Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
ORSAY 1970-71

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
Orsay 1970-71

Exposé n°1

OPERATEURS ACCRETIFS

exposés de Ph. BENILAN et H. ATTOUCH
rédigés par C. PICARD

Soit X un espace de Banach réel, de dual X' ; la norme sur X est notée $|.|$; le produit scalaire d'un élément de X et d'un élément de X' est noté $(.,.)$.

Pour éviter les confusions, on notera $[x,y]$ le couple constitué par l'élément x et l'élément y .

1. L'application de dualité.

Définition : on appelle application de dualité de X l'application W de X dans $\mathcal{P}(X')$ définis par :

$$W(x) = \{w \in X' \ ; \ (x,w) = |x|\,|w| \ \text{ et } \ |w| = |x|\}$$

Il revient au même d'écrire

$$W(x) = \{w \in X' \ ; \ (x,w) = |x|^2 \ \text{ et } \ |w| \leq |x|\} \ .$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, $W(x)$ est non vide. On vérifiera aisément que c'est une partie convexe et fermée (et même $*$-faiblement fermée) de X' .

Proposition 1.1. *Si X' est strictement convexe, alors, pour tout $x \in X$, $W(x)$ a un seul élément.*

Démonstration : Supposons que w_1 et w_2 appartiennent à $W(x)$ et que $w_1 \neq w_2$.

On a : $|w_1| = |w_2| = |x|$ et $(x, \frac{w_1+w_2}{2}) = |x|^2$,

d'où : $|\frac{w_1+w_2}{2}| < |x|$ puisque X' est strictement convexe, et

$|\frac{w_1+w_2}{2}| \geqslant |x|$. Il y a donc contradiction.

Si en particulier X est un espace de Hilbert, $W(x)$ est constitué par le produit scalaire : $y \longrightarrow (x|y)$.

Proposition 1.2. *Si X' est uniformément convexe, alors W est uniformément continue sur tout borné de X.*

Démonstration : W est une application univoque car X' est strictement convexe puisque uniformément convexe.

W étant positivement homogène et $|W(x)| = |x|$, il suffit de montrer que W est uniformément continue sur la sphère unité de X.

Soient x et $x' \in X$ tels que $|x| = |x'| = 1$.

On a $(x,W(x)+W(x')) = (x,W(x)) + (x',W(x') + (x-x',W(x'))$

donc $|W(x)+W(x')| \geqslant 2 - |x-x'|$.

Or, puisque X' est uniformément convexe, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $|W(x)| = |W(x')| = 1$, $|W(x)+W(x')| > 2-\delta$ entraîne $|W(x)-W(x')| < \varepsilon$.

Donc, si $|x-x'| < \delta$, on a $|W(x)-W(x')| < \varepsilon$.

Proposition 1.3.

1) W *est monotone*, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in X, \forall v \in W(x), \forall w \in W(y), (x-y,v-w) \geqslant 0.$$

2) W <u>est demi-fermé</u>, c'est-à-dire que le graphe de W est fermé dans $X \times X'$; X étant muni de la topologie forte et X' de la topologie faible.

<u>Démonstration</u> :

1) $(x-y, v-w) = |x|^2 + |y|^2 - (y,v) - (x,w)$

$$\geq |x|^2 + |y|^2 - |y||v| - |x||w| = (|x|-|y|)^2 \geq 0$$

2) Montrons que si x_n tend vers x fortement dans X et si $w_n \in W(x_n)$ tend vers w faiblement dans X', alors $w \in W(x)$.

$$(x,w) = \lim_n (x_n, w_n) = \lim_n |x_n|^2 = |x|^2$$

et $|w| \leq \overline{\lim_n} |w_n| = |x|$, donc $w \in W(x)$.

<u>Proposition 1.4.</u> W <u>est sous-gradient de</u> $f : x \mapsto \frac{1}{2}|x|^2$, c'est-à-dire :

$$W(x) = \{w \in X' \ ; \ \forall\, y \in X \ , \ |y|^2 - |x|^2 \geq 2(y-x,w)\} = \partial f(x)$$

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord que w appartienne à $W(x)$; quel que soit $y \in X$, on a :

$$2(y-x,w) \leq 2|y||x| - 2|x|^2 = |y|^2 - |x|^2 - (|y|-|x|)^2 \leq |y|^2 - |x|^2$$

donc $w \in \partial f(x)$.

Supposons inversement que w appartienne à $\partial f(x)$; soient $z \in X$ et $t > 0$. Pour $y = x+tz$ nous avons :

$$2(tz,w) \leq |x+tz|^2 - |x|^2 \leq t^2|z|^2 + 2t|x||z|$$

d'où en divisant par t et faisant tendre t vers 0,

$$\forall\, z \in X \ , \ (z,w) \leq |x||z| \ .$$

Il en résulte que :

$$|w| \leq |x| \quad \text{et} \quad (x,w) \leq |x|^2 .$$

D'autre part

$$2(tx,w) \leq ((1+t)^2-1)|x|^2 = (t^2+2t)|x|^2$$

d'où en divisant par $t<0$ et faisant tendre t vers 0 ,

$$(x,w) \geq |x|^2$$

Ainsi $w \in W(x)$.

Voici deux corollaires qui seront utiles dans l'étude des équations d'évolution :

<u>Proposition 1.5.</u> (<u>Kato</u>). <u>Soit</u> u <u>une application de l'intervalle</u> I <u>dans</u> X ; <u>si</u> u <u>est faiblement dérivable au point</u> t_o , <u>et si</u> $|u|$ <u>est dérivable en ce point</u>, <u>on a</u>, <u>pour tout</u> $w \in W(u(t_o))$

$$\left|\frac{d|u|}{dt}(t_o)\right|^2 = 2(u'(t_o),w) .$$

En effet, d'après la proposition 1.4, on a

$$\forall w \in W(u(t_o)),\ \forall t \in I ,\ |u(t)|^2 - |u(t_o)|^2 \geq 2(u(t)-u(t_o),w)$$

Par suite :

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_o\\ t>t_o}}} \frac{|u(t)|^2 - |u(t_o)|^2}{t - t_o} \geq \overline{\lim_{\substack{t\to t_o\\ t>t_o}}} 2\left(\frac{u(t)-u(t_o)}{t - t_o} ,w\right)$$

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_o\\ t<t_o}}} \frac{|u(t)|^2 - |u(t_o)|^2}{t - t_o} \leq \overline{\lim_{\substack{t\to t_o\\ t<t_o}}} 2\left(\frac{u(t)-u(t_o)}{t - t_o} ; w\right)$$

d'où le résultat.

<u>Proposition 1.6. Soit</u> u <u>une application de l'intervalle</u> I <u>dans</u> X , <u>fortement absolument continue et presque partout fortement dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $t \longmapsto u(t)$ <u>est décroissante</u>.

(ii) <u>Pour presque tout</u> t , <u>il existe</u> $w \in W(u(t))$ <u>tel que</u> $(u'(t),w) \leq 0$.

(iii) <u>Pour presque tout</u> t , <u>quel que soit</u> $w \in W(u(t))$, $(u'(t),w) \leq 0$.

Rappelons que si X est réflexif, alors u est presque partout fortement dérivable dès que u est fortement absolument continue (cf. [4], p.505).

<u>Démonstration</u> : $t \longmapsto |u(t)|$ est absolument continue sur I donc presque partout dérivable, donc, d'après la proposition 1.5, pour presque tout t , on a

$$\forall\, w \in W(u(t)) \ , \ \frac{d}{dt}\, |u(t)|^2 = 2(u'(t),w) \ .$$

Il en résulte que i) implique iii) et que ii) implique i). Puisque iii) implique trivialement ii), la proposition est démontrée.

Terminons ce paragraphe par un lemme qui sera utile dans l'étude des opérateurs accrétifs.

<u>Proposition 1.7.</u> (<u>Bénilan</u>). <u>Soient</u> x <u>et</u> y <u>deux éléments de</u> X ; <u>il existe au moins un élément</u> $w \in W(x)$ <u>tel qu'on ait</u>

$$w(y) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|x+ty|^2 - |x|^2}{2t}$$

Démonstration : Il suffit de montrer l'existence d'une forme linéaire continue f vérifiant $f(x) = |x|$, $|f| = 1$ et

$$f(y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{|x+ty|-|x|}{t} .$$

En effet cette limite λ existe (c'est la dérivée à droite à l'origine de la fonction convexe $t \longrightarrow |x+ty|$) . S'il existe une telle forme f , la forme $w = |x|f$ conviendra.

Or, d'après la convexité, on a

(1) $$|x+ty| - |x| \geqslant \lambda t \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Supposons x et y linéairement indépendants (on traitera aisément le cas où x et y sont linéairement dépendants). Soit $z = ux + ty$ un point quelconque du sous-espace à deux dimensions engendré par x et y .
Posons

$$f(z) = u|x| + t\lambda .$$

On a évidemment $f(y) = \lambda$ et $f(x) = |x|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, tout revient à prouver qu'on a $f(z) \leqslant |z|$.

Or, pour $u=1$, on a, d'après (1),

$$f(z) = |x| + t\lambda \leqslant |x+ty| = |z|$$

et la même inégalité a lieu pour $u \geqslant 0$.

Pour $u=-1$ on a, toujours d'après (1),

$$f(z) = -|x| + t\lambda \leqslant -2|x| + |x+ty| \leqslant |-x+ty| = |z|$$

et la même inégalité a lieu pour $u \leqslant 0$, ce qui achève la démonstration.

2. Opérateurs multivoques accrétifs au sens de Kato.

2.1. Opérateurs multivoques.

Définitions :

Pour la suite, on dira que T est un opérateur de X si T est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$.
L'ensemble $D(T) = \{x \in X \; ; \; Tx \neq \emptyset\}$ est appelé domaine de T, et $R(T) = \bigcup_{x \in X} Tx$ image de T.
On appelle graphe de T, noté encore T, le sous-ensemble de $X \times X$ tel que :

$$T = \{[x,y] \; ; \; x \in D(T) \; , \; y \in Tx\} \; .$$

Un opérateur est évidemment défini par son graphe.

La somme $T+S$ des opérateurs T et S est l'application :

$$x \in X \longmapsto Tx + Sx \in \mathcal{P}(X) \; .$$

Le composé TS des opérateurs T et S est l'opérateur dont le graphe est :

$$TS = \{[x,y] \; ; \; \exists z \in X \; : \; [x,z] \in S \; , \; [z,y] \in T\}$$

L'inverse T^{-1} est l'opérateur dont le graphe est :

$$T^{-1} = \{[x,y] \; ; \; [y,x] \in T\}$$

2.2. Définition d'un opérateur accrétif au sens de Kato.

Définition (Kato [3]). On dit que l'opérateur T de X est accrétif si :

$$\forall [x,y] \in T \ , \ \forall [x',y'] \in T \ , \ \exists \ w \in W(x-x') \ : \ (y-y',w) \geqslant 0$$

Proposition 2.1. *Pour qu'un opérateur* T *soit accrétif, il faut et il suffit qu'on ait*

(3) $\quad \forall [x,y] \in T \ , \ \forall [x',y'] \in T \ , \ \forall \lambda>0 \quad |x-x'+\lambda(y-y')| \geqslant |x-x'|$

ou, ce qui revient au même, que l'opérateur $(I+\lambda T)^{-1}$ *soit une contraction pour tout* $\lambda>0$.

En effet supposons que T soit accrétif au sens de Kato ; soient $[x,y]$ et $[x',y']$ deux éléments du graphe T , et soit $w \in W(x-x')$ tel que $(y-y',w) \geqslant 0$; pour $\lambda>0$ on a

$$|x-x'|^2 = (x-x',w) \leqslant (x-x'+\lambda(y-y'),w) \leqslant |x-x'+\lambda(y-y')|\,|x-x'| \ ,$$

d'où la relation (3).

Supposons inversement que la condition (3) soit satisfaite ; soient $[x,y]$ et $[x',y']$ deux éléments de T ; d'après la proposition 1.7 il existe un élément $w \in W(x-x')$ tel qu'on ait

$$(y-y',w) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|x-x'+\lambda(y-y')|^2 - |x-x'|^2}{2\lambda} \ ,$$

quantité $\geqslant 0$ d'après l'hypothèse faite, donc T est accrétif.

La seconde partie de l'énoncé est immédiate : la condition (3) exprime que $(I+\lambda T)^{-1}$ est une application univoque de $(I+\lambda T)(X)$ dans X , qui diminue les distances.

2.3. *Equation d'évolution avec opérateur accrétif.*

Soit $(T_t)_{t\in I}$ une famille d'opérateurs de X ; considérons la relation

(E) $$\frac{dx(t)}{dt} + T_t\, x(t) \ni 0$$

On dit que u est <u>solution forte de</u> (E) si u est absolument continue, presque partout dérivable et si pour presque tout t

$$u(t) \in D(T_t) \quad \text{et} \quad u'(t) + T_t\, u(t) \ni 0 .$$

<u>Proposition 2.2. Soit</u> $(T_t)_{t \in I}$ <u>une famille d'opérateurs accrétifs de</u> X ; <u>si</u> u <u>et</u> v <u>sont solutions fortes de</u> (E), <u>alors</u> $t \longmapsto |u(t)-v(t)|$ <u>est décroissante</u>.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 1.5, pour presque tout t,

$$\forall\, w \in W(u(t)-v(t)) \ , \ \frac{d}{dt}\, |u(t)-v(t)|^2 = 2(u'(t)-v'(t),w)$$

Or, pour presque tout t, $-u'(t) \in T_t\, u(t)$ et $-v'(t) \in T_t\, v(t)$, donc, puisque T_t est accrétif, il existe $w \in W(u(t)-v(t))$ tel que $(u'(t)-v'(t),w) \leq 0$.

Ainsi $|u(t)-v(t)|$ est décroissante.

<u>Conséquence</u>. Il y a unicité à droite pour les solutions d'une équation d'évolution avec opérateur accrétif.

2.4. <u>Exemples d'opérateurs accrétifs</u>.

1) Si T est un opérateur de l'espace de Hilbert H, T est accrétif si et seulement si on a

$$\forall\, [x,y] \in T \ , \forall\, [x',y'] \in T \ , \ (y-y',x-x') \geq 0$$

c'est-à-dire si T est monotone.

2) Soit A un opérateur de X.
Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur de $Y = L^p([0,1],X)$ $(1<p<\infty)$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{[f,g] ; [f(t),g(t)] \in A \ , \ \text{p.p.t}\}$$

<u>Si</u> A <u>est accrétif</u>, <u>alors</u> $\mathcal{A}$ <u>est accrétif</u>.

En effet : soient $]f,g[\in \mathcal{A}$, $]f',g'[\in \mathcal{A}$ et $\lambda>0$.
On a : $|f(t)-f'(t)+\lambda(g(t)-g'(t)| \geq |f(t)-f'(t)|$, p.p. t

d'où :
$$\left(\int_0^1 |f(t)-f'(t)+\lambda(g(t)-g'(t))|^p \, dt\right)^{1/p} \geq \left(\int_0^1 |f(t)-f'(t)|^p \, dt\right)^{1/p} ,$$

c'est-à-dire : $|f-f'+\lambda(g-g')|_y \geq |f-f'|_y$.

3. Opérateurs multivoques accrétifs au sens de Browder (B-accrétifs) et semi-groupes.

Définition. L'opérateur T de X est dit B-accrétif (accrétif au sens de Browder) si

$$\forall [x,y] \in T , \forall [x',y'] \in T , \forall w \in W(x-x') , (y-y',w) \geq 0 .$$

Conséquences immédiates.

Si T est B-accrétif et S accrétif, alors $T+S$ est accrétif.

Si T et S sont B-accrétifs, alors $T+S$ est B-accrétif.

Si T et S sont accrétifs, $T+S$ n'est pas nécessairement accrétif.

Définitions. On appelle semi-groupe continu de contraction non linéaire sur $C \subset X$ une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'applications de C dans C telles que :

$$\forall t\geq 0 , S(t) \text{ est une contraction}$$
$$\forall t,s\geq 0 , S(t)\,S(s) = S(t+s)$$
$$S(0) = I$$
$$\forall x\in X , \lim_{t\to 0_+} S(t)x = x$$

On appelle <u>générateur fort</u> de ce semi-groupe l'opérateur T défini par :

$$D(T) = \{x \in X \;;\; \lim_{t\to 0_+} \frac{x-S(t)x}{t} \text{ existe}\}$$

$$Tx = \lim_{t\to 0_+} \frac{x-S(t)x}{t}$$

On appelle <u>générateur faible</u> de ce semi-groupe, l'opérateur T_w défini par :

$$D(T_w) = \{x \in X \;;\; w \lim_{t\to 0_+} \frac{x-S(t)x}{t} \text{ existe}\}$$

$$T_w x = w \lim_{t\to 0_+} \frac{x-S(t)x}{t}$$

<u>Remarque</u>. $T \subset T_w$.

<u>Proposition 3.1. Les générateurs fort et faible</u> T <u>et</u> T_w <u>d'un semi-groupe continu de contraction non linéaire</u> $(S(t))$, $t \geq 0$, <u>sont B-accrétifs</u>.

<u>Démonstration</u> : Soient x, $x' \in D(T_w)$ et $w \in W(x-x')$

$$(T_w x - T_w x', w) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{x-S(t)x}{t} - \frac{x'-S(t)x'}{t}, w\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{|x-x'|^2 - (S(t)x-S(t)x', w)}{t} .$$

Or $(S(t)x-S(t)x', w) \leq |S(t)x-S(t)x'|\,|w| \leq |x-x'|^2$.

Ainsi $(T_w x - T_w x', w) \geq 0$ pour tout $x, x' \in D(T_w)$ et $w \in W(x-x')$,

c'est-à-dire que T_w est B-accrétif. De même T est B-accrétif.

<u>Proposition 3.2. Soit</u> T <u>un opérateur univoque de</u> X . <u>On suppose que pour tout</u> $x \in D(T)$, <u>il existe</u> $\delta>0$ <u>et une application</u> u <u>de</u> $[0,\delta[$ <u>dans</u> X , <u>dérivable</u>, <u>telle que</u> :

$$u(0) = x \quad \text{et} \quad u'(t) + Tu(t) = 0 .$$

<u>Alors</u>, <u>si</u> T <u>est accrétif</u>, T <u>est B-accrétif</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $y \in D(T)$ et v définie sur $[0,\delta'[$ telle que :

$$v(0) = y \quad \text{et} \quad v'(t) + Tv(t) = 0$$

Pour tout $w \in W(x-y)$,

$$(Tx-Ty,w) = -\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{u(t)-x}{t} - \frac{v(t)-y}{t} ,w\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\left(\frac{v(t)-u(t)}{t} ,w\right) + \frac{1}{t} |x-y|^2\right]$$

or $\left|\left(\frac{v(t)-u(t)}{t} ,w\right)\right| \leq \frac{1}{t} |x-y|^2$, car $|u(t)-v(t)|$ est décroissante sur $[0,\inf(\delta,\delta')]$ (Proposition 1.6), d'où $(Tx-Ty,w) \geq 0$.

<u>Conséquence. Soit</u> T <u>une application localement lipschitzienne définie sur un ouvert de</u> X . <u>Si</u> T <u>est accrétif</u>, <u>alors</u> T <u>est B-accrétif</u>.

4. Opérateurs m-accrétifs.

<u>Définition</u>. Un opérateur T de X est dit <u>m-accrétif si</u>, <u>pour tout</u> $\lambda>0$, $(I+\lambda T)^{-1}$ <u>est une contraction définie sur</u> X <u>tout entier</u>.

Lemme. Soit T *un opérateur accrétif ; soit* $[x_o,y_o] \in T$; *s'il existe* μ_o *tel que* $R(\mu_o+T)$ *soit un voisinage de* $\mu_o x_o+y_o$ (*resp.* $R(\mu_o+T)=X$) , *alors, pour tout* $\mu>0$, $R(\mu+T)$ *est un voisinage de* μx_o+y_o (*resp.* $R(\mu+T)=X$) .

En effet, comme $(\mu_o+T)^{-1}$ est une application (univoque) de $R(\mu_o+T)$ dans X , on a

$$\mu+T = [I+(\mu-\mu_o)(\mu_o+T)^{-1}] (\mu_o+T) .$$

Or, pour $|\mu-\mu_o| < \mu_o$, $(\mu-\mu_o)(\mu_o+T)^{-1}$ est une contraction de $R(\mu_o+T)$ dans X , par conséquent $R(\mu+T)$ est un voisinage de $\mu_o x_o+y_o$ (resp. $R(\mu+T)=X$) pour $\mu \in]0,2\mu[$, d'où le lemme (en itérant).

Voici deux applications :

Proposition 4.1. Pour qu'un opérateur T *de* X *soit m-accrétif, il faut et il suffit qu'il soit accrétif et qu'on ait* $R(I+T) = X$.

En effet, d'après le lemme, on a $R(\mu+T) = X$ pour tout $\mu>0$.

Proposition 4 2. Soit T *un opérateur m-accrétif et soit* T_1 *une application localement lipschitzienne de* X *dans* X ; *on suppose que* $T+T_1$ *est accrétif ; alors* $T+T_1$ *est m-accrétif.*

Démonstration : Il s'agit de prouver que, pour tout $\lambda>0$, on a $R(I+\lambda(T+T_1)) = X$, ou encore que cet ensemble est ouvert et fermé.

Montrons qu'il est fermé : le graphe de $I+\lambda T$ est fermé puisqu'il est isométrique au graphe de l'application $(I+\lambda T)^{-1}$, qui est continue et définie sur X tout entier. Donc le graphe de $I+\lambda(T+T_1)$ est fermé, car cet opérateur est la somme d'un opérateur fermé et d'une application continue partout définie. L'application $(I+\lambda(T+T_1))^{-1}$ étant continue et ayant un graphe fermé, son domaine $R(I+\lambda(T+T_1))$ est fermé.

Il est voisinage de chacun de ses points : en effet, soit $x \in D(I+\lambda(T+T_1))$; il existe un voisinage u de x tel que la restriction de T_1 à u soit k-lipschitzienne. on a :

$$I+\lambda(T+T_1) = (I+\lambda T_1(I+\lambda T)^{-1})(1+\lambda T) .$$

Puisque $(I+\lambda T)(u)$ est voisinage de $(I+\lambda T)x$ (car $(I+\lambda T)^{-1}$ est continue) et que $\lambda T_1(I+\lambda T)^{-1}$ est contractante pour $\lambda<1/k$, $[I+\lambda(T+T_1)](u)$ est voisinage de $(I+\lambda(T+T_1))(x)$ pour $\lambda<1/k$, d'où le résultat.

Un opérateur m-accrétif est évidemment maximal dans l'ensemble des opérateurs accrétifs. Donnons quelques conséquences de cette remarque :

Proposition 4.3. Supposons que l'application dualité W soit univoque et continue (ce qui est le cas si X est uniformément convexe). Soit T un opérateur accrétif ; la fermeture $\overline{T}$ de T dans $X \times X_w$ est encore un opérateur accrétif.

Démonstration : Soit $[x,y] \in T$ et soit $[x',y'] \in \overline{T}$. Il existe $[x_i,y_i] \in T$ tel que x_i tende fortement vers x et y_i faiblement vers y. Pour tout élément $[\xi,\eta]$ de T on a $(\eta-y_i,w(\xi-x_i)) \geqslant 0$, d'où, à la limite, $(\eta-y,w(\xi-x)) \geqslant 0$. Il suffit alors de faire tendre fortement ξ vers x et faiblement η vers y pour obtenir la relation cherchée $(y'-y,w(x'-x)) \geqslant 0$.

Corollaire. Si W est univoque et continue et si T est accrétif maximal (en particulier m-accrétif), alors T est demi-fermée.

Proposition 4.4. Soit T un opérateur B-accrétif ; l'opérateur $\widetilde{T}$ qui à $x \in D(T)$ associe $\overline{\text{conv}}(Tx)$, enveloppe convexe fermée de Tx, est encore B-accrétif.

Démonstration : Soient en effet x et x' dans $D(T)$, $y \in \mathrm{conv}(Tx)$, $y' \in \mathrm{conv}(Tx')$; on a $y = \sum \alpha_i y_o$, $y' = \sum \alpha'_i y'_i$, avec $\alpha_i \geq 0$, $\alpha'_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = \sum \alpha'_i = 1$, $y_i \in Tx$, $y'_i \in Tx'$ $(i=1,\ldots,n)$; pour tout élément $w \in W(x-x')$ et tout i, on a $(y_i - y'_i, w) \geq 0$, d'où $(y-y'_i, w) \geq 0$.

Corollaire. Soit T un opérateur B-accrétif maximal (en particulier m-accrétif et B-accrétif ; on dit alors que $-T$ est hyperdissipatif) ; alors, pour tout $x \in D(T)$, Tx est un convexe fermé.

Bibliographie.

[1] F. BROWDER : Nonlinear operators and nonlinear equations of evolutions in Banach spaces - Proc. Sympos. Pure Math., vol.18, Part 2 - Amer. Math. Soc. Providence. RI (à paraître).

[2] J.R. DORROH : A nonlinear Hille- Yosida- Phillips- Theorem Journal of functional analysis 3 (345-353) (1969).

[3] T. KATO : Nonlinear semi-groups and evolution equations J. Math. Soc. Japan (1967).

[4] Y. KOMURA : Nonlinear semi-groups in Hilbert space J. Math. Soc. Japan (1967).

[5] K. YOSIDA : Functional analysis - Springer.

-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
Orsay 1970-71

Exposé n°2

EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES

exposé de H. ATTOUCH

Les notations utilisées sont celles de l'exposé n°1.

Nous aurons besoin des propriétés classiques des espaces de Banach uniformément convexes que nous rappellerons brièvement :

1) Théorème de Milman : Un **Banach** uniformément convexe est réflexif.

2) Théorème de projection : Dans un Banach réflexif, strictement convexe (a fortiori dans un Banach uniformément convexe) un convexe fermé non vide admet un unique élément de norme minimum.

3) Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments d'un Banach uniformément convexe ; pour que x_n converge vers x , il faut et il suffit que x_n converge faiblement vers x et que $|x_n|$ converge vers $|x|$.

4) Exemples d'espaces de Banach uniformément convexes :

- les espaces de Hilbert ;
- les espaces L^p et ℓ^p pour $1<p<\infty$;
- les espaces de Sobolev.

Pratiquement tous les espaces (ainsi que leurs duaux) que l'on est amené à utiliser dans ce type de problème, rentrent dans cette catégorie.

Nous nous proposons à présent de démontrer le Théorème suivant :

Théorème(*). Soit X un espace de Banach dont le dual X' est uniformément convexe ; soit A un opérateur m-accrétif dans X. quel que soit l'élément $x \in D(A)$, le système

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

admet une solution et une seule ; autrement dit il existe une fonction u absolument continue, p.p. dérivable sur $[0,\infty[$ et une seule qui vérifie

$$u'(t) + Au(t) \ni 0 \text{ p.p. et } u(0) = x .$$

De plus on a $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,\infty[$

$$\text{et } |u'(t)| \leqslant |Ax| \text{ p.p.}$$

où on a posé $|Ax| = \inf\{|y| ; y \in Ax\}$.

Remarques préliminaires.

1) On a vu (exposé n°1, proposition 2.2) que le système (I) admet au plus une solution. D'une manière plus précise, si v est une solution du système

$$\frac{dv}{dt} + Av \ni 0 \qquad v(0) = y$$

on a

$$|u(t)-v(t)| \leqslant |x-y| \qquad (t \geqslant 0)$$

2) Il résulte de cette remarque que l'application $S(t) : x \longrightarrow u(t)$, définit un semi-groupe continu à contraction (non linéaire) sur $D(A)$, qui s'étend par continuité à $\overline{D(A)}$; on dira que ce semi-groupe est engendré par A.

3) Contrairement au cas linéaire, la solution u de (I) n'est

(*) Voir l'article de J.R. DORROH, cité [2] dans l'exposé n°1.

pas nécessairement de classe C^1 , mais seulement lipschitzienne.

Pour établir l'existence de cette solution u , on va s'inspirer de la méthode classique utilisée dans le cas linéaire, qui consiste à approcher A par un opérateur continu.

Approximation de Yosida.

Soit A un opérateur m-accrétif, c'est-à-dire accrétif et tel qu'on ait $R(1+A) = X$. Posons $J_\lambda = (1+\lambda A)^{-1}$ $(\lambda>0)$; J_λ est une contraction définie sur X .

L'opérateur $A = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)$ est l'approximation de Yosida de A , d'indice λ .

Voici quelques propriétés de cet opérateur :

1) A_λ est défini sur X tout-entier, et univoque.

2) A_λ est lipschitzien, de rapport $2/\lambda$.

3) A_λ est accrétif ; en effet, pour deux éléments quelconques x et y de X , on a

$$(A_\lambda x - A_\lambda y \;,\; W(x-y)) = \frac{1}{\lambda}\left[|x-y|^2 - (J_\lambda x - J_\lambda y \;,\; W(x-y)\right] \geq 0 \;,$$

car J_λ est une contraction.

4) Pour tout $x \in X$, on a $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$.

En effet $J_\lambda x = (I+\lambda A)^{-1}x$, donc $x = J_\lambda x + \lambda y$, avec $y \in AJ_\lambda x$; par conséquent $A_\lambda x = \frac{x-J_\lambda x}{\lambda} = y$ appartient à $AJ_\lambda x$.

5) Pour tout $x \in D(A)$, on a

$$|A_\lambda x| \leq |Ax| = \inf\{|y|;\; y \in Ax\} \;.$$

En effet soit $[x,y] \in A$; on a $J_\lambda(x+\lambda y) = x$, d'où

$$A_\lambda x = \frac{x-J_\lambda x}{\lambda} = \frac{J_\lambda(x+\lambda y) - J_\lambda x}{\lambda} \;;$$

donc

$$|A_\lambda x| \leq \frac{|(x+\lambda y)-x|}{\lambda} = |y|$$

et ceci pour tout $y \in Ax$, d'où le résultat.

Construction de la solution u .

Considérons le problème approché

$$(II)_\lambda \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = x \end{cases}$$

où A_λ est l'approximation de Yosida de A .

Comme A est partout définie et lipschitzienne, le problème de Cauchy $(II)_\lambda$ admet une solution unique u_λ ; on va voir que u_λ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0,T]$ lorsque λ tend vers 0 .

En effet d'après la proposition 1.5 de l'exposé n°1 , on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 = (u'_\lambda(t+h)-u'_\lambda(t) , W(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)))$$

$$= -(A_\lambda u_\lambda(t+h)-A_\lambda u_\lambda(t) , W(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)))$$

$$\leq 0 .$$

Pour $h>0$ et $s \leq t$ on a donc

$$\left|\frac{u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)}{h}\right| \leq \left|\frac{u_\lambda(s+h)-u_\lambda(s)}{h}\right| .$$

Faisant tendre h vers 0 , il vient :

$$|u'_\lambda(t)| \leq |u'_\lambda(s)| .$$

Pour $s=0$ et $t \geq 0$ on obtient

(1) $\quad |u'_\lambda(t)| \leq |u'_\lambda(0)| = |A_\lambda x| \leq |Ax|$

(voir propriété 5) de l'approximation de Yosida ; rappelons qu'on a supposé $x \in D(A)$) .

Soient alors λ et μ deux nombres >0 . On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 = (u'_\lambda(t)-u'_\mu(t)\ ,\ W(u_\lambda(t)-u_\mu(t)))$$

$$= -\ (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t)\ ,\ W(u_\lambda(t)-u_\mu(t)))$$

$$= -\ (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t)\ ,\ W(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)))$$

$$+\ (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t)\ ,\ W(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)) - W(u_\lambda(t)-u_\mu(t)))$$

$$\leq |A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t)|$$

$$|W(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)) - W(u_\lambda(t)-u_\mu(t))|$$

car A est accrétif et on a $A_\lambda u_\lambda(t) \in A(J_\lambda u_\lambda(t))$ et $A_\mu u_\mu(t) \in A(J_\mu u_\mu(t))$ (propriété 4) de l'application de Yosida).

Compte tenu de la relation (1), il vient donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leq 2|Ax|\ \ |W(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)) - W(u_\lambda(t)-u_\mu(t))|$$

d'où en intégrant

$$(2)\qquad |u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 \leq 4|Ax| \int_0^T |W(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)) - W(u_\lambda(t)-u_\mu(t))|\ dt$$

car $u_\lambda(0)-u_\mu(0) = x-x = 0$.

Or on a

$$u_\lambda(t)-u_\mu(t) = \int_0^t [A_\mu u_\mu(s) - A_\lambda u_\lambda(s)]\ ds$$

donc $|u_\lambda(t)-u_\mu(t)| \leq 2T\ |Ax|$ est bornée sur $[0,T]$ indépendamment de λ et μ .

D'autre part on a

$$|J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)-(u_\lambda(t)-u_\mu(t))| \leq |u_\lambda(t)-J_\lambda u_\lambda(t)|+|u_\mu(t)-J_\mu u_\mu(t)|$$

$$\leq \lambda|A_\lambda u_\lambda(t)|+\mu|A_\mu u_\mu(t)|$$

$$\leq (\lambda+\mu)|Ax|$$

d'après (1).

Comme W est uniformément continue sur les parties bornées de X (exposé n°1, proposition 1.2), il résulte de (2) que la famille $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ est de Cauchy lorsque λ tend vers 0. Donc u_λ converge uniformément sur tout intervalle borné lorsque λ tend vers 0. On appellera u la fonction limite.

<u>La fonction u est solution de (I).</u>

Introduisons l'espace $Y = L^2([0,T],X)$ et l'opérateur $\mathcal{A}$ de Y défini par

$$\mathcal{A} = \{[f,g] \ ; \ [f(t),g(t)] \in A \quad \text{p.p.}\}$$

nous admettrons provisoirement ce lemme technique : $\mathcal{A}$ <u>est m-accrétif et demi-fermé</u>.

Alors le résultat s'en déduit facilement : lorsque λ tend vers 0, u_λ tend vers u dans Y, puisque u_λ converge uniformément vers u sur $[0,T]$. De même $J_\lambda u_\lambda$ converge vers u dans Y, puisqu'on a

$$|J_\lambda u_\lambda(t)-u(t)| \leq |J_\lambda u_\lambda(t)-u_\lambda(t)|+|u_\lambda(t)-u(t)| \leq \lambda|Ax|+|u_\lambda(t)-u(t)|$$

donc $J_\lambda u_\lambda$ converge uniformément vers u sur $[0,T]$.

Comme Y est réflexif et que la norme de u'_λ dans Y est bornée (d'après (1)), il existe une suite $\{\lambda_n\}$ tendant vers 0, telle que u'_{λ_n} converge <u>faiblement</u> dans Y, vers un élément v.

Or la relation $-u'_\lambda(t) = A_\lambda u_\lambda(t) \in A(J_\lambda u_\lambda(t))$ entraîne

$$[J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}, - u'_{\lambda_n}] \in \mathcal{A} .$$

Comme $\mathcal{A}$ est demi-fermé il vient, à la limite $(n \longrightarrow \infty)$

$$[u, -v] \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire :

$$u(t) \in D(A) \quad \text{et} \quad -v(t) \in Au(t) \quad \text{p.p. sur} \quad [0,T] .$$

Soit alors x^* un élément de X' ; posons $g(\xi) = \chi_{[o,t]}(\xi)\, x^*$; on a $g \in Y' = L^2([0,T],X')$ et

$$(u_\lambda(t)-x,x^*) = (\int_o^t u'_\lambda(s)\, ds, x^*) = \int_o^t (u'_\lambda(s),x^*)\, ds$$

$$= \int_o^T (u'_\lambda(s),g(s))\, ds = \langle u'_\lambda, g\rangle .$$

Faisant tendre λ vers 0 il vient, à la limite

$$(u(t)-x,x^*) = \langle v,g\rangle = \int_o^T (v(s),g(s))\, ds = \int_o^t (v(s),x^*)\, ds$$

$$= (\int_o^t v(s)\, ds, x^*)$$

et ceci ayant lieu pour tout $x^* \in X'$, on a $u(t) = x + \int_o^t v(s)\, ds$, ce qui prouve que u est absolument continue et presque partout dérivable et que $u'(t) = v(t)$ p.p. . Comme on a $-v(t) \in Au(t)$ p.p. , on a bien $u(t) \in D(A)$ et $u'(t)+Au(t) \ni 0$ p.p., autrement dit u est bien solution de (I).

De plus on a $|u'(t)| \leq |Ax|$ p.p., puisque l'ensemble des fonctions de Y vérifiant cette relation est convexe et fermé, donc faiblement fermé, et puisque d'autre part u'_λ vérifie cette relation et converge faiblement vers u' dans Y .

Il reste à montrer qu'on a $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$ (et pas seulement p.p.). Or soit $t_o \in [0,T[$. L'ensemble M des points t en lesquels on a $u(t) \in D(A)$, $u'(t)+Au(t) \ni 0$ et $|u'(t)| \leq |Ax|$ étant partout dense dans $[0,T[$, il existe une suite décroissante d'éléments $t_n \in \dot{M}$ convergeant vers t_o .

On a évidemment $u(t_o) = \lim\limits_n u(t_n)$ (continuité de u) . D'autre part comme X est réflexif et que les $|u'(t_n)|$ sont bornés ; il existe une suite d'entiers n_k telle que $u'(t_{n_k})$ converge faiblement (vers v). Comme A est demi fermé (exposé n°1, proposition 4.3) et comme on a

$$[u(t_{n_k}), - u'(t_{n_k})] \in A$$

il vient, à la limite, $[u(t_o), - v] \in A$, d'où $u(t_o) \in D(A)$.

Ceci achève la démonstration du théorème, mais il reste à établir les propriétés admises concernant l'opérateur $\mathcal{A}$.

<u>Démonstration du lemme technique</u>.

Rappelons qu'on a posé $Y = L^2([0,T],X)$ et $\mathcal{A} = \{[f,g] \ ; \ [f(t),g(t)] \in A \ \text{ p.p.}\}$.

On sait (exposé n°1, proposition 2.4) que $\mathcal{A}$ est accrétif ; montrons qu'il est <u>m-accrétif</u>, c'est-à-dire que $R(I+\mathcal{A}) = Y$.

En effet soit $g \in Y$; pour $f(t) = (1+A)^{-1}g(t)$, on a $f \in Y$, car $(1+A)^{-1}$ est une contraction sur X . D'autre part on a $f(t) \in D(A)$ et $g(t)-f(t) \in Af(t)$ p.p. , d'où $[f,g-f] \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $g \in (I+\mathcal{A})f$; on a donc bien $R(I+\mathcal{A}) = Y$.

Montrons que $\mathcal{A}$ est <u>demi-fermé</u> ; comme $\mathcal{A}$ est m-accrétif il suffit (d'après la proposition 4.3 de l'exposé n°1), de montrer que l'application-dualité $G : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Y')$ est inuvoque et continue.

Or on sait qu'on a $Y' = L^2([0,T],X')$, le produit scalaire étant défini par

$$\langle f,g \rangle = \int_0^T (f(t),g(t)\ dt \ ;$$

de plus Y est réflexif.

Soit $g \in Gf$; on a, en notant $\|\cdot\|$ les normes dans Y et dans Y' ,

$$\|f\|^2 = \langle f,g \rangle = \int_0^T (f(t),g(t))dt \leqslant \int_0^T |f(t)|\,|g(t)|\,dt \leqslant \|f\|\,\|g\| = \|f\|^2$$

d'où

$$\int_0^T |f(t)|\,|g(t)|\,dt = \|f\|\,\|g\| \ .$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz, on a donc $|f(t)| = |g(t)|$ p.p. . D'autre part les relations

$$\int_0^T (f(t),g(t))\, dt = \|f\|^2$$

et

$$(f(t),g(t)) \leq |f(t)|\,|g(t)| = |f(t)|^2 \quad \text{p.p.}$$

entraînent

$(f(t),g(t) = |f(t)|^2$ p.p. . Il en résulte qu'on a $g(t) = W(f(t))$ p.p. .

Comme X' est uniformément convexe, $g(t)$ est bien déterminée p.p., donc G est <u>univoque</u> et $G\,f(t) = W(f(t))$ p.p.

Montrons enfin que G est <u>continue</u>. Soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de Y convergeant fortement vers f ; il s'agit de prouver que $g_n = G\,f_n$ converge fortement vers $g = Gf$ dans Y' .

