PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

83-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1981-1982

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) :

Allouche	54H20 - 68D99
Arocena I	43A35 - 47B35
Arocena II	43A35 - 47B35 - 47A20
Bourdaud	47B47 - 35S05 - 46E35 - 42B20
Bourdaud-Meyer	35S05
David	42B20
Kahane	60J30 - 60J65
Yu	30B50

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

83-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1981-1982

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

ITERATIONS DE FONCTIONS UNIMODALES ET SUITES ENGENDREES PAR AUTOMATES

Jean-Paul ALLOUCHE

Le but de cet exposé était d'annoncer des résultats obtenus par Michel Cosnard et l'auteur, dont on pourra trouver un résumé complet dans [2] et les démonstrations détaillées dans [3]. Nous nous contenterons ici d'indiquer rapidement comment un certain ensemble de suites binaires est relié au problème de l'itération des fonctions et de montrer le rôle fondamental joué par certaines suites automatiques baptisées q-miroirs.

I. ITERATION DE FONCTIONS ET SUITES BINAIRES

Pour étudier les itérées d'une fonction, il est classique d'associer à la trajectoire de chaque point une suite à valeurs dans un ensemble fini. Ici on se donne un réel c dans $]0,1[$, une fonction f unimodale, c'est-à-dire continue de $[0, 1]$ dans lui-même, strictement croissante sur $[0,c[$, strictement décroissante sur $]c,1]$ et telle que $f(1) = 0$ et $f(c) = 1$. Puis on associe à chaque point x la suite $(\gamma(f^n(x)))_n$ où γ vaut 0 sur $[0,c[$ et 1 sur $]c,1]$. La suite ainsi obtenue (ou plus précisément : la suite si x n'est pas un antécédent de c, les deux suites si x est un antécédent de c, voir [7]) est appelée <u>itinéraire de</u> x et notée <u>$\sigma f(x)$</u>.

Si l'on identifie alors $\{0,1\}^N$ à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^N$, qu'on munisse cet ensemble de l'ordre lexicographique induit par $0 < 1$, et qu'on définisse pour A à valeurs dans $\{0,1\}$:

$$dA(n) = A(n+1) \quad , \quad \tau A(n) = \sum_{0 \leq j \leq n} A(j) \quad , \quad \bar{A}(n) = 1 + A(n) \quad ,$$

on peut prouver :

THEOREME 1.

Soit A une suite à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que $A(0) = 1$, $A(1) = 0$, alors :

Il existe f unimodale telle que : $A = \sigma f(1)$, si et seulement si

$$\forall\, k \geq 0 \qquad \overline{\tau A} \leq d^k(\tau A) \leq \tau A.$$

Soient A et f comme ci-dessus, B à valeurs dans $\{0,1\}$, alors :
Il existe x dans $[0,1]$ tel que : $B \in \sigma f(x)$, si et seulement si

$$\forall\, k \geq 0 \qquad \overline{\tau A} \leq d^k(\tau B) \leq \tau A.$$

II. LES SUITES q-MIROIRS ET LEUR IMPORTANCE DANS CE PROBLEME

D'après le théorème précédent il est intéressant d'étudier les ensembles :

$\Gamma = \left\{ A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \;;\; A(0) = A(1) = 1 \text{ et } \forall\, k \geq 0 \;\; \bar{A} \leq d^k A \leq A \right\}$,

Pour A dans Γ, $\Gamma_A = \left\{ B \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \;;\; \forall\, k \geq 0 \;\; \bar{A} \leq d^k B \leq A \right\}$.

1. Suites q-miroirs ; premières propriétés

DEFINITION. Soit q un entier supérieur ou égal à 2 ; une suite Q de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dite q-miroir si et seulement si :

$\forall\, \ell \geq 0$, $\forall\, j \in [0, q2^{\ell}-2]$, $Q(q2^{\ell} + j) = \bar{Q}(j)$

$\forall\, \ell \geq 0$, $Q(q2^{\ell} - 1) = 1$.

Autrement dit se donner une suite q-miroir Q, c'est se donner un mot de q

lettres sur $\{0,1\}$, dont la dernière lettre soit un 1, dupliquer ce mot en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0 sauf pour la dernière lettre qui reste un 1, accoler le nouveau mot à l'ancien et itérer le procédé :

pour $q = 5$ et m le mot 11001, on trouve successivement

11001, 1100100111, 11001001110011011001, ...

<u>Propriété</u>. Si Q est q-miroir, la série formelle $\sum_{o}^{\infty} Q(k)\, X^k$ est algébrique de degré 2 sur le corps $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})(X)$, en particulier Q est reconnue par 2-automate et n'est pas ultimement périodique, (voir [4]). De plus Q et $\bar{Q}$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $k \longrightarrow d^k Q$.

<u>Remarque</u>. La suite 2-miroir telle que $Q(0) = 1$ vaut 11010011001 ...., nous la noterons L. On remarquera que OL est la suite de Thue-Morse (voir par exemple [4]).

2. <u>Les suites q-miroirs et l'ensemble</u> Γ

Le théorème que nous allons énoncer précisément maintenant donne d'une part un algorithme fini pour vérifier si une suite q-miroir est dans Γ, d'autre part la propriété remarquable des suites q-miroirs de Γ : pour chacune d'elles, Q, il existe un intervalle de Γ d'extrémité droite Q, dénombrable (et même composé uniquement de suites périodiques) ; et tout intervalle de Γ d'extrémité gauche Q a la puissance du continu, plus précisément :

THEOREME.2.

Soit Q une suite q-miroir telle que $Q(0) = Q(1) = 1$ et $q \geq 2$. Soit m le mot $Q(0) \dots Q(q-2)$ si q est supérieur ou égal à 3 et m le mot 110 si q est égal à 2.

Si x est un mot sur $\{0,1\}$ et B la suite $(x0)^{\omega} = x0x0x0\dots$, on note $\varphi(B)$ la suite $(x1\bar{x}0)^{\omega}$, alors :

(1) Q est dans Γ si et seulement si $(m0)^{\omega}$ est dans Γ et de plus petite période $|m|+1$ (c'est en particulier le cas si $q = 2$ et l'on a alors $Q = L$),

(2) si Q est dans Γ, alors :

$$\Gamma \cap [(m0)^{\omega}, Q[= \{\varphi^n((m0)^{\omega}) \;;\; n \geq 0\}.$$

De plus $\varphi^n((m0)^{\omega})$ est $2^n(|m|+1)$ périodique et la suite $n \to \varphi^n((m0)^{\omega})$ croît vers Q,

(3) Pour toute suite R strictement supérieure à Q, $\Gamma \cap [Q,R]$ a la puissance du continu.

On peut trouver dans [2] ou [3] des précisions supplémentaires sur l'ensemble Γ :

- l'ensemble des suites périodiques de Γ est dense dans Γ,
- Tout intervalle non dénombrable de Γ contient un sous-intervalle isomorphe à Γ en tant qu'ensemble ordonné.

3. Les suites q-miroirs et les ensembles Γ_A

Enonçons le théorème obtenu :

THEOREME 3.

(1) Soit Q une suite q-miroir de Γ, $(q \geq 3)$, soit m le mot $Q(0) \ldots Q(q-2)$, alors :

a) si A appartient à $\Gamma \cap [(m0)^{\omega}, Q[$ et si B est dans Γ_A, alors :

- ou bien B est dans $\Gamma_{(m0)^{\omega}} = \bigcup_{\substack{A \in \Gamma \\ A < (m0)^{\omega}}} \Gamma_A \cup \{(m0)^{\omega}\}$,

- ou bien il existe deux entiers j et s tels que s soit non nul et que : $d^jB = \varphi^s((m0)^{\omega})$ (en particulier B est ultimement périodique de période 2^sq).

b) Quelle que soit R strictement inférieure à Q, $\Gamma_Q \cap]R,Q[$ a la puissance du continu.

(2) Soit L la première décalée de la suite de Thue-Morse et soit A une suite de Γ, alors :

- si $A < L$, Γ_A est dénombrable (et même chaque élément de Γ_A est ultimement périodique),

- si $A \geq L$, Γ_A a la puissance du continu.

III. APPLICATIONS

Pour la traduction des résultats du paragraphe précédent en termes d'itérations, on se reportera à [2] ou [3] : pour comparer les résultats obtenus à ce qui était déjà connu on pourra se reporter à [6], [7] et [8] ; (pour l'étude des itérations de fonctions sous d'autres angles, par exemple la conjugaison topologique, on consultera [5]).

Une autre application concerne un ensemble remarquable de réels : soit $\tilde{\Gamma} = \{x \in [0,1] \ ; \ \forall\, k \geq 0 \quad 1-x \leq \{2^k x\} \leq x\}$, où $\{y\}$ est la partie fractionnaire de y. Il est clair que x est dans Γ si et seulement si son développement binaire $x = \sum_{0}^{\infty} \frac{A(n)}{2^{n+1}}$ est tel que A soit dans Γ ou A soit égal à $(10)^{\omega}$. Les nombres α "q-miroirs" de Γ ont alors la propriété suivante :

- il existe un intervalle $\tilde{\Gamma} \cap [\beta,\alpha]$ de $\tilde{\Gamma}$ dénombrable, (et même ne contenant que des rationnels au développement dyadique purement périodique),

- tout intervalle $\tilde{\Gamma} \cap [\alpha, \gamma]$ a la puissance du continu.

De plus ces nombres "q-miroirs" sont transcendants.

Il est possible, au prix d'une légère généralisation de la notion de suite q-miroir, d'obtenir des résultats analogues pour les ensembles :

$$\{x \in [0,1] \ ; \ \forall\, k \geq 0 \quad 1-x \leq \{a^k x\} \leq x\},$$

où a est entier (voir [1]).

Remarquons enfin que nous obtenons au passage une caractérisation arithmétique du nombre de Morse $\ell = \sum_{o}^{\infty} \frac{L(n)}{2^{n+1}}$: c'est le plus petit élément de l'ensemble dérivé de $\tilde{\Gamma}$.

[1] ALLOUCHE, J. P. (en préparation)

[2] ALLOUCHE, J. P. et COSNARD, M. C. R. Acad. Sc. Paris (1983).

[3] ALLOUCHE, J. P. et COSNARD, M. (en préparation)

[4] CHRISTOL, G., KAMAE, T., MENDES FRANCE, M. et RAUZY, G. Bull. Soc. Math. France 108 (1980), p. 401.

[5] COLLET, P. et ECKMANN, J. P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhäuser, Boston 1980.

[6] COSNARD, M. SIAM J. Num. Anal. 16 (1979), p. 300.

[7] COSNARD, M. Rapp. Rech. I.M.A.G. (à paraître).

[8] DERRIDA, B. et coll. Ann. Inst. H. Poincaré 29 (1978), 305.

[9] GUMOWSKI, I. et MIRA, C. Dynamique chaotique. CEPADUES, Toulouse (1980).

Jean-Paul Allouche
E.N.S. de Fontenay-aux-Roses
92260 FONTENAY-AUX-ROSES

ON THE PARAMETRIZATION OF ADAMJAN, AROV AND KREIN

Rodrigo AROCENA
(Universidad Central de Venezuela)

Summary. We show that some methods employed by Adamjan, Arov and Krein, and by Garnett, give a self-contained proof of a parametrization of the class of all positive definite matrices associated, by means of the Fourier transform, to a Generalized Toeplitz Kernel.

1. Introduction

Let Z be the set of integers, $Z_1 = \{n \in Z : n \geq 0\}$ and $Z_2 = \{n \in Z : n < 0\}$. Let K be a function from $Z \times Z$ to C, the set of complex numbers. We say that K is a Generalized Toeplitz Kernel (GTK) if there exist four functions $K_{jk} : Z \longrightarrow C$, $j, k = 1, 2$, such that :

(1) $$K(m, n) = K_{jk}(m-n) \ , \ \forall\ (m, n) \in Z_j \times Z_k, \quad j,k = 1, 2 ;$$

or, equivalently, if the following holds :

(2) $$K(m,n) = K(m+1 \ , \ n+1), \quad \forall\ m,n \in Z, \quad m,n \neq -1.$$

When (1) holds, we shall write $K \sim (K_{jk})_{j,k=1,2}$.

Let T be the unit circle in C and $e_n(t) = \exp(int)$, $n \in Z$; the Fourier coefficients of a (complex Radon) measure in T, μ, are given by $\hat{\mu}(n) = \int_T e_{-n} d\mu$, $n \in Z$; if $M = (\mu_{jk})_{j,k=1,2}$ is a 2×2 matrix whose elements are measures in T, then a GTK is defined by

(3) $$K(m,n) = K_{jk}(m-n) = \hat{\mu}_{jk}(n-m) \quad , \quad \forall\ (m,n) \in Z_j \times Z_k \quad , \quad j,k = 1, 2 \ ,$$

in which case we say that $M = (\mu_{jk})$ is associated to K by means of the Fourier transform, and we write $K \sim \hat{M}$.

Let $M = (\mu_{jk})$ be a positive matrix measure, $M \geq 0$, that is, such that $(\mu_{jk}(A))$ is a positive numerical matrix for every Borel set $A \subset T$; then, if $K \sim \hat{M}$, K is a positive definite (p. d., in the sequel) GTK. The converse also holds ([4], [2]), so we have the following extension of Herglotz theorem :

(4) K is a p. d. GTK iff there exists $M \geq 0$ such that $K \sim \hat{M}$.

Let $M(K)$ be the class of all positive matrix measures associated to K, a given GTK, by means of the Fourier transform. Then K is p. d. iff $M(K)$ is non empty. Now, $M(K)$ can contain one or more than one element. This unicity problem was studied in previous papers, and we hall recall some related results further on.

Let us now consider the following example. A positive constant r and a bounded function $f \in L^{\infty}(T)$ are given ; then K is the GTK defined by $K_{11}(n) = K_{22}(n) = 0$ if $n \neq 0$ and $K_{11}(0) = K_{22}(0) = r$, $K_{12}(n) = \overline{K_{21}}(-n) = \hat{f}(-n)$. If $H^p = \{ g \in L^p(T) : \hat{g}(j) = 0, \ \forall\ j < 0 \}$, then $M \in M(K)$ iff it is positive and has the following type :

$$\begin{pmatrix} r\ dt & (f-h)\ dt \\ (\bar{f}-\bar{h})\ dt & r\ dt \end{pmatrix}$$

where dt is Lebesgue (normalized) measure in T and $h \in H^{\infty}$. In fact, it is clear that $(\mu_{jk}) \in M(K)$ implies $d\mu_{jj} = r\ dt$, $j = 1, 2$; also $\hat{\mu}_{12}(-n) = \hat{f}(-n)$, $\forall\ n > 0$, so, by the F. and M. Riesz theorem $f\ dt - d\mu_{12} = h\ dt$, with $h \in H^1$; since (μ_{jk}) is positive, $r \geq |f - h|$, a. e., so $h \in H^{\infty}$.

So in this case the description of $M(K)$ is equivalent to the description of the class $G(f,r) = \{ f-h : h \in H^{\infty} , \ \|f-h\|_{\infty} \leq r \}$, or of all the analytic functions whose uniform distance to f is bounded by r. Now, Adamjan, Arov and Krein gave a celebrated parametrization of the class $G(f,r)$ [1]. In [3] we showed that, assuming their result, a parametrization of $M(K)$ can be given for any K, p. d. GTK. In this paper we show that the methods of those authors, combined with an idea employed by Garnett ([5]) in his independent proof of the parametrization of $G(f,r)$, can be extended to give a self contained and rather elementary proof of the parametrization of $M(K)$.

2. Unicity condition and canonical matrices

Let P be the set of all trigonometric polynomials that is the linear span of $\{e_n : n\in Z\}$. If K is a given p. d. GTK, let H_K be the Hilbert space given by the linear space P and the metric defined by

$$(1) \qquad \langle e_n , e_m \rangle_K = K(n,m).$$

Let H_j be the closed linear hull in H_K of $\{e_n : n \neq j\}$, $j = -1, 0$. Then a linear isometry form H_{-1} onto H_o is defined by the "shift" : $Ve_n = e_{n+1}$, $\forall\, n\in Z - \{-1\}$. Call $U(K)$ the set of all unitary extensions U of V to a Hilbert space H_U that contains H_K. By means of the classical Herglotz theorem, or the spectral theorem, it is easy to see that a matrix $M = (\mu_{jk}) \in M(k)$ is determined by each $U \in U(K)$, by the following :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \hat{\mu}_{11}(-n) &= \langle U^n e_o, e_o \rangle_{H_U} , \qquad & \hat{\mu}_{12}(-n) &= \langle U^{n-1} e_o, e_{-1} \rangle_{H_U} , \\ \hat{\mu}_{21}(-n) &= \langle U^{n-1} e_{-1}, e_o \rangle_{H_U} , \qquad & \hat{\mu}_{22}(-n) &= \langle U^n e_{-1}, e_{-1} \rangle_{H_U} , \end{aligned}$$

in which case we put $M = M(U)$. In particular this argument shows that $M(K) \neq \emptyset$.

Conversely, if $M\in M(k)$, let H_M be the Hilbert space given by the linear space

$P \times P$ and the metric defined by

(3) $$\langle (f_1,f_2),(g_1,g_2)\rangle_M = \sum_{j,k=1,2} \int_T f_j \bar{g}_k \, d\mu_{jk}.$$

Since $M \in M(K)$, H_K can be considered as a closed subspace of H_M, with the identification $e_n \approx (e_n,0)$ if $n \geq 0$, $e_n \approx (0,e_n)$ if $n < 0$. Let $U(M)$ be the unitary operator in H_M defined by $U(M)(f,g) = (e_1 f, e_1 g)$; then it is easy to see that $U(M) \in U(K)$ and that $M = M[U(M)]$, so $U(K)$ and formulae (2) give every element of $M(K)$. This remark enables to show that $M(K)$ contains more than one element ($\# [M(K)] > 1$) iff :

(4) $$e_{-1} \notin H_{-1} \quad \text{and} \quad e_o \notin H_o.$$

Complete proofs of the above assertions can be seen in [2].

Since we propose to give a parametrization of $M(K)$, we shall suppose from now on that condition (4) holds.

Fix the following notation : for $j = -1, 0$ let v_j be a vector in H_K, orthogonal to H_j, and uniquely determined by the additional condition $c_j \overset{\text{def}}{=} \langle e_j, v_j\rangle_K > 0$; for each $\theta \in [0,2\pi)$ we define $V_\theta \in U(K)$ setting $H_{V_\theta} = H_K$ and

(5) $$V_\theta|_{H_{-1}} \equiv V \quad , \quad V_\theta v_{-1} = e^{i\theta} v_o.$$

Clearly, every $U \in U(K)$ such that $H_U \equiv H_K$ is of type (5). We shall say that M is a <u>canonical matrix</u> in $M(K)$ if $M = M(V_\theta)$ for some θ. The following characterization of canonical matrices will be needed further on :

(6) Let $M \in M(K)$ and consider H_K as a subspace of H_M : then M is a canonical matrix iff $H_K = H_M$. ([3])

Moreover, if M is canonical all $U \in U(K)$ such that $M = M(U)$ have the same restriction to H_K.

3. Preliminary constructions

Let (μ_{jk}), $j,k = 1, 2$, be an hermitean matrix of measures in T. Set

(1) $$d\mu_{jk} = w_{jk}dt + dv_{jk} \quad , \quad j,k = 1, 2,$$

where $w_{jk} \in L^1(T)$ and v_{jk} is singular with respect to Lebesgue measure dt. It is easy to prove the following facts ([3], section VI) :

(2) a) $(\mu_{jk}) \geq 0$ iff $(w_{jk}) \geq 0$ and $(v_{jk}) \geq 0$.

b) If $K \sim (\mu_{jk})^{\wedge}$ and $K' \sim (w_{jk})^{\wedge}$ are p. d., then $M(K) = M(K') + (v_{jk})$; moreover, (μ_{jk}) is canonical in $M(K)$ iff (w_{jk}) is canonical in $M(K')$.

Consequently, we can reduce our study of the class $M(K)$ to that of the class $M(K')$ whose elements are function matrices. So from now on, unless otherwise specified, we shall assume that K, the fixed p. d. GTK, is such that $(\mu_{jk}) \in M(K)$ implies $d\mu_{jk} = w_{jk}dt$.

In section 2 we defined, for every $M \in M(K)$, a Hilbert space H_M ; we shall now see how H_M can be considered as an orthogonal sum of two function spaces. If $M = (w_{jk})$ set $p = w_{11} - |w_{12}|^2 w_{22}^{-1} \chi_{\{w_{22}>0\}}$, so $p \geq 0$; let $E = L^2(T,dt) \oplus L^2(T,p\,dt)$ and B the linear operator from $P \times P$ to E defined by

(3) $$B(f_1,f_2) = (\left[f_1 w_{12}/\sqrt{w_{22}} + f_2\sqrt{w_{22}}\right] \chi_{\{w_{22}>0\}} , f_1).$$

It can be seen ([3], section VII) that B defines an isometry from H_M to E, such that $B(H_M) = \chi_{\{w_{22}>0\}} L^2(T,dt) \oplus L^2(T,p\,dt)$.

Now, when $\#\left[M(K)\right] > 1$, $\log w_{11}$ and $\log w_{22}$ belong to $L^1(T, dt)$, so in this case we have the following :

(4) A unitary operator B from H_M onto $L^2(T,dt) \oplus L^2(T,p\,dt)$ is given by formula (3).

4. Basic properties of canonical matrices

In section IX of [3] the following result was proved.

THEOREM 1. Let K be a p. d. GTK such that $M(K)$ contains more than one element ; let $(\mu_{jk})_{j,k=1,2}$ be a canonical matrix in $M(K)$ and set $d\mu_{jk} = w_{jk}dt + dv_{jk}$, where v_{jk} is a singular measure. Then :

$$w_{11}\,w_{22} - w_{12}\,w_{21} = 0 \quad , \quad dt\text{-a.e.}$$

The same ideas give the next result, which was essentially proved also in [3] ; since we need a refinement of the theorem there stated, we shall give a complete proof of the following.

THEOREM 2. Let K be a p. d. GTK such that $M(K)$ contains more than one element, and $M = (\mu_{jk})$ be a canonical matrix of $M(K)$. Set $d\mu_{jk} = w_{jk}dt + dv_{jk}$, v_{jk} singular measures. Then there exists only one function h_2 that satisfies the following conditions (i), (ii) and (iii).

(i) $$h_2 \in H^1(T) \cap L^2(T\ ,\frac{1}{w_{22}}dt) \ ;$$

(ii) $$\int_T \frac{|h_2|^2}{w_{22}}\,dt = 1 \quad \text{and} \quad h_2(0) > 0 \ ;$$

(iii) $$h_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{w_{12}}{w_{22}}\,\bar{h}_2 \in H^1(T).$$

Moreover, h_1 and h_2 are outer functions.

Proof. From theorem (1) it follows that $E = L^2(T,dt) \equiv L^2$, so dimension $[L^2 \ominus B(H_o)] = 1$. Let F be a non trivial function in $L^2 \ominus B(H_o)$; then $\int_T (F\bar{w}_{12}/\sqrt{w_{22}})\, e_{-n}\, dt = 0$, $\forall\, n > 0$, and $\int_T F\sqrt{w_{22}}\, e_{-n}\, dt = 0$, $\forall\, n < 0$, which are equivalent to $F\bar{w}_{12}/\sqrt{w_{22}} = \bar{h}_1$, $F\sqrt{w_{22}} = h_2$, with $h_1, h_2 \in H^1$. Normalize F assuming $\|F\|_2 = 1$, so $\int_T (|h_2|^2/w_{22})\,dt = 1$; take F such that $0 < h_2(0)$ holds too. Then clearly h_2 satisfies conditions (i), (ii) and (iii). If

h_2' also satisfies them with $h_1' = w_{12}\,\bar{h}_2'/w_{22}$, set $F' = h_2'/\sqrt{w_{22}}$, so $F' w_{12}/\sqrt{w_{22}} = \bar{h}_1'$ and consequently $F' \in [L^2 \ominus B(H_o)]$; then $F' = cF$, with c a constant ; condition (ii) ensures that $c = 1$ and so $h_2' = h_2$. Set $h_2 = ug$, where u is an inner function and g an outer one, and $F'' = g/\sqrt{w_{22}}$; then, the same argument shows that $F'' = F$ and so $u \equiv 1$. From analogous considerations referred to h_1 the result follows.

5. Parametrization of M(K) : sketch of the proof

In the following we shall extend Adamjan, Arov and Krein parametrization of $G(f, r)$ to $M(K)$, where K is a p. d. GTK such that $\# [M(K)] > 1$. The first step of the proof consists of a description of the subclass of $M(K)$ whose elements are canonical matrices. In the second step, the formula obtained in the first one is naturally extended so as to give an injective transformation from the unit ball of H^∞ to $M(K)$. In the third step, that transformation is shown to be surjective.

It should be stressed that steps one and two are simple extensions of methods of Adamjan, Arov and Krein, while the third one is based on an idea employed by Garnett.

6. Description of canonical matrices

Assume that the elements in $M(K)$ are function matrices. If $M = M(V_\theta)$ is a caninical matrix, set

$$(1) \qquad M(V_\theta) = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12}^{(\theta)} \\ w_{21}^{(\theta)} & w_{22} \end{pmatrix}$$

where $\theta \in [0,2\pi)$ and w_{11}, w_{22} are independent of θ. We shall give an expression for every $w_{12}^{(\theta)}$ in terms of one of them, so we fix any θ_o and set

(2) $$h^{(\theta)} = w_{12}^{(\theta+\theta_o)} - w_{12}^{(\theta_o)}.$$

From (2.2) it steams that $\hat{w}_{12}^{(\theta+\theta_o)} - \hat{w}_{12}^{(\theta_o)} = \langle (V_{\theta+\theta_o}^{-j-1} - V_{\theta_o}^{-j-1}) e_o, e_{-1} \rangle_K$ for every $j \in Z$. Consequently, if E_θ is the spectral measure of the unitary operator V_θ we have

$$\hat{h}^{(\theta)}(j) = \int_T e^{-i(j+1)t} d_t \langle (E_{\theta+\theta_o} - E_{\theta_o}) e_o, e_{-1} \rangle_K, \qquad \forall\, j \in Z,$$

so $h^{(\theta)} dt = e_{-1} d_t \langle (E_{\theta+\theta_o} - E_{\theta_o}) e_o, e_{-1} \rangle_K$. Since $h^{(\theta)} \in H^1$, it follows that, if $|z|<1$, then $h^{(\theta)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_o^{2\pi} \frac{h^{(\theta)}(e^{ix})}{e^{ix} - z} d(e^{ix}) = \int_T \frac{e_1 h^{(\theta)}}{e_1 - z} dt =$
$\int_T \frac{1}{e_1 - z} d_t \langle (E_{\theta+\theta_o} - E_{\theta_o}) e_o, e_{-1} \rangle_K$, so it is clear that

(3) $$h^{(\theta)}(z) = \langle \left[(V_{\theta+\theta_o} - zI)^{-1} - (V_{\theta_o} - zI)^{-1} \right] e_o, e_{-1} \rangle_K.$$

We shall now work with the second member of (3). Every $v \in H_K$ can be written as $v = \langle v, v_{-1} \rangle_K v_{-1} + u$ with $u \in H_{-1}$, so $V_\theta v = \langle v, v_{-1} \rangle_K V_\theta v_{-1} + Vu =$ $e^{i\theta} \langle v, v_{-1} \rangle_K v_o + Vu$. Consequently

(3a) $$V_\theta v - V_{\theta_o} v = (e^{i\theta} - e^{i\theta_o}) \langle v, v_{-1} \rangle_K v_o, \qquad \forall\, v \in H_K.$$

Now, if any two operators, A and B, in a Hilbert space H with inner product $(.,.)$, are related by

(3b) $$Af - Bf = c(f,g)\, g_1, \qquad \forall\, f \in H,$$

with g, g_1 fixed vectors and c fixed constant, then

(3c) $$\left[(A - zI)^{-1} - (B - zI)^{-1} \right] f = \frac{-c(\left[B-zI\right]^{-1} f, g)}{1+c(\left[B-zI\right]^{-1} g_1, g)} \left[B-zI\right]^{-1} g_1$$

for every $f \in H$ and every z belonging to both the resolvent sets of A and B. In fact, from $(A-zI)^{-1} - (B-zI)^{-1} = (A-zI)^{-1}(B-A)(B-zI)^{-1}$ it follows that

$$(\#) \qquad \left[(A-zI)^{-1} - (B-zI)^{-1}\right]f = -c(\left[B-zI\right]^{-1}f,g)\left[A-zI\right]^{-1}g_1 \quad ;$$

applying this formula with $f = g_1$ we obtain an expression for $\left[A-zI\right]^{-1}g_1$ which, replaced in $(\#)$, gives (3c).

