\}$$

est compact.

PROPOSITION 8. Si X est un espace analytique C_X^A complet, alors X est A-convexe ; en particulier X est un espace de Stein.

Démonstration. Soit K un compact de X. Fixons $p \in X$. La fonction $\alpha_X^A(p\ ,\ )$, étant continue, atteint son maximum r sur K ; donc K est contenu dans la boule B, de centre p et de rayon r, pour la distance α.

Or,

$$\hat{B}_A = \left\{ z/\ |f(z)| \leq \sup_{x \in B} |f(x)|,\ f \in A \right\} \subset \left\{ z/\ |f(z)| \leq r\ ,\ \|f\| \leq 1\ ,\ f(p) = 0\ \ f \in A \right\} = B,$$

et par hypothèse B est compact, donc $\hat{K}_A \subset \hat{B}_A = B$ est compact.

En particulier $H(X)$ sépare les points de X et X est $H(X)$-convexe ; on montre alors que $H(X)$ contient des coordonnées locales [11] et par suite X est un espace de Stein.

REMARQUE 9. Si X est c_X complet, et que pour tout point $x \in X$ $H^\infty(X)$ contient des coordonnées locales en x, alors X est $H^\infty(X)$-convexe dans le spectre de $H^\infty(X)$. En effet, soit $\chi \in \mathrm{Sp}H^\infty(X)$ avec $|\chi(f)| \leq \|f\|_K$, K étant un compact de X. D'après la proposition 8, on peut supposer que $K = \hat{K}_{H^\infty}$. Le théorème d'Oka [11] permet d'affirmer qu'on peut approcher toute fonction holomorphe sur X par des fonctions de $H^\infty(X)$, et cela uniformément sur K. Ceci permet de prolonger χ en un homomorphisme de $H(X)$. Comme X est un espace de Stein (proposition 8), χ est l'évaluation en un point de $\hat{K}_\infty = K$, d'où le résultat.

COROLLAIRE 10. Soit Ω un domaine étalé sur $\mathbb{C}^n$, si Ω est c_Ω^A complet, alors il existe une fonction $f \in A$ dont Ω soit le domaine d'holomorphie.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'un espace X, c_X^A complet, est complet au sens de Cauchy pour la distance c_X^A. Considérons l'enveloppe d'holomorphie $E(\Omega,A)$ de Ω pour A, cf. [19] page 90 ; puisque A sépare les points de Ω, Ω s'injecte dans $E(\Omega,A)$, identifions-le à son image. Soit ζ un point du bord de Ω dans $E(\Omega,A)$, les fonctions de A se prolongent au voisinage de ζ. Pour toute suite (z_n) de points de Ω convergeant vers ζ, le théorème de Montel permet d'affirmer que (z_n) converge vers ζ pour la topologie induite par γ^A sur le spectre de A. Par suite Ω ne serait pas fermé dans le spectre de A muni de la distance γ^A, ce qui contredirait l'hypothèse Ω est c_Ω^A complet.

PROPOSITION 11. Soient (X,A) et (Y,B) deux espaces analytiques respectivement c_X^A et c_Y^B complets, et soit Φ une application analytique $\Phi : X \to Y$ telle que $B \circ \Phi \subset A$. Alors l'espace $X_1 = \Phi^{-1}(Y)$ est $c_{X_1}^{A_1}$ complet, A_1 désignant l'algèbre

<u>restriction de</u> A <u>à</u> X_1.