En remplaçant au besoin $\{f_n\}$ par une suite partielle, on peut supposer que $f_n(t)$ converge p.p. vers $f(t)$. Comme W est continue, $g_n(t)$ converge p.p. vers $g(t)$.

D'après le théorème d'Egoroff il existe donc une partie mesurable $B \subset [0,T]$ de mesure arbitrairement petite, et telle que $g_n(t)$ converge uniformément vers $g(t)$ sur $[0,T] \setminus B$. On a alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^T |g_n(t)-g(t)|^2\, dt \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_B |g_n(t)-g(t)|^2\, dt + \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{[0,T]\setminus B} |g_n(t)-g(t)|^2\, dt \ .$$

D'après la convergence uniforme, le dernier terme écrit est nul. D'autre part on a

$$\int_B |g_n(t)-g(t)|^2\, dt \leq 2\int_B |g_n(t)|^2\, dt + 2\int_B |g(t)|^2\, dt = 2\int_B |f_n(t)|^2\, dt + 2\int_B |f(t)|^2\, dt \ .$$

Or f_n converge vers f dans $L^2([0,T],X)$, donc a fortiori dans $L^2(B,X)$. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_B |f_n(t)|^2 \, dt = \int_B |f(t)|^2 \, dt$, d'où finalement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^T |g_n(t)-g(t)|^2 \, dt \leq 4\int_B |f(t)|^2 \, dt$$

quantité arbitrairement petite si on a pris B de mesure assez petite, d'où le résultat.

Nous allons maintenant apporter quelques précisions au théorème, moyennant des hypothèses supplémentaires sur Y .

<u>Proposition 1.</u> <u>Si on suppose que</u> X <u>est strictement convexe, la solution</u> u <u>du problème</u> (I) <u>est faiblement dérivable à droite sur</u> $[0,\infty[$, <u>et on a</u>

$$\frac{d^+u}{dt} + A^o u = 0 \quad (t \geq 0)$$

<u>où</u> $A^o x$ <u>est l'unique élément de norme minimale du convexe fermé</u> Ax . <u>De plus</u> $\frac{d^+u}{dt}$ <u>est faiblement continue à droite</u>.

En effet on sait qu'on a $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, $u'(t)+Au(t) \ni 0$ p.p. et $|u'(t)| \leq |A^o x|$ p.p. . L'ensemble $M = \{t \in [0,T[\ , \ u'(t)+Au(t) \ni 0 \ , \ |u'(t)| \leq |A^o x|\}$ est donc partout dense sur $[0,T[$.

<u>Supposons</u> $t_o = 0$. Soit $\{t_n\}$ une suite de points de M décroissant vers 0 ; il existe une suite partielle $\{t_{n_k}\}$ telle que $u'(t_{n_k})$ converge faiblement (vers v_o) ; comme $u(t_{n_k})$ converge (fortement) vers $u(0) = x$ et que A est demi-fermé, on obtient $v_o + Ax \ni 0$.

Or on a $|v_o| \leq \underline{\lim} |u'(t_{n_k})| \leq |A^o x|$, d'où $v_o = - A^o x$, car $v_o \in - Ax$.

Par conséquent $u'(t_{n_k})$ converge faiblement vers $-A^o x$, et on a

$$w - \lim_{\substack{t \to o \\ t \in M}} u'(t) = -A^o x .$$

De la relation

$$\frac{u(h)-u(0)}{h} = \frac{1}{h} \int_o^h u'(s)\, ds$$

on déduit alors que u est faiblement dérivable à l'origine, et qu'on a

$$\frac{d^+u}{dt}(0) + A^o x = 0$$

<u>Supposons</u> $t_o > 0$. Comme on a $u(t_o) \in D(A)$, on se ramène au cas précédent en considérant le système

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av \ni 0 \\ v(0) = u(t_o) \end{cases}$$

dont la solution v est définie par $v(t) = u(t+t_o)$.

<u>Proposition 2.</u> <u>Si on suppose que</u> X <u>est uniformément convexe, la solution</u> u <u>du problème</u> (I) <u>est dérivable à droite sur</u> $[0,\infty[$, <u>et on a</u>

$$\frac{d^+u}{dt}(t) + A^o u(t) = 0 \quad (t \geq 0) .$$

<u>De plus</u> $\frac{d^+u}{dt}$ <u>est continue à droite.</u>

En effet, avec les notations de la démonstration de la proposition 1, $u'(t_{n_k})$ converge faiblement vers $-A^o x$, d'où

$$|A^o x| \leq \underline{\lim} |u'(t_{n_k})| \leq \overline{\lim} |u'(t_{n_k})| \leq |A^o x|$$

d'où $|A^o x| = \lim |u'(t_{n_k})|$. Comme X est uniformément convexe, il en résulte que $u'(t_{n_k})$ converge <u>fortement</u> vers $-A^o x$. On achève comme précédemment.

<u>Remarques</u> (*)

1) Voici un énoncé généralisant le théorème, et qui peut s'établir par des techniques analogues :

Soit X un espace de Banach dont le dual X' est uniformément convexe ; soit A un opérateur m-accrétif dans X ; soit ω un nombre réel, et soit $f : [0,\infty[\longrightarrow X$ une fonction absolument continue. Quel que soit l'élément $x \in D(A)$ le système

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \omega u \ni f \\ u(0) = x \end{cases}$$

admet une solution et une seule.

2) Plus généralement on peut résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + Tu \ni f \\ u(0) = x \end{cases}$$

où T est une application lipschitzienne de X dans X .

Si ω est le rapport lipschitz, on se ramène au cas précédent en posant $A+T = A_1+\omega I$.

-:-:-:-

(*) Voir à ce propos un exposé de Ph. BENILAN au séminaire sur les Equations aux dérivées partielles d'Orsay, 1970-71.

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
Orsay 1970-71

Exposé n°3

SUR LES OPERATEURS M-ACCRETIFS

par Ph. BENILAN

Soit X un espace de Banach réel, de dual X' ; la norme est notée $|.|$, l'application de dualité W ; le produit scalaire d'un élément de X et d'un élément de X' est noté $(.,.)$; enfin on posera $(x,y)_s = \sup\{(x,w) \; ; \; w \in W(y)\}$.

Rappelons qu'un opérateur (multivoque) A de X est accrétif si pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction (définie sur son domaine qui est l'image de $I+\lambda A$) ; l'opérateur A est dit m-accrétif si pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie sur X.

Nous renvoyons à l'exposé n°1 pour l'étude élémentaire de ces notions. Notons seulement que A est accrétif si et seulement si pour tout $[x,y] \in A$ et tout $[x',y'] \in A$, $(y-y',x-x')_s \geqslant 0$ (cf. paragraphe 2.2 de l'exposé n°1).

Un opérateur m-accrétif est évidemment accrétif maximal, c'est-à-dire maximal dans l'ensemble des opérateurs (multivoques) accrétifs de X ordonné par inclusion des graphes. Dans une première partie nous étudierons la réciproque qui admet une réponse positive dans le cas d'un espace de Hilbert (théorème de Minty) et lorsque $X = \mathbb{R}^n$ muni de la norme ℓ_1 ou ℓ_∞ (résultat de Crandall et Liggett [6]), mais qui admet en général une réponse négative (contre-exemple de Crandall et Liggett dans $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme ℓ_p, $p \neq 1,2,+\infty$).

Dans une deuxième partie nous donnerons quelques propriétés des opérateurs accrétifs dans un espace de dimension finie. Enfin, dans une troisième partie nous étudierons deux classes d'opérateurs univoques accrétifs partout définie : l'intérêt de cette partie réside plus dans les méthodes employées que dans les résultats sur ces classes d'opérateurs.

Nous renvoyons à l'appendice pour l'énoncé et les démonstrations des propriétés de l'application $[x,y] \in X \times X \implies (x,y)_s \in \mathbb{R}$, ainsi que le passage au cas réel lorsque l'on dispose au départ d'un espace de Banach complexe.

-:-:-:-

I - Accrétif maximal et m-accrétif.

1°) Théorème de Minty.

H est un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(.,.)$ et de norme $|.|$.

Proposition 1. Soit A un opérateur de H. Il y a équivalence entre les propriétés :

(i) $\forall\ \lambda > 0$, l'opérateur $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction. (A accrétif).

(ii) $\forall\ [x,y], [x',y'] \in A$, $(y-y', x-x') \geq 0$. (A monotone).

(iii) $\forall\ [x,y], [x',y'] \in A$, $|(x+y)-(x'+y')| \geq |(x-y)-(x'-y')|$.

Remarquons que l'équivalence de (i) et (ii) est un cas particulier de la Proposition 2.1, de l'exposé n°1 comme nous l'avons vu en 2.4. exemple 1 de cet exposé n°1. Reprenons-en ici la démonstration qui est immédiate.

La proposition résulte des deux égalités :

$$|(x+y)-(x'+y')|^2 - |(x-y)-(x'-y')|^2 = 4(x-x',y-y')$$

$$|(x+\lambda y)-(x'+\lambda y')|^2 - |x-x'|^2 = 2\lambda(x-x',y-y') + \lambda^2(y-y')^2$$

La première nous montre immédiatement l'équivalence entre (ii) et (iii). La seconde nous montre immédiatement l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Enfin supposons (i) vérifié, alors pour tout $\lambda>0$, $2(x-x',y-y') + \lambda|y-y'|^2 \geq 0$; d'où en faisant $\lambda \to 0$, on obtient (ii).

<u>Théorème 1</u>. [<u>Minty</u>, 14]. <u>Pour que</u> A <u>soit</u> m-<u>accrétif, il faut et il suffit que</u> A <u>soit maximal dans l'ensemble des opérateurs accrétifs (ou monotones) de</u> H.

Si A est m-accrétif, il est trivialement maximal accrétif. Pour démontrer la réciproque utilisons d'abord la méthode de Minty basée sur le théorème de Valentine-Kinzbraum sur le prolongement des contractions dans un espace de Hilbert :

<u>Lemme 1</u>. (<u>théorème de Valentine-Kinzbraum</u>). <u>Soit</u> T <u>une contraction d'une partie de</u> H <u>dans</u> H. <u>Il existe un prolongement</u> $\widetilde{T}$ <u>de</u> T <u>qui est une contraction de</u> H <u>dans</u> H.

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Soit A maximal accrétif de H. Considérons $T = \{[x+y, x-y] \; ; \; [x,y] \in A\}$. D'après le (iii) de Proposition 1, T est le graphe d'une contraction de H définie sur $R(I+A)$. Utilisant le lemme 1, il existe $\widetilde{T}$ prolongement de T qui est une contraction de H dans H. Considérant $\widetilde{A} = \{[\frac{u+\widetilde{T}u}{2}, \frac{u-\widetilde{T}u}{2}] \; ; \; u \in H\}$, d'après la Proposition 1, $\widetilde{A}$ est un prolongement accrétif de A ; donc $\widetilde{A} = A$ et $\widetilde{T} = T$, c'est-à-dire $R(I+A) = H$.

Si A est maximal accrétif, il en est de même de λA pour tout $\lambda>0$ et donc pour tout $\lambda>0$, $R(I+\lambda A) = H$.

Démonstration du lemme 1 : (due à Shoenberg [15])

D'après Zorn, il suffit de montrer qu'étant donné $x \in H$, il existe $y \in H$ tel que pour tout $\xi \in D(T)$, $|y-T\xi| \leq |x-\xi|$; c'est-à-dire que $\bigcap_{\xi \in D(T)} B(T\xi, |x-\xi|) \neq \emptyset$ où $B(T\xi, |x-\xi|)$ est la boule fermée de centre $T\xi$ et de rayon $|x-\xi|$. Ces boules étant faiblement compactes, on est ramené au problème suivant : étant donnés $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tels que $|\eta_i - \eta_j| \leq |\xi_i - \xi_j|$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$ et $x \in H$, il existe $y \in H$ tels que $|y-\eta_i| \leq |x-\xi_i|$ pour tout $i=1,\ldots,n$. On peut toujours supposer $x \neq \xi_i$, $\forall\ i=1,\ldots,n$, sinon ce serait trivial ; on considère d'autre part le sous-espace de dimension finie H_o engendré par $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$, et x.

L'application $\eta \in H_o \longrightarrow \max_{i=1,\ldots,n} \frac{|\eta-\eta_i|}{|x-\xi_i|}$ est continue et tend vers $+\infty$ lorsque $|\eta| \longrightarrow +\infty$. Donc il existe $y \in H_o$ tel que

$$\lambda = \max_i \frac{|y-\eta_i|}{|x-\xi_i|} \leq \max_i \frac{|\eta-\eta_i|}{|x-\xi_i|}$$ pour tout $\eta \in H_o$. Si $\lambda \leq 1$, y répond au problème ; supposons $\lambda > 1$. Après éventuellement une permutation des indices on peut supposer $|y-\eta_i| = \lambda|x-\xi_i|$ pour $i=1,\ldots,k$ et $|y-\eta_i| < \lambda|x-\xi_i|$ pour $i = k+1,\ldots,n$. $(1 \leq k \leq n)$. Le point y est dans l'enveloppe convexe des $\eta_1,\ldots,\eta_k$, sinon on pourrait diminuer $|y-\eta_i|$ pour $i=1,\ldots,k$ tout en conservant $|y-\eta_i| < \lambda|x-\xi_i|$ pour $i = k+1,\ldots,n$, ce qui serait contradictoire avec le fait que y réalise le minimum de $\max_{i=1,\ldots,n} \frac{|\eta-\eta_i|}{|x-\xi_i|}$.

Donc il existe $c_1,\ldots,c_k \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ et

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i \eta_i .$$

Posons $R_i = x-\xi_i$, $S_i = y-\eta_i$. On a $\sum_{i=1}^{k} c_i S_i = 0$ et

$|S_i| = \lambda |R_i|$ pour $i=1,\ldots,k$. D'autre part $|S_i-S_j|^2 \leq |R_i-R_j|^2$, donc pour tout $i,j = 1,\ldots,k$, $(S_i,S_j) > (R_i,R_j)$ ce qui est absurde car on aurait alors $|\sum_{i=1}^{k} c_i R_i|^2 < |\sum_{i=1}^{k} c_i S_i|^2 = 0$.

On voit apparaître dans cette démonstration élémentaire un principe de min-max. On va utiliser directement le théorème du min-max pour obtenir une deuxième démonstration du théorème 1 avec un résultat plus précis. Rappelons d'abord le théorème du min-max :

Théorème du min-max. Soient K_1 , K_2 des convexes compacts de $\mathbb{R}^n$

$$f : (\lambda,\mu) \in K_1 \times K_2 \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{continue}$$

$$\forall \mu \in K_2 , \ \lambda \longmapsto f(\lambda,\mu) \quad \text{est convexe} .$$

$$\forall \lambda \in K_1 , \ \mu \longmapsto f(\lambda,\mu) \quad \text{est concave} .$$

Alors $\min_\lambda \max_\mu f(\lambda,\mu) = \max_\mu \min_\lambda f(\lambda,\mu)$.

Nous renvoyons à [11] pour une démonstration très élémentaire due à SHIFFMAN. Précisons le cas particulier si $K_1 = K_2 = K$ alors il existe $\lambda^o \in K$ tel que pour tout $\mu \in K$, $f(\lambda^o,\mu) \leq \max_\lambda f(\lambda,\lambda)$.

Théorème 2. [7]. Soit A opérateur accrétif de H . Il existe un opérateur m-accrétif $\widetilde{A}$ prolongeant A tel que $D(\widetilde{A}) \subset \overline{\mathrm{Conv}\, D(A)}$ (enveloppe convexe fermée de $D(A)$).

Soit $C = \overline{\mathrm{Conv}\, D(A)}$. Considérons $\widetilde{A}$ un élément maximal dans l'ensemble des opérateurs accrétifs de H prolongeant A et dont le domaine de définition est contenu dans C ; il en existe d'après Zorn. Montrons que $\widetilde{A}$ est m-accrétif. Soit $y \in H$; il faut montrer qu'il existe $[\xi,\eta] \in \widetilde{A}$ tel que $y = \xi+\eta$; mais puisque $\widetilde{A}$ est maximal, il suffit de montrer qu'il existe $x \in C$ tel que $\widetilde{A} \cup \{[x,y-x]\}$ soit accrétif, c'est-à-dire $(x-\xi,y-x-\eta) \geq 0$ pour tout $[\xi,\eta] \in \widetilde{A}$. On peut toujours supposer $y=0$, en remplaçant $\widetilde{A}$ par l'opérateur accrétif $\widetilde{A}-y$.

Pour tout $[\xi,\eta]\in\widetilde{A}$, posons $C_{[\xi,\eta]}=\{x\in C\ ;\ (x+\eta,x-\xi)\leq 0\}$. $C[\xi,\eta]$ est convexe fermé borné et donc faiblement compact. Il suffit donc de démontrer que pour $[\xi_i,\eta_i]\in\widetilde{A}$, $i=1,\dots,n$,

$$\bigcap_{i=1,\dots,n} C[\xi_i,\eta_i]\neq\emptyset .$$

Soit alors $K=\{\lambda\in\mathbb{R}^n\ ;\ \lambda_i\geq 0\ ,\ \lambda_1+\dots+\lambda_n=1\}$ convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et $f=(\lambda,\mu)\in K\times K\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x(\lambda)+\eta_i\ ,\ x(\lambda)-\xi_i)$ où $x(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j$. f est continue, convexe en λ , linéaire en μ ; il existe donc $\lambda^0\in K$ tel que pour tout $\mu\in K$, $f(\lambda^0,\mu)\leq\max_{\lambda} f(\lambda,\lambda)$.

Or $f(\lambda,\lambda)=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j(\eta_j,\xi_i-\xi_j)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j(\eta_i-\eta_j,\xi_j-\xi_i)\leq 0$.

Donc pour tout $\mu\in K$, $\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x(\lambda^0)+\eta_i\ ,\ x(\lambda^0)-\xi_i)\leq 0$, c'est-à-dire $x(\lambda^0)\in\bigcap_{i=1}^{n}C[\xi_i,\eta_i]$.

Remarquons que dans le cas Hilbertien A est accrétif si et seulement si A^{-1} est accrétif, donc :

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> A <u>un opérateur accrétif de</u> H . <u>Il existe un opérateur</u> <u>m-accrétif</u> $\widehat{A}$ <u>prolongeant</u> A <u>tel que</u> $R(\widehat{A})\subset\overline{\mathrm{Conv}\,R(A)}$.

2°) <u>Cas où</u> $X=\mathbb{R}^n$ <u>muni de la norme</u> ℓ_p .

<u>Théorème 3</u>. [6]. <u>Soit</u> $X=\mathbb{R}^n$ <u>muni de la norme</u> ℓ_∞ . <u>Soit</u> A <u>un opérateur accrétif de</u> X . <u>Il existe un opérateur</u> <u>m-accrétif</u> $\widetilde{A}$ <u>prolongeant</u> A <u>tel que</u> $R(\widetilde{A})\subset K(R(A))$, <u>plus petit parallélotope de côtés parallèles aux axes contenant</u> $R(A)$.

$(K(D)=\{x\ ;\ \inf_{a\in D} a^i\leq x^i\leq\sup_{a\in D} a^i$ pour $i=1,\dots,n\})$.

Soit $\widetilde{A}$ élément maximal dans l'ensemble des opérateurs accrétifs prolongeant A d'image contenue dans $K(R(A))$. Montrons que $\widetilde{A}$ est m-accrétif : soit $z \in X$, il suffit de montrer qu'il existe $y \in K(R(A))$ tel que pour tout $[\xi, \eta] \in \widetilde{A}$, $(\eta - y, \xi - (z-y))_s \geq 0$.

Or $\{y \in K(R(A))\ ;\ (\eta - y, \xi + y)_s \geq 0\}$ est compact ; on est donc ramené à montrer qu'étant donné $[\xi_i, \eta_i] \in X \times X$, $i=1,\ldots,r$ tels que $(\eta_i - \eta_j, \xi_i - \xi_j)_s \geq 0$ pour tout $i \neq j$, il existe $y \in K(\{\eta_1,\ldots,\eta_r\})$ tel que $(\eta_i - y, \xi_i + y)_s \geq 0$ pour tout i.

Posons $K = K(\{\eta_1,\ldots,\eta_r\})$ et
$T_k : x \in K \longrightarrow T_k(x) = \{y \in K\ ;\ (\eta_i - y, \xi_i + x)_s \geq 0$ pour $i=1,\ldots,k\}$.
T_k est un opérateur fermé de K. Pour montrer qu'il existe $y \in K$ tel que $y \in T_k(y)$, nous utilisons le théorème de point fixe d'Eilenberg-Montgomery [8], que nous énoncerons dans un cas particulier pour ne pas faire intervenir explicitement de topologie algébrique : étant donné K un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$, T un opérateur fermé de K, on a la conclusion du théorème de Kakutani, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ tel que $x \in T(x)$, en supposant seulement que pour tout $x \in K$, $T(x)$ est un <u>retract</u> d'un convexe compact non vide, c'est-à-dire qu'il existe un convexe compact non vide K_x contenant $T(x)$ et une application continue ρ_x de K_x dans $T(x)$ telle que la restriction de ρ_x à $T(x)$ soit l'application identique de $T(x)$.

Montrons que pour tout $x \in K$ et tout $k=1,\ldots,r$, $T_k(x)$ est un retract de $T_{k-1}(x)$. Alors par transitivité $T_r(x)$ sera un retract de $T_o(x) = K$ et le théorème sera démontré. Eliminons le cas $\xi_k + x = 0$, car alors $T_k(x) = T_{k-1}(x)$ et le résultat est trivial. On peut toujours supposer $x=0$ et $\|\xi_k\| = 1$ en remplaçant ξ_i par $\dfrac{\xi_i + x}{\|\xi_k + x\|}$. Enfin par permutation des coordonnées on peut toujours supposer $|\xi_k^j| = 1$ pour $j=1,\ldots,s$ et $|\xi_k^j| < 1$ pour $j = s+1,\ldots,n$.

Considérons alors l'application $\rho : y \in T_{k-1}(x) \longmapsto \rho(y) = z$ définie par ses composantes :

$$\begin{cases} z^j = y^j + \xi_k^j \ \min\{0,(\eta_k - y,\xi_k)_s\} & \text{pour } j=1,\ldots,s . \\ z^j = y^j & \text{pour } j=s+1,\ldots,n . \end{cases}$$

ρ est continue car $(.,.)_s$ est continue en la première variable : en effet pour ξ fixé , $(y,\xi)_s = \sup\{(y,w) ; w \in W(\xi)\}$ est s.c.i. ; d'autre part si $y_n \longrightarrow y$ et $w_n \in W(\xi)$ est tel que $(y_n,w_n) = (y_n,\xi)_s$; pour toute suite extraite n_k telle que $w_{n_k} \longrightarrow w$, $(y_{n_k},w_{n_k}) \longrightarrow (y,w)$ et puisque $w \in W(\xi)$, $(y,w) \leqslant (y,\xi)_s$; donc $(y,\xi)_s$ est s.c.s. D'autre part ρ est l'identité sur $T_k(x)$. Il reste à montrer que pour tout $y \in T_{k-1}(x) \setminus T_k(x)$, $z = \rho(y) \in T_k(x)$.

Avant de démontrer ce résultat, remarquons que le dual de X est $\mathbb{R}^n$ muni de la norme ℓ_1 et que

$$W(\xi_k) = \{(\xi_k^1\alpha_1,\ldots,\xi_k^s\alpha_s,0,\ldots,0) ; \alpha_j \geqslant 0 , \sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1\} .$$

Montrons maintenant les différentes propriétés de $z \in T_k(x)$.

-a) $z \in K$. En effet pour $j=1,\ldots,s$, $z^j = y^j + \xi_k^j(\eta_k - y,\xi_k)_s$. Donc $(z^j - y^j)\xi_k^j = (\eta_k - y,\xi_k)_s \geqslant (\eta_k^j - y^j)\xi_k^j$. D'où pour tout $j=1,\ldots,n$, z^j est compris entre y^j et η_k^j . Puisque y et η_k sont dans K , il en est de même de z .

-b) $(\eta_k - z,\xi_k)_s \geqslant 0$. En effet soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1$ tels que $(\eta_k - y,\xi_k)_s = \sum_{j=1}^{s} (\eta_k^j - y^j)\xi_k^j\alpha_j$. On a

$$(\eta_k - z,\xi_k)_s \geqslant \sum_{j=1}^{s} (\eta_k^j - z^j)\xi_k^j\alpha_j = \sum_{j=1}^{s} (\eta_k^j - y^j)\xi_k^j\alpha_j - \sum_{j=1}^{s} \xi_k^j(\eta_k - y,\xi_k)_s \ \xi_k^j\alpha_j$$
$$= 0 .$$

-c) $(\eta_i - z,\xi_i)_s \geqslant 0$ pour $i=1,\ldots,k-1$ tel que $\|\xi_i - \xi_k\| < \|\xi_i\| + 1$.

Puisque $y \in T_{k-1}(x)$, il existe $f \in W(\xi_i)$ tel que $(\eta_i - y, f) \geq 0$.
On peut toujours choisir pour f un point extrémal de $W(\xi_i)$, c'est-à-dire $f = (0,\ldots,\underset{j^{\text{ième}}\text{ place}}{\alpha},\ldots,0)$.

On a $(\eta_i - z, f) = (\eta_i - y, f) \geq 0$ si $j > s$. Si $j \leq s$,
$(\eta_i - z, f) = (\eta_i - y, f) - (\eta_k - y, \xi_k)_s \, \alpha \xi_k^j$.

Mais $|\alpha| = \|f\| = \|\xi_i\|$; si $\alpha \xi_k^j < 0$, on aurait $\alpha \xi_k^j = -\|\xi_i\|$, d'où
$(\xi_i - \xi_k, f) = \|\xi_i\|^2 + \|\xi_i\| > \|\xi_i\| \, \|\xi_i - \xi_k\|$ ce qui est contradictoire.
Donc $\alpha \xi_k^j \geq 0$ et $(\eta_i - z, f) \geq (\eta_i - y, f) \geq 0$.

-d) $(\eta_i - z, \xi_i)_s \geq 0$ pour $i = 1,\ldots,k-1$ tel que $\|\xi_i - \xi_k\| = \|\xi_i\| + 1$.

Soit $f \in W(\xi_i - \xi_k)$ tel que $(\eta_i - \eta_k, f) \geq 0$. De l'égalité dans l'inégalité triangulaire, on tire que $|\xi_i^j - \xi_k^j| = \|\xi_i - \xi_k\|$ implique
$|\xi_i^j| = \|\xi_i\|$, $|\xi_k^j| = 1$ et $\xi_i^j - \xi_k^j$, $\xi_i^j - \xi_k^j$ ont le même signe ;
donc $\dfrac{-f}{\|\xi_i - \xi_k\|} \in W(\xi_k)$ et $\dfrac{\|\xi_i\| f}{\|\xi_i - \xi_k\|} \in W(\xi_i)$.

D'où $(\eta_i - z, \xi_i)_s \geq \dfrac{\|\xi_i\|}{1 + \|\xi_i\|} (\eta_i - z, f) \geq \dfrac{\|\xi_i\|}{1 + \|\xi_i\|} (\eta_k - z, f)$.

Or $(\eta_k - z, f) = (\eta_k - y, f) - (\eta_k - y, \xi_k)_s (\xi_k, f) = \|\xi_i - \xi_k\| \{ (\eta_k - y, \xi_k)_s$

$$- (\eta_k - y, - \frac{f}{\|\xi_i - \xi_k\|}) \} \geq 0.$$

<u>Théorème 4.</u> [6]. <u>Soit</u> $X = \mathbb{R}^n$ <u>muni de la norme</u> ℓ_p $(1 \leq p \leq +\infty$, $n \geq 2)$. <u>La classe des opérateurs</u> <u>m-accrétifs coïncide avec celle des opérateurs accrétifs maximaux si et seulement si</u> $p = 1, 2$, ou $+\infty$.

La condition suffisante résulte du théorème de Minty pour $p=2$, du théorème 3 pour $p=+\infty$ et $p=1$ en faisant un changement de base. Montrons maintenant que la condition est nécessaire en exhibant un opérateur accrétif maximal non m-accrétif. Nous aurons besoin du lemme :

<u>Lemme 2.</u> [3]. <u>Soit</u> X <u>un espace de Banach uniformément convexe et</u> A <u>un opérateur accrétif de</u> X <u>tel que pour tout</u> $\lambda > 0$,

$R(I+\lambda A) \supset \overline{\mathrm{Conv}\, D(A)}$. Alors $\overline{D(A)}$ est convexe.

Fin de la démonstration du théorème 4 : Supposons $1<p<+\infty$, alors X est uniformément convexe. Considérons l'opérateur $A = \{[x,y]$; vérifiant l'une des trois conditions suivantes$\}$:

(i) $x^1 = x^2 = y^1 = y^2 = 0$ et $x^j = y^j$ pour $j=3,\ldots,n$.

(ii) $x^1 = y^2 = 0$, $x^2 = y^1 = 1$ et $x^j = y^j$ pour $j=3,\ldots,n$.

(iii) $x^1 = -y^2 = 1$, $x^2 = y^1 = 0$ et $x^j = y^j$ pour $j=3,\ldots,n$.

On vérifie immédiatement que A est accrétif. Supposons qu'il existe. Soit B un prolongement m-accrétif de A ; d'après le lemme, $\overline{D(B)}$ est convexe donc contient $\{x \in X ; x^1 \geqslant 0 , x^2 \geqslant 0 , x^1+x^2 \leqslant 1\}$. Pour $p \neq 2$ c'est impossible. En effet $[x,y] \in X \times X$ tel que $A \cup \{[x,y]\}$ soit accrétif avec $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, $x^1+x^2 < 1$. L'application de dualité de $X = (\mathbb{R}^n, \ell_p)$ dans $X' = (\mathbb{R}^n, \ell_q)$, p et q indices conjugués, est $W : \xi \in X \longrightarrow W(\xi) = w$ défini par $w_j = \left(\frac{|\xi^j|}{\|\xi\|}\right)^{p-2} \xi^j$.
Donc pour tout $[\xi,\eta] \in A$, $\sum_{j=1}^{n} |\xi^j - x^j|^{p-2} (\xi^j - x^j)(\eta^j - y^j) \geqslant 0$, d'où l'on tire, en appliquant aux $[\xi,\eta]$ tels que $\xi^j = x^j$ pour $j=3,\ldots,n$,

$$(x^1)^{p-1}\, y^1 + (x^2)^{p-1}\, y^2 \geqslant 0$$

$$(x^1)^{p-1}\, (y^1-1) - (1-x^2)^{p-1}\, y^2 \geqslant 0$$

$$-(1-x^1)^{p-1}\, y^2 + (x^2)^{p-1} (y^2+1) \geqslant 0 .$$

Les conditions de compatibilité de ce système d'inéquation s'écrit :

$$(x^2)^{p-1} + (1-x^2)^{p-1} \geqslant (x^1)^{p-1} + (1-x^1)^{p-1} ,$$

c'est-à-dire : $x^2 \geqslant x^1$ si $1<p<2$ et $x^1 \geqslant x^2$ si $2<p<+\infty$.
Donc si $1<p<2$, $D(B) \cap \{x \in X ; x^1 > 0 , x^2 > 0 , x^1+x^2 < 1 , x^1 > x^2\} = \emptyset$
si $2<p<+\infty$, $D(B) \cap \{x \in X ; x^1 > 0 , x^2 > 0 , x^1+x^2 < 1 , x^1 < x^2\} = \emptyset$

ce qui est contradictoire.

Démonstration du lemme 2 : $\overline{\text{conv } D(A)}$: Posons $J_\lambda x = (I+\lambda A)^{-1}$ et considérons $D = \{x \in \overline{\text{Conv } D(A)} ; J_\lambda x \longrightarrow x \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0\}$. Les J_λ étant des contractions sur $\overline{\text{conv } D(A)}$, D est fermé. D'autre part si $x \in D(A)$, soit $y \in Ax$, $|J_\lambda x - x| \leqslant \lambda |y|$, et donc $x \in D$. Il suffit donc de montrer que D est convexe. Soient $x, y \in D$; on a

$$|J_\lambda(\tfrac{x+y}{2}) - J_\lambda x| \leqslant \frac{|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad |J_\lambda(\tfrac{x+y}{2}) - J_\lambda y| \leqslant \frac{|x-y|}{2}$$

Soit $\lambda_n \searrow 0$ telle que $J_{\lambda_n}(\frac{x+y}{2})$ converge faiblement dans X (X est réflexif) et η sa limite. On a $|\eta - x| \leqslant \frac{|x+y|}{2}$ et $|\eta - y| \leqslant |\frac{x-y}{2}|$ et donc $\eta = \frac{x+y}{2}$ (X est strictement convexe). Donc $J_\lambda(\frac{x+y}{2})$ converge faiblement vers $\frac{x+y}{2}$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ et $J_\lambda(\frac{x+y}{2}) - J_\lambda x$ converge faiblement vers $\frac{y-x}{2}$.

D'autre part $\overline{\lim\limits_{\lambda \to 0}} |J_\lambda(\frac{x+y}{2}) - J_\lambda x| \leqslant |\frac{x-y}{2}|$ et donc, X étant uniformément convexe, $J_\lambda(\frac{x+y}{2}) - J_\lambda x$ converge fortement vers $\frac{y-x}{2}$; c'est-à-dire $\frac{x+y}{2} \in D$.

3°) Remarques.

La notion d'opérateur accrétif est très liée à celle de contraction. Dans le cas Hilbertien il y a bijection conservant l'ordre du prolongement entre la classe des opérateurs accrétifs et la classe des contractions, comme le montre l'équivalence (i) et (iii) de la Proposition 1. On ignore si une telle bijection existe dans le cas général. On peut dans le cas général faire un rapprochement entre les théorèmes précédents et les théorèmes de prolongement des contractions :

a) Soit X un espace de Banach strictement convexe : pour que toute contraction de X puisse être prolongée en une contraction partout définie il faut et il suffit que X soit un Hilbert [9].

b) Soit X un espace de dimension finie : pour que toute contraction de X puisse être prolongée en une contraction partout définie il faut et il suffit qu'il existe une base relativement à laquelle la norme de X soit la norme ℓ_∞ ou ℓ_2. [16].

II - Cas où X est de dimension finie.

Suivant Hirsch [10], on dit qu'un opérateur B est co-dissipatif (resp. m-codissipatif) si et seulement si B^{-1} est accrétif (resp. m-accrétif). Il est immédiat de vérifier que B est m-codissipatif si et seulement si B est codissipatif et $R(I+B) = X$ et on a alors $R(B+\lambda I) = X$ pour tout $\lambda>0$.

En posant $A = B^{-1}$, $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$, $A_\lambda = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}$, on a les formules de dualité, $A_\lambda = (B+\lambda I)^{-1}$, $J_\lambda = I-\lambda(B+\lambda I)^{-1}$.

Le théorème 3 peut s'énoncer : soit $X = (\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$ et B codissipatif ; il existe $\widetilde{B}$ m-codissipatif prolongeant B tel que $D(\widetilde{B}) \subset K(D(B))$.

Donnons quelques propriétés des opérateurs accrétifs et codissipatifs dans un espace de dimension finie. On suppose désormais $\dim X < +\infty$.

Proposition 2. Soit A un opérateur accrétif ou codissipatif. Alors A est borné sur tout compact intérieur à son domaine de définition.

Sinon il existerait $[x_n, y_n] \in A$, x intérieur à $D(A)$, z de norme 1 tels que $x_n \longrightarrow x$, $|y_n| \longrightarrow +\infty$, $\frac{y_n}{|y_n|} \longrightarrow z$. Soit $t>0$ tel que $x+tz \in D(A)$ et $y_t \in A(x+tz)$. Pour tout n, on a puisque A est accrétif (resp-codissipatif), $\left(\frac{y_n}{|y_n|} - \frac{y_t}{|y_n|}\right.$,

$x_n-(x+tz))_s \geqslant 0$ (resp. $(x_n-(x+tz)\,,\,\frac{y_n}{|y_n|}-\frac{y_t}{|y_n|})_s \geqslant 0$) d'où à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $(z,-tz)_s = -t \geqslant 0$ (resp. $(-tz,z)_s = -t \geqslant 0$) ce qui est absurde.

Proposition 3. Soit Ω ouvert de X et A une application de Ω dans X (opérateur univoque de domaine de définition Ω). On suppose A accrétif (resp. codissipatif). Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) A est fermé dans $\Omega \times X$.

(ii) A est maximal dans les opérateurs accrétifs (resp. codissipatifs) de domaine de définition contenu dans Ω.

(iii) A est hémicontinu, i.e. $\forall x \in \Omega$, $\xi \in X$, $\lim\limits_{t \to 0} A(x+t\xi) = Ax$.

(iv) A est continu.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) trivialement

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). En effet, soit $[x,y] \in \Omega \times X$ tel que $A \cup [x,y]$ soit accrétif (resp. codissipatif). Alors pour tout $\xi \in X$ et tout $t>0$ suffisamment petit, $(A(x+t\xi)-y,t\xi)_s \geqslant 0$ (resp. $(t\xi,A(x+t\xi)-y)_s \geqslant 0$) d'où en divisant par t puis faisant $t \Longrightarrow 0$, $(y-Ax,-\xi)_s \geqslant 0$ (resp. $(\xi,Ax-y)_s \geqslant 0$). Ceci est vrai en particulier pour $\xi = \lambda(y-A\xi)$ avec λ suffisamment petit et donc $y = Ax$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). En effet, soit x_n, $x \in \Omega$ tels que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$. On a pour tout n et tout $\xi \in \Omega$, $(Ax_n-A\xi,x_n-\xi)_s \geqslant 0$ (resp. $(x_n-\xi,Ax_n-A\xi)_s \geqslant 0$) d'où à la limite $(y-A\xi,x-\xi)_s \geqslant 0$ (resp. $(x-\xi,y-A\xi)_s \geqslant 0$) d'où puisque A est maximal, $y = Ax$.

(i) $\Longrightarrow$ (iv). Soit x_n, $x \in \Omega$, $x_n \longrightarrow x$. D'après la Proposition 2, Ax_n est borné. Si (n_k) suite extraite telle que $Ax_{n_k} \longrightarrow y$ on a $y = Ax$ puisque A est fermé. Donc $Ax_n \longrightarrow Ax$.

<u>Corollaire.</u> <u>Soit</u> A <u>opérateur univoque partout défini accrétif (resp. codissipatif). Il y a équivalence entre les propriétés suivantes</u> :

(i) A <u>est fermé.</u>

(ii) A <u>est hémicontinu.</u>

(iii) A <u>est continu.</u>

(iv) A <u>est accrétif maximal</u> (<u>resp.</u> <u>codissipatif maximal</u>).

(v) A <u>est</u> m-<u>accrétif</u> (<u>resp.</u> m-<u>codissipatif</u>).

L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) résulte de la Proposition. (v) $\Longrightarrow$ (iv) est trivial. Enfin (iii) $\Longrightarrow$ (v) résulte du théorème de Brouwer car $I+A$ est un homémorphisme de X sur $R(I+A)$, donc $R(I+A)$ est un ouvert de X. Puisque $(I+A)^{-1}$ est continue sur $R(I+A)$ et fermé dans $X \times X$, $R(I+A) = X$.
Lorsque A est accrétif on pourrait utiliser la méthode plus élémentaire du paragraphe III.1°), en se basant ici sur le théorème de Peano.

<u>Proposition 4.</u> <u>Soit</u> A <u>un opérateur</u> m-<u>codissipatif.</u> A <u>est surjectif si et seulement si</u> A^{-1} <u>est borné sur les bornés.</u>

La condition est nécessaire d'après la proposition 2. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $y \in X$ et $[x_o, y_o] \in A$. Pour tout $\lambda > 0$, il existe $[x_\lambda, y_\lambda] \in A$ tels que $y_\lambda + \lambda x_\lambda = y + \lambda x_o$. Appliquant la codissipativité $|y-y_o| = |y_\lambda - y_o + \lambda(x_\lambda - x_o)| \geqslant |y_\lambda - y_o|$ et donc $\{y_\lambda\}$ est borné. D'après l'hypothèse $\{x_\lambda\}$ est borné ; soit $\lambda_n \searrow 0$ telle que $x_{\lambda_n} \longrightarrow x$, on a $y_{\lambda_n} \longrightarrow y$ et donc $[x, y] \in A$ puisque A est fermé.

