

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

80-07

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE  
1979-1980

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) : 28A75 30C60 54E40 54E45  
32A35 32H10  
42A68 42A72 26A15  
60XX02 60G15  
22E25 22E27

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

80-07

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE  
1979-1980

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

ASSOUAD, Patrice	Pseudodistances, facteurs et dimension métrique	1
BONAMI, Aline et LOHOUE, Noël	A propos du théorème de Fatou sur certains domaines faiblement pseudo-convexes .....	34
DOSS, Raouf	Une démonstration élémentaire du théorème de Rudin-Carleson et de ceux de F. et M. Riesz .....	40
KAHANE, Jean-Pierre	Le mouvement borwnien comme objet mathématique .....	47
NGHIEM XUAN HAI	La transformation de Fourier analytique des groupes de Lie nilpotents .....	74

# PSEUDODISTANCES, FACTEURS ET DIMENSION METRIQUE.

Patrice Assouad

Je me propose de présenter ici certaines propriétés des espaces métriques envisagés du point de vue lipschitzien.

J'exposerai des résultats dus à plusieurs auteurs ; en particulier je reprendrai une grande partie du contenu de ma thèse ("Espaces métriques, plongements, facteurs", Orsay, janvier 1977) pour laquelle j'utiliserai la référence [A].

Sauf pour quelques résultats récents, j'omettrai les démonstrations.

Par ailleurs, je conserverai autant que possible la terminologie de [A].

## 1. PSEUDODISTANCES ET QUASIDISTANCES.

(1.1) J'appelle pseudodistance sur un ensemble  $X$  toute fonction  $d : X^2 \rightarrow [0, +\infty[$  symétrique, nulle sur et seulement sur la diagonale et pour laquelle il existe  $A \in [1, +\infty[$  telle que :

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X, \quad d(x_1, x_2) \leq A \operatorname{Sup}(d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)) ;$$

si  $d$  est une pseudodistance, on note  $A(d)$  la plus petite constante  $A$  ayant la propriété ci-dessus (sinon on pose  $A(d) = +\infty$ ) ; enfin on note  $A(X)$  le cone convexe de toutes les pseudodistances sur  $X$ .

Un couple  $(X, d)$ , où  $X$  est un ensemble et  $d$  une pseudodistance, est appelé un espace pseudométrique (on notera que cette terminologie est celle de l'analyse harmonique, voir par exemple Coifman et Weiss [10] p. 66 ; par contre, en anglais, "pseudometric" signifie souvent "écart").

## DEFINITIONS 1.2.

(1.2.1) Soient  $X$  un ensemble et  $f$  une application de  $X$  dans un ensemble  $Y$  muni d'une pseudodistance  $\delta$ . Alors le noyau  $d$  sur  $X$  définie par  $d(x, x') = \delta(f(x), f(x'))$  est notée  $\delta \circ f$  et appelé l'image inverse de  $\delta$  par  $f$ ; on dit aussi que l'espace  $(X, d)$  est un sous-espace de  $(Y, \delta)$  ou que  $f$  est un plongement isométrique de  $(X, d)$  (ou simplement de  $d$ ) dans l'espace  $(Y, \delta)$ . Dans le cas particulier  $X \subset Y$  où  $f$  est l'injection naturelle,  $\delta \circ f$  est noté  $\delta|_X$  (restriction de  $\delta$  à  $X$ ).

(1.2.2) Soit de plus  $d_1$  une pseudodistance sur  $X$ ; s'il existe deux constantes  $A, B \in ]0, \infty[$  telles que :  $Ad_1 \leq \delta \circ f \leq Bd_1$ , on dira que  $f$  est un plongement lipschitzien de  $(X, d_1)$  (ou simplement de  $d_1$ ) dans l'espace  $(Y, \delta)$ ; plus précisément on dira que  $f$  est un plongement lipschitzien de  $(X, d_1)$  dans  $(Y, \delta)$  borné par  $A$  et  $B$ . Si de plus on a  $X = Y$  et si  $f$  est l'identité, on dira que  $\delta$  et  $d_1$  sont des pseudodistances équivalentes.

On va considérer la catégorie des espaces métriques avec les plongements lipschitziens pour morphismes; aussi on ne s'intéressera aux distances qu'à une équivalence près :

DEFINITION 1.3. Soit  $d$  une pseudodistance sur un ensemble  $X$ ; si  $d$  est équivalente à une distance, on dit que  $d$  est une quasidistance sur  $X$  (noter que "quasimetric" a des emplois très variés; ici on a suivi [A]).