Applying (3c) to (3a) which is a particular case of (3b) we get from (3) that, for $|z| < 1$, the following holds

$$(4) \qquad h^{(\theta)}(z) = \frac{(e^{i\theta_o} - e^{i(\theta+\theta_o)})\langle\left[V_{\theta_o} - zI\right]^{-1}e_o, v_{-1}\rangle_K \langle\left[V_{\theta_o} - zI\right]^{-1}v_o, e_{-1}\rangle_K}{1 + (e^{i(\theta+\theta_o)} - e^{i\theta_o})\langle\left[V_{\theta_o} - zI\right]^{-1}v_o, v_{-1}\rangle_K} .$$

Let $M = M(V_{\theta_o})$. Then (2.6) says that $H_K \approx H_M$ and $U(M) \approx V_{\theta_o}$. By (3.4) and (4.1), $H_M \approx L^2$, where the isomorphism is given by B. So

$$(5) \qquad H_K \approx L^2$$

where the unitary isomorphism D between those spaces is given by

$$(5a) \qquad De_n = e_n w_{12}^{(\theta_o)}/\sqrt{w_{22}} \ \text{ if } \ n \geq 0 \quad , \quad De_n = e_n\sqrt{w_{22}} \ \text{ if } \ n < 0.$$

Moreover, if $(f,g) \in P \times P$, then $B\left[U(M)(f,g)\right] = B(e_1f, e_1g) = (e_1fw_{12}^{(\theta_o)}/\sqrt{w_{22}} + e_1 g\sqrt{w_{22}}) = e_1.B(f,g)$, so if $S : L^2 \longrightarrow L^2$ is the shift, $Sg = e_1g$, we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
H_K \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[rr, bend left, "D"] \arrow[d, "V_{\theta_o}"] & H_M \arrow[r, "\approx", "B"'] \arrow[d, "U(M)"] & L^2 \arrow[d, "S"] \\
H_K \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[rr, bend right, "D"'] & H_M \arrow[r, "\approx"', "B"] & L^2
\end{tikzcd}$$

That is

$$(5b) \qquad (DV_{\theta_o}D^{-1})f = e_1f \quad , \quad \forall f \in L^2 .$$

We shall compute the inner products that appear in (4) by means of D. The definition of v_o says that Dv_o is orthogonal to DH_o, $\|Dv_o\|_2 = 1$ and $(Dv_o\,,\,De_o)_{L^2} > 0$, so :

$$\int_T (Dv_o.\bar{w}_{12}^{(\theta_o)}/\sqrt{w_{22}})e_{-n}\,dt = 0 \quad,\quad \forall\, n > 0 \quad;\quad \int_T Dv_o\sqrt{w_{22}}\,e_{-n}\,dt = 0\quad,$$

$\forall\, n < 0$; $\int_T |Dv_o|^2\,dt = 1$; $\int_T (Dv_o.\bar{w}_{12}^{(\theta_o)}/\sqrt{w_{22}})\,dt > 0$. From the equalities and theorem (4.2) we get $Dv_o = e^{ia}\,h_2/\sqrt{w_{22}}$, with a constant, and from the inequality it follows that $a = \arg h_1(0)$. From (5b) we get $e_1(Dv_{-1}) = (DV_{\theta_o}D^{-1})(Dv_{-1}) = D(e^{i\theta_o}v_o)$ so $Dv_{-1} = e^{i(\theta_o+a)}\,e_{-1}h_2/\sqrt{w_{22}}$. Since $0 < \langle v_{-1}\,,\,e_{-1}\rangle_K = (Dv_{-1}\,,\,De_{-1}) = e^{i(\theta_o+a)}\int_T (e_{-1}h_2/\sqrt{w_{22}})(e_1\sqrt{w_{22}})\,dt = e^{i(\theta_o+a)}\,h_2(0)$, we can put $a = -\,\theta_o$. Consequently :

(6) $$Dv_o = e^{-i\theta_o}\,h_2/\sqrt{w_{22}}$$

(7) $$Dv_{-1} = e_{-1}h_2/\sqrt{w_{22}}.$$

Now simple formulas for the inner products in (4) can be obtained. In fact :

$$\langle [V_{\theta_o} - zI]^{-1}e_o, v_{-1}\rangle_K = ([DV_{\theta_o}D^{-1} - zI]^{-1}De_o, Dv_{-1})_{L^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{e_1-z}\,\frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{\sqrt{w_{22}}}\,,\,e_{-1}\,\frac{h_2}{\sqrt{w_{22}}}\right)_{L^2} = \int_T \frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{w_{22}}\,\bar{h}_2\,\frac{1}{e_1-z}\,e_1\,dt = \int_T \frac{h_1}{e_1-z}\,e_1\,dt = h_1(z)\,,$$

as follows from (5a), (5b), (7) and theorem (4.2). So :

(8) $$\langle [V_{\theta_o} - zI]^{-1}e_o, v_{-1}\rangle_K = h_1(z).$$

In the same way we get

(8a) $$\langle [V_{\theta_o} - zI]^{-1}v_o\,,\,e_{-1}\rangle_K = e^{-i\theta_o}\,h_2(z).$$

Also $\langle [V_{\theta_o} - zI]^{-1}v_o\,,\,v_{-1}\rangle_K = e^{-i\theta_o}\int_T \frac{1}{e_1-z}\,\frac{h_2}{\sqrt{w_{22}}}\,\frac{\bar{h}_2}{\sqrt{w_{22}}}\,e_1\,dt = e^{-i\theta_o}\int_T \frac{e_1}{e_1-z}\,\frac{|h_2|^2}{\sqrt{w_{22}}}dt.$

Let the function χ be defined, for $|z|<1$, by :

(9) $$\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} = \int_T \frac{e_1+z}{e_1-z}\,\frac{|h_2|^2}{w_{22}}\,dt.$$

Consequently $$\frac{1}{1-\chi(z)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} + 1\right] = \frac{1}{2}\int_T \left[\frac{e_1+z}{e_1-z} + 1\right]\frac{|h_2|^2}{w_{22}}dt = \int_T \frac{e_1}{e_1-z}\,\frac{|h_2|^2}{w_{22}}dt ,$$

so

(8b) $$\langle \left[V_{\theta_o} - zI\right]^{-1} v_o, v_{-1}\rangle_K = e^{-\theta_o}\,\frac{1}{1-\chi(z)} .$$

Replacing (8), (8a) and (8b) in (4) we get

(10) $$h^{(\theta)}(z) = \frac{(e^{-i\theta}-1)(1-\chi))\,h_1(z)\,h_2(z)}{1-e^{-i\theta}\chi(z)}, \qquad |z|<1.$$

Let us note some properties of the function χ defined by (9). Set $G = (1+\chi)/(1-\chi)$; since $(|h_2|^2/w_{22}) \in L^1$, $G \in H^p$, $\forall\, p<1$; $\chi = (G-1)/(G+1)$, with $G_1(z) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} G(z) > 0$, so χ belongs to the unit ball of H^∞. Moreover $\chi(0) = 0$. Set $G_2 = \operatorname{Im} G$; in T we have $G_1 = (|h_2|^2/w_{22})$ a. e. ; from $|\chi| = 1 - 4G_1/\left[(G_1^2+1)^2 + G_2^2\right]$ it follows that $\log(1-|\chi|) \geq 4 \log G_1 = 8 \log |h_2| - 4 \log w_{22} \in L^1$, since $h_2 \in H^1$, so $\log(1-|\chi|) \in L^1$. Summing up :

(9a) $$\chi \in H^\infty \quad , \quad \|\chi\|_\infty \leq 1 \quad , \quad |\chi| < 1 \quad \text{a. e. in } T.$$

Consequently, in (10), we can make $|z| \to 1$:

(10a) $$h^{(\theta)} = \frac{(e^{-i\theta}-1)(1-\chi)\,h_1 h_2}{1-e^{-i\theta}\chi} \quad \text{a. e. in } T.$$

Since $h^{(\theta)} = w_{12}^{(\theta+\theta_o)} - w_{12}^{(\theta_o)}$ we have

(10b) $$w_{12}^{(\theta+\theta_o)} = w_{12}^{(\theta_o)} + \frac{(e^{-i\theta}-1)(1-\chi)h_1 h_2}{1-e^{-i\theta}\chi}$$

(10c) $$h^{(\theta)} = \frac{(e^{-i\theta}-1)(1-\chi)}{1-e^{-i\theta}\chi}\;\frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{w_{22}}\;|h_2|^2 ,$$

(10d) $$w_{12}^{(\theta+\theta_o)} = w_{12}^{(\theta_o)}\left[1 + \frac{(e^{-\theta}-1)(1-\chi)}{1-e^{-i\theta}\chi}\,\frac{|h_2|^2}{w_{22}}\right].$$

The following result has been proved.

(11) PROPOSITION. Let K be a p. d. GTK such that $\# \left[M(K)\right] > 1$. Then every canonical $M(V_\theta) \in M(K)$ is obtained from any fixed one $M(V_{\theta_o})$ by the formula

(11a) $$M(V_{\theta+\theta_o}) = M(V_{\theta_o}) + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(e^{-i\theta}-1)(1-\chi)h_1h_2}{1-e^{-i\theta}\chi}\,dt \\ \dfrac{(e^{i\theta}-1)(1-\bar{\chi})\,\bar{h}_1\bar{h}_2}{1-e^{i\theta}\bar{\chi}}\,dt & 0 \end{pmatrix}$$

where the analytic functions h_1, h_2 and χ are determined by $M(V_{\theta_o})$ by means of (4.2) and (9).

7. An injection from the unit ball of H^∞ to $M(K)$

In this section it will be shown that if, in (6.11a), we replace the constant of unit modulus $e^{-i\theta}$ by a function of the unit ball of H^∞, then the first member of that equality still belongs to $M(K)$. That is, the following result will proved.

(1) PROPOSITION. In the same conditions and with the same notation of proposition (6.11) let f be any function in the unit ball of H^∞. Let the function h and the matrix M be defined by

(2) $$h = \frac{(f-1)(1-\chi)\,h_1h_2}{1-f\chi}$$

(3) $$M = M(V_{\theta_o}) + \begin{pmatrix} 0 & h\,dt \\ \bar{h}\,dt & 0 \end{pmatrix}.$$

Then $M \in M(K)$.

Proof. Since $f, \chi \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ and $|\chi| < 1$ a. e. in T, it follows that $(1 - f\chi) \in H^\infty$ and that it is an outer function.

Also $(f-1)(1-\chi)\, h_1 h_2 \in H^1$, since $(1-\chi)\, h_1 h_2$ is an analytic function in $\{z : |z| < 1\}$ such that

$$|(1-\chi(z))\, h_1(z)\, h_2(z)| \leq \left|2\, \frac{1-\chi(z)}{1+\chi(z)}\, h_1(z)\, h_2(z)\right| = |h^{(\pi)}(z)|\,,$$

with $h^{(\pi)} \in H^1$.

Assume the following holds :

(*) $$w_{11}\, w_{22} \geq |w_{12}^{(\theta_o)} + h|^2 \quad \text{a. e.}$$

Then $|h| \leq |w_{12}^{(\theta_o)} + h| + |w_{12}^{(\theta_o)}| \leq 2\sqrt{w_{11}\, w_{22}} \in L^1$, so $h \in H^1$, because it is an integrable function, quotient of an H^1 function by an outer function belonging to H^∞. So, in order to finish the proof, we have only to prove (*). Now $w_{11}w_{22} - |w_{12}^{(\theta_o)} + h|^2 = |w_{12}^{(\theta_o)}|^2(1 - |\gamma|^2)$, with $\gamma \overset{\text{def}}{=} 1 + \frac{(f-1)(1-\chi)}{1-f\chi}\, \frac{|h_2|^2}{w_{22}}$, so we must show that $|\gamma| \leq 1$ a. e.

The definition (7.9) of χ shows that $\frac{|h_2|^2}{w_{22}} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right) = \frac{1-|\chi|^2}{|1-\chi|^2}$, so $\gamma = 1 + \frac{(f-1)(1-\chi)}{1-f\chi}\, \frac{1-|\chi|^2}{|1-\chi|^2} = \frac{f-\bar{\chi}}{1-f\chi}\, \frac{1-\chi}{1-\bar{\chi}}$; now $\left|\frac{f-\bar{\chi}}{1-f\chi}\right| \leq 1$ holds for any complex numbers f, χ of modulus bounded by 1. The proof is over.

8. Parametrization of $M(K)$

We have seen that (7.2) and (7.3) defines a correspondence from the unit ball of H^∞ into $M(K)$. That correspondence is clearly injective ; in this section we shall show that it is also surjective.

(1) PROPOSITION. Let K be a p. d. GTK such that $\#[M(K)] > 1$ and M any element of $M(K)$. Let M define h by formula (7.3) and h define f by formula (7.2). Then $f \in H^\infty$ and $\|f\|_\infty \leq 1$.

Commentary. Up to now we have extended to our case the methods of [1], by means of which it can be proved also that, in the conditions of the above proposition, $\|f\|_\infty \leq 1$. In that paper, the authors say that, in the particular case they are considering, it also holds that $f \in H^\infty$ and that can be proved as a consequence of a general study of the unitary extensions of an isometry, similar to the one Krein developed for the hermitean extensions of a symmetric operator. In order to prove proposition (1), we shall extend in the sequel a method employed gy Garnett [5].

Proof of the proposition. If $h \equiv 0$, $f \equiv 1$, so we can assume that h is not zero a. e. By hypothesis $w_{11} w_{22} \geq |w_{12}^{(\theta_o)} + h|^2$, a. e. Let $\psi_1, \psi_2 \in H^2$ be outer functions such that

(2) $$w_{11} = |\psi_1|^2 \quad , \quad w_{22} = |\psi_2|^2 , \quad \text{a. e.}$$

Then $|w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2| = 1$ a. e. and $1 \geq |(w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2) + (h/\psi_1\psi_2)|$ a. e., so $(h/\psi_1\psi_2) \in H^\infty$ and

(2a) $$1 \geq |1 - (w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2)^{-}(-h/\psi_1\psi_2)| \quad \text{a. e.}$$

Set

(3) $$\alpha = \arg\left[(w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2)^{-}(-h/\psi_1\psi_2)\right], \quad |\alpha| \leq \pi$$

so, by (2a),

(3a) $$|\alpha| \leq \pi/2 ,$$

and

(3b) $$|h/\psi_1\psi_2| \leq 2 \cos \alpha$$

because $|h/\psi_1\psi_2| = |(w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2)^-(-h/\psi_1\psi_2)|$ and $|1 - re^{i\alpha}| \leq 1$ imply $|\alpha| \leq \pi/2$ and $r \leq 2 \cos \alpha$.

Set

(4) $$\varphi = e^{\tilde{\alpha}-i\alpha}.$$

Then (3a) shows that $\varphi \in H^p$ $\forall\, p < 1$, and $\mathrm{Re}\, \varphi \geq 0$; moreover $(\varphi h/\psi_1\psi_2) \in H^1$, because it belongs to H^p for every $p < 1$ (since $\frac{h}{\psi_1\psi_2} \in H^\infty$) and the following holds :

(4a) $$|\varphi h/\psi_1\psi_2| \leq 2\, |\varphi \cos \alpha| = 2\, \mathrm{Re}\, \varphi \in L^1.$$

Since $|\psi_2|^2 = w_{22}$ and, by construction, $\arg(-\varphi h/\psi_1\psi_2) = \arg(w_{12}^{(\theta_o)}/\psi_1\psi_2)$, we have :

(4b) $$\frac{-\varphi h}{\left|\frac{\varphi h}{\psi_1\psi_2}\right| |\psi_2|^2} = \frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{w_{22}}.$$

Since $(\varphi h/\psi_1\psi_2) \in H^1$, $\exists\, g \in H^2$ and an inner function u such that $(\varphi h/\psi_1\psi_2) = ug^2$. Replacing in (4b) we get

$$\frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{w_{22}} = \frac{-\varphi h}{|g\, \psi_2|^2} = \frac{(-ug\psi_1)(g\psi_2)}{|g\, \psi_2|^2} = \frac{(-ug\, \psi_1)}{(g\, \psi_2)^-},$$ with $g\psi_2 \in H^1 \cap L^2(\frac{1}{w_{22}}dt)$ and

$$(-ug\psi_1) = \frac{w_{12}^{(\theta_o)}}{w_{22}}(g\, \psi_2)^-.$$

Then theorem (4.2) shows that

(5) $$g\, \psi_2 = ah_2 \qquad , \qquad -ug\psi_1 = \bar{a}h_1$$

with a constant (different from 0 because $h \neq 0$) ; then

$$\frac{|h_2|^2}{w_{22}} = \frac{|h_2|^2}{|\psi_2|^2} = \frac{1}{|a|^2} |g|^2 = \frac{1}{|a|^2} \left| \frac{\varphi h}{\psi_1 \psi_2} \right| \leq \frac{1}{|a|^2} \operatorname{Re}(2\varphi), \quad \text{because of (4a).}$$

Consequently, the harmonic and positive function $\frac{1}{|a|^2} \operatorname{Re} 2\varphi(z)$ is the Poisson integral of a positive measure μ such that $\frac{d\mu}{dt} \geq \frac{|h_2|^2}{w_{22}}$ a. e. in T.

Set $k(z) = \frac{2\varphi(z)}{|a|^2} - \frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)}$; the definition of χ implies that $(\operatorname{Re} k)$ is the Poisson integral of $(d\mu - \frac{|h|^2}{w_{22}}) \geq 0$; also $k(0) = \frac{2}{|a|^2} \varphi(0) \neq 0$. Then $\operatorname{Re} k(z) > 0$ for every z such that $|z| < 1$, so $f_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{k-1}{k+1} \in H^\infty$ and $\|f_1\|_\infty \leq 1$. Since $k = \frac{1+f_1}{1-f_1}$, $h = \frac{1}{\varphi} \varphi h = \frac{1}{\frac{|a|^2}{2}\left[\frac{1+\chi}{1-\chi} + \frac{1+f_1}{1-f_1}\right]} u g^2 \psi_1 \psi_2 =$

$$= -\frac{(1-f_1)(1-\chi)}{1-f_1\chi} \left(\frac{-ug\psi_1}{\bar{a}}\right)\left(\frac{g\psi_2}{a}\right) = \frac{(f_1-1)(1-\chi)}{1-f_1\chi} h_1 h_2 .$$

Comparing with (7.2) it follows that $f_1 \equiv f$. The proof is over. So the following result has been proved :

(6) THEOREM. Let K be a positive definite generalized Toeplitz kernel, such that $M(K)$ contains more than one element. Then

$$(7) \qquad M(K) = \left\{ M_o + \begin{pmatrix} 0 & \frac{(f-1)(1-\chi)h_1 h_2}{1-f\chi} dt \\ \frac{(\bar{f}-1)(1-\bar{\chi})\bar{h}_1\bar{h}_2}{1-\bar{f}\bar{\chi}} dt & 0 \end{pmatrix} : f \in H^\infty, \ \|f\|_\infty \leq 1 \right\}$$

where M_o is any fixed canonical element in $M(K)$, and h_1, h_2, χ are analytic functions determined by M_o.

Let K be as in the example considered in the introduction ; then $w_{11} = w_{22} = r$, a positive constant ; then $h_2 \in H^1 \cap L^2 = H^2$ and $|h_1| = |h_2|$, so

$F \overset{\text{def}}{=} h_1 h_2 \in H^1$ and is an outer function. Then (7) gives, as a particular case, the parametrization of Adamjan, Arov and Krein.

References

[1] ADAMJAN, V. M., AROV, D. Z. and KREIN, M. G. Infinite Hankel matrices and generalized Carathéodory-Fejér and Schur problems. Funct. Anal. and Appl. 2 (1968), 1-17.

[2] AROCENA, R. and COTLAR, M. Generalized Heglotz-Bochner theorem and L^2-weighted inequalities with finite measures. Conference on Harmonic Analysis in Honour of Antoni Zygmund, Chicago, vol 1 (1983), 258-269.

[3] AROCENA, R. On generalized Toeplitz kernels and their relation with a paper of Adamjan, Arov and Krein. To appear in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory (ed. G. Zapata), North Holland.

[4] COTLAR, M. and SADOSKY, C. On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 35 (1) (1979), 383-407.

[5] GARNETT, J. Bounded analytic functions. Academic Press (1981).

Rodrigo Arocena
Apartado Postal 47380
CARACAS 1041-A
(Venezuela)

SUR LE THEOREME DE SARASON ET NAGY-FOIAS

Rodrigo AROCENA
(Universidad Central de Venezuela)

Dans cet exposé on considère le théorème de commutation de Sarason, et sa généralisation, le théorème de la dilatation des commutants, dû à Nagy et Foïas. On montre que ce résultat, et d'autres qui s'y rattachent, peuvent être prouvés d'une façon unifiée en utilisant les propriétés fondamentales des noyaux de Toeplitz au sens généralisé. En plus, on indique que cette généralisation apparaît d'une manière tout à fait naturelle dans l'étude des commutants. A titre d'illustration on esquisse quelques preuves, parfois bien connues. Une démonstration détaillée des résultats nouveaux paraîtra ultérieurement. [9]

a) Commutants d'opérateurs

Soient H_1 , H_2 des espaces de Hilbert et des opérateurs $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$, $X \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ tels que

$$X\,T_1 = T_2\,X.$$

Si en plus on a $\|T_j\| \leq 1$, alors il existe la dilation isométrique minimum U_j de T_j, $j = 1, 2$. C'est-à-dire, il existe un espace de Hilbert R_j et un opérateur isométrique U_j dans R_j tels que : i) $R_j \supset H_j$; ii) $T_j^n = P_j U_j^n|_{H_j}$, $\forall\, n \geq 0$, P_j désignant la projection orthogonale de R_j sur H_j ; iii) $R_j = \bigvee_{n=0}^{\infty} \left\{U_j^n\, H_j\right\}$.

Ainsi, on peut "relever" T_1 et T_2 en des isométries dans R_1 et R_2. Qu'est-ce qu'on peut dire de X ? D'une façon plus précise, on dira que

$$L(X) \overset{\text{def}}{=} \left\{ Y \in \mathcal{L}(R_1, R_2) : P_2 Y = X P_1,\ \|Y\| = \|X\|\ ,\ Y U_1 = U_2 Y \right\}$$

est la classe de toutes les dilatations de Nagy-Foïas de X, et on considérera les questions suivantes :

1) L'ensemble $L(X)$, est-il toujours non vide ?

2) Quand est-ce qu'on a un seul élément dans $L(X)$?

3) Est-ce qu'on peut décrire tous les éléments de $L(X)$?

La réponse affirmative à la première question est justement le théorème de Nagy et Foïas sur la dilatation des commutants [14]. Ces auteurs disent que leur résultat a été inspiré par un énoncé plus particulier, le théorème de commutation de Sarason [15]. Nous le rappellerons dans la section suivante, parce qu'il est en soi-même très intéressant et ses applications illustrent le sens des questions (1), (2) et (3).

b) <u>Le théorème de commutation de Sarason</u>

Soient $\mathbf{T}$ le cercle unité, Z l'ensemble des entiers, $e_n(t) = \exp(int)$ si $n \in Z$, $\hat{f}$ la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbf{T})$, $H^p = \{ f \in L^p(\mathbf{T}) : \hat{f}(n) = 0,\ \forall\, n < 0 \}$ et $S : H^2 \rightarrow H^2$ la translation définie par $Sf = e_1 f$. On considère une fonction intérieure θ (i. e., $\theta \in H^2$ et $|\theta| = 1$ p. p.), le complément orthogonal dans H^2, $K = (\theta H^2)^{\perp}$, du sous-espace θH^2, et la "compression" $T = P_H S \,|_K$ de S, P_K désignant la projection orthogonale de H^2 sur K ; donc, $Tf = P_K(e_1 f)$, $\forall\, f \in K$. Alors <u>le théorème de commutation de Sarason</u> dit :

4) Soit $X \in \mathcal{L}(K)$ tel que $XT = TX$. Il existe $\varphi \in H^\infty$ telle que $Xf = P_K(\varphi f)$, $\forall\, f \in K$, et $\|X\| = \|\varphi\|_\infty$. (Notation : $X = \varphi(S)$).

Or (4) résulte immédiatement du théorème de Nagy et Foïas. En fait, S est une dilatation isométrique minimum de T dans H^2 ; soit $Y \in L(X)$; alors on a :

i) $YS = SY$, d'où $\varphi = Ye_o$ vérifie $Yf = \varphi f$, $\forall f \in H^2$;

ii) $\|X\| = \|Y\|$, d'où $\|X\| = \|\varphi\|_\infty$;

iii) $P_K Y = XP_K$, d'où $Xf = P_K(\varphi f)$, $\forall f \in K$.

Sarason dit que son résultat est un "théorème général d'interpolation" parce qu'il en déduit une méthode pour trouver la solution des problèmes d'interpolation classiques. Dans chaque cas, on considère un opérateur X convenable ; alors l'ensemble des solutions du problème est $\{\varphi \in H^\infty : X = \varphi(S)\} = \{\varphi \in H^\infty : \exists\, Y \in L(X)$ tel que $Yf = \varphi f$, $\forall f \in H^2\} \approx L(X)$. C'est-à-dire, dans un cas particulier, (1), (2) et (3) sont, respectivement, les questions de l'existence, de l'unicité et de la description des solutions d'un problème d'interpolation.

Considérons, par exemple, le problème de Carathéodory-Fejér. Soient des nombres complexes c_j tels que $|c_j| \leq 1$, $j = 0, 1, \dots n$. On veut prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\ \varphi \in H^\infty$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ et $\hat{\varphi}(j) = c_j$, $j = 0, 1, \dots n$;

ii) 1 est une borne supérieure de la norme de l'opérateur défini, par rapport à une base orthonormale, par la matrice $(a_{jk})_{j,k=0}^{n}$, où $a_{jk} = 0$ si $k > j$ et $a_{jk} = c_{j-k}$ si $k \leq j$.

Soit $\theta = e_{n+1}$, d'où $\{e_o, e_1, \dots e_n\}$ est une base dans $K = (\theta H^2)^\perp$; en plus, si $T = P_K S|_K$, on a $Te_j = e_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots (n-1)$, et $Te_n = 0$. Si φ satisfait (i) et $X = \varphi(S)$, alors on a $\|X\| \leq 1$ et $Xe_j = XT^j e_o = T^j X e_o = T^j P_K(\varphi\, e_o) = T^j \left[\sum_{k=0}^{n} \hat{\varphi}(k)\, e_k\right] = \sum_{k=0}^{n-j} c_k\, e_{k+j}$, donc (ii) est vraie. Réciproquement, si X est l'opérateur défini par la matrice (a_{jk}) par rapport à la base $\{e_o, \dots, e_n\}$, alors on a $XT = TX$; si, en plus, $\|X\| \leq 1$, (4) dit que $\exists\ \varphi \in H^\infty$ telle que $X = \varphi(S)$, donc $\|\varphi\|_\infty = \|X\| \leq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{\varphi}(k)\, e_k = P_K(\varphi\, e_o) = X\, e_o = \sum_{k=0}^{n} c_k\, e_k .$$

c) <u>Théorèmes de Nagy et Naimark</u>

La direction de recherche de Nagy et Foïas a été inaugurée par le théorème de Nagy [13] sur la dilatation unitaire des contractions, que nous rappellerons tout de suite.

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction (i. e. $\|T\| \leq 1$). Alors :

5) <u>Théorème de Nagy</u>. Il existe un espace de Hilbert F contenant H comme un sous-espace, et un opérateur unitaire W dans F, déterminé à isomorphie près, tels que :

i) $T^n = P_H W^n |_H \quad , \quad \forall\, n \geq 0$

ii) $F = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \{W^n H\}$.

On peut remarquer que si on pose $R = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{W^n H\}$, $U + W_{|R}$, on obtient la dilatation isométrique minimum de T.

L'étude des propriétés géométriques de F et W aboutit à la démonstration originale du théorème de Nagy et Foias. Or, le théorème de Nagy est un corollaire presque immédiat [13] de l'extension suivante du théorème de Herglotz-Bochner :

6) <u>Théorème de Naimark</u>. Soit K un noyau de Toeplitz sur Z à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire, $K(m,n) = K(m-n) \in \mathcal{L}(H)$, $\forall\, m,n \in Z$. Si en plus K est de type positif et $K(0,0) = I$, alors il existe un espace de Hilbert $F \supset H$ et un opérateur unitaire W dans F, déterminé à isomorphie près, tels qu e

i) $K(m,n) = P_H W^{m-n} |_H \; , \quad \forall\, m,n \in Z \quad ;$

ii) $F = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \{W^n\, H\}$.

Le théorème de Naimark entraîne celui de Nagy : on pose $K(n) = T^n$ si $n \geq 0$ et $K(n) = T^{*-n}$ si $n \leq 0$, et on démontre que $\|T\| \leq 1$ si et seulement si K est de type positif.

Nous voulons montrer qu'une approche semblable donne une preuve du théorème de la dilatation des commutants et, en plus, une méthode unifiée pour aborder les problèmes (1), (2), (3) posés dans la section (a). Avec cet objectif, nous devons associer un noyau aux opérateurs T_1, T_2, X tels que $XT_1 = T_2X$.

d) <u>Le noyau associé à un diagramme commutatif</u>

On considère le diagramme commutatif suivant

(7)
$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "X"'] & H_1 \arrow[d, "X"] \\ H_2 \arrow[r, "T_2"] & H_2 \end{tikzcd}$$

auquel nous voulons associer un noyau, d'une façon inspirée par la méthode rappelée dans la section précédente. Alors il est naturel de considérer le noyau de Toeplitz matriciel $K = \{K_{jk}\}_{j,k=1}^{2}$ défini par :

$$K_{jj}(n) = T_j^n \text{ si } n \geq 0 \;, \quad K_{jj}(n) = T_j^{*-n} \text{ si } n \leq 0, \quad j = 1, 2 \;;$$

$$K_{12}(n) = T_2^n X \text{ si } n \geq 0 \text{ et } K_{12}(n) = T_2^{*-n} \text{ si } n \leq 0 \;;\; K_{21}(n) = K_{12}(-n)^*,$$

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $K(m,n) = \{K_{jk}(m-n)\}_{j,k=1}^{2}$ est un noyau de Toeplitz hermitien dans $H_1 \oplus H_2$.

Or, K n'est pas de type positif en général. Cependant, on a les propositions (8) et (9), énoncées ci-dessous

8) Soient T_1 et T_2 des isométries et X une contraction. Alors le diagramme (7) est commutatif si et seulement si K est de type positif.

Cela veut dire qu'un noyau de Toeplitz de type positif est relié à la conclusion du théorème de Nagy et Foïas : en fait, si de façon identique on associe un noyau au diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{U_1} & R_1 \\ Y\downarrow & & \downarrow Y \\ R_2 & \xrightarrow{U_2} & R_2 \end{array}$$

où $\|Y\| \leq 1$, alors ce noyau est de type positif si et seulement si $YU_1 = U_2Y$.

On obtient aussi un noyau de type positif si le domaine de chaque fonction K_{jk} est restreint à l'ensemble $Z_{jk} = \{m-n : m\in Z_j , n\in Z_k\}$, où $Z_1 = \{n\in Z : n \geq 0\}$, $Z_2 = \{n\in Z : n \leq 0\}$. D'une façon plus précise, soit S l'espace vectoriel des couples (h_1 ,h_2) de fonctions $h_j : Z_j \to H_j$, $j = 1, 2$, qui sont portées par des ensembles finis. Alors, si T_1,T_2,X sont des contractions, on a

$$(9) \qquad \sum_{j,k=1,2} \ \sum_{(m,n)\in Z_j\times Z_k} \langle K_{jk}(m-n)h_j(m), h_k(n)\rangle_{H_k} \geq 0$$

pour tout $(h_1,h_2) \in S$.

Ainsi, l'hypothèse du théorème de Nagy et Foias suggère la considération d'une modification ou généralisation des noyaux de Toeplitz de type positif. Sa définition et ses propriétés fondamentales seront établies dans la section suivante. Après cela, on en déduira des résultats relatifs aux commutants des opérateurs.

e) Noyaux de Toeplitz généralisés

Définition. Un noyau de Toeplitz généralisé (NTG) est un système K composé des objets suivants :

i) deux espaces de Hilbert, H_1 et H_2 ;

ii) quatre fonctions $K_{jk} : Z_{jk} \longrightarrow \mathcal{L}(H_j,H_k)$, $j,k = 1 , 2$, avec $K_{21}(n) = K_{12}(-n)^*$ pour tout $n \leq 0$.

On dit que K est de type positif (t. p.) lorsque (9) est valable.

Soit $H_1 = H_2$, $K_{11} = K_{22}$, $K_{12} = K_{11}|_{Z_1}$; alors K peut être identifié avec le noyau de Toeplitz K_{11}, et K est de type positif au sens (9) si et seulement si K_{11} est de type positif au sens habituel. Cela justifie la dénomination "noyaux de Toeplitz généralisés".