<u>Corollaire</u> [6]. <u>Soit</u> $X = (\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$ <u>et</u> B <u>codissipatif de domaine de définition borné. Il existe</u> $\widetilde{B}$ <u>codissipatif tel que</u>

$$D(\widetilde{B}) \subset K(D(B)) \quad \text{et} \quad R(B+\lambda I) = X \quad \forall \lambda \geqslant 0 .$$

Cela résulte immédiatement de la condition suffisante de la Proposition et du théorème 3.

Proposition 5. Soit A accrétif fermé. On désigne par Ω l'intérieur de $\overline{D(A)}$ relativement à la variété affine engendrée par $D(A)$. On suppose que pour tout $\xi \in \Omega$, il existe $\lambda_o > 0$ tel que $R(I+\lambda A) \ni \xi$ pour $\lambda \leqslant \lambda_o$. Alors $\Omega \subset D(A)$.

On peut toujours supposer $0 \in D(A)$. Remarquons que pour $\xi \in \Omega$, $\xi_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}\xi$ est défini pour λ petit et $\lim\limits_{\lambda \searrow o} \xi_\lambda = \xi$: en effet pour $\xi_1 \in D(A) \cap \Omega$, λ petit et $\eta_1 \in A\xi_1$, on a

$$|\xi_\lambda - \xi| \leqslant |\xi_\lambda - \xi_{1,\lambda}| + |\xi_{1,\lambda} - \xi_1| + |\xi_1 - \xi| \leqslant 2|\xi_1 - \xi| + \lambda|\eta_1|$$

d'où $\overline{\lim\limits_{\lambda \searrow o}}|\xi_\lambda - \xi| \leqslant 2|\xi_1 - \xi|$; $D(A) \cap \Omega$ étant dense dans Ω, $\xi_\lambda \longrightarrow \xi$.

Supposons qu'il existe $\xi \in \Omega \setminus D(A)$. Alors puisque $\xi_\lambda \in D(A)$, $\eta_\lambda = \dfrac{\xi - \xi_\lambda}{\lambda} \in A\xi_\lambda$ et A est fermé, $\lim\limits_{\lambda \searrow o}|\eta_\lambda| = +\infty$. Considérons $\lambda_n \searrow 0$ et z de norme 1 tels que $\dfrac{\eta_{\lambda_n}}{|\eta_{\lambda_n}|} \longrightarrow z$; enfin il existe $t > 0$ tel que $x = \xi + tz \in \Omega$. Pour λ petit, $x_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} x \in D(A)$ et $y_\lambda = \dfrac{x - x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$. On a alors $\left(\dfrac{\eta_{\lambda_n}}{|\eta_{\lambda_n}|} - \dfrac{y_\lambda}{|\eta_{\lambda_n}|}, \xi_{\lambda_n} - x_\lambda\right)_s \geqslant 0$. D'où à la limite $(n \longrightarrow +\infty)$, $(z, \xi - x_\lambda)_s \geqslant 0$, puis à la limite $(\lambda \searrow 0)$, $(z, -tz)_s = -t \geqslant 0$, ce qui est contradictoire.

Corollaire. Supposons X strictement convexe et soit A accrétif fermé tel que $R(I+\lambda A) \supset \mathrm{Conv}\, D(A)$ pour λ petit. Alors $D(A)$ est convexe.

Cela résulte immédiatement du lemme 2 et de la Proposition.

Remarques. Plusieurs de ces propriétés se généralisent aux cas d'un espace de Banach de dimension infinie, spécialement lorsqu'il est un Hilbert. Notons en particulier :

1) Soit A un opérateur accrétif d'un espace de Hilbert. Alors A est borné au voisinage de tout point intérieur au domaine de définition de A. (cf. [2]).

2) Soit A une application univoque accrétive d'un Hilbert dans lui-même. Il y a équivalence entre

(i) A est demi-fermé.

(ii) A est m-accrétive.

(iii) A est faiblement hémicontinu (i.e. $\forall\ x \in X$, $\xi \in X$, $A(x+t\xi) \rightharpoonup Ax$ lorsque $t \Rightarrow 0$).

(iv) A est semi-continu (i.e. continu de la topologie forte dans la topologie faible).

En effet (iv) $\Longrightarrow$ (iii) est trivial ; supposant (iii), A est maximal accrétive comme dans la Proposition 3, et donc par application du théorème de Minty m-accrétive ;

(ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de l'exposé n°1 (corollaire de la Proposition 4.3.) ;

enfin (i) $\Longrightarrow$ (iv) résulte du fait que A est localement borné d'après 1°).

3) X étant supposé réflexif à norme différentiable (ou ce qui est équivalent d'application de dualité W univoque et continue). soit A un opérateur m-codissipatif tel que A^{-1} soit localement borné ; alors $R(A) = X$. Si X est un Hilbert, la réciproque est vraie.

En effet $R(A)$ est fermé car si $y_n \in Ax_n$ et $y_n \Rightarrow y_o$, on a x_n borné ; or X est réflexif, on peut donc extraire n_k tel que $x_{n_k} \rightharpoonup x_o$; mais A^{-1} est demi-fermé (corollaire de la Proposition 4.3 de l'exposé n°1) et donc $y_o \in Ax_o$. La démonstration de $R(A)$ ouvert est identique à celle de la Proposition 4, utilisant les mêmes arguments que précédemment. Enfin si X est un Hilbert, la réciproque résulte de 1°).

III - Opérateurs accrétifs univoques.

Soit A un opérateur univoque accrétif (resp. codissipatif) partout défini dans X. Nous avons vu que lorsque X est de dimension finie (resp. X est un Hilbert) la condition A hémicontinue (resp. faiblement hémicontinue) est suffisante (et même nécessaire) pour en déduire que A est m-accrétif (resp. m-codissipatif). On ignore si ce résultat est vrai dans un Banach quelconque ; on a seulement le résultat immédiat :

A hémicontinu $\Longrightarrow$ A accrétif (resp. codissipatif) maximal $\Longrightarrow$ A fermé.

En faisant des hypothèses de continuité plus forte sur A, nous pourrons en déduire la m-accrétivité (resp. m-codissipativité) de A. En fait ce sont plus les techniques qui permettent d'atteindre les résultats, qui sont intéressantes.

1 - Résolution de l'équation d'évolution lorsque A est continu accrétif.

Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante par résolution d'équation d'évolution.

Proposition 6 [12]. *Soit A un opérateur univoque accrétif continu partout défini. Alors A est m-accrétif.*

La méthode repose sur la propriété suivante :

Proposition 7 [4]. *Soit A un opérateur accrétif fermé et $y \in X$. Supposons qu'il existe une fonction u absolument continue sur $]0,+\infty[$ telle que*

$$u(t) \in D(A) \text{ , } u'(t) + u(t) + Au(t) \ni y \quad \text{p.p. } t$$

Alors $y \in R(I+A)$ *et* $(I+A)^{-1}y = \lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

Soit en effet d'abord $h>0$ fixé. La fonction $t \longrightarrow |u(t+h)-u(t)|^2$ étant absolument continue, elle est dérivable presque partout et d'après la Proposition 1.5 de l'exposé n°1, pour presque tout $t \in]0,+\infty[$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t+h)-u(t)|^2 = (u'(t+h)-u'(t),w)$ pour tout $w \in W(u(t+h)-u(t))$, et donc appliquant l'accrétivité de A, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t+h)-u(t)|^2 \leqslant -|u(t+h)-u(t)|^2$; soit en intégrant pour tout $0<s\leqslant t<+\infty$, $|u(t+h)-u(t)| \leqslant e^{-(t-s)}|u(s+h)-u(s)|$. Divisant par h et faisant $h \searrow 0$, on obtient pour presque tout $0<s\leqslant t<+\infty$, $|\frac{du}{dt}(t)| \leqslant e^{-(t-s)}|\frac{du}{dt}(s)|$; et donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{du}{dt}(t) = 0$ d'une part et d'autre part $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$ existe, soit x cette limite. L'opérateur A étant fermé $x \in D(A)$ et $x+Ax \ni y$.

<u>Théorème 5</u> [12]. <u>Soient</u> T, r, M <u>tels que</u> $MT \leqslant r$; <u>posons</u> $I = [0,T]$, B = <u>boule fermée de centre</u> x_o <u>et de rayon</u> r.

<u>Soit</u> $A = I \times B \longrightarrow X$ <u>continue, bornée par</u> M <u>et telle que pour tout</u> $t \in I$, <u>l'opérateur</u> $x \in B \longrightarrow A(t,x) \in X$ <u>soit accrétif.</u>

<u>Alors il existe</u> $u = [0,T] \longrightarrow B$ <u>de classe</u> C^1 <u>unique telle que</u> $u(0) = x_o$, $u'(t) + A(t,u(t)) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$.

L'unicité a été démontrée (Proposition 2.2 de l'exposé n°1). Montrons l'existence. Pour toute partition $\mathcal{P} = \{a_o = 0<a_1< \dots <a_n = T\}$ de l'intervalle I on désignera par $u_{\mathcal{P}}$ la fonction affine par morceaux définie par

$$u_{\mathcal{P}}(0) = x_o, \quad u_{\mathcal{P}}(t) = u_{\mathcal{P}}(a_{k-1}) - A(a_{k-1},u_{\mathcal{P}}(a_{k-1}))(t-a_{k-1})$$

$$t \in]a_{k-1},a_k], \ k = 1,\dots,n.$$

$I \times B$ étant un cylindre de sécurité pour A, $u_{\mathcal{P}}$ est bien définie absolument continue sur $[0,T]$ et $u'_{\mathcal{P}}(t) = -A(a_{k-1},u_{\mathcal{P}}(a_{k-1}))$ pour $t \in]a_{k-1},a_k[$.

Nous utiliserons alors le lemme suivant :

__Lemme. Avec les notations précédentes, pour tout__ $\varepsilon>0$, __il existe une partition__ $\mathcal{P}$ __et__ $\eta>0$ __tels que__ $|\mathcal{P}| = \sup(a_k-a_{k-1}) \leqslant \eta$, $\eta \leqslant \varepsilon$ __et__ $\{|t-a_{k-1}| \leqslant 2\eta$ et $|x-u_{\mathcal{P}}(a_{k-1})| \leqslant M(a_k-a_{k-1})\} \Longrightarrow$

$$|A(t,x) - A(a_{k-1},u_{\mathcal{P}}(a_{k-1}))| \leqslant \varepsilon.$$

Avant de démontrer le lemme achevons la démonstration du théorème. Considérons les suites $\varepsilon_n, \mathcal{P}_n, \eta_n$ construites par récurrence :

$\varepsilon_1 = 1$, $\mathcal{P}_1, \eta_1$ vérifiant le lemme pour $\varepsilon = \varepsilon_1$.

$\varepsilon_n = \inf(\eta_{n-1}, \frac{1}{n})$, $\mathcal{P}_n, \eta_n$ vérifiant le lemme pour $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Enfin posons $u_n = u_{\mathcal{P}_n}$.

Soit $n \geqslant m$. Explicitons $\mathcal{P}_n = \{a_o = 0<a_1<\ldots<a_r = T\}$, $\mathcal{P}_m = \{b_o = 0<\ldots<b_s = T\}$.

La fonction $|u_n(t)-u_m(t)|^2$ est absolument continue et on a pour presque tout $\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |u_n(t)-u_m(t)|^2 = (u_n'(t)-u_m'(t),w)$ pour tout $w \in W(u_n(t)-u_m(t))$.

Pour $t \in]a_{k-1},a_k[\cap]b_{\ell-1},b_\ell[$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |u_n(t)-u_m(t)|^2 = (-A(a_{k-1},u_n(a_{k-1})) + A(b_{\ell-1},u_m(b_{\ell-1})),w)$$

$$= - (A(a_{k-1},u_n(t) - A(a_{k-1},u_m(t)),w)$$

$$+ (A(a_{k-1},u_n(t) - A(a_{k-1},u_n(n_{k-1})),w)$$

$$+ (A(b_{\ell-1},u_m(b_{\ell-1})) - A(a_{k-1},u_m(t)),w) .$$

D'après l'accrétivité de A le premier terme est $\leqslant 0$ pour au moins un $w \in W(u_n(t)-u_m(t))$; d'après las propriétés du lemme, le second est $\leqslant \varepsilon_n|w|$ et le troisième est $\leqslant \varepsilon_m|w|$ puisque

$|b_{\ell-1}-a_{k-1}| \leqslant |b_{\ell-1}-t| + |t-a_{k-1}| \leqslant \eta_m+\eta_n \leqslant 2\eta_m$.

En définitive on a $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)-u_m(t)|^2 \leqslant (\varepsilon_n+\varepsilon_m)|u_n(t)-u_m(t)|$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc $|u_n(t)-u_m(t)| \leqslant (\varepsilon_n+\varepsilon_m)T$ pour tout $t \in [0,T]$. Ceci montre que u_n converge uniformément : soit u sa limite. Puisque A est continue, $u_n'(t) \longrightarrow -A(t,u(t))$ p.p. t et donc $u(t) = x_o - \int_0^t A(s,u(s))\,ds$.

<u>Démonstration du lemme</u> : construisons par récurrence la suite δ_n de $\mathbb{R}^+$ avec $\delta_o=0$ et δ_{n+1} est la borne supérieure de l'ensemble des $\delta \in [0,\inf(\varepsilon,T-a_n)]$ tels que

$$\{|t-a_n| < 2\delta \text{ et } |x-x_n| < \delta M\} \Longrightarrow |A(t,x) - A(a_n,x_n))| \leqslant \varepsilon\}$$

où on a posé $a_n = \sum_{k=o}^{n} \delta_k$ et x_n est défini par récurrence à partir de x_o par $x_n = x_{n-1} - \delta_n A(a_{n-1},x_{n-1})$.

Puisque A est continue, δ_{n+1} est nul si et seulement si $a_n = T$. Supposons $\delta_n>0$ pour tout $n \geqslant 1$. On a $|x_{n+p}-x_n| \leqslant M(a_{n+p}-a_n)$ et donc $x_n \longrightarrow x_\infty$. Posons $a = \sum_n \delta_n$. Soit $\rho>0$ tel que

$\{|x-x_\infty| < \rho M$ et $|t-a| < 2\rho \Longrightarrow |A(t,x)-A(a,x_\infty)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Il existe n_o tel que pour $n \geqslant n_o$, $a-a_n < \rho/2$ et donc $|x_n-x_\infty| < \frac{\rho M}{2}$.

On a alors $\{|x-x_n| < \frac{\rho M}{2}$ et $|t-a_n| < \rho \Longrightarrow |A(t,x)-A(a_n,x_n)| < \varepsilon\}$

et donc $\delta_{n+1} \geqslant \inf(T-a_n,\varepsilon,\rho/2)$ pour tout $n \geqslant n_o$, ce qui est impossible puisque $\delta_{n+1} \leqslant T-a_n$ et $\delta_n \longrightarrow 0$.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> A <u>univoque accrétif partout défini continu sur</u> X . <u>Alors pour tout</u> $x \in X$, <u>il existe</u> $u = [0,+\infty[\longrightarrow X$ <u>de classe</u> C^1 <u>unique telle que</u> $u(0) = x$, $u'(t)+Au(t) = 0 \quad \forall t \in [0,+\infty[$.

L'équation est en effet résoluble localement d'après le théorème précédent. Mais en appliquant l'accrétivité de A, si u est solution sur $[0,T[$, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-x|^2 \leq -(Ax,u(t)-x)_s$ p.p. t et donc $|u(t)-x| \leq t|Ax|$ pour tout $t \in [0,T[$. Les solutions maximales sont donc définies sur $[0,+\infty[$.

Démonstration de la Proposition 6 : Etant donné A accrétif univoque continu partout défini, pour tout $y \in X$, l'opérateur $x \longrightarrow x + Ax-y$ est fermé et vérifie les conditions du corollaire précédent et donc par application de la Proposition 7, $y \in R(I+A)$.

Remarques.

1) On peut en fait, comme dans [12], affaiblir dans le théorème 5 la condition "pour tout $t \in I$, l'opérateur $x \in B \longrightarrow A(t,x) \in X$ est accrétif" en le remplaçant par la condition plus faible

$$(A(t,x)-A(t,y),x-y)_s + \phi(t,(x-y))(x-y) \geq 0 \quad \forall t \in I, \; x, y \in B$$

où ϕ est une fonction continue de $I \times [0,r]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\rho(t) = 0$ soit la seule solution de l'équation $\frac{d\rho}{dt} = \phi(t,\rho)$, $\rho(0) = 0$.

2) On obtient en fait un résultat local. On peut l'appliquer localement aux opérateurs continus : soit Ω ouvert de X et A une application continue de Ω dans X, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) A est accrétif

(ii) A est B-accrétif

(iii) pour tout $\lambda>0$, $I+\lambda A$ est une dilatation ouverte de Ω dans X.

3) Le cas des opérateurs codissipatifs continus ne peut pas, a priori, être traité par cette méthode.

4) Lorsqu'on suppose X^* uniformément convexe, c'est-à-dire W uniformément continu, on peut affaiblir dans le théorème 5 la condition " A continue" en la remplaçant par "A demi-continue", c'est-à-dire continue de $I \times B$ dans X muni de la topologie faible (cf. [4]). On obtiendra alors des solutions u de classe C^1- faible, mais qui étant lipschitziennes seront des solutions fortes, au sens de l'exposé n°1 (paragraphe 2.3), de l'équation $\frac{du}{dt}(t) + A(t,u(t)) = 0$.

On peut alors en déduire comme pour la Proposition 6 : si A est univoque accrétif partout défini et demi-continu, A est m-accrétif.

2 - Une méthode géométrique.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Proposition 8. *Soit* A , *opérateur univoque accrétif* (*resp. codissipatif*) *partout défini vérifiant la condition*

$$\forall x, \xi \in X , \lim_{t \searrow 0} \frac{A(x+t\xi)-A(x)}{t} = G(x,\xi) \quad \text{existe dans } X$$

et pour tout $x \in X$, *l'application* $\xi \longrightarrow G(x,\xi)$ *est linéaire.* *Alors* A *est m-accrétif* (*resp. m-codissipatif*).

La méthode repose sur la propriété géométrique suivante :

Théorème 6. [5]. *Soit* S *une partie fermée de* X . *Pour tout* $x \in S$ *on pose*

$$a(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\{\lambda(s-x) \; ; \; \lambda \geq 0 \; , \; s \in S \; , \; |s-x| \leq \varepsilon\}} .$$

Alors $\{x \in S \; ; \; a(x) \neq X\}$ *est dense dans la frontière de* S .

Démonstration de la Proposition 8 : Remarquons d'abord que A est hémicontinu et donc fermé. Donc $S = R(I+A)$ est fermé. D'autre part pour $x \in X$, l'application $\xi \longrightarrow G(x,\xi)$ est linéaire accrétive (resp. codissipative) partout définie, donc fermée et donc continue, c'est-à-dire lipschitzienne : donc $R(I+G(x,.)) = X$. Par application du théorème $\partial S = \emptyset$ car pour $y = x+Ax \in S$, $a(y) \supset R(I+G(x,.))$, et donc $S = X$.

<u>Démonstration du théorème 6</u> : Soient $x_o \in \partial S$ et $\varepsilon > 0$. Prenons $x_1 \notin S$ tel que $|x_1 - x_o| \leq \varepsilon$ et posons $d = \mathrm{dist}(x_1, S)$; soit $d_2 > d$ et $s_o \in S$ tels que $|x_1 - s_o| \leq d_2$; soit enfin $d_1 \in]0, d[$ et posons B = boule fermée de centre x_1 et de rayon d_1 ,

$C = \{\lambda(z-s_o) \; ; \; \lambda \geq 0 \; , \; z \in B\}$, $C_o = \{tz+(1-t)s_o \; ; \; t \in [0,1] \; , \; z \in B\}$,

$S_o = S \cap C_o$.

Remarquons tout de suite que S_o est borné et qu'il existe $w \in X'$ tel que pour tout $u \in C$, $|u| \leq (u,w)$.

Montrons d'abord qu'il existe $x \in S_o$ tel que $x+C \cap S_o = \{x\}$. Cela revient à dire qu'il existe un élément maximal dans S_o pour l'ordre défini par le cône saillant C : $x \leq y$ si et seulement si $y-x \in C$. Montrons que cet ordre est inductif. Remarquons d'abord que si $y_o, \ldots, y_n \in S_o$ avec $y_o \leq y_1 \leq \ldots \leq y_n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - y_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}, w) = (y_k - y_o, w) \leq M \text{ constante.}$$

Considérons alors une famille totalement ordonnée $(y_i)_{i \in I}$ de S_o ; construisons une suite (i_n) par récurrence avec i_o quelconque et i_{n+1} telle que $y_{i_n} \leq y_{i_{n+1}}$ et $\sup\{|y_i - y_{i_n}| \; ; \; y_i \geq y_{i_n}\} \leq |y_{i_n} - y_{i_{n+1}}| + \frac{1}{n}$; puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} |y_{i_n} - y_{i_{n-1}}| \leq M$, la suite y_{i_n} converge dans S_o ; sa limite y majore la famille $(y_i)_{i \in I}$.

Soit $x = tz_o + (1-t)s_o \in S_o$ tel que $x+C \cap S_o = \{x\}$. Considérons $s = x+\lambda(z-s_o) \in x+C \cap S$ avec $s \neq x$; on a

$$s = tz_o + [(1-t)-\lambda]s_o + \lambda z = \{1-(t+\lambda)\}s_o + (t+\lambda)\left\{\frac{tz_o+\lambda z}{t+\lambda}\right\}.$$ Puisque

$\frac{tz_o+\lambda z}{t+\lambda} \in B$ et $s \notin C_o$, on a nécessairement $t+\lambda > 1$. Or

$d \leqslant |x_1-x| \leqslant t|x_1-z_o| + (1-t)|x_1-s_o|$, soit $d \leqslant td_1+(1-t)d_2$ et donc

$t \leqslant \frac{d_2-d}{d_2-d_1}$; d'où $|s-x| = \lambda|z-s_o| > \frac{d-d_1}{d_2-d_1} \times d-d_1 > 0$. Donc en résumé

$x+C \cap S \cap B_o = \{x\}$ où B_o est la boule de centre x et de rayon

$r = \frac{(d-d_1)^2}{d_1-d_2}$. En particulier $a(x) \cap \mathrm{Int}\, C = \emptyset$. Enfin $d \leqslant \varepsilon$;

choisissant $d_2 \leqslant d+\varepsilon$, on a $|x-x_o| \leqslant 3\varepsilon$. D'où le théorème.

<u>Corollaire</u>. (<u>Théorème de Bishop-Phelps</u>). <u>Soit</u> S <u>un convexe fermé de</u> X. <u>L'ensemble des points d'appui</u> (<u>i.e. des points</u> x <u>de</u> S <u>tels qu'il existe un hyperplan fermé séparant</u> x <u>et</u> S) <u>est dense dans</u> ∂S.

En effet d'après Hahn-Banach, dire que x est point d'appui de S est équivalent à dire que $a(x) \neq X$.

<u>Remarques</u>. 1) Le corollaire n'offre d'intérêt que si $\mathrm{Int}\, S = \emptyset$, puisque dans un espace vectoriel topologique quelconque tout point de la frontière d'un corps convexe est point d'appui : c'est le théorème de Hahn-Banach. Ceci n'est plus vrai si $\mathrm{Int}\, S = \emptyset$: il suffit dans $X = \ell^2(N)$ de considérer $S = \{(a_n) ; |a_n| \leqslant \frac{1}{n} \ \forall n\}$; la suite nulle n'est pas point d'appui de S.

2) On a en fait dans la démonstration du théorème trouvé un résultat plus précis que celui annoncé ; on peut l'énoncer ainsi :

> étant donné $\eta>0$, $\xi \in X$ avec $|\xi|=1$, posons
> $C(\eta,\xi) = \{\lambda z ; \lambda \geqslant 0, |z-\xi| \leqslant 1-\eta\}$; alors pour tout $\eta>0$,
> $\{x \in S ; \exists \xi \in X, |\xi|=1, a(x) \cap C(\eta,\xi) = \{0\}\}$ est dense dans ∂S.

On peut se demander si la densité reste vérifiée pour des cônes complètement ouverts, c'est-à-dire des demi-espaces : la réponse est négative en général comme nous le verrons plus loin ; elle est cependant positive en dimension finie ou plus généralement :

<u>Proposition 9</u>. <u>Supposons</u> X <u>réflexif et</u> S <u>faiblement fermé dans</u> X. <u>Alors</u> $\{x \in S \, ; \, \exists w \in X' \, , \, |w|=1 \, , \, a(x) \subset \{z \, ; (z,w) \leq 0\}\}$ <u>est dense dans</u> ∂S.

Nous utiliserons le fait qu'il existe sur X une norme équivalente $\|\cdot\|$ telle que l'application de dualité correspondante soit univoque (il suffit pour cela qu'il existe dans X une partie faiblement compacte totale [1]). Soient alors $x_0 \in \partial S$ et $\varepsilon > 0$; prenons $x_1 \notin S$ tel que $\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; X étant réflexif et S faiblement fermé, il existe $x \in S$ tel que $\|x - x_1\| = \inf\{\|s - x_1\| , s \in S\}$; prenons alors $w \in X'$ tel que $(x - x_1, w) = \|x - x_1\|$, $\|w\| = 1$ et montrons que $a(x) \subset \{(x,w) \leq 0\}$.

Soit en effet $z \in a(x)$, $z \neq 0$; par définition il existe $s_n \in S$, $\lambda_n \geq 0$ tels que $s_n \longrightarrow x$ et $\lambda_n(s_n - x) \longrightarrow z$; nécessairement $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, posons $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$. Appliquant la Proposition 1.7 de l'exposé n°1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|x - x_1 - \mu_n z\| - \|x - x_1\|}{\mu_n} = (-z,w)$. D'autre part

$$\frac{\|x-x_1-\mu_n z\| - \|x-x_1\|}{\mu_n} = \frac{\|x-x_1-\mu_n z\| - \|s_n - x_1\|}{\mu_n} + \frac{\|s_n - x_1\| - \|x - x_1\|}{\mu_n} \geq -\|\lambda_n(s_n - x) - z\| .$$

Donc $(-z,w) \geq 0$.

Enfin pour donner un contre-exemple, considérons dans un espace de Banach X, la partie $S = \{x \, ; \, |x| \geq 1\}$. La frontière $\partial S = \{x \, ; \, |x| = 1\}$; étant donné $x \in \partial S$ il est facile de vérifier en utilisant la Proposition 1.7 de l'exposé n°1, qu'il existe $w \in X'$ tel que $|w| = 1$ et $a(x) \subset \{z \, ; \, (z,w) \leq 0\}$, si et seulement si $W(x)$ est réduit à un élément, ou ce qui est équivalent si et seulement si la norme est dérivable au sens de Gâteaux en x. Le contre-exemple nous vient alors de $X = L^\infty([0,1])$, dont la norme n'est dérivable en aucun point (cf. [13]). Pour plus de renseignements sur la dérivabilité de la norme on peut se référer à [1].

-:-:-:-

Appendice

1°) Propriétés de l'application $[x,y] \in X \times X \longrightarrow (x,y)_s \in \mathbb{R}$.

a) $\forall y \in X$, l'application $x \longrightarrow (x,y)_s$ est sous-linéaire continue.
En effet, c'est l'enveloppe supérieure de fonctions linéaires, la continuité provenant de $|(x,y)_s| \leqslant |x|\,|y|$.

b) $\forall x \in X$, l'application $y \longrightarrow (x,y)_s$ est positivement homogène s.c.s.
Puisque $W(ty) = tW(y)$, $(x,ty)_s = t(x,y)_s$ pour tout $t \geqslant 0$. Soit alors $y_n \longrightarrow y$ avec $(x,y_n)_s \geqslant \alpha$ pour tout n ; il existe $w_n \in W(y_n)$ tel que $(x,w_n) = (x,y_n)_s$; soit (n_k) suite extraite telle que $w_{n_k} \longrightarrow w$; on a $w \in W(y)$ et donc $(x,y)_s \geqslant (x,w) = \lim(x,w_{n_k}) \geqslant \alpha$.

c) $\forall x,y \in X$, $(x,y)_s = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{|y+tx|^2 - |y|^2}{2t}$.

En effet d'après la Proposition 1.7 de l'exposé n°1 ,
$\lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{|y+tx|^2 - |y|^2}{2t} \leqslant (x,y)_s$. Mais d'autre part il existe $w \in W(y)$ tel que $(x,y)_s = (x,w)$; W étant le sous-gradient de $\frac{1}{2}|\ |^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|y+tx|^2}{2} - \dfrac{|y|^2}{2} \geqslant (tx,w)$; donc
$\lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{|y+tx|^2 \ |y|^2}{2t} \geqslant (x,w)$.

d) Soit ϕ une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $[x,y] \in X \times X$, il existe $w \in W(y)$ tel que $\phi(x,y) = (x,w)$.
Pour que $\phi(x,y) = (x,y)_s$ il faut et il suffit que
$\underline{\lim\limits_{t \searrow 0}}\ \phi(x,y+tx) \leqslant \phi(x,y)$.

La condition est nécessaire car $\underline{\lim\limits_{t \searrow 0}}\ \phi(x,y+tx) \leqslant \underline{\lim\limits_{t \searrow 0}}\ (x,y+tx)_s \leqslant (x,y)_s$.

La condition est suffisante : en effet $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y+tx|^2 = \phi(x,y+tx)$ p.p. t d'après la Proposition 1.5 de l'exposé n°1 ; donc

$\frac{|y+tx|^2-|y|^2}{2t} = \frac{1}{t}\int_0^t \phi(x,y+sx)\,ds$ pour tout $t>0$ et à la limite lorsque $t\searrow 0$, $(x,y)_s \leq \underline{\lim}_{t\searrow 0}\, \phi(x,y+tx) \leq \phi(x,y)$.

2°) Cas d'un espace de Banach complexe.

Etant donné un espace de Banach complexe Y de dual Y' , notons F l'application de dualité : $F(x) = \{w\in Y' ; (x,w) = |x|^2 , |w|=|x|\}$. Désignons par X la structure de Banach réelle sous-jacente à Y ; X' et W désignent respectivement le dual et l'application de dualité de X .

L'application $R : w\in Y' \longrightarrow R(w)\in X'$ définie par $(x,R(w)) = \mathcal{R}e(x,w)$, est une isométrie $\mathbb{R}$-linéaire de Y' sur X' . De plus $W = R\circ F$.

Toutes les propriétés étudiées qui ne font appel qu'à la structure réelle de Y s'écriront en utilisant F et en ajoutant $\mathcal{R}e$. Par exemple :

a) étant donné $x,y\in Y$, il y a équivalence entre :

(i) $\forall\ \lambda>0$, $|x+\lambda y| \geq |x|$

(ii) $\exists w\in F(x)$, $\mathcal{R}e(y,w)\geq 0$.

b) étant donné $u(t)$ à valeurs dans Y faiblement dérivable en t_o et telle que $|u(t)|$ soit dérivable en t_o , on a pour tout $w\in F(u(t_o))$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{t=t_o} = \mathcal{R}e(u'(t_o),w) .$$

Cette remarque ne veut pas dire que toutes les propriétés vraies dans le "cas réel" sont vraies dans le "cas complexe", en particulier lorsqu'il s'agit d'espaces de fonctions. Par exemple l'espace $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$, ou K est un compact, n'est pas un espace $\mathcal{C}(K';\mathbb{R})$; où l'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la norme ℓ_p n'est l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la norme ℓ_p que si $p=2$.

-:-:-:-

Bibliographie.

[1] E. ASPLUND : Fréchet Differentiability of convex functions. Acta Math. 121 (68) pp. 31-47.

[2] H. BREZIS : Cours de 3ème cycle 1970 (à paraître).

[3] H. BREZIS et A. PAZY : Accretive sets and differential equations in Banach spaces (à paraître).

[4] F.E. BROWDER : Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces. Proc. Symp. Non linear Functional Anal., Amer. Math. Soc., 1970, vol.2.

[5] F.E. BROWDER : On the Fredholm alternative for non linear operators. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (70) pp. 993-998.

[6] M. CRANDALL et T. LIGGETT : A theorem and a conterexemple in the theory of semi-groups of non linear transformations (à paraître).

[7] H. DEBRUNNER et P. FLOR : Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen. Arch. Math. 15 (64) pp. 445-447.

[8] S. EILENBERG et D. MONTGOMERY : Fixed point theorems for multivalued transformations. Amer. Journal Math. 68 (46) pp. 214-222.

[9] B. GRÜNBAUM : On a theorem of Kirszbraum. Bull. Res. Counc. Israël. 17 (58) pp. 129-132.

[10] F. HIRSCH : Thèse (à paraître).

[11] S. KARLIN : Mathematical methods and theory of games, programming and economies. Vol.1. Reading, Addison-Wesley publ. co. (1959).

[12] R.H. MARTIN : A global existence theorem for autononous differential equations in Banach space (à paraître).

[13] S. MAZUR : Über Konvexe Mengen in linearen normierten Raümen. Studia Math. 4 (33) pp. 70-84.

[14] G. MINTY : Monotone nonlinear operators in Hilbert spaces. Duke Math. J. 29 (62) pp. 341-346.

[15] I.J. SCHOENBERG : On a theorem of Kirzbraum and Valentine. Amer. Math. Monthey. 60 (53) pp. 620-622.

[16] S. SCHÖENBECK : On the extension of lipschitzian maps. Arch. för Mat. 7 (67) pp. 201-209.

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
Orsay 1970-71

Exposé n°4

SEMI-GROUPES NON LINEAIRES DANS LES ESPACES DE BANACH ; PSEUDO-GENERATEURS

par A. DAMLAMIAN

L'essentiel de cet exposé provient de l'article de Crandall et Ligget [1] complétant des travaux de Brezis et Pazy ([2] en particulier. Il s'agit d'étendre, par des méthodes nouvelles, certains résultats établis dans le cadre des espaces de Hilbert (ou de Banach réflexifs) aux espaces de Banach généraux et d'obtenir des résultats dans le cadre non linéaire , aussi proches que possible de la théorie linéaire (Hille-Yosida).

Dans tout l'exposé, X sera un espace de Banach, A un opérateur sur X tel qu'il existe un réel ω pour lequel $A' = A+\omega I$ est accrétif au sens de Kato [cf. exposé n°1, §.2]. Nous noterons $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ de domaine D_λ et $J'_\lambda = (I+\lambda A')^{-1}$. J'_λ est une contraction pour $\lambda>0$.

§.1 - La formule de Trotter (exponentielle)

Le résultat essentiel de cette section est le

Théorème 1. Soient X et A comme précédemment. On suppose de plus qu'il existe un $\lambda_0>0$ tel que $\overline{D(A)} \subset D_\lambda$ dès que $\lambda<\lambda_0$. Soit enfin $t>0$ donné.

<u>Alors pour toutes suites</u> $0<\varepsilon(n)\leqslant\lambda_0$ <u>avec</u> $\varepsilon(n)\searrow 0$, $k(n)$ $(k(n)\in\mathbb{N})$ <u>avec</u> $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n)k(n) = t$, <u>et pour tout</u> $x\in\overline{D(A)}$, <u>la limite</u> $S(t)x = \lim_{n\to+\infty} J_{\varepsilon(n)}^{k(n)}x$ <u>existe, ne dépend que de</u> x <u>et</u> t. <u>De plus, la famille d'opérateurs</u> $S(t)$ <u>est un semi-groupe non linéaire fortement continu sur</u> $\overline{D(A)}$, <u>et</u> $S(t)$ <u>est lipschitzienne de rapport</u> $e^{\omega t}$.

La démonstration se fait par une succession de lemmes.

1.1. Propriétés de la famille résolvante associée à A.

<u>Proposition 1. Soit</u> A <u>satisfaisant aux hypothèses du Théorème I</u>, λ <u>positif</u>, $\lambda\omega$ <u>inférieur à</u> 1.

On a alors :

i) J_λ est univoque de constante de Lipschitz $1/_{1-\lambda\omega}$ sur D_λ.

ii) Equation résolvante : pour tout μ réel, on a

$$x\in D_\lambda \implies \frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\in D_\mu \quad \text{et}$$

$$J_\lambda x\in J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\right).$$

iii) $|J_\lambda x-x|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|Ax|$ pour tout x dans $D_\lambda\cap D(A)$.

iv) Si n est entier, x dans $D(J_\lambda^n)$, et $\lambda|\omega|$ inférieur à 1,

$$|J_\lambda^n x-x|\leqslant n(1-\lambda|\omega|)^{1-n}\,|J_\lambda x-x|.$$

Si de plus $x\in D(A)$

$$|J_\lambda^n x-x|\leqslant\frac{n\lambda}{(1-\lambda|\omega|)^n}|Ax|.$$

<u>Note</u> : $|Ax| = \inf|y|$ pour $y\in Ax$. Si $Ax=\emptyset$, $|Ax| = +\infty$.

Démonstration :

i) $A' = A+\omega I$ est accrétif donc J'_t est une contraction pour $t>0$. Or :

$$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} = (I+\lambda(A'-\omega I))^{-1} = \left[(1-\omega\lambda)(I+\frac{\lambda A'}{1-\omega\lambda})\right]^{-1} = J'_{\lambda/_{1-\omega\lambda}} \circ \frac{I}{1-\omega\lambda}$$

la condition $\lambda/_{1-\omega\lambda} \geqslant 0$ est satisfaite pour $\lambda \geqslant 0$, $\omega\lambda<1$, et J_λ est donc lipschitzienne de rapport $1/_{1-\omega\lambda}$.

ii) $x \in D_\lambda \iff \exists [x_1, y_1] \in A$ avec $x_1+\lambda y_1 = x$, $J_\lambda x = x_1$. D'où

$$\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} x_1 = x_1+\mu y_1 \text{, d'où ii).}$$

iii) $x \in D(A) \cap D_\lambda \implies \forall y \in Ax$, $x = J_\lambda(x+\lambda y)$, donc

$$|J_\lambda x-x| = |J_\lambda x-J_\lambda(x+\lambda y)| \leqslant \frac{1}{1-\omega\lambda} |\lambda y| \text{, d'où iii)}$$

iv) $$|J^n_\lambda x-x| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |J^{i+1}_\lambda x - J^i_\lambda x| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1-\lambda\omega}\right)^i |J_\lambda x-x| .$$

Puisque $|\lambda\omega|<1$ on en déduit :

$$|J^n_\lambda x-x| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1-|\lambda\omega|}\right)^i |J_\lambda x-x| \leqslant \frac{n}{(1-|\lambda\omega|)^{n-1}} |J_\lambda x-x| .$$

D'où iv) en utilisant iii) si $x \in D(A)$ de surcroît.

1.2. Deux lemmes techniques.

Nous énonçons deux lemmes que nous démontrerons ultérieurement.

Lemme 2. Soient λ et μ positifs, avec $\omega\lambda$ et $\omega\mu$ inférieurs à 1, $\mu < \lambda$, m et n deux entiers naturels et

$$x \in D(J^m_\lambda) \cap D(J^n_\mu) .$$

On pose $a_{m,n} = |J^m_\lambda x-J^n_\mu x|$ $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$, $\beta = \frac{\lambda-\mu}{\lambda}$ et $\gamma = \frac{1}{1-\omega\mu}$.

On a la majoration suivante :

$$a_{m,n} \leqslant \gamma^n \sum_{j=o}^{m} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} a_{m-j,o} + \alpha^m \sum_{j=m}^{n} \gamma^j \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} a_{o,n-j}$$

où il est convenu que $a_{o,o} = 0$ et $\binom{j-1}{m-1} = 0$ si $j<m$.

(C'est-à-dire que pour $n \leqslant m$ seule la première somme est conservée).

Lemme 3. Soient α et β deux réels positifs avec $\alpha+\beta = 1$.

On a les résultats suivants :

i) $E = \sum_{j=o}^{m} \binom{n}{o} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leqslant \sqrt{(n\alpha-m)^2 + n\alpha\beta}$

ii) $F = \sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j) \leqslant \sqrt{\frac{m\beta}{\alpha^2} + (\frac{m}{\alpha} - n)^2}$

1.3. Démonstration du théorème 1.

On suppose m et n entiers positifs, $0<\mu\leqslant\lambda<\inf(\lambda_o,1/2)$ et $\lambda|\omega|<1$.