(1.4) Remarquons tout de suite que si  $d$  est une pseudodistance alors  $d^p$  est aussi une pseudodistance pour chaque  $p \in ]0, \infty[$ :

en effet, on a  $(s+t)^p \leq 2^{(p-1)+}(s^p + t^p)$  (pour tout  $s, t \in [0, \infty[$ ).

En fait une pseudodistance est toujours une puissance d'une quasidistance :

LEMME 1.5 (Mrs. Frink [14] p. 134). Soit  $d$  une pseudodistance sur un ensemble  $X$  telle qu'on ait

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X, \quad d(x_1, x_2) \leq 2 \sup [d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)].$$

Alors il existe une distance  $d_1$  sur  $X$  avec  $d_1 \leq d \leq 4d_1$ .

COROLLAIRE 1.6 [A, 1.14]. Soit  $d$  une pseudodistance sur un ensemble  $X$  ; on définit  $p \in ]0, \infty [$  par  $2^{1/p} \geq A(d)$ . Alors  $d^p$  est une quasidistance.

Cela amène à considérer la notion suivante (cf. Assouad [3]) :

DEFINITION 1.7. Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique ; l'indice de convexité de  $(X, d)$ , noté  $Cv(X, d)$ , est la borne inférieure des nombres réels  $p \in ]0, \infty [$  tels que  $d^{1/p}$  soit une quasidistance sur  $X$  (autrement dit soit équivalente à une distance sur  $X$ ).

(1.8) L'indice de convexité d'un espace métrique est donc toujours  $\leq 1$  ; dans le cas où  $(X, d)$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne, on a :

- si  $X$  est convexe et contient au moins 2 points, alors  $Cv(X, d) = 1$ ,
- si  $X$  est la courbe de Von Koch ([31]), alors  $Cv(X, d) = \frac{\log 3}{\log 4}$ ,
- si  $X$  est fini, alors  $Cv(X, d) = 0$ .

(1.9) Appelons pseudoécart sur un ensemble  $X$  une fonction  $d : X^2 \rightarrow [0, +\infty [$  vérifiant les mêmes propriétés qu'une pseudodistance mais pouvant être nulle hors de la diagonale.

Supposons donnée sur chaque ensemble  $X$  une classe  $\mathcal{C}(X)$  de noyaux de  $X^2$  dans  $\mathbb{R}$  symétriques, positifs et nuls sur la diagonale. On suppose que :

- (i) la classe  $\mathcal{C}$  est stable par passage aux sous-espaces (autrement dit, si  $f$  applique  $X$  dans  $Y$  et si  $\delta$  appartient à  $\mathcal{C}(Y)$ , alors  $\delta \circ f$  appartient à  $\mathcal{C}(X)$ ),
- (ii) pour chaque ensemble  $X$ ,  $\mathcal{C}(X)$  est un cône convexe fermé pour la convergence simple.

Une telle classe  $\mathcal{C}$ , si elle n'est pas triviale, est formée de pseudoécarts :

LEMME 1.10. Soit  $\mathcal{C}$  une classe de noyaux symétriques, positifs et nuls sur la diagonale, vérifiant (i) et (ii). On suppose qu'il existe un noyau symétrique, positif et nul sur la diagonale qui n'est pas dans  $\mathcal{C}$ . Alors il existe  $A \in [1, \infty[$  tel que tout élément  $d$  de  $\mathcal{C}$  soit un pseudoécart avec  $A(d) \leq A$ .

Démonstration. A cause de (i) et (ii), la classe  $\mathcal{C}$  est définie par des inégalités linéaires de type fini (voir par exemple Assouad [4] Proposition 3.4) ; par ailleurs, la classe  $\mathcal{C}$  satisfait à une inégalité non triviale, c'est-à-dire :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in X, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} d(x_i, x_j) \geq 0 \quad \text{avec} \quad c_{12} = c_{21} < 0$$

(valable pour chaque ensemble  $X$  et chaque élément  $d$  de  $\mathcal{C}(X)$ ).

On l'applique en posant  $x_3 = x_4 = \dots = x_n$  et on obtient donc :

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X, \quad d(x_1, x_2) \leq b_1 d(x_1, x_3) + b_2 d(x_2, x_3).$$

Si  $b_1$  et  $b_2$  sont positifs, c'est le résultat ; sinon on voit aisément que  $\mathcal{C}(X) = \{0\}$  pour chaque ensemble  $X$  (or  $0$  est un pseudoécart).