On a le <u>théorème de Naimark pour les NTG</u> suivant :

10) Soit K un NTG t. p. tel que $K_{jj}(0)$ est l'identité dans H_j, $j = 1,2$. Alors il existe un espace de Hilbert R contenant H_1 et H_2 comme sous-espaces, et un opérateur unitaire U dans R tels que :

i) $K_{jk}(m) = P_{H_k} U^m|_{H_j}$, $\forall\, m \in Z_{jk}$, $j,k = 1,2,$

et

ii) $R = \left[\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \{U^m H_1\}\right] \left[\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \{U^m H_2\}\right],$

P_{H_k} désignant la projection orthogonale de R sur H_k.

On appelle $\mathcal{U}(K)$ l'ensemble des couples (U , R) qui vérifient (i) et (ii), en identifiant les couples équivalents par une isomorphie unitaire pour laquelle tous les vecteurs de E sont invariants. On indiquera dans la suite une construction qui donne tous les éléments de $\mathcal{U}(K)$.

K définit un "produit scalaire" dans S ; donc S et K engendrent un espace de Hilbert E. Soient E_o l'adhérence de $\{(h_1,h_2) \in S : h_2(0) = 0\}$ dans E et V l'isométrie de domaine E_o définie par $V(h_1,h_2) = (h_1', h_2')$ où $h_j'(n) = h_j(n-1)$. En prolongeant V à un opérateur unitaire convenable, on obtient (i) ; une restriction convenable de cet opérateur donne (ii). On a de plus le <u>théorème d'unicité</u> suivant :

11) $\mathcal{U}(K)$ a un seul élément $(\#\,[\mathcal{U}(K)] = 1)$ si et seulement si V a un indice de défaut égal à zéro (c'est-à-dire $E_o = E$ ou $V(E_o) = E$).

Les théorèmes (10) et (11) furent essentiellement prouvés dans [5].

Le théorème (10) donne une extension du NTG K à un noyau de Toeplitz de type positif, au sens habituel. Soit $G = (G_{jk})_{j,k=1}^{2}$ un noyau de Toeplitz à valeurs dans $\mathcal{L}(H_1 \oplus H_2)$; cela veut dire que $G_{jk}(n) \in \mathcal{L}(H_j, H_k)$, $\forall\, n \in Z$, $j,k = 1, 2$. On dit que G appartient à l'ensemble $\mathcal{G}(K)$ s'il est de type positif et on a

(12) $$K_{jk}(m) = G_{jk}(m)\,, \qquad \forall\, m \in Z_{jk}\,, \quad j,k = 1\,,\, 2.$$

Or, tout $(U\,,\,R) \in \mathcal{U}(K)$ engendre un $G \in \mathcal{G}(K)$. En fait, on peut prouver que :

(13) En posant $G_{jk}(m) = P_{H_k} U^m |_{H_j}$, $m \in Z$, $j,k = 1, 2$, on définit une bijection entre $\mathcal{U}(K)$ et $\mathcal{G}(K)$.

f) <u>La classe des dilatations de Nagy-Foïas</u>

Dans la suite nous revenons aux hypothèses du théorème de Nagy et Foïas. C'est-à-dire : pour $j = 1, 2$ soient H_j un espace de Hilbert, $T_j \in \mathcal{L}(H_j)$ tel que $\|T_j\| \leq 1$, et U_j la dilatation isométrique minimum de T_j dans l'espace R_j ; soit aussi $X \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tel que $XT_1 = T_2X$.

On considère l'ensemble $L(X) = \left\{ Y \in \mathcal{L}(R_1, R_2) : P_2Y = XP_1,\ \|Y\| = \|X\|,\ YU_1 = U_2Y \right\}$; si $X = 0$, $L(X) = \{0\}$, donc dorénavant on supposera que $X \neq 0$ et aussi (en remplaçant X par $\|X\|^{-1}X$) que $\|X\| = 1$.

Soit K le NTG défini par H_1, H_2 et

(14)
$$K_{11}(n) = \begin{cases} T_1^n & \text{si } n \geq 0 \\ T_1^{*-n} & \text{si } n \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad K_{12}(n) = T_2^n X \,, \quad \forall\, n \geq 0 \;;$$
$$K_{21}(n) = K_{12}(-n)^* \,, \quad \forall\, n \leq 0 \quad ; \quad K_{22}(n) = \begin{cases} T_2^n & \text{si } n \geq 0 \\ T_2^{*-n} & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Si $(U,R) \in \mathcal{U}(K)$, la restriction de l'opérateur U à $\bigvee_0^\infty \{U^n H_j\}$ donne la dilatation isométrique minimum de T_j ; ainsi on peut poser $R_j = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{U^n H_j\}$ et $U_j = U_{|R_j}$, $j = 1,2$.

Alors, notre résultat principal est le suivant.

THEOREME. On définit une bijection entre $\mathcal{U}(K)$ et $L(X)$ en posant, pour chaque $(U,R) \in \mathcal{U}(K)$,

(15) $$Y = P_{R_2}|R_1 \quad ;$$

c'est-à-dire, Y est la restriction à R_1 de la projection orthogonale de R sur R_2.

On a déjà souligné que la définition (14) donne un NTG de type positif. Donc $\mathcal{U}(K) \neq \emptyset$, d'où $L(X) \neq \emptyset$ et le théorème de Nagy et Foias découle du théorème énoncé ci-dessus.

<u>Esquisse de la preuve du théorème</u>

i) On voit directement que (15) associe effectivement un élément de $L(X)$ à chaque élément de $\mathcal{U}(K)$; c'est-à-dire, si $Y = P_{R_2}|R_1$, alors on a $\|Y\| = \|X\|$, $P_2Y = XP_1$ et $YU_1 = U_2Y$.

ii) Soit $(U,R) \in \mathcal{U}(K)$; on définit Y par (15) et $G \in \mathcal{G}(K)$ par (13). On vérifie que, pour $m,n \geq 0$, $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$, on a

(*) $$\langle Y(U_1^m v_1), U_2^n v_2 \rangle_{R_2} = \langle G_{12}(m-n) v_1, v_2 \rangle_{H_2}$$

et cela entraîne que Y détermine G ; or, G détermine U, donc la correspondance est injective.

iii) Inversement, soit $Y \in L(X)$. Alors, (8) dit qu'on peut associer un noyau de Toeplitz matriciel de type positif, au sens habituel, au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{U_1} & R_1 \\ {\scriptstyle Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Y} \\ R_2 & \longrightarrow & R_2 . \end{array}$$

La restriction de ce noyau à $H_1 \oplus H_2$ donne un élément $G \in \mathcal{G}(K)$, et (*) est encore valable. Etant donné que $\mathcal{G}(K) \approx \mathcal{U}(K)$, cela entraîne qu'il existe $(U,R) \in \mathcal{U}(K)$ tel que $Y = P_{R_2}|R_1$.

g) Sur l'unicité de la dilatation

Dans la section (e) on a établi un critère d'unicité, c'est-à-dire, une condition équivalente à $\# [\mathcal{U}(K)] = 1$, où K est un NTG t. p. quelconque. L'application de ce critère au cas particulier envisagé dans la section (f) - avec K défini par (14) - donne des conditions équivalentes à ce que la classe $L(X)$ contienne un seul opérateur, parce qu'on a, évidemment, $\# [\mathcal{U}(K)] = 1$ si et seulement si $\# [L(K)] = 1$. On retrouve ainsi, notamment, un théorème d'unicité de Ando, Ceausescu et Foiàs [4] :

Il y a un seul opérateur $Y \in L(X)$ si et seulement si au moins une des égalités suivantes est satisfaite

$$\left\{(I-X^*X)^{1/2}H_1\right\}^- \oplus \left\{(U_1-T_1)H_1\right\}^- = \left\{(I-X^*X)^{1/2}T_1h + (U_1-T_1)h : h \in H_1\right\}^-$$

$$\left\{(I-X^*X)^{1/2}H_1\right\}^- \oplus \left\{(U_2-T_2)H_2\right\}^- = \left\{(I-X^*X)^{1/2}h \oplus (U_2-T_2)Xh : h \in H_1\right\}^-.$$

h) Sur la paramétrisation de la classe des dilatations de Nagy et Foiàs

Arsene, Ceausescu et Foiàs ([10], [11]) ont donné une description de tous les éléments de l'ensemble $L(X)$, inspirée par la paramétrisation de Adamjan, Arov et Krein ([1], [2], [3]). Dans le cas scalaire ($H_1 = H_2 = \{$nombres complexes$\}$), cette paramétrisation a été étendue à l'ensemble $\mathcal{G}(K)$, où K est un noyau de Toeplitz généralisé de type positif quelconque ([7], [8]). La description de $L(X)$ peut être appliquée à l'étude de certains problèmes de la théorie de la dispersion ([12]). Dans une conférence récente, Misha Cotlar a montré que la théorie de la dispersion ("scattering theory") de Lax et Phillips peut être considérée dans le cadre des noyaux de Toeplitz généralisés.

Nous avons vu que le théorème de commutation de Sarason est un cas particulier du théorème de Nagy et Foiàs, lequel découle à son tour du théorème de Naimark pour les NTG. Or, ce dernier théorème a aussi comme corollaire une autre généralisation du théorème de Sarason, valable pour une certaine classe de formes bilinéaires ([6]). Pour cette généralisation on n'a besoin que des NTG à valeurs scalaires. En combinant cette méthode avec l'extension de la paramétrisation de Adamjan, Arov et Krein on obtient le résultat suivant :

soient θ , K , T , X comme dans la section (b) et telles que $\# [L(X)] > 1$; alors il existe des fonctions analytiques φ_o , F , χ telles que

$\varphi = \varphi_o + \frac{\theta(f-1)(1-\chi)F}{1 - f\chi}$ donne une bijection de la boule unité de H^∞ sur l'ensemble $\{\varphi \in H^\infty : X = \varphi(S)\}$.

[1] ADAMJAN, V. M., AROV, D. Z., and KREIN, M. G. Infinite Hankel matrices and generalized Caratheodory-Fejér and Schur problems. Funct. Anal. and Appl. 2 (1968), 1-17.

[2] ________________ Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takaji problem. Math. Sb. 15 (1971), 31-73.

[3] ________________ Infinite Hankel blockmatrices and related continuation problems. Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Sc. Mat. 6 (1971), 87-112.

[4] ANDO, T., CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On intertwining dilations. II. Acta Sc. Math. 39 (1977), 3-14.

[5] AROCENA, R. and COTLAR, M. Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial and weighted problems. Lecture Notes in Math. 908 (1982), 169-188.

[6] ________________ Generalized Toeplitz kernels, Hankel forms and Sarason's commutation theorem. A paraitre dans Acta Cientifica Venezolana.

[7] AROCENA, R. On generalized Toeplitz kernels and their relation with a paper of Adamjan, Arov and Krein. A paraître dans "Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory", North Holland.

[8] AROCENA, R. On the parametrization of Adamjan, Arov and Krein. A paraitre dans Publ. Math. Orsay.

[9] ______________ Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwining operators. Preprint.

[10] ARSENE, G., CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On intertwining dilations. VII. INCREST preprint series in Math. 28 (1978).

[11] CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On intertwining dilations. V. Acta Sci. Math. 40 (1978), 9-32.

[12] FOIAS, C. Contractive Intertwining dilations and waves in layered media. Proc. Intern. Congress Math. Helsinki (1978).

[13] SZ-NAGY, B. and FOIAS, C. Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert. Masson - Akad.Kiado, Paris-Budapest, 1967.

[14] ____________________________ Dilatation des commutants d'opérateurs. C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), 493-495.

[15] SARASON, D. Generalized interpolation in H^∞. Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 179-203.

Rodrigo Arocena
Apartado Postal 47380
CARACAS 1041-A
(Venezuela)

UNE EXTENSION DU THEOREME DES COMMUTATEURS DE CALDERÓN

Gérard BOURDAUD

---

1. ENONCE DU THEOREME.

Toute distribution A sur $\mathbb{R}^n$ définit un opérateur de multiplication, encore noté A, qui envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Le commutateur $[A, \frac{\partial}{\partial x_j}]$ est parfaitement défini comme opérateur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}'$; c'est en fait l'opérateur de multiplication par $-\frac{\partial A}{\partial x_j}$.

Soit E un espace de Banach de distributions, contenant $\mathcal{D}$ comme sous-espace dense. On dit que $A \in \mathcal{D}'$ est un <u>multiplicateur</u> de E s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on ait $A\varphi \in E$ et $\|A\varphi\|_E \leq C\|\varphi\|_E$; convenons d'appeler "norme de A" la plus petite des constantes C possible ; l'espace $M(E)$ des multiplicateurs de E devient alors un espace de Banach.

Ainsi on a l'équivalence entre les deux énoncés :

(i) ∇A <u>est un multiplicateur de</u> E ;

(ii) <u>pour tout opérateur</u> $T = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1,\ldots,n)$, <u>le commutateur</u> $[A,T]$ <u>est borné sur</u> E.

Dans le cadre du calcul pseudo-différentiel, il est vite apparu important d'élargir la classe des opérateurs T pour lesquels on a l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). C'est ainsi qu'ont été obtenus les résultats suivants :

THEOREME I (Calderón, 1965). Soit $Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} h(x-y) f(y)\, dy$, où h est une fonction paire, homogène de degré $-n-1$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; si $\nabla A \in L^\infty$, le commutateur $[A,T]$ est borné sur L^p $(1 < p < \infty)$.

THEOREME II (Coifman et Meyer, 1978). Soit T un opérateur pseudo-différentiel de la classe $Op^1_{1,0}$; si $\nabla A \in L^\infty$, le commutateur $[A,T]$ est borné sur L^p $(1 < p < \infty)$.

(Rappelons que $T \in Op^1_{1,0}$ signifie que $Tf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi$, où $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{1-|\alpha|}$.)

THEOREME III (Beals et Reed, 1982). Soit $T \in Op^1_{1,0}$ un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est à support compact en x et $A \in H_c^{s+1}$ $(s > \frac{n}{2})$; alors le commutateur $[A,T]$ envoie H_c^s dans H_c^s .

(H_c^s est l'ensemble des fonctions de H^s qui sont à support compact ; pour $s > \frac{n}{2}$, H^s est une algèbre, dès lors l'hypothèse du théorème III entraîne $\nabla A \in M(H^s)$.)

Nous nous proposons d'étendre les théorèmes II et III aux espaces de Sobolev en norme L^p ; rappelons que $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ est, par définition, l'espace $(I - \Delta)^{-s/2} L^p$.

THEOREME IV. Pour tout opérateur $T \in Op^1_{1,0}$, tout $s \geq 0$, tout $p \in]1,+\infty[$ et tout $A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla A \in M(H_p^s)$, le commutateur $[A,T]$ est borné sur H_p^s .

2. RAPPELS SUR LES MULTIPLICATEURS.

Dans ce paragraphe, comme dans ceux qui suivent, on suppose $1 < p < \infty$. L'énoncé suivant résume les propriétés de $M(H_p^s)$ qui nous seront nécessaires par la suite.

<u>PROPOSITION 1</u>. (i) <u>Pour</u> $0 \leq t < s$, <u>on a</u> $M(H_p^s) \subset M(H_p^t)$; <u>en particulier</u> $M(H_p^s) \subset L^\infty$.

(ii) <u>Soient</u> $\sigma = s - [s]$ <u>et</u> $\alpha \in \mathbb{N}^n$ <u>tel que</u> $|\alpha| \leq s$; <u>alors, pour tout</u> $A \in M(H_p^s)$, $A^{(\alpha)}$ <u>est un multiplicateur de</u> $H_p^{|\alpha|+\sigma}$ <u>dans</u> H_p^σ , <u>autrement dit</u>

$$\|A^{(\alpha)}.\varphi\|_{H_p^\sigma} \leq C \|\varphi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}} \qquad (\forall \varphi \in \mathcal{S}) .$$

On trouvera la démonstration du (i) dans l'article de Strichartz. La preuve du (ii) se fait par récurrence sur $|\alpha|$. Pour $|\alpha| = 0$, on applique l'inclusion $M(H_p^s) \subset M(H_p^\sigma)$.

Pour $|\alpha| \geq 1$, on écrit

$$A^{(\alpha)}\varphi = (A\varphi)^{(\alpha)} - \sum_{\gamma<\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} A^{(\gamma)}\varphi^{(\alpha-\gamma)} .$$

De l'inclusion $M(H_p^s) \subset M(H_p^{|\alpha|+\sigma})$, on tire

$$\|(A\varphi)^{(\alpha)}\|_{H_p^\sigma} \leq C \|A\varphi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}} \leq C' \|A\|_{M(H_p^s)} \|\varphi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}} .$$

L'hypothèse de récurrence donne

$$\|A^{(\gamma)}\varphi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^\sigma} \leq C \|A\|_{M(H_p^s)} \|\varphi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^{|\gamma|+\sigma}} ,$$

mais $\|\varphi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^{|\gamma|+\sigma}}$ est majoré par $C \|\varphi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}}$.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème IV. Il s'agira de se ramener par des arguments essentiellement algébriques au cas $s = 0$. Cette approche est rendue nécessaire par l'absence d'une caractérisation analytique simple des multiplicateurs de H_p^s , du moins pour $s < \frac{n}{p}$. Les inégalités capacitaires mises en évidence par Stegenga et Mazja se révèlent peu utilisables, dans la mesure où les capacités de Bessel sont elles-mêmes difficiles à calculer.

3. PREUVE DU THEOREME IV : LA REGULARISATION.

Il sera commode, dans un premier temps, de supposer que A opère sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, autrement dit que A est C^∞ , à croissance polynomiale, ainsi que toutes ses dérivées. On montrera l'existence de $C > 0$ (ne dépendant que de n , s , p et T) tel que

$$(1) \qquad \|[A,T]\|_{\mathcal{L}(H_p^s,H_p^s)} \leq C\,\|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad .$$

Le cas général s'en déduit par un argument de régularisation standard.

Soit en effet $A \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla A \in M(H_p^s)$ et φ une fonction positive C^∞ à support compact, telle que $\|\varphi\|_1 = 1$; on pose $\varphi_j(x) = j^n\varphi(jx)$ $(j \in \mathbb{N})$ et $A_j = A * \varphi_j$.

La relation $|A(x)| \leq |A(0)| + \|\nabla A\|_\infty |x|$ montre que $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; ainsi A_j est C^∞ à croissance polynomiale.

L'invariance de H_p^s , donc de $M(H_p^s)$, par translation entraîne :

$$\|\nabla A_j\|_{M(H_p^s)} = \|\varphi_j * \nabla A\|_{M(H_p^s)} \leq \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad .$$

Soient $f , g \in \mathcal{D}$; il est clair que $[A_j,T]f$ tend vers $[A,T]f$ au sens des distributions, quand $j \to \infty$. Ainsi

$$\langle [A,T]f, g\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle [A_j,T]f, g\rangle \quad ,$$

d'où
$$|\langle [A,T]f, g\rangle| \leq C\,\|\nabla A\|_{M(H_p^s)}\,\|f\|_{H_p^s}\,\|g\|_{H_{p'}^{-s}} \quad ,$$

ce qui donne la continuité $[A,T] : H_p^s \to H_p^s$.

4. PREUVE DU THEOREME IV : LE CAS $s \in]0,1[$.

L'hypothèse de régularité faite sur A justifie le calcul suivant :

$$(I-\Delta)^{s/2} \circ [A,T] = [(I-\Delta)^{s/2},A] \circ T - T \circ [(I-\Delta)^{s/2},A] + [A,[(I-\Delta)^{s/2},T]] +$$
$$+ [A,T] \circ (I-\Delta)^{s/2} \quad .$$

Appelons S_1 , S_2 , S_3 , S_4 les 4 opérateurs qui apparaissent au second membre ; (1) équivaut alors à

(2) $$\|S_j\|_{\mathcal{L}(H^s_p, L^p)} \leq C\|\nabla A\|_{M(H^s_p)} \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \quad .$$

Par le théorème II, $\|[A, T]\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)}$ est majoré par $C\|\nabla A\|_\infty$; ce qui donne immédiatement (2) pour $j = 4$.

$[(I-\Delta)^{s/2}, T]$ est un O.P.D. de la classe $Op^s_{1,0}$, à fortiori dans $Op^1_{1,0}$; de nouveau le théorème II donne $\|S_3\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq C\|\nabla A\|_\infty$; à plus forte raison, on a (2) pour $j = 3$.

L'estimation de S_1 et S_2 est plus délicate ; elle repose sur l'énoncé suivant, qui sera prouvé au § 6 :

<u>PROPOSITION 2</u>. <u>Pour</u> $0 < s < 1$, $1 < p < +\infty$ <u>et</u> $\nabla A \in L^\infty$, <u>le commutateur</u> $[(I - \Delta)^{s/2}, A]$ <u>est borné de</u> H^{s-1}_p <u>dans</u> L^p , <u>et sa norme majorée par</u> $C(s,p)\,\|\nabla A\|_\infty$.

La proposition 2 et la continuité de $T : H^s_p \to H^{s-1}_p$ entraînent aussitôt (2) pour $j = 1$.

Puisque T envoie H^1_p dans L^p , il suffit, pour estimer S_2 , de montrer que $\nabla \circ [(I - \Delta)^{s/2}, A]$ envoie H^s_p dans L^p ; ce dernier opérateur s'écrit aussi

$$(I-\Delta)^{s/2} \circ \nabla A - \nabla A \circ (I-\Delta)^{s/2} + [(I-\Delta)^{s/2}, A] \circ \nabla \quad .$$

Pour estimer le 1er terme, on utilise $\nabla A \in M(H^s_p)$ - c'est d'ailleurs la seule fois que l'on s'en sert, $\nabla A \in L^\infty$ suffisant partout ailleurs ; il est immédiat que $\nabla A \circ (I - \Delta)^{s/2}$ envoie H^s_p dans L^p ; enfin le 3e terme relève de la proposition 2 .

5. PREUVE DU THEOREME IV : le cas $s \geq 1$.

Posons $s = m + t$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t < 1$; (1) équivaut alors à

(3) $\|\partial^\alpha \circ [A,T]\|_{\mathcal{L}(H_p^s, H_p^t)} \leq C \|\nabla A\|_{M(H_p^s)}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$.

La règle de Leibniz donne aussitôt

$$\partial^\alpha \circ [A,T] = [A, \partial^\alpha \circ T] + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} A^{(\beta)} \circ \partial^{\alpha-\beta} \circ T \quad .$$

Le fait que $\partial^{\alpha-\beta} \circ T \in Op_{1,0}^{1+|\alpha|-|\beta|}$ et la proposition 1 entraînent

$$\|A^{(\beta)} \circ \partial^{\alpha-\beta} \circ T\|_{\mathcal{L}(H_p^{t+|\alpha|}, H_p^t)} \leq C \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad ,$$

quel que soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, $0 < \beta \leq \alpha$.

$\partial^\alpha \circ T$ s'écrit encore $\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} T_\gamma \circ \partial^{\alpha-\gamma}$, où T_γ est l'O.P.D. de symbole $\partial_x^\gamma \sigma(x,\xi)$; on a $T_\gamma \in Op_{1,0}^1$ et $0 \leq |\alpha-\gamma| \leq m$. On peut donc, sans perdre de généralité, remplacer $\partial^\alpha \circ T$ par $T \circ \partial^\alpha$.

Le commutateur $[A, T \circ \partial^\alpha]$ s'écrit encore

$$[A,T] \circ \partial^\alpha - \sum_{0\leq\beta<\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} T \circ A^{(\alpha-\beta)} \circ \partial^\beta \quad ;$$

les résultats du § 4 donnent

$$\|[A,T] \circ \partial^\alpha\|_{\mathcal{L}(H_p^s, H_p^t)} \leq C \|\nabla A\|_{M(H_p^t)} \quad .$$

Compte tenu de la continuité de $T : H_p^{t+1} \to H_p^t$, il nous faut enfin montrer, pour $\beta < \alpha$

(4) $$\|A^{(\alpha-\beta)}\|_{\mathcal{L}(H_p^{s-|\beta|}, H_p^{t+1})} \leq C \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad ;$$

or, le premier membre de (4) est équivalent à la somme des normes, dans l'espace $\mathcal{L}(H_p^{s-|\beta|}, H_p^t)$, des opérateurs $A^{(\alpha-\beta)}$, $\nabla A^{(\alpha-\beta)}$ et $A^{(\alpha-\beta)} \circ \nabla$; c'est de nouveau la proposition 1 qui fournit l'estimation souhaitée.

6. PREUVE DE LA PROPOSITION 2 : L'INTERPOLATION COMPLEXE.

Si Re s est 0 ou 1 , $(I-\Delta)^{s/2}$ est un O.P.D. d'ordre 0 ou 1 respectivement : la conclusion de la proposition 2 est donc satisfaite pour ces valeurs de s ; dès lors, il est tentant d'appliquer le théorème de Calderón-Lions (voir Reed et Simon, théorème IX.20) à la famille d'opérateurs $[(I-\Delta)^{z/2},A]$ $(0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1)$; deux modifications seront toutefois nécessaires pour se placer dans les hypothèses du dit théorème : on tronque le symbole de $(I-\Delta)^{z/2}$, puis on le multiplie par $(1+z)^{-N}$, où N est un grand entier, à notre disposition.

Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive, égale à 1 au voisinage de 0 et, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\sigma_{\varepsilon,z}(\xi) = (1+z)^{-N}(1+|\xi|^2)^{z/2}\varphi(\varepsilon\xi) \quad .$$

On note $T_\varepsilon(z)$ le commutateur $[A,\sigma_{\varepsilon,z}(D)]$; on va vérifier successivement que

(5) T_ε <u>est une fonction analytique</u>, <u>bornée</u>, <u>continue sur la bande</u> $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, <u>à valeurs dans</u> $\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)$.

(6) <u>Il existe</u> $C > 0$ <u>tel que</u>, <u>quels que soient</u> $\varepsilon \in]0,1]$ <u>et</u> $y \in \mathbb{R}$, <u>on ait</u>

$$\|T_\varepsilon(iy)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty$$

et

$$\|T_\varepsilon(1+iy)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty \quad ;$$

par interpolation complexe, il existe alors $C' > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et $0 < s < 1$, on ait :

(7) $$\|T_\varepsilon(s)\|_{\mathcal{L}(H_p^{s-1},L^p)} \leq C' \quad .$$

Voyons d'abord comment (7) entraîne la proposition 2.

Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il est élémentaire que, dans l'espace $\mathcal{S}$, on ait $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_{\varepsilon,s}(D)g = (1+s)^{-N}(I-\Delta)^{s/2}g$. En désignant par $\langle -,- \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$, on a donc, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle [A,(I-\Delta)^{s/2}]f,g\rangle = \langle A,((I-\Delta)^{s/2}f).g\rangle - \langle Af,\overline{(I-\Delta)^{s/2}\bar{g}}\rangle$$

$$= (1+s)^N \lim_{\varepsilon\to 0} (\langle A,(\sigma_{\varepsilon,s}(D)f)g\rangle - \langle Af,\overline{\sigma_{\varepsilon,s}(D)\bar{g}}\rangle)$$

$$= (1+s)^N \lim_{\varepsilon\to 0} \langle T_\varepsilon(s)f,g\rangle \quad ;$$

de (7) , on tire alors

$$|\langle [A,(I-\Delta)^{s/2}f],g\rangle| \leq (1+s)^N C' \|f\|_{H_p^{s-1}} \|g\|_{p'} \quad ,$$

d'où la continuité de $[A,(I-\Delta)^{s/2}] : H_p^{s-1} \to L^p$.

Avant d'aborder la preuve de (5) et (6) , rappelons que la condition (5) est purement "qualitative" , en particulier les constantes y dépendront très normalement de ε ; au contraire, c'est l'uniformité en ε qui est le point essentiel de (6).

On commence par montrer

$$\text{(8)} \qquad \sup_{0\leq \mathrm{Re}\, z\leq 1} \|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} < +\infty \quad .$$

Pour cela, on écrit

$$\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} \leq C(\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|T_\varepsilon(z)\circ\nabla\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}) \quad ;$$

puis

$$(T_\varepsilon(z)f)(x) = \int (A(x)-A(y))\,\theta_{\varepsilon,z}(x-y)\,f(y)\,dy \ , \quad \text{où } \hat{\theta}_{\varepsilon,z}(\xi) = \sigma_{\varepsilon,z}(\xi) \ .$$

Ainsi, $\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$ est majorée par

$$\text{(9)} \qquad C\,\|\nabla A\|_\infty \int |x|\,|\theta_{\varepsilon,z}(x)|\,dx \quad .$$

Pour estimer (9), on appelle M le premier entier supérieur à $\frac{n+1}{2}$;

alors

$$(1+|x|^2)^M |\theta_{\varepsilon,z}(x)| = \left|(2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}(I-\Delta)^M \sigma_{\varepsilon,z}(\xi)\,d\xi\right|$$

$$\leq C_n\,\varepsilon^{-n} \sup_{\substack{|\xi|\leq\varepsilon^{-1}\\ |\alpha|\leq 2M}} \left|\sigma^{(\alpha)}_{\varepsilon,z}(\xi)\right|$$

$$\leq C'_n\,\varepsilon^{-n}\,|1+z|^{-N} \sup_{\substack{|\xi|\leq\varepsilon^{-1}\\ |\alpha|\leq 2M}} \left|\partial_\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^{z/2}\right| \quad .$$

$\partial_\xi^\alpha (1+|\xi|^2)^{z/2}$ est de la forme $P_\alpha(\xi,z)(1+|\xi|^2)^{z/2-|\alpha|}$, où P_α est un polynôme de degré $|\alpha|$ en ξ et en z ; on a donc

$$\sup_{\substack{|\xi|\leq \varepsilon^{-1}\\ |\alpha|\leq 2M}} |\partial_\xi^\alpha (1+|\xi|^2)^{z/2}| \leq (1+|z|)^{2M} C(n,\varepsilon) \quad .$$

Sur la bande $0\leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on a $|1+z| \sim 1+|z|$; dès lors, en imposant $N \geq 2M$, (9) est majoré par $C(n,\varepsilon)\,\|\nabla A\|_\infty$.

Pour estimer $\|T_\varepsilon(z)\circ\nabla\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$, on écrit

$$(T_\varepsilon(z)\circ \frac{\partial}{\partial x_k})(f)(x) =$$
$$\int (A(x)-A(y))\, \frac{\partial \theta_{\varepsilon,z}}{\partial x_k}(x-y)\, f(y)\,dy + \int \theta_{\varepsilon,z}(x-y)\, \frac{\partial A}{\partial y_k}(y)\, f(y)\,dy \quad .$$

La norme $L^p \to L^p$ de $T_\varepsilon(z)\circ\frac{\partial}{\partial x_k}$ est donc majorée par

$$(10) \qquad C\,\|\nabla A\|_\infty \int (|\theta_{\varepsilon,z}(x)| + |x|\, |\frac{\partial \theta_{\varepsilon,z}}{\partial x_k}(x)|)\,dx \quad ;$$

(10) se majore exactement comme (9) . Ainsi s'achève la preuve de (8) .