Grâce à l'hypothèse $D_\lambda \supset \overline{D(A)}$ il est clair que
$x \in D(A) \implies J_\lambda x \in D(A) \subset D_\lambda$. Donc $J_\lambda^m x$ est bien défini ainsi que $J_\mu^n x$.

Soit donc $x \in D(A)$, nous posons
$a_{m,n} = |J_\lambda^m x - J_\mu^n x|$. Avec les notations du lemme 2, on a

$$(3.1)\quad a_{m,n} \leqslant \gamma^n \sum_{j=o}^{m} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} a_{m-j,o} + \alpha^m \sum_{j=m}^{n} \gamma^j \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} a_{o,n-j}.$$

Par la proposition 1, (iv),

$$a_{m-j,o} = |J_\lambda^{m-j} x - x| \leqslant \frac{(m-j)\lambda}{(1-\lambda|\omega|)^{m-j}} |Ax|$$

et

$$a_{o,n-j} \leqslant \frac{(n-j)\mu}{(1-\mu|\omega|)^{n-j}} |Ax|.$$

Posons $\Gamma = \frac{1}{1-\mu|\omega|} > 1$, $\Gamma' = \frac{1}{1-\lambda|\omega|} > 1$, $\gamma = \frac{1}{1-\mu\omega} \leqslant \Gamma \geqslant \Gamma'$.

Donc 3.1 s'écrit :

$$a_{m,n} \leqslant \Gamma^n \sum_{j=o}^{m} \alpha^j \ \beta^{n-j} \ \binom{n}{j}(m-j)(\Gamma')^{m-j} \ \lambda|Ax|$$
$$+ \alpha^m \sum_{j=m}^{n} \Gamma^j \ \beta^{j-m} \ \binom{j-1}{m-1}(n-j)\Gamma^{n-j} \ \mu|Ax| \ .$$

$$a_{m,n} \leqslant |Ax|\{\Gamma'^m \ \Gamma^n \ \lambda \ E + \Gamma^n \ \mu \ F\} \quad \text{où}$$

E et F sont les expressions du lemme 3.

Ce résultat est exact pour $m\leqslant n$ et a fortiori correct pour $n\leqslant m$.

Appliquant le lemme 3 on obtient finalement, en remplaçant α , β par leurs expressions en fonction de λ et μ :

$$a_{m,n} \leqslant |Ax|\{\Gamma'^m \ \Gamma^n [(n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}} + \Gamma^n [m\lambda(\lambda-\mu)+(m\lambda-n\mu)^2]^{\frac{1}{2}}\} \ .$$

Enfin puisque $(1-\rho) \geqslant e^{-2\rho}$ pour $0\leqslant\rho<\frac{1}{2}$, donc $(1-\rho)^{-n} \leqslant e^{2n\rho}$ pour $0\leqslant\rho<\frac{1}{2}$ et $n\geqslant 0$, et $\Gamma^n \leqslant e^{2n\mu|\omega|}$ $\Gamma'^m \leqslant e^{2m\lambda|\omega|}$ et donc :

$$a_{m,n} \leqslant |Ax|\{[(n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}} \ e^{2|\omega|(n\mu+m\lambda)}$$
$$+ [m\lambda(\lambda-\mu)+(m\lambda-n\mu)^2]^{\frac{1}{2}} \ e^{2|\omega|m\lambda}\} \ . \tag{3.2}$$

Nous prenons maintenant $\mu = \varepsilon_1(p)$, $n = k_1(p)$, $\lambda = \varepsilon_2(q)$, $m = k_2(q)$ avec $t = \lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon_1(p)k_1(p) = \lim\limits_{q\to+\infty} \varepsilon_2(q)k_2(q)$, et notons $J_{\varepsilon_1(p)}^{k_1(p)} = U_p$, $J_{\varepsilon_2(q)}^{k_2(q)} = V_q$.

(3.2) s'écrit alors :

$$|U_p x-V_q x| \leqslant |Ax|\{e^{2|\omega|(n\mu+m\lambda)}[(n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ e^{2|\omega|m\lambda}[(n\mu-m\lambda)^2+m\lambda(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}\} \ . \tag{3.3}$$

Tirons les conséquences de (3.3) :

Lorsque p et $q \longrightarrow +\infty$, on voit que $|U_p x - V_q x| \longrightarrow 0$, par suite $U_p x$ est une suite de Cauchy ainsi que $V_q x$, et leurs limites sont égales, ne dépendant que de t.

Notons $S(t)x$ cette limite. On a donc en particulier

$$|U_p x - S(t)x| \leqslant |Ax|\{e^{2|\omega|(n\mu+t)}[(n\mu-t)^2 - n\mu^2]^{\frac{1}{2}} + e^{2|\omega|t}[(n\mu-t)^2 - t\mu]^{\frac{1}{2}}\} .$$

Ce résultat nous sera utile sous la forme suivante dans le cas $\omega=0$

$$|J_\lambda^n x - S(n\lambda)x| \leqslant |Ax|\{2\lambda\sqrt{n}\} . \tag{3.4}$$

Sur $D(A)$, U_p ayant pour constante de Lipschitz $L_p = (1-\varepsilon_1(p)\omega)^{-h_1(p)}$, $S(t)$ a pour constante de Lipschitz $e^{\omega t}$.

La famille U_p étant uniformément Lipschitzienne sur $D(A)$ on déduit qu'elle converge en fait sur $\overline{D(A)}$ (où l'on note encore sa limite par $S(t)$). Donc $S(t)$ est lipschitzienne de rapport $e^{\omega t}$ sur $\overline{D(A)}$.

Il est clair enfin que $S(t)(D(A)) \subset \overline{D(A)}$, donc $S(t)$ laisse $\overline{D(A)}$ invariant.

. Montrons que $t \longmapsto S(t)x$ est continue en t. Lorsque $x \in D(A)$ (3.3) donne (avec par exemple $\lambda = t/_m$, $\mu = t'/_n$ et en faisant m et $n \longrightarrow +\infty$) :

$$|S(t)x - S(t')x| \leqslant |A\check{x}|[e^{2|\omega|(t+t')} + e^{2|\omega|t'}] .$$

Par suite $S(t)x$ est lipschitzienne en t sur tout borné de $\mathbb{R}^+$, lorsque $x \in D(A)$. Pour $x \in \overline{D(A)}$ on déduit que $S(t)x$ est continue en t puisque la famille $S(t)$ est équicontinue sur $\overline{D(A)}$.

. Démontrons enfin que $S(t)$ est un semi-groupe.

$S(0) = I$ par Proposition 1,(iv) .

Pour $x \in D(A)$, $s \in \mathbb{N}$, on a $(S(t))^s x = \lim\limits_{n \to +\infty} J^{ns}_{t/n} x$ donc

$[S(t)]^s x = \lim (J^{ns}_{ts/ns})x = S(ts)x$.

Par suite $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $S(\frac{p}{q} t) = [S(t)]^{\frac{p}{q}}$ et donc

$S(\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n}) = S(1)^{\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n}} = S(1)^{\frac{k}{\ell}} \cdot S(1)^{\frac{m}{n}} = S(\frac{k}{\ell}) \cdot S(\frac{m}{n})$ (h, ℓ, m, n, entiers positifs).

Pour étendre ce résultat à $S(t+t') = S(t)\,S(t')$, $t, t' \in \mathbb{R}^+$, on utilise la continuité en t de $S(t)x$ sur les bornées de $\mathbb{R}^+$, et ceci achève la démonstration du théorème 1.

1.4. Démonstration des lemmes 2 et 3.

Lemme 2.

Hypothèse : $\lambda \geqslant \mu > 0$, $\omega\lambda < 1$, $\omega\mu < 1$, m et $n \in \mathbb{N}$, $x \in D(J^m_\lambda) \cap D(J^n_\mu)$. On pose

$$a_{m,n} = |J^m_\lambda x - J^n_\mu x| \quad , \quad \alpha = \frac{\mu}{\lambda} \quad , \quad \beta = 1-\alpha \quad , \quad \gamma = \frac{1}{1-\omega\mu} \ .$$

Conclusion :

$$(4.1) \qquad m \geqslant n \qquad a_{m,n} \leqslant \gamma^n \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} a_{m-j,0}$$

$$(4.2) \qquad m < n \qquad a_{m,n} \leqslant \gamma^n \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} a_{m-j,0} + \alpha^{=} \sum_{j=m}^{n} \gamma^j \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} a_{0,nj} \ .$$

Démonstration : Par la proposition 1 (ii) et (i) , on obtient

$$a_{m,n} = |J_\mu^n x - J_\lambda^m x| = |J_\mu^n x - J_\mu(\frac{\mu}{\lambda} J_\lambda^{m-1} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda^m x)|$$

$$\leq \gamma |J_\mu^{n-1} x - (\frac{\mu}{\lambda} J_\lambda^{m-1} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda^m x)|$$

$$\leq \gamma [\frac{\mu}{\lambda} |J_\mu^{n-1} x - J_\lambda^{m-1} x| + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} |J_\mu^{n-1} x - J_\lambda^m x|]$$

d'où la relation de récurrence

$$(4.3) \qquad a_{m,n} \leq \gamma(\alpha\, a_{m-1,n-1} + \beta\, a_{m,n-1}) .$$

Les formules (4.1) et (4.2) sont la solution de la récurrence (4.3). On démontre (4.1) et (4.2) par récurrence sur n .

Le cas $n=0$ est trivial. Pour $n\neq 0$, on distingue $m\geq n$ et $m<n$.

Pour $m\geq n$, on utilise (4.1) à l'ordre $n-1$ ainsi que (4.3) :

$$a_{m,n} \leq \gamma^n \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{j+1} \beta^{n-j-1} \binom{n-1}{j} a_{m-j-1,0} + \gamma^n \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n-1}{j} a_{m-j,0}$$

Changeant j en $j-1$ dans la première somme, et réduisant, on obtient

$$a_{m,n} \leq \gamma^n \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \beta^{n-j} a_{m-j,0} \left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}\right) .$$

Pour $m<n$ alors $m\leq n-1$ et on utilise (4.2) à l'ordre $n-1$ ainsi que (4.3) :

$$a_{m,n} \leq \gamma^n [\sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{j+1} \beta^{n-j-1} \binom{n-1}{j} a_{n-j-1,0} + \sum_{j=0}^{m} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n-1}{j} a_{m-j,0}]$$

$$+ \alpha^m [\sum_{j=m-1}^{n-1} \gamma^{j+1} \beta^{j-m+1} \binom{j-1}{m-2} a_{0,n-j-1}$$

$$+ \sum_{j=m}^{n-1} \gamma^{j+1} \beta^{j-m+1} \binom{j-1}{m-1} a_{0,n-j-1}]$$

Remplacer j par $j-1$ dans les première, troisième et quatrième sommes, et réduire, donne le résultat.

<u>Lemme 3</u>. $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta = 1$ impliquent

(i) $$E = \sum_{j=o}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leqslant \sqrt{(n\alpha-m)^2+n\alpha\beta}$$

(ii) $$F = \sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j) \leqslant \sqrt{\frac{m\beta}{\alpha^2} + \left(\frac{m}{\alpha}-n\right)^2}$$

La démonstration utilise l'inégalité de Schwarz :

Pour i) on écrit :

$$E \leqslant \sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} |m-j| \leqslant \left(\sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

le premier facteur est $(\alpha+\beta)^n = 1$ et le deuxième se calcule en utilisant

$$(m-j)^2 = j(j-1) + (1-2m)j+m^2$$ en trois termes par

dérivation de $(\alpha+\beta)^n$ par rapport à α .

$$E^2 \leqslant \alpha^2(\alpha+\beta)^{n-2} n(n-1) + \alpha(\alpha+\beta)^{n-1} n(1-2m) + m^2(\alpha+\beta)^n$$

$$\leqslant (m-n\alpha)^2 + n(\alpha-\alpha^2) = (m-n\alpha)^2 + n\alpha\beta \text{ .}$$

Pour ii) on écrit :

$$F^2 \leqslant \left(\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j)\right)^2$$

$$\leqslant \left(\alpha^m \sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1}(\beta^{j-m}\right) \left(\alpha^m \sum_{m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \beta^{j-m} (n-j)^2\right)$$

On utilise $\displaystyle\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \beta^{j-m} = \frac{1}{(1-\beta)^m}$, $|\beta|<1$

Le premier facteur donne $\frac{\alpha^m}{(1-\beta)^m} = 1$, le second se calcule en somme de trois termes selon $(j-n)^2 = (j-m)(j-m-1) + (j-m)(2m+1-2n) + m^2+n^2-2mn$, ce qui donne, en dérivant $\frac{1}{(1-\beta)^m}$

$$F^2 \leqslant m(m+1)\,\frac{\beta^2}{\alpha^2} + (2m+1-2n)\,m\,\frac{\beta}{\alpha} + m^2+n^2-2mn$$

$$\leqslant \left(m\,\frac{\beta}{\alpha} + m-n\right)^2 + \frac{m^\beta}{\alpha^2} = \left(\frac{m}{\alpha} - n\right)^2 + \frac{m^\beta}{\alpha^2} \,.$$

L'opérateur A engendrant $S(t)$ au travers de la formule exponentielle est appelé pseudo-générateur de S ; nous verrons au paragraphe 3 que ce pseudogénérateur n'est pas unique. De plus le théorème 1 ne donne par lui-même aucune indication de différentiabilité pour la fonction $t \longmapsto S(t)x$. Le théorème 2 donne des conditions pour que le pseudogénérateur soit générateur au sens de l'équation d'évolution.

-:-:-:-

§.2 - Equation d'évolution et pseudo-générateur

2.0. Rappels. On dit que $u : [0,T[\longrightarrow X$ est solution forte de l'équation $E_x : u(0)=x \quad \frac{du}{dt} + Au \ni 0$ si u est localement lipschitzienne, fortement dérivable, presque partout sur $[0,T[$ et, si presque partout sur $[0,T[$ on a $u(t) \in D(A)$ et $-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$.
Si X est réflexif, $u(t) \in \mathrm{Lips}_{loc}([0,T[,X)$ implique u fortement différentiable presque partout (cf. Komura [3] appendice).

Nous noterons condition 1 (condition 2 de Brezis et Pazy cf. [2]) la condition suivante sur A : $D_\lambda \supset \overline{\mathrm{conv}\ D(A)}$ pour λ suffisamment petit positif.

Enfin nous utiliserons les notations suivantes :

$$|Ax| = \{\inf |y| \ , \ y \in Ax\} \qquad |Ax| = +\infty \text{ si } Ax = \emptyset \ ,$$

et $\quad A^o x = \{y \in Ax \text{ tels que } |y| = |Ax|\} \quad A^o x = \emptyset$ si $Ax = \emptyset$

$(u,v)_i = \inf\limits_{f \in W(v)} (u,f) \qquad (u,v)_s = \sup\limits_{f \in W(v)} (u,f)$ ici, W est l'application dualité.

Remarques. 1°) A accrétif $\Longleftrightarrow \forall\ x_1,\ x_2 \in D(A)\ ,\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$
$(y_1-y_2, x_1-x_2)_s \geqslant 0$.

2°) $(u+v,w)_s \leqslant (u,w)_s + (v,w)_s$

$$(-u,w)_s = -(u,w)_i$$

Par suite on déduit $(-y,u-v)_i \leqslant -(y-z,u-v)_s + (z,u-v)_s$.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 2. Soit X et A comme précédemment ($A+\omega I$ accrétif pour un réel ω). Supposons de plus A fermé dans $X \times X$ et satisfaisant à la condition 1. Alors si $u : [0,T[\longrightarrow X$ satisfait à $x = u(0) \in D(A)$ les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) u est solution forte de l'équation E_x.

ii) $u(t) = S(t)x \quad \forall t \in [0,T[$ et u est fortement différentiable presque partout sur $[0,T[$.

Dans toute la suite nous supposerons $\omega=0$ ce qui simplifie les démonstrations.

On doit étudier au préalable l'approximation Yosida et la formule exponentielle.

2.1. Propriété des solutions fortes de E.

Proposition 1. Si u (resp. v) est solution forte de E_x (resp. E_y)

on a 1) $|u(t)-v(t)| \leq |x-y|$ d'où unicité de la solution

2) $-\frac{du}{dt}(t) \in A^{o}u(t)$ presque partout sur $[0,T[$

3) Si $x \in D(A)$ $|\frac{du}{dt}(t)| \leq |Ax|$ presque partout sur $[0,T[$.

Démonstration :

1) cf. Exposé n°1, proposition 2.2.

2) Soit Ω_1 l'ensemble des points de $[0,T[$ en lesquels $u(t) \in D(A)$, et Ω l'ensemble des points de Ω_1 en lesquels $\frac{du}{dt}$ existe et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0$.

On pose $y(t) = \frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ pour $t \in \Omega$.

On se fixe s dans Ω_1 et $y \in Au(s)$. On a alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-u(s)|^2 = (-y(t),u(t)-u(s))_i \leq -(y(t)-y,u(t)-u(s))_s + (y,u(t),u(s))_s$$

$$\leq |u(t)-u(s)||y| \text{ par l'accrétivité de } A.$$

En conclusion $\frac{d}{dt}|u(t)-u(s)| \leqslant |Au(s)|$ pour $t \in \Omega$.

On en déduit $t \geqslant s$

$$|u(t)-u(s)| \leqslant (t-s)|Au(s)|$$

Si de plus $t \searrow s$ en restant dans Ω , et si $s \in \Omega$ on déduit

$$\left|\frac{du}{dt}(s)\right| \leqslant |Au(s)| \quad \text{et puisque} \quad -\frac{du}{dt}(s) \in Au(s)$$

$$-\frac{du}{dt}(s) \in A^o u(s) .$$

3) Si $w(t) = u(t+h)$, w est solution de l'équation $E_{u(h)}$ donc

$$|w(t)-u(t)| \leqslant |\omega(s)-u(s)| \quad \text{d'où}$$

$$|u(t+h)-u(t)| \leqslant |u(h)-u(0)| \quad \text{si} \quad x \in D(A) \text{ , puisque } \quad s = 0 \in \Omega_1$$

et donc $\quad |u(h)-u(0)| \leqslant h|Au(0)| = h|Ax|$ d'où

$$|u(t+h)-u(t)| \leqslant h|Ax| \text{ . Si } t \in \Omega \text{ on déduit}$$

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqslant |Ax| .$$

2.2. Existence et propriétés des solutions de l'équation approchée Yosida.

Soit A accrétif, on pose $A_\lambda = (I-J_\lambda)/_\lambda$ pour $\lambda > 0$, A_λ est l'approximation Yosida de A .

Proposition 2.

i) A_λ est accrétif et lipschitzienne de rapport $2/_\lambda$.

ii) $\forall\, x \in D_\lambda$, $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ donc $|AJ_\lambda x| \leqslant |A_\lambda x|$.

iii) $\forall\, x \in D_\lambda \cap D(A)$, $|A_\lambda x| \leqslant |Ax|$.

Cette proposition a été démontrée dans l'exposé n°2 de H. Attouch.

On note $u_\lambda(t)$ la solution si elle existe de $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$, $u_\lambda(0) = x$.

Proposition 3. Sous l'hypothèse de la condition 1 , les solutions approchées Yosida existent sur $C = \overline{\mathrm{conv}\,(D(A))}$ lorsque la condition initiale x est dans C . De plus $u_\lambda(t)$ converge uniformément sur tout borné de $[0,+\infty[$ vers $S(t)x$ lorsque λ tend vers 0 , dès que $x \in \overline{D(A)}$.

La démonstration (qui est donnée pour $\omega=0$) se fait en deux étapes.

Lemme 4. (Miyadera-Ôharu [4]). Soit C un convexe fermé de X et J une contraction de C dans C . Pour tout x dans C , l'équation $\frac{du}{dt} + (I-J)u = 0$, $u(0) = x$ possède une solution unique $u(t)$ de classe C^1 à valeurs dans C et de plus

$$|u(n)-J^n x| \leq \sqrt{n}\ |x-Jx| \quad \text{pour tout entier } n .$$

Démonstration : L'équation s'écrit $\frac{d}{dt}(e^t u(t)) = e^t J u(t)$ donc $u(t)$ est solution de $u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{s-t} Ju(s)\,ds$. On considère l'application $\phi : \mathscr{C}([0,T[,C) \longrightarrow \mathscr{C}([0,T[,C) = \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ est un convexe fermé (pour la convergence uniforme)

$$\phi(u)(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-t+s}\, J\, u(s)\,ds \ ;$$ ϕ est lipschitzienne de rapport $(1-e^{-t}) < 1$. Donc ϕ possède un point fixe :

$$u = \phi(u) \text{ (par itération) et } u \text{ est de classe } C^1 .$$

Pour obtenir la majoration, on remarque d'abord que $(I-J)$ est accrétif puisque J est une contraction. On déduit de là l'unicité par la proposition 1,i) et par 1,iii), on a

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leq |x-Jx| \quad \text{d'où} \quad \frac{|u(t)-x|}{|x-Jx|} \leq t .$$

De plus

$$\begin{aligned}|u(t)-J^n x| &\leqslant e^{-t}|x-J^n x| + \int_0^t e^{s-t}\ |Ju(s)-J^n x|\ ds \\ &\leqslant e^{-t}|x-J^n x| + \int_0^t e^{s-t}\ |u(s)-J^{n-1}x|\ ds \\ &\leqslant n\ e^{-t}|x-Jx| + \int_0^t e^{s-t}\ |u(s)-J^{n-1}x|\ ds\ .\end{aligned}$$

Posons $\psi_n(t) = \dfrac{|u(t)-J^n x|}{|x-Jx|}$, $\psi_n(t) \leqslant n\ e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}\ \psi_{n-1}(s)\ ds$.

Montrons par récurrence que $\psi_n(t) \leqslant [(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}}$.

Il suffit pour cela de prouver que

$$e^{-t}(n + \int_0^t e^o\ \psi_{n-1}(s)\ ds) \leqslant [(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}}$$

ou bien par l'hypothèse de récurrence que

$$n + \int_0^t e^s[(n-s-1)^2+s]^{\frac{1}{2}} \leqslant e^t[(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}}\ .$$

Ceci est vrai pour $t=0$. On dérive les deux membres pour obtenir la condition

$$\begin{aligned}[(n-1-t)^2+t]^{\frac{1}{2}} &\leqslant [(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dt}[(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}} + \frac{2(t-n)+1}{2[(n-t)^2+t]^{\frac{1}{2}}}\ .\end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que le membre de droite est positif, et de comparer les carrés :

Or $(n-1-t)^2+t = (n-t)^2+t+2(t-n)+1$, la différence entre le membre de droite et celui de gauche est donc un carré.

Faisant $t=n$ on obtient $|u(n)-J^n x| \leqslant \sqrt{n}|x-Jx|$.

On applique ce lemme à J_λ restreint à $C = \overline{\text{conv } D(A)}$ ce qui est assurément réalisable par la condition 1. Si v_λ est la solution de $\frac{dv_\lambda}{dt} + (I-J_\lambda)\,v_\lambda = 0$, $v_\lambda(0) = x$, il est clair que

$u_\lambda(t) = v_\lambda(t/\lambda)$ est la solution du problème approché et l'on a

$$|u_\lambda(n\lambda)-J_\lambda^n x| \leq \sqrt{n}\,|x-J_\lambda x| = \lambda\sqrt{n}\,|A_\lambda x| .$$

Comme A_λ est accrétif, u_λ est lipschitzienne de rapport $|A_\lambda x|$ par la proposition 1. Si $x \in D(A)$ par la proposition 2 $|A_\lambda x| \leq |Ax|$ et $u(t) = S(t)x$ est lipschitzienne de rapport $|Ax|$.
On en déduit en prenant $n = [t/\lambda]$:

$$\begin{aligned}|u_\lambda(t)-u(t)| &\leq |u_\lambda(t)-u_\lambda(n\lambda)| + |u_\lambda(n\lambda)-J_\lambda^n x| + |u(n\lambda)-u(t)| \\ &\qquad + |J_\lambda^n x-u(n\lambda)| \\ &\leq 2\lambda|Ax| + \lambda\sqrt{n}\,|Ax| + |J_\lambda^n x-u(n\lambda)| .\end{aligned}$$

Au paragraphe 1, la formule (3.4) donne $|J_\lambda^n x-S(n\lambda)x| \leq 2\sqrt{n}_\lambda\,|Ax|$

d'où $|u_\lambda(t)-u(t)| \leq (2+3\sqrt{n})\lambda|Ax| \leq (2\lambda+3\sqrt{\lambda t})|Ax|$.

Ceci assure la convergence uniforme de u_λ vers u sur tout borné de $[0,+\infty[$ lorsque $x \in D(A)$. Grâce à l'équicontinuité en x des applications $x \longmapsto S(t)x$ et $x \longrightarrow u_\lambda(t)$, le résultat précédent subsiste pour $x \in \overline{D(A)}$.

2.3. Démonstration du théorème 2 dans le sens ii) $\Longrightarrow$ i).

Lemme 5. Soit $x \in \overline{D(A)}$. Sous l'hypothèse de la condition 1, on a pour tout $[x_0, y_0]$ de A :

$$\overline{\lim_{t\searrow 0}}\left(\frac{x-S(t)x}{t}, x_0-x\right)_S \leq (y_0, x_0-x)_S .$$

Démonstration : Soit $S(t)x = u(t)$ et $u_\lambda(t)$ l'approximation

Yosida de $u(t)$. On pose $x_\lambda = x_o+\lambda y_o$ d'où $y_o = A_\lambda(x_\lambda)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_\lambda(t)-x_\lambda)^2 = (A_\lambda u_\lambda(t), x_\lambda-u_\lambda(t))_i$$

$$\leqslant -(A_\lambda x_\lambda - A_\lambda u_\lambda(t), x_\lambda-u_\lambda(t))_S + (A_\lambda x_\lambda, x_\lambda-u_\lambda(t))_S$$

$$\leqslant (y_o, x_\lambda-u_\lambda(t))_S \text{ par l'accrétivité de } A_\lambda .$$

Par suite

$$|u_\lambda(t)-x_\lambda|^2 - |x-x_\lambda|^2 \leqslant 2\int_o^t (y_o, x_\lambda-u_\lambda(s))_S \, ds .$$

L'intégrale est une fonction s.c.s. en s et en faisant tendre λ vers 0 on a : $x_\lambda \longrightarrow x_o$, $u_\lambda(t) \longrightarrow u(t)$ uniformément sur tout borné de $\mathbb{R}^+$, d'où

$$|u(t)-x_o|^2 - |x-x_o|^2 \leqslant 2\int_o^t (y_o, x_o-u(s))_S \, ds .$$

Or $2(x-u(t), x_o-x)_S \leqslant |u(t)-x_o|^2 - |x-x_o|^2$, divisant par t positif puis faisant tendre t vers 0 , on obtient

$$\overline{\lim_{t\searrow o}} \left(\frac{x-u(t)}{t}, x_o-x\right)_S \leqslant (y_o, x_o-u(0))_S .$$

<u>Proposition 6. Sous les hypothèses de la condition 1, et</u> A <u>fermé, si l'application</u> $t \longmapsto S(t)z$ <u>est fortement différentiable en</u> t_o , <u>alors</u> $[S(t_o)z, -\frac{d}{dt}S(t_o)z]$ <u>est dans</u> A .

<u>Démonstration</u> : Par la condition 1, il existe $[x_\lambda, y_\lambda] \in A$ avec $x_\lambda+\lambda y_\lambda = S(t_o-\lambda) = x + \lambda y + O(\lambda)$ $(y = -\frac{d}{dt_o}S(t)z)$. On va prouver que $x_\lambda \longrightarrow x$, $y_\lambda \longrightarrow y$ pour $\lambda \longrightarrow 0$.

Le lemme 5 appliqué à $[x_\lambda, y_\lambda]$ et $x = S(t_o)z$ (puisque $x \in \overline{D(A)}$) .

$$\overline{\lim_{t\searrow o}} \left(\frac{x-S(t)x}{t}, x_\lambda-x\right)_S \leqslant (y_\lambda, x_\lambda-x)_S \quad \text{d'où}$$

$\overline{\lim_{t\searrow 0}}\ (y+\frac{\sigma(t)}{t}, x_\lambda - x)_S \leqslant (y_\lambda, x_\lambda - x)_S$, d'où $(y_\lambda - y, x_\lambda - x)_S \geqslant 0$

soit $\frac{1}{\lambda}\ (x - x_\lambda + \sigma(\lambda), x_\lambda - x)_S \geqslant 0$ donc $|x - x_\lambda|^2 \leqslant \sigma(\lambda)|x - x_\lambda|$ c'est-à-dire $|x - x_\lambda| = \sigma(\lambda)$.

De même $\lambda|y - y_\lambda| = \sigma(\lambda)$. En utilisant ici pour la première fois l'hypothèse que A est fermé ; on conclut bien que $[x, y]$ est dans A .

Remarques (dues à Bénilan). Si X est réflexif, soit $D_o = \{x \in X$; $S(t)x = u_x(t)$ est liptschitzienne$\} = \{x \in X$; $\frac{x - S(t)x}{t}$ borné en $0\}$.

$D(A) \subset D_o$ par l'appendice de Komura [3] et $S(t)x$ est solution forte de E_x . Si en outre

1) A demi-fermé, alors $D_o = D(A)$. En effet si $x \in D_o$, on extrait une suite $t_n \searrow 0$ telle que $\frac{d}{dt}\ u_x(t_n) \rightharpoonup -y$ soit convergente faiblement. Alors $[x, y] \in A$.

2) A demi-fermé et X strictement convexe, l'unicité de la limite faible montre que $-y = \frac{d^+ u_x}{dt}\ (0)$ dérivée faible à droite et que $|-y| \leqslant \underline{\lim}\ |\frac{du_x}{dt}\ (t_n)| \leqslant |Ax|$ donc $+y \in A^o x$. Ce résultat s'étend de $t=0$ à t quelconque par translation à droite. On a donc : $\frac{d^+ u_x}{dt_{\text{faible}}}\ (t) + A^o u(t) = 0$, A^o est le générateur faible de $S(t)$.

3) Si A demi-fermé et X uniformément convexe, A^o est en fait le générateur fort de $S(t)$.

4) Si X est uniformément convexe et l'application de dualité W continue (par exemple X^* uniformément convexe) alors si A est fermé, A^o est le générateur fort de $S(t)$.

Pour le montrer, on appelle $\widetilde{A}$ la demi-fermeture de A .

Grâce à la continuité de W , $\widetilde{A}$ est encore accrétive et par le 3°, $\widetilde{A}^o$ est le générateur fort . Mais soit t_n une suite $\searrow 0$ telle que

$[u(t_n), -\frac{du}{dt}(t_n)] \in A$ (ceci est vrai presque partout). On déduit alors que

$$[x, \tilde{A}^o x] \in A \quad \text{donc} \quad \tilde{A}^o x = A^o x \ .$$

2.4. Démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (ii) .

On pose $u_n(t) = J_{\frac{1}{n}}^{[nt]+1} x$ pour $t \geq \frac{1}{n}$ et on prolonge u et u_n par la constante x pour $t<0$ ($[nt]$ est la partie entière de nt). Il est clair que u_n est une fonction en escalier et que $S(t)x = s.\lim_{n\to+\infty} u_n(t)$ (par le théorème I du premier paragraphe).

Proposition 7. Les fonctions u_n vérifiant les propriétés suivantes

1] $J_{\frac{1}{n}} u_n(t) = J_{\frac{1}{n}}^{[nt]+2} x = u_n(t+\frac{1}{n})$ pour $t \geq -\frac{1}{n}$.

2] $n(u_n(t)-u_n(t-\frac{1}{n})) + Au_n(t) \ni 0$.

u_n est donc solution approchée de l'équation avec retard $\frac{1}{n}$ (et condition initiale $u_n(t) = x$ pour $t<0$).

3] $|Au_n(t)| \leq |Au_n(t-\frac{1}{n})| \leq |Ax|$.

Démonstration 1]: évident.

$$2] \quad u_n(t)-u_n(t-\tfrac{1}{n}) = J_{\frac{1}{n}}(u_n(t-\tfrac{1}{n})) - u_n(t-\tfrac{1}{n})$$

$$= -\frac{1}{n} A_{\frac{1}{n}} u_n(t-\tfrac{1}{n}) \in -\frac{1}{n} A J_{\frac{1}{n}} u_n(t-\tfrac{1}{n})$$

par la proposition 2, ii).

Donc $u_n(t) - u_n(t-\frac{1}{n}) \in -\frac{1}{n} Au_n(t)$ pour $t \geq \frac{1}{n}$.

3] Par la proposition 2, ii) et iii)
$|A\, J_{\frac{1}{n}}\, u_n(t-\frac{1}{n})| \leq |A_{\frac{1}{n}}\, u_n(t-\frac{1}{n})|$ d'où $|A\, u_n(t)| \leq |A_{\frac{1}{n}}\, u_n(t-\frac{1}{n})| \leq$
$|A\, u_n(t-\frac{1}{n})|$ pour $t \geq 0$. En itérant on obtient $|A\, u_n(t)| \leq |Ax|$
puisque $u_n(t) = x$ pour $t<0$.

On pose $y_n(t) = -n(u_n(t)-u_n(t-\frac{1}{n}) \in Au_n(t)$

et $y(t) = -\frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ p.p. sur $[0,T[$.

Presque partout sur $[0,T[$ on a

$$|\frac{du}{dt}(t)-n(u(t)-u(t-\frac{1}{n}))| = |y_n(t)-y(t)+n(u_n(t)-u(t)) - n(u_n(t-\frac{1}{n})-u(t-\frac{1}{n}))|$$

$$\geq |y_n(t)-y(t)+n(u_n(t)-u(t))| - n|u_n(t-\frac{1}{n})-u(t-\frac{1}{n})|$$

$$\geq n|u_n(t)-u(t)) - n|u_n(t-\frac{1}{n}) - u(t-\frac{1}{n})|,$$

la deuxième inégalité grâce à l'accrétivité de A.

Intégrant sur $[0,\theta]$, $\theta<T$ on obtient :

$$\int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} n|u_n(t)-u(t)|\, dt - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n|u_n(t)-u(t)|dt \leq \int_0^T |\frac{du}{dt}(t)-n(u(t)-u(t-\frac{1}{n}))| dt$$

Sur $[-\frac{1}{n},0]$, $u_n(t) = x = u(t)$ sauf en $t=0$, donc la seconde intégrale est nulle. On obtient finalement en faisant $(\theta = \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{N}{n}$ où $N = [nT]$, et en additionnant :

$$\int_0^{\frac{N}{n}} n(u_n(t)-u(t)\, dt \leq N \int_0^T |\frac{du}{dt}(t)-n(u(t)-u(t-\frac{1}{n}))|\, dt$$

d'où

$$\int_0^{\frac{N}{n}} |u_n(t)-u(t)|\, dt \leq T \int_0^T |\frac{du}{dt}(t)-n(u(t)-u(t-\frac{1}{n}))|\, dt.$$

Par la proposition 1, $|Ax|$ est une constante de Lipschitz pour $u(t)$ et donc $|\frac{du}{dt}(t)-n(u(t)-u(t-\frac{1}{n}))| \leqslant 2|Ax|$, de plus cette fonction tend presque partout vers 0 . On en déduit donc la convergence dans $L^1([0,T[,X)$ de u_n vers u . (On obtient en fait la convergence L^1 sur $[0,T_1]$ pour tout $T_1<T$ d'où le résultat puisque les fonctions sont bornées).

Soit v_n la linéarisée de u_n (u_n étant en escalier) c'est-à-dire

$$v_n(t) = u_n(\frac{[nt]}{n}) + n(t-\frac{[nt]}{n}) (u_n(\frac{[nt]+1}{n}) - u_n(\frac{[nt]}{n})) .$$

Il est clair que v_n est absolument continue lipschitzienne de rapport $|Ax|$ par la proposition 7,iii) :

$$|\frac{dv_n}{dt}(t)| = (|n(u_n(\frac{[nt]+1}{n}) - u_n(\frac{[nt]}{n}))| \leqslant |Ax| \quad \text{p.p. sur } [0,T[.$$

D'une part $\frac{d}{dt}|v_n(t)-u(t)| \leqslant 2|Ax|$ p.p. sur $[0,T[$, d'où

$$|v_n(t)-u(t)|^2 = |v_n(0)-x|^2 + \int_0^t 2|v_n(t)-u(t))|\frac{d}{dt}|v_n(t)-u(t)|\, dt$$

$$\leqslant |J_{\frac{1}{n}}x-x|^2 + 4|Ax| \int_0^T |v_n(t)-u(t)|\, dt$$

d'autre part puisque $|u_n(t)-v_n(t)| \leqslant \frac{1}{n}|Ax|$ et que u_n tend vers u dans L^1 , il en est de même de v_n , enfin puisque $|J_{\frac{1}{n}}x-x| \leqslant \frac{1}{n}|Ax|$.

On déduit que v_n converge uniformément sur $[0,T[$ vers u, on déduit: il en est alors de même de u_n .

<u>Remarque</u>. Dans le cas linéaire et $D(A)$ dense dans X , A fermé, la condition 1 est toujours vérifiée et en fait J_λ^n laisse $D(A)$ invariant et commute avec A . Alors :

$$\frac{x-S(t)x}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x-J^m_{\frac{t}{n}}x}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n} \frac{J^i_{\frac{t}{n}}x-J^{i+1}_{\frac{t}{n}}x}{\frac{t}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n} \frac{I-J_{\frac{t}{n}}}{\frac{t}{n}}\,(J^i_{\frac{t}{n}}x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n} A\,(J^i_{\frac{t}{n}}x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n} J_{\frac{t}{n}}\,Ax\ .$$

Or $|J^i_{\frac{t}{n}}\,y-y| \leqslant \frac{it}{n}\,(1-\frac{t}{n}|\omega|)^{-i}\,(Ay)$ pour $y\in D(A)$ d'où la convergence uniforme en n et $i\leqslant n$ de $J^i_{\frac{t}{n}}y$ vers y lorsque $t\searrow 0$.

Cette convergence a donc lieu pour $y\in\overline{D(A)} = X$. On conclut alors que $\lim\limits_{t\searrow o} \frac{x-S(t)x}{t} = Ax$. Enfin ceci implique la dérivabilité à droite en tout $t>0$ et $\frac{d^t_-\,S(t)x}{dt} = -\,S(t)\,Ax$ continu d'où le résultat classique de Hille Yosida.

2.5. Complément.

Un résultat récent de I. Miyadera (Some remarks on semi-groups of non linear operators, à paraître), permet de démontrer le théorème 2, sans la condition 1, mais sous l'hypothèse plus faible $D_\lambda\supset\overline{D(A)}$ pour λ suffisamment petit (du théorème 1).

Il suffit pour cela de démontrer le lemme 5 du §.2.3 sans la condition 1. Nous donnons ici la démonstration de Miyadera :

Soient $[x_o,y_o]\in A$, et $x\in\overline{D(A)}$, posons $u_n(t) = J^{[nt]+1}_{\frac{1}{n}}x$ pour $t\geqslant -\frac{1}{n}$ (cf. notations du §.2.4), $u_n(t) \longrightarrow S(t)x$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

On a donc $n(u_n(t-\frac{1}{n}) - u_n(t))\in Au_n(t)$ pour $t\geqslant 0$.

L'accrétivité de A donne donc

$$(y_o+n(u_n(t)-u_n(t-\frac{1}{n}))\ ,\ x_o-u_n(t))_S \geqslant 0\ ,$$

d'où on déduit

$$(y_o,\ x_o-u_n(t))_S + n(u_n(t)-x_o+x_o-u_n(t-\frac{1}{n})\ ,\ x_o-u_n(t))_S \geqslant 0$$

donc $(y_o,\ x_o-u_n(t))_S + n[-|u_n(t)-x_o|^2 + |u_n(t)-x_o|\,|u_n(t-\frac{1}{n})-x_o|] \geqslant 0$

d'où $(y_o,\ x_o-u_n(t))_S + \frac{n}{2}[|u_n(t-\frac{1}{n})-x_o|^2 - |u_n(t)-x_o|^2] \geqslant 0$.