Une application de 1.10 utile en statistique est la suivante :

(1.11) tout noyau symétrique, positif sur un ensemble  $X$  et nul sur la diagonale est limite simple de noyaux de la forme  $d(x, x') = -\lambda \text{Log}(\int \sqrt{P_x P_{x'}})$

(resp.  $d(x, x') = \lambda \int (P_x \log \frac{P_x}{P_{x'}} + P_{x'} \log \frac{P_{x'}}{P_x})$ , voir notation 1.12), où  $\lambda$  est un réel positif et où, pour un certain espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$ , l'application  $x \longrightarrow P_x$  est une application de  $X$  dans l'ensemble des lois de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Démonstration. La classe  $\mathcal{C}$  de ces limites est une classe de noyaux symétriques, positifs et nuls sur la diagonale et vérifie (i) et (ii) ; cependant on vérifie aisément que  $\mathcal{C}$  contient des noyaux qui ne sont pas des pseudoécarts ; par 1.10,  $\mathcal{C}$  est donc la classe de tous les noyaux symétriques, positifs et nuls sur la diagonale.

(1.12) Noter que si  $P$  et  $Q$  sont des lois de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , alors

$\sqrt{PQ}$  et  $P \log \frac{P}{Q}$  sont des mesures sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , comme plus généralement  $F(P, Q)$  où  $F$  est 1-homogène ; par ailleurs  $\int \mu$  désigne la masse totale de la mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## 2. FACTEURS.

DEFINITION 2.1. Soit  $g$  une pseudodistance sur un ensemble  $X$ . On appelle facteur de  $g$  toute pseudodistance  $d$  sur  $X$  telle que  $\frac{g}{d}$  soit aussi une pseudodistance sur  $X$  (noter que par définition  $\frac{g}{d}$  vaut 0 sur la diagonale).

Cette notion est introduite par [A] mais le plus souvent la terminologie "d est un facteur de g" y est remplacée par "d est quasi g concave". La proposition 1.3 de [A] donne les deux autres définitions équivalentes suivantes des facteurs ; soient  $g$  une pseudodistance sur un ensemble  $X$  et  $d$  un noyau symétrique positif sur  $X$  nul sur et seulement sur la diagonale ; on a alors :

(2.2)  $d$  est un facteur de  $g$  si et seulement si il existe  $K \in [1, \infty[$  tel que :  
 $\forall x, y, z \in X, \frac{d(x, z)}{d(x, y)} \leq K \sup(1, \frac{g(x, z)}{g(x, y)})$  (quasi g concavité)

(2.3) soit  $\alpha \in [1, \infty[$  ; on dira que  $d$  est quasi  $(\alpha, g)$  croissante s'il existe  $C \in [1, \infty[$  tel qu'on ait pour tout  $x, y, s, t \in X$  :

$\sup(g(x, s), g(x, t), g(y, s), g(y, t)) \leq \alpha g(s, t) \implies d(x, y) \leq C d(s, t)$  ;  $d$  est un facteur de  $g$  si et seulement si  $d$  et  $\frac{g}{d}$  sont quasi  $(\alpha, g)$  croissantes.

### 2.4. EXEMPLES DE FACTEURS.

Chaque fois  $g$  désignera ici une pseudodistance sur un ensemble  $X$ .

EXEMPLE 2.4.1 (cas particulier de 2.4.4, voir ci-dessous). Soit  $\phi$  une fonction croissante nulle en 0 de  $[0, \infty[$  dans  $[0, \infty[$  telle que  $t \rightarrow \frac{\phi(t)}{t}$  soit décroissante, alors  $\phi(g)$  est un facteur de  $g$  (dit facteur stationnaire ou "metric transform" de  $g$ ).

C'est en particulier le cas si  $\phi$  est une fonction concave croissante nulle en

0 de  $]0, \infty[$  dans  $]0, \infty[$  (d'où la terminologie quasi  $g$  concave) ;

(2.4.2) par ailleurs on montre que si  $\varphi : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  vérifie les hypothèses de 2.4.1, alors il existe une fonction  $\psi : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  concave croissante et nulle en 0 telle qu'on ait :  $\varphi \leq \psi \leq 2\varphi$ . (Pour la démonstration, voir à la fin du paragraphe).

Cependant il y a des facteurs non stationnaires :

EXEMPLE 2.4.3 [A, 1.5]. Soient  $b \in ]1, \infty[$  et  $f : X \rightarrow ]0, \infty[$  vérifiant :  $\forall x, x' \in X, f(x) \leq b [f(x') + g(x, x')]$  ; alors la pseudodistance  $d : x, x' \rightarrow g(x, x') + f(x) + f(x')$  est un facteur de  $g$  (il va de soi qu'on prend  $d = 0$  sur la diagonale).