Pour montrer que T_ε est analytique sur la bande $0 < \operatorname{Re} z < 1$, il suffit de montrer la même propriété pour $z \mapsto (1+z)^N T_\varepsilon(z)$.

On pose $\hat{\psi}_{\varepsilon,z}(\xi) = (1+z)^N \sigma_{\varepsilon,z}(\xi)$ et

$S_\varepsilon(z) f(x) = \int (A(x)-A(y))\, \frac{\partial \psi_{\varepsilon,z}}{\partial z}(x-y)\, f(y)\,dy$. Il s'agit de montrer que $\frac{\partial}{\partial z}((1+z)^N T_\varepsilon(z)) = S_\varepsilon(z)$.

$$\left\| \frac{(1+z)^N T_\varepsilon(z) - (1+z_0)^N T_\varepsilon(z_0)}{z-z_0} - S_\varepsilon(z_0) \right\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)}$$ est majoré par

$C\,\|\nabla A\|_\infty$ que multiplie

$$\int \left| \frac{\psi_{\varepsilon,z}(x) - \psi_{\varepsilon,z_0}(x)}{z-z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{\varepsilon,z}(x))\Big|_{z=z_0} \right| (1+|x|)\,dx \; +$$
$$+ \int \left| \frac{\nabla\psi_{\varepsilon,z}(x) - \nabla\psi_{\varepsilon,z_0}(x)}{z-z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\psi_{\varepsilon,z}(x))\Big|_{z=z_0} \right| |x|\,dx \quad .$$

Nous allons voir que la première intégrale tend vers 0 quand $z \to z_0$ (il en sera évidemment de même pour la seconde). On la majore par

$$C(n) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^M \left| \frac{\psi_{\epsilon,z}(x) - \psi_{\epsilon,z_0}(x)}{z-z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{\epsilon,z}(x))\Big|_{z=z_0} \right| \leq$$

$$\leq C(n,\epsilon) \sup_{\substack{|\alpha| \leq 2M \\ |\xi| \leq \epsilon^{-1}}} \left| \partial_\xi^\alpha \left[\frac{(1+|\xi|^2)^{z/2} - (1+|\xi|^2)^{z_0/2}}{z-z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(1+|\xi|^2)^{z/2}\Big|_{z=z_0} \right] \right| \quad ;$$

que cette dernière expression tende vers 0 avec $|z-z_0|$ relève du calcul différentiel élémentaire. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la continuité de T_ϵ au bord de la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, achevant ainsi de prouver la condition (5).

Pour prouver les inégalités (6), nous aurons besoin de la formulation quantitative du théorème II :

Il existe une constante $C(n,p)$ et un entier P tels que, pour toute fonction lipschitzienne A et tout symbole $\sigma(\xi)$ de la classe $S^1_{1,0}$, on ait

$$(11) \qquad \|[A, \operatorname{Op}(\sigma)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \, \|\nabla A\|_\infty \sup_{\substack{|\alpha| \leq P \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} (1+|\xi|)^{|\alpha|-1} |\sigma^{(\alpha)}(\xi)| \ .$$

Dès lors l'inégalité $\|T_\epsilon(1+iy)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \, \|\nabla A\|_\infty$ sera la conséquence de (11) et de :

Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $|\alpha| \leq P$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in \,]0,1]$ et $y \in \mathbb{R}$, on ait

$$(12) \qquad |\sigma^{(\alpha)}_{\epsilon,1+iy}(\xi)| \leq C\,(1+|\xi|)^{1-|\alpha|} \ .$$

Pour prouver (12), on écrit $\sigma^{(\alpha)}_{\epsilon,1+iy}(\xi)$ sous la forme

$$(2+iy)^{-N} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} P_\beta(\xi, 1+iy)(1+|\xi|^2)^{\frac{1+iy}{2}-|\beta|} \epsilon^{|\gamma|} \varphi^{(\gamma)}(\epsilon\xi) \ ,$$

dont la valeur absolue est majorée par $C(n,N,\alpha)(1+|y|)^{|\alpha|-N}(1+|\xi|^2)^{\frac{1-|\alpha|}{2}}$; il reste à choisir $N \geq P$ pour obtenir une majoration uniforme. L'estimation de $\|T_\epsilon(iy)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)}$ relève des mêmes techniques ; cette norme est en effet majorée par $\|[A,\sigma_{\epsilon,iy}(D)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|[A,\sigma_{\epsilon,iy}(D)\circ\nabla]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|\sigma_{\epsilon,iy}(D)\circ\nabla A\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$.

De la même façon que (12), on montre

$$|\sigma^{(\alpha)}_{\epsilon,iy}(\xi)| \leq C.(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \tag{13}$$

(pour $|\alpha| \leq P$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in]0,1]$) .

(13) et (11) entraînent alors

$$\|[A,\sigma_{\epsilon,iy}(D)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty \quad .$$

(13) entraîne aussi la continuité L^p des O.P.D. $\sigma_{\epsilon,iy}(D)$ avec l'estimation $\|\sigma_{\epsilon,iy}(D)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C$, d'où

$$\|\sigma_{\epsilon,iy}(D)\circ\nabla A\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty \quad .$$

Enfin, le symbole de $\sigma_{\epsilon,iy}(D)\circ\frac{\partial}{\partial x_k}$ est $i\xi_k\,\sigma_{\epsilon,iy}(\xi)$ et (13) entraîne

$$|\partial^\alpha_\xi(i\xi_k\sigma_{\epsilon,iy}(\xi))| \leq C\,(1+|\xi|)^{1-|\alpha|} \quad ;$$

on applique de nouveau (11) pour obtenir

$$\|[A,\sigma_{\epsilon,iy}(D)\circ\nabla]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty \quad .$$

7. VARIANTES DU THEOREME IV.

La classe $Op^1_{1,0}$ n'est évidemment pas la seule possible. Il est facile de voir que la classe des opérateurs de convolution dont le symbole $\sigma(\xi)$ est homogène de degré 1 et C^∞ sur la sphère unité, convient également.

Dans le théorème IV, on peut encore remplacer l'espace de Sobolev H^s_p par l'espace de Besow $B^s_{p,q}$ $(s \in \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty)$ (voir la preuve dans la note aux Comptes-Rendus qui résume le présent travail).

BIBLIOGRAPHIE

BEALS M. and REED M., Propagation of Singularities for Hyperbolic Pseudo-Differential Operators with Non-smooth Coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 169-184.

BOURDAUD G., Une extension du théorème des commutateurs de Calderón. C.R.A.S. (à paraître)

CALDERÓN A.P., Commutators of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 53 (1965), 1092-1099.

COIFMAN R.R. et MEYER Y., Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 28, n° 3 (1978), 177-202.

MAZJA V.G. and SAPOSNIKOVA T.O., On multipliers in function spaces with fractional derivatives, Soviet Math. Dokl. 20, n° 1 (1979), 160-165.

REED M. and SIMON B., Methods of Modern Mathematical Physics II, Academic Press (1975).

STEGENGA D.A., Multipliers of the Dirichlet Space, Illinois J. Math. 24, n° 1 (1980), 113-139.

STRICHARTZ R.S., Multipliers on Fractional Sobolev Spaces, J. Math. Mech. 16, n° 9 (1967), 1031-1060.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
2 place Jussieu
75251 PARIS cedex 05

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHEMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

INEGALITES L^2 PRECISEES POUR LA CLASSE $S^0_{0,0}$

Gérard BOURDAUD et Yves MEYER

1. INTRODUCTION

A toute fonction σ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, suffisamment régulière, est associé <u>l'opérateur pseudo-différentiel de symbole</u> σ, défini sur la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ par

$$\mathrm{Op}(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi}\, \hat{f}(\xi)\, \sigma(x,\xi)\, d\xi .$$

Suivant Hörmander [4], $S^0_{0,0}$ est l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dont toutes les dérivées sont bornées ; il est bien connu que tout opérateur pseudo-différentiel dont le symbole appartient à $S^0_{0,0}$ est borné sur L^2, mais on peut se demander combien de dérivées sont nécessaires pour obtenir cette propriété. Voici les résultats les plus précis dans cette direction.

THEOREME 1. <u>Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$, <u>il suffit que son symbole vérifie l'une des deux conditions suivantes</u> :

(i) $\quad \partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1$ et $|\beta| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1$;

(ii) $\quad \partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ pour $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$.

En 1975, H. O. Cordes [3] démontrait la partie (i) du théorème et annonçait sans démonstration la partie (ii) ; dans l'un et l'autre cas, le "nombre" de dérivées utilisées est minimal :

PROPOSITION 1. <u>Il existe des opérateurs pseudo-différentiels non bornés sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>dont les symboles</u> $\sigma(x,\xi)$ <u>vérifient</u> $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ <u>pour tous multiindices</u> α, β <u>tels que, respectivement,</u> (i) $\alpha \in \mathbb{N}^n$ <u>et</u> $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]$, (ii) $\beta \in \mathbb{N}^n$ <u>et</u> $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]$, (iii) $\alpha \in \mathbb{N}^n$ <u>et</u> $\beta_1 = 0$, (iv) $\beta \in \mathbb{N}^n$ <u>et</u> $\alpha_1 = 0$.

Il suffit de reprendre le contre-exemple de Coifman et Meyer ([2], Chap. I, prop. 2) : $\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{n}{4}} \exp(-ix.\xi - |x|^2)$. Un raisonnement par récurrence montre que

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{n}{4}-|\alpha|} \exp(-ix.\xi - |x|^2)\, Q_{\alpha,\beta}(x,\xi),$$

où $Q_{\alpha,\beta}$ est un polynôme par rapport aux deux variables, de degré $2|\alpha|+|\beta|$ en ξ ; on en déduit aussitôt

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{-\frac{n}{4}+\frac{|\beta|}{2}} .$$

Ainsi $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (i). Il reste à voir que $Op(\sigma)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $Op(\sigma)(f)(x) = L(f)\, e^{-|x|^2}$, où L est la forme linéaire

$$L(f) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-\frac{n}{4}}\, d\xi \ ;$$

la fonction $(1+|\xi|^2)^{-\frac{n}{4}}$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$: il en résulte que L et donc $Op(\sigma)$ ne sont pas bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour obtenir un symbole vérifiant $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (ii), il suffit d'échanger x et ξ :

$$\sigma(x,\xi) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{4}} \exp(-ix.\xi - |\xi|^2) \ ;$$

alors, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$Op(\sigma)(f)(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{4}}\, L(f) \ ,$$

où L est la forme linéaire

$$L(f) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\xi|^2)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \ ,$$

dès que $L(f) \neq 0$, on a $Op(\sigma)(f) \notin L^2(\mathbf{R}^n)$.

Voici maintenant un symbole σ tel que $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (iii) : on pose $\sigma_1(x_1, \xi_1) = (1 + \xi_1^2)^{-1/4} \exp(-ix_1\xi_1 - x_1^2)$ et $\sigma(x, \xi) = \sigma_1(x_1, \xi_1)$.

Le fait que $Op(\sigma_1)$ ne soit pas borné sur $L^2(\mathbf{R})$ entraîne immédiatement que $Op(\sigma)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$; en échangeant x et ξ, on obtient un symbole qui vérifie $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (iv).

Dès lors une façon raisonnable d'affaiblir les hypothèses du théorème 1 consiste à imposer des conditions de Hölder aux dérivées d'ordre $\left[\frac{n}{2}\right]$ du symbole $\sigma(x, \xi)$.

Pour comprendre les énoncés qui suivent, il faut considérer $\sigma(x, \xi)$ <u>comme une fonction de</u> ξ, <u>à valeurs dans certains espaces de fonctions de</u> x - ce que nous ferons systématiquement.

Soit E un espace de Banach et s un réel positif, non entier, que nous écrirons $s = m + a$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $a \in]0, 1[$. $\Lambda_s(\mathbf{R}^n, E)$ désignera l'espace de Banach des applications $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow E$, de classe C^m, dont toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre m inclus, sont bornées et telles que, pour $|\alpha| = m$,

$$\sup_{x, h \in \mathbf{R}^n} |h|^{-a} \| f^{(\alpha)}(x+h) - f^{(\alpha)}(x) \|_E < \infty .$$

THEOREME 2. <u>Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$, <u>il suffit que son symbole appartienne à</u> $\Lambda_s(\mathbf{R}^n, \Lambda_s(\mathbf{R}^n))$, <u>avec</u> $s > \frac{n}{2}$.

<u>Commentaires sur le théorème</u> 2.

1. L'appartenance de σ à $\Lambda_s(\mathbf{R}^n, \Lambda_s(\mathbf{R}^n))$ peut encore s'exprimer de la façon suivante :

(i) $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ pour $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$;

(ii) si $\tau = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma$, avec $|\alpha| = m$ ou $|\beta| = m$, alors τ a les propriétés de continuité suivantes :

(a) $|\tau(x+h, \xi+\eta) - \tau(x, \xi)| \leq C(|h| + |\eta|)^a$;

(b) $\quad |\tau(x+h\,,\,\xi+\eta)-\tau(x,\xi+\eta)-\tau(x+h\,,\,\xi)+\tau(x,\xi)| \leq C\,|\eta|^a\,|h|^a.$

Il n'est pas inutile d'observer que les conditions (a) et (b) sont indépendantes l'une de l'autre : si $F \in \Lambda_a(\mathbf{R}^n)$ et $F \notin \Lambda_{a+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$ $(\varepsilon > 0)$ alors $\tau(x,\xi) = F(x+\xi)$ vérifie (a) mais pas (b) ; si $F \notin L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $|F(x+h) - F(x)| \leq C\,|h|^a$, $\tau(x,\xi) = F(x)\,F(\xi)$ vérifie (b) mais pas (a).

2. L'hypothèse $s > \frac{n}{2}$ est bien la plus faible possible; dans le cas où n est pair, ceci résulte de la proposition 1 ; supposons maintenant que $n = 2m+1$, avec $m \in \mathbf{N}$, et montrons que le symbole $\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-n/4}\exp(-ix.\xi - |x|^2)$ vérifie $\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\sigma \in L^\infty(\mathbf{R}^n, \Lambda_{1/2}(\mathbf{R}^n))$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $|\beta| = m$.

D'après la preuve de la proposition 1, il suffit de montrer que $\tau(x,\xi) = x^\gamma \exp(-ix.\xi - |x|^2)$ $(\gamma \in \mathbf{N}^n)$ vérifie

$$\|\tau(.\,,\xi)\|_{\Lambda_{1/2}} \leq C_\gamma (1+|\xi|^2)^{1/4} \quad ;$$

pour cela, on observe que les fonctions $x^\gamma \exp(-|x|^2)$ et e^{it} appartiennent respectivement à $\Lambda_{1/2}(\mathbf{R}^n)$ et $\Lambda_{1/2}(\mathbf{R})$; on en tire

$$\begin{aligned} |\tau(x+h,\xi) - \tau(x,\xi)| &\leq |\exp(-|x+h|^2)(x+h)^\gamma|\;|\exp(-ih.\xi) - 1| \\ &\quad + |\exp(-|x+h|^2)(x+h)^\gamma - \exp(-|x|^2)\,x^\gamma| \\ &\leq C_\gamma\,|h|^{1/2}(1+|\xi|^2)^{1/4}. \end{aligned}$$

CQFD.

3. On peut démontrer le théorème 2 en utilisant les techniques de Cordes. Posons en effet

$$b = (I - \Delta_x)^{s'/2}\,(I - \Delta_\xi)^{s'/2}\,\sigma \quad , \quad \text{avec } \frac{n}{2} < s' < s \quad ;$$

des propriétés classiques des fonctions Hölderiennes (cf. [6]), il résulte que $b \in L^\infty(\mathbf{R}^{2n})$; dès lors on peut écrire $\sigma = g * b$, où $b \in L^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et $g(x,\xi)$ est le symbole d'un opérateur à trace sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

On a alors

$$\mathrm{Op}(\sigma) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} b(y,\eta)\, U(y,\eta) \circ \mathrm{Op}(g) \circ U(y,\eta)^* \, dy\, d\eta \quad ,$$

où $U(y,\eta)$ est l'opérateur unitaire qui à $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ associe $x \longrightarrow e^{ix.\eta} f(x-y)$. On achève la démonstration à l'aide du "lemme de Cordes et Kato" ([5] et [7], chap. XIII).

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons une démonstration entièrement différente des théorèmes 1 et 2, à la fois plus élémentaire - elle est fondée exclusivement sur l'égalité de Plancherel - et plus générale : on peut en déduire en effet toute une famille d'inégalités L^2 "dans le cadre $S^0_{0,0}$".

2. ALGEBRES DE BEURLING ET ESTIMATIONS L^2.

La preuve du théorème 2 reposera sur les remarques simples suivantes : 1) les fonctions appartenant à $\Lambda_{s'}$ sont des multiplicateurs de l'espace de Sobolev H^s, quel que soit $s < s'$; 2) pour $s > \frac{n}{2}$, H^s est une "algèbre de Beurling", pour laquelle on dispose des lemmes de presque-orthogonalité de Coifman et Meyer [2].

Soit ω une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $[1, +\infty[$ et $A_\omega(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées f telles que $\xi \longrightarrow \omega(\xi)^{1/2} \hat{f}(\xi)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$. A_ω est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|f\|_{A_\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \omega(\xi)\, d\xi\right)^{1/2}.$$

Les propriétés

(1) $\quad \frac{1}{\omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\quad \omega$ à croissance polynomiale

impliquent la double inclusion $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset A_\omega \subset A(\mathbb{R}^n)$. La condition

(3) $\quad$ Il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega} \leq \frac{C}{\omega}$

entraîne que A_ω est, de plus, une sous-algèbre de $A(\mathbb{R}^n)$. Nous utiliserons enfin la propriété

(4) Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ $\omega(\xi+\eta) \leq C\,\omega(\xi)\,\omega(\eta)$.

Un poids ω qui vérifie (1), (2), (3), (4) s'appelle un <u>poids de Beurling</u> (et A_ω une algèbre de Beurling).

LEMME 1. <u>Soit</u> ω <u>un poids vérifiant (2) et (4). Pour toute fonction</u> $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, <u>non nulle, il existe</u> $C \geq 1$ <u>tel que</u>

$$\frac{1}{C}\|f\|^2_{A_\omega} \leq \int_{\mathbf{R}^n} \|f(x-y)\,\varphi(x)\|^2_{A_\omega}\, dy \leq C\|f\|^2_{A_\omega}.$$

La transformée de Fourier de $x \longrightarrow f(x-y)\,\varphi(x)$ est $\xi \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy.\eta}\,\hat{f}(\eta)\,\hat{\varphi}(\xi-\eta)\,d\eta$; d'où

$$(5) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \|f(x-y)\,\varphi(x)\|^2_{A_\omega}\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} dy \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \omega(\xi)\,\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy.\eta}\,\hat{f}(\eta)\,\hat{\varphi}(\xi-\eta)\,d\eta\,\Big|^2 d\xi\Big).$$

Fixons ξ et intégrons en y ; il vient, par Plancherel,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy.\eta}\,\hat{f}(\eta)\,\hat{\varphi}(\xi-\eta)\,d\eta\Big|^2 dy = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} \Big|\hat{f}(\eta)\,\hat{\varphi}(\xi-\eta)\Big|^2 d\eta.$$

Intégrons par rapport à ξ : (5) est alors égal à

$$(6) \qquad (2\pi)^n \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\eta)|^2\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,\omega(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta \quad ;$$

à l'aide de (4), on majore (6) par $C\|f\|^2_{A_\omega}\,\|\varphi\|^2_{A_\omega}$ et on minore (6) par

$$\frac{1}{C}\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\eta)|^2\,\omega(\eta)\,d\eta\Big)\Big(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|^2}{\omega(\xi)}\,d\xi\Big).$$

Voici maintenant les lemmes de presque-orthogonalité.

LEMME 2. <u>Si</u> ω <u>vérifie (1), il existe</u> $C > 0$ <u>tel que</u>

$$\Big\|\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu.x}\,f_u(x)\,du\Big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\Big(\int_{\mathbf{R}^n} \|f_u\|^2_{A_\omega}\,du\Big)^{1/2}.$$

LEMME 3. Si ω vérifie (1) et (3), il existe $C > 0$ tel que
$$\left\|\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu.x} f_u(x)\,du\right\|_{A_\omega} \leq C\left(\int_{\mathbf{R}^n} \|f_u\|^2_{A_\omega}\, \omega(u)\,du\right)^{1/2}.$$

Soit $g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iu.x} f_u(x)\,du$, on a $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}_u(\xi - u)\,du$, d'où, par Plancherel,
$$\|g\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \left|\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}_u(\xi - u)du\right|^2 d\xi \quad ;$$

puis, par Cauchy-Schwarz et (1),
$$\|g\|_2^2 \leq C \iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |\hat{f}_u(\xi)|^2\, \omega(\xi)\, d\xi\, du\ ,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2.

La relation (3) et Cauchy-Schwarz entraînent
$$\omega(\xi)\,|\hat{g}(\xi)|^2 \leq C \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}_u(\xi - u)|^2\, \omega(\xi - u)\, \omega(u)\,du \quad ;$$

il suffit alors d'intégrer en ξ pour obtenir le lemme 3.

Nous en arrivons à l'énoncé du meilleur résultat connu sur la continuité L^2 des O.P.D. dans le "cadre $S^0_{0,0}$" - cette dernière expression signifiant que les hypothèses sur le symbole $\sigma(x,\xi)$ sont uniformément invariantes sous l'effet des translations en x et en ξ.

THEOREME 3. Soient ω_1 un poids de Beurling et ω_2 un poids vérifiant (1) et (2) ; on pose $\Omega(x,\xi) = \omega_1(x)\,\omega_2(\xi)$. Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ il suffit que son symbole σ soit un multiplicateur de $A_\Omega(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$: autrement dit qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $\|\sigma\,\varphi\|_{A_\Omega} \leq C\|\varphi\|_{A_\Omega}$.

L'idée de base (déjà utilisée par A. P. Calderón et R. Vaillancourt [1]) est une double localisation : par rapport à la variable d'espace x et la fréquence ξ. Pour cela, on appelle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction positive telle que $\int \varphi(x)^2\,dx = 1$.

Désignons par $\lambda_{\eta,y}$ la transformée de Fourier de $(x,\xi) \longrightarrow \sigma(x+y\ ,\ \xi+\eta)\,\varphi(\xi)\,\varphi(x)$; l'hypothèse faite sur σ signifie exactement :

(7) Il existe $C > 0$ telle que

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\lambda_{\eta,y}(u,v)|^2\, \omega_1(u)\, \omega_2(v)\, du\, dv \leq C.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \varphi^2(\xi-\eta)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta.x}\, g_\eta(x)\, d\eta, \qquad \text{avec}$$

$$g_\eta(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi+\eta)\, \varphi(\xi)\, \hat{f}_\eta(\xi)\, d\xi$$

et $\hat{f}_\eta(\xi) = \varphi(\xi)\, \hat{f}(\xi+\eta)$; il découle alors du lemme 2 :

(8) $$\|g\|_2^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|g_\eta\|_{A_{\omega_1}}^2\, d\eta.$$

Maintenant, on localise spatialement en posant $g_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\eta(x)\, \varphi^2(x-y)\, dy$; le lemme 1 donne

(9) $$\|g_\eta\|_{A_{\omega_1}}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|g_\eta(x)\, \varphi^2(x-y)\|_{A_{\omega_1}}^2\, dy.$$

Il reste à estimer le second membre de (9) :

$$g_\eta(x)\varphi(x-y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi+\eta)\, \varphi(\xi)\varphi(x-y)\, \hat{f}_\eta(\xi)\, d\xi$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_\eta(x+v)\, e^{iu.x}\, e^{-iu.y}\, \lambda_{\eta,y}(u,v)\, du\, dv.$$

Posons $f_{\eta,y,v}(x) = f_\eta(x+v)\,\varphi(x-y)$; le lemme 1 implique

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|^2_{A_{\omega_1}} dy \leq C\|f_\eta\|^2_{A_{\omega_1}} \leq C'\|f_\eta\|^2_2 \quad ,$$

en effet le support de $\hat{f}_\eta$ est un compact fixe ; d'où

$$(10) \qquad \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|^2_{A_{\omega_1}} dy\, d\eta \leq C\|f\|^2_2$$

Ainsi

$$g_\eta(x)\ \varphi^2(x-y) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_{\eta,y,v}(x)\, e^{iu.x}\, e^{-iu.y}\, \lambda_{\eta,y}(u,v)\, du\, dv,$$

ce qui donne, par le lemme 3, à y fixé,

$$(11) \quad \|g_\eta(x)\,\varphi^2(x-y)\|^2_{A_{\omega_1}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1(u)\Big\|\int_{\mathbb{R}^n} f_{\eta,y,v}\, e^{-iu.y}\, \lambda_{\eta,y}(u,v)\, dv\Big\|^2_{A_{\omega_1}} du \ ;$$

on a

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}^n} f_{\eta,y,v}\, e^{-iu.y}\, \lambda_{\eta,y}(u,v)\, dv\Big\|^2_{A_{\omega_1}}$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|_{A_{\omega_1}}\, |\lambda_{\eta,y}(u,v)|\, dv\Big)^2$$

$$\leq \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \|f_{\eta,y,t}\|^2_{A_{\omega_1}} \frac{dt}{\omega_2(t)}\Big]\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda_{\eta,y}(u,v)|^2\, \omega_2(v)\, dv\Big] \ ;$$

reportons cette inégalité dans (11) : en utilisant (7), on obtient

$$\|g_\eta(x)\,\varphi^2(x-y)\|^2_{A_{\omega_1}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \|f_{\eta,y,t}\|^2_{A_{\omega_1}} \frac{dt}{\omega_2(t)} \ ;$$

intégrons cette relation par rapport à y et η ; en utilisant (10), puis (9) et (8), enfin $\frac{1}{\omega_2} \in L^1$, on obtient $\|g\|_2 \leq C\|f\|_2$, autrement dit la continuité L^2.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

On s'intéresse maintenant au cas particulier où $\omega(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s$ avec

$s > \frac{n}{2}$. Une fonction $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ appartient alors à l'algèbre de Beurling A_Ω si et seulement si, considérée comme fonction de ξ à valeurs dans les fonctions de x, elle appartient à $H^s(\mathbf{R}^n, H^s(\mathbf{R}^n))$.

Pour obtenir le théorème, il suffit donc de montrer que, pour $s' > s$, les fonctions de $\Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n, \Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n))$ sont des multiplicateurs de $H^s(\mathbf{R}^n, H^s(\mathbf{R}^n))$; ceci résultera de la

PROPOSITION 2. Soient E un espace de Hilbert, F un espace de Banach et $B : E \times F \longrightarrow E$ une application bilinéaire continue ; s et s' deux réels non entiers tels que $s < s'$. Alors pour tout $f \in \Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n, F)$ et tout $g \in H^s(\mathbf{R}^n, E)$, la fonction $B(g,f)$ appartient à $H^s(\mathbf{R}^n, E)$.

On ne perd pas de généralité en supposant que B est de norme 1 et que s et s' ont la même partie entière m ; posons alors $s = m + a$, $s' = m + a'$. Il est utile d'estimer la norme de $f \in H^s(\mathbf{R}^n, E)$ sans recourir à la transformée de Fourier de f ; plus précisément, on montre, comme dans le cas $E = \mathbf{C}$ (voir [8], lemme 25.2)) que cette norme équivaut à

$$(12) \qquad \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2(\mathbf{R}^n, E)} + \sum_{|\alpha| = m} \left[\iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{\|f^{(\alpha)}(x+t) - f^{(\alpha)}(x)\|_E^2}{|t|^{n+2a}} \, dx \, dt \right]^{1/2} ;$$

compte-tenu de l'intégrabilité de $t \longrightarrow |t|^{-n-2a}$ à l'infini, (12) est d'ailleurs équivalente à

$$(13) \qquad \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2(\mathbf{R}^n, E)} + \sum_{|\alpha| = m} \left[\iint_{|t| \leq 1} \frac{\|f^{(\alpha)}(x+t) - f^{(\alpha)}(x)\|_E^2}{|t|^{n+2a}} \, dx \, dt \right]^{1/2} .$$

Soit $f \in \Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n, F)$ et $g \in H^s(\mathbf{R}^n, E)$: pour estimer la norme (13) de $B(g,f)$ on est amené à étudier $B(g^{(\gamma)}, f^{(\beta)})$, avec $|\gamma| + |\beta| \leq m$.

D'abord $\|B(g^{(\gamma)}, f^{(\beta)})\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n, E)} = \int \|B(g^{(\gamma)}(x), f^{(\beta)}(x))\|_E^2 \, dx$

$$\leq \int \|g^{(\gamma)}(x)\|_E^2 \, \|f^{(\beta)}(x)\|_F^2 \, dx$$

$$\leq \|f^{(\beta)}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n,F)} \|g^{(\gamma)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n,E)} \quad ;$$

pour conclure on remarque que $|\beta| \leq m$ implique $\|f^{(\beta)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n,F)} \leq \|f\|_{\Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n,F)}$.

Vient ensuite l'intégrale

$$I = \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|B(g^{(\gamma)}(x+t), f^{(\beta)}(x+t)) - B(g^{(\gamma)}(x), f^{(\beta)}(x))\|^2_E}{|t|^{n+2a}} \, dx\, dt \quad ;$$

on a $I \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$, avec

$$I_1 = \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|f^{(\beta)}(x+t) - f^{(\beta)}(x)\|^2_F \, \|g^{(\gamma)}(x+t)\|^2_E}{|t|^{n+2a}} \, dx\, dt$$

$$I_2 = \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t) - g^{(\gamma)}(x)\|^2_E \, \|f^{(\beta)}(x)\|^2_F}{|t|^{n+2a}} \, dx\, dt.$$

L'hypothèse $|\beta| \leq m$ entraîne $\|f^{(\beta)}(x+t) - f^{(\beta)}(x)\|_F \leq C\|f\|_{\Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n,F)} |t|^{a'}$; I_1

est donc majorée par

$$C\|f\|^2 \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t)\|^2_E}{|t|^{n+2(a-a')}} \, dx\, dt = C' \|f\|^2 \|g^{(\gamma)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n,E)} .$$

I_2 est majorée immédiatement par

$$\|f^{(\beta)}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n,F)} \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t) - g^{(\gamma)}(x)\|^2_E}{|t|^{n+2a}} \, dx\, dt.$$

La proposition 2 s'applique deux fois. D'abord avec $E = F = \mathbf{C}$, ce qui permet d'obtenir l'application bilinéaire continue

$$B : H^s(\mathbf{R}^n) \times \Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbf{R}^n)$$
$$(g\,,\,f) \longrightarrow fg\ .$$

Ensuite avec $E = H^s(\mathbf{R}^n)$, $F = \Lambda_{s'}(\mathbf{R}^n)$, B étant l'application qu'on vient de définir.