Par suite

$$|u_n(t)-x_o|^2 - |u_n(t-\frac{1}{n})-x_o|^2 \leqslant \frac{2}{n}\ (y_o,\ x_o-u_n(t))_S\ .$$

Comme $u_n(t)$ est constante sur $[\frac{k}{n}\ ,\ \frac{k+1}{n}[$ pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|u_n(\frac{k}{n})-x_o|^2 - |u_n(\frac{k-1}{n})-x_o|^2 \leqslant 2\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (y_o,\ x_o-u_n(\tau))_S\ d\tau\ .$$

Faisant $k=0,1,\ldots,[nt]$ et additionnant, on obtient

$$|u_n(t)-x_o|^2 - |x-x_o|^2 \leqslant 2\int_0^{\frac{[nt]+1}{n}} (y_o,\ x_o-u_n(\tau))_S\ d\tau\ .$$

Lorsque $n \Longrightarrow +\infty$, par le lemme de Fatou et le fait que $(y_o,.)_S$ est semi-continu supérieurement, on a

$$|S(t)x - x_o|^2 - |x-x_o|^2 \leqslant 2\int_0^t (y_o,\ x_o-S(t)x)_S\ dt\ .$$

(On utilise aussi le fait que $|x_o-u_n(t)|$ est borné uniformément en n par $|x_o-J_{\frac{1}{n}}^{[nt]+1}x_o| + |x_o-x|$ donc par $\frac{[nT]+1}{n}|Ax_o| + |x_o-x|$ c'est-à-dire par $T|Ax_o| + |x_o-x|$).

On conclut alors comme dans le lemme 5, §.2.3.

§.3 - Pseudo-générateur d'un semi-groupe non linéaire

Soit C un convexe fermé du Banach X et $S(t)$ un semi-groupe non linéaire sur C, avec $S(t)$ lipschitzien de rapport $e^{\omega t}$. On se pose la question de l'existence d'un opérateur A, tel que $A+\omega I$ soit accrétif et tel que $S(t) = \lim_{n\to\infty} (I+\frac{t}{n}A)^{-n}$, c'est-à-dire l'existence d'un pseudo-générateur de S.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposerons $\omega=0$ pour simplifier les calculs. C et S sont donnés.

On pose $A^t = \frac{1}{t}[I-S(t)]$ et $J_{\lambda,t} = (I+\lambda A^t)^{-1}$,

$J_{\lambda,t} = (I+\frac{\lambda}{t}(I-S(t)))^{-1}$.

On ne peut espérer qu'il existe une limite $t\searrow 0$ pour les A^t. Par contre si le pseudo-générateur A existe, $J_{\lambda,t}$ doit tendre vers $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$, en un sens à préciser.

__Proposition 1.__ A^t __est univoque accrétif de__ $C \to C$. $J_{\lambda,t}$ __est une contraction définie de__ $C \to C$, et $|J_{\lambda,t}x-x| \leq \frac{\lambda}{t}|S(t)x-x|$.

__Démonstration__ : $\forall\, \lambda>0$ $|x-y+\lambda A^t x-\lambda A^t y| \geq |x-y|(1+\frac{\lambda}{t}) - \frac{\lambda}{t}|S(t)x-S(t)y|$

$$\geq |x-y|.$$

Ceci prouve que A^t est accrétif. Donc $J_{\lambda,t}$ est une contraction. Cette contraction est définie sur C tout entier car si $x\in C$

$y = J_{\lambda,t}x \iff (I+\frac{\lambda}{t}(I-S(t)))y = x$ ou encore

$$y = \frac{t}{\lambda+t}x + \frac{\lambda}{\lambda+t} S(t)y \quad (1.1)$$

Or l'application $y \mapsto \frac{t}{\lambda+t}x + \frac{\lambda}{\lambda+t} S(t)y$ définie sur C à valeur dans C est une contraction stricte. Elle admet donc un point fixe unique qui est $J_{\lambda,t}x$.

On a $J_{\lambda,t}x-x = -x + \frac{t}{\lambda+t}x + \frac{\lambda}{\lambda+t} S(t) J_{\lambda,t}x$ d'où

$$|J_{\lambda,t}x-x| = \frac{\lambda}{\lambda+t} |S(t) J_{\lambda,t}x-x| \leq \frac{\lambda}{\lambda+t} | S(t) J_{\lambda,t}x - S(t)x|$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+t} |S(t)x-x| .$$

Donc $|J_{\lambda,t}x-x| \leq \frac{\lambda}{\lambda+t} |J_{\lambda,t}x-x| + \frac{\lambda}{\lambda+t} |S(t)x-x|$ d'où la majoration

$$|J_{\lambda,t}x-x| \leq \frac{\lambda}{t} |S(t)x-x| .$$

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour tout</u> x <u>de</u> C, <u>on a</u> $\lim\limits_{(t,\lambda)\to(0,0)} J_{\lambda,t}x = x$.

<u>Démonstration</u> : On fixe $x\in C$, et $\lambda>0$ et pour $\sigma>0$ on note $y_\sigma = J_{\lambda,\sigma}x$. On utilise le

<u>Lemme 3</u>. <u>Pour tout entier</u> n <u>positif, il existe un indice</u> i $1\leq i\leq n$ <u>tel que</u> $(y_{nt}-x, y_{nt}-y_t)_S + (y_t-x, y_t-S(it)\, y_{nt})_S \leq 0$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $z\in C$ on a par (1.1)

$$y_t + \frac{t}{\lambda}(y_t-x) = S(t)\, y_t .$$

D'où :

$$|y_t-S(kt)z+\frac{t}{\lambda}(y_t-x)| = |S(t)y_t-S(kt)z| \leq |y_t-S((k-1)t)z|.$$

Elevant au carré et utilisant $|u+v|^2 \geq |u|^2 + 2(v,u)_S$ on obtient :

$$(3.1) \quad |y_t-S(kt)z|^2 + \frac{2t}{\lambda}(y_t-x, y_t-S(kt)z)_S \leq |y_t-S[(k-1)t]z|^2 .$$

additionnant les relations (3.1) pour $k=1,2\ldots n$ on obtient

$$(3.2) \quad |y_t-S(nt)z|^2 + \frac{2t}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} (y_t-x, y_t-S(kt)z)_S \leq |y_t-z|^2$$

Prenant $z = y_{nt}$ on obtient avec $S(nt)y_{nt} = y_{nt} + \frac{nt}{\lambda}(y_{nt}-x)$

$$|y_t-S(nt)y_{nt}|^2 \geq |y_t-y_{nt}|^2 + 2\,\frac{nt}{\lambda}\,(y_{nt}-x,y_{nt}-y_t)_S \,.$$

D'où l'on tire :

$$(3.3) \qquad \sum_{k=1}^{n} (y_t-x,y_t-S(kt)y_{nt})_S + (y_{nt}-x,y_{nt}-y_t)_S \leq 0 \,.$$

La formule (3.3) impose que l'un de ses termes au moins soit négatif ou nul.

<u>Démonstration de la proposition 2</u> :

On utilise les relations suivantes :

$$(3.4) \quad (y_{nt}-x,y_{nt}-y_t)_S \geq -|y_{nt}-x|\,|y_{nt}-y_t| \geq -|y_{nt}-x|(|y_{nt}-x|+|x-y_t|)$$

$$\geq -|y_{nt}-x|^2 - |y_t-x|\,|y_{nt}-x| .$$

$$(3.5) \quad (y_t-x,y_t-S(it)y_{nt})_S = |y_t-S(it)y_{nt}|_S^2 + (S(it)y_{nt}-x,y_t-S(it)y_{nt})_S$$

$$\geq (|y_t-x|-|S(it)y_{nt}-x|)^2 - |S(it)y_{nt}-x|\,|y_t-S(it)y_{nt}|$$

$$\geq (|y_t-x|-|S(it)y_{nt}-x|)^2 - |S(it)y_{nt}-x|\,(|y_t-x|+|x-S(it)y_{nt}|)$$

$$\geq |y_t-x|^2 - 3|S(it)y_{nt}-x|\,|y_t-x| \,.$$

Pour au moins un i, $1\leq i\leq n$ on a donc en additionnant (3.4) et (3.5)

$$(3.6) \qquad |y_t-x|^2 - |y_t-x|(3|S(it)y_{nt}-x)+|y_{nt}-x|) - |y_{nt}-x|^2 \leq 0 \,.$$

Utilisant $|S(it)y_{nt}-x| \leqslant |S(it)y_{nt}-S(it)x| + |S(it)x-x|$ $\leqslant |y_{nt}-x|+|S(it)x-x|$. On obtient :

$$(3.7) \qquad |y_t-x|^2-|y_t-x| \ (3|S(it)x-x|+4|y_{nt}-x|) - |y_{nt}-x|^2 \leqslant 0 \ .$$

Il est aisé de déduire de (3.7) une forme explicite pour une constante K telle que $|y_t-x| \leqslant K \ \max(|y_{nt}-x|, |x-S(it)x|)$.

Par la proposition 1 on déduit que pour n donné il existe un i $1 \leqslant i \leqslant n$ avec

$$(3.8) \qquad |J_{\lambda,t}x-x| \leqslant K \ \max(\frac{\lambda}{nt}|S(nt)x-x|, |S(it)x-x|) \ .$$

Utilisons la continuité forte de $S(t)x$ en 0. Pour $\varepsilon>0$ donné, il existe $\delta(\varepsilon) = \delta$ tel que $|S(\sigma)x-x| < \varepsilon$ dès que $\sigma<\delta(\varepsilon)$.

Si $\delta/2 \leqslant nt \leqslant \delta$ (ce qui est impliqué par $t < \delta/2$) pour un entier n au moins, on a

$$|J_{\lambda,t}x-x| \leqslant K \ \max(\frac{\lambda\varepsilon}{\delta/2}, \varepsilon) \ .$$

Si de plus $\lambda < \delta/2$ on obtient :

$$|J_{\lambda,t}x-x| \leqslant K\varepsilon \Longleftarrow t < \delta/2 \ , \ \lambda < \delta/2 \ .$$

<u>Proposition 4</u>. <u>S'il existe une suite</u> $\{t_n\}\searrow 0$ <u>et un</u> λ <u>positif tels que</u> $J_\lambda = s \lim\limits_{n\to\infty} J_{\lambda,t_n}$ <u>existe sur</u> C, <u>alors</u> $J_\mu = s \lim J_{\mu,t_n}$ <u>existe sur</u> C <u>pour tout</u> $\mu \geqslant \lambda$ <u>et l'on a</u> $J_\lambda x = J_\mu(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda x)$.

<u>Démonstration</u> : Pour t donné, les $J_{\lambda,t}$ étant une famille résolvante on a

$$J_{\lambda,t_n}x = J_{\mu,t_n}(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_{\lambda,t_n}x) \ .$$

Soit $x_n = \frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_{\lambda,t_n}x$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda x$

D'autre part $|J_{\mu,t_n}(x_n)-J_{\mu,t_n}(y)| \leqslant |x_n-y| \longrightarrow 0$.

Enfin $J_{\mu,t_n}(x_n) = J_{\lambda,t_n}(x) \longrightarrow J_\lambda x$. On en conclut que

$J_{\mu,t_n}(y) \longrightarrow J_\lambda x$. Donc J_{μ,t_n} admet une limite forte sur

$\mathrm{Im}(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda)$. Montrons que $C \subset \mathrm{Im}(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda)$.

Soit $H_\lambda^\mu x = \frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda x = J_\lambda x + \frac{\mu}{\lambda}(x-J_\lambda x)$.

Pour $\mu \geqslant \lambda$ on va montrer que $H_\lambda^\mu(C) \supset C$.

Or $z = H_\lambda^\mu x \iff x = \frac{\lambda}{\mu} z + \frac{\mu-\lambda}{\mu} J_\lambda x$ donc x est point fixe pour $z \in C$ de la contraction stricte de $C \longrightarrow C$ définie par $x \longmapsto \frac{\lambda}{\mu} z + \frac{\mu-\lambda}{\mu} J_\lambda x$. On voit en particulier que si $z_i = H_\lambda^\mu x_i$ $(i=1,2)$ avec x_i dans C alors

$$|z_1-z_2| \geqslant \frac{\mu}{\lambda}|x_1-x_2| - \frac{\mu-\lambda}{\lambda}|J_\lambda x_1-J_\lambda x_2| \geqslant (\frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu-\lambda}{\lambda})|x_1-x_2| .$$

Donc $(H_\lambda^\mu)^{-1} : H_\lambda^\mu(C) \longrightarrow C$ est une contraction.

<u>Corollaire 5</u>. <u>S'il existe deux suites</u> $\lambda_m \searrow 0$ <u>et</u> $t_n \searrow 0$ <u>telles que</u> $\operatorname{s\,lim}_{n\to+\infty} J_{\lambda_m,t_n} = J_{\lambda_m}$ <u>existe sur</u> C <u>pour tout</u> m <u>alors</u> $\operatorname{s\,lim} J_{\lambda,t_n} = J_\lambda$ <u>existe sur</u> C <u>pour tout</u> $\lambda>0$ <u>et pour tout</u> $\mu>0$, J_μ <u>peut être prolongé en une contraction définie sur</u> $\Delta_\mu = \bigcup_{0<\lambda} H_\lambda^\mu(C)$ <u>à valeur dans</u> C.

<u>Démonstration</u> : La première partie est conséquence de la proposition 4. Il est clair que si $\lambda>\mu$, $H_\lambda^\mu(C) \subset C$ et que $J_\lambda = J_\mu H_\lambda^\mu$ sur C (l'équation résolvante passe à la limite forte).

Pour $\lambda<\mu$ on prolonge J_μ par $J_\lambda(H_\lambda^\mu)^{-1}$

sur $H_\lambda^\mu(C)$. On peut vérifier que si $\lambda' < \lambda$, $H_{\lambda'}^\mu(C) \supset H_\lambda^\mu(C)$ et que $J_{\lambda'}(H_{\lambda'}^\mu)^{-1}$ est un prolongement de $J_\lambda(H_\lambda^\mu)^{-1}$. De manière plus précise

$$H_\lambda^\mu x = H_{\lambda'}^\mu(H_\lambda^{\lambda'} x) \quad \text{et} \quad J_{\lambda'}(H_{\lambda'}^\mu)^{-1} H_\lambda^\mu x = J_{\lambda'} H_\lambda^{\lambda'} x = J_\lambda x \ .$$

Les prolongements de J_μ sont des compositions de contractions donc des contractions. Nous noterons encore J_μ le prolongement ainsi obtenu de J_μ sur Δ_μ.

Théorème 3. Supposons qu'il existe une suite $t_n \searrow 0$ telle que $J_\lambda = s \lim J_{\lambda, t_n}$ existe sur C pour tout $\lambda > 0$, alors on a les résultats suivants :

a) $\forall\, \mu > 0$, J_μ est défini sur Δ_μ .

b) L'opérateur $A = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \{[J_\lambda x, \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}] \ , \ x \in C\}$ est accrétif, $\overline{D(A)} = C$, $\operatorname{Im}(I+\mu A) = \Delta_\mu$ et $(I+\mu A)^{-1} = J_\mu$ (sur Δ_μ) .

c) $\forall\, x \in D(A)$, $S(t)x$ est lipschitzienne en t ,

d) A est le pseudo-générateur de $S(t)$ sur C .

Démonstration a) cf. Corollaire 5.

b) On remarque que les ensembles $\{[J_\lambda x, \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}], \ x \in C\}$ sont décroissants en λ car si $\mu < \lambda$:

$$J_\lambda x = J_\mu H_\lambda^\mu x = y \quad \text{et} \quad z = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} = \frac{H_\lambda^\mu x - J_\lambda x}{\mu} = \frac{x' - J_\mu x'}{\mu} \quad \text{avec}$$

$x' = H_\lambda^\mu x$.

Pour montrer que A est accrétif on choisit $[y_i, z_i] \in A$, $i=1,2$ et par la remarque précédente on peut prendre $y_i = J_\lambda x_i$ et $z_i = \frac{x_i - J_\lambda x_i}{\lambda}$ $i=1,2$. On va prouver que μ inférieur à λ implique

(*) $|y_1 + \mu z_1 - (y_2 + \mu z_2)| - |y_1 - y_2| \geqslant 0$. Or

$y_i+\mu z_i = J_\lambda x_i + (\frac{\mu}{\lambda} x_i - J_\lambda x_i) = H^\mu_\lambda x_i$ donc

$|y_1+\mu z_1-(y_2+\mu z_2)| = |H^\mu_\lambda x_1 - H^\mu_\lambda x_2| \geqslant |J_\mu H^\mu_\lambda x_1 - J_\mu H^\mu_\lambda x_2| = |J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2|$

$= |y_1 - y_2|$.

Dans (*), divisant par μ et faisant tendre μ vers 0, on obtient $(z_1-z_2, y_1-y_2)_S \geqslant 0$.

Ceci prouve bien que A est accrétif.

Il est clair que :

$(I+\mu A)y$ pour $y \in D(A)$ s'écrit, puisqu'on peut supposer $y = J_\lambda x$ avec $\lambda>\mu$; $(I+\mu A)y = H^\mu_\lambda x$ donc $\mathrm{Im}(I+\mu A) = \Delta_\mu$ et

$(I+\mu A)^{-1} H^\mu_\lambda x = J_\lambda x$. Donc si $z = H^\mu_\lambda x \in \Delta_\mu$, on a

$(I+\mu A)^{-1} z = J_\lambda (H^\mu_\lambda)^{-1} z = J_\mu z$.

c) On a $x = (I + \frac{\lambda}{t} (I-S(t))) J_{\lambda,t} x$ d'où

$$\frac{(I-S(t))}{t} J_{\lambda,t} x = \frac{x-J_{\lambda,t} x}{\lambda} \quad \text{donc}$$

$$L = \left|\frac{x-J_\lambda x}{\lambda}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{I-S(t_n)}{t_n} J_{\lambda,t_n} x\right|$$ est une constante de Lipschitz

pour $t \longmapsto S(t) J_\lambda x$. On voit que $S(t)y$ est lipschitzienne en t pour $y \in D(A)$, de rapport $\left|\frac{x-J_\lambda x}{\lambda}\right|$ pour tout (x,λ) vérifiant

$J_\lambda x = y$. Le plus petit L ainsi obtenu est clairement $|Ay| = K$.

d) Il suffit de prouver que $S(t)x = \lim_{n\to+\infty} J^n_{\frac{t}{n}} x$ pour

$x \in D(A)$. Soit $n = [\frac{t}{\lambda}]$ et u_λ la solution de $\frac{du_\lambda}{dt} + A^\lambda u_\lambda = 0$

$u_\lambda(0) = 0$. On a :

(III.1) $\qquad |S(t)x - S(n\lambda)x| \leqslant \lambda |Ay| = \lambda K$.

On écrit

$$(III.2)\quad |S(t)x-J^m_{\frac{t}{m}}x| \leqslant |S(t)x-S(n\lambda)x| + |S^n(\lambda)x-u_\lambda(n\lambda)| + |u_\lambda(n\lambda)-u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t)-J^m_{\lambda,\frac{t}{m}}x| + |J^m_{\lambda,\frac{t}{m}}x-J^m_{\frac{t}{m}}x| .$$

Or

$$(III.3)\quad |S^n(\lambda)_x-u_\lambda(n\lambda)| \leqslant \sqrt{n}\,|x-S(\lambda)x| \leqslant \sqrt{n}\ \lambda\ K \leqslant \sqrt{\lambda.t}\ K$$

par les résultats du paragraphe 2 ainsi que

$$(III.4)\quad |u_\lambda(n\lambda)-u_\lambda(t)| \leqslant \lambda\ K\ ,\quad \text{car}\quad |A^\lambda x| \leqslant K .$$

(III.5) Par le paragraphe 2 et le paragraphe 1

$$|u_\lambda(t)-J^m_{\lambda,\frac{t}{m}}x| \leqslant \frac{2t}{\sqrt{m}}\,|A^\lambda x| \leqslant \frac{2t}{\sqrt{m}}\,|Ax| .$$

En regroupant (III.1, 2, 3, 4, 5) on obtient :

$$|S(t)x-J^m_{\frac{t}{m}}x| \leqslant (2\lambda+\sqrt{\lambda t})K + \frac{2t}{\sqrt{m}}K + |J^m_{\lambda,\frac{t}{m}}x-J^m_{\frac{t}{m}}x|$$

faisant $\lambda = t_k$ et $k \longrightarrow +\infty$ on obtient alors

$$(III.6)\qquad |S(t)x-J^m_{\frac{t}{m}}x| \leqslant \frac{2t}{\sqrt{m}}K$$ d'où le résultat.

Remarque. Il n'y a pas unicité du pseudo-générateur dans le cas général.

Proposition 6. Si l'espace X est de dimension finie ou est un espace de Hilbert, les conclusions du théorème III sont toujours satisfaites.

Démonstration dans le cas $\dim X < +\infty$: La proposition 3 implique que si $x \in C$, $J_{\lambda,t}x$ est uniformément borné en λ quand $t \searrow 0$ et il en est ainsi sur tout borné de C. Par le théorème d'Arzala-

Ascoli il existe donc une suite $t_m(n)$ tendant vers 0 pour laquelle $\lim_{n\to+\infty} J_{\frac{1}{m}}, t_m(n)$ existe uniformément sur tout borné de C (on utilise essentiellement ici l'hypothèse de dimension).

La suite diagonale $t'_n = t_n(n)$ satisfait alors les conditions de l'hypothèse du théorème 3. Lorsque de plus X^* est strictement convexe on démontre l'unicité du pseudo-générateur.

La démonstration dans le cas d'un espace de Hilbert nécessite deux lemmes (cf. Kato [5]). On utilise la continuité en $t=0$ de $t \longmapsto S(t)x$.

<u>Lemme 7</u>. <u>Si</u> $\{t<\delta(\varepsilon) \implies |S(t)x-x| < \varepsilon\}$ <u>alors</u> $nt<\delta(\varepsilon)$ <u>implique</u>

$$|J_{\lambda,t}x-J_{\lambda,nt}x|^2 \leqslant 2\varepsilon|J_{\lambda,t}x-x| .$$

On reprend les notations et la formule (3.3) qui pour X hilbert s'écrit $\sum_{k=1}^{n} (y_t-x,y_t-S(kt)y_{nt}) + (y_{nt}-x,y_{nt}-y_t) \leqslant 0$ qu'on écrit

$$n\left[|y_t-x|^2 - (y_{nt}-x,y_t-x) + |y_{nt}-x|^2\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} |y_t-x||S(kt)y_{nt}-x| .$$

Or $|S(kt)y_{nt}-x| \leqslant |S(kt)y_{nt}-S(kt)x| + |S(kt)x-x| \leqslant |y_{nt}-x| + \varepsilon$.

D'où

$$|y_t-x|^2 - (y_{nt}-x,y_t-x) + |y_{nt}-x|^2 \leqslant |y_t-x|.\varepsilon + |y_{nt}-x||y_t-x| .$$

Or $|y_{nt}-x||y_t-x| \leqslant \frac{1}{2}\left[|y_{nt}-x|^2 + |y_t-x|^2\right]$. On déduit enfin

$\frac{1}{2}(y_t-y_{nt})^2 \leqslant |y_t-x|\varepsilon$.

<u>Lemme 8</u>. $0<t\leqslant\delta(\varepsilon) = \delta$ <u>implique</u>

$$|J_{\lambda,t}x-x| \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{\lambda}{\delta(\varepsilon)}\right) .$$

Si $\delta/2\leqslant t<\delta$ alors $|J_{\lambda,t}x-x| \leqslant \frac{\lambda}{t}|S(t)x-x|$ (Proposition 1), donc $|J_{\lambda,t}x-x| \leqslant \frac{2\varepsilon\lambda}{\delta}$.

Si $t<\delta/2$ il existe n entier avec $\delta/2\leqslant nt<\delta$ et d'après le lemme 7, on obtient :

$$|J_{\lambda,t}x-J_{\lambda,nt}x|^2 \leqslant 2\varepsilon|J_{\lambda,t}x-x|$$

mais $|J_{\lambda,nt}x-x| \leqslant \frac{2\lambda\varepsilon}{\delta}$ d'où

$$|J_{\lambda,t}x-x|^2 \leqslant |J_{\lambda,nt}x-J_{\lambda,t}x|^2 + |J_{\lambda,nt}x-x||J_{\lambda,t}x-x|$$

$$\leqslant |J_{\lambda,t}x-x|(2\,\varepsilon + \frac{2\lambda\varepsilon}{\delta}) .$$

D'après le lemme 8 $J_{\lambda,t}x$ est borné lorsque t tend vers 0, (pour λ fixé). Le lemme 7 montre alors que $y_{\lambda,t}$ est de Cauchy lorsque $t\searrow 0$ en restant dans $\mathbb{Q}$: en effet si t et t' sont dans $\mathbb{Q}$ avec $t',t<\delta$, on peut écrire $t = n\tau$, $t' = n'\tau$ et par le lemme 7 $|J_{\lambda,t}x-J_{\lambda,t'}x| \leqslant 2\sqrt{2\varepsilon\,|J_{\lambda,\tau}x-x|}$.

Soit y_λ la limite de $J_{\lambda,t}x$ lorsque $t\searrow 0$ dans $\mathbb{Q}$.

On voit que les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites.

L'unicité du pseudo-générateur se démontre également dans le cadre hilbertien.

Remarque. Avec le théorème 3 on retrouve tous les résultats du théorème de Hille Yosida dans le cas linéaire, en effet :

$$J_{\lambda,t}x = (I + \frac{\lambda}{t}\,(I-S(t)))^{-1}x = [\frac{\lambda+t}{t}\,(I - \frac{\lambda}{\lambda+t}\,S(t))]^{-1}x$$

$$= \frac{t}{\lambda+t}\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{\lambda}{\lambda+t})^i\,S(it)x$$ qui lorsque

$t \longrightarrow 0$ tend vers $\int_0^\infty \frac{e^{-u/\lambda}}{\lambda}\,S(u)x\,du = J_\lambda x$.

Les exemples suivants présentent des cas pathologiques.

<u>Exemple 1</u>. Absence de générateur infinitésimal, mais existence du pseudo-générateur :

$$X = \mathscr{C}[0,1] \quad , \; C = \{f \in X \quad \text{avec} \quad 0 \leq f(x) \leq x\} \; .$$

$(S(t)f)x = \inf[t+f(x),x]$.

$S(t)f$ est différentiable en $t=0$ si et seulement si $f(x) \equiv x$.

En effet $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(S(t)f)(x) - f(x)}{t} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) = x \quad (\text{en particulier } x=0) \\ 1 & \text{si} \quad f(x) < x \; . \end{cases}$

Il n'y a donc pas de générateur infinitésimal au sens de l'équation d'évolution également.

Pourtant $(J_{\lambda,t}f)(x) = \begin{cases} f(x)+\lambda & \text{pour} \quad \lambda+t \leq x-f(x) \\ f(x) + \dfrac{\lambda}{t+\lambda}\,(x-f(x)) & \text{pour} \quad \lambda+t \geq x-f(x) \end{cases}$

On voit donc que $\lim\limits_{t \to 0} (J_{\lambda,t}f)(x) = \inf(f(x)+\lambda,x)$, $J_\lambda = S(\lambda)$,

donc le théorème 3 s'applique :

$$A = \bigcup_{\lambda > 0} \{[S(\lambda)(f) \; ; \; \tfrac{1}{\lambda}\,(f-S(\lambda)f))] \; ; \quad f \in C\}$$

est un pseudo-générateur de $S(t)$.

<u>Exemple 2</u>. Non unicité du pseudo-générateur (dans le cas $\dim X < +\infty$, mais X^* non strictement convexe).

$X = (\mathbb{R}^2, \ell_1)$. L'application dualité s'écrit alors

$$W(x,y) = \left(\frac{x}{|x|}\,(|x|+|y|) \; , \; \frac{y}{|y|}\,(|x|+|y|)\right) \quad \text{si} \quad xy \neq 0$$

$$W(x,0) = \{(x,\rho) \; , \; \text{avec} \quad \rho \quad \text{quelconque} \quad |\rho| \leq |x|\} \; .$$

Soit $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ fonction non croissante continue avec $g(-1) = 1$, $g(+1) = -1$. On associe à g un opérateur $A \subset X \times X$

satisfaisant à $X = D(A)$

$$\text{et} \quad A(a,b) = \begin{cases} (0,1) & b>0 \\ (0,-1) & b<0 \\ \Gamma & b=0 \end{cases} \qquad \text{où} \quad \Gamma = \left\{\frac{g(x)+x}{2}, \frac{g(x)-x}{2}\right\}.$$

a) A est accrétif :

Soit (a,b), (a',b'), $\in X$ $(c,d)\in A(a,b)$, $(c',d')\in A(a',b')$.

Si $bb' \not< 0$ on a évidemment $(c-c',d-d') = 0$ d'où l'accrétivité.

Si $b>0$, $b'<0$ utilisant la fonction w, on obtient :

$$((0,2), (a-a',b-b'))_S \geqslant 2(b-b') > 0.$$

Si $b=0$, $b'>0$, $\varepsilon = \operatorname{sign}(a-a')$

$$((c-c',d-d'),(a-a',b-b'))_S \geqslant 0 \quad \text{s'écrit}$$

$$2((a-a') \overrightarrow{+} |b|)^{-1} ((-c',1-d'), (a-a',b))_S \geqslant - 2c'\varepsilon+2-2d'$$

$$= 2 + (1+\varepsilon)x' - (1-\varepsilon)\, g(x')$$

$$\geqslant 0 \quad \text{car si} \quad \varepsilon = +1, \ x' \geqslant -1, \ \text{si} \quad \varepsilon = -1, \ g'(x) \leqslant 1.$$

Si $b = b' = 0$, $a>a'$ alors :

$$2|a-a'|^{-1}((c-c'),d-d'), (a-a',0))_S = \sup_{\lambda\in[-1,1]} [(g(x)-g(x')+x-x', g(x)-g(x')-x-x'),(1,\lambda)]$$

$$= \sup\, (1+\lambda)(g(x)-g(x'))+(1-\lambda)(x-x').$$

Or $\operatorname{sign}(x-x') \neq \operatorname{sign}(g(x)-g(x'))$ d'où pour $\lambda = \pm 1$ on obtient une expression positive ou nulle.

Remarquons que A n'est pas B-accrétif (au sens de Browder).

b) A est m-accrétif :

En effet $X = \mathrm{Im}(I+\lambda A)$, $(a,b) = u+\lambda v$ où $[u,v] \in A$. En effet

$b>\lambda \implies (a,b) = (a,b-\lambda) + \lambda(0,1)$

$b<\lambda \implies (a,b) = (a,b+\lambda) + \lambda(0,1)$

$|b|<\lambda \implies (a,b) = (a - \lambda \dfrac{x_o+g(x_o)}{2}, 0) + \lambda(\dfrac{g(x_o)+x_o}{2}, \dfrac{g(x_o)-x_o}{2})$

où x_o est défini par $\dfrac{g(x_o)-x_o}{2} = \dfrac{b}{\lambda}$.

c) Expression de J_λ et de $S(t)$.

$$J_\lambda(a,b) \left| \begin{array}{lll} (a,b-\varepsilon\lambda) & \text{pour} & |b|>\lambda \quad \varepsilon = \text{signe de } b \\ (a-b-\lambda x_o, 0) & \text{par} & |b|\leq\lambda \quad \text{où} \quad \dfrac{g(x_o)-x_o}{2} = \dfrac{b}{\lambda} \end{array} \right.$$

Par suite

$$J^n_{\frac{t}{n}}(a,b) = \left| \begin{array}{ll} (a,b-\varepsilon t) \quad \text{par} \quad \varepsilon b>t & \\ (a-b+\frac{mt}{n} - \frac{t}{n} x_o - \frac{n+1-m}{n} t\, xg, 0) & \text{pour} \quad 0 \leq \frac{m}{n}t \leq b < \frac{m+1}{n}t \\ & \qquad 0\leq m\leq n \\ (a-b-\frac{mt}{n} - \frac{t}{n} x_o - \frac{n+1-m}{n} t\, xg, 0) & \text{pour} \quad 0 \geq -\frac{mt}{n} > b > \frac{m+1}{n}t \\ & \qquad 0\leq m\leq n \end{array} \right.$$

où $\dfrac{g(x_o)-x_o}{x} = \dfrac{b-m\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}$ définit x_o et où $g(x_g) = x_g$ définit x_g.

Par suite
$$\lim_{n\to+\infty} J^n_{\frac{t}{n}}(a,b) = \left| \begin{array}{ll} (a,b-\varepsilon t) & \text{pour} \quad \varepsilon b>t \\ (a-(t-b)xg, 0) & \text{pour} \quad 0\leq b\leq t \\ (a-(t+b)xg, 0) & \text{pour} \quad -t\leq b\leq 0 . \end{array} \right.$$

Donc
$$S(t)(a,b) = \left| \begin{array}{ll} (a,b-\varepsilon t) & |b|>t \\ (a-(t-|b|)xg, 0) & |b|<t . \end{array} \right. \qquad \varepsilon = \text{signe de } b$$

Il est clair que $S(t)$ ne dépend de g que par l'unique réel x_g associé à g.

d) Calcul de $J_{\lambda,t}(a,b) = (I+\frac{\lambda}{t}(I-S(t)))^{-1}(a,b) = (c,d)$

Ceci donne :

$$(a,b) = \begin{cases} (c,d+\varepsilon\lambda) & |d|>t \quad \varepsilon = \text{signe de } d \\ (c+xg\lambda(1-\frac{|d|}{t}),\ \frac{t+\lambda}{t}\ d) & |d|\leq t. \end{cases}$$

d'où

$$J_{\lambda,t}(a,b) = \begin{cases} (a,b-\varepsilon\lambda) & |b|>t+\lambda \quad \varepsilon = \text{signe de } b \\ (a-xg\lambda(1-\frac{|b|}{(t+\lambda)}),\ \frac{t}{t+\lambda}\ b) & \text{pour } |b|\leq t+\lambda \end{cases}$$

Faisant $t \longrightarrow 0$ on obtient : $\lim\limits_{t\searrow 0} J_{\lambda,t}(a,b) = I_\lambda(a,b)$

$$I_\lambda(a,b) = \begin{cases} (a,b-\varepsilon\lambda) & \text{par } |b|\geq\lambda \quad \varepsilon = \text{signe de } b \\ (a-xg(\lambda-|b|),0) & \text{par } |b|\leq\lambda \end{cases}$$

On voit que

$I_\lambda \neq J_\lambda$ mais $B = \bigcup\limits_{\lambda>0} \left\{\left[I_\lambda(a,b),\ \frac{(a,b)-I_\lambda(a,b)}{\lambda}\right]\right\}$ est un pseudo-générateur et on obtient tous calculs faits :

$$B = \bigcup_{\lambda>0} \left\{(c,d),(0,\frac{d}{|d|})\right\} \cup \left\{\left[(c,0),(xg(1-\frac{|b|}{\lambda}),\ \frac{b}{\lambda})\right]\right\} \text{ où } |b|\leq\lambda.$$

B est obtenu selon le même processus que A mais à partir de la fonction affine par morceaux sur $[-1,1]$ définie par les trois points

$$h(-1) = 1,\quad h(1) = -1,\quad h(x_g) = x_g.$$

-:-:-

Bibliographie

[1] M.G. Crandall et T.M. Ligget - Generation of semi-groups of non linear transformations on general Banach spaces (à paraître).

[2] H. Brezis et A. Pazy - Accretive sets and differential Equations in Banach spaces (à paraître dans Israël Journal of Math.).

[3] Y. Komura - Non linear semi-groups in Hilbert spaces, J. of Math. Soc. Japan, vol.19, 1967, pp. 493-507.

[4] I. Miyadera, S. Ôharu - Approximation of semi-groups of non linear operators (à paraître).

[5] T. Kato - On generators of non-linear semi-groups. Proc. of Summer Institute on Global Analysis, Berkeley, Amer. Math. Soc. 1968 (à paraître).

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires
Orsay 1970-71

Exposé n°5

OPERATEURS T-ACCRETIFS D'UN ESPACE DE BANACH RETICULE

par C. PICARD

X est dit Banach réticulé si et seulement si X est un espace de Banach réel, muni d'une relation d'ordre (on note P le cône positif de X) réticulée, compatible avec la structure d'espace vectoriel réel et telle que :

$$|x| \leqslant |y| \implies \|x\| \leqslant \|y\| .$$

Notations : $x^+ = \sup(x,0)$, $x^- = \sup(-x,0)$, [on a alors $x = x^+ - x^-$] , $|x| = x^+ + x^-$, $x^\perp = \{y \in X \ ; \ \inf(|x|,|y|) = 0\}$.

Remarques : Les applications $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^+$, $(x,y) \longmapsto \sup(x,y)$ sont continues (cf.[4]) .

X' désigne le dual de X et $(.,.)$ le produit scalaire d'un élément de X et d'un élément de X' .

1. Application de dualité positive.

X est un Banach réticulé.

Définition 1.1. On appelle application de dualité positive de X l'application W_+ de P dans $\mathcal{P}(X')$ définie par :

$$W_+(x) = \{w \in X' \mid (x,w)=\|x\|^2 \ ; \ \|w\|=\|x\| \ ; \ \forall\, y \in x^\perp , \ (y,w) = 0 \ ; \ w \geqslant 0\}$$

On remarque que $W_+(x) \subset W(x)$, où W est l'application de dualité de X (cf. [8]).

<u>Exemples</u> :

1) $X = L^1(S,\mu)$, où μ est une mesure de Radon positive
Pour tout $x \in L^1(S,\mu)$, $x \geq 0$, on a :

$$W_+(x) = \{w = \|x\|_1 \; \chi_{\{x>0\}}\}$$

où $\chi_{\{x>0\}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $t \in S$ tels que $x(t) > 0$.

Rappelons que, pour tout x, $y \in L^1(S,\mu)$, on a :

$$W(x) = \{w \in L^\infty(S,\mu) \,|\, w = (\operatorname{sgn} x)\|x\|_1 \text{ , sur } \{x \neq 0\} \;;\; \|w\|_\infty \leq \|x\|_1\}$$

$$\text{et} \quad (x,y)_S = \|x\|_1 \Big[\int_{\{x\neq 0\}} (\operatorname{sgn} x) y \, d\mu + \int_{\{x=0\}} |y| \, d\mu\Big] .$$

2) $X = L^p(S,\mu)$, où $1<p<\infty$.
Pour tout $x \in L^p(S,\mu)$, $x \geq 0$, on a :

$$W_+(x) = \left\{\frac{x^{p-1}}{\|x\|^{p-2}}\right\} = W(x) .$$

<u>Proposition 1.1.</u> [5] <u>Pour tout</u> $x \in P$, $W_+(x)$ <u>est non vide</u>.