A partir des exemples précédents, on peut former de nombreux autres exemples de facteurs grâce au calcul fonctionnel suivant (noter aussi que si  $d$  est un facteur de  $g$ , alors  $\frac{g}{d}$  et toute pseudodistance équivalente à  $d$  sont encore des facteurs de  $g$ ) :

EXEMPLE 2.4.4 [A, 1.8]. Soient  $m$  un entier positif,  $d_1, \dots, d_m$  des facteurs de  $g$  et  $F$  une application de  $]0, \infty[^m$  dans  $]0, \infty[$  croissante de chaque variable et 1-homogène, alors  $d = F(d_1, \dots, d_m)$  est encore un facteur de  $g$  (il va de soi qu'on prend  $d = 0$  sur la diagonale).

La démonstration en est claire à partir de (2.3). Si  $\varphi : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  vérifie les hypothèses de 2.4.1, alors  $F : s, t \rightarrow s \varphi\left(\frac{t}{s}\right)$  vérifie celles de 2.4.4 (ainsi par exemple pour  $s, t \rightarrow \text{Sup}(s, t)$ ,  $s, t \rightarrow \text{Inf}(s, t)$ ,  $s, t \rightarrow \sqrt{st}$ ).

(2.4.5) Notons enfin que la pseudodistance  $1$ , qui vaut 0 sur la diagonale de  $X$  et 1 ailleurs, est un facteur de  $g$ .

On va donner maintenant quelques propriétés des facteurs :

(2.5) On pose  $d_1 \underset{f}{<} d_2$  si  $d_2$  est un facteur de  $d_1$  ; cette relation est un préordre (c'est apparent sous la forme 2.2) et la relation d'équivalence correspondante est l'équivalence définie en 1.2.2. On notera que  $d_1 \underset{f}{<} d_2$  signifie qu'il existe une pseudodistance  $d_3$  avec  $d_1 = d_2 d_3$  et que donc  $d_1$  est bien "localement plus petite"

que  $d_2$  (mais c'est plus précis). Le plus grand élément est la pseudodistance  $d_1$  (voir 2.4.5).

Pour ce préordre, toute pseudodistance minorée par une distance est équivalente à une distance :

PROPOSITION 2.6 [A, 1.4]. Tout facteur d'une quasi distance est encore une quasi distance (voir ci-dessus Définition 1.3).

Cependant il n'y a pas en général de quasidistances minimales (sauf sur un ensemble fini, où toute pseudodistance est équivalente à  $d_1$ ) :

PROPOSITION 2.7 [A, 1.34]. Soient  $(X, g)$  un espace métrique et  $Y$  une partie finie de  $X$ . Alors on peut trouver une distance  $g_1$  sur  $X$  telle qu'on ait :

$$(2.7.1) \quad g \text{ est un facteur de } g_1,$$

$$(2.7.2) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, g_1(x, y) \leq [g(x, y)]^2.$$

Par ailleurs un facteur de la restriction d'une pseudodistance peut être prolongé en un facteur de cette pseudodistance :

PROPOSITION 2.8 [A, 1.40]. Soient  $(X, g)$  un espace pseudométrique,  $h$  un facteur de  $g$  et  $Y$  une partie de  $X$ . Soit  $d$  un facteur de  $g|_Y$  tel que  $h|_Y$  soit un facteur de  $d$ . On a alors :

(2.8.1)  $d$  peut se prolonger en un facteur  $\hat{d}$  de  $g$  tel que  $h$  soit un facteur de  $\hat{d}$ , dès qu'on a les conditions suivantes :

- $X$  est un espace topologique séparé et  $Y$  en est une partie connexe
- $g_1 = \frac{g}{h}$  est continu et les diamètres de  $(X, g_1)$  et  $(Y, g_1)$  sont tous deux finis ou tous deux infinis ;

(2.8.2) si de plus  $h$  et  $d$  sont des quasidistances (sur  $X$  et  $Y$  respectivement) et s'il existe  $p \in ]0, 1[$  tel que  $h$  soit un facteur de  $g^p$ , alors le prolongement  $\hat{d}$  de  $d$  peut être pris parmi les quasidistances sur  $X$ .

On a vu (en 2.3) que si  $d$  et  $\frac{1}{\alpha}g$  sont quasi  $(\alpha, g)$  croissantes, alors  $d$  est un facteur de  $g$ . Les deux propositions suivantes étudient la situation où seule  $d$  est supposée quasi  $(\alpha, g)$  croissantes :

PROPOSITION 2.9 [A, 1.32]. Soit  $d$  une distance quasi croissante sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire telle qu'il existe  $C \in [1, \infty[$  vérifiant pour tout  $x, y, s, t \in [0, 1]$  :

$$[x, y] \subset [s, t] \implies d(x, y) \leq C d(s, t)$$

(autrement dit  $d$  est quasi  $(1, g)$  croissante avec  $g(s, t) = |s - t|$  pour tout  $s, t \in [0, 1]$ ); on suppose que de plus  $d$  est continue (pour la topologie usuelle sur  $[0, 1]$ ). Alors il existe un homéomorphisme  $h$  de  $[0, 1]$  tel que  $d$  soit un facteur de la distance  $s, t \longrightarrow |h(s) - h(t)|$ .

PROPOSITION 2.10. Soient  $g$  une pseudodistance continue sur un espace topologique connexe  $X$  et  $d$  une pseudodistance quasi  $(\alpha, g)$  croissante. On a alors :

(2.10.1) [A, 1.18] si on a  $\alpha > A(g)$  (voir 1.1), alors il existe  $p \in [1, \infty[$  tel que  $d$  soit un facteur de  $g^p$  ;

(2.10.2) [A, 1.18'] si on a seulement  $\alpha > 1$ , mais que de plus  $X$  est une partie convexe d'un espace normé munie de la distance  $g : x, x' \longrightarrow \|x - x'\|$ , alors il existe encore  $p \in [1, \infty[$  tel que  $d$  soit un facteur de  $g^p$ .

Un exemple de la situation décrite en 2.9 apparaît en analyse harmonique et dans des questions de représentations quasi conformes (Ahlfors [1] p. 295) :

(2.11) un arc continu injectif  $t \longrightarrow f(t)$  (dans  $\mathbb{R}^n$  et paramétré par  $[0, 1]$ ) est dit à rotation bornée s'il existe une constante  $C \in [1, \infty[$  telle qu'on ait pour tout  $x, y, s, t \in [0, 1]$  :

$$[x, y] \subset [s, t] \implies \|f(x) - f(y)\| \leq C \|f(s) - f(t)\|$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$

(en anglais "of bounded turning" voir Lehto, Virtanen [20] p. 104) ; il est clair que cette définition ne dépend pas du paramétrage  $f$  ; par ailleurs elle exprime simplement que  $s, t \longrightarrow \|f(s) - f(t)\|$  est une distance quasi croissante sur  $[0, 1]$  (au sens de 2.9).

Anticipant sur le paragraphe 3, on en tire le corollaire suivant de 2.9 :

**COROLLAIRE 2.12.** Soit  $X = f([0, 1])$  un arc à rotation bornée dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut alors choisir le paramétrage  $f$  de  $X$  de façon que  $s, t \rightarrow \|f(s) - f(t)\|$  soit un facteur de la distance  $g : s, t \rightarrow |s - t|$  et admette une puissance de  $g$  comme facteur.

Démonstration. On a vu (en 2.11) que  $s, t \rightarrow \|f(s) - f(t)\|$  est une distance quasi croissante sur  $[0, 1]$ . Donc (par 2.9 et quitte à remplacer  $f$  par  $f \circ h^{-1}$ ) on peut choisir  $f$  de façon que  $d : s, t \rightarrow \|f(s) - f(t)\|$  soit un facteur de la distance  $g : s, t \rightarrow |s - t|$ . Mais par ailleurs  $d$  est une distance de dimension métrique finie (voir 3.5, car  $f$  est un plongement de  $d$  dans  $\mathbb{R}^n$ ) ; la proposition 3.13 entraîne donc que  $d$  admet une puissance de  $g$  comme facteur.

Le corollaire 2.12 est très proche d'un résultat de Tukia, Väisälä [28] (Theorem 4.9). Plutôt que de préciser ce résultat, je veux donner une idée des liens entre les notions introduites dans [28] (toutes issues de l'étude des représentations quasi conformes) et celles que j'ai rappelées ci-dessus :

(2.13) plongements quasi symétriques ([28] 1.1). Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  des espaces métriques ; on dit qu'une injection  $f$  de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$  est un plongement quasi symétrique si et seulement si elle vérifie :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists \beta \in [1, \infty[, \forall r, s, t \in X,$$

$$(2.13.1) \quad d(r, s) \leq \alpha d(s, t) \implies \delta(f(r), f(s)) \leq \beta \delta(f(s), f(t)) \quad \text{et}$$

$$(2.13.2) \quad \delta(f(r), f(s)) \leq \alpha \delta(f(s), f(t)) \implies d(r, s) \leq \beta d(s, t) ;$$

autrement dit (si on note  $g$  la distance  $s, t \rightarrow \delta(f(s), f(t))$ ) l'injection  $f$  est un plongement quasisymétrique si et seulement si  $g$  est quasi  $(\alpha, d)$  croissante et  $d$  est quasi  $(\alpha, g)$  croissante pour chaque  $\alpha \in [1, \infty[$  (ou seulement pour un  $\alpha \in ]2, \infty[$  si  $X$  est un espace topologique connexe sur lequel  $d$  et  $g$  sont continues, voir ci-dessus 2.10).

Si  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  sont tous deux des sous espaces métriques ouverts de  $\mathbb{R}^n$

(muni de la distance euclidienne), la version locale de quasisymétrie n'est autre que quasi conforme ; de façon précise on a

(2.14) (Väisälä [29] 2.8) l'injection  $f$  est une représentation quasi conforme de  $X$  dans  $Y$  si et seulement si tout point  $x$  de  $X$  a un voisinage  $V(x)$  tel que  $f$  soit un plongement quasi symétrique de  $V(x)$  dans  $Y$  uniformément en  $x$  (c'est-à-dire de façon que l'application  $\alpha \rightarrow H(\alpha) = \beta$  ne dépende pas de  $x$ ).

(2.15) Notons que la connexité est utilisée souvent dans [A] pour assurer qu'un espace métrique a suffisamment de points, d'où son emploi ici en 2.8, 2.10, 2.11, 2.16 et plus tard aux § 3 et 4 (où elle peut être gênante, par exemple si  $\text{Dim} = 0$ ) ; en fait l'examen des démonstrations données dans [A] montre que les espaces pseudométriques connexes peuvent être remplacés : pour [A] 1.29, par des espaces pseudométriques pseudoconvexes ([28] 2.7) partout ailleurs dans [A], par des espaces pseudométriques denses de façon homogène ([28] 3.8).

De nombreuses propriétés sont croissantes et décroissantes pour le préordre  $\prec_f$  :

PROPOSITION 2.16. Soient  $d_1$  et  $d_2$  des pseudométriques sur un ensemble  $X$ . On suppose que  $d_1$  est un facteur de  $d_2$  (autrement dit  $d_1 \succ_f d_2$ ). On a alors (pour 2.16.3 et 2.16.4 l'espace métrisable  $(X, d_2)$  est supposé connexe) :

(2.16.1) (rappel de 2.6) si  $d_2$  est une quasi distance, il en est de même de  $d_1$  ;

(2.16.2) ([A], 1.24.3) si  $d_1$  est de dimension métrique finie, il en est de même de  $d_2$  (la dimension métrique sera définie au paragraphe 3) ;

(2.16.3) [A, 4.9 et 5.3] si  $d_2$  admet un plongement lipschitzien dans  $L^2$  (resp. dans  $L^1$ ), il en est de même de  $d_1$  ;

(2.16.4) (Assouad [A] 6.8.2) si  $d_2$  admet un plongement Lipschitzien dans un espace métrique pentagonal, il en est de même de  $d_1$ .

Enfin mon expérience est que les démonstrations sur un espace métrique  $(X, d)$  font intervenir naturellement des facteurs de  $d$  (autre ceux figurant éventuellement dans

l'énoncé) ; les facteurs  $y$  apparaissent en quelque sorte comme des termes (au sens de la logique) de la théorie des espaces métriques. C'est le cas dans 2.16 et dans les résultats exposés dans [A, partie III] sur les espaces normés de fonctions lipschitziennes sur  $([0,1]^k, d)$ , où  $d$  est un facteur de la distance euclidienne (prolongement à la Whitney, injection complétée dans l'espace des fonctions lipschitziennes usuelles).

Donnons pour finir la démonstration de (2.4.2) :

Démonstration de (2.4.2). Soit  $s \in ]0, \infty[$ . On a pour tout  $t \in [0, \infty[$  :  
 $\varphi(t) \leq \varphi(s) + \frac{t}{s} \varphi(s)$ . On pose  $y = \frac{\varphi(s)}{s}$  et, pour tout  $z \in [0, \infty[$ ,  $\theta(z) = \inf_t [tz - \varphi(t)]$   
 et  $\psi(z) = \inf_t [tz - \theta(t)]$ . On a donc :  $\varphi(s) + \theta(y) \geq 0$  c'est-à-dire  $2\varphi(s) \geq sy - \theta(y)$ .  
 On en déduit  $2\varphi(s) \geq \psi(s)$ . Par ailleurs, il est clair que  $\psi$  est la plus petite fonction concave majorant  $\varphi$ , d'où le résultat.

### 3. DIMENSION METRIQUE ET PLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS $\mathbb{R}^n$ .

On s'intéresse maintenant aux plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne  $x, x' \rightarrow \|x - x'\|$ .

(3.1) Soient  $(X, d)$  un espace quasimétrique et  $f$  un plongement lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne de bornes  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire (voir 1.2) une application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant pour tout  $x, x' \in X$  :

$$Ad(x, x') \leq \|f(x) - f(x')\| \leq Bd(x, x').$$

On dira alors que  $f$  est un  $n$ -plongement de  $(X, d)$  et on notera  $D_n(f)$  le logarithme népérien de  $\frac{B}{A}$ .

(3.2) On dira qu'un espace quasimétrique  $(X, d)$  est de rang  $\leq n$  s'il existe un  $n$ -plongement  $f$  de  $(X, d)$ . On notera alors  $D_n(X, d)$  la borne inférieure de  $D_n(f)$  pour de tels  $f$ .

(3.3) QUATRE QUESTIONS CONCERNANT LES PLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS  $\mathbb{R}^n$ .

(3.3.1) caractériser les espaces métriques de rang fini ;

(3.3.2) calculer le rang au moins pour certains espaces métriques ; si  $n$  est un majorant du rang de  $(X, d)$ , évaluer  $D_n(X, d)$  ;

(3.3.3) soit  $(X, d)$  un sous-espace métrique (au sens isométrique) d'un espace de Hilbert  $H$  (muni de la distance de la norme) ; on suppose de plus que  $(X, d)$  est un espace métrique de rang fini (ce qui n'implique pas que  $X$  soit inclus dans un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie) ;  $D_n(X, d)$  tend-il vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Si c'est bien le cas, trouver un majorant de forme "simple" (par exemple de la forme  $B n^{-\beta}$ ) de  $D_n(X, d)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ;

(3.3.4) sous les mêmes hypothèses que (3.3.3), trouver un minorant "simple" de  $D_n(X, d)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (et si possible par une quantité proportionnelle à une majoration elle-même "simple").

#### LES ESPACES METRIQUES DE RANG FINI.

On va définir un indice de dimension à valeurs réelles (en général plus grand que la dimension de Hausdorff, voir 3.16) qui va permettre de reconnaître presque complètement les espaces métriques de rang fini. Auparavant on a besoin de quelques notations ( $(X, d)$  désigne un espace pseudométrique) :

(3.4.1) (diamètre) on pose  $\text{diam}(X, d) = \text{Sup}\{d(x, x') \mid x, x' \in X\}$  ;

(3.4.2) (boule ouverte) soient  $x \in X$  et  $r \in ]0, \infty[$ , on pose  $B_d(x, r) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$  (si on prend  $d(x, x') \leq r$  on parle de boule fermée ; mais il faut prendre garde que les boules ouvertes ou fermées peuvent ne pas être ouvertes ou fermées pour la topologie métrisable définie par  $d$  sur  $X$ , voir 1.6) ;

(3.4.3) soit  $a \in ]0, \infty[$  ; une partie  $Y$  de  $X$  est dite a-dense dans  $(X, d)$  si on a  $X = \bigcup_{y \in Y} B_d(y, a)$  ;  $Y$  est dite a-discernable dans  $(X, d)$  si on a  $d(y, y') \geq a$  pour tout couple  $y, y'$  de points distincts de  $Y$  ; on dit que  $Y$  est un a-réseau de  $(X, d)$  si  $Y$  est à la fois a-dense et a-discernable dans  $(X, d)$ .

DEFINITION 3.5 (Assouad [3]). Soient  $(X, d)$  un espace pseudométrique,

$C \in ]0, \infty[$  et  $s \in [0, \infty[$ . On pose  $\text{Dim}(X, d) \underset{C}{<} s$ , si, pour tout  $a, b \in ]0, \infty[$  ( $a < b$ ), tout  $a$ -réseau  $Y_a$  de  $(X, d)$  et tout  $x$  dans  $X$ , on a :

$$\text{Card}(Y_a \cap B_d(x, b)) \leq C \left(\frac{b}{a}\right)^s.$$

On note  $\text{Dim}(X, d)$  (dimension métrique de  $(X, d)$ ) la borne inférieure des  $s \in [0, \infty[$  tels qu'il existe  $C \in ]0, \infty[$  avec  $\text{Dim}(X, d) \underset{C}{<} s$  (on pose  $\text{Dim}(X, d) = +\infty$  s'il n'existe pas de tel  $s$ ).

Les espaces métriques de rang fini sont de dimension métrique finie :

LEMME 3.6 (Assouad [3]) (3.6.1)  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne (ou de la distance provenant d'une norme quelconque) est de dimension métrique  $n$  ;

(3.6.2) Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  des espaces pseudométriques et  $f$  un plongement lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$  ; on a alors :

$$\text{Dim}(X, d) \leq \text{Dim}(Y, \delta).$$

Les espaces pseudométriques de dimension métrique finie se reconnaissent aisément :

LEMME 3.7 (Assouad [3]). Un espace pseudométrique  $(X, d)$  est de dimension métrique finie si et seulement si il existe un entier  $L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall x \in X, \forall b \in ]0, \infty[, \exists x_1, \dots, x_L \in X, B_d(x, b) \subset \bigcup_{i=1}^L B_d(x_i, \frac{b}{2}).$$

On peut obtenir des espaces pseudométriques de dimension métrique finie par de nombreuses opérations :

PROPOSITION 3.8 (Assouad [3]). Soient  $X$  (resp.  $X'$ ) un ensemble et  $d$  (resp.  $d'$ ) une pseudodistance sur  $X$  (resp.  $X'$ ). On a alors :

$$(3.8.1) \text{ pour tout } p \in ]0, \infty[, \text{Dim}(X, d^p) = \frac{1}{p} \text{Dim}(X, d) ;$$

$$(3.8.2) \text{ pour toute pseudométrique } g \text{ admettant } d \text{ pour facteur,} \\ \text{Dim}(X, g) \leq \text{Dim}(X, d) ;$$

$$(3.8.3) X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \text{ implique } \text{Dim}(X, d) = \sup_{i=1}^n \text{Dim}(X_i, d) ;$$

$$(3.8.4) \quad \text{Dim}(X \times X', d \oplus d') \leq \text{Dim}(X, d) + \text{Dim}(X', d')$$

(où on a posé  $d \oplus d'((x, x'), (y, y')) = d(x, y) + d'(x', y')$ );

$$(3.8.5) \quad \text{pour toute pseudométrie } \delta \text{ sur } X \text{ et tout } \lambda, \mu \in ]0, \infty [, \\ \text{Dim}(X, \lambda d + \mu \delta) \leq \text{Dim}(X, d) + \text{Dim}(X, \delta).$$

La dimension métrique permet presque de reconnaître les espaces métriques de rang fini :

PROPOSITION 3.9 [A, 1.30]. Soit  $(X, d)$  un espace quasi métrique de dimension métrique finie ; alors, pour tout  $p \in ]0, 1 [, l'espace métrique  $(X, d^p)$  est de rang fini.$

Rappelons que la dimension métrique est définie pour tout espace pseudométrique, alors que naturellement seul un espace quasi métrique peut être de rang fini ; aussi n'est-il pas étonnant de travailler plus facilement avec  $d^p$  ( $p < 1$ ), plus éloignée que  $d$  de ne pas être une quasi métrique. Cependant je pense que 3.9 reste vrai pour  $p = 1$  :

CONJECTURE 3.10. Un espace quasi métrique est de rang fini si et seulement si il est de dimension métrique finie.

En fait la Proposition 2.8 permet d'établir un résultat plus précis que 3.9 :

PROPOSITION 3.11 [A, 1.41]. Soit  $(X, d)$  un espace quasi métrique connexe et de dimension métrique finie ; alors il existe un entier  $n$  et une distance  $h$  sur  $\mathbb{R}^n$  admettant la distance euclidienne pour facteur et telle que  $(X, d)$  se plonge de façon lipschitzienne dans  $(\mathbb{R}^n, h)$ .

Notons qu'on a (grâce à 3.8.2) :  $\text{Dim}(\mathbb{R}^n, h) \leq n$ , ce qui amène à poser la conjecture suivante (qui implique 3.10 pour les espaces métriques connexes) :

CONJECTURE 3.12. Soit  $h$  une distance sur  $\mathbb{R}^n$  admettant la distance euclidienne pour facteur ; alors  $(\mathbb{R}^n, h)$  est un espace métrique de rang  $n$ .

Je sais seulement montrer que, pour  $n = 1$ ,  $(\mathbb{R}, h)$  est de rang fini : on utilise 2.9, puis on montre qu'un facteur de dimension métrique finie d'une distance de rang fini est lui-même de rang fini.

### DIMENSION METRIQUE ET FACTEURS.

On a vu (en 3.8.2) qu'une pseudodistance  $g$  admettant un facteur de dimension métrique finie est elle-même de dimension métrique finie. Soit donc  $g$  une pseudodistance de dimension métrique finie ; on va préciser quels sont les facteurs de  $g$  dont la dimension métrique est finie :

PROPOSITION 3.13 [A, 1.29]. Soient  $(X, g)$  un espace pseudométrique de dimension métrique finie et  $d$  un facteur de  $g$  tel que  $(X, d)$  soit connexe. Alors  $(X, d)$  est de dimension métrique finie si et seulement si il existe  $p \in ]0, 1[$  tel que  $g^p$  soit un facteur de  $d$ .

### DIMENSION METRIQUE ET DIMENSION DE HAUSDORFF.

Je renvoie