4. AUTRES RESULTATS DANS LE CADRE $S^0_{0,0}$

Le théorème suivant a été énoncé - avec des hypothèses un peu plus fortes - par Coifman et Meyer (Chap. I de [2]).

THEOREME 4. *Soit* ω *un poids de Beurling et* $\sigma(x,\xi)$ *un symbole tel que* $\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} \|\partial_\xi^\alpha \sigma(.,\xi)\|_{B_\omega} < +\infty$ *pour tout* $\alpha \in \{0,1\}^n$, *où* B_ω *désigne l'algèbre des multiplicateurs de* A_ω. *Alors l'opérateur pseudo-différentiel de symbole* σ *est borné sur* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Voici deux corollaires du théorème 4.

1. On fait $\omega(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$ $(s > \frac{n}{2})$ et l'on remarque que $A_\omega \subset B_\omega$; ainsi les conditions $\|\partial_\xi^\alpha \sigma(.,\xi)\|_{H^s} \leq C_\alpha$ $(\alpha \in \{0,1\}^n$, $s > \frac{n}{2})$ sont suffisantes pour que $Op(\sigma)$ soit borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

2. On fait $\omega(\xi) = (1+\xi_1^2)\dots(1+\xi_n^2)$: on obtient alors le théorème 1 (hypothèses (ii)).

Soit E un espace de Banach ; on désigne par $M(\mathbf{R}^n,E)$ (resp. $N(\mathbf{R}^n,E)$) l'espace des $f:\mathbf{R}^n \longrightarrow E$ telles que $f^{(\alpha)} \in L^\infty(\mathbf{R}^n,E)$ (resp. $L^2(\mathbf{R}^n,E)$) pour $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Soit B une application bilinéaire continue de $E\times F$ dans G $(E,F,G$ espaces de Banach) ; si $f \in M(\mathbf{R}^n, E)$ et $g \in N(\mathbf{R}^n, F)$, on a immédiatement $B(f,g) \in N(\mathbf{R}^n, G)$.

Appliquons ceci à $E = B_\omega$, $F = G = A_\omega$. $M(\mathbf{R}^n, B_\omega)$ est l'espace des symboles vérifiant les hypothèses du théorème 4 ; $N(\mathbf{R}^n, A_\omega)$ est l'algèbre de Beurling $A_\Omega(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$ associée au poids $\Omega(x,\xi) = \omega(x)(1+\xi_1^2)\dots(1+\xi_n^2)$.

On vient de voir précisément que $M(\mathbf{R}^n, B_\omega)$ est formée de multiplicateurs de $N(\mathbf{R}^n, A_\omega)$; il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 3.

COMMUTATEURS DE CALDERÓN ET LEMME DE COTLAR

Guy DAVID

Nous nous proposons d'établir la continuité des opérateurs intégraux singuliers définis par les noyaux v. p. $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$, $A' \in L^\infty(\mathbb{R} ; dx)$ en utilisant seulement les deux ingrédients suivants

(*) le lemme de Cotlar et Stein qui a d'ailleurs été inventé à cet effet

(**) l'inégalité L^2 pour un opérateur bilinéaire particulier $L : BMO \times L^2 \to L^2$ dont l'étude directe est immédiate en appliquant la définition d'une mesure de Carleson.

1. Introduction, énoncés des résultats et notations

Comme chacun sait, la véritable difficulté de l'étude des opérateurs T_k définis par les noyaux v. p. $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ réside dans la preuve d'une inégalité a priori

$$(0) \qquad \|T_k(f)\|_2 \leq C_k \|A'\|_\infty^k \|f\|_2$$

lorsque $A' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Le passage au cas général s'obtient par les méthodes maintenant classiques, de Calderon et Zygmund ; méthodes dites de variables réelles ([2] , chapitre IV).

Nous allons élargir le problème et étudier les noyaux $K(x,y)$ vérifiant certaines hypothèses qualitatives permettant d'assurer la convergence des intégrales écrites et certaines hypothèses quantitatives intervenant dans les inégalités démontrées.

Les hypothèses qualitatives font intervenir l'espace, noté E_o des fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées (on ne suppose pas que la décroissance soit rapide).

On se demande alors que $(x-y)K(x,y)$ appartienne à E_o et que $K(x,y)$ ainsi que toutes les dérivées $\partial_x^\alpha K(x,y)$ soient $O(|x-y|^{-2})$ quand $|y-x| \to +\infty$. Les hypothèses quantitatives sont

(1) $$|K(x,y)| \leq \frac{1}{|x-y|}$$

(2) $$K(x, y) = -K(y,x)$$

(3) $$\left|\frac{\partial}{\partial x} K(x,y)\right| \leq \frac{1}{|x-y|^2}.$$

Avec ces notations, on a

THEOREME 1. <u>Soit</u> $T : L^2(\mathbf{R};dx) \longrightarrow L^2(\mathbf{R};dx)$ <u>l'opérateur défini par</u>

(4) $$Tf(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\, f(y)\, dy.$$

<u>Alors, pour deux constantes numériques effectives</u> $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, <u>on a que</u> $\|T(1)\|_{BMO} \leq C_1(1+\|T\|_{L^2,L^2})$ <u>et</u>

(5) $$\|T\|_{L^2,L^2} \leq C_2(1 + \|T(1)\|_{BMO}).$$

Remarquons que l'action de T sur la fonction identiquement égale à 1 a un sens car nous avons fait les hypothèses nécessaires. De plus le résultat $m(x) = T(1)$ est une fonction indéfiniment dérivable et nulle à l'infini ainsi que toutes ses dérivées.

Naturellement $m(x) \in BMO$ et l'inégalité (5) nous apprend que, lorsque (1), (2) et (3) ont lieu, la norme de $T : L^2 \to L^2$ est contrôlée par $\|m(x)\|_{BMO}$.

Depuis le travail célèbre de Fefferman et Stein, l'inégalité $\|m(x)\|_{BMO} \leq C_1(1 + \|T\|_{L^2,L^2})$ est bien connue. Elle n'utilise pas (2) et la fonction 1 peut être remplacée par n'importe quelle fonction dans $L^\infty(\mathbf{R})$ ([4]).

L'objet de ce qui suit est de démontrer l'inégalité (5). Dans cette partie, (2) joue un rôle fondamental. Il existe, en effet, des noyaux $K(x,y)$ ayant les propriétés qualitatives décrites ci-dessus, vérifiant (1) et (3), tels que $T(1) = 0$ identiquement mais conduisant à des opérateurs T de normes arbitrairement grandes

De tels noyaux sont donnés par des sommes (finies) $K_m(x,y) = \sum_{m\geq k\geq 0} e^{i2^k x}\, 2^k\, \psi(2^k(x-y))$ où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $\int \psi(y)\,dy = 0$. Si cependant $\int e^{iy}\,\psi(y)\,dy \neq 0$, il est facile de voir que l'opérateur correspondant T_m a une norme $\geq \delta\sqrt{m}$ $(\delta = \delta(\psi) > 0)$.

Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ est impaire, les noyaux $\sum_0^m e^{i2^k(x+y)}\, 2^k\, \psi(2^k(x-y))$ vérifient (1), (2) et (3), u niformément en m. Là encore les opérateurs correspondants T_m sont uniformément bornés sur $L^2(\mathbf{R})$ si et seulement si $\int e^{iy}\,\psi(y)\,dy = 0$, c'est-à-dire si $T_m(1) = 0$. Sinon $T_m(1) = c \sum_1^{m+1} e^{i2^k x}$ dont la norme BMO tend vers l'infini.

Il est facile de voir que le théorème 1 donne, sans calcul, toutes les estimations (0). Ce sera détaillé au paragraphe 7.

La preuve du théorème 1 se décompose en trois parties. Dans les deux premières nous supposons que $m(x) = T(1)$ est identiquement nulle. Dans la première nous supposerons même que $\int_{|x-y|\geq 4^k} K(x,y)\,dy = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Alors la continuité de T résultera facilement du lemme de Cotlar.

Dans la seconde partie, nous savons seulement que v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,dy = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Nous construisons une "correction" $L(x,y)$ de $K(x,y)$, telle que $L(x,y)$ vérifie (1), (2) et (3) et, en outre, $\int_{|x-y| \geq 4^k} L(x,y)\,dy = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$. Mais, de plus, nous ferons en sorte que $\int_{|x-y| \geq 2.4^k} \{K(x,y) - L(x,y)\}dy = 0$ si bien que la continuité de L comme celle de $K-L$ résulteront de la première partie. Nous commettons (et commettrons dans ce qui suit) l'abus de langage consistant à donner le même nom au noyau et à l'opérateur défini par ce noyau.

Dans la dernière partie, $m(x)$ appartient à BMO (en fait $m(x)$ est bien plus régulière mais seu le la norme dans BMO est contrôlée). Nous construisons alors un noyau explicite $K_1(x,y)$ vérifiant (1), (2) et (3), tel que l'opérateur correspondant K_1 soit borné sur $L^2(\mathbf{R})$ et que v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x,y)\,dy = m(x)$. Alors la continuité de $K-K_1$ résultera de la partie précédente et le théorème 1 sera entièrement démontré.

2. Utilisation du lemme de Cotlar

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $K(x,y)$ <u>un noyau tel que</u> $(x-y)\,K(x,y) \in E_o$, $|K(x,y)| \leq |x-y|^{-1}$, $K(x,y) = -K(y,x)$ <u>et</u> $\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq |x-y|^{-2}$. <u>Supposons, de plus, que</u> v. p. $\int_{|x-y| \leq 4^k} K(x,y)\,dy = 0$ <u>pour tout</u> $k \in \mathbf{Z}$ <u>et tout</u> $x \in \mathbf{R}$. <u>Alors l'opérateur</u> T <u>défini par le noyau</u> K <u>est borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}\,;\,dx)$ <u>et sa norme ne dépasse pas</u> 100.

Nous posons, en effet, pour $j \in \mathbf{Z}$,

$$K_j(x,y) = K(x,y)\, 1_{\{4^j \leq |x-y| \leq 4^{j+1}\}}$$

et désignons par T_j l'opérateur correspondant.

Nous avons fait des hypothèses de régularité suffisantes pour que, si $f \in C_o^\infty(\mathbf{R})$,

$\sum_{-N}^{N} T_j(f)$ tende, en norme L^2, vers Tf. Il suffira donc, pour prouver la proposition 1, de démontrer que $\left\| \sum_{-N}^{N} T_j \right\|_{L^2, L^2} \leq 100$ en prouvant

$$\left\| T_j \, T_k^* \right\| \leq \omega(j-k) \tag{6}$$

$$\left\| T_j^* \, T_k \right\| \leq \omega(j-k) \tag{7}$$

où $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\omega(j)} \leq 100$.

On a, grâce à l'antisymétrie du noyau K, $T_k^* = -T_k$ de sorte que (6) et (7) contiennent la même information. Il suffit de prouver (6). L'inégalité sera obtenue à partir du lemme bien connu suivant.

LEMME 1. Soit $S(x,y) \in L^1_{loc}(R^2)$ une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(x,y)| dy \leq 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(x,y| dx \leq 1$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. Alors l'opérateur L défini par le noyau $S(x,y)$ est borné sur $L^2(\mathbf{R})$ et sa norme ne dépasse pas 1.

Puisqu'un opérateur et son adjoint ont la même norme, on peut limiter la preuve de (6) à $k < j$. Si $k = j$, $\|T_j \, T_j^*\| = \|T_j\|^2$ et $\|T_j\| \leq 10$ par application brutale du lemme 1.

Si $k < j$, le noyau $S_{j,k}(x,y)$ de $T_j T_k^*$ est donné au signe près par $S_{j,k}(x,y) = \int K_j(x,t) \, K_k(y,t) \, dt$. Il est alors immédiat d'adapter la preuve bien connue de la continuité L^2 de la transformation de Hilbert utilisant le lemme de Cotlar. On utilise $\int K_k(y,t) \, dt = 0$, $|K_k(y,t)| \leq 4^{-k}$, $\left|\frac{\partial}{\partial t} K_j(x,t)\right| \leq 16^{-j}$ et $|K_j(x,t)| \leq 4^{-j}$. Cela permet, soit par majorations directes, soit par intégration par parties puis majoration directe, de prouver $|S_{j,k}(x,y)| \leq \omega_{j,k}(x-y)$ où $\omega_{j,k}(u) = 0$ si $|u| > 4^{j+1} + 4^{k+1}$, $\omega_{j,k}(u) \leq 16.4^{-j}$ si $|u \pm 4^{j+1}| \leq 4^{k+1}$, $\omega_{j,k}(u) \leq 4^{-2j+k}$ si $4^j + 4^{k+1} \leq |u| \leq 4^{j+1} - 4^{k+1}$ et enfin $\omega_{j,k}(u) = 0$ si $|u| < 4^j - 4^{k+1}$,

$\omega_{j,k}(u) \le 16.4^{-j}$ si $|u \pm 4^j| \le 4^{k+1}$. On en déduit $\int \omega_{j,k}(u)\, du \le 50.4^{-j+k}$ ce qu'il fallait démontrer (on a, en effet, $-j+k = -|j-k|$).

3. Traitement du cas où $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\, dy = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$

Rappelons que $E_0 \subset C^\infty(\mathbf{R}^2)$ est composé des fonctions nulles à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées. Alors on a

PROPOSITION 2. Soit $K(x,y)$ un noyau tel que $(x-y)K(x,y) \in E_0$, $K(x,y) = O(|x-y|^{-2})$ si $|x-y| \longrightarrow +\infty$, $K(y,x) = -K(x,y)$ et v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\, dy = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Supposons, en outre, $|K(x,y)| \le |x-y|^{-1}$ et $\left|\frac{\partial}{\partial x} K(x,y)\right| \le |x-y|^{-2}$. Alors la norme de l'opérateur T défini par le noyau $K(x,y)$ ne dépasse pas 1000.

La démonstration de la proposition 2 est techniquement plus simple si nous supposons que $K(x,y) = 0$ lorsque $|x-y|$ est suffisamment petit. Nous verrons ensuite comment nous ramener à ce cas.

Nous montrons alors l'existence d'une constante numérique C et d'un noyau $L(x,y)$ qui est nul si $|x-y|$ est assez petit et qui vérifie

$$|L(x,y)| \le C\,|x-y|^{-1} \quad , \quad \left|\frac{\partial}{\partial x} L(x,y)\right| \le C\,|x-y|^{-2} ,$$

$L(x,y) = -L(y,x)$ ainsi que

$$\int_{|x-y| \le 4^k} L(x,y)\, dy = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z} \text{ et tout } x \in \mathbf{R} \tag{8}$$

$$\int_{|x-y| \le 2.4^k} \{K(x,y) - L(x,y)\}\, dy = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z} \text{ et tout } x \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Dès lors la continuité de l'opérateur défini par le noyau L et celle de l'opérateur défini par K-L résultent du lemme de Cotlar (en changeant, dans le second cas, l'échelle).

La preuve de la proposition 2 est basée sur le lemme suivant (démontré dans l'appendice).

LEMME 2. Il existe une constante (effective C) telle que, pour toute fonction lipschitzienne $m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant

(10) $$|m(x)| \leq 1 \quad , \quad |m'(x)| \leq 1 \quad , \quad \left| \int_u^v m(x)\, dx \right| \leq 1$$

pour tout $u \in \mathbf{R}$ et tout $v > u$, on puisse former une fonction $\mu : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, lipschitzienne, telle que

(11) $$|\mu(x,y)| \leq C \quad , \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \mu(x,y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \mu(x,y) \right| \leq C \, ,$$

(12) $$\text{support } \mu \subset \{(x,y) \,;\, 1 \leq |y-x| \leq 2\}$$

(13) $$\mu(y,x) = -\mu(x,y) \, ,$$

(14) $$\int \mu(x, y)\, dy = m(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Nous partons du noyau $K(x, y)$ de la proposition 2 et posons

$$m_k(x) = \text{v. p.} \int_{|x-y| \leq 2^k} K(x,y)\, dy = - \int_{|x-y| \geq 2^k} K(x,y)\, dy .$$

On a alors

LEMME 3. Il existe une constante (effective) C telle que

(15) $$\left| \int_u^v m_k(x)\, dx \right| \leq C\, 2^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z}, \text{ tout } u \in \mathbf{R} \text{ et tout } v > u.$$

Posons $m_{k,\varepsilon}(x) = \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2^k} K(x, y)\, dy$ et $I(k, \varepsilon) = \int_u^v m_{k,\varepsilon}(x)\, dx .$

Les propriétés qualitatives du noyau $K(x, y)$ permettent facilement de majorer $|m_{k,\varepsilon}(x)|$ par $O(2^k)$ uniformément en ε et en x. Ceci permet de passer à la limite sous l'intégrale définissant $I(k,\varepsilon)$. Ces trivialités énoncées, nous allons vérifier que $|I(k,\varepsilon)| \leq C\, 2^k$. En fait

$$I(k,\varepsilon) = \iint_{\substack{x\in[u,v] \\ \varepsilon\leq|x-y|\leq 2^k}} K(x, y)\, dx\, dy = - \iint_{\substack{x\in[u,v] \\ \varepsilon\leq|x-y|\leq 2^k}} K(y,x)\, dx\, dy =$$

$$- \iint_{\substack{y\in[u,v] \\ \varepsilon\leq|x-y|\leq 2^k}} K(x, y)\, dx\, dy = - J(k,\varepsilon).$$

Mais les intégrales $I(k, \varepsilon)$ et $J(k,\varepsilon)$ portent sur la même fonction et ne diffèrent que par le domaine d'intégration. On désigne par E_k l'ensemble des (x,y) tels que $x \in [u,v]$, $y \notin [u,v]$, $\varepsilon \leq [x-y] \leq 2^k$ et par F_k le symétrique de E_k par rapport à la diagonale $y = x$. Alors

$$|I(k,\varepsilon) - J(k,\varepsilon)| \leq \int_{E_k} |x-y|^{-1}\, dx\, dy + \int_{F_k} |x-y|^{-1}\, dx\, dy.$$

Le calcul de ces deux intégrales ne présente aucune difficulté si l'on prend pour axes de coordonnées $y = x$ et $y = -x$. En effet E_k est alors défini par $\varepsilon\sqrt{2} \leq |\eta| \leq 2^k\sqrt{2}$ et $|\eta| \geq |\xi - u\sqrt{2}|$ ou bien $\varepsilon\sqrt{2} \leq |\eta| \leq 2^k\sqrt{2}$ et $|\eta| \geq |\xi - v\sqrt{2}|$, $|x-y|^{-1}$ devenant $\sqrt{2}\, |\eta|^{-1}$. On obtient donc $2\,|I(k,\varepsilon)| = |I(k,\varepsilon) - J(k,\varepsilon)| \leq C\, 2^k$ ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 4. <u>On a</u> $|m_k'(x)| \leq 4.2^{-k}$.

En effet $m_k(x) = - \int_{|y-x|\geq 2^k} K(x,y)\, dy$ et donc

$$m_k'(x) = K(x\ ,\ x+2^k) - K(x,x-2^k) - \int_{|x-y|\geq 2^k} \frac{\partial K}{\partial x}(x,\ y)\, dy$$

et les majorations sont immédiates grâce à (1), (2) et (3).

LEMME 5. <u>Il existe une constante (effective)</u> C <u>telle que</u> $|M_k(x)| \leq C$.

Désignons par $M_k(x)$ la primitive de $m_k(x)$ nulle en 0. On a alors $|M_k(x)| \leq C\, 2^k$ et $|M_k''(x)| \leq C\, 2^{-k}$ et, par interpolation (ou en employant les inégalités sur les dérivées successives), $|M_k'(x)| \leq C$.

Revenons à la proposition 2.

Soit $\theta \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ une fonction paire, égale à 1 sur $[-1,1]$, à 0 hors de $[-2,2]$ et formons, pour $j \in \mathbf{N}$, $r_j(x) = \text{v. p.} \int \theta(2^j(x-y))\, K(x,y)\, dy$. Alors la démonstration du lemme 3 donne $\left|\int_u^v r_j(x)\, dx\right| \leq C\, 2^{-j}$ tandis que l'hypothèse $(x-y)\, K(x,y) \in E_o$ jointe à un calcul direct donne $|r_j(x)| + |r_j'(x)| = O(2^{-j})$.

Appliquons le lemme 2. Il fournit une fonction (par ailleurs C^∞) $\mu_j(x,y)$, portée par $1 \leq |x-y| \leq 2$, vérifiant $\mu_j(y,x) = -\mu_j(x,y)$, $|\mu_j(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial x}\mu_j| = O(2^{-j})$ et $\int \mu_j(x,y)\, dy = r_j(x)$.

Finalement on considère la différence

$$R_j(x,y) = K(x,y) - \theta(2^j(x-y))\, K(x,y) + \mu_j(x,\ y).$$

Elle possède toutes les propriétés satisfaites par $K(x,y)$: $R_j(x,y) = -R_j(y,x)$, $|R_j(x,y)| \leq 2\,|x-y|^{-1}$ (si $j \geq j_o$), $|\frac{\partial}{\partial x} R_j(x,y)| \leq 2\,|x-y|^{-2}$, $\int R_j(x,y)\, dy = 0$ et, de plus, $R_j(x,y) = 0$ si $|x-y| \leq 2^{-j}$.

Nous allons démontrer que la norme de l'opérateur $T_j : L^2 \to L^2$ défini par $R_j(x,y)$ ne dépasse pas une constante numérique effective C. Un simple passage à la limite fournira la proposition 2.

Oubliant l'indice j, nous pouvons donc supposer que $K(x,y) = 0$ si $|x-y|$ est assez petit.

Posons $\Delta_k = \{(x,y)\ ;\ 2^k \leq |x-y| \leq 2^{k+1}\}$, $m_k(x) = \int_{|x-y|\leq 2^k} K(x,y)\,dy$,

$\breve{m}_k(x) = m_k(2^k x)$. Appliquons le lemme 2 à $\tilde{m}_k$. Il fournit $\tilde{\mu}_k$ portée par Δ_o et vérifiant $|\tilde{\mu}_k(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mu}_k(x,y)| \leq C$, $\tilde{\mu}_k(y,x) = -\tilde{\mu}_k(x,y)$ et $\int \tilde{\mu}_k(x,y)\,dy = m_k(2^k x)$.

Posons finalement $\mu_k(x,y) = 2^{-k}\tilde{\mu}_k(2^{-k}x\ ,\ 2^{-k}y)$. Alors μ_k est portée par Δ_k, $\int \mu_k(x,y)\,dy = m_k(x)$, $|\mu_k| \leq C\,2^{-k}$, $|\frac{\partial}{\partial x}\mu_k| \leq C\,4^{-k}$ et $\mu_k(y,x) = -\mu_k(x,y)$. Pour $k \leq -k_o$, m_k est identiquement nulle et il en est de même pour μ_k.

On définit $\lambda_k(x,y) = \mu_k(x,y)$ si k est pair mais $\lambda_k(x,y) = -2^{-k}\mu_k^{\#}(2^{-k}x\ ,\ 2^{-k}y)$ où $\mu_k^{\#}(x,y)$ est définie, de façon analogue à $\tilde{\mu}_k$ à la différence que $\int \mu_k^{\#}(x,y)\,dy = m_{k-1}(2^k x)$. Si bien que, dans les deux cas, λ_k est portée par Δ_k, $\lambda_k(y,x) = -\lambda_k(x,y)$, $|\frac{\partial}{\partial x}\lambda_k| \leq C\,4^{-k}$, $|\lambda_k| \leq C\,2^{-k}$ et $\int \lambda_k(x,y)\,dy = m_k(x)$ si k est pair, $\int \lambda_k(x,y)\,dy = -m_{k-1}(x)$ si k est impair.

On pose $L(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k(x,y)$. On a $L(x,y) = 0$ si $|x-y|$ est assez petit.

Si j est pair, il vient $\int_{|x-y|\leq 2^{j+1}} L(x,y)\,dy = m_j(x) - m_{j-2}(x) + m_{j-2}(x) - \ldots = m_j(x)$ tandis que si j est impair, il vient

$$\int_{|x-y|\leq 2^{j+1}} L(x,y)\,dy = -m_{j-1}(x) + m_{j-1}(x) - m_{j-3}(x) + m_{j-3}(x) - \ldots = 0.$$

La proposition 2 est démontrée.

4. Démonstration du théorème 1

Soient φ_o et φ_1 deux fonctions de $C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_o = 0$ sur $[-1,1]$, $\varphi_o = 1$ si $|x| \geq 2$ et $\varphi_1 = 1 - \varphi_o$. On suppose en outre φ_o et φ_1 paires et on approche $K(x,y)$ par la suite $K_j(x,y) = \varphi_o(j(x-y))\,\varphi_1(\frac{x-y}{j})\,K(x,y)$. Grâce aux propriétés de régularité de K, $m_j(x) = \int K_j(x,y)\,dy$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

(et donc en norme BMO) vers $m(x) = \int K(x,y)\,dy$.

Une fois (5) démontrée pour l'opérateur T_j défini par le noyau K_j, un simple passage à la limite fournira le cas général. Nous oublions l'indice j et supposons $K(x,y)$ nulle si $|x-y|$ est très petit ou très grand.

Finalement on remplace $K(x,y)$ par $K_\ell(x,y) = K(x,y)\,\varphi_1(\frac{x}{\ell})\,\varphi_1(\frac{y}{\ell})$ et l'on se contente de prouver (5) si $K = K_\ell$ pour ensuite passer à la limite $(\ell \to +\infty)$. On peut donc supposer $K(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ce qui entraîne $m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Nous allons produire une "copie conforme" $\tilde{K}(x,y)$ de $K(x,y)$ au sens que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(x,y)\,dy = m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,dy ,$$

que $\tilde{K}$ vérifiera des inégalités du type (1), (3) avec $C\|m\|_{BMO}$ au lieu de 1 comme normalisation, que $\tilde{K}(y,x) = -\tilde{K}(x,y)$ et que l'opérateur $\tilde{T}$ défini par $\tilde{K}$ sera borné sur $L^2(\mathbb{R})$ pour des raisons évidentes.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction paire dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, est égale à 1 en 0 et nulle en dehors de $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction paire dont la transformée de Fourier $\hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, est supportée par $\frac{1}{2} \le |\xi| \le \frac{3}{2}$ et est telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$ si $\xi \neq 0$. On désigne par S_k l'opérateur défini par $S_k u = v$ lorsque $\hat{v}(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)\,\hat{u}(\xi)$ et par Δ_k l'opérateur défini par $\Delta_k u = v$ lorsque $\hat{v}(\xi) = \psi(2^{-k}\xi)\,\hat{v}(\xi)$.

On peut, si on le désire, supposer que $\hat{\varphi} = 1$ sur $[-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}]$ et définir alors Δ_k par $\Delta_k = S_{k+3} - S_{k+2}$ car la seule propriété (outre la parité et $\hat{\varphi}(0) = 0$) des fonctions φ et ψ que nous utiliserons est le fait que $\varphi * \psi = 0$.

L'opérateur $\tilde{T}$ est fabriqué à l'aide du prototype $\mathcal{L}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k(m)\,S_k(f)$ dont le noyau est

$$L(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k(m)\,2^k\,\varphi(2^k(x-y)). \tag{16}$$

On vérifie immédiatement (1) et (3) ; il suffit pour cela, d'utiliser les inégalités $\|\Delta_k(m)\|_\infty \le C\|m\|_{BMO}$ et $\|\frac{d}{dx}\Delta_k(m)\|_\infty \le C\,2^k\|m\|_{BMO}$ (ces inégalités sont vérifiées dès que m est la dérivée d'une fonction de la classe de Zygmund).

Le noyau $L(x,y)$ ne vérifie pas (2).

L'opérateur $\mathcal{L}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ pour la raison suivante.

Le spectre du produit $\Delta_k(m)\,S_k(f)$ est contenu dans la "couronne dyadique" $\frac{2}{5}2^k \le |\xi| \le \frac{8}{5}2^k$. Cela implique que $\|\sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta_{2k}(m)\,S_{2k}(f)\|_2 = (\sum\|\Delta_{2k}(m)\,S_{2k}(f)\|_2^2)^{1/2}$ et qu'il en est de même pour $\|\sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta_{2k+1}(m)\,S_{2k+1}(f)\|_2$.

Donc $\|\sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta_k(m)\,S_k(f)\|_2 \le 2(\sum_{-\infty}^{+\infty}\|\Delta_k(m)\,S_k(f)\|_2^2)^{1/2}$. Arrivés à ce point, on utilise le lemme suivant ([4]).

LEMME 6. Soit $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de mesures de Radon positives (sur $\mathbb{R}$). Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) $$\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}|S_k(f)|^2\,d\mu_k \le C\|f\|_2^2$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}\ ;\ dx)$.

(b) la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une mesure de Carleson sur $\mathbb{R}\times\{2^{-k}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Cela signifie que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, de longueur 2^{-N}, on a $\sum_{k\ge N}\mu_k(I) \le C|I|$.

Ce lemme est complété par le lemme suivant ([4]).

LEMME 7. Pour toute fonction $b \in BMO$, la suite $(|\Delta_k(b)|^2\,dx)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une mesure de Carleson.

Arrivés à ce point, on force la condition (2) en remplaçant $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}-\mathcal{L}^t$ où $\mathcal{L}^t$ est le transposé de $\mathcal{L}$ défini par $\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^t u)\,v\,dv = \int_{\mathbb{R}} u(\mathcal{L}v)\,dx$. Alors

$\mathcal{L}^t$ est borné sur $L^2(\mathbf{R})$. Le noyau de $\mathcal{L} - \mathcal{L}^t$ est $L(x,y) - L(y,x)$ et est donc antisymétrique.

Enfin $\mathcal{L}^t(1) = \int L(y,x)\,dy =$

$$\int \sum_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_k m)(y)\, 2^k\, \varphi(2^k(y-x))\,dy = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_k m) * \varphi_k = 0$$

(en posant $\varphi_k(x) = 2^k\, \varphi(2^k x)$).

5. Démonstration du lemme 2

L'ingrédient essentiel est le lemme suivant.

LEMME 8. Il existe une constante C ayant la propriété suivante. Pour toute fonction lipschitzienne $m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $|m(x)| \leq 1$, $|m'(x)| \leq 1$ et $\left|\int_a^b m(x)\,dx\right| \leq 1$ pour tout $b > a$ et tout $a \in \mathbf{R}$, on peut trouver une suite $m_j(x)$, $j \in \mathbf{Z}$, de fonctions lipschitziennes telles que

(17) le support de $m_j(x)$ soit contenu dans $[j-2\ ,\ j+1]$

(18) $|m_j(x)| \leq C$, $|m_j'(x)| \leq C$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} m_j(x)\,dx = 0$

(19) $m(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m_j(x)$.