<u>Démonstration</u> : $x^\perp$ est un sous espace vectoriel de X, fermé car l'application $y \longmapsto \inf(x,|y|)$ est continue. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $w \in X'$ tel que :

$$(x,w) = \|x\|^2 \text{ , } \|w\| = \|x\| \text{ , } \forall \, y \in x^\perp \;\; (y,w) = 0 .$$

Soit $w^+(y) = \sup\{w(z) \;;\; 0 \leq z \leq y\}$.
Il est clair que w^+, définie sur P, est positive, positivement homogène et nulle sur $P \cap x^\perp$. De plus w^+ est additive. En effet, soient y_1, $y_2 \in P$. Quel que soit $z \in P$, $z \leq y_1 + y_2$, il existe (lemme de décomposition de Riesz) z_1 et z_2 tels que :

$$0 \leq z_1 \leq y_1 \text{ , } 0 \leq z_2 \leq y_2 \text{ , } z = z_1 + z_2 .$$

$$\text{Ainsi,}\quad w^+(y_1+y_2) = \sup\{w(z_1+z_2)\ ;\ 0\leq z_1\leq y_1\ ,\ 0\leq z_2\leq y_2\}$$
$$= \sup\{w(z_1)\ ;\ 0\leq z_1\leq y_1\} + \sup\{w(z_2)\ ;\ 0\leq z_2\leq y_2\}$$
$$= w^+(y_1) + w^+(y_2)\ .$$

Prolongeons w^+ par $\widetilde{w}^+$ définie sur X, en posant :

$$\forall\, y',\ y''\in P\ ,\ \widetilde{w}^+(y'-y'') = w^+(y') - w^+(y'')\ .$$

On vérifie facilement que $\widetilde{w}^+$ est bien définie, positive, linéair et nulle sur $x^\perp$. Montrons que $\widetilde{w}^+\in W_+(x)$. Si $y\in P$, on a :

$$w^+(y)\leq \|w\|.\|y\|\ ,$$

puisque : $w(z)\leq \|w\|\,\|z\|\leq \|w\|\,\|y\|$, pour $0\leq z\leq y$.
Il en résulte que, pour tout $y\in X$,

$$|\widetilde{w}^+(y)| = |w^+(y^+) - w^+(y^-)| \leq \sup(w^+(y^+), w^+(y^-))$$
$$\leq \|w\|\ \sup(\|y^+\|, \|y^-\|) \leq \|w\|\,\|y\|$$

d'où,
$$\|\widetilde{w}^+\| \leq \|w\|\ .$$

On a alors : $w(x)\leq w^+(x) = \widetilde{w}^+(x)\leq \|w\|\,\|x\| = \|x\|^2 = w(x)$,

donc
$$\widetilde{w}^+(x) = \|x\|^2\ .$$

Ainsi
$$\widetilde{w}^+\in W_+(x)\ .$$

<u>Proposition 1.2.</u> [7] <u>Soient</u> $x\in P$ <u>et</u> $y\in X$. <u>Alors il existe</u> $w_S\in W_+(x)$ <u>tel que</u> :

$$\sup\{w(y)\ ;\ w\in W_+(x)\} = w_S(y) = \|x\| \inf_{b\in\mathbb{R}_+,\, z\in x^\perp}\ \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda\sup(y+z, -bx) -}{\lambda}$$

La démonstration utilise le lemme suivant :

Lemme : **Soit** $x \in P$ **et**

$$\sigma(x,y) = \inf_{b\in\mathbb{R}_+,\, z\in x^\perp} \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda\ \sup(y+z,-bx)\|-\|x\|}{\lambda}\ ,\ \text{pour tout}\quad y\in X$$

Alors : (1) $\sigma(x,y) \leqslant \|y^+\|$

(2) L'application $y \longmapsto \sigma(x,y)$ est sous linéaire positive

(3) $\sigma(x,ax+y) = a\|x\| + \sigma(x,y)$, $a \in \mathbb{R}$.

(4) Si $z\in x^\perp$, $\sigma(x,y) = \sigma(x,y+z)$.

Démonstration de (1) : Il suffit de prendre $b=0$ et $z=0$ et de majorer.

Démonstration de (2) : Pour tout y , $y'\in X$,

$\sigma(x,y+y') \leqslant \sigma(x,y) + \sigma(x,y')$ résulte de :

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda\ \sup(y+y'+z+z',-bx)\|-\|x\|}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|2x+\lambda\ \sup(y+y'+z+z',-bx)\|-2\|x\|}{\lambda}$$

$$\leqslant \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda\ \sup(y+z,-bx)\|-\|x\|}{\lambda} + \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda\ \sup(y'+z',-bx)\|-\|x\|}{\lambda}\ ,$$

pour tous $b\in\mathbb{R}_+$, z et $z'\in x^\perp$.

Si $y\geqslant 0$, on a

$\sup(y+z,-bx) \geqslant \sup(z,-bx) = -\inf(-z,bx) \geqslant -\inf(|z|,bx) = 0$,

pour tout $z\in x^\perp$ et $b\in\mathbb{R}_+$. Par conséquent $\sigma(x,y)\geqslant 0$. En particulier $\sigma(x,0)\geqslant 0$. Or $\sigma(x,0)\leqslant 0$ d'après (1) donc $\sigma(x,0) = 0$.

D'autre part, si $a>0$, on obtient :

$\sigma(x,ay) = a\ \sigma(x,y)$, en remplaçant dans la définition de σ , z par az et λ par $\frac{\lambda}{a}$.

Démonstration de (3) : On a, quels que soient $z\in x^\perp$ et $b\in\mathbb{R}_+$,

$\sup(ax+y+z,-bx) = ax + \sup(y+z,-(a+b)x)$.

En utilisant l'égalité :

$$\lim_{\lambda\to o^+} \frac{\|X + \lambda(aX+Y)\| - \|X\|}{\lambda} = \lim_{\lambda\to o^+} \frac{\|X + \frac{\lambda}{1+a\lambda} Y\| - \frac{1}{1+a\lambda}\|X\|}{\frac{\lambda}{1+a\lambda}}$$

$$= a\|X\| + \lim_{\lambda\to o^+} \frac{\|X + \lambda Y\| - \|X\|}{\lambda}$$

et en remarquant que $\sigma(x,y)$ est inchangé quand on remplace dans sa définition $b\in\mathbb{R}_+$ par $b\geq b_o$ où b_o est quelconque positif puisque :

$$\sup(y+z,-b'x) \leq \sup(y+z,-bx) \text{ , pour } 0\leq b\leq b' \text{ ,}$$

on obtient : $\sigma(x,ax+y) = a\|x\| + \sigma(x,y)$.

Démonstration de (4) : C'est immédiat.

Démonstration de la proposition 1.2. :

Soit $w\in W_+(x)$. Pour tout $z\in x^\perp$ et $b\in\mathbb{R}_+$, on a

$$\|x\|\frac{\|x+\lambda \sup(y+z,-bx)\| - \|x\|}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda}(w(x+\lambda \sup(y+z,-bx))-w(x))$$

$$= w(\sup(y+z,-bx)) \geq w(y+z) = w(y) \text{ ,}$$

donc $\|x\|\sigma(x,y) \geq w(y)$.

D'autre part, montrons l'existence de $L\in W_+(x)$ tel que $L(y) = \|x\|\sigma(x,y)$.

Soit $F = [x+y] \oplus x^\perp = \{u = \alpha(x+y)+z \ ; \ \alpha\in\mathbb{R}, z\in x^\perp\}$.

F est un sous-espace vectoriel de X .

On pose $\ell(u) = \alpha\|x\|\sigma(x,x+y)$, pour tout $u\in F$. ℓ est bien définie, linéaire et telle que $\ell(u)\leq\|x\|\sigma(x,u)$, car :

si $\alpha\geq 0$, $\ell(u) = \|x\|\sigma(x,\alpha(x+y)) = \|x\|\sigma(x,u)$

si $\alpha<0$, $\ell(u) = -\|x\|\sigma(x,-\alpha(x+y)) \leq \|x\|\sigma(x,\alpha(x+y)) = \|x\|\sigma(x,u)$.

De plus l'application $v \longmapsto \|x\|\sigma(x,v)$ définie sur X est sous-additive et positivement homogène. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire L sur X qui prolonge ℓ et telle que $L(v) \leq \|x\|\sigma(x,v)$, pour tout $v \in X$.

On a $L(x) + L(y) = \ell(x+y) = \|x\|\sigma(x,x+y) = \|x\|^2 + \|x\|\sigma(x,y)$.

Or, $L(x) \leq \|x\|\sigma(x,x) = \|x\|^2$ et $L(y) \leq \|x\|\sigma(x,y)$

donc $L(y) = \|x\|\sigma(x,y)$ et $L(x) = \|x\|^2$.

De plus, $\|L\| \leq \|x\|$ car :

$$L(v) \leq \|x\|\sigma(x,v) \leq \|x\|\|v^+\| \leq \|x\|\|v\|$$

et $$-L(v) \leq \|x\|\sigma(x,-v) \leq \|x\|\|(-v)^+\| \leq \|x\|\|v\|.$$

L est positive, car si $v \geq 0$, $-L(v) \leq \|x\|\sigma(x,-v) \leq 0$ et si $v \in x^\perp$, $L(v) = \ell(v) = 0$.

Ainsi : $L \in W_+(x)$.

Remarque : Une conséquence de la proposition 1.2 est que :

$$\inf\{w(y) \; ; \; w \in W_+(x)\} = -\|x\|\sigma(x,-y) .$$

En effet,

$$-\|x\|\sigma(x,-y) = -\sup\{w(-y) \; ; \; w \in W_+(x)\} = \inf\{w(y) \; ; \; w \in W_+(x)\} .$$

Proposition 1.3. $W_+(x^+)$ *est contenu dans le sous-difffétentiel en* x *de l'application* $x \longmapsto \frac{1}{2}\|x^+\|^2$.

Démonstration : Soit $w \in W_+(x^+)$. On a

$$\|x^+\|^2 - \|y^+\|^2 + 2(y-x,w) = \|x^+\|^2 - \|y^+\|^2 + 2(y^+-y^--x^++x^-,w)$$

$$\leq -(\|x^+\|-\|y^+\|)^2 \leq 0$$

car $(y^-, w) \leq 0$ et $(x^-, w) = 0$.

Ainsi, w appartient au sous-différentiel en x de $x \longmapsto \frac{1}{2}\|x^+\|^2$.

2. Opérateurs T-accrétifs et semi-groupes de T-contractions.

2.1. Applications T-lipschitziennes et T-contractions.

Définition 2.1. Soit U une application de X dans X de domaine $D(U)$.
On dit que U est k-T-lipschitzienne si et seulement si :

$$\forall x, x' \in D(U), \quad \|(Ux-Ux')^+\| \leq k\|(x-x')^+\| .$$

Si $k=1$, on dit que U est une T-contraction de X.

Proposition 2.1. Soit $U : D(U) \subset X \longrightarrow X$. Si U est k-T-lipschitzienne, alors U est 2k-lipschitzienne et est croissante.

En effet, soient $x, x' \in D(U)$. On a

$$\|Ux-Ux'\| \leq \|(Ux-Ux')^+\| + \|(Ux-Ux')^-\| \leq k\|(x-x')^+\| + k\|(x-x')^-\|$$
$$\leq 2k\|x-x'\| .$$

Si $x \leq x'$, alors $(x-x')^+ = 0$ d'où $(Ux-Ux')^+ = 0$ c'est-à-dire $Ux \leq Ux'$.

2.2. T-accrétivité.

Définition 2.2. Soit A un opérateur (multivoque) de X,
A est dit T-accrétif de X si et seulement si :

$$(\forall [x,y], [x',y'] \in A)(\exists\ w \in W_+((x-x')^+)) : ((y-y', w) \geq 0) .$$

A est dit B-T-accrétif de X (Browder T-accrétif) si et seulement si :

$$(\forall [x,y],[x',y'] \in A)(\forall w \in W_+((x-x')^+))((y-y',w) \geq 0) .$$

Remarque. La première définition est donnée par B. CALVERT [2] pour des opérateurs univoques.

Exemples : 1) Un opérateur A de $L^1(S,\mu)$ est T-accrétif s.s.i.:

$$\forall [x,y],[x',y'] \in A , \int_{\{t;x(t)>x'(t)\}} (y(t)-y'(t))\, d\mu(t) \geq 0 .$$

Remarque. Puisqu'un opérateur accrétif de $L^1(S,\mu)$ est caractérisé par :

$$\int_{\{t;x(t)\neq x'(t)\}} (\operatorname{sgn}(x(t)-x'(t)))(y(t)-y'(t))\, d\mu(t) + \int_{\{t;x(t)=x'(t)\}} |y(t)-y'(t)|\, d\mu(t) \geq 0$$

on voit que tout opérateur T-accrétif de $L^1(S,\mu)$ est accrétif. Ce fait sera un peu précisé plus loin.

2) Un opérateur A de $L^p(S,\mu)$ $(1<p<\infty)$ est T-accrétif s.s.i. :

$$\forall [x,y],[x',y'] \in A , \int_{\{t;x(t)>x'(t)\}} (x(t)-x'(t))^{p-1}(y(t)-y'(t))\, d\mu(t) \geq 0$$

3) Conséquence. Soit f un graphe monotone de $\mathbb{R}$. Soit A l'opérateur de L^p $(1\leq p<\infty)$ défini par :

$$A = \{[x,y];[x(t),y(t)] \in f \ \text{p.p.t}\} .$$

Alors A est T-accrétif.

Proposition 2.2. Soit A un opérateur de X. A est T-accrétif si et seulement si :

$$(\forall [x,y],[x',y'] \in A) \quad (\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}_+) \quad (\forall z \in ((x-x')^+)^\perp)$$

$$\|(x-x')^+\| \leq \|(1-\mu)(x-x')^+ + (\lambda(y-y'+z) + \mu(x-x')^+)^+\|$$

Démonstration : D'après la définition 2.2. et la proposition 1.2., A est T-accrétif s.s.i., pour tout $[x,y],[x',y'] \in A$,

$$w_S(y-y') \geq 0$$

c'est-à-dire : $\forall b \in \mathbb{R}_+$, $\forall z \in ((x-x')^+)^\perp$,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\|(x-x')^+ + \lambda \sup(y-y'+z, -b(x-x')^+)\| - \|(x-x')^+\|}{\lambda} \geq 0,$$

ce qui est équivalent à, puisque l'application
$\lambda \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{\|X+\lambda Y\| - \|X\|}{\lambda}$ est croissante,

$\forall \lambda > 0$, $\|(x-x')^+\| \leq \|(x-x')^+ + \lambda \sup(y-y'+z, -b(x-x')^+)\|$.

Cette dernière inégalité s'écrit encore, en utilisant $\sup(X,Y) = (X-Y)^+ + Y$,

$$\|(x-x')^+\| \leq \|(1-\lambda b)(x-x')^+ + (\lambda(y-y'+z) + \lambda b(x-x')^+)^+\|.$$

<u>Proposition 2.3. Soit</u> A <u>un opérateur de</u> X.

1) <u>Si</u> A <u>est</u> T-<u>accrétif, alors, pour tout</u> $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ <u>est une application de</u> $R(I+\lambda A)$ <u>dans</u> X <u>qui est une</u> T-<u>contraction</u>.

2) <u>On suppose que, pour tout</u> $x \in X$, $W_+(x^+)$ <u>est égal au sous-différentiel en</u> x, $\partial g(x)$, <u>de l'application</u> $g : x \longmapsto \frac{1}{2}\|x^+\|^2$. <u>Si, pour tout</u> $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ <u>est une</u> T-<u>contraction de</u> $R(I+\lambda A)$ <u>dans</u> X, <u>alors</u> A <u>est</u> T-<u>accrétif</u>.

Démonstration de 1) : Soient $[x,y]$, $[x',y'] \in A$ et $\lambda > 0$.
D'après la proposition 2.2. on a :

$$\|(x-x')^+\| \leq \|(\lambda(y-y')+x-x')^+\|$$

en prenant $\mu = 1$ et $z = -\frac{1}{\lambda}(x-x')^-$.

[Voici une démonstration directe de cette inégalité : il existe $w \in W_+((x-x')^+)$ tel que $(y-y',w) \geq 0$. Ainsi,

$$\|(x-x')^+\|^2 = ((x-x')^+,w) = (x-x',w) \leqslant (x-x'+\lambda(y-y'),w)$$

$$\leqslant ((x-x'+\lambda(y-y'))^+,w) \leqslant \|(x-x'+\lambda(y-y'))^+\| \, \|(x-x')^+\| \, .$$

Il en résulte que $\|(x-x')^-\| \leqslant \|(x-x'+\lambda(y-y'))^-\|$.
Si $x+\lambda y = x'+\lambda y'$, on a $(x-x'+\lambda(y-y'))^+ = (x-x'+\lambda(y-y'))^- = 0$ donc $x-x' = 0$. Ainsi $(I+\lambda A)^{-1}$ est une application de $R(I+\lambda A)$ dans X qui est une T-contraction.

Démonstration de 2) :

Lemme. Soient x, $y \in X$. Alors il existe $w \in \partial g(x)$ tel que :

$$(y,w) = \|x^+\| \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\|(x+\lambda y)^+\| - \|x^+\|}{\lambda} \, .$$

Démonstration du lemme : Puisque l'application $t \longmapsto \|(x+ty)^+\|$ est convexe, cette limite existe et nous la noterons $\phi(x,y)$.

Remarquons d'abord que : $\phi(x,y) \leqslant \|y^+\|$, l'application $y \longmapsto \phi(x,y)$ est sous linéaire et $\phi(x,ax+y) = a\|x^+\| + \phi(x,y)$, où $a \in \mathbb{R}$; ces propriétés se démontrent facilement en utilisant des relations employées dans la démonstration du lemme de la proposition 1.2.

Maintenant, soit $F = \{u = \alpha(x+y) ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $\ell(u) = \alpha\|x^+\|\phi(x,x+y)$ Alors ℓ est une forme linéaire sur le sous-espace vectoriel F , telle que $\ell(u) \leqslant \|x^+\|\phi(x,u)$. De plus $u \longmapsto \|x^+\|\phi(x,u)$ est sous-linéaire. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire w telle que $w=\ell$ sur F et $w(u) \leqslant \|x^+\|\phi(x,u)$, pour tout $u \in X$. On a

$$w(x+y) = \|x^+\|\phi(x,x+y) = \|x^+\|^2 + \|x^+\|\phi(x,y) \, .$$

Or, $w(x) \leqslant \|x^+\|^2$ et $w(y) \leqslant \|x^+\|\phi(x,y)$, donc $w(x) = \|x^+\|^2$ et $w(y) = \|x^+\|\phi(x,y)$.
De plus, on vérifie que $\|w\| \leqslant \|x^+\|$.
Ainsi, $2(u-x,w) - \|u^+\|^2 + \|x^+\|^2 \leqslant 2\|x^+\|\|u^+\| - \|u^+\|^2 - \|x^+\|^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire que $w \in \partial g(x)$, et le lemme est démontré.

Soient $[x,y], [x',y'] \in A$. D'après le lemme et puisque $W_+((x-x')^+) = \partial g(x-x')$, il existe $w \in W_+((x-x')^+)$ tel que :

$$\|(x-x')^+\| \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\|(x-x'+\lambda(y-y'))^+\| - \|(x-x')^+\|}{\lambda} = (y-y',w) \, .$$

Comme le premier membre est positif pour tout $\lambda>0$, $(y-y',w)$ est positif et ainsi A est T-accrétif.

2.3. Relations entre une T-contraction et une contraction et entre un opérateur T-accrétif et un opérateur accrétif.

Définition 2.3. Soit X un Banach réticulé.
On dit que X a la propriété P si et seulement si :

$$(\|x^+\|=\|y^+\| , \|x^-\|=\|y^-\|) \Longrightarrow (\|x\|=\|y\|) .$$

Exemples de Banach réticulés ayant la propriété P :

1) $C(X)$, où X est compact. C'est évident.

2) $L^p(S,\mu)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$ (cf[1])

3) H espace de Hilbert, car $\|x\|^2 = \|x^+\|^2 + \|x^-\|^2$.

Exemple de Banach réticulé n'ayant pas la propriété P :

Soient $1\leqslant p_1<p_2\leqslant+\infty$.
Soit $L = \{f=f_1+f_2 \,;\, f_1\in L^{p_1} , f_2\in L^{p_2}\}$, muni de la relation d'ordre :

$$(f\leqslant g) \Longleftrightarrow (f_1\leqslant g_1 , f_2\leqslant g_2)$$

et de la norme : $\|f\| = \|f_1\|+\|f_2\|$.

Alors L est un Banach réticulé qui n'a pas la propriété P .

En effet : soient $1<p_1<\infty$, $p_2=1$.
Soit f_1 tel que : $\|f_1\| < \|f_1^+\|+\|f_1^-\|$.
Soit g_2 tel que : $\|g_2^+\| = \|f_1^+\|$, $\|g_2^-\| = \|f_1^-\|$.
Soient $f=f_1$ et $g=g_2$. On a alors :

$$\|f^+\| = \|f_1^+\| = \|g_2^+\| = \|g^+\|$$

$$\|f^-\| = \|f_1^-\| = \|g_2^-\| = \|g^-\|$$

$$\|f\| = \|f_1\| < \|f_1^+\|+\|f_1^-\| = \|g_2^+\|+\|g_2^-\| = \|g_2\| = \|g\| .$$

Lemme. Si X a la propriété P, alors :

$$(\|x^+\| \leqslant \|y^+\| \ , \ \|x^-\| \leqslant \|y^-\|) \implies (\|x\| \leqslant \|y\|) \ .$$

En effet, $\|x^+\| = \alpha\|y^+\|$ et $\|x^-\| = \beta\|y^-\|$, où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.
Soit $z = \alpha y^+ - \beta y^-$. On a $z^+ = \alpha y^+$ et $z^- = \alpha y^-$, d'où $\|z\| = \|x\|$ d'après P. D'autre part, $\|z\| \leqslant \|y\|$, car

$$|z| = \alpha y^+ + \beta y^- \leqslant y^+ + y^- = |y| .$$

Ainsi $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Proposition 2.4. On suppose que X a la propriété P. Alors toute T-contraction de X est une contraction et tout opérateur T-accrétif de X est accrétif.

Démonstration : Soit U une T-contraction. Pour tout $x, x' \in D(U)$ on a $\|(Ux-Ux')^+\| \leqslant \|(x-x')^+\|$ et $\|(Ux-Ux')^-\| \leqslant \|(x-x')^-\|$, donc, d'après P, $\|Ux-Ux'\| \leqslant \|x-x'\|$.

Soit A un opérateur T-accrétif. D'après la proposition 2.3. et la propriété P, on a

$$(\forall [x,y],[x',y'] \in A) \ (\forall \lambda>0) \ , \ \|x-x'\| \leqslant \|x-x' + \lambda(y-y')\|$$

c'est-à-dire que A est accrétif.

Proposition 2.5. Tout Banach réticulé possède une norme équivalente telle que P soit vérifiée.

En effet, $n(x) = \|x^+\| + \|x^-\|$ est une norme sur X, qui est équivalente à $\|.\|$ car $\|x\| \leqslant n(x) \leqslant 2\|x\|$ et telle que (X,n) ait la propriété P.

Conséquence. Tout opérateur T-accrétif du Banach réticulé $(X,\|.\|)$ est un opérateur accrétif de (X,n).

Remarque : (X,n) n'est pas un Banach réticulé.

2.4. Semi-groupes de T-contractions.

Définition 2.4. Soit $C \subset X$. On appelle semi-groupe de T-contraction sur C une application S définie sur $[0,+\infty[$ telle que $(S(t))_{t\geqslant 0}$ soit un semi-groupe continu, non linéaire et que $S(t)$ soit une T-contraction de C dans C pour tout $t\geqslant 0$.

On note $Q_T(C)$ l'ensemble des semi-groupes de T-contractions sur C.

Proposition 2.6.

1) Si U est une T-contraction de X, alors $I - U$ est B-T-accrétif.

2) Soit $S \in Q_T(C)$. Alors le générateur infinitésimal A_S de S (faible ou fort) est B-T-accrétif.

Démonstration : 1) Soient x, $x' \in D(U)$ et $w \in W_+((x-x')^+)$.

$$(x-Ux-x'+Ux',w) = ((x-x')^+ - (x-x')^- - (Ux-Ux')^+ + (Ux-Ux')^-, w)$$

$$\geqslant \|(x-x')^+\|^2 - ((Ux-Ux')^+, w) .$$

Or, $|((Ux-Ux')^+, w)| \leqslant \|(Ux-Ux')^+\| \, \|(x-x')^+\| \leqslant \|(x-x')^+\|^2$

donc $(x-Ux-x'+Ux',w) \geqslant 0$.

Ainsi $I - U$ est B-T-accrétif.

2) Soient x, $x' \in D(A_S)$ et $w \in W_+((x-x')^+)$.

D'après 1) on a $\left(\frac{x - S(t)x}{t} - \frac{x' - S(t)x'}{t}, w\right) \geqslant 0$, pour tout $t>0$.

Quand $t \longrightarrow 0^+$, on obtient $(A_S x - A_S x', w) \geqslant 0$.

Ainsi A_S (générateur fort ou faible) est B-T-accrétif.

Proposition 2.7. Soit A un opérateur T-accrétif de X tel que $R(I+\lambda A) \supset \overline{D(A)}$ pour $0<\lambda<\lambda_0$.

Alors $S(t)x = \lim\limits_{n\to\infty} (I + \frac{t}{n} A)^{-n}x$ existe pour tout $x \in \overline{D(A)}$ et $t>0$, et $S \in Q_T(\overline{D(A)})$.

Démonstration : Puisque A est T-accrétif, A est un opérateur accrétif de (X,n). D'après un théorème de Crandall et Liggett ([3] ou [9]), $S(t)x = \lim(I + \frac{t}{n}A)^{-n}x$ existe pour tout $x \in \overline{D(A)}$ et $t>0$ et S est un semi-groupe continu sur $\overline{D(A)}$.

Montrons que $S(t)$ est une T-contraction de $\overline{D(A)}$ dans $\overline{D(A)}$. Soit $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$. Soient $x, x' \in \overline{D(A)}$. Puisque J_λ est une T-contraction, J_λ^n est encore une T-contraction pour tout n. Par conséquent, et en utilisant la continuité de l'application $X \longmapsto X^+$, on a :

$$\|(S(t)x - S(t)x')^+\| = \|(\lim_{n\to\infty} (J^n_{\frac{t}{n}}x - J^n_{\frac{t}{n}}x'))^+\|$$

$$= \|\lim_{n\to\infty} (J^n_{\frac{t}{n}}x - J^n_{\frac{t}{n}}x')^+\| \leq \|(x-x')^+\|.$$

Ainsi $S \in Q_T(\overline{D(A)})$.

Bibliographie.

[1] F. BOHNENBLUST : An axiomatic characterization of L^p-spaces. Duke Math. J. 6 (1940), 627-640.

[2] B. CALVERT : Non linear evolution equations in Banach lattices. Bull. Am. Math. Soc. 76 (1970), 845-950.

[3] M. CRANDALL and T. LIGGETT: Generation of semi-groups of non-linear transformations on general Banach spaces (à paraître).

[4] G. JAMESON : Ordered linear spaces. Lecture notes in mathematics n°141.

[5] R. PHILLIPS : Semi-groups of positive contraction operators. Czechoslovak Math. J.12 (87) (1962), 294-313.

[6] K. SATO : On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices. J. Math. Soc. Japan, 20 (1968) 423-436.

[7] K. SATO : On dispersive operators in Banach lattices. Pacific Journal of Mathematics 33 (1970) 429-443.

Séminaire sur les semi-groupes et les opérateurs non linéaires.

[8] Exposé n°1.

[9] Exposé n°4.

-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires

Orsay 1970-71

Exposé n°6

SOLUTIONS FAIBLES D'EQUATIONS D'EVOLUTION DANS UN ESPACE REFLEXIF

Ph. BENILAN

Dans cet exposé X désigne un espace de <u>Banach réflexif</u> de dual X', de norme $|.|$ et, d'application de dualité W ; on pose pour $[x,y] \in X \times X$ $\langle y,x\rangle_s = \sup\{\langle y,w\rangle ; w \in W(x)\}$. On se donne $w \in \mathbb{R}$ et A un opérateur de X tel que $A+wI$ soit <u>m-accrétif</u>. On renvoie aux exposés 1 et 3 pour l'étude de ces notions.

Etant donné $f \in L^1(0,T;X)$, on étudie les solutions de l'équation

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \ .$$

Dans la partie I, on introduit et étudie les solutions faibles de cette équation. On généralise ainsi les résultats de Ph. Bénilan et H. Brézis [1] en précisant la régularité des solutions en fonction de la régularité de la norme de X.

Dans la partie II, nous reprenons avec une légère amélioration les résultats de [1] concernant les solutions faibles lorsque X est un espace de Hilbert et $\mathrm{Int}\,(\mathrm{conv}\,D(A)) \neq \emptyset$, cas qui recouvre les espaces de Hilbert de dimension finie (remarque 8).

Nous noterons $W^{1,p}(0,T;X)$ l'espace des fonctions $u \in \mathscr{C}([0,T];X)$ telles qu'il existe $\phi \in L^p(0,T)$ vérifiant

$$|u(t)-u(s)| \leq \int_s^t \phi(\tau)\,d\tau \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T \ .$$

Si $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, u est absolument continue et donc p.p. dérivable, et $\frac{du}{dt} \in L^p(0,T;X)$. On pourra trouver par exemple dans l'appendice de [2] une étude des espaces $W^{1,p}(0,T;X)$.

I - Solutions faibles.

Définition 1. On note Φ_A la fermeture dans $\mathcal{C}([0,T];X) \times L^1(0,T;X)$ de $\{[u,f] \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;X)\ ;\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[\}$. Etant donné $f \in L^1(0,T;X)$ on appelle solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction u telle que $[u,f] \in \Phi_A$.

Donnons d'abord quelques inégalités fondamentales :

Proposition 1. Soient $[u,f]$ et $[v,g] \in \Phi_A$. On a pour $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$(1)\quad \frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} e^{2w(t-s)}|u(s)-v(s)|^2 + \int_s^t e^{2w(t-\tau)} \langle f(\tau)-g(\tau), u(\tau)-v(\tau)\rangle_s \, d\tau$$

$$(2)\quad |u(t)-v(t)| \leq e^{w(t-s)}|u(s)-v(s)| + \int_s^t e^{w(t-\tau)}|f(\tau)-g(\tau)|\,d\tau$$

L'inégalité (2) de déduit de (1) grâce au lemme élémentaire suivant en posant $\phi(t) = e^{-wt}|u(t)-v(t)|$ et $\psi(t) = e^{-wt}|f(t)-g(t)|$:

Lemme 1. Soient $\phi \in \mathcal{C}([0,T])$ et $\psi \in L^1(0,T)$ tels que

$$\frac{1}{2}\phi(t)^2 \leq \frac{1}{2}\phi(s)^2 + \int_s^t \phi(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Alors $\phi(t) \leq \phi(s) + \int_s^t \psi(\tau)\,d\tau$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Démonstration de (1) : Compte tenu des propriétés de $\langle\ ,\ \rangle_s$ (cf. exposé n°3, appendice 1) l'inégalité (1) est invariante par passage à la limite dans $\mathcal{C}([0,T];X) \times L^1(0,T;X)$. On peut donc supposer $u,v \in W^{1,1}(0,T;X)$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$, $\frac{dv}{dt}(t) + Av(t) \ni g(t)$ p.p. $t \in]0,T[$. On a alors en appliquant l'accrétivité de $A+wI$ et la Proposition 1.5 de l'exposé n°1,

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq w|u(t)-v(t)|^2 + \langle f(t)-g(t), u(t)-v(t)\rangle_s \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[$$

d'où $$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,e^{-2wt}|u(t)-v(t)|^2 \leq e^{-2wt}\langle f(t)-g(t), u(t)-v(t)\rangle_s \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[$$

et l'inégalité (1) en intégrant.

Donnons un cas particulier de (1) lorsque $w=0$.

Corollaire 1. Si A est m-accrétif ($w=0$), soit $[u,f] \in \Phi_A$.

$$(3) \qquad \langle u(t)-u(s), u(s)-x\rangle_s \leqslant \int_s^t \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x\rangle_s \, d\tau$$

pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *et* $[x,y] \in A$.

Le théorème suivant montre que le problème $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ est bien posé en terme de solution faible :

Théorème 1. Soient $f \in L^1(0,T;X)$ *et* $x \in \overline{D(A)}$ *. Il existe une solution faible unique* u *de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *telle que* $u(0) = x$.

L'unicité résulte immédiatement de (2). Pour démontrer l'existence considérons $\Gamma = \{[x,f] \in \overline{D(A)} \times L^1(0,T;X)$; il existe une solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = x\}$.

D'abord Γ est fermé, car si $[x_n, f_n] \longrightarrow [x,f]$ dans $\overline{D(A)} \times L^1(0,T;X)$ et u_n est solution faible de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ telle que $u_n(0) = x_n$, d'après (2)

$$|u_n(t)-u_m(t)| \leqslant e^{wt}|x_n-x_m| + \int_s^t e^{w|t-\tau|}|f_n(\tau)-f_m(\tau)\, d\tau$$

$$\leqslant e^{|w|T}\{|x_n-x_m| + \|f_n-f_m\|_{L^1}\} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] .$$

Donc u_n converge uniformément vers une fonction u qui par définition est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Soit maintenant $y \in X$. L'opérateur $A_y = A-y$ est tel que $A_y + wI$ est m-accrétif ; notons $S_y(t)$ le semi-groupe pseudo-engendré par A_y (cf. exposé n°4). Pour $x \in D(A)$, la fonction $S_y(t)x$ est lipschitzienne et $\frac{d}{dt} S_y(t)x + A_y S_y(t)x \ni 0$ p.p. t , c'est-à-dire $\frac{d}{dt} S_y(t)x + AS_y(t)x \ni y$ p.p. t . Si l'on prend $x \in \overline{D(A)}$, la fonction $S_y(t)x$ est donc solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni y$. Etant données alors $x \in \overline{D(A)}$ et f fonction en escalier sur $[0,T[$ définie sur la subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = T$ par $f \equiv y_i$ sur $[a_{i-1}, a_i[$, $[x,f] \in \Gamma$; en effet il suffit de considérer u définie par $u(0) = x$, $u(t) = S_{y_i}(t)\, u(a_{i-1})$ sur $]a_{i-1}, a_i]$.

L'espace des fonctions en escalier étant dense dans $L^1(0,T;X)$, le théorème est démontré.

Etudions maintenant les solutions faibles. Introduisons d'abord quelques notations et définitions.

<u>Définition 2</u>. Soit $f \in L^1(0,T;X)$. On dit que $t \in [0,T[$ est <u>point de Lebesgue à droite</u> de f s'il existe $y \in X$ tel que

$\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau)-y|\, d\tau = 0$. La valeur y est alors égale à

$$f(t+0) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\, d\tau \ .$$

Rappelons que l'ensemble des points de Lebesgue, et donc a fortiori des points de Lebesgue à droite, est de complémentaire négligeable.

<u>Définition 3</u>. Soit $u \in \mathscr{C}([0,T];X$ et $t \in [0,T[$. On pose

$D^+u(t) = \bigcap\limits_{\varepsilon>o} \overline{\text{conv}} \{\frac{u(t+h)-u(t)}{h} ; 0<h<\varepsilon\}$ où $\overline{\text{conv}}$ désigne l'enveloppe convexe fermée.

Si $\underline{\lim}_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} < +\infty$, $D^+u(t) \neq \emptyset$;

si $\overline{\lim}_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} < +\infty$, u est faiblement dérivable à droite en t si et seulement si $D^+u(t)$ est réduit à un élément.

<u>Définition 4</u>. Soit E partie de X , on pose $|E| = \inf\{|y|;y \in E\}$ et $E^\circ = \{y \in E; |y| = |E|\}$.

<u>Théorème 2. Soient</u> $[u,f] \in \Phi_A$ <u>et</u> t <u>point de Lebesgue à droite de</u> f . <u>Il y a équivalence entre les propriétés suivantes</u> :

i) $u(t) \in D(A)$

ii) $D^+u(t) \neq \emptyset$

iii) $\overline{\lim}_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} < +\infty$.

<u>Alors</u> $D^+u(t) \subset (f(t+0)-Au(t))^\circ$

<u>et</u> $\frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \longrightarrow |f(t+0)-Au(t)|$ <u>lorsque</u> $h \longrightarrow 0$, $h>0$.

Trivialement (iii) $\Longrightarrow$ ii) . On peut d'autre part supposer $w=0$ en remplaçant A par $A+wI$ et f par $f+wu$.

Supposons $\alpha \in D^+u(t)$. Pour tout $[x,y] \in A$, d'après (3) ,

$$<\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\, ,\, u(t)-x>_s \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} <f(\tau)-y,u(\tau)-x>_s \, d\tau$$

d'où puisque $< , >_s$ est sous-linéaire continue en la première variable

$$<\alpha,u(t)-x>_s \leq \sup_{0<h<\varepsilon} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} <f(\tau)-y,u(\tau)-x>_s \, d\tau \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon>0 .$$

En faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$, puisque t est point de Lebesgue à droite de f et $< , >_s$ s.c.s.,

$$<\alpha,u(t)-x>_s \leq <f(t+0)-y,u(t)-x>_s .$$

Ceci étant vrai pour tout $[x,y] \in A$, opérateur accrétif maximal, $u(t) \in D(A)$ et $f(t+0)-\alpha \in Au(t)$. En particulier ii) $\Longrightarrow$ i) et $D^+u(t) \subset f(t+0)-Au(t)$.

Supposant i) vérifié, d'après (2) appliqué avec $v \equiv u(t)$ et $g \equiv y \in Au(t)$, $\overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leq |f(t+0)-y|$ pour tout $y \in Au(t)$. Donc i) $\Longrightarrow$ iii) et $\overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leq |f(t+0)-Au(t)|$.

Pour tout $\alpha \in D^+u(t)$, $|\alpha| \leq \overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$; donc $D^+u(t) \subset (f(t+0)-Au(t))^o$. Enfin puisqu'il existe $\alpha \in D^+u(t)$ tel que

$|\alpha| \leq \underline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h}$, $\frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \longrightarrow |f(t+0)-Au(t)|$ lorsque $h \longrightarrow 0$, $h>0$.

<u>Corollaire 2. Soit</u> $[u,f] \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;X)$. <u>Il y a équivalence entre les propriétés suivantes</u> :

a) u <u>solution faible de</u> $\frac{du}{dt} + Au \ni f$;

b) $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[$;

c) $\frac{du}{dt}(t) \in (f(t)-Au(t))^o$ p.p. $t \in]0,T[$.

Remarque 1. Sous les hypothèses du théorème, lorsque $u(t) \in D(A)$ et $(f(t+0)-Au(t))^o$ est réduit à un élément, u est faiblement dérivable à droite. Ceci est vrai en particulier si A est univoque, aussi si $A+wI$ est accrétif au sens de Browder et X strictement convexe. Remarquons que notre méthode permet d'améliorer ce résultat car $D^+u(t)$ est un convexe dont tous les points sont équidistants de l'origine.

Proposition 2. Avec les hypothèses du théorème 2, supposons X strictement convexe (resp. uniformément convexe). Alors i), ii) et iii) sont équivalents à

iv) u est faiblement (resp. fortement) dérivable à droite en t.

Remarque 2. Pour obtenir l'équivalence iv), il est nécessaire de faire des hypothèses de régularité sur la norme. Un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme ℓ_∞ le montre. Donnons-nous pour cela une fonction ϕ continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable à droite en tout $t \in]0,+\infty[$ avec $|\frac{d^+\phi}{dt}(t)| \leq 1$, non dérivable à droite en 0 avec $\phi(0) = 0$.

Prenons pour A un prolongement m-accrétif (cf. théorème 3 de l'exposé n°3) de l'opérateur accrétif univoque qui à tout point $(x,\phi(x))$, $x \in]0,+\infty[$, fait correspondre $(1, \frac{d^+\phi}{dt}(x))$. Puisque A est fermé, le point $(0,0) \in D(A)$.

La fonction $u(t) = -(t,\phi(t))$ est solution de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ $u(0) \in D(A)$, mais u n'est pas dérivable à droite en 0.

Proposition 3. Supposons la norme différentiable et soient $[u,f] \in \Phi_A$ et $t_o \in [0,T]$ tels que $\lim\limits_{\substack{t\to t_o \\ t\neq t_o}} \{|\frac{u(t)-u(t_o)}{t-t_o}| + \frac{1}{t-t_o}\int_{t_o}^{t} |f(\tau)|\, d\tau\} < +\infty$.

Alors $u(t) \in D(A)$.

Soit en effet $t_n \longrightarrow t_o$ telle que $\frac{u(t_n)-u(t_o)}{t_n-t_o} \rightharpoonup \alpha$,

$\frac{1}{t_n-t_o}\int_{t_o}^{t_n} f(\tau)\, d\tau \rightharpoonup \beta$ et $\frac{1}{t_n-t_o}\int_{t_o}^{t_n} |f(\tau)|d\tau$ borné. Alors pour tout $[x,y] \in A$, d'après (3),

$$\text{si } t_n > t_o\,,\quad \langle \frac{u(t_n)-u(t_o)}{t_n-t_o}, W(u(t_o)-x)\rangle \leq \frac{1}{t_n-t_o}\int_{t_o}^{t_n} \langle f(\tau)-y, W(u(\tau)-x)\rangle\, d\tau$$

si $t_n < t_o$, $< \frac{u(t_o)-u(t_n)}{t_o-t_n}$, $W(u(t_n)-x)> \leq \frac{1}{t_o-t_n} \int_{t_n}^{t_o} <f(\tau)-y, W(u(\tau)-x)> d\tau$.