Démonstration. $c_Y^B(\Phi(p)\ ,\ \Phi(q)) = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} \rho(f(\Phi(p)),f(\Phi(q))) \leq c_X^A(p,q)$, puisque $B \circ \Phi \subset A$. Soit $p \in X_1$. Il est clair que $c_X^A(p,\ )$ est une fonction qui prolonge $c_{X_1}^{A_1}(p,\ )$, par suite, il nous suffit de prouver que $B_1(p,r) = B(p,r) \cap X_1$ est compact. Soit $(z_n) \in B_1(p,r)$. La première inégalité montre que la suite $\Phi(z_n)$ appartient à la boule de centre $\Phi(p)$ et de rayon r contenue dans Y. L'hypothèse de complétion des espaces (X,A) et (Y,B) montre qu'il existe une sous-suite (z_{n_i}) extraite de (z_n) qui converge vers $z_o \in X$ et telle que $\Phi(z_{n_i})$ converge vers $\zeta_o \in Y$. Il est clair alors que $\Phi(z_o) = \zeta_o$ et que par suite $z_o \in X_1$. Le résultat s'en déduit.

En particulier, si X et Y sont respectivement c_X et c_Y complets, pour toute application holomorphe $\Phi : X \to Y$, l'espace $X_1 = \Phi^{-1}(Y)$ est c_{X_1} complet. Remarquons que, pour deux algèbres A et A_1 telles que $A \subset A_1 \subset H^\infty(X)$, si X est c_X^A complet, il est $c_{X_1}^{A_1}$ complet. D'où l'intérêt, étant donné un espace X, de trouver une sous-algèbre A de $H^\infty(X)$, aussi petite que possible, qui en fasse un espace c_X^A complet. Nous allons donner quelques exemples.

12. EXEMPLES D'ESPACES ANALYTIQUES X, c_X COMPLETS.

a) Soit Ω un domaine strictement pseudo-convexe, à frontière de classe $\mathscr{C}^2$, dans une variété de Stein M. Si H désigne l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}$ alors Ω est c_Ω^H complet. En effet, $\bar{\Omega}$ admet une base de voisinages d'holomorphie, et d'après Rossi [22] th. 5.6, tout point du bord de Ω est pic pour une fonction de H. Par suite, p étant fixé dans Ω, $\alpha_\Omega^H(p,z)$ tend vers 1 lorsque z tend vers le bord de Ω.

b) Un domaine de Siegel S de type II est c_S^A complet, A désignant ici l'algèbre des fonctions holomorphes dans S continues dans $\bar{S}$ et bornées.

Rappelons qu'un domaine de Siegel S de type II est défini de la manière suivante [20] : $S = \left\{(z,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \text{ , } \operatorname{Im} z - F(u,u) \in V\right\}$ où V est un cône convexe saillant dans R^n et F une forme V-hermitienne. Pour les propriétés des domaines de Siegel, on renvoie à [20] et [14].

Soit (z^o,u^o) un point du bord de S, on a alors $\operatorname{Im} z^o - F(u^o,u^o) \in \partial V$. L'ensemble V étant convexe, il existe une forme linéaire strictement positive sur $\overset{o}{V}$ et prenant la valeur 0 au point $\operatorname{Im} z^o - F(u^o,u^o)$. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n} \in R^n$ qui définit cette forme linéaire. Posons $h(z,u) = \exp\left[i(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k)\right]$. La fonction h appartient à A, elle est de module inférieur à 1 sur S car $F(u,u) \in V$ et V est convexe. Soit Φ un automorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, dont la restriction à S est un automorphisme de S qui vérifie : $\Phi(z^o,u^o) = (i(z^o - F(u^o,u^o)),0)$. La fonction $h \circ \Phi$ appartient à A, de plus $|(h\circ\Phi)(z^o,u^o)| = 1$ et $|h \circ \Phi| \leq 1$ sur S. Il en résulte que pour toute suite de (z^p , u^p) de points de S, convergeant vers (z^o , u^o), $\alpha_S^A(p , (z^p,u^p))$ tend vers 1, p étant un point fixe dans S. Supposons, à présent, que la suite $(z^p , u^p) \in S$ tend vers l'infini. Nous allons montrer que $\alpha_S^A(p , (z^p,u^p))$ tend vers 1. On se limitera au cas où $V \subset (R_+)^n$, ce qui ne limite pas la généralité. Si l'une des suites de coordonnées $(z_k^p)_p$ tend vers l'infini, on voit que la fonction f_k, définie par $f_k(z,u) = \dfrac{z_k}{z_k+1}$ appartient à A et que son module tend vers 1 sur la suite $(z^p)_p$.