La preuve du lemme 8 est presque immédiate.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction portée par $[-1\ ,\ 1]$, d'intégrale égale à 1 et telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-j) = 1$. La première décomposition de m est

$$m(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m(x)\,\varphi(x-j) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_j(x).$$

Le seul défaut de cette décomposition est que l'on a $\alpha_j = \int \mu_j(x)\,dx \neq 0$. Cependant les autres conditions (18) sont satisfaites ainsi que $\left|\sum_p^q \alpha_j\right| \leq C$ pour tout

$p \in \mathbf{Z}$ et tout $q > p$.

On écrit alors $\alpha_j = \beta_j - \beta_{j+1}$ où $|\beta_j| \leq C$ et $\mu_j(x) = \alpha_j\,\varphi(x-j) + \rho_j(x)$ où, cette fois, $\rho_j(x)$ vérifie toutes les conditions (18).

Finalement $m(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j\,\varphi(x-j) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\beta_j - \beta_{j+1})\,\varphi(x-j) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_j \left\{(\varphi(x-j) - \varphi(x-j+1)\right\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x)$. Il ne reste plus qu'à poser

$m_j(x) = \beta_j\left\{\varphi(x-j) - \varphi(x-j+1)\right\} + \rho_j(x)$.

LEMME 9. <u>Il existe une constante</u> C <u>telle que, pour toute fonction lipschitzienne</u> $m(x)$ <u>vérifiant les hypothèses du lemme</u> 8, <u>on peut trouver une fonction lipschitzienne</u> $\xi(x,y)$, <u>portée par</u> $x+1 \leq y \leq x+2$, <u>vérifiant</u> $|\xi(x,y)| \leq C$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,y)\right| \leq C$, $\left|\frac{\partial}{\partial y}\xi(x,y)\,dy = m(x)\right.$ <u>et</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x,y)\,dx = 0$ <u>pour tout</u> $y \in \mathbf{R}$.

On pose tout simplement $\xi(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m_j(x)\,\varphi(y-j-10)$. Toutes les propriétés annoncées ont lieu à l'exception du support qui est contenu dans $x+8 \leq y \leq x+13$. Un simple changement d'échelle (réduction dans le rapport $\frac{1}{8}$) donne le lemme 9.

La preuve du lemme 2 consiste à poser $\mu(x,y) = \xi(x,y) - \xi(y,x)$.

6. Retour aux commutateurs de Calderón

Soit $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $A'(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $\|A'\|_\infty \leq 1$. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ formons le noyau $\Gamma_k(x,y) = \text{v. p.}\ \frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ et désignons par T_k l'opérateur défini par ce noyau.

Naturellement $T_0 = \pi H$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}\,;\,dx)$ car H est la transformation de Hilbert. On a, si $k \geq 1$, $T_k(1) = T_{k-1}(A')$. Or la continuité de T_{k-1} : $L^2(\mathbf{R}\,;\,dx) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}\,;\,dx)$ et les méthodes de variable réelle de [4] donnent aussitôt la continuité de $T_{k-1} : L^\infty \longrightarrow BMO$ avec l'estimation

$$\|T_{k-1}\|_{L^\infty, BMO} \leq C(\|T_{k-1}\|_{L^2,L^2} + 1).$$

On applique alors le théorème 1 et il vient $\|T_k\|_{L^2,L^2} \leq C'(\|T_{k-1}\|_{L^2,L^2} + 1)$ ce qui entraîne $\|T_k\|_{L^2,L^2} \leq (C'')^k$.

La méthode itérative précédente a le mérite de s'appliquer à des situations générales. Soit, par exemple, $S : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une forme impaire et vérifiant $|(\frac{d}{dx})^k S(x)| \leq C_k |x|^{-k-1}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Alors, pour toute fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, le noyau $S^{(k)}(x-y)(A(x)-A(y))^k$ définit un opérateur T_k borné sur $L^2(\mathbb{R})$. On a posé $S^{(k)}(x) = (\frac{d}{dx})^k S(x)$. On retrouve ainsi certains des résultats de [1].

[1] COIFMAN, R. R. et MEYER, Y. Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 177-202.

[2] ______________________ Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque 57, Soc. Math. France (1978).

[3] COIFMAN, R. R., McINTOSH, A. et MEYER, Y. L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes. Ann. Math. 116 (1982), 361-387.

[4] FEFFERMAN, Ch. and STEIN, E. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

POINTS MULTIPLES DES PROCESSUS DE LEVY SYMETRIQUES STABLES RESTREINTS A UN ENSEMBLE DE VALEURS DU TEMPS

Jean-Pierre KAHANE

RAPPELS, DEFINITIONS, HISTORIQUE ET ENONCES

LES POINTS DOUBLES

LES POINTS DOUBLES

IV. DIMENSION DES INTERSECTIONS ET APPLICATION AUX POINTS MULTIPLES

1. Proposition 1 : si mes $E_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta})$ et mes $F_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\gamma})$ $(\varepsilon \in S)$, on a, pour presque tout x, $\text{mes}(E \cap (F+x))_\varepsilon = O(\varepsilon^{2n-\beta-\gamma})$ $(\varepsilon \in S(x))$. (94)

   Exemple montrant qu'on doit prendre la même échelle S pour E et pour F.

2. Proposition 2 : si $C_\beta E > 0$ et $H_\gamma F > 0$ avec $\beta + \gamma \geq n$, pour τ-presque tout $A \in GL(n,R)$ (τ convenable), on a $E \cap (AF+x) \neq \emptyset$ pour un ensemble de x de mesure positive, et la dimension de cette intersection est $\geq \beta+\gamma-n$. (96)

3. Proposition 3 : idem pour un sous groupe fermé transitif de $GL(n,\mathbf{R})$, avec pour τ sa mesure de Haar. (98)

   Exemple montrant que ci-dessus on ne peut pas remplacer $\geq$ par $=$.

4. Lemme 1 :

$$E(\text{mes}(X(K))_\varepsilon) \leq C\ \varepsilon^{n-\alpha}\ \text{mes}\ K_{\varepsilon^\alpha}\ . \quad (101)$$

   Lemme 2 :

$$\text{Cap}_\beta\ K > 0 \Longrightarrow \text{Cap}_{\alpha\beta}\ X(K) > 0 \qquad \text{p. s.}$$

   Proposition 4 : application aux processus sphériquement symétriques.

5. Preuve rapide que le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$ n'a pas de point triple.(104)

I. RAPPELS, DEFINITIONS, HISTORIQUE ET ENONCES

1. La référence recommandée est le livre de Paul Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien (Gauthier-Villars 1948). Un processus à accroissements indépendants et stationnaires (c'est-à-dire que la loi de l'accroissement sur un intervalle ne dépend que de la longueur de l'intervalle), à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ euclidien, est donné par une fonction $X(\omega,t)$ ($\omega\in\Omega$, $t\in\mathbf{R}^+$) à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, que selon l'usage on notera simplement $X(t)$ en sous-entendant ω, telle que $X(0) = 0$ et

$$E(\exp(i\xi.X(t)) = \exp(-t\,\psi(\xi)) \qquad (\xi\in\mathbf{R}^n)$$

où ψ est une fonction de type négatif sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire

$$\psi(\xi) = Q(\xi) + \int(-\exp(i\xi.u) + 1 + i\xi.u)\,d\nu(u)$$

$Q(\xi)$ étant une forme quadratique positive, $\xi.u$ étant le produit scalaire de ξ et u dans $\mathbf{R}^n$ euclidien, et $d\nu$ étant une mesure positive sur $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ telle que l'intégrale ait un sens. On peut s'intéresser à $(X(t))_{t\in\mathbf{R}}$ comme à une famille de variables aléatoires (c'est l'aspect "processus") ou comme à une fonction aléatoire (fonction de t dépendant de ω) : c'est ce dernier aspect qui nous intéresse.

Dire que le processus est stable signifie que, quels que soient t et $s > 0$, il existe un $\lambda > 0$ tel que les lois de $X(t)$ et de $\lambda X(s)$ soient les mêmes. Cela revient à dire que pour un certain $\alpha > 0$

$$\psi(\lambda\,\xi) = \lambda^{\alpha}\,\psi(\xi) \qquad (\lambda > 0).$$

Comme ψ est de type négatif, les valeurs permises pour α sont $0 < \alpha \leq 2$. Pour $\alpha = 2$, cela signifie $\psi(\xi) = Q(\xi)$. Pour $0 < \alpha < 2$, cela entraîne

$$\operatorname{Re}\psi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^+ \times S^{n-1}} 2(1 - \cos \xi.u)\,\frac{dr}{r^{1+\alpha}}\,d\tau(u') \quad (r = \|u\|\,,\ u = ru')$$

$$= \|\xi\|^{\alpha}\ \operatorname{Re}\psi(\xi') \qquad\qquad (\xi = \|\xi\|\ \xi')$$

avec

$$\operatorname{Re}\psi(\xi') = C(\alpha,n)\int_{S^{n-1}} |\,\xi'.u'\,|^{\alpha}\,d\tau(u')$$

(on a décomposé la mesure $d\nu(u)$ comme produit de la mesure radiale $\frac{dr}{r^{1+\alpha}}$ et de la mesure $d\tau(u')$ sur S^{n-1}). Dire que le processus est vraiment n-dimensionnel, c'est dire que $d\nu$ n'est pas porté par un hyperplan, ou aussi bien que la fonction continue $\operatorname{Re}\psi(\xi')$ ne s'annule pas.

Voici des exemples.

Si $\psi(\xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$, $X(t)$ est le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Ses coordonnées $X_1(t), \ldots X_n(t)$ sont des mouvements browniens linéaires indépendants.

Si $\psi(\xi) = \frac{1}{\alpha}\|\xi\|^{\alpha}$ (cas où la mesure $d\tau$ est également distribuée sur S^{n-1}), nous dirons que $X(t)$ est le processus de Lévy sphériquement symétrique stable d'indice α.

Si $\psi(\xi) = \frac{1}{\alpha}(\,|\,\xi_1\,|^{\alpha} + \ldots + |\,\xi_n\,|^{\alpha})$ (cas où la mesure $d\tau$ est portée par les intersections de S^{n-1} avec les axes de coordonnées), les coordonnées de $X(t)$ sont des processus symétriques stables d'indice α à valeurs dans R, indépendants et de même loi ; convenons de dire alors que $X(t)$ est le processus canonique s. s. d'indice α.

Si $\psi(s) = c\int_0^{\infty}(-\exp(isu) + 1 + isu)\,\frac{du}{u^{1+\alpha}}$ $(s \in \mathbf{R},\ \ 0 < \alpha < 1,\ \ c$ constante $> 0)$ $X(t)$ est un processus de Lévy croissant d'indice α. Si l'on superpose le processus de Lévy croissant d'indice α correspondant à un c convenable et le mouvement brownien n-dimensionnel, on obtient le processus canonique s. s. d'indice 2α à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi l'ensemble des valeurs prises par le processus canonique s. s. d'indice α à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c'est l'image par le mouvement brownien n-dimensionnel de l'ensemble des valeurs prises par le processus de Lévy adapté croissant d'indice $\frac{\alpha}{2}$ (en bref : "subordinateur" d'indice $\frac{\alpha}{2}$). Comme on connait bien l'ensemble des valeurs prises par les subordinateurs, la question des points multiples des trajectoires des processus canoniques s. s. se ramène à celle des points multiples des trajectoires du mouvement brownien, restreint à un certain ensemble de t.

Nous nous intéresserons aux processus de Lévy symétriques, stables d'indice α, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et vraiment n dimensionnels. Pour $\alpha = 2$, quitte à faire une transformation linéaire, c'est le mouvement brownien, correspondant à $\psi(\xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2$. Pour $0 < \alpha < 2$, cela correspond à $\psi(\xi) = \|\xi\|^\alpha \psi(\xi')$, avec

$$\psi(\xi') = \int_{S^{n-1}} |\xi'.u'|^\alpha \, d\tau_1(u')$$

où $d\tau_1$ est une mesure positive symétrique sur S^{n-1}, non concentrée sur un hyperplan. Ainsi $\psi(\xi')$ est une fonction continue strictement positive.

Nous désignerons ces processus comme processus de Lévy (α,n).

Dans la suite, nous écrirons souvent $|\ \ |$ au lieu de $\|\ \ \|$ pour la norme euclidienne.

2. Rappelons les notions de mesures et dimensions de Hausdorff, et de capacités.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, et $0 < \alpha \leq n$. Pour tout $\delta > 0$, on considère la borne inférieure des sommes $\Sigma(\text{diam } B_i)^\alpha$ pour tous les recouvrements de E par des boules B_i telles que $\text{diam } B_i \leq \delta$; on la désigne par $H_\alpha^\delta(E)$ $(0 \leq H_\alpha^\delta(E) \leq \infty)$. Quand $\delta \to 0$ en décroissant, $H_\alpha^\delta(E)$ tend en croissant vers une limite qu'on désigne par $H_\alpha(E)$, et qui est la mesure de Hausdorff de E en dimension α ; c'est une mesure extérieure.

Pratiquement, l'important est ceci. On a $H_\alpha(E) = 0$ si et seulement si on peut recouvrir E par des boules B_i de façon que $\Sigma(\text{diam } B_i)^\alpha$ soit arbitrairement petit.

"Lemme de Frostman". Si E est un compact, on a $H_\alpha(E) > 0$ si et seulement si E porte une mesure $\sigma \in M_+^1(E)$ (c'est-à-dire positive et de masse 1) telle que $\sigma(B) \leq C(\text{diam } B)^\alpha$ pour toute boule B et pour une constante $C = C(E) > 0$.

La preuve de ce lemme est dans la thèse de Frostman p. 89 (pour $n = 1$, c'est aussi dans le livre de Kahane-Salem p. 27).

Si $0 < \alpha < \beta \leq n$, on a $H_\beta(E) = 0.H_\alpha(E)$, c'est-à-dire $H_\beta(E) > 0 \Longrightarrow H_\alpha(E) = \infty$ et $H_\alpha(E) < \infty \Longrightarrow H_\beta(E) = 0$. La borne supérieure des α tels que $H_\alpha(E) = \infty$ est donc la borne inférieure des β tels que $H_\beta(E) = 0$. C'est la dimension de Hausdorff de E. Si $0 < H_\alpha(E) < \infty$, α est la dimension de Hausdorff de E.

On se restreint désormais au cas où E est un borélien. Soit $0 < \alpha < n$. S'il existe une mesure $\sigma \in M_+^1(E)$ telle que

$$I_\alpha(\sigma) = \iint \frac{d\sigma(x)\, d\sigma(y)}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

on dit que E a une capacité d'ordre $\alpha > 0$, et on écrit $C_\alpha(E) > 0$. La dimension capacitaire de E (introduite par Polya et Szegö) est la borne supérieure des α tels que $C_\alpha(E) > 0$.

Théorème de Frostman. La dimension capacitaire égale la dimension de Hausdorff.

Preuve. On se ramène au cas où E est compact.

Supposons $H_\alpha(E) > 0$ et appliquons le lemme de Frostman ; la mesure σ vérifie, quel que soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $\rho > 0$

$$\int_{|y-x|<\rho} d\sigma(y) < C\,\rho^\alpha$$

donc (en sommant dans des couronnes $2^{-(i+1)} < |y-x| < 2^{-i}$)

$$\int \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^{\alpha-\varepsilon}} < C' \qquad (0 < \varepsilon < \alpha)$$

donc $I_{\alpha-\varepsilon}(\sigma) < \infty$. Donc $C_{\alpha-\varepsilon}(E) > 0$.

Supposons $C_\alpha(E) > 0$, et soit $\sigma \in M^1_+(E)$ vérifiant $I_\alpha(\sigma) < \infty$. La fonction

$$P(x) = \int \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^\alpha}$$

est intégrable par rapport à σ, donc bornée sur une partie F compacte de E telle que $\sigma(F) > 0$. Soit (B_n) un recouvrement de F par des boules, et soit $x \in B_n \cap F$; on a

$$\sigma(B_n) \leq (\text{diam } B_n)^\alpha \int_{B_n} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^\alpha} \leq C(\text{diam } B_n)^\alpha$$

donc

$$\Sigma\, (\text{diam } B_n)^\alpha > C^{-1}\, \sigma(F).$$

Ainsi la borne inférieure du premier membre est positive, donc $H_\alpha(F) > 0$, donc $H_\alpha(E) > 0$.

C'est J. Peyrière qui m'a indiqué cette preuve, qui ne doit rien à la théorie du potentiel. Frostman ne donne la preuve que dans le cas $n = 2$, et sa preuve, fondée sur la théorie du potentiel, ne s'étend pas au cas général.

3. L'étude des points multiples du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ a été entreprise par Kakutani en 1944, et poursuivie jusqu'en 1958 par Kakutani avec Dvoretzky, Erdös, et S. J. Taylor. Voici les résultats (je sous-entendrai : presque sûrement).

Pour $n \geq 4$, pas de point double.

Pour $n = 3$, des points doubles, mais pas de point triple.

Pour $n = 2$, des points de multiplicité c (c'est-à-dire dont la préimage a la puissance du continu).

L'étude des points multiples des processus sphériquement symétriques stables de Paul Lévy a été menée par S. J. Taylor en 1966, après une première investigation des points doubles par J. Takeucki. En voici les principaux résultats :

si $k\alpha < (k-1)n$, $X(t)$ n'a pas de points multiples d'ordre k ;

si $k\alpha \geq (k-1)n$, $X(t)$ a des points doubles d'ordre k ;

si $n = 2$ et $k\alpha > 2(k-1)$, l'ensemble des points multiples d'ordre k de $X(t)$ a pour dimension $k\alpha - 2(k-1)$;

si $n = 1$ et $k \geq k\alpha > k-1$, l'ensemble des points multiples d'ordre k de $X(t)$ a pour dimension $k\alpha - (k - 1)$.

Voici une liste de références sur des sujets voisins.

A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani et S. J. Taylor (Proc. Cambridge Phil. Soc. 53 (1957), 364-371)

A. Dvoretzky, P. Erdös et S. Kakutani (Bull. Research Council Israël 4 (1958), 175-180)

J. Takeuchi (J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 109-127)

S. J. Taylor (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 5 (1966), 247-264)

B. E. Fristedt (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9 (1967), 62-64)

S. Orey (Markov processes and potential theorie, ed. J. Chover, New York, Wiley 1967)

W. J. Hendriks (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 28 (1974), 113-128 and ibid 49 (1979), 13-21)

W. E. Pruitt (Stochastic processes and related topics, ed. M. L. Puri 1975)

J. Hawkes (Math. Proc. Cambridge 83 (1978), 83-89)

N. Kôno (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 49 (1978), 13-21)

A. Goldman (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 57 (1981), 481-494)

J.-P. Kahane (C. R. Acad. Sc. Paris (1982), à paraître).

4. Les résultats qu'on va présenter figurent pour une part dans la note de J.-P. Kahane : Points multiples du mouvement brownien et des processus de Lévy symétriques, restreints à un ensemble compact de valeurs du temps. La proposition 0 de cette note est le théorème de la partie II ci-après. La partie III est nouvelle. La partie IV contient la proposition 1 de la note et rectifie la proposition 2, qui est incorrecte (une autre correction à faire dans la note est, dans l'"application", de remplacer $(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k))_{\varepsilon^\alpha}$ par $(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k))_\varepsilon$).

Voici les principaux énoncés. On suppose toujours que $K_1, K_2, \ldots, K_k$ sont des compacts de $\mathbf{R}^+$ portés par des intervalles disjoints, et que $X(t)$ est un processus (α, n).

Pour avoir $P(X(K_1) \cap X(K_2) \neq \emptyset) > 0$, il suffit que $C_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$ et il faut que $H_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$. Question : n'est-il pas nécessaire et suffisant d'avoir $C_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \quad K_2) > 0$? (Partie II).

Pour avoir $P(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k) \neq \emptyset) > 0$, il suffit que $C_{\beta_j}(K_j) > 0$ avec $0 < \beta_j < \frac{n}{\alpha}$ et $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = (k-1)\frac{n}{\alpha}$, et il faut que $H_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \quad \ldots \quad K_k) > 0$ (Partie III).

Les démonstrations, comme on le verra, ne sont pas difficiles. Ma première approche consistait à utiliser des outils assez lourds, pour obtenir des résultats plus faibles. Le plus intéressant de ces outils est la proposition 3 de la partie IV, dont voici un cas particulier : si E et F sont deux compacts dans $\mathbf{R}^n$ dont les dimensions de Hausdorff sont β et γ, avec $\beta + \gamma > n$ et si S est une similitude aléatoire (au sens naturel), l'intersection $E \cap SF$ a une dimension $\geq \beta + \gamma - n$ avec probabilité positive. Ces outils, avec les exemples et mises en garde concernant la dimension des intersections d'un ensemble avec les transformés d'un autre, sont exposés dans la partie IV, avec quelques applications aux points multiples.

II. LES POINTS DOUBLES

1. Voici un lemme utile (J.-P. Kahane, Period. Math. Hungarica 2 (1972), 50).

Lemme. Soit $X(t)$ un processus à accroissements indépendants dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t > 0$ et tout $h > 0$ la distribution de $X(t+h) - X(t)$ soit équivalente à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. Soit E un borélien sur $\mathbb{R}^+$, et F un borélien dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\Pr(F \cap X(E) = \emptyset) = 1 \Longleftrightarrow \Pr(\text{mes}(F - X(E)) = 0) = 1$$

(on note $A - B = \{a-b \; ; \; a \in A \, , \; b \in B\}$, et mes est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve. Si l'équivalence vaut lorsqu'on remplace E par $E \cap [\frac{1}{m}, \infty[$ quel que soit m, elle vaut pour E. On peut donc supposer $\inf E > 0$. Soit $0 < a < b < \inf E$. Posons $X_a(t) = X(t+a) - X(a)$. Ainsi

$$F \cap X(E) = \emptyset \Longleftrightarrow X(a) \notin F - X_a(E - a).$$

Or $X(a)$ est une v. a. dont la distribution est équivalente à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et $F - X_a(E - a)$ est un borélien aléatoire, indépendant de $X(a)$. Donc

$$\Pr(X(a) \notin F - X_a(E - a)) = 1 \Longleftrightarrow \Pr(\text{mes}(F - X_a(E-a)) = 0) = 1.$$

Ecrivons $X_a(E - a) = X_a(b-a) + X_b(E - b)$, et remarquons encore que la variable aléatoire $X_a(b-a)$ a une distribution équivalente à la mesure de Lebesgue, et que le borélien $X_b(E - b)$ est indépendant de $X_a(b-a)$. Dire que $\text{mes}(F - X_a(E-a)) = 0$ p. s., c'est dire que $\text{mes}(F - X_a(b-a) - X_b(E-b)) = 0$ p. s., c'est dire que $\text{mes}(F - x - X_b(E-b)) = 0$ p. s. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, c'est dire que $\text{mes}(F - X(b) - X_b(E-b)) = 0$ p. s., c'est dire que $\text{mes}(F - X(E)) = 0$ p. s.. Le Lemme est démontré.

2. A titre d'application, démontrons que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^4$ n'a

pas de point double. Il suffit de montrer que p. s. les images de deux intervalles rationnels égaux disjoints ne se coupent pas. Il s'agit de montrer que, I et J étant des intervalles disjoints de longueur commune ℓ, on a p. s. $\text{mes}(X(I) - X(J)) = 0$. Posons donc

$$\varphi(I,J) = E(\text{mes}(X(I) - X(J))).$$

Comme $\sup_{t \in I} \|X(t)\|$ est une v. a. sous-gaussienne, on a $\varphi(I,J) < \infty$. Il s'agit de montrer $\varphi(I,J) = 0$.

Divisons I en trois intervalles égaux I_i et J en trois intervalles égaux J_j $(i,j = 1, 2, 3)$. On a

$$(*) \qquad \varphi(I,J) \leq \sum_i \sum_j \varphi(I_i,J_j) - E(\text{mes}(X(I_1) - X(J_1)) \cap (X(I_3) - X(J_3))).$$

Or $\varphi(I,J)$ ne dépend que de ℓ, parce que, si $I = [a-\ell\ , a]$ et $J = [b\ , b+\ell]$ on a

$$X(I) - X(J) = X_a([-\ell,0]) - (X(b)-X(a)) - X_b([0,\ell])$$

les trois termes de la somme étant indépendants, donc

$$\varphi(I,J) = E(X_a([-\ell,0]) - X_b([0,\ell])) = \varphi(\ell).$$

D'autre part $\varphi(\ell)$ est proportionnel à ℓ^2, parce que, s'agissant de la distribution du mouvement brownien, une dilatation des temps dans le rapport λ équivaut à une dilatation de l'espace dans le rapport $\sqrt{\lambda}$, qui multiplie la mesure dans $\mathbb{R}^4$ par λ^2. Donc $(*)$ s'écrit

$$\varphi(\ell) \leq \sum_i \sum_j \varphi(\tfrac{\ell}{3}) - E\ , \qquad\qquad E \geq 0$$

donc

$$E = E(\text{mes}(X(I_1) - X(J_1)) \cap (X(I_3) - X(J_3))) = 0.$$

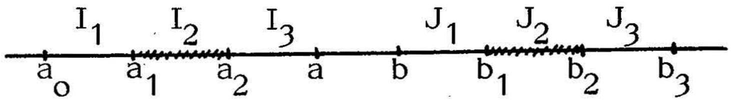
Ecrivons

$$X(I_1) - X(J_1) = X_{a_1}(I_1-a_1) - X_{a_2}(J_1-a_2) - (X(a_2)-X(a_1)) = F_1-\Delta(a_1,a_2)$$

$$X(I_3) - X(J_3) = X_{b_1}(I_3-b_1) - X_{b_2}(J_3-b_2) - (X(b_2)-X(b_1)) = F_3-\Delta(b_1,b_2)$$

et remarquons que les

$\Delta(a_1,a_2)$ et $\Delta(b_1,b_2)$ (les accroissements de X sur



intervalles I_2 et J_2) sont indépendants des ensembles F_1 et F_3 (qui ne dépendent que des accroissements de X sur les intervalles constituant $\mathbb{R} \setminus I_2 \setminus J_2$).

L'égalité

$$E(\text{mes}(F_1 - \Delta(a_1,a_2)) \cap (F_3 - \Delta(b_1,b_2))) = 0$$

entraîne donc

$$E(\text{mes } F_1) = 0$$

(et aussi $E(\text{mes } F_3) = 0$), donc $\varphi(\frac{\ell}{3}) = 0$, donc $\varphi(\ell) = 0$. On a bien démontré que $\varphi(I, J) = 0$.

Cette preuve élémentaire que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^4$ n'a pas de point double est calquée sur la preuve de Paul Lévy que le mouvement brownien plan occupe une aire nulle. De la même façon, on montre facilement que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ ne rencontre pas une courbe rectifiable donnée (mais je ne parviens pas à remplacer la courbe rectifiable par un ensemble de mesure nulle en dimension 1, ce qui donnerait élémentairement l'absence de point triple pour le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$). La preuve de D. E. K. utilise le fait important et beaucoup plus profond (nécessitant la théorie du potentiel newtonien et l'interprétation probabiliste de la mesure harmonique) que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ ne rencontre pas un ensemble fixé de capacité newtonienne nulle.

3. On va démontrer le théorème suivant.

Théorème. Soient K_1 et K_2 deux compacts sur $\mathbb{R}^+$, portés par des intervalles disjoints, et soit $X(t)$ un processus de Lévy symétrique stable d'indice α n-dimensionnel. Pour avoir

$$\Pr(X(K_1) \cap X(K_2) \neq \emptyset) > 0$$

il suffit que $C_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$ et il faut que $H_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$.

Corollaire. Considérons le processus $X(t)$ restreint à $t \in K$. Pour qu'il existe un point double avec probabilité positive, il suffit que $C_{\frac{n}{\alpha}}(K \times K) > 0$ et il faut que $H_{\frac{n}{\alpha}}(K \times K) > 0$. Par exemple, pour le mouvement brownien, une condition suffisante est $\dim(K \times K) > \frac{n}{2}$ et une condition nécessaire est $\dim(K \times K) \geq \frac{n}{2}$.

Preuve de la condition suffisante. Par hypothèse, il existe une mesure $\sigma \in M_+^1(K_1 \times K_2)$ telle que

$$\iiiint \frac{d\sigma(s,t)\, d\sigma(s',t')}{(|s-s'|+|t-t'|)^{\frac{n}{\alpha}}} < \infty .$$

Soit μ la mesure image de σ par l'application

$$(s,t) \longrightarrow X(s) - X(t).$$

Sa transformée de Fourier est

$$\hat{\mu}(\xi) = \iint_{K_1 \times K_2} \exp(i\xi . (X(s) - X(t)))\, d\sigma(s,t)$$

donc

$$|\hat{\mu}(\xi)|^2 = \iiiint \exp(i\xi . ((X(s)-X(s')) - (X(t)-X(t')))\, d\sigma(s,t)\, d\sigma(s',t')$$

et les accroissements $X(s) - X(s')$ et $X(t) - X(t')$ sont indépendants puisque K_1 et K_2 sont portés par des intervalles disjoints. Donc

$$E(|\hat{\mu}(\xi)|^2) = \exp(-(|s-s'|+|t-t'|)\, \psi(\xi))$$

avec

$$\psi(\xi) = |\xi|^{\alpha}\, \psi(\xi') \qquad (\xi = |\xi|\, \xi')$$

$$0 < \inf \psi(\xi') \leq \sup \psi(\xi') < \infty .$$

Compte tenu de l'hypothèse sur σ, on a

$$E \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\mu}(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

donc p. s. μ est absolument continue avec densité dans L^2, donc p. s. son support $X(K_1) - X(K_2)$ est de mesure de Lebesgue positive. D'après le lemme, cela entraîne

$$\Pr(X(K_1) \cap X(K_2) \neq \emptyset) > 0.$$

Preuve de la condition suffisante.

Soient I et J deux intervalles disjoints de même longueur ℓ. Posons

$$\varphi(I,J) = E(\text{mes}(X(I) - X(J)))$$

mes désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. Admettons pour le moment que $\varphi(I,J)$ est fini (ce n'est pas évident, parce qu'au contraire du cas $\alpha = 2$, considéré en 2 , on n'a pas en général $E(\sup_{t\in I} \|X(t)\|) < \infty$). Comme en 2 , on voit que $\varphi(I,J)$ ne dépend que de ℓ. Comme pour la distribution du processus $X(t)$, une dilatation des temps dans le rapport λ équivaut à une dilatation de l'espace dans le rapport $\lambda^{1/\alpha}$, qui multiplie la mesure par $\lambda^{n/\alpha}$, on a

$$\varphi(I, J) = C\, \ell^{n/\alpha} \qquad (0 < C < \infty).$$

Supposons maintenant $H_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2)$. Cela signifie qu'on peut recouvrir $K_1 \times K_2$ une infinité de fois par des pavés $I_m \times J_m$ (I_m et J_m étant des intervalles de même longueur ℓ_m) de façon que $\sum_1^\infty \ell_m^{n/\alpha} < \infty$. Il en résulte

$$E\left(\sum_1^\infty \text{mes}(X(I_m) - X(J_m))\right) < \infty$$

donc p. s. $\sum_1^\infty \text{mes}(X(I_m) - X(J_m)) < \infty$ et, comme n'importe quel reste de cette série majore $\text{mes}(X(K_1) - X(K_2))$, on a

$$\text{p. s. } \text{mes}(X(K_1) - X(K_2)) = 0.$$

D'après le lemme, cela équivaut à

$$\text{p. s. } X(K_1) \cap X(K_2) = \emptyset .$$

Sous réserve de ce que nous avons admis $(\varphi(I,J) < \infty)$ le théorème est donc démontré.