Mais puisque W est continue, à la limite,
$<\alpha, W(u(t_o)-x> \leq <\beta-y, W(u(t_o)-x)>$. Donc $u(t_o) \in D(A)$ et $\beta-\alpha \in Au(t_o)$.

Remarque 3. On pourrait à loisir raffiner les résultats de cette technique. Notons par exemple lorsque A est univoque, $[u,f] \in \Phi_A$ et $t \in [0,T[$ est tel que $\overline{\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau)| d\tau < +\infty$, il y a équivalence entre :

α) u est faiblement dérivable à droite,

β) $\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\, d\tau$ converge faiblement lorsque $h \longrightarrow 0$, $h>0$.

Alors $u(t) \in D(A)$ et $\frac{d^+u}{dt} + Au(t) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\, d\tau$.

Donnons quelques corollaires de ces deux théorèmes :

Proposition 4. Supposons $D(A)$ fermé et l'application $x \longrightarrow |Ax|$ bornée sur tout compact de $D(A)$. Alors pour tout $x \in D(A)$ et $f \in L^P(0,T;X)$, il existe $u \in W^{1,P}(0,T;X)$ unique tel que $u(0)=x$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[$.

Soit en effet, d'après le théorème 1, u la solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0)=x$. Posons $M = \sup\{|Au(t)|; t \in [0,T]\} < +\infty$. Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, d'après (2),

$$|u(t)-u(s)| \leq \int_s^t e^{w(t-\tau)} |f(\tau)-y)\, d\tau \ , \ \forall\ y \in Au(s)$$

et donc $|u(t)-u(s)| \leq \int_s^t e^{|w|T} \{M+|f(\tau)|\}\, d\tau$.

Donc $u \in W^{1,P}(0,T;X)$. D'après le corollaire 2, $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[$.

Remarque 4. Les hypothèses de la proposition 4 sont en particulier vérifiées dans les cas suivants :

- X Hilbert et $A = \partial\psi_C$, sous-différentielle de la fonction indicatri[ce] d'un convexe fermé C . En effet alors pour tout $x \in C$, $0 \in \partial\psi_C x$.

- X Hilbert ou X de dimension finie et $D(A) = X$. (cf. Proposition de cet exposé et Proposition 2 de l'exposé n°3).

Etudions le cas d'un deuxième membre f à variation bornée.

Définition 5. On dit qu'une fonction f de $[0,T]$ dans X est à variation bornée, s'il existe une constante C telle que pour toute subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T$, $\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq C$.

Le plus petit C vérifiant cette propriété est la variation totale de f sur $[0,T]$, que nous noterons $v_{[0,T]}f$.

Nous noterons $VB([0,T];X)$ l'espace des fonctions à variation bornée.

Il est élémentaire de vérifier que $|f(t)-f(s)| \leq v_{[0,t]}f - v_{[0,s]}f$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$. D'où l'on déduit facilement :

- $\int_0^{T-h} |f(\tau+h)-f(\tau)|\,d\tau \leq h\, v_{[0,T]}f$;

- pour tout $t \in [0,T[$, $f(t+h)$ converge fortement lorsque $h \to 0$, $h>0$;

- l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable

Proposition 5. Soient $f \in VB([0,T];X)$ et u solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) $u(0) \in D(A)$

ii) $u \in W^{1,\infty}(0,T;X)$.

Alors pour tout $t \in [0,T]$, $u(t) \in D(A)$.
Si X est strictement convexe (resp. uniformément convexe), u est faiblement (resp. fortement) dérivable à droite en tout $t \in [0,T[$.

Si $u \in W^{1,\infty}(0,T;X)$, d'après le théorème 2 et les propriétés de f, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T[$ et $D^+u(t) \subset (f(t+0)-Au(t))^0$.
D'où aussi les propriétés supplémentaires si X est strictement ou uniformément convexe.

Si $u(0) \in D(A)$, d'après le théorème 1, $\frac{|u(h)-u(0)|}{h}$ est borné lorsqu$h \to 0$. D'autre part appliquant l'inégalité (2)

$$|u(t+h)-u(t)| \leq e^{wt}|u(h)-u(0)| + \int_0^t \{e^{w(t-\tau)}|f(\tau+h)-f(\tau)|\}\,d\tau$$

$$\leq h\, e^{|w|T}\left\{\frac{|u(h)-u(0)|}{h} + v_{[0,T]}f\right\} .$$

Donc $u \in W^{1,\infty}(0,T;X)$.

Pour voir que $u(T) \in D(A)$, il suffit de prolonger f par une constante à droite de T et d'utiliser le théorème 1 pour prolonger la solution faible. D'après ce qui précède ce prolongement sera lipschitzien et donc $u(T) \in D(A)$.

En particulier, on obtient

Corollaire 3. Soit $S(t)$ le semi-groupe pseudo-engendré par A . Notant A^o l'opérateur $x \longmapsto (Ax)^o$,

$$D(A^o) = D(A) = \{x \in \overline{D(A)} \; ; \; \overline{\lim_{t \downarrow 0}} \frac{|S(t)x-x|}{t} < +\infty\}$$

$$= \{x \in \overline{D(A)} \; ; \; \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathrm{conv}} \{\frac{S(t)x-x}{t} \; ; \; 0<t<\varepsilon\} \neq \emptyset\} .$$

De plus si X est strictement (resp. uniformément) convexe, le générateur infinitésimal faible (resp. fort) de $S(t)$ est une section de A^o de même domaine que A .

Remarque 5. Tout point x où $A^o x$ est réduit à un élément, appartient au domaine du générateur faible. Le contre-exemple de Crandall et Liggett (cf. exposé n°4) montrant qu'un semi-groupe peut admettre plusieurs pseudo-générateurs semble indiquer que la réciproque est fausse dans le cas général.

Remarque 6. Soit $[u,f] \in \mathcal{C}([0,T];X) \times VB([0,T];X)$ avec $u(0) \in D(A)$. D'après le corollaire 2 et la Proposition 5 il y a équivalence entre

a) u solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$

b) $u \in W^{1,\infty}(0,T;X)$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[$.

Lorsque X est uniformément convexe, on peut ajouter

c) u est fortement dérivable à droite et $\frac{d^+u}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable.

Lorsque X est de dimension finie, on a aussi

d) $D^+u(t) + Au(t) \ni f(t)$ pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable.

II - Cas particulier.

Dans tout ce paragraphe X est un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et A vérifie $\mathrm{Int\ conv}\ D(A) \neq \emptyset$.

Nous utilisons le résultat de Rokafellar [4] dont nous donnons une démonstration simplifiée :

Proposition 6. Supposons que $\mathrm{Int\ conv}\ D(A) \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Int}\ D(A) = \mathrm{Int}\ \overline{D(A)}$ est un convexe non vide et A est borné au voisinage de tout point intérieur à $D(A)$.

Utilisons le lemme suivant :

Lemme 2. Soit D_n une suite croissante de parties de H. Posons $D = \bigcup_n D_n$ et supposons $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D) \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D) = \bigcup_n \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_n})$.

Posons en effet $\Omega = \mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D)$. Puisque D_n est croissante, $\mathrm{conv}\ D = \bigcup_n \mathrm{conv}\ D_n$ et donc $\Omega \subset \bigcup_n \overline{\mathrm{conv}\ D_n} \subset \overline{\Omega}$. Appliquant le théorème de Baire, il existe n_o tel que $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_{n_o}}) \neq \emptyset$; par suite pour $n \geqslant n_o$, $\overline{\mathrm{conv}\ D_n} = \overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_n})}$. On a donc $\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_n})}$. Mais $\bigcup_n \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_n})$ est un convexe ouvert, donc $\Omega = \mathrm{Int}\ \overline{\Omega} = \bigcup_n \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D_n})$

Démontrons alors le résultat. Posons $A_n = \{[x,y] \in A; |x| \leqslant n \text{ et } |y| \leqslant n$ Puisque $D(A) = \bigcup_n D(A_n)$, d'après le lemme 1, $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A)) = \bigcup_n \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D(A_n)})$. Puisque $\overline{D(A)}$ est convexe (cf. exposé n°3, lemme 2), il suffit de démontrer que A est borné au voisinage de tout point intérieur à $\mathrm{conv}\ D(A)$. On aura alors en effet $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A)) \subset D(A)$, car A étant demi-fermé (cf. exposé n°1), s'il est borné au voisinage d'un point $x_o \in \overline{D(A)}$, le point $x_o \in D(A)$; d'où $\mathrm{Int}\ D(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A)) = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}\ D(A)}) = \mathrm{Int}\ \overline{D(A)}$.

Soit $x_o \in \mathrm{Int}(\mathrm{conv}\ D(A))$. Il existe $\rho>0$ et n tels que $\{|x-x_o| \leqslant \rho\} \subset \overline{\mathrm{conv}\ D(A_n)}$. Montrons que A est borné sur $\{|x-x_o| \leqslant \frac{\rho}{2}\}$: soit en effet $[x,y] \in A$ tel que $|x-x_o| \leqslant \frac{\rho}{2}$. Pour tout $[\xi,\eta] \in A_n$, $(\eta-y,\xi-x) \geqslant -w|\xi-x|^2$ et donc $(y,\xi-x) \leqslant (2+|w|)n^2$; d'où pour tout $\xi \in \overline{\mathrm{conv}\ D(A_n)}$, $(y,\xi-x) \leqslant (2+|w|)n^2$ et par suite

$$|y| = \frac{2}{\rho} \sup_{|\xi-x|=\rho/2} (y,\xi-x) \leq \frac{2(2+|w|)n^2}{\rho} .$$

Enonçons le théorème :

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> $[u,f] \in \Phi_A$.

1) u <u>est à variation bornée et</u>

$$v_{[0,T]} u \leq C\{(1+\|f\|_{L^1}+|w|T\|u\|_{L^\infty})(1+\|u\|_{L^\infty}) + |u(0)|^2\}$$

<u>où</u> C <u>est une constante ne dépendant que de</u> A .

2) <u>Pour tout</u> $t \in]0,T]$ <u>tel que</u> $\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} |f(\tau)|d\tau < +\infty$, $u(t) \in D(A)$.

<u>Démonstration de 1)</u> : On peut toujours supposer $0 \in \operatorname{Int} D(A)$.
Soient $\rho>0$ et M tels que $|\xi|=\rho \implies \xi \in D(A)$ et $|A^o\xi| \leq M$. On a alors pour tout $[x,y] \in A$, $(y-A^o\xi, x-\xi) \geq -w|x-\xi|^2$ pour tout ξ tel que $|\xi|=\rho$, d'où en posant $M_1 = M+|w|\rho$,

$$(4) \qquad |y| = \frac{1}{\rho} \sup_{|\xi|=\rho} (y,\xi) \leq \frac{1}{\rho}(y,x) + (M_1+|w||x|)(1+\frac{|x|}{\rho})$$

Soient alors $[u_n,f_n] \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;X)$ tels que $\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) \ni f_n(t)$ p.p. t et $u_n \longrightarrow u$ uniformément, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(0,T;X)$.

Appliquons l'estimation (4) à $[u_n(t), f_n(t)-\frac{du_n}{dt}(t)] \in A$ p.p. $t \in]0,T[$ on obtient,

$$|f_n(t)|-\frac{du_n}{dt}(t)| \leq \frac{1}{\rho}(f_n(t)-\frac{du_n}{dt}, u_n(t)) + (M_1+|w||u_n(t)|)(1+\frac{|u_n(t)|}{\rho})$$

soit

$$|\frac{du_n}{dt}(t)| \leq (1+\frac{|u_n(t)|}{\rho})(|f_n(t)|+M_1+|w||u_n(t)|) - \frac{1}{2\rho}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2 .$$

et en intégrant, pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$|u_n(t)-u_n(s)| \leq (1+\frac{\|u_n\|_{L^\infty}}{\rho}) \int_s^t \{|f_n(\tau)|+M_1+|w||u_n(\tau)|\} d\tau$$
$$+ \frac{1}{2\rho}\{|u_n(s)|^2-|u_n(t)|^2\} .$$

Posant $\phi(\tau) = (1+\frac{|u|_{L^\infty}}{\rho})\{|f(\tau)+M_1+|w||u(\tau)|\}$ on a à la limite

(5) $$|u(t)-u(s)| \leqslant \int_s^t \phi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\rho}(|u(s)|^2-|u(t)|^2) .$$

Cette estimation montre que u est à variation bornée de variation totale inférieure ou égale à $\int_0^T \phi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\rho}\{|u(0)|^2-|u(T)|^2\}$, que l'on peut écrire en regroupant les constantes sous la forme à démontrer.

<u>Démonstration de 2)</u> : Utilisons le lemme géométrique suivant :

<u>Lemme 3</u>. <u>Soient</u> C <u>un convexe ouvert et</u> $x \in \overline{C}$. <u>Il existe</u> $\xi \in C$ <u>tel que</u>

$$|z-\xi|^2 - |x-\xi|^2 \leqslant |z-x|^2 , \quad \forall z \in \overline{C} .$$

D'après le lemme 3, il existe $\xi \in \mathrm{Int}\, D(A)$ tel que $|z-\xi|^2 - |u(t)-\xi|^2 \leqslant |z-u(t)|^2$, $\forall z \in \overline{D(A)}$. Après translation, on peut supposer $\xi=0$. On a donc pour tout $h \in [0,t]$, $|u(t-h)|^2 - |u(t)|^2 \leqslant |u(t-h)-u(t)|^2$. D'où en reprenant l'estimation (5) $|u(t)-u(t-h)| \leqslant \int_{t-h}^t \phi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\rho}|u(t) - u(t-h)|^2$.

La fonction u étant continue en t, il existe $\delta>0$ tel que pour $|h|<\delta$, $|u(t)-u(t-h)| \leqslant \rho$. D'où pour tout $h \in [0,\delta]$, $|u(t)-u(t-h)| \leqslant 2 \int_{t-h}^t \phi(\tau)\, d\tau$.

Par construction de ϕ,

$$\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \{\frac{|u(t)-u(t-h)|}{h} + \frac{1}{h}\int_{t-h}^t |f(\tau)\, d\tau\} < +\infty ,$$

donc d'après la proposition 3, $u(t) \in D(A)$.

Remarquons que si $\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_{t-h}^t |f(\tau)|d\tau < +\infty$, alors $\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|u(t)-u(t-h)|}{h} < +\infty$

<u>Démonstration du lemme 3</u> : On peut toujours supposer $x=0$. Soit $\Gamma = \{\xi \in H ; (\xi,z) \geqslant 0, \forall z \in \overline{C}\}$: c'est un cône convexe fermé. Etant donné $\xi \in C$ considérons ξ_0 la projection de ξ sur C. Pour tout $z \in \Gamma$, $(\xi_0-\xi, z-\xi_0) \geqslant 0$ et donc par homogénéité $(\xi_0-\xi, z) \geqslant 0$ pour tout $z \in \Gamma$. Donc $\xi_0-\xi \in C_1$, cône convexe fermé de sommet 0 engendré par C ; puisque $\xi \in C \subset \mathrm{Int}\, C_1$, on a $\xi_0 \in \mathrm{Int}\, C_1 = \bigcup_{\lambda>0} \lambda C$ et donc il existe $\alpha>0$ tel que

$\alpha\xi_o \in C$; d'autre part puisque $\xi_1 = \alpha\xi_o \in \Gamma$,
$|z-\xi_1|^2 - |\xi_1|^2 = |z|^2 - 2(z,\xi_1) \leq |z|^2 \quad \forall\ z \in \overline{C}$.

On en déduit :

<u>Proposition 7</u>. <u>Soit</u> $f \in L^1(0,T;X)$ <u>tel que</u> $\overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}}\ \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} |f(\tau)|\, d\tau < +\infty$

<u>pour tout</u> $t \in]0,T[$ <u>sauf au plus un ensemble dénombrable</u>.

<u>Pour tout</u> $x \in \overline{D(A)}$, <u>il existe</u> $u \in W^{1,1}(0,T;X)$ <u>unique tel que</u> $u(0)=x$ <u>et</u> $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0,T[$.

Cela résulte du théorème 3 et du lemme suivant :

<u>Lemme 4</u>. <u>Soit</u> $u \in VB([0,T];X) \cap \mathscr{C}([0,T];X)$ <u>tel que</u> $\overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}}\ \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} < +\infty$
<u>pour tout</u> $t \in [0,T[$ <u>sauf au plus un ensemble dénombrable</u>.

<u>Alors</u> $u \in W^{1,1}(0,T;X)$.

Il est facile, en reprenant par exemple la démonstration de Komura [3] pour le cas de fonction absolument continue, de montrer que toute fonction à variation bornée est faiblement p.p. dérivable et que $\frac{du}{dt} \in L^1(0,T;X)$. Montrons que les hypothèses supplémentaires du lemme impliquent $u(t)-u(s) = \int_s^t \frac{du}{dt}(\tau)\, d\tau$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $\xi \in X$, $(u(T)-u(0),\xi) \leq \int_o^T (\frac{du}{dt}(\tau),\xi)\, d\tau$. Posons $\phi(t) = (u(t)-u(0),\xi)$ et $\psi(t) = \overline{\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}}}\ (\frac{u(t+h)-u(t)}{h},\xi)$ qui est finie pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable que nous noterons $\{t_n\}$. On a $\psi(t) = \frac{d\phi}{dt}(t)$ p.p. t et donc $\psi \in L^1(0,T)$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.c.i. telle que $\gamma(t) > \psi(t)$ pour tout $t \neq t_n$ et $\int_o^T \gamma(\tau)\, d\tau \leq \int_o^T \psi(\tau)\, d\tau + \varepsilon$. Considérons la fonction

$$\phi_\varepsilon(t) = \int_o^t \gamma(\tau)\, d\tau - \phi(t) + \varepsilon t + \varepsilon \sum_{t_n < t} \frac{1}{2^n} .$$

Etant donné $t \in [0,T[$. Si $t \neq t_n$, il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(s) \geq \gamma(t)$ et $\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} < \psi(t)+\varepsilon$ pour tout $s \in]t,t+\delta[$.

Alors $\phi_\varepsilon(s)-\phi_\varepsilon(t) = \int_t^s \gamma(\tau)\,d\tau - (\phi(s)-\phi(t)) + \varepsilon(s-t) + \varepsilon \sum_{t \leq t_n < s} \frac{1}{2^n} \geq 0$

si $t=t_{n_0}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\int_t^s \gamma(\tau)\,d\tau - (\phi(s)-\phi(t)) + \varepsilon(s-t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} \quad \text{pour} \quad s \in [t,t+\delta[\; .$$

Alors $\phi_\varepsilon(s)-\phi_\varepsilon(t) \geq 0$.

Donc ϕ_ε est croissante et
$$\phi(T) \leq \int_0^T \gamma(\tau)\,d\tau + \varepsilon T + \varepsilon$$
$$\leq \int_0^T \psi(\tau)\,d\tau + (2+T)\varepsilon \; .$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\phi(T) \leq \int_0^T \psi(\tau)\,d\tau$.

<u>Remarque 7</u>. Les conditions de la proposition 7 sont en particulier vérifiées lorsque $f \in L^\infty_{loc}(0,T;X)$. Il est probable que pour tout $[u,f] \in \Phi_A$, $u \in W^{1,1}(0,T;X)$. On sait le démontrer par exemple si l'on suppose que le bord de $\overline{D(A)}$ est différentiable.

<u>Remarque 8</u>. Lorsque X est un <u>espace de Hilbert de dimension finie</u>, les résultats du théorème 3 et de le proposition 7 sont valables pour un <u>opérateur</u> A (tel que $A+wI$ soit maximal monotone) <u>quelconque</u>. On peut toujours en effet supposer $0 \in D(A)$. Posons X_0 , sous-espace engendré par $D(A)$ et $A_0 = X_0 \times X_0 \cap A$. Etant donnés $[x,y] \in A$ et u orthogonal à X_0 , $y+u \in Ax$ car pour tout $[\xi,\eta] \in A$, $(y+u-\eta, x-\xi) = (y-\eta, x-\xi) \geq -w|x-\xi|^2$. Donc $D(A_0) = D(A)$ et pour tout $x \in D(A)$, $Ax = A_0x + X_1$ où X_1 est le sous-espace orthogonal à X_0 . En particulier A_0+wI est un opérateur maximal monotone de X_0 tel que Int conv $D(A_0) \neq \emptyset$.

Or étant donné $[u,f] \in \mathscr{C}([0,T];X) \times L^1(0,T;X)$, il est immédiat de vérifier que $[u,f] \in \Phi_A$ si et seulement si $[u,f_0] \in \Phi_{A_0}$ où f_0 est la projection de f sur X_0 .

<u>Note</u>. Depuis la rédaction de cet exposé, H. Brézis et moi-même avons démontré que lorsque X est un espace de Hilbert de dimension finie, pour tout $[u,f] \in \Phi_A$, $u \in W^{1,1}(0,T;X)$, (cf. [2]). Le problème reste ouvert dans un espace de Hilbert de dimension infinie.

-:-:-:-

Bibliographie.

[1] Ph. BENILAN et H. BREZIS : Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert (à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[2] H. BREZIS : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires. Cours de 3ème cycle rédigé par Ph. Bénilan. Paris 1970.

[3] Y. KOMURA : Non linear semi-groups in Hilbert spaces. J. Math. Soc. Japan. 19 (1967). pp. 493-507.

[4] R.T. ROCKAFELLAR : Local boundeness of non linear operators. Michigan Math. J. 16 (1969) pp. 397-407.

-:-:-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires

Orsay 1970-71

Exposé n°7

PERTURBATIONS MULTIVOQUES SEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT D'EQUATIONS D'EVOLUTION DANS LES ESPACES DE HILBERT (de dimension finie)

H. ATTOUCH, A. DAMLAMIAN

Soient 1) H un espace de Hilbert réel de dimension finie, dont le produit scalaire est noté $(.,.)$ et la norme $|.|$.

2) A un opérateur maximal monotone de H, c'est-à-dire une application (multivoque) de H dans H vérifiant :

$$\forall [u_i,f_i] \in A \quad (i=1,2) \qquad (f_1-f_2,\ u_1-u_2) \geq 0$$

ainsi que $R(I+A) = H$.

Plus généralement nous dirons que $A \in \mathcal{A}(\omega)$ (ω réel) si $A+\omega I$ est maximal monotone.

3) B une application multivoque semi-continue supérieurement (s.c.s.) de H dans H, de domaine contenant $\overline{D(A)}$, c'est-à-dire (cf. [2] par exemple) une application multivoque telle que :

- $\forall\, x \in H$, Bx est compact dans H et Bx non vide pour $x \in \overline{D(A)}$
- $\forall\, x \in H$, $\forall\, V$ voisinage de Bx, il existe U voisinage de x tel que :

$$y \in U \implies By \subset V$$

4) f une fonction de $L^p(0,T;H)$ $p \geq 1$.

On se propose ici d'étudier le problème de Cauchy : $\frac{du}{dt} + Au + Bu \ni f$ avec condition initiale dans $\overline{D(A)}$. A cet effet, on fera appel, d'une part aux résultats connus sur les équations d'évolution non linéaires, tout particulièrement à la notion de solution faible introduite récemment dans [1] (par BENILAN et BREZIS) et développée dans l'exposé précédent, et d'autre part aux méthodes de compacité (th. de point fixe) auxquelles on peut rattacher les travaux de A. Lasota et Z. Opial ([18]), de Ch. Castaing et M. Valadier ([11], [21]). Signalons enfin le lien étroit lorsque A est un sous-différentiel, entre la résolution de cette équation et la résolution de certains problèmes d'économétrie (cf. C. Henry [13] et [14]). Nous reportant à l'exposé précédent pour la définition et les propriétés des solutions faibles d'équations d'évolution non linéaires, nous nous contenterons de rappeler ici quelques estimations dont nous ferons un usage constant dans la suite de l'exposé :

Soient $A \in \mathcal{A}(\omega)$, f et g dans $L^1(0,T;H)$, u et v des solutions faibles sur $[0,T]$ des équations $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ respectivement.

$\boxed{01}$ $$V_{[0,T]}u \leqslant C[(1+|f|_{L^1}+|\omega|T|u|_{L^\infty})(1+|u|_{L^\infty}) + |u(0)|^2]$$

(où $V_{[0,T]}u$ est la variation totale de u sur $[0,T]$ et C désigne une constante ne dépendant que de A).

$\boxed{02}$ $\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ on a :

$$|u(t)-v(t)| \leqslant e^{\omega(t-s)}|u(s)-v(s)| + \int_s^t e^{\omega(t-x)}|f(\tau)-g(\tau)|\,d\tau$$

en particulier si $[x,y]$ appartient à A, prenant $v \equiv x$ on obtient,

$\boxed{03}$ $$|u(t)-x| \leqslant e^{\omega(t-s)}|u(s)-x| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}|f(\tau)-y|\,d\tau\ .$$

Dans une première partie nous étudierons le cas où B est continue, pour dans une deuxième partie étudier, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, le cas où B est multivoque s.c.s. et dépendant du temps.

I - Etude du cas B continu.

On se propose d'étudier l'équation

$$(I) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + Bu \ni f \\ u(0) = x \end{cases}$$

où A est maximal monotone, f dans $L^1(0,T;H)$, x dans $\overline{D(A)}$ et B continu borné sur $\overline{D(A)}$. Afin de se ramener à un problème de point fixe, on va étudier (I) sous la forme :

$$(II) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni f - Bu \\ u(0) = x \end{cases}$$

Pour interpréter (II) on va introduire l'opérateur solution faible (avec condition initiale x) que l'on notera F_x. Par définition, $u = F_x(f)$ signifie que u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$; $u(0) = x$. D'après 02 l'opérateur F_x est univoque, partout défini et continu de $L^1(0,T;H)$ dans $\mathscr{C}(0,T;H)$. D'autre part, on introduit l'opérateur $\mathcal{B}$ extension canonique de B à $L^1(0,T;H)$, à savoir : $D(\mathcal{B}) = \{u \in L^1(0,T;H) \; ; \; u(t) \in \overline{D(A)} \text{ p.p.}\}$ et $\mathcal{B}u(t) = B(u(t))$. Moyennant ces notations, si l'on pose $G(u) = F_x(f-\mathcal{B}u)$, (II) s'écrit :

$$(III) \qquad G(u) = u .$$

On est donc amené à étudier l'opérateur G ; nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 1.1.</u> <u>L'application</u> F_x <u>est compacte de</u> $L^1(0,T;H)$ <u>dans</u> $L^p(0,T;H)$ <u>pour</u> $1 \leq p < +\infty$ (<u>ici compacte signifie que</u> F_x <u>envoie les bornés de</u> L^1 <u>dans les compacts de</u> L^p).

<u>Démonstration</u> : Soit $B_M = \{f \in L^1(0,T;H) \; ; \; |f|_{L^1} \leq M\}$. Il faut montrer que $F_x(B_M)$ est relativement compact dans $L^p(0,T;H)$, $(\infty > p \geq 1)$.

D'après 03, en faisant $s=0$, on déduit l'existence d'une constante $C_1(M)$ telle que : $\forall f \in B_M \quad |F_x(f)|_{L^\infty} \leq C_1(M)$.

Utilisant alors O1, on déduit l'existence d'une constante $C_2(M)$ telle que :

$$\forall f \in B_M , V_{[0,T]} F_x(f) \leqslant C_2(M) .$$

Soit alors $E(M) = \{u \in \mathscr{C}(0,T;H) ; u(t) \in \overline{D(A)} \ \forall t \in [0,T] ; |u|_{L^\infty} \leqslant C_1(M) ; V_{[0,T]} u \leqslant C_2(M)\}$. D'après ce qui précède $F_x(B_M) \subset E(M)$.
D'autre part, utilisant le critère classique de compacité forte dans les espaces L^p numériques (critère de Weil), H étant de dimension finie, on en déduit que $E(M)$ est relativement compact dans $L^p(0,T;H)$ ce qui achève la démonstration du lemme.

. Soit $K = \overline{E(M)}^{L^1(0,T;H)}$ (adhérence de $E(M)$ dans $L^1(0,T;H)$ avec $M = |f|_{L^1} + CT$ où C est un majorant de B sur $\overline{D(A)}$.
D'après ce qui précède K est un convexe compact de $L^1(0,T;H)$.
La proposition suivante va nous permettre de conclure au problème (III).

<u>Proposition 1.1. L'application</u> G <u>est continue de</u> $L^1(0,T;H)$ <u>dans</u> $\mathscr{C}(0,T;H)$, <u>et</u> G <u>envoie le convexe compact</u> K <u>de</u> $L^1(0,T;H)$ <u>dans lui-même</u>.

<u>Démonstration</u> : Soient $u_n \longrightarrow u$ dans $L^1(0,T;H)$ avec $u_n \in D(G) = D(\mathcal{B})$ (i.e. $u_n(t) \in \overline{D(A)}$; $t \in [0,T]$) . Posons $v_n = G(u_n)$ et $v = G(u)$. D'après O2 $|v_n - v|_{L^\infty} \leqslant |\mathcal{B}u_n - \mathcal{B}u|_{L^1}$. Soit $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que u_{n_k} converge vers u presque partout sur $[0,T]$. B étant continu sur $\overline{D(A)}$, $\mathcal{B}u_{n_k}$ converge presque partout sur $[0,T]$ vers $\mathcal{B}u$ et B étant borné sur $\overline{D(A)}$, la convergence a lieu dans $L^1(0,T;H)$ d'après le Théorème de Lebesgue. Donc $|\mathcal{B}u_{n_k} - \mathcal{B}u|_{L^1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ et par suite $|v_{n_k} - v|_{L^\infty} \longrightarrow 0$, ce qui entraîne que v_n converge vers v dans $\mathscr{C}(0,T;H)$.

. D'autre part $\{f - \mathcal{B}u ; u \in D(\mathcal{B})\}$ est contenu dans B_M avec $M = |f|_{L^1} + CT$ (C : majorant de B sur $\overline{D(A)}$ défini précédemment) et donc d'après le lemme 1.1, l'image de G est contenue dans le convexe compact K . Il suffit ensuite de remarquer que K est contenu dans D(G) .

Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.

Soit : . H un espace de Hilbert de dimension finie.
. A un opérateur maximal monotone de H .
. B un opérateur continu borné sur $\overline{D(A)}$.
. f une fonction de $L^1(0,T;H)$.
. $x \in \overline{D(A)}$.

Il existe alors une fonction u vérifiant :

1) u est continue et à variation bornée sur $[0,T]$.
2) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f - Bu$, $u(0) = x$.
3) Si t est un point de Lebesgue de f (donc p.p. dans $]0,T[$) u(t) appartient à D(A) , u est dérivable à droite en t et :

$$\frac{d^+u}{dt} = (f(t)-Bu(t)-Au(t))^0 .$$

De plus :

a) si f est continue . u est solution forte de $\frac{du}{dt} + Au + Bu \ni f$
$u(0) = x$.
. $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0,T[$.
. u est dérivable à droite et
$$\frac{d^+u}{dt} = (f(t)-Bu(t)-Au(t))^0 \quad \forall\, t \in]0,T[.$$

b) si $A = \partial\phi$ est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre et si $f \in L^2(0,T;H)$

. u est solution forte et $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2([0,T];H)$

. si $x \in D(\phi)$ on a en outre $\frac{du}{dt} \in L^2([0,T];H)$

c) si $A = \partial\psi_c$, ψ_c fonction indicatrice d'un convexe fermé C de H , et $f \in L^p(0,T;H)$ $1 \leq p \leq +\infty$, alors u est solution forte et $\frac{du}{dt} \in L^p(0,T;H)$.

Démonstration du Théorème 1 :

D'après la proposition 1.1, l'application G est continue de K dans K, avec K convexe compact de $L^1(0,T;H)$. Appliquant le théorème du point fixe de Schauder on déduit l'existence d'un point u dans K tel que $Gu = u$. Revenant à la définition de G et de K, on obtient donc une fonction u continue, à variation bornée sur $[0,T]$, solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f - Bu$. Si de plus t est point de Lebesgue de f, t est point de Lebesgue de $f - Bu$ (Bu étant continue et par application du théorème de l'exposé précédent, on déduit le 3°) du Théorème 1. De même si f est continue, $f - Bu$ est continue, et u solution faible avec second membre continu est solution forte. Les parties b) et c) du Théorème 1 découlent de la même façon du théorème de l'exposé précédent.

Remarque 1.1. Le Théorème 1 reste vrai lorsque l'on remplace l'hypothèse A maximal monotone par l'hypothèse $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Donc l'hypothèse B borné sur $\overline{D(A)}$ peut être remplacée par l'hypothèse suivante : il existe un ω réel tel que $B+\omega I$ soit borné sur $\overline{D(A)}$.

Remarque 1.2. L'opérateur B continu borné peut être remplacé par un opérateur $B(x,t)$ continu sur $\overline{D(A)} \times [0,T]$ et vérifiant la condition suivante :

la fonction $t \longmapsto \sup_{x \in \overline{D(A)}} |B(x,t)|$ est intégrable sur $[0,T]$.

. Le théorème 1 donne en fait un résultat local lorsque l'hypothèse B borné sur $\overline{D(A)}$ est abandonnée. Ce résultat prolonge alors, dans le cadre considéré ici, le théorème de Peano (cas $A=0$). On a en effet le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, en ne supposant toutefois que B continu sur $\overline{D(A)}$, il existe alors un intervalle $[0,T_0] \subset [0,T]$ sur lequel les conclusions du Théorème 1 sont vérifiées.*

Démonstration : Soit V un voisinage convexe fermé non vide de x dans H sur lequel B soit borné, (B est localement borné) x étant la condition initiale du problème de Cauchy. Le sous différentiel $\partial\psi_V$ de la fonction indicatrice de V est maximal monotone et comme Int $V \cap D(A) \neq \emptyset$, l'opérateur $\partial\psi_V + A$ est encore maximal monotone d'après un résultat de Rockafellar [19]. (Voir aussi [8], [7] et [4]).

Appliquons le Théorème 1 avec $A_1 = A + \partial\psi_V$ au lieu de A, B étant borné sur $D(A_1)$ par construction. Il existe alors u solution faible de

$$\frac{du}{dt} + (A + \partial\psi_V)u \ni f - Bu \; ; \; u(0) = x \, .$$

La fonction u étant continue il existe un T_0 $(0 < T_0 \leq T)$ tel que pour tout t de $[0, T_0[$, $u(t)$ appartienne à $\overline{D(A)} \cap \text{Int } V$. Pour tout t de $[0, T_0[$ on a alors $\partial\psi_V u(t) = \{0\}$ car $u(t) \in \text{Int } V$ et donc presque partout sur $]0, T_0[$ on a $\frac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t) - Bu(t)$.
A droite de T_0, par contre, il est possible que $u(t)$ reste sur la frontière ∂V de V, auquel cas $\partial\psi_V u(t) \not\ni \{0\}$. Les autres propriétés de u sont également vérifiées sur $[0, T_0]$.

II - Etude du cas B multivoque s.c.s.

Définition 2.1. Soit $B(t,x)$ une application de $[0,T] \times \overline{D(A)} \longrightarrow \mathcal{P}(H)$
On dira que B satisfait à la condition (C_p) si par définition :

α) $\forall\, t \in [0,T]$, l'application $x \longmapsto B(t,x)$ est multivoque s.c.s. de $\overline{D(A)}$ dans H et à valeurs convexes compactes non vides. (i.e. $\forall\, (t,x) \in [0,T] \times \overline{D(A)}$, $B(t,x)$ est un convexe compact non vide de H).

β) $\forall\, \xi \in H$, $\forall\, x \in \overline{D(A)}$ la fonction d'appui
$b_{x,\xi} : t \longmapsto \sup\limits_{y \in B(t,x)} (y, \xi)$ est mesurable sur $[0,T]$.

γ) Il existe une fonction $b \in L^p(0,T;H)$ telle que :

$$\forall\, x \in \overline{D(A)} \quad \sup_{y \; B(t,x)} |y| \leq b(t) \text{ pour presque tout } t \text{ de } [0,T] \, .$$

Remarque 2.1. On pourra avantageusement remplacer la condition β) par la condition équivalente suivante (cf. Ch. Castaing [10] corollaire 6.1) :

β') $\forall x \in \overline{D(A)}$, l'application $t \longmapsto B(t,x)$ est multivoque mesurable en t au sens suivant :

$\forall F$ fermé de H, l'ensemble $E = \{t \in [0,T] \; ; \; B(t,x) \cap F \neq \emptyset\}$ est mesurable dans $[0,T]$.

. Comme dans le cas B continu, on veut se ramener à une écriture fonctionnelle de l'équation :

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + B(t,u) \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

On est donc amené à définir l'opérateur $\mathcal{B}_p$ de la façon suivante :

<u>Définition 2.2.</u> On notera $\mathcal{B}_p$ l'opérateur multivoque dans $L^p(0,T;H)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ dont le graphe est donné par :

$\mathcal{B}_p = \{[u,v] \in L^p(0,T;H) \times L^p(0,T;H) \; : \; \text{p.p.t.} \in [0,T] \; u(t) \in \overline{D(A)}$ et $v(t) \in B(t,u(t))\}$.

<u>Proposition 2.1.</u> $\mathcal{B}_p$ est demi-fermé dans $L^p(0,T;H)$ (i.e. fermé dans $L^p \times w\text{-}L^p$).

<u>Démonstration</u> : Soient $u_n \xrightarrow{L^p} u$, $v_n \overset{L^p}{\rightharpoonup} v$ ($\rightharpoonup$ désigne la cv. faible), $v_n \in \mathcal{B}_p u_n$.

On peut supposer, quitte à prendre une sous-suite que u_n converge vers u presque partout sur $[0,T]$. Comme v_n converge faiblement vers v, pour tout entier m, on peut trouver une fonction g_m, combinaison barycentrique des $(v_n)_{n \geqslant m}$, telle que : $|v-g_m|_{L^p} \leqslant \frac{1}{m}$ (à cet effet, considérer la suite $(v_{n+m})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers v).

La suite g_n ainsi définie converge fortement vers v dans $L^p(0,T;H)$, on peut donc en extraire une sous-suite $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, telle que g_{n_k} converge presque partout vers v sur $[0,T]$.

Il existe donc un ensemble E de complémentaire dans $[0,T]$ négligeable (mesure de Lebesgue) tel que pour tout t de E :

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t) \ , \ g_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} u(t) \ .$$

Fixons t dans E et montrons que $v(t) \in B(t,u(t))$. L'application $B(t,.)$ étant s.c.s., pour tout voisinage V de $B(t,u(t))$ il existe un voisinage U de $u(t)$ tel que : $\forall x \in U$, $B(t,x) \subset V$. Comme $u_n(t)$ converge vers $u(t)$ il existe N tel que : $n \geq N \Longrightarrow u_n(t) \in U$ et donc $v_n(t) \in V$ et $g_n(t)$ est donc dans Conv V. Par suite, $v(t) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(t)$ est dans $\overline{\text{Conv } V}$ pour tout voisinage V de $B(t,u(t))$. Ce dernier ensemble étant convexe compact est l'intersection de ses voisinages convexes fermés et donc $v(t) \in B(t,u(t))$ ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.

(En toute rigueur pour la validité du raisonnement ci-dessus, il faut prendre u_n (resp v_n), fonction représentante de sa classe, telle que $u_n(t) \in \overline{D(A)}$, $\forall t \in [0,T]$ (resp. $v_n(t) \in B(t,u_n(t))$ $\forall t \in [0,T]$).

<u>Proposition 2.2.</u> $\mathcal{B}_p$ est un opérateur s.c.s. à valeurs convexes compactes de $L^p(0,T;H)$ dans $w-L^p(0,T;H)$, $(1 \leq p < \infty)$. De plus si $u \in L^p(0,T;H)$ et $u(t) \in \overline{D(A)}$ presque pour tout t, alors $\mathcal{B}_p u$ est non vide (i.e. $u \in D(\mathcal{B}_p)$).

<u>Démonstration</u> : . $\mathcal{B}_p$ est évidemment à valeurs convexes puisque chaque ensemble $B(t,x)$ est convexe.