Si pour tout k, $1 \leq k \leq n$, $|z_k^p| \leq M$ indépendamment de $p \in N$, on considère alors les automorphismes Φ_p tels que $\Phi_p(z^p,u^p) = i(\operatorname{Im} z^p - F(u_p,u_p),0) = i(y^p,0)$. L'une des suites $(y_k^p)_p$ tend vers l'infini quand p tend vers l'infini ; posons alors

$f_k(z,u) = \frac{z_k}{z_k+i}$, on a $\sup_p |f_p(\Phi_p(z_p,u_p))| = 1$. En choisissant convenablement Φ_p, on a $f_p \circ \Phi_p \in A$. Ces remarques montrent que $\alpha_S^A(p\ ,\ (z^p,u^p))$ tend vers 1, lorsque (z^p,u^p) tend vers l'infini.

Ajoutons qu'une démonstration semblable permet de voir que tout domaine Ω convexe dans $\mathbb{C}^n$ et différent de $\mathbb{C}^n$ est c_Ω^A complet.

c) Tout domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ qui est homogène borné est c_Ω complet.

En effet, on sait d'après le théorème de Piatetsky-Shapiro, [14] [20], que pour tout domaine homogène borné de $\mathbb{C}^n$, il existe un domaine de Siegel S de type II, et une application biholomorphe $\Phi : \Omega \to S$. En remarquant que $\alpha_\Omega(p,q) = \alpha_S(\Phi(p),\Phi(q))$ on voit d'après l'exemple b) que Ω est c_Ω complet.

d) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\Omega = \left\{z \in \Omega' / |f_i(z)| < 1,\ i \in I\right\}$ où Ω' est un ouvert contenant $\overline{\Omega}$ et f_i sont des fonctions holomorphes dans Ω', le domaine Ω est alors c_Ω^H complet. On dit que Ω est un polyèdre généralisé. La démonstration est faite dans [15]. Avant de donner quelques applications nous allons dresser une liste de contre-exemples qui éclairent la notion d'espace c_X complet.

13. QUELQUES CONTRE-EXEMPLES.

i) Il ne suffit pas qu'un domaine Ω soit H^∞-convexe pour être c_Ω complet Cauchy

Soit $\Omega = M(D,V_o)$ le domaine introduit au paragraphe I, c'est un domaine de Runge borné dans $\mathbb{C}^2$, il est donc H^∞ convexe ; par contre il n'est pas égal à son enveloppe d'holomorphie bornée $E_\infty(H(D,V))$.

D'après le corollaire 10, il n'est pas c_Ω complet, même au sens de Cauchy. Ceci répond négativement à une question de S. Kobayashi [15] p. 56.

ii) Si $(\Omega_n)_{n\in N}$ est une suite de domaines, Ω_n étant c_{Ω_n} complet, alors le domaine $\Omega = \widehat{\bigcap_n \Omega_n}^{\circ}$ n'est pas toujours c_Ω complet.

Prenons pour Ω_n le disque unité dont on a enlevé n disques 2 à 2 disjoints de centre $c_p > 0$ et de rayon r_p, $1 \le p \le n$. Zalcman a montré [28] que pour le domaine $\Omega = \widehat{\bigcap \Omega_n}^{\circ}$ ainsi obtenu, la fibre $\mathfrak{M}_o$ du spectre de $H^\infty(\Omega)$ n'est pas pic si la série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{c_j}$ converge. On verra dans la proposition 14 que dans ces conditions Ω n'est pas c_Ω complet. Il est clair pourtant que chaque Ω_n est c_{Ω_n} complet.

iii) Le fait d'être complet n'implique pas que le bord du domaine soit régulier. Donnons un exemple d'un domaine Ω borné dans C^n, c_Ω complet, tel que $\overline{\Omega}$ ne possède pas une base de voisinages qui soient des domaines d'holomorphie.

Soit $(a_p)_{p\in N}$ une suite dense sur le cercle unité. On définit dans D une fonction φ en posant : $\varphi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \log \left|\frac{(z-a_p)}{3}\right|$, λ_p étant une suite sommable de nombres strictement positifs. Notons $V = \exp(\varphi)$ et Ω le domaine de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$\Omega = \left\{(z,w)/(z,w)\in C^2\ ,\ |z| < 1\ ,\ |w| < \exp(-V(z))\right\}.$$

La fonction φ étant harmonique dans D, il existe une fonction u holomorphe dans D telle que $\varphi = \operatorname{Re} u$. Posons $g = \exp(u)$. On a alors : $|g| = \exp(\varphi) \le 1$.

Soit $(z_o,w_o) \in \partial\Omega$. Si $|z_o| = 1$, $\alpha(0\ ,\ (z,w))$ converge vers 1 lorsque (z,w) tend vers (z_o,w_o). Si $|z_o| < 1$, alors $|w_o|\exp(|g|(z_o)) = 1$. Or $|w|\exp(|g|) = \sup_{k,\lambda} |f_{k,\lambda}|$, où $f_{k,\lambda}(z,w) = \lambda w \sum_{q\le k} \frac{g^q}{q!}$, avec $f_{k,\lambda}(0) = 0$ et $\|f_{k,\lambda}\| \le 1$. Il en résulte que $\alpha_\Omega(0\ ,\ (z,w))$ converge vers 1 lorsque (z,w) tend vers (z_o,w_o).

Le choix de la suite $(a_p)_{p\in N}$ permet de vérifier que $\overline{\Omega}$ n'admet pas une base de voisinages qui soient des domaines d'holomorphie.

Nous allons étudier plus précisément le cas où Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, non nécessairement borné. Nous nous limiterons à la situation où $A = H^{\infty}(\Omega)$.

Il est bien connu que $H^{\infty}(\Omega)$ contient des fonctions non constantes si et seulement si $\gamma(\mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$, où γ désigne la capacité analytique.

En reprenant une idée de J. Wermer pour l'algèbre $A(\bar{\Omega})$, on voit que lorsque $H^{\infty}(\Omega)$ contient une fonction non constante alors les fonctions holomorphes bornées dans Ω séparent les points de Ω. En effet, si f_o appartenant à $H^{\infty}(\Omega)$ est non constante, il existe deux points a et b dans Ω tels que $f_o(a) \neq f_o(b)$. Définissons :

$$f_1(z) = (f_o(z) - f_o(a))(z-a)^{-1} \quad , \quad f_1(a) = f_o'(a) \quad , \quad f_1(\infty) = 0 \ ;$$
$$f_2(z) = (f_o(z) - f_o(b))(z-b)^{-1} \quad , \quad f_2(b) = f_o'(b) \quad , \quad f_2(\infty) = 0 .$$

On vérifie que f_1, f_2 appartiennent à $H^{\infty}(\Omega)$, et que les fonctions f_o, f_1, f_2 séparent les points de Ω. Lorsque le domaine Ω est borné, le spectre de $H^{\infty}(\Omega)$ se projette sur $\bar{\Omega}$, en faisant correspondre à $\chi \in \mathrm{Sp}H^{\infty}(\Omega)$ le point $\chi(z)$. Si Ω est non borné le spectre de $H^{\infty}(\Omega)$ se projette également sur $\bar{\Omega}$. En effet, pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}H^{\infty}(\bar{\Omega})$, il existe un point $\zeta \in \bar{\Omega}$ tel que $\chi(f) = f(\zeta)$ si $f \in H^{\infty}(\Omega)$ et f est holomorphe au voisinage de ζ. On notera $\mathfrak{M}_{\zeta}$ l'ensemble des homomorphismes qui se projettent ainsi en ζ.

On dira que la fibre $\mathfrak{M}_{\zeta}$ est un ensemble pic, s'il existe $f \in H^{\infty}(\Omega)$ telle que $\hat{f}_{|\mathfrak{M}_{\zeta}} = 1$ et $|\hat{f}| < 1$ sur $\mathrm{Sp}H^{\infty}(\Omega) \setminus \mathfrak{M}_{\zeta}$, $\hat{f}$ désigne la transformée de Gelfand de f.

Ces préliminaires acquis, nous pouvons annoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 14. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\gamma(\mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Ω est c_Ω complet Cauchy.

ii) Pour tout $\lambda \in \partial\Omega$ la fibre $\mathfrak{M}_\lambda$ est pic.

iii) Dans le spectre de $H^\infty(\Omega)$ la part de Gleason contenant Ω est égale à Ω.

iv) Ω est c_Ω complet.

v) Si $(z_n)_n$ converge vers $\zeta \in \partial\Omega$, il existe $f \in H^\infty(\Omega)$ avec $f(0) = 0$, $\|f\|_\infty \leq 1$ et $\sup_n |f(z_n)| = 1$.

On suppose $0 \in \Omega$.

vi) Soit $0 < a < 1$. Pour tout $\lambda \in \partial\Omega$, notons $E_{n,\lambda} = \{z / a^{n+1} \leq |z-\lambda| \leq a^n\}$, alors

$$\sum_n a^{-n} \gamma(E_n \quad \Omega) = +\infty.$$

Pour montrer ces équivalences, nous utilisons essentiellement le théorème suivant dû à Gamelin-Garnett [10].

THEOREME 15. Si $\mathfrak{M}_\lambda$ n'est pas pic, il existe un homomorphisme $\varphi_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda$ tel que : pour tout $\varepsilon > 0$, si $P_\varepsilon = \{z \in \Omega / c_\Omega(\varphi_\lambda, z) < \varepsilon\}$, alors

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(P_\varepsilon \cap \Delta(\lambda,\delta))}{(\Delta(\lambda,\delta))} = 1$$

où m désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}$ et $\Delta(\lambda,\delta)$ le disque de centre λ et de rayon δ.

Démonstration de la proposition 14.

i) $\Rightarrow$ ii). Soit (ε_n) une suite de nombres strictement positifs tendant vers zéro. D'après le théorème 15, si $\mathfrak{M}_\lambda$ n'est pas pic, il existe $z_n \in P_{\varepsilon_n} \cap \Delta(\lambda, n^{-1})$.

Donc la suite z_n converge vers φ_λ pour la topologie forte sur le spectre de $H^\infty(\Omega)$. L'espace Ω étant complet au sens de Cauchy, pour la distance c_Ω, il est fermé dans le spectre muni de la topologie forte. Or $\varphi_\lambda \notin \Omega$, d'où la contradiction.

ii) $\Rightarrow$ iii). Nous allons montrer que pour tout $\chi \in \mathrm{SpH}^\infty(\Omega)$, différent de l'évaluation en un point de Ω, $\alpha(0,\chi) = 1$, ce qui impliquera que $P = \Omega$, où P désigne lapart de Gleason contenant Ω. Il existe $\lambda \in \overline{\Omega}$ tel que $\chi \in \mathfrak{M}_\lambda$. Puisque χ n'est pas l'évaluation en un point de Ω il en résulte que $\lambda \in \partial\Omega$. Par suite, d'après ii), $\mathfrak{M}_\lambda$ est pic, i. e. il existe $f \in H^\infty(\Omega)$ vérifiant $f(0) = 0$, $\|f\| \leq 1$ et $\hat{f}_{|\mathfrak{M}_\lambda} = 1$. Donc $\alpha(0,\chi) = 1$.

iii) $\Rightarrow$ iv). On va montrer que P, la part de Gleason contenant Ω, est toujours complète, i. e. que toute boule de rayon $r < 2$, pour la distance induite par la norme du dual, est compacte pour la topologie de Gelfand. Nous verrons plus loin que cette topologie coïncide sur Ω avec celle de Ω.

Considérons l'ensemble $\left\{\chi \mid \|\chi-\chi_0\| \leq r < 2\right\}$, il est faiblement compact et d'après le théorème de Hahn-Banach il est faiblement fermé. D'où il résulte que lorsque $\Omega = P$, Ω est c_Ω complet.

iv) $\Rightarrow$ i). C'est évident, car la topologie induite par c_Ω est celle de Ω d'après le lemme 16.

ii) $\Rightarrow$ v). Soit $(z_n)_n$ convergeant vers $\zeta \in \partial\Omega$. Puisque $\mathfrak{M}_\zeta$ est pic, il existe $f \in H^\infty(\Omega)$ vérifiant : $\hat{f}_{|\mathfrak{M}_\zeta} = 1$, $\|f\| \leq 1$ et $f(0) = 0$. On ne peut avoir $|f(z_n)| \leq r < 1$ pour tout n, car pour $\chi \in \overline{\{z_n\}} \cap \mathfrak{M}_\zeta$ on n'aurait pas $\hat{f}(\chi) = 1$.

v) $\Rightarrow$ iv). En effet $\alpha(0,z)$ tend vers 1 quand z tend vers le bord de Ω.

La condition vi) est équivalente à ii) d'après le théorème de Gamelin-Garnett [10]. Cette condition permet de construire das domaines Ω, c_Ω complets, tels que $\mathbb{C} \setminus \Omega = E$ soit un ensemble complètement discontinu.

Nous avons utilisé dans la démonstration de iii) $\Rightarrow$ iv) le fait que la topologie de Ω est induite par la distance c_Ω ; nous allons montrer qu'elle est induite par la topologie de Gelfand sur le spectre, ce qui permettra de conclure à l'aide de la proposition 2.

LEMME 16. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, tel que $\gamma(\mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$, alors Ω est homéomorphe à son image dans le spectre de $H^\infty(\Omega)$ muni de sa topologie de Gelfand.

Démonstration. Soit $\zeta \in \partial\Omega$, les propriétés de la capacité analytique montrent qu'il existe un voisinage de ζ, $D(\zeta,r)$, tel que $\gamma(\mathbb{C} \setminus \Omega \cup D(\zeta,r)) > 0$. Donc $H^\infty(\Omega \cup D(\zeta,r))$ sépare les points de $\Omega \cup D(\zeta,r)$. En considérant Ω comme un ouvert de la sphère de Riemann, on voit qu'on peut séparer tout point $p \in \Omega$ d'un voisinage du bord de Ω dans la sphère de Riemann.

APPLICATIONS AU PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Nous allons montrer un théorème qui généralise certains résultats de Kwack [16]. Les méthodes employées ici sont entièrement différentes.

THEOREME 17. Soit U un domaine étalé sur $\mathbb{C}^n$ et Φ une application holomorphe de U dans un domaine Ω qui vérifie l'une des conditions suivantes :

a) Ω est un ouvert strictement pseudo-convexe, à frontière $\mathscr{C}^2$, contenu dans une variété de Stein ;

b) Ω est un polyèdre généralisé ;

c) Ω est un ouvert c_Ω complet contenu dans $\mathbb{C}$.

<u>Alors</u> Φ <u>se prolonge en une application</u> $\tilde{\Phi}$, <u>holomorphe, de</u> $E_\infty(U)$ <u>dans</u> Ω.

Démonstration. Considérons l'application $\Phi^* : A \to H^\infty(U)$ qui à $f \in A$ associe la fonction $f \circ \Phi$; $A = H(\bar{\Omega})$ dans les cas a) et b) et $A = H^\infty(\Omega)$ dans le cas c).

Soit Φ_* l'application transposée de Φ^* restreinte à $SpH^\infty(U)$. On a $\Phi_* : SpH^\infty(U) \to SpA$ et $\Phi_*(\chi)f = \chi(f o \Phi)$. Si ε_z désigne l'évaluation au point z on a $\Phi_*(\varepsilon_z) = \varepsilon_{\Phi(z)}$ car A sépare les points de Ω. De plus si χ_1 et χ_2 appartiennent à une même part de Gleason dans le spectre de $H^\infty(U)$, alors $\Phi_*(\chi_1)$ et $\Phi_*(\chi_2)$ appartiennent à une même part dans SpA. En effet

$$\|\Phi_*(\chi_1) - \Phi_*(\chi_2)\| = \sup_{\substack{f \in A \\ \|f\| \leq 1}} |\chi_1(f o \Phi) - \chi_2(f o \Phi)| \leq \|\chi_1 - \chi_2\| < 2.$$

Dans les cas a) et b) le spectre de $H(\bar{\Omega})$ s'identifie avec $\bar{\Omega}$. De plus, pour tout point de $\partial\Omega$, il existe une fonction de $H(\bar{\Omega})$ non constante qui atteint son maximum en ce point. Par suite, la part de Gleason contenant Ω s'identifie à Ω.

Dans le cas c) la proposition 14 montre que $P(\Omega)$ est isomorphe à Ω. Par suite, dans les trois cas Φ_* envoie $P(U)$ (la part de Gleason contenant U) dans Ω.

Soit π l'application canonique de $E_\infty(U)$ dans $SpH^\infty(U)$. Il est clair que $\pi(E_\infty(U)) \subset P(U)$. Donc $\Phi_*(\pi(E_\infty(U)) \subset \Omega$. Posons $\tilde{\Phi} = \Phi_* o \pi$.

L'application $\tilde{\Phi}$ est holomorphe car $f(\tilde{\Phi}(z)) = f(\Phi(z))$ si $z \in E_\infty(U)$ et $f \in A$; or dans les trois cas considérés A contient des coordonnées locales. Il est clair que $\tilde{\Phi}$ prolonge Φ. Remarquons que nous n'avons pas supposé que $H^\infty(U)$ sépare les points de U.

H. Kwack a démontré le théorème 17 dans le cas a) en utilisant un lemme de prolongement de Griffiths. Il obtient l'existence de $\tilde{\Phi}$ dans l'enveloppe d'holomorphie de U et non dans $E_\infty(U)$.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant dû à B. Schiffman [13].

LEMME 18. Soient V un ouvert de $\mathbb{C}^n$, E un fermé de V et f une fonction holomorphe dans $V \setminus E$. La fonction f admet un prolongement analytique à V si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

a) $H^{2n-2}(E) = 0$

b) f est bornée et $H^{2n-1}(E) = 0$

c) f admet un prolongement continu dans V et $H^{2n-1}(E) < \infty$.

H^k désigne la mesure de Hausdorff d'ordre k.

THEOREME 19. Soit M une variété analytique de dimension n, et soit E un fermé de M avec $H^{2n-1}(E) = 0$, si Φ est une fonction holomorphe de $M \setminus E$ dans un espace analytique X, c_X complet, alors Φ se prolonge en une application holomorphe de M dans X.

Ce théorème a été démontré par Kwack [16] lorsque E est un ensemble analytique et X un espace hyperbolique strictement pseudo-convexe.

Démonstration. En se limitant à un ouvert V de M tel que $H^\infty(V)$ sépare les points de V, on va montrer que $\Phi : V \setminus E \to X$ se prolonge en une application holomorphe de V dans X, ce qui prouvera le théorème. Considérons l'application $\Phi^* : H^\infty(X) \to H^\infty(V \setminus E)$. D'après le lemme 18, l'espace $H^\infty(V \setminus E)$ est isomorphe à

$H^{\infty}(V)$. En particulier la part de Gleason contenant $V \setminus E$ contient V. Soit l'application $\Phi_* : V \to P(X)$, où $P(X)$ désigne la part de Gleason contenant X. L'application Φ_* est fortement continue lorsqu'on munit V de la topologie forte induite par celle de $SpH^{\infty}(V)$. De plus $V \setminus E$ est dense dans V. Par suite, $\Phi_*(V) \subset \overline{X}$, adhérence forte de X. Or X, étant c_X complet, est fermé dans $P(X)$. Donc $\Phi_*(V) \subset X$. L'application Φ_* est un prolongement de Φ, on voit en appliquant à nouveau le lemme 18 que Φ_* est analytique.

REMARQUE. La démonstration qui précède et le lemme 18 suggèrent le résultat suivant : soient M et Y deux variétés analytiques, F un fermé de M avec $H^{2n-2}(F) = 0$ et $n = \dim M$, si Y est de Stein toute application holomorphe $\Phi : M \setminus F \to Y$ admet un prolongement analytique $\tilde{\Phi} : M \to Y$.

Il suffit en effet de remarquer [11] que le spectre de l'algèbre de Fréchet $H(Y)$ s'identifie avec Y.

[1] ARENSON, E. L. Gleason parts... Sibirskii Mat. Z. 13 (1972), 1203-1212.

[2] BARTH, T. J. The Kobayashi distance indues the St. topology. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 439-441.

[3] BRELOT, M. et CHOQUET G. J. Madras Univ. 27 (1957), p. 277.

[4] BREMMERMANN, M. F. Math. Annalen 136 (1958), 173-186.

[5] BROWDER, A. Introduction to function algebras. W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).

[6] CNOP, I. Spectral study of holomorphic functions with bounded growth. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 293-310.

[7] FERRIER, J.-P. Spectral theory and complex analysis. North-Holland Publ. Cny, (1973).

[8] FUKS, B. A. Special chapters in the theory... Transl. Math. Monographs, vol. 1

[9] FUNCTION ALGEBRAS, Edited by F. T. Birtel, Scott, Foresman and Cny, Van Nostrand Cny 1966.

[10] GAMELIN, T. and GARNETT, J. Distinguished homomorphisms and fiber algebras. Amer. J. Math. 92 (1970).

[11] GUNNING, R. C. and ROSSI, H. Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Inc. 1965.

[12] HIRONAKA, H. and ROSSI H. On the equivalence of embeddings... Math. Ann. 156 (1964), 313-333.

[13] HORMANDER, L. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand Cny 1966.

[14] KANEYUKI, S. Homogeneous bounded domains... Lecture Notes in Math. 241, Springer Verlag 1971.

[15] KOBAYASHI, S. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. M. Dekker Inc. New York 1970.

[16] KWAK, M. H. Mappings into hyperbolic spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973).

[17] LELONG, P. Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, Presses de l'Université (1968).

[18] NARASHIMAN, R. Introduction to the theory of analytic spaces. Lecture Notes, Springer Verlag 1966.

[19] NARASHIMAN, R. Several complex variables. Chicago, Lectures in Math. 1971.

[20] PIATETSKY-SHAPIRO, I. I. Géométrie des domaines classiques... Paris, Dunod, 1966.

[21] REIFFEN, H. J. Die Caratheodorysche Distanz und... Math. Annalen 161 (1965), 315-324.

[22] ROSSI, H. Holomorphically convex sets in several complex variables. Ann. Math. 74 (1961), 470-493.

[23] SHIFFMAN, B. On the removal of singularities of analytic sets. Michigan Math. J. 15 (1968), 111-120.

[24] SIBONY, N. Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (1972), 973-976.

[25] SIBONY, N. Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de C^n. A paraître.

[26] STEIN, E. M. Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Math. Notes, Princeton Univ. Press 1972.

[27] STOUT, E. L. The theory of uniform algebras. Bogden and Quigley, In. Publ. 1971

[28] ZALCMAN, L. Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity. Transl. Amer. Math. Soc.