4. Comment démontrer $\varphi(I, J) < \infty$?

Décomposons $X(t)$ en somme de deux processus de Lévy (c'est-à-dire à accroissements indépendants et stationnaires) symétriques

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

correspondant à une décomposition

$$\psi(\xi) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\xi)$$

où

$$\psi_1(\xi) = \int_{[0,1]\times S^{n-1}} 2(1-\cos \xi . u) \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \, d\tau(u')$$

$$\psi_2(\xi) = \int_{[1,\infty[\times S^{n-1}} 2(1-\cos \xi . u) \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \, d\tau(u')$$

$(u = ru', \quad r = |u|)$. La fonction $\psi_1(\xi)$ est de classe C^{∞}, donc pour chaque t la v. a. $X_1(t)$ admet des moments de tous les ordres. Comme c'est un processus symétrique à accroissements indépendants, on a d'ailleurs

$$\Pr\Big(\sup_{0\leq t\leq a} |X_1(t)| > \rho \Big) \leq 2 \Pr(|X_1(a)| > \rho)$$

donc la v. a. $\sup_{t\in I} |X_1(t)|$ admet des moments de tous les ordres. Par conséquent

$$\varphi_1(I,J) = E(\text{mes}(X_1(I) - X_1(J)) < \infty .$$

Le processus $X_2(t)$ n'admet que des sauts de longueurs ≥ 1, et le nombre de ces sauts sur l'intervalle $0 \leq t \leq a$, est une variable de Poisson N dont le paramètre est

$$a \int_{[1,\infty[\times S^{n-1}} \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \, d\tau(u')$$

c'est-à-dire $a\,\alpha^{-1}\|\tau\|$. Choissons a assez grand pour que les intervalles I et J soient contenus dans $[0,a]$. Comme $X_2(t)$ prend au plus N valeurs différentes sur $I \cup J$, l'ensemble $(X_1+X_2)(I) - (X_1+X_2)(J)$ est contenu dans la réunion d'au plus N^2 translatés de l'ensemble $X_1(I) - X_1(J)$. Comme les processus $X_1(t)$ et $X_2(t)$

sont indépendants, on a finalement

$$\varphi(I,J) \leq E(N^2)\, E(\text{mes}(X_1(I) - X_1(J))) < \infty .$$

5. Quelle relation y a-t-il entre $\dim K_1$, $\dim K_2$ et $\dim(K_1 \times K_2)$?

Le lemme de Frostman montre tout de suite que si $H_{\alpha_1}(K_1) > 0$ et $H_{\alpha_2}(K_2) > 0$, on a $H_{\alpha_1+\alpha_2}(K_1 \times K_2) > 0$. Donc

$$\dim K_1 \times K_2 \geq \dim K_1 + \dim K_2 .$$

Cette formule a été écrite pour la première fois par J. M. Marstrand, avec des exemples où l'on a inégalité stricte.

En fait, on va construire dans la prochaine section deux ensembles E et F compacts sur $\mathbb{R}$, tels que $\dim E = \dim F = \beta$ donné $(0 < \beta < 1)$, et que $\dim E \cap (F+x) = \beta$ pour un ensemble de x de mesure positive. Le simple fait que $E \cap (F+x) \neq \emptyset$ pour un ensemble de x de mesure positive entraîne $H_1(E \times F) > 0$, donc $\dim E \;\; F \geq 1$. Si $\beta < \frac{1}{2}$, on a donc

$$\dim E \times F > \dim E + \dim F .$$

Le théorème (section 2) nous dit que, pour avoir

$$\Pr(X(K_1) \cap X(K_2) \neq \emptyset) > 0$$

une condition suffisante est $\dim K_1 \times K_2 > \frac{n}{\alpha}$ et une condition nécessaire est $\dim K_1 \times K_2 \geq \frac{n}{\alpha}$. La condition $\dim K_1 + \dim K_2 > \frac{n}{\alpha}$ est donc suffisante, mais $\dim K_1 + \dim K_2 \geq \frac{n}{\alpha}$ n'est pas nécessaire. En fait, l'exemple ci-dessus montre que, si $n = 1$ et $\alpha > 1$, il existe des compacts K_1 et K_2 de dimensions arbitrairement petites, et dont les images par X se rencontrent avec probabilité positive.

6. Le théorème donne $C_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$ comme condition suffisante et $H_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$ comme condition nécessaire pour que $X(K_1)$ et $X(K_2)$ se coupent avec une probabilité positive. Je pense que $C_{\frac{n}{\alpha}}(K_1 \times K_2) > 0$ est la condition nécessaire et suffisante. Un bon exercice, à l'appui de cette conjecture, consiste à étudier le cas où K_2 est un intervalle ; il est laissé au lecteur.

III. LES POINTS MULTIPLES

1. Soit $X(t)$ un processus de Lévy (α,n), avec les notations de l'introduction. Soient $K_1, K_2, \ldots K_k$ des compacts dans $\mathbb{R}$ situés chacun à droite du précédent. Soit

$$\sigma \in M_1^+(K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_k)$$

et soit μ l'image de σ par l'application

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow (X(t_1)-X(t_k),\ X(t_2)-X(t_k),\ \ldots,\ X(t_{k-1})-X(t_k)).$$

Ainsi μ a son support dans $\mathbb{R}^{n(k-1)}$. Si μ est absolument continue avec probabilité positive, on voit comme dans la partie II que les translatées de son support contiennent 0 avec probabilité positive, donc

$$P(\exists t_1 \in K_1, \ldots, t_k \in K_k\ ,\ X(t_1) = \ldots = X(t_k)) > 0.$$

La transformée de Fourier de μ est

$$\hat{\mu}(\xi) = \int \exp(i \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j . (X(t_j) - X(t_k))\, d\sigma(t) \qquad (t = (t_1, t_2, \ldots t_{k-1})).$$

On a posé $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_{k-1}) \in \mathbb{R}^{n(k-1)}$, $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, et on a marqué par un point le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi

$$|\hat{\mu}(\xi)|^2 = \iint \exp(i \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j.(X(t_j)-X(t'_j)) - (\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})(X(t_k)-X(t'_k)))\, d\sigma(t)\, d\sigma(t')$$

et, comme les intervalles (t_j , t'_j) sont disjoints,

$$E(|\hat{\mu}(\xi)|^2) = \iint \exp(- \sum_{j=1}^{k-1} |t_j-t'_j|\psi(\xi_j) - |t_k-t'_k)\, \psi(\xi_1 +\ldots+ \xi_{k-1}))\, d\sigma(t)\, d\sigma(t')$$

avec $\psi(\xi_j) = |\xi_j|^\alpha\, \psi(\xi'_j) > 0$. Quitte à changer linéairement l'échelle du temps, on peut supposer $\psi(\xi_j) \geq |\xi_j|^\alpha$, donc

$$E(|\hat{\mu}(\xi)|^2) \leq \iint \exp(- \sum_{j=1}^{k-1} |t_j-t'_j|\, |\xi_j|^\alpha - |t_k - t'_k|\, |\xi_1+\ldots+\xi_{k-1}|^\alpha) d\sigma(t)\, d\sigma(t').$$

Intégrons par rapport à $d\xi$. Si le plus petit des $|t_j - t'_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ est $|t_k - t'_k|$ on majore le second membre en remplaçant $|t_k - t'_k|$ par 0, et on obtient, en intégrant par rapport à $d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}$,

$$E \int |\hat{\mu}(\xi)|^2\, d\xi \leq C \iint \prod_{j=1}^{k-1} |t_j-t'_j|^{-\frac{n}{\alpha}}\, d\sigma(t)\, d\sigma(t').$$

Si le plus petit des $|t_j - t'_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ est $|t_\ell - t'_\ell|$, on majore en remplaçant $|t_\ell - t'_\ell|$ par 0, et on choisit comme variable d'intégration les ξ_j avec $j \neq \ell$ et $\xi_k = -(\xi_1 +\ldots+ \xi_{k-1})$. Dans tous les cas, on a donc

$$E \int |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \leq C \iint K(t-t')\, d\sigma(t)\, d\sigma(t')$$

où

$$K(t) = \prod_{j=1}^{k} |t_j-t'_j|^{-\frac{n}{\alpha}}\, \inf_j |t_j-t'_j|^{\frac{n}{\alpha}}. \tag{1}$$

Résumons.

PROPOSITION 1. <u>Si</u> $K_1, K_2, \ldots K_k$ <u>sont des compacts de</u> $\mathbb{R}$ <u>portés par des intervalles disjoints, et que le produit</u> $K_1\; K_2\; \ldots\; K_k$ <u>porte une mesure de probabilité</u> σ <u>telle que</u>

$$\iint K(t-t')\, d\sigma(t)\, d\sigma(t') < \infty$$

<u>où</u> $K(t)$ <u>est donnée par</u> (1), <u>on a</u>

$$P(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k) \neq \emptyset) > 0.$$

Dans le cas $k = 2$, on a

$$K(t) = (\sup_{j=1,2} |t_j - t'_j|)^{-\frac{n}{\alpha}} \leq \frac{1}{(|t_1-t'_1| + |t_2-t'_2|)^{n/\alpha}}$$

et on retrouve la première partie du théorème du chapitre II. Dans le cas $k \geq 3$, la condition ne s'exprime pas aussi facilement. Observons que

$$K(t) \leq \prod_{j=1}^{k} |t_j - t'_j|^{-\beta_j}$$

où $0 < \beta_j < \frac{n}{\alpha}$ et $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = (k-1)\frac{n}{\alpha}$. Comme corollaire de la proposition 1, on a donc :

PROPOSITION 2. <u>Si</u> $K_1, \ldots K_k$ <u>sont des compacts portés par des intervalles disjoints et si</u> $C_{\beta_j}(K_j) > 0$ <u>avec</u> $0 < \beta_j < \frac{n}{\alpha}$ $(j = 1, 2, \ldots k)$ <u>et</u> $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = (k-1)\frac{n}{\alpha}$, <u>on a</u>

$$P(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k) \neq \emptyset) > 0.$$

COROLLAIRE. <u>Considérons le processus</u> $X(t)$ <u>restreint à</u> $t \in K$. <u>Si</u> $C_{\frac{k-1}{k}\frac{n}{\alpha}}(K) > 0$, <u>il existe un point multiple d'ordre</u> k <u>avec probabilité positive</u>.

2. Dans l'autre sens, supposons que l'on recouvre $K_1 \times K_2 \times \ldots K_k$ par des pavés $I_1^m \times I_2^m \times \ldots \times I_k^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Posons pour le moment $I_j^m = I_j$ et

$$P_j = X(I_j) - X(I_k) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Ainsi $(X(K_1) - X(K_k)) \times \ldots \times (X(K_{k-1}) - X(K_k))$ est recouvert par les produits $P_1 \times \ldots \times P_{k-1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Or

$$E \operatorname{mes}(P_1 \times \ldots \times P_{k-1}) = E_k(E_1 \operatorname{mes} P_1 \times \ldots \times E_{k-1} \operatorname{mes} P_{k-1})$$

$$\leq (E_k(E_1 \operatorname{mes} P_1)^{p_1})^{1/p_1} \ldots (E_k(E_{k-1} \operatorname{mes} P_{k-1})^{p_{k-1}})^{1/p_{k-1}}$$

avec les notations évidentes : E_j est l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu engendrée par $X\big|_{I_j}$ (en d'autres termes, c'est l'intégrale par rapport à $d\omega_j$, en considérant que $X\big|_{I_j}$ est défini sur l'espace Ω_j, et $X\big|_{\cup I_j}$ sur l'espace produit $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k$), et les p_j sont ≥ 1 avec $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \frac{1}{p_j} = 1$.

Supposons $|I_1| = \ldots = |I_k| = \ell$. Alors, par homogénéité,

$$E_k(E_1 \text{ mes } P_1)^p = C\,\ell^{\frac{np}{\alpha}}$$

donc

$$E \text{ mes}(P_1 \times \ldots \times P_{k-1}) \leq C\ \ell^{\frac{n}{\alpha}(k-1)} .$$

Il suit de là que si on peut recouvrir $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_k$ par des pavés $I_1^m \times I_2^m \times \ldots \times I_k^m$ tels que $|I_1^m| = \ldots = |I_k^m| = \ell_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et que $\sum\limits_1^\infty \ell_m^{\frac{n}{\alpha}(k-1)}$ soit arbitrairement petit, l'ensemble $(X(K_1) - X(K_k)) \times \ldots \times (X(K_{k-1}) - X(K_k))$ est presque sûrement de mesure nulle. Il s'ensuit comme précédemment que p. s. il ne contient pas le point 0. Résumons.

PROPOSITION 3. <u>Si</u> $H_{\frac{n}{\alpha}(k-1)}(K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_k) = 0$,

$$P(X(K_1) \cap X(K_2) \cap \ldots \cap X(K_k) \neq \emptyset) = 0.$$

COROLLAIRE. <u>Considérons</u> $X(t)$ <u>restreint à</u> $t \in K$. <u>Si</u> $H_{\frac{n}{\alpha}(k-1)}(K^k) = 0$, <u>p. s. il n'existe pas de point multiple d'ordre</u> k.

IV. DIMENSION DES INTERSECTIONS ET APPLICATION AUX POINTS MULTIPLES

1. On commencera par trois propositions qui ont pour but de préciser l'idée suivante. Quand E et F sont des variétés affines de $\mathbf{R}^n$, leur intersection a en général pour dimension $\dim E + \dim F - n$. Que peut-on dire d'analogue quand E et F sont des compacts (ou des σ-compacts) dans $\mathbf{R}^n$? Plus précisément, que peut-on dire des intersections $E \cap (F+x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ et des intersections $E \cap (AF+x)$ $(A \in GL(n,\mathbf{R}),\ x \in \mathbf{R}^n)$? Peut-on espérer que la dimension de ces intersections soit, "en général", $\leq \dim E + \dim F - n$ et "souvent" $= \dim E + \dim F - n$?

Commençons par les intersections $E \cap (F + x)$. Nous utiliserons la notation

$$E_\varepsilon = E + \mathrm{Boule}(0\ ,\ \varepsilon).$$

On vérifie facilement que l'hypothèse

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\beta - n} \operatorname{mes} E_\varepsilon < \infty \qquad \text{resp.} = 0$$

entraîne $H_\beta(E) < \infty$ resp. $= 0$. Pour des ensembles E homogènes, dans un sens à préciser, la réciproque est exacte. Voici un résultat simple sur $E \cap (F+x)$.

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux compacts dans</u> $\mathbf{R}^n$ <u>tels que</u>

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^{\beta - n} \operatorname{mes} E_\varepsilon + \varepsilon^{\gamma - n} \operatorname{mes} F_\varepsilon) < \infty \quad \text{resp.} = 0.$$

<u>Alors, pour presque tout</u> $x \in \mathbf{R}^n$, <u>on a</u>

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^{\beta + \gamma - 2n} \operatorname{mes}(E \cap (F+x))_\varepsilon) < \infty \quad \text{resp.} = 0.$$

Preuve. On a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{mes}(E \cap (F+x))_\varepsilon \, dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{mes}(E_\varepsilon \cap (F_\varepsilon + x))\, dx = \operatorname{mes} E_\varepsilon \operatorname{mes} F_\varepsilon$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varliminf \frac{\operatorname{mes}(E \cap (F+x))_\varepsilon}{\operatorname{mes} E_\varepsilon \operatorname{mes} F_\varepsilon}\, dx < \infty$$

d'après le lemme de Fatou, et la limite inférieure peut être prise sur n'importe quelle suite de ε tendant vers 0. En choisissant cette suite de façon que $\text{mes } E_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta})$ et $\text{mes } F_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\gamma})$ (resp. o au lieu de O) on obtient la conclusion.

En fait, nous avons démontré ceci : désignons par S une suite strictement positive tendant vers 0. Si l'on a

$$\text{mes } E_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta}) \qquad (\varepsilon \in S)$$

$$\text{mes } F_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\gamma}) \qquad (\varepsilon \in S)$$

il existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$ une sous-suite $S(x)$ de S telle que

$$\text{mes}(E \cap (F+x))_\varepsilon = O(\varepsilon^{2n-\beta-\gamma}) \qquad (\varepsilon \in S(x))$$

et on peut remplacer les O par des o. On peut appeler "dimension de Minkowski suivant S" de E la borne inférieure des β tels que $\text{mes } E_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta})$ $(\varepsilon \in S)$ et la noter $\dim_M^S E$; ainsi

$$\dim_M^{S(x)}(E \cap (F+x)) \leq \dim_M^S E + \dim_M^S F - n.$$

Il est essentiel dans cet énoncé d'utiliser la même suite S pour E et F. Etant donné $\beta \in]0,n[$, on peut construire des compacts E et F et des suites S et S' tels que

$$\text{mes } E_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta}) \qquad (\varepsilon \in S)$$

$$\text{mes } F_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-\beta}) \qquad (\varepsilon \in S')$$

et que, pour un ensemble de x de mesure de Lebesgue positive,

$$\dim E \cap (F+x) = \beta .$$

Voici le principe de la construction, pour $n = 1$: posons

$$D_k = \left\{ t \in [0,1] \,\middle|\, |\sin(\lambda_k t + \varphi_k)| < \alpha_k \right\}$$

$$E = \bigcap_{k \text{ pair}} D_k \qquad S = (\lambda_k^{-1}, k \text{ pair})$$

$$F = \bigcap_{k \text{ impair}} D_k \qquad S' = (\lambda_k^{-1}\ ,\ k \text{ impair})$$

où la suite positive λ_k tend vers l'infini très vite. En choisissant

$$\alpha_1\,\alpha_3 \ldots \alpha_{2k+1} = \lambda_{2k+1}^{1-\frac{1}{\beta}}$$

$$\alpha_2\,\alpha_4 \ldots \alpha_{2k} = \lambda_{2k}^{1-\frac{1}{\beta}}$$

on a l'exemple cherché.

2. La seconde proposition est plus difficile. On ne peut plus se contenter de translater F (par exemple, si E et F sont disjoints et si leur réunion est un ensemble indépendant sur $\mathbf{Q}$ - ce qui, d'après Robert Kaufman, est une situation générique -, l'intersection $E \cap (F+x)$ contient au plus un point quel que soit x). On s'intéressera aux intersections $E \cap (AF + x)$ où $A \in GL(n,R)$.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> τ <u>une mesure positive sur le groupe</u> $GL(n,\mathbf{R})$ <u>dont l'image par toute application</u> $A \longrightarrow A^{-1}x$ $(x \in \mathbf{R}^n\ ,\ |x| = r)$ <u>soit dominée par la mesure équidistribuée sur la boule</u> $B(0,r)$. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux compacts de</u> $\mathbf{R}^n$, <u>tels que</u> $C_\beta(E) > 0$ <u>et</u> $H_\gamma(F) > 0$, <u>avec</u> $\beta + \gamma \geq n$. <u>Alors, pour</u> τ<u>-presque tout</u> A, <u>on a</u>

$$E \cap (AF + x) \neq \emptyset$$

<u>et, de plus lorsque</u> $\beta + \gamma > n$,

$$C_{\beta+\gamma-n}(E \cap (AF + x)) > 0$$

<u>pour un ensemble de</u> $x \in \mathbf{R}^n$ <u>de mesure de Lebesgue positive</u>.

Preuve. Par hypothèse, il existe deux mesures de probabilité μ et ν, portées respectivement par E et par F, telles que

$$\int_{E^2} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\beta} < \infty$$

et

$$\int_{|y|<\rho} d\nu(x+y) < C\rho^{\gamma} \qquad (\rho>0,\ x\in\mathbf{R}^n).$$

Soit $\delta_\varepsilon(x)$ une identité approximative sur $\mathbf{R}^n$, par exemple

$$\delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}(1-\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|)^{+}$$

et

$$\nu_\varepsilon(x) = \int \delta_\varepsilon(x-y)d\nu(y)$$

$$\sigma_\varepsilon(x) = (\nu_\varepsilon * \tilde{\nu}_\varepsilon)(x) = \int \nu_\varepsilon(x+y)\,\nu_\varepsilon(y)\,dy.$$

Remarquons que

$$\int_{|y|<\rho} \nu_\varepsilon(x+y)\,dy < C\,\rho^{\gamma} \qquad (\rho>0\ ,\ x\in\mathbf{R}^n)$$

d'où

$$\int_{|x|<\rho} \sigma_\varepsilon(x)\,dx < C\,\rho^{\gamma} \qquad (\rho > 0).$$

Considérons

$$S_\varepsilon = \int_{GL(n,\mathbf{R})} d\tau(A) \int_{\mathbf{R}^n} dt \int_{E^2} \frac{d\mu(x)\,\nu_\varepsilon(A^{-1}x-t)\,d\mu(y)\,\nu_\varepsilon(A^{-1}y-t)}{|x-y|^{\beta+\gamma-n}}.$$

En échangeant les intégrations on a

$$S_\varepsilon = \int_{E^2} \left(\int_{GL(n,\mathbf{R})} d\tau(A)\,\sigma_\varepsilon(A^{-1}(x-y))\right) \frac{d\mu(x)\,d\mu(y)}{|x-y|^{\beta+\gamma-n}}.$$

L'intégrale intérieure est majorée par

$$C_1 \int_{|u|\leq|x-y|} |x-y|^{-n}\,\sigma_\varepsilon(u)\,du < C\,C_1\,|x-y|^{-n+\gamma}$$

donc $S_\varepsilon \leq C\,C_1$.

Supposons d'abord $\beta+\gamma=n$. Alors

$$S_\varepsilon = \int_{GL(n,\,\mathbf{R})} d\tau(A) \int_{\mathbf{R}^n} dt \left(\int_E \nu_\varepsilon(A^{-1}x-t)\,d\mu(x)\right)^2.$$

Pour τ-presque tout A, on a, puisque les S_ε sont bornés,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} dt\left(\int_E \nu_\varepsilon(A^{-1}x-t)\, d\mu(x)\right)^2 < \infty .$$

Posons $d\tilde{\nu}_A(x) = d\nu(-A^{-1}x)$ et $\delta_{\varepsilon,A}(x) = \delta_\varepsilon(A^{-1}x)$. Alors

$$\int_E \nu_\varepsilon(A^{-1}x - t)\, d\mu(x) = \mu * \tilde{\nu}_A * \delta_{\varepsilon,A}(t).$$

Le fait que les $\mu * \tilde{\nu}_A * \delta_{\varepsilon,A}$ soient bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour une suite de $\varepsilon \to 0$ entraîne que $\mu * \tilde{\nu}_A \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (façon rapide d'écrire que la mesure $\mu * \tilde{\nu}_A$ est absolument continue avec densité dans L^2) et cela entraîne que, pour une suite de $\varepsilon \to 0$, $\mu * \tilde{\nu}_A * \delta_{\varepsilon,A}(t)$ tend presque partout vers $\mu * \tilde{\nu}_A(t)$. Donc, pour τ-presque tout A et pour presque tout t, les mesures $\nu_\varepsilon(A^{-1}x-t)\, d\mu(x)$ admettent dans leur adhérence faible une mesure positive que nous noterons $\mu\nu_{A,t}$, de masse $\mu * \tilde{\nu}_A(t)$, et cette mesure a son support dans $E \cap (AF + t)$. Comme $\int \mu * \tilde{\nu}_A(t)\, dt = 1$, on a $E \cap (AF + t) \neq \emptyset$ pour un ensemble de t (dépendant de A) de mesure de Lebesgue > 0.

Si $\beta + \gamma > 0$, la même conclusion est encore valable, car l'hypothèse est encore vérifiée si on remplace γ par $n-\beta$. De plus, le fait que les S_ε soient bornés entraîne

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} d\tau(A) \int_{\mathbb{R}^n} dt \int_{E^2} \frac{d(\mu\nu_{A,t})(x)\, d(\mu\nu_{A,t})(y)}{|x-y|^{\beta+\gamma-n}} < \infty$$

donc $C_{\beta+\gamma-n}(E \cap (AF+t)) > 0$ pour τ-presque tout A et pour un ensemble de t (dépendant de A) de mesure de Lebesgue positive.

Cela termine la preuve de la proposition 2.

3. Pour appliquer la proposition 2, on a évidemment beaucoup de choix. On peut, sans changer la conclusion, élargir un peu l'hypothèse sur τ : τ peut être la borne supérieure d'une suite de mesures τ_j à supports compacts dans $GL(n,\mathbb{R})$ et dont les images par les applications $A \longrightarrow A^{-1}x$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = 1$) aient des densités uniformément bornées. Montrons que cette nouvelle hypothèse est vérifiée quand τ est la mesure de Haar d'un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$ transitif sur $\mathbb{R}^n$.

Soit G un tel sous-groupe, et pour tout $\lambda > 1$ soit F_λ l'ensemble des $\gamma \in G$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda^{-1}|x| \leq |\gamma x| \leq \lambda |x| .$$

C'est un compact, et G est réunion d'une suite de tels compacts. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = 1$. L'hypothèse de transitivité $Gx = \mathbb{R}^n$ entraîne (Baire) que, pour λ assez grand, $F_\lambda x$ est d'intérieur non vide ; choisissons λ pour qu'il en soit ainsi. Soient τ_λ la restriction à F_λ de la mesure de Haar τ du groupe G, et $\tau_{\lambda x}$ l'image de τ_λ par l'application $\gamma \to \gamma x$; ainsi $\tau_{\lambda x}$ est une mesure portée par $F_\lambda x$. Montrons que $\tau_{\lambda x}$ est absolument continue et de densité bornée. Si ce n'était pas le cas, il existerait des boules $B(y,r)$ dont la masse $\tau_{\lambda x} B(y,r)$ dépasserait Cr^n, si grand qu'on choisisse C. On peut supposer $y \in F_\lambda x$, donc $y = \gamma_y x$ avec $\gamma_y \in F_\lambda$. La boule $B(y,r)$ est alors contenue dans l'image par γ_y de la boule $B(x, r\lambda)$. Donc

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda x} B(y,r) &= \tau_\lambda \{\gamma \mid \gamma x \in B(y,r)\} \\ &\leq \tau_\lambda \{\gamma \mid \gamma_y^{-1}\gamma x \in B(x, r\lambda)\} \\ &\leq \tau_{\lambda^2} \{\gamma_y^{-1}\gamma \mid \gamma_y^{-1}\gamma x \in B(x, r\lambda)\} \end{aligned}$$

d'après l'invariance de la mesure de Haar, et l'inclusion $F_\lambda^{-1} F_\lambda \subset F_{\lambda^2}$. Il existe donc des boules $B(x\ , r\lambda)$ dont la masse $\tau_{\lambda^2 x} B(x, r\lambda)$ dépasse Cr^n, si grand qu'on choisisse C. Soit B une boule intérieure à $F_\lambda x$; elle contient un réseau R de points dont les distances mutuelles et les distances au bord de B dépassent $r\lambda^2$, et donc le nombre dépasse cr^{-n} $(c = c(B,\lambda))$. Chacun de ces points peut s'écrire γx avec $\gamma \in F_\lambda$. On vérifie par le même calcul que ci-dessus que

$$\tau_{\lambda^2 x} B(x, r\lambda) \leq \tau_{\lambda^3 x}(\gamma B(x, r\lambda)).$$

Les ouverts $\gamma B(x,\ r\lambda)$ sont centrés sur le réseau R et disjoints ; leur nombre dépasse cr^{-n}, donc

$$\tau_{\lambda^3 x}(B) \geq cC$$

ce qui est impossible puisque C est arbitraire. En fait, nous avons montré que la densité de $\tau_{\lambda x}$ est majorée par un nombre qui ne dépend que du rayon de B, de λ, et de la masse totale de la mesure τ_{λ^3}. Pour $|x| = 1$, le rayon de la plus grande boule B contenue dans $F_\lambda x$ est une fonction continue de x et de λ, $r(x,\lambda)$, qui est de plus croissante à λ et strictement positive (pour x fixé) quand λ est assez grand ; l'ensemble $\{x \mid |x| = 1 \, , \, r(x,\lambda) = 0\}$ est donc vide quand λ est assez grand, donc $\inf_{x, |x|=1} r(x,\lambda) > 0$. Donc, quand λ est assez grand, la densité de $\tau_{\lambda x}$ est uniformément bornée par rapport à x, $|x| = 1$.

Résumons : si G est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbf{R})$, transitif sur $\mathbf{R}^n_o$, la restriction de la mesure de Haar à l'ensemble compact $F_\lambda = \{\gamma \in G \mid \forall x \;\; \lambda^{-1} |x| \leq |\gamma x| \leq \lambda |x|\}$ $(\lambda > 1)$ jouit de la propriété suivante : ses images par les applications $\gamma \longrightarrow \gamma x$ $(x \in \mathbf{R}^n \, , \, |x| = 1)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ et ont des densités uniformément bornées.

La démonstration a été donnée quand λ est assez grand, mais le résultat vaut clairement pour tout $\lambda > 1$. D'autre part, le même résultat vaut si on remplace l'application $\gamma \longrightarrow \gamma x$ par l'application $\gamma \rightarrow \gamma^{-1} x$.

La proposition 2 admet donc le corollaire que voici.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> G <u>un sous-groupe fermé de</u> $GL(n, \mathbf{R})$, <u>transitif sur</u> $\mathbf{R}^n_o$, <u>et</u> τ <u>sa mesure de Haar. Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux compacts de</u> $\mathbf{R}^n$, <u>tels que</u> $C_\beta(E) > 0$ <u>et</u> $H_\gamma(F) > 0$, <u>avec</u> $\beta + \gamma \geq n$. <u>Alors, pour</u> τ<u>-presque tout</u> $A \in G$, <u>on a</u>

$$E \cap (AF + x) \neq \emptyset$$

<u>et, de plus, lorsque</u> $\beta + \gamma > n$

$$C_{\beta+\gamma-n}(E \cap (AF + x)) > 0$$

<u>pour un ensemble de</u> $x \in \mathbf{R}^n$ <u>de mesure de Lebesgue positive</u>.

Le cas le plus important est celui où G est le groupe des similitudes (constitué par les multiples positifs de matrices orthogonales). Ainsi, étant donnés deux compacts E et F de $\mathbb{R}^n$ dont la somme des dimensions est strictement supérieure à n, on peut associer à presque toute similitude A un ensemble de mesure positive de translations x tel que l'intersection $E \cap (AF+x)$ ait sa dimension au moins égale à $\dim E + \dim F - n$.