. $\mathcal{B}_p$ est à valeurs faiblement relativement compactes : en effet, pour u donné dans $D(\mathcal{B}_p)$, l'ensemble $\mathcal{B}_p u$ est borné dans $L^p(0,T;H)$ par la fonction $b(t)$ (d'après γ) de C_p) et donc $\mathcal{B}_p u$ est faiblement relativement compact dans $L^p(0,T;H)$ pour $p \neq 1,+\infty$. Pour $p=1$, H étant de dimension finie, par application du critère de Dunford et Pettis (cf. [12]), on déduit le résultat. D'autre part, $\mathcal{B}_p$ étant fermé dans $L^p \times wL^p$, $\mathcal{B}_p u$ est faiblement fermé, et $\mathcal{B}_p$ est donc à valeurs faiblement compactes. Le raisonnement précédent montre également que $\text{Im } \mathcal{B}_p$ est faiblement relativement compacte dans $L^p(0,T;H)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Par suite, le graphe de $\mathcal{B}_p$ étant fermé dans $L^p \times \omega-L^p$ (Proposition 2.1), on en déduit (cf. [2] pp.115-117) que $\mathcal{B}_p$ est s.c.s. de $L^p(0,T;H)$ dans $w-L^p(0,T;H)$.

. Soit u une fonction en escalier sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\overline{D(A)}$, $u(t)$ prenant les valeurs $x_1,\ldots,x_n$ distinctes. Montrons que l'application Γ : $\Gamma(t) = B(t,u(t))$ est mesurable (multivoque). Soit E un fermé de H. D'après la condition $\beta')$ de C_p, l'ensemble $E_i = \{t \in [0,T] \,;\, B(t,x_i) \cap E \neq \emptyset\}$ est mesurable ; il en est de même de l'ensemble $E_i \cap u^{-1}(x_i) = \{t : u(t) = x_i ,$ $B(t,x_i) \cap E \neq \emptyset\}$. Par suite, l'ensemble

$$\{t \in [0,T] \,;\, B(t,u(t)) \cap E \neq \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap u^{-1}(x_i) \quad \text{est mesurable.}$$

D'après le théorème 3.4 de [10], $\Gamma(t)$ admet des sections mesurables et d'après le $\gamma)$ de la condition C_p, ces sections sont bornées par $b(t)$ et donc dans $L^p(0,T;H)$.

. Soit u à présent dans $L^p(0,T;H)$ et prenant ses valeurs dans $\overline{D(A)}$. Montrons que $\mathcal{B}_p u$ est non vide : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers à valeurs dans $\overline{D(A)}$ convergeant vers u dans $L^p(0,T;H)$. Soit $v_n \in \mathcal{B}_p u_n$, $\mathcal{B}_p u_n$ étant d'après ce qui précède un convexe compact non vide de $w\text{-}L^p(0,T;H)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc des valeurs d'adhérence (faible), lesquelles sont dans $\mathcal{B}_p u$, puisque d'après la Proposition 2.1, $\mathcal{B}_p$ est demi-fermé.

On a donc finalement $D(\mathcal{B}_p) = \{u \in L^p(0,T;H) \,;\, u(t) \in \overline{D(A)} \text{ p.p. } t \in [0,T]\}$

.Nous aurons encore besoin du résultat suivant :

<u>Proposition 2.3.</u> (Brézis). Soit $1<p<\infty$. L'opérateur F_x est continu de $w\text{-}L^p$ dans L^p fort.

<u>Démonstration</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(0,T;H)$ telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et soit $u_n = F_x(f_n)$. Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornés dans L^p, donc dans $L^1(0,T;H)$, d'après le lemme 1.1, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^q $(q<+\infty)$. On peut donc extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \xrightarrow{L^p} u$. Il s'agit de montrer que $u = F_x(f)$. Pour cela, on étudie l'opérateur $Q_x = F_x^{-1}$, soit :

$$Q_x = \{[u,f] \in L^p(0,T;H) \times L^p(0,T;H) : u = F_x f\} .$$

Il suffit de montrer que Q_x est demi-fermé. A cet effet, nous allons montrer que Q_x est maximal accrétif dans $L^p(0,T;H)$, $(p<+\infty)$, ce qui impliquera bien, pour $1<p<+\infty$, ($L^p(0,T;H)$ étant alors uniformément convexe), que Q_x est demi-fermé. (cf. par exemple l'exposé n°1 de ce séminaire).

<u>Lemme 2.1.</u> <u>L'opérateur</u> Q_x <u>est m-accrétif</u> (<u>donc maximal accrétif</u>) <u>dans</u> $L^p(0,T;H)$ <u>pour</u> $1<p<+\infty$.

<u>Démonstration</u> : On a $Im(I+Q_x) = L^p(0,T;H)$; cela découle directement de l'existence d'une solution faible au problème $\frac{du}{dt} + Au + u \ni f$; $u(0) = x$: il suffit en effet de remarquer que si A est maximal monotone, il en est de même de $A+I$.

Montrons que Q_x est accrétif dans $L^p(0,T;H)$. Pour cela on introduit l'application dualité W de $L^p(0,T;H)$ dans $L^q(0,T;H)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p\neq 1,+\infty)$, définie par

$$(Wu)(t) = u(t)\left(\frac{|u(t)|_H}{|u|_{L^p}}\right)^{p-2}$$

Il s'agit de montrer que si $[u,f]$ et $[v,g]$ sont dans Q_x , on a la relation :

$$(\mathcal{R}) \qquad (f-g,W(u-v))_{L^p,L^q} \geqslant 0 .$$

Supposons d'abord u et v solutions fortes de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$; $u(0) = x$ et $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$; $v(0) = x$ respectivement ; montrons que $(\mathcal{R})$ est vérifiée. A étant monotone, on a presque pour tout t de $[0,T]$:

$$(f(t)-g(t),u(t)-v(t))_H \geqslant (\frac{d}{dt}(u-v),(u(t)-v(t))_H \quad \text{soit :}$$

$$(f(t)-g(t),(u(t)-v(t))|u(t)-v(t)|_H^{p-2})$$

$$\geqslant (\frac{d}{dt}(u-v),(u(t)-v(t))|u(t)-v(t)|_H^{p-2}) .$$

Comme u et v sont absolument continues, ce dernier terme est égal à $\frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|_H^p$ et donc :

$$(f-g,W(u-v))_{L^p,L^q} \geqslant |u-v|_{L^p}^{2-p} \int_0^T \frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|_H^p$$

$$\geqslant \frac{|u-v|_{L^p}^{2-p}}{p} |u(T)-v(T)|_H^p \geqslant 0 \quad (\text{car} \quad u(0) = v(0) = x)$$

Donc $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour les solutions fortes. Utilisant le fait que l'opérateur solution faible est la fermeture dans $L^p(0,T;H)\times\mathcal{C}(0,T;H)$ de l'opérateur solution forte, et le fait que l'application dualité est continue (L^p est uniformément convexe) on déduit que $(\mathcal{R})$ reste vérifiée par passage aux solutions faibles.

Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.

Soient H un espace de Hilbert fini, A un opérateur maximal monotone de H, x un élément de $\overline{D(A)}$ et B, une application multivoque définie sur $[0,T]\times\overline{D(A)}$, satisfaisant à la condition (C_p).

Il existe alors pour $1<p<+\infty$ une fonction u vérifiant :

1) u est continue sur $[0,T]$, à valeurs dans H, et à variation bornée sur $[0,T]$.

2) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au + B(t,u)\ni 0$; $u(0) = x$ au sens suivant :

Il existe une fonction mesurable β_u sur $[0,T]$, telle que :

$\beta u(t)\in B(t,u(t))$ presque partout sur $[0,T]$ et u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni -\beta_u$; $u(0) = x$.

3) Pour presque tout $t\in]0,T[$, $u(t)\in D(A)$, u est dérivable à droite et $\frac{d^+u}{dt}(t) + Au(t)\cap -B(t,u(t)) \neq \emptyset$.

Si de plus :

a) $A = \partial\phi$ et $p\geqslant 2$, u est solution forte du problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + Au + B(t,u) \ni 0 \ ; \ u(0) = x \ ,$$

et $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$; si en outre $x \in D(\phi)$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$

b) $A = \partial\psi_c$, $1 \leq p \leq +\infty$, u est solution forte du problème de Cauchy et $\frac{du}{dt} \in L^p(0,T;H)$.

Démonstration du Théorème 2 :

On cherche à résoudre (I) $\frac{du}{dt} + Au + B(t,u(t)) \ni 0$; $u(0) = x$ ce qui s'interprète par :

$$\text{(II)} \ \exists \ v \in -\mathcal{B}_p u \quad \text{tel que} \quad u = F_x v \ .$$

Pour résoudre (II) par une méthode de point fixe, on peut chercher à résoudre : $u \in F_x(-\mathcal{B}_p u)$ mais $F_x \circ -\mathcal{B}_p$ n'est pas à valeurs convexes. Suivant une idée de F. Browder on va étudier

$$\text{(III)} \quad v \in -\mathcal{B}_p F_x v$$

en remarquant, que si v est solution de (III), $u = F_x v$ satisfait à (II). Combinant les résultats des propositions 2.2 et 2.3, on voit que l'opérateur $-\mathcal{B}_p \circ F_x$ est semi-continu supérieurement de $w - L^p(0,T;H)$ dans lui-même, et à valeurs convexes compactes non vides dans le compact K de $w\text{-}L^p(0,T;H)$ où

$K = \{v \in L^p(0,T;H) : |v(t)| \leq b(t) \ \text{p.p.t.} \in]0,T[\}$.

L'application multivoque $-\mathcal{B}_p F_x$ envoie donc K dans lui-même, et d'après le théorème de Kakutani, Ky Fan, Tychonof (cf. par exemple [2] ou [9]), admet un point fixe v dans K . Alors $u = F_x(v)$ est solution de (I) au sens de l'énoncé du théorème 2, où $\beta_u = -v$.

Si de plus $A = \partial\phi$ et $p \geq 2$, u est solution faible avec second membre $-\beta_u$ dans $L^2(0,T;H)$ et u est donc solution forte.

On achève la démonstration comme pour le théorème 1, en tenant compte des résultats de l'exposé précédent.

Remarque 2.2. En particulier, le Théorème 2 permet de résoudre l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + Bu \ni f \quad \text{où } B \text{ est s.c.s. borné sur } \overline{D(A)} \text{ et } f \text{ dans} \\ L^p(0,T;H) \ (1<p<+\infty) . \\ u(0) = x \end{cases}$$

il suffit de poser $B(t,x) = B(x) - f(t)$.

Si en outre on supprime l'hypothèse B borné sur $\overline{D(A)}$, on obtient suivant le raisonnement du corollaire 1.1, un théorème local.

Remarque 2.3. Le théorème 2 reste vrai si l'on remplace l'hypothèse A maximal monotone par l'hypothèse $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Ceci permet de remplacer l'hypothèse γ) de C_p par γ') : il existe un réel ω tel que la famille $B_1(t,x) = B(t,x) + \omega x$ satisfasse à γ).

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BENILAN et H. BREZIS : Solutions faibles d'équations d'évolutions dans les espaces de Hilbert (à paraître).

[2] C. BERGE : Espaces topologiques, fonctions multivoques, Paris Dunod 1959, 2ème édition.

[3] H. BREZIS : Problèmes unilatéraux (à paraître).

[4] H. BREZIS : Monotonicity methods in Hilbert Spaces and some applications to non linear partial differential equations. Symposium of Non linear Functional Analysis Madison Wis., April 1971.

[5] H. BREZIS : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires. Cours de 3ème cycle rédigé par P. Benilan, Paris 1970.

[6] H. BREZIS : Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires. Israël Journal of Math. (à paraître).

[7] H. BREZIS : Semi-groupes non linéaires et applications. Symposium sur les problèmes d'évolution. Instituto Nazionale d'Alta Matematica, Rome, Mai 1970.

[8] H. BREZIS et A. PAZY : Semi-groupes of non linear contractions on convex sets. Journal of functional Analysis, 1970.

[9] F. BROWDER : The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces. Math. Annalen 177, pp. 283-301 (1968).

[10] Ch. CASTAING : Sur les multi-applications mesurables. Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle n°1, 1967, pp. 91-126.

[11] Ch. CASTAING et M. VALADIER : Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes. C.R.A.S. 266 (1968), pp.985-87.

[12] N. DUNFORD-J.SCHWARTZ : Linear Operators. Interscience.

[13] C. HENRY : Differential equations with discontinuous right hand side in Mathematical economics. Lab. d'Econométrie. Ecole Polytechnique, Paris, juin 1970.

[14] C. HENRY : Equations différentielles non continues, Lab. d'Econométrie. Ecole Polytechnique, Paris, mars 1971.

[15] T. KATO : Non linear semi-groups and evolution equations. J. Math. Soc. Japan. Vol 19, n°4, 1967.

[16] T. KATO : Accretive Operators and non linear evolution equations in Banach spaces ; Non linear functional Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 18, pp.138-161, A.M.S. (1970).

[17] A. LASOTA : Une généralisation du premier théorème de Fredholm et ses applications à la théorie des opérations différentielles ordinaires, Ann. Pol. Math. 18 (1960).

[18] A. LASOTA et Z. OPIAL : An application of the Kakutani Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. Bull. Acad. Pol. des Sciences 13 (1965).

[19] R.T. ROCKAFELLAR : On the maximality of the sums of non linear monotone operators, (à paraître dans T.A.M.S.).

[20] SEMINAIRE SEMI-GROUPES ET OPERATEURS NON LINEAIRES. (1970-71) Publications Mathématiques d'Orsay.

[21] M. VALADIER : Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. C.R.A.S. t.266 (1968) pp.14-16.

H. ATTOUCH E.N.S.E.T. Cachan

A. DAMLAMIAN Département de Mathématiques
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

Juin 1971

-:-:-:-:-

Séminaire sur les semi-groupes
et les opérateurs non linéaires

Orsay 1970-71

Exposé n°8

SOLUTIONS PERIODIQUES

Ph. BENILAN

Nous nous proposons d'étudier les solutions d'équation de la forme

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t,u(t)) \ni 0 \ , \ u(0) = u(T) \ .$$

Dans la partie I, nous supposerons $A(t,x) = Ax - f(t)$ où A est un opérateur m-accrétif d'un espace de Banach réflexif X et $f \in L^1(0,T;X)$ généralisant les résultats de [1] . Dans la partie II, nous supposerons $A(t,x) = Ax + B(t,x)$ où A est un opérateur maximal monotone coercif d'un espace de Hilbert de dimension finie H et B un opérateur s.c.s., utilisant les méthodes de l'exposé n°7.

Nous utiliserons sans rappel les notations et notions de l'exposé n°6.

I - Cas d'un espace de Banach réflexif.

Dans cette partie X désigne un espace de Banach réflexif et A un opérateur m-accrétif de X .

Proposition 1. Supposons qu'il existe $\omega > 0$ tel que $A-\omega I$ soit accrétif. Alors pour tout $f \in L^1(0,T;X)$ il existe $u \in \mathcal{C}([0,T];X)$ solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ unique telle que $u(0) = u(T)$.

De plus si $f \in VB(0,T;X)$, u est lipschitzienne, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$, et $\|\frac{du}{dt}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{1-e^{-\omega T}} \{v_{[0,T]}f + |f(T-0)-f(+0)|\}$.

En effet soient u et v deux solutions faibles de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. D'après l'exposé n°6, proposition 1, $|u(T)-v(T)| \leq e^{-\omega T}|u(0)-v(0)|$. Donc l'application $S : x \in \overline{D(A)} \longmapsto Sx$, valeur en T de la solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = x$, est une contraction stricte de

$\overline{D(A)}$ dans lui-même et admet donc un point fixe unique.

Lorsque $f \in VB(0,T;X)$, prolongeons u par période de longueur ainsi que f ; nous noterons $\tilde{u}$ et $\tilde{f}$ ces prolongements. On a d'après l'exposé n°6, proposition 1 ,

$$|\tilde{u}(T+t+h)-\tilde{u}(T+t)| \leqslant e^{-\omega T}|\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)| + \int_t^{t+T} e^{-\omega(t+T-\tau)}|\tilde{f}(\tau+h)-\tilde{f}(\tau)|d\tau$$

soit $$|u(t+h)-u(t)| \leqslant \frac{1}{1-e^{-\omega T}} \{\int_0^{T-h} |f(\tau+h)-f(\tau)|d\tau + \int_{T-h}^{T}|\tilde{f}(\tau+h)-\tilde{f}(\tau) d\tau$$

d'où u est lipchitzienne et

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leqslant \frac{1}{1-e^{-\omega T}} \{v_f([0,T]) + |f(T-0)-f(+0)|\}$$

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> $1\leqslant p\leqslant+\infty$. <u>Notons</u> $\phi^p_\varpi = \{[u,f] \in \mathscr{C}([0,T];X) \times L^p(0,T;$ $u(0) = u(T)$ <u>et</u> u <u>solution faible de</u> $\frac{du}{dt} + Au \ni f\}$. <u>Alors</u>

1) ϕ^p_ϖ <u>est un opérateur m-accrétif de</u> $L^p(0,T;X)$.

2) <u>Pour</u> $1\leqslant p<+\infty$, ϕ^p_ϖ <u>est la fermeture dans</u> $\mathscr{C}([0,T];X) \times L^p(0,T;X)$ $\{[u,f] \in \mathscr{C}([0,T];X) \times L^p(0,T;X)$; $u(0) = u(T)$ <u>et</u> u <u>solution forte de</u> $\frac{du}{dt} + Au \ni f\}$.

<u>Lemme 1</u>. <u>Soit</u> $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ <u>avec</u> $1\leqslant p<+\infty$. <u>Alors</u>

$$<\frac{du}{dt},u>_{s,L^p(0,T;X)} = <\frac{du}{dt},u>_{i,L^p(0,T;X)} = \frac{|u(T)|^p - |u(0)|^p}{p\|u\|^{p-2}_{L^p}} .$$

On a en effet $$\frac{\|u+\lambda\frac{du}{dt}\|_{L^p} - \|u\|^p_{L^p}}{\lambda} = \int_0^T \frac{|u(t)+\lambda\frac{du}{dt}(t)|^p - |u(t)|^p}{\lambda} dt$$

or $$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{|u(t)+\lambda\frac{du}{dt}(t)|^p - |u(t)|^p}{\lambda} = p|u(t)|^{p-2} <\frac{du}{dt}(t),u(t)>_s = \frac{d}{dt}|u(t)|^p$$

$$= p|u(t)|^{p-2} <\frac{du}{dt}(t),u(t)>_i = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda<0}} \frac{|u(t)+\lambda\frac{du}{dt}(t)|^p - |u(t)|^p}{\lambda}$$

p.p. $t \in]0,T[$, donc compte tenu du théorème de Lebesgue :

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\neq 0}} \frac{\|u+\lambda\frac{du}{dt}\|^p_{L^p} - \|u\|^p_{L^p}}{\lambda} = \int_0^T \frac{d}{dt}|u(t)|^p dt = |u(T)|^p - |u(0)|^p .$$

Démonstration de la proposition 2 : Soient d'abord $f, g \in VB(0,T;X)$, u et v solutions lipschitziennes de $\frac{du}{dt}+Au \ni f$ et $\frac{dv}{dt}+Av \ni g$. Pour $1 \leq p < +\infty$ le prolongement $\mathcal{A}$ de A à $L^p(0,T;X)$ étant accrétif (cf. exposé n°1), on a

$$<(f-\frac{du}{dt}) - (g-\frac{dv}{dt}), u-v>_{s,L^p(0,T;X)} \geq 0$$

d'où

$$<f-g,u-v>_{s,L^p(0,T;X)} \geq <\frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt},u-v>_{i,L^p(0,T;X)} \geq \frac{|u(T)-v(T)|^p - |u(0)-v(0)|^p}{p\|u-v\|^p_{L^p}}$$

Etant donnés $f, g \in L^p(0,T;X)$, u et v solutions faibles de $\frac{du}{dt}+Au \ni f$ et $\frac{dv}{dt}+Av \ni g$, il existe $f_n, g_n \in VB(0,T;X)$, u_n, v_n solutions lipschitziennes de $\frac{du_n}{dt}+Au_n \ni f_n$ et $\frac{dv_n}{dt}+Av_n \ni g_n$ tels que $f_n \longrightarrow f$, $g_n \longrightarrow g$ dans $L^p(0,T;X)$, $u_n \longrightarrow u$, $v_n \longrightarrow v$ dans $\mathcal{C}([0,T],X)$. Donc puisque $<,>_s$ est s.c.s.

$$<f-g,u-v>_{s,L^p(0,T;X)} \geq \frac{|u(T)-v(T)|^p - |u(0)-v(0)|^p}{p\|u-v\|^p_{L^p}} .$$

Donc Φ^p_ϖ est accrétif. C'est vrai aussi pour $p=+\infty$, en utilisant $\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(0,T;X)}$.

D'après la proposition 1, Φ^p_ϖ est m-accrétif.

D'après la proposition 1, notant $\Psi^p = \{[u,f] \in \mathcal{C}([0,T];X) \times L^p(0,T;X);$ $u(0) = u(T)$ et u solution forte de $\frac{du}{dt}+Au \ni f\}$, on a $R(I+\lambda\Psi^p) \supset VB(0,T;X)$. D'autre part étant donné $[u,f]$ et $[v,g] \in \Psi^p$, prolongeons u, v, f, g par période de longueur T notés $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$. On a $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ solutions faibles de $\lambda\frac{d\tilde{u}}{dt}+\lambda A\tilde{u}+\tilde{u} \ni \tilde{u}+\lambda\tilde{f}$; $\lambda\frac{d\tilde{v}}{dt}+\lambda A\tilde{v}+\tilde{v} \ni \tilde{v}+\lambda\tilde{g}$, et donc $\lambda\frac{d}{dt}|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t)| + |\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t)| \leq |(\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{f}(t) - (\tilde{v}(t)+\lambda\tilde{g}(t)|$ p.p. $t \in \mathbb{R}$ d'où $\lambda e^{\frac{T+t}{\lambda}} |\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t)| \leq \lambda e^{t/\lambda}|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t)|$

$$+ \int_t^{t+T} e^{t/\lambda}|(\tilde{u}(\tau)+\lambda\tilde{f}(\tau) - (\tilde{v}(\tau)+\lambda\tilde{g}(\tau)|d\tau \quad \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Soit $|u(t)-v(t)| \leq \frac{1}{\lambda(1-e^{-T/\lambda})} \int_0^T |(u(\tau)+\lambda f(\tau) - (v(\tau)+\lambda g(\tau)|d\tau \;\; \forall\, t \in [0,T]$

et en définitive,

$$\|u-v\|_{\mathscr{C}([0,T];X)} \leqslant \frac{T^{1-1/p}}{\lambda(1-e^{-T/\lambda})} \|(u+\lambda f)-(v+\lambda g)\|_{L^p(0,T;X)} .$$

Donc notant $\overline{\Psi^p}$ la fermeture de Ψ^p dans $\mathscr{C}([0,T];X)\times L^p(0,T;X)$, $R(I+\lambda\overline{\Psi^p})$ = fermeture de $VB(0,T;X)$ dans $L^p(0,T;X)$. Lorsque $1\leqslant p<+\infty$, $\overline{\Psi^p}$ est donc m-accrétif, d'où $\overline{\Psi^p} = \phi^p_{\overline{\omega}}$.

Théorème 1. *Supposons X uniformément convexe et A coercif au sens suivant*

$$\exists [x_o,y_o]\in X\times X , \quad \lim_{\substack{[x,y]\in A\\ |x|\to+\infty}} \frac{<y-y_o,x-x_o>_s}{|x-x_o|} = +\infty .$$

Alors pour tout $f\in L^1(0,T;X)$, il existe au moins une solution faible u de $\frac{du}{dt}+Au\ni f$ telle que $u(0)=u(T)$.

Lemme 2. *Supposons A coercif et soient u_n solution faible de $\frac{du_n}{dt}+Au_n\ni f_n$ telles que $\{f_n\}$ soit bornée dans $L^1(0,T;X)$ et $\{|u_n(0)|-|u_n(T)|\}$ soit majorée dans $\mathbb{R}$. Alors $\{u_n\}$ est bornée dans $\mathscr{C}([0,T];X)$.*

En effet on peut toujours supposer u_n solution forte de $\frac{du_n}{dt}+Au_n\ni f_n$ et $[0,0]\in A$. On a $|u_n(T)| - C_1 \leqslant |u_n(t)| \leqslant |u_n(0)|+C_1$, $\forall\, t\in[0,T]$ en posant $C_1 = \sup\|f_n\|_{L^1}$.

D'autre part $<f_n(t)-\frac{du_n}{dt}(t)-y_o , u_n(t)-x_o>_s \leqslant (C_1+|y_o|)(|u_n(t)-x_o|) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)-x_o|^2$ p.p.t. Si $\{u_n\}$ n'était pas borné dans $\mathscr{C}([0,T];X)$, il existerait $t_n\in[0,T]$ telle que $|u_n(t_n)| \longrightarrow +\infty$, donc $|u_n(0)|\to+\infty$ et puisque $|u_n(0)|-|u_n(T)|$ est majoré, $|u_n(T)| \longrightarrow +\infty$, d'où $u_n(t) \longrightarrow +\infty, \forall\, t\in[0,+\infty]$. Donc $\int_0^T \frac{<f_n(t)-\frac{du_n}{dt}(t)-y_o,u_n(t)-x_o>_s}{|u_n(t)-x_o|}\,dt \to +\infty$

Or $\int_0^T \frac{<f_n(t)-\frac{du_n}{dt}(t)-y_o,u_n(t)-x_o>_s}{|u_n(t)-x_o|}\,dt \leqslant (C_1+|y_o|)T + |u_n(0)-x_o|-|u_n(T)-x_o|$ est donc majoré, ce qui est contradictoire.

<u>Lemme 3.</u> [2]. <u>Supposons</u> X <u>uniformément convexe. Soient</u> C <u>un convexe fermé de</u> X <u>et</u> S <u>contraction de</u> C <u>dans</u> C . <u>Il existe</u> $x \in C$ <u>tel que</u> $Sx = x$ s.s.i. <u>il existe</u> $x \in C$ <u>tel que</u> $\{S^n x\}$ <u>soit borné.</u>

La condition est évidemment nécessaire. Supposons $\{S^n x_o\}$ borné par M .

Soit $C_n = \{x \in C, |x - S^n x_o| \leq |x_o| + M \ , \ \forall m \geq n\}$: c'est un convexe fermé non vide borné par $|x_o| + 2M$. La suite C_n étant croissante, $C' = \overline{\bigcup C_n}$ est un convexe fermé borné. D'autre part $SC_n \subset C_{n+1}$, donc C' est invariant par S . On peut donc supposer C borné et donc faiblement compact.

La famille des convexes fermés non vides de C invariants par S est inductive par compacité et admet donc un élément minimal C_o . On a $C_1 = \overline{\text{conv}}\ SC_o \subset C_o$ et $SC_1 \subset C_1$ donc $C_o = \overline{\text{conv}}\ SC_o$. Supposons C_o non réduit à un point et donc de diamètre $\delta > 0$. Soit $x_1, x_2 \in C_o$ tels que $|x_1 - x_2| \geq \frac{\delta}{2}$ et $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Puisque X est uniformément convexe, il existe $\delta_o < \delta$ tel que $|\xi_1| \leq \delta$, $|\xi_2| \leq \delta$, $\frac{|\xi_1 + \xi_2|}{2} > \delta_o \implies |\xi_1 - \xi_2| < \frac{\delta}{2}$.

On a alors $|y - x| \leq \delta_o$ pour tout $y \in C_o$. Considérant $\{\xi \in C_o \ ; \ |\xi - y| \leq \delta_1 \ \forall y \in C_o\}$, c'est un convexe fermé non vide strictement contenu dans C_o ; mais il est invariant par S car si $|\xi - y| \leq \delta_1$ pour tout $y \in C_o$, $|S\xi - z| \leq \delta_1$ pour tout $z \in \overline{\text{conv}}\ SC_o = C_o$. D'où la contradiction.

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Considérons $C = \overline{D(A)}$ (c'est un convexe fermé d'après le lemme 2 de l'exposé n°3) et $S : x \in C \longmapsto$ valeur en T de la solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$. Puisque S est une contraction de C dans C , il suffit de démontrer d'après le lemme 3 pour $x \in C$ fixé, $\{S^n x\}$ est borné. Or ceci est vrai d'après le lemme 2 puisque notant u_n la solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u_n(0) = S^n x$, on a $|u_n(0)| - |u_n(T)| = |S^n x| - |S^{n+1} x| \leq |x - Sx|$.

II - <u>Cas d'un espace de Hilbert de dimension finie.</u>

Dans cette partie H est un espace de <u>Hilbert de dimension finie</u> et A <u>un opérateur maximal monotone coercif</u> de H . Nous utiliserons le théorème de point fixe de Von-Neumann, Ky-Fan (cf. par exemple [3], théorème 1.2.2.):

Soient K_1 (resp. K_2) convexe compact d'un evtlcs E_1 (resp. E_2) et Φ_1 (resp. Φ_2) partie fermée de $K_1 \times K_2$ telle que pour tout $x_2 \in K_2$ (resp. $x_1 \in K_1$), $\{x_1 \in K_1 ; [x_1, x_2] \in \Phi_1\}$ (resp. $\{x_2 \in K_2 ; [x_1, x_2] \in \Phi_2\}$) soit un convexe non vide. Alors $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$.

<u>Proposition 3</u>. <u>Posons</u> $\Phi_{\varpi} = \{[u,f] \in W^{1,1}(0,T;H) \times L^1(0,T;H) ; u(0) = u(T)$ <u>et</u> $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)\}$. <u>Alors</u>

1) $\forall f \in L^1(0,T;H)$, $\{u \in W^{1,1}(0,T;H) ; [u,f] \in \Phi_{\varpi}\}$ <u>est un convexe compact non vide de</u> $\mathscr{C}([0,T];H)$.

2) <u>Il existe</u> $C(r)$ <u>fonction croissante de</u> $[0,+\infty[$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u>

$$[u,f] \in \Phi_{\varpi}, \ \|f\|_{L^1(0,T;H)} \leq r \implies \|u\|_{W^{1,1}(0,T;H)} \leq C(r) .$$

Nous utilisons les résultats de l'exposé n°6 (théorème 3 et note de la page 14). On vérifie immédiatement que Φ_{ϖ} est maximal monotone dans $L^\infty(0,T;H) \times L^1(0,T;H)$ mis en dualité par $\langle u,f\rangle = \int_0^T (u(t),f(t))\,dt$, puisque tout u solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ est dans $W^{1,1}(0,T;H)$ (exposé n°6, note page 14). Donc $\{u \in W^{1,1}(0,T;H) ; [u,f] \in \Phi_{\varpi}\}$ est un convexe fermé de $\mathscr{C}([0,T];H)$, non vide d'après le théorème 1 et borné d'après le lemme 2, donc compact car étant donné $u_n \in W^{1,1}(0,T;H)$ tel que $[u,f] \in \Phi_{\varpi}$, il existe n_k suite extraite telle que $u_{n_k}(0) \longrightarrow x$, mais alors u_n converge uniformément.

D'après le lemme 2, il existe $C_1(r)$ tel que si $[u,f] \in \Phi_{\varpi}$ et $\|f\|_{L^1(0,T;H)} \leq r$ alors $\|u\|_{\mathscr{C}([0,T];H)} \leq C_1(r)$. D'autre part d'après l'exposé n°6, théorème 3, il existe une constante C telle que $\|\frac{du}{dt}\|_{L^1(0,T;H)} \leq C\{(1+\|f\|_{L^1})(1.\|u\|_{L^\infty}) + |u(0)|^2\}$, d'où 2) en prenant $C(r) = C\{(1+r)(1+C_1(r))+C_1(r)\} + C_1(r)T$.

<u>Théorème 2</u>. <u>Soit</u> $B(t,x)$ <u>un opérateur (multivoque) de</u> $]0,T[\times \overline{D(A)}$ <u>dans</u> H <u>vérifiant</u>

α) p.p. $t \in]0,T[$ <u>l'opérateur</u> $x \longmapsto B(t,x)$ <u>est s.c.s.</u> (<u>à valeurs convexes compactes non vide</u>) ;

β) $\forall x \in \overline{D(A)}$ <u>l'opérateur</u> $t \longmapsto B(t,x)$ <u>est mesurable</u> ;

δ) Il existe $p>1$ et $b \in L^p(0,T;\mathbb{R})$ tels que

$$\text{p.p. } t \in]0,T[\ , \ \forall\, y \in B(t,x) \ , \ |y| \leq b(t) \ .$$

Alors il existe $u \in W^{1,1}(0,T;H)$, $f(t)$ mesurable tel que

$$u(0) = u(T) \ .$$

$$f(t) \in B(t,u(t)) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\ .$$

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + f(t) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\ .$$

Considérons $E_1 = L^p(0,T;H)$ muni de la topologie forte, $E_2 = L^p(0,T;H)$ muni de la topologie faible,

$$K_1 = \overline{\{u \in W^{1,1}(0,T;H) ; u(t) \in \overline{D(A)} \text{ p.p. } t \in]0,T[, \|u\|_{W^{1,1}(0,T;H)} \leq C(\|b\|_{L^1})\}}^{E_1}$$

$$K_2 = \overline{\{f \in L^p(0,T;H) \ ; \ |f(t)| \leq b(t) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\}}^{E_2} \ .$$

$$\Phi_1 = \Phi_{\varpi} \cap K_1 \times K_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \{[u,f] \in K_1 \times K_2 \ , \ -f(t) \in B(t,u(t) \ \text{p.p. } t \in]0,T[\} \ .$$

Alors

a) K_1 (resp. K_2) est un convexe compact de E_1 (resp. E_2) .

b) Φ_1 est fermé dans $K_1 \times K_2$ puisque $L^p(0,T;H)$ étant de norme différentiable, l'opérateur m-accrétif Φ^p_{ϖ} (Proposition 2) est demi-fermé.

c) Φ_2 est fermé dans $K_1 \times K_2$ (exposé n°7, Proposition 2.1.)

d) Pour tout $f \in K_2$, $\{u \in K_1, [u,f] \in \Phi_1\}$ est convexe non vide (Proposition 3).

e) Pour tout $u \in K_1$, $\{f \in K_2, [u,f] \in \Phi_2\}$ est convexe non vide (exposé n°7, Proposition 2.2.).

Donc $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$, qui est la conclusion du théorème.

On obtient de la même manière :

Proposition 4. Soit $B(t,x)$ une application de $]0,T[\times \overline{D(A)}$ dans H vérifiant :

α) p.p. $t \in]0,T[$, l'application $x \longmapsto B(t,x)$ est continue.

β) $\forall\, x \in \overline{D(A)}$, l'application $t \longmapsto B(t,x)$ est mesurable γ) <u>Il existe</u> $b \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ <u>tel que</u> $|B(t,x)| \leq b(t)$ <u>p.p.</u> $t \in]0,T[$, $\forall x \in \overline{D(A)}$.

<u>Alors il existe</u> $u \in W^{1,1}(0,T;H)$ <u>tel que</u>

$$u(0) = u(T) \ ; \ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + B(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\ .$$

Considérons dans $E = L^1(0,T;H)$ le convexe compact

$$K = \overline{\{u \in W^{1,1}(0,T;H) ;\ u(t) \in \overline{D(A)} \text{ p.p. } t \in]0,T[,\ \|u\|_{W^{1,1}(0,T;H)} \leq C(\|b\|_{L^1})\}}^{E}$$

Etant donné $u \in K$, l'application $Bu : t \longmapsto B(t,u(t))$ est intégrable; considérons $G : u \in K \longmapsto \{v \in K \ ; \ [v,-Bu] \in \Phi_{\varpi}\}$.

D'après la Proposition 3, pour tout $u \in K$, Gu est un convexe fermé non vide. D'autre part soit $u_n \in K$, $v_n \in Gu_n$ tel que $u_n \longrightarrow u$ et $v_n \longrightarrow v$ dans L^1. On peut toujours supposer après éventuellement extraction d'une sous-suite, $u_n(t) \longrightarrow u(t)$ p.p. t et $v_n(0) \longrightarrow v_o$; puisque B est continue en x, $Bu_n \longrightarrow Bu$ dans L^1 et donc v_n converge uniformément vers la solution de $\frac{dv}{dt} + Av \ni -Bu$, $v(0) = v_o$. Donc $v \in Gu$.

Il existe donc $u \in K$ tel que $Gu = u$, qui est la conclusion de la Proposition.

Enfin :

<u>Proposition 5. Supposons</u> $D(A)$ <u>fermé et</u> A^o <u>borné sur les bornés et soient</u> $1 \leq p \leq +\infty$ <u>et</u> $B(t,x)$ <u>un opérateur (multivoque) de</u> $]0,T[\times D(A)$ <u>dans</u> H <u>vérifiant</u> :

α) <u>p.p.</u> $t \in]0,T[$, <u>l'opérateur</u> $x \longmapsto B(t,x)$ <u>est s.c.s.</u>

β) $\forall x \in D(A)$, <u>l'opérateur</u> $t \longmapsto B(t,x)$ <u>est mesurable.</u>

γ) <u>Il existe</u> $b \in L^p(0,T;\mathbb{R})$ <u>telle que</u>

$$\text{p.p. } t \in]0,T[\ , \ \forall y \in B(t,x) \ , \ |y| \leq b(t) \ .$$

<u>Alors il existe</u> $u \in W^{1,p}(0,T;H)$, $f \in L^p(0,T;H)$ <u>tels que</u>

$u(0) = u(T)$

$f(t) \in B(t,u(t))$ <u>p.p.</u> $t \in]0,T[$

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + f(t) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\ .$$

D'après l'exposé n°6, Proposition 4, il suffit de le montrer pour p=1 .

Soit $M(\rho) = \sup\{|A^o x|, x \in D(A), |x| \leq \rho\}$. Etant donné $[u,f] \in \Phi_\varpi$ avec $|f(t)| \leq b(t)$ p.p. $t \in]0,T[$ on a $|u(t)| \leq C(\|b\|_{L^1})T = \rho_o \quad \forall\, t \in [0,T]$ et donc $|\frac{du}{dt}(t)| \leq |f(t)| + M(\rho_o) \leq b_o(t)$ en posant $b_o(t) = b(t) + M(\rho_o)$.
Considérons $E_1 = \mathscr{C}([0,T];H)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $E_2 = L^1(0,T;H)$ muni de la topologie vague $\sigma(E_2,E_1)$,

$$K_1 = \overline{\{u \text{ absolument continue; } u(t) \in D(A),\ |u(t)| \leq \rho_o\ \forall\, t \in [0,T] \ , \ |\tfrac{du}{dt}(t)| \leq b_o(t) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\}}^{E_1}$$

$$K_2 = \overline{\{f \in L^1(0,T;H) \ ; \ |f(t)| \leq b(t) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\}}^{E_2} \ .$$

$$\Phi_1 = \Phi_\varpi \cap K_1 \times K_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \{[u,f] \in K_1 \times K_2 \ ; \ f(t) \in B(t,u(t)) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[\}$$

Alors

a) K_1 (resp. K_2) sont des convexes compacts de E_1 (resp. E_2) .

b) Φ_1 est fermé dans $K_1 \times K_2$ car Φ_ϖ est un opérateur maximal monotone de $E_1 \times E_2$.

c) $\forall\, f \in K_2$, $\{u \in K_1 \ ; \ [u,f] \in \Phi_1\}$ convexe non vide d'après la Proposition 3 et le choix de K_1, K_2 .

d) Φ_2 est fermé dans $K_1 \times K_2$ et $\forall\, u \in K_1$, $\{f \in K_2 \ ; \ [u,f] \in \Phi_2\}$ convexe non vide en reprenant la démonstration des Propositions 2.1 et 2.2 de l'exposé n°7.

Donc $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$, ce qui est la conclusion de la Proposition.

<u>Remarque 1</u>. Cette proposition reste valable pour un opérateur A m-B- accrétif d'un espace de dimension finie strictement convexe, ainsi d'ailleurs que son homologue dans le problème avec condition initiale.

Références.

[1] Ph. BENILAN et H. BREZIS : Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert (à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[2] F. BROWDER et W.V. PETRYSCHYN : The solution by iteration of non linear functionnal equations in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) pp. 571-575.

[3] R. DURIER : Sur les noyaux-fonctions en théorie du potentiel. Thèse Faculté des Sciences d'Orsay, 1969.