On peut se demander si, pour presque toute similitude A, il existe un ensemble de mesure positive de translations x tel que la dimension de l'intersection $E \cap (AF+x)$ soit exactement $\dim E + \dim F - n$. La réponse est négative. En regardant l'exemple donné dans la section 1, on voit qu'il existe des compacts E et F de dimension β donnée entre 0 et n, et tels que, pour un ensemble de similitudes A ayant une mesure de Haar positive et un ensemble de translations x de mesure pleine, la dimension de $E \cap (AF+x)$ ne puisse être que β ou 0.

4. On se limitera dans la suite (pour pouvoir appliquer la proposition 3) au mouvement brownien et aux processus de Lévy sphériquement symétriques et stables d'indice α. Ainsi $\psi(\xi) = \frac{1}{\alpha}|\xi|^\alpha$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

L'idée générale est celle-ci. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, $X(K)$ est un compact dont la dimension est p. s. $\alpha \dim K$. Si $K_1, K_2, \ldots, K_k$ sont des compacts portés par des intervalles disjoints, les compacts $X(K_1)$, $X(K_2)$, ... $X(K_k)$ sont stochastiquement indépendants. On doit s'attendre à ce que $X(K_1) \cap X(K_2)$ soit p. s. vide si $\alpha(\dim K_1 + \dim K_2) < n$, et avec probabilité > 0 de dimension $\alpha(\dim K_1 + \dim K_2) - n$ si cette quantité est > 0. Par induction, on doit s'attendre à ceci : si

$$\alpha(\dim K_1 + \dim K_2 + \ldots + \dim K_k) < (k-1)n ,$$

l'intersection $X(K_1) \cap X(K_2) \ldots \cap X(K_k)$ est p. s. vide ; si

$$\alpha(\dim K_1 + \dim K_2 + \ldots + \dim K_k) - (k-1)n = d > 0 ,$$

l'intersection $X(K_1) \cap X(K_2) \ldots \cap X(K_k)$ a pour dimension d avec probabilité positive. En application, si K est un compact de dimension β et si $k\alpha\beta < (k-1)n$, p. s. l'application $X(t)\big|_{t\in K}$ n'admet pas de points multiples d'ordre k ; si $k\alpha\beta > (k-1)n$, l'ensemble des points multiples d'ordre k a pour dimension $k\alpha\beta - (k-1)n$ avec probabilité positive. Si de plus K est homogène, dans un sens à préciser (par exemple un ensemble parfait symétrique construit à la manière de Cantor avec un rapport de dissection constant), la loi du zéro-un s'appliquera ; en conséquence, si $\alpha\beta \geq n$, il existera p. s. des points de multiplicité infinie.

Tout ce qui précède est bien correct. Pour le démontrer, on a surtout besoin de préciser la première ligne : si K est un compact de $\mathbb{R}$, $X(K)$ est p. s. un compact de dimension $\alpha \dim K$. C'est l'object des lemmes suivants.

LEMME 1. <u>Il existe</u> $C = C(n,\alpha)$ <u>tel que, pour tout compact</u> K <u>dans</u> $\mathbb{R}^+$ <u>on ait</u>

$$E(\mathrm{mes}(X(K))_\varepsilon) \leq C\, \varepsilon^{n-\alpha}\, \mathrm{mes}\, K_{\varepsilon^\alpha}.$$

(Rappelons la notation $F_\varepsilon = F + \text{boule}\,(0,\varepsilon)$, donc $K_\varepsilon = K + [-\varepsilon\,,\,\varepsilon]$; mes désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathbb{R}$).

Preuve. Soit $I_t = [0,t]$, et $f(t,\varepsilon) = E(\mathrm{mes}(X(I_t))_\varepsilon)$. Le fait, essentiel, que $f(t,\varepsilon) < \infty$, est pratiquement démontré dans la partie II 4 . On a évidemment (parce que les accroissements de $X(t)$ sont stationnaires)

$$f(t+t'\,,\,\varepsilon) \leq f(t,\,\varepsilon) + f(t',\varepsilon)$$

et (parce que les lois de $X(\lambda^\alpha t)$ et $\lambda X(t)$ sont les mêmes)

$$f(\lambda^\alpha t\,,\,\lambda\varepsilon) = \lambda^n f(t,\varepsilon)$$

donc

$$f(\varepsilon^\alpha\,,\,\varepsilon) = \varepsilon^n f(1,1)$$

$$f(t\,,\,\varepsilon) \leq (t + \varepsilon^\alpha)\,\varepsilon^{n-\alpha} f(1,1).$$

Dans le cas du mouvement brownien, $f(t\ ,\ \varepsilon)$ est l'espérance de la mesure du "boudin brownien". La formule se généralise immédiatement : si K est constitué de N intervalles de longueurs ε^{α}, on a

$$E(\mathrm{mes}(X(K))_{\varepsilon}) \leq N\ \varepsilon^{n}\ f(1,1)$$

donc, pour tout compact K,

$$E(\mathrm{mes}(X(K))_{\varepsilon}) \leq E(\mathrm{mes}(X(K_{\varepsilon^{\alpha}}))_{\varepsilon} \leq 2\ \varepsilon^{n-\alpha}\ \mathrm{mes}\ K_{\varepsilon^{\alpha}}\ f(1,1)$$

ce qui démontre le lemme 1. Remarquons qu'on a utilisé seulement le fait que $X(t)$ est symétrique et stable d'indice α.

LEMME 2. Pour tout compact K dans $\mathbf{R}^{+}$ dont la capacité d'ordre β est strictement positive $(C_{\beta}K > 0)$ avec $\alpha\beta < n$, on a $C_{\alpha\beta}\, X(K) > 0$ p. s.

Preuve. L'hypothèse signifie l'existence de $\mu \in M_1^{+}(K)$ telle que

$$\iint_{K^2} \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{|t-s|^{\beta}} < \infty .$$

Soit ν l'image de μ par l'application $t - X(t)$. On a

$$E\iint \frac{d\nu(x)\, d\nu(y)}{|x-y|^{\alpha\beta}} = E \iint \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{|X(t)-X(s)|^{\alpha\beta}}$$

donc la conclusion du lemme résultera de

$$E(|X(t) - X(s)|^{-\alpha\beta}) \leq C\, |t-s|^{-\beta}$$

ce qui, par stationnarité et stabilité d'indice α, se ramène à

$$E(|X(1)|^{-\alpha\beta}) \leq C$$

bien vérifié puisque $\alpha\beta < n$. On a utilisé ici le fait que $X(t)$ est symétrique et stable d'indice α, et aussi que le processus est vraiment n-dimensionnel.

Appliquons le lemme 1 et la proposition 1, d'une part, le lemme 2 et la proposition 3 (G étant le groupe des similitudes) d'autre part. On obtient la proposition suivante, essentiellement contenue dans les propositions 2 et 3 de la partie III.

PROPOSITION 4. Supposons que $K_1, K_2, \ldots K_k$ sont des compacts portés par des intervalles disjoints de $\mathbb{R}^+$ et que X est un processus de Lévy (α, n) sphériquement symétrique. Soit $0 < \beta_j < \frac{n}{\alpha}$ $(j = 1, 2, \ldots k)$. Si l'on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^{\beta_1 - 1} \text{ mes } K_{1,\varepsilon} + \ldots + \varepsilon^{\beta_k - 1} \text{ mes } K_{k,\varepsilon}) < \infty \text{ resp. } = 0$$

on a p. s.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\alpha(\beta_1 + \ldots + \beta_k) - kn} \text{ mes}(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k))_\varepsilon < \infty \quad \text{resp. } = 0.$$

En particulier, si $\alpha(\beta_1 + \ldots + \beta_k) < (k-1)n$ resp. $\leq (k-1)n$, on a p. s. $X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k) = \emptyset$. Si au contraire

$$C_{\beta_j} K_j > 0 \quad (j = 1, \ldots k), \quad \alpha(\beta_1 + \ldots + \beta_k) \geq (k-1)n$$

on a avec probabilité positive

$$X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k) \neq \emptyset$$

et, dans le cas $\alpha(\beta_1 + \ldots + \beta_k) - (k-1)n = \gamma > 0$,

$$C_\gamma(X(K_1) \cap \ldots \cap X(K_k)) > 0.$$

La vérification est laissée au lecteur. On utilise dans la 2ème partie le fait que $X(t)$ est sphériquement symétrique, ce qui implique que la loi de $X(K) - X(\inf K)$ est invariante sous l'action de $O(n)$. La première partie nécessite pas cette hypothèse.

Comme corollaire, laissé au lecteur, si K est un compact dans $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\beta - 1} \text{ mes } K_\varepsilon = 0 \quad , \quad k\alpha\beta \leq (k-1)n$$

il est presque sûr que $X(t)\big|_{t \in K}$ n'admet pas de point multiple d'ordre k. Si par contre

$$C_\beta K > 0 \quad , \quad k\alpha\beta \geq (k-1)n$$

c'est avec probabilité positive que $X(t)\big|_{t \in K}$ admet des points multiples d'ordre k.

5. La proposition 1 et le lemme 1 permettent de montrer facilement que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ n'a pas de point triple. En effet, considérons trois

intervalles I, J, K, situés dans cet ordre sur $\mathbb{R}^+$. On a (lemme 1)

$$E(\text{mes}(X(I))_\varepsilon + \text{mes}(X(J))_\varepsilon) = 0(\varepsilon)$$

donc (proposition 1)

$$\text{p. s. } \text{pp}(x) \quad \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \text{mes}(X(I) \cap (X(J) + x))_\varepsilon < \infty$$

donc

$$\text{p. s. } \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \text{mes}(X(I) \cap X(J))_\varepsilon < \infty$$

d'où

$$\text{p. s. } C_1(X(I) \cap X(J)) = 0.$$

La capacité newtonienne de $X(I) \cap X(J)$ étant nulle, il est p. s. que $X(K)$ ne rencontre pas $X(I) \cap X(J)$ (Kakutani). Donc

$$\text{p. s. } X(I) \cap X(J) \cap X(K) = \emptyset$$

d'où on conclut facilement que p. s. $X(t)$ n'a pas de point triple.

SUR LA CROISSANCE DE CERTAINES SERIES DE DIRICHLET SUR DES DROITES HORIZONTALES

YU CHIA-YUNG

M. J.-P. Kahane [1] indique qu'il est intéressant d'évaluer les valeurs d'une certaine fonction analytique par ses valeurs sur un segment horizontal et il montre (1) qu'on peut étudier ce problème pour des fonctions entières avec une de ses inégalités. Pour certaines séries de Dirichlet ordinaires ou aléatoires on peut obtenir quelques résultats à cet égard avec d'autres inégalités.

1. <u>Séries de Dirichlet ordinaires</u>. Supposons que $\{\lambda_n\}$ $(n \in \mathbf{N}_+ , \lambda_n \in \mathbf{R}_+)$ une suite strictement croissante telle que

(1) $$\varliminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$$

et que

(2) $$\Sigma(1/\lambda_n) < \infty .$$

Considérons la série de Dirichlet

(3) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it)$$

dont l'abscisse de convergence $\sigma_c < +\infty$(2), où σ et t sont des variables réelles.

---

(1) Voir la note de J.-P. Kahane à la fin de ce texte.

(2) Sous la condition (2), l'abscisse de convergence absolue σ_a de $f(s)$ est égale à σ_c. Voir S. Mandelbrojt [2].

Pour la série (3), J. M. Anderson et G. Binmore [3] ont établi une inégalité qu'on peut écrire comme suit. Pour tout $\sigma \in]\sigma_c, +\infty[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

(4) $$|a_n| \leq \sqrt{2\lambda_n}\, P_n(\lambda_n) \left[\int_\sigma^\infty |f(x+it)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda_n \sigma} \quad ,$$

où

$$P_n(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_n + \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k}\right| \qquad (n \in \mathbb{N}_+).$$

Sous les conditions (1) et (2), on a [4]

(5) $$0 < \log P_n(\lambda_n) = o(\lambda_n) \qquad (n \to \infty).$$

A) Considérons d'abord le cas où $\sigma_c = -\infty$. Alors $f(s)$ est une fonction entière. Définissons $\forall \sigma, t \in \mathbb{R}$,

(6) $$M(\sigma) = \sup_t |f(\sigma + it)|$$

et

(7) $$M_1(\sigma + it) = \sup_{x \geq \sigma} |f(x + it)| .$$

Dans certains sens la croissance de $f(s)$ dans tout le plan est la même que sur chaque droite horizontale.

I. <u>Si</u> $f(s)$ <u>est d'ordre</u> (R) ρ, <u>alors on a</u> $\forall t \in \mathbb{R}$,

(8) $$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log^+ \log^+ M_1(\sigma + it)}{-\sigma} = \rho .$$

<u>Démonstration</u>. On peut considérer seulement le cas où $\rho > 0$. Si pour un certain t, la limite supérieure dans (8) était plus petite que ρ, alors $\exists \rho' \in]0, \rho[$, $\exists \sigma_0 \in]-\infty, 0[$ tels que $\forall \sigma < \sigma_0$,

$$M_1(\sigma + it) < \exp(e^{-\rho' \sigma}).$$

L'inégalité (4) peut s'écrire, pour $\sigma < \sigma_0$,

$$|a_n| \leq \sqrt{2\lambda_n}\, P_n(\lambda_n) \left[\int_\sigma^{\sigma_o} + \int_{\sigma_o}^{o} + \int_o^{\infty}) |f(x+it)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda_n \sigma}$$

$$\leq \sqrt{2\lambda_n}\, P_n(\lambda_n) \left[\sqrt{\sigma-\sigma_o}\, M_1(\sigma+it) + B(\sigma_o+it) + A\right] e^{\lambda_n \sigma},$$

où A et $B(\sigma_o+it)$ sont des constantes dont la deuxième dépend de σ_o+it. $\forall\, \varepsilon > 0$, on aurait, pour $-\sigma$ et n assez grands,

$$|a_n| \leq \exp(e^{-(\rho'+\varepsilon)\sigma})\, e^{\lambda_n(\sigma+\varepsilon)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Posons $\sigma = \left[-1/(\rho'+\varepsilon)\right] \log(\lambda_n/(\rho'+\varepsilon))$. On obtiendrait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} \leq -\frac{1}{\rho'+\varepsilon},$$

qui entraînerait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} < -\frac{1}{\rho},$$

contraire à l'hypothèse [2]. (8) est ainsi démontrée.

II. Si $f(s)$ est du type τ de l'ordre (R) $\rho \in]0,+\infty[$ [5], alors on a, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

(9) $$\lim_{\sigma\to-\infty} \frac{\log^+ M_1(\sigma+it)}{e^{-\rho\sigma}} = \tau.$$

Démonstration. On peut considérer seulement le cas où $\tau > 0$. Si pour un certain t, la limite supérieure dans (9) était plus petite que τ, alors $\exists\, \tau' \in]0,\tau[$, $\exists\, \sigma_o \in]-\infty,0[$ tels que $\forall\, \sigma < \sigma_o$,

$$M_1(\sigma+it) < \exp(\tau' e^{-\rho\sigma}).$$

L'inégalité (4) entraîne que $\forall\, \varepsilon > 0$, pour $-\sigma$ et n assez grands,

$$|a_n| \leq \exp(\tau'+\varepsilon)\, e^{-\rho\sigma})\, e^{\lambda_n(\sigma+\varepsilon)}.$$

Posons $\sigma = -(1/\rho)\log(\lambda_n/\rho(\tau'+\varepsilon))$. On obtiendrait, pour n assez grand,

$$|a_n| \le \exp\left(\frac{\rho}{\lambda_n}\log\frac{\rho e(\tau'+2\varepsilon)}{\lambda_n}\right).$$

Donc on aurait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\lambda_n}{\rho e}\,|a_n|^{\frac{\lambda_n}{\rho}} < \tau,$$

contraire à l'hypothèse. (9) est ainsi démontré.

On peut étudier plusieurs extensions de l'ordre (R) et du type sur les droites horizontales et obtenir des résultats semblables.

B) Considérons maintenant le cas où $\sigma_c = 0$. Alors $f(s)$ est une fonction holomorphe dans $\sigma > 0$. Définissons, $\forall\ \sigma \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$, $M(\sigma)$ et $M_1(\sigma+it)$ par (6) et (7) respectivement. On voit que dans certains sens la croissance de $f(s)$ dans $\sigma > 0$ est la même que sur chaque droite horizontale dans $\sigma > 0$.

III. <u>Si on a</u>

(10)
$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\ \frac{\log^+\log^+ M(\sigma)}{-\log\sigma} = \sigma,$$

on a $\forall\ t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\ \frac{\log^+\log^+ M_1(\sigma+it)}{-\log\sigma} = \rho.$$

<u>Démonstration</u>. Considérons le cas où $\rho > 0$. Si pour un certain t, la limite supérieure dans l'égalité ci-dessus était plus petite que ρ, alors $\exists\,\rho' \in\,]0,\rho[$, $\exists\,\sigma_0 \in\,]0,1[$ tels que $\forall\ \sigma \in\,]0,\sigma_0[$,

$$M_1(\sigma+it) < \exp\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho'}\right).$$

L'inégalité (4) peut s'écrire $\forall\ \sigma \in\,]0,\sigma_0[$,

$$|a_n| \leq \sqrt{2\lambda_n}\, P_n(\lambda_n) \left[\left(\int_{\sigma}^{\sigma_o} + \int_{\sigma_o}^{1} \right) |f(x+it)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda_n \sigma}$$

$$\leq \sqrt{2\lambda_n}\, P_n(\lambda_n) \left[M_1(\sigma+it) + B_1(\sigma_o+it) + A_1 \right] e^{\lambda_n \sigma} ,$$

où A_1 et $B_1(\sigma_o+it)$ sont des constantes dont la deuxième dépend de σ_o+it. $\forall\, \varepsilon > 0$, on aurait, pour $1/\sigma$ et n assez grands,

$$|a_n| \leq \exp((1/\sigma)^{\rho'+\varepsilon})\, e^{\lambda_n(\sigma+\varepsilon)} .$$

Posons $\sigma = ((\rho'+\varepsilon)/\lambda_n)^{1/(\rho'+1+\varepsilon)}$. On obtiendrait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^+ \log^+ |a_n|}{\log \lambda_n} < \frac{\rho}{\rho+1} ,$$

contraire à l'hypothèse [6]. La démonstration est achevée.

On peut de même démontrer d'autres extensions de la proposition III.

2. <u>Séries de Dirichlet aléatoires</u>. Considérons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ est composé de tous les ensembles $E \subset \Omega$ mesurables au sens de Lebesgue et où $P[E]$ est la mesure de Lebesgue. Considérons la suite $\{\varepsilon_n(\omega)\}$ de fonctions de Rademacher et celle $\{r_n(\omega)\}$ $(n \in N)$ de fonctions de Steinhaus où $r_n(\omega) = \exp(2\pi i \theta_n(\omega))$. Ces deux suites sont des suites de variables aléatoires indépendantes dans $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

$$P[\varepsilon_n(\omega) = 1] = P[\varepsilon_n(\omega) = -1] = \frac{1}{2}$$

et $\theta_n(\omega)$ sont uniformément distribuées sur $[0,1]$.

Pour les variables indépendantes de Rademacher ou de Steinhaus, Paley-Zygmund

[7] a démontré : Soit E un événement dans Ω pour lequel $P[E] > 0$. Alors il existe un entier positif $N = N(E)$ tel que pour tout entier $N' > N$, on a, quels que soient les nombres complexes c_n,

(11) $$\int_E \Big| \sum_{n=N}^{N'} c_n \varepsilon_n(\omega) \Big|^2 d\omega \quad \text{ou} \quad \int_E \Big| \sum_{n=N}^{N'} c_n r_n(\omega) \Big|^2 d\omega \geq \frac{1}{2} P[E] \sum_{n=N}^{N'} |c_n|^2 .$$

Au moyen de (11) on peut étudier la croissance presque sûre (p. s.) de certaines séries de Dirichlet aléatoires sur des droites horizontales.

Considérons la série de Dirichlet aléatoire

(12) $$f(s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega)\, e^{-\lambda_n s} \qquad (\omega \in \Omega) ,$$

où $a_n(\omega) = b_n \varepsilon_n(\omega)$ ou $b_n r_n(\omega)$, $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n \in \mathbf{R}_+ \; , \; n \in \mathbf{N}_+)$ est une suite strictement croissante et $\{b_n\}$ est une suite de nombres complexes.

C) Considérons d'abord le cas où l'abscisse de convergence de (12) $\sigma_c(\omega) = -\infty$ p. s.. Alors $f(s;\omega)$ est une fonction entière aléatoire. Supposons maintenant

(13) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} < \infty .$$

On a $\sigma_c(\omega) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (\log |a_n(\omega)| / \lambda_n)$. Définissons, $\forall\, \sigma$ et $\forall\, t \in \mathbf{R}$,

(14) $$M(\sigma \; ; \; \omega) = \sup_t |f(\sigma + it \; ; \; \omega)|$$

et

(15) $$M_1(\sigma + it \; ; \; \omega) = \sup_{x \geq \sigma} |f(x+it ; \omega)| .$$

On démontre le lemme suivant :

LEMME 1. <u>Si</u> $f(s;\omega)$ <u>est d'ordre</u> (R) ρ <u>p. s.,</u> <u>alors pour chaque nombre réel fixé</u> t_o, <u>on a</u>

$$(16) \qquad \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{\log^+ \log^+ M_1(\sigma + it_o ; \omega)}{-\sigma} = \rho \qquad \text{p. s.}$$

Démonstration. Considérons le cas où $\rho > 0$. Si pour $\omega \in E$, $P[E] > 0$, la limite supérieure dans (16) était plus petite que ρ, alors $\exists \rho' \in]0, \rho[$, $\exists \sigma_o \in]-\infty, 0[$ tels que $\forall \sigma < \sigma_o$, $\forall \omega \in E$,

$$M_1(\sigma + it_o \,;\, \omega) < \exp(e^{-\rho' \sigma}).$$

Soit $N = N(E)$ un entier fixé dans (11). On aurait, pour $\omega \in E$ et pour $-\sigma$ assez grand,

$$(17) \qquad \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n(\omega)\, e^{-\lambda_n(\sigma + it_o)} \right| < 2 \exp(e^{-\rho'\sigma}).$$

Par (11) on a, $\forall N' > N$,

$$\frac{1}{2} P[E] \sum_{n=N}^{N'} |b_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \leq \int_N \left| \sum_{n=N}^{N'} a_n(\omega) e^{-\lambda_n(\sigma + it_o)} \right|^2 d\omega .$$

Puisque

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} a_n(\omega)\, e^{-\lambda_n(\sigma + it_o)} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n \sigma} < \infty ,$$

on a

$$\frac{1}{2} P[E] \sum_{n=N}^{\infty} |b_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \leq \int_E \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n(\omega)\, e^{-\lambda_n(\sigma + it_o)} \right|^2 d\omega .$$

En tenant compte de (17) on aurait

$$\sum_{n=N}^{\infty} |b_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \leq 8 \exp(e^{-\rho'\sigma}).$$

Donc $\sum_{n=N}^{\infty} b_n^2 e^{-2\lambda_n s}$ serait une fonction entière d'ordre (R) $\rho_1 \leq \rho' < \rho$ et on aurait

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |b_n|^2}{2\lambda_n \log 2\lambda_n} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |b_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} = -\frac{1}{\rho_1} < -\frac{1}{\rho},$$

contraire à l'hypothèse [2]. (16) est ainsi démontrée.

Du lemme 1 on déduit tout de suite le résultat suivant :

IV. Si $f(s\,;\,\omega)$ est d'ordre (R) ρ p. s., alors on a p. s. $\forall\, t_n \in Q$[1],

(18)
$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\ \frac{\log^+\log^+ M_1(\sigma+it_n\,;\,\omega)}{-\sigma} = \rho .$$

Par le lemme 1, pour un n fixé, (18) est vérifiée pour $\omega \in E_n$, $P\left[E_n\right] = 1$

Posons $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Alors $P\left[E\right] = 1$ et $\forall\, \omega \in E$, (18) est vérifiée $\forall\, t_r \in Q$.

En utilisant (11) et un résultat dans [5] on démontre de même :

V. Si $f(s;\omega)$ est du type τ de d'ordre (R) $\rho \in \left]0,+\infty\right[$ p. s., alors on a, p. s. $\forall\, t_n \in Q$,

$$\lim_{\sigma\to-\infty} \frac{\log^+ M_1(\sigma+it_n\,;\,\omega)}{e^{-\rho\sigma}} = \tau .$$

D) Considérons maintenant le cas où $\sigma_c(\omega) = 0$ p. s.. Alors $f(s;\omega)$ est une fonction aléatoire holomorphe dans $\sigma > 0$. Supposons

(19)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n}{\lambda_n} < \infty .$$

Définissons, $\forall\, \sigma \in R_+$ et $\forall\, t \in R$, $M(\sigma\,;\,\omega)$ et $M_1(\sigma+it;\omega)$ par (14) et (15) respectivement. En utilisant (11) et des résultats dans [6] on obtient :

VI. Si on a

(20)
$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\ \frac{\log^+\log^+ M(\sigma\,;\,\omega)}{-\log\sigma} = \rho \qquad \text{p. s.,}$$

---

(1) On range tous les nombres de Q en une suite $\{t_n\}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$.

alors on a p. s. $\forall\, t_n \in \mathbb{Q}$,

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}} \frac{\log^+\log^+ M_1(\sigma+it_n;\omega)}{-\log\sigma} = \rho .$$

VII. <u>Si on a</u> (20) <u>p. s. avec</u> $\rho \in]0,+\infty[$ <u>et si on a</u>

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}} \frac{\log^+ M(\sigma;\omega)}{(1/\sigma)^\rho} = \tau \qquad \text{p. s.},$$

<u>alors on a p. s.</u> $\forall\, t_n \in \mathbb{Q}$,

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}} \frac{\log^+ M_1(\sigma+it;\omega)}{(1/\sigma)^\rho} = \tau .$$

On peut déduire des résultats sur la croissance dans une bande horizontale quelconque des séries ordinaires ou aléatoires et sur la répartition de leurs valeurs. En précisant la croissance on peut étendre les résultats ci-dessus.

Références

[1] KAHANE, J.-P. Lectures on mean periodic functions. Bombay, Tata Inst. of Fund. Research, 1959.

[2] MANDELBROJT, S. Selecta. Paris, Gauthier-Villars, 1981.

[3] ANDERSON, J. M. and BINMORE, K. G. Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1968), 36-48.

[4] GAIER, D. J. SIAM Numer. Anal. 3 (1966), 248-265.

[5] YU Chia-yung Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 68 (1951), 65-104.

[6] Acta Math. Sinica 21 (1978), 97-118.

[7] PALEY, R.E.A.C. and ZYGMUND, A. Proc. Camb. Phil. Soc. 28 (1931-32), 190-205.

Note de Jean-Pierre KAHANE

Pour comparer le comportement de $f(s) = \Sigma\, a_n e^{-\lambda_n s}$ sur une droite horizontale et dans le plan, J. M. Anderson et YU Chia-yung utilisent une inégalité sur les coefficients a_n. J'avais indiqué dans [1] (leçon 16) une méthode plus directe, reposant sur une formule du type

$$f(s) = \int f(x)\, d\mu_s(x)$$

où $d\mu_s$ est une mesure portée par un intervalle réel $I = [a,b]$ donné, ne dépendant que de s $(\mathrm{Re}\, s > b)$ et de la suite (λ_n), sous la condition $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. On vérifie que $\int |d\mu_s| < C_\varepsilon$ quand $|\arg(s-b)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Designons cet angle par A_ε ;

$$\sup_{s \in A_\varepsilon} |f(0)| \leq C_\varepsilon \sup_{x \in I} |f(x)|$$

et la même inégalité vaut pour toute translatée de f.

Si les λ_n sont entiers (cas d'Anderson) la fonction $f(s)$ est $2\pi i$-périodique, donc, en désignant par c l'abscisse minima des intervalles verticaux de longueur 2π contenus dans A_ε, on a

$$\sup_{\mathrm{Re}\, s \geq c} |f(s)| \leq \sup_{s \in A_\varepsilon} |f(s)|$$

et cela vaut aussi pour les translatées de f, donc

$$(*) \qquad \sup_{\mathrm{Re}\, s \geq u} |f(s)| \leq C \sup_{u-\alpha \leq x \leq u-\beta} |f(x)| \qquad (C = C_\varepsilon)$$

pour tout $u > \sigma_c + \alpha$, en posant $\alpha = c - \alpha$ et $\beta = c - b$. On remarque que α

et β sont arbitrairement voisins de 0, et C ne dépend que de α, β. Si f(s) est une fonction entière $(\sigma_c = -\infty)$ cela entraîne que son ordre dans le plan et son ordre sur une droite horizontale sont les mêmes.

Si les λ_n satisfont à la condition $\inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \delta > 0$ (cas de Yu Chia-yung), la fonction $f(\sigma + it)$ ($\sigma > \sigma_c$ fixé) est une fonction de t pseudo-périodique au sens de Paley-Wiener, et elle vérifie l'inégalité d'Ingham

$$\int_\theta^{\theta+T} |f(\sigma+it)|^2\,dt \leq C_T \int_0^T |f(\sigma+it)|^2\,dt$$

pour tout θ réel et tout $T > 2\pi/\delta$, C_T ne dépendant que de T et de δ. Choisissons $\rho < \frac{T}{2}$. Pour tout s dont la partie réelle dépasse $\sigma_c+\rho$, on a (principe du maximum)

$$|f(s)|^2 \leq (\pi\rho^2)^{-1} \iint_{|\sigma+it-s|<\rho} |f(\sigma+it)|^2\,d\sigma\,dt$$

$$\leq \rho^{-1} \sup_{|\sigma-\mathrm{Re}\,s|<\rho} \int_{\mathrm{Im}\,s-\frac{T}{2}}^{\mathrm{Im}\,s+\frac{T}{2}} |f(\sigma+it)|^2\,dt$$

donc, compte-tenu de l'inégalité d'Ingham,

$$|f(s)| \leq (\rho^{-1} C_T)^{1/2} \sup_{|\sigma-\mathrm{Re}\,s|<\rho,\,0<t<T} |f(\sigma+it)|,$$

et en désignant par c le plus petit réel tel que le rectangle $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\times]0,T[$ soit contenu dans l'angle A_ε, on a de nouveau (*) avec $\alpha = c - a$, $\beta = c-b$ arbitrairement voisins de 0, C ne dépendant que de α, β et δ. On a la même conséquence que précédemment pour les fonctions entières.

Il faudrait une étude de la fonction $C(\alpha,\beta,\delta)$ pour tenter d'obtenir les résultats de Yu Chia Yung concernant le cas $\sigma_c = 0$. Dans ce cas au moins, sa méthode est plus naturelle et puissante.

No. d'impression 587
1er trimestre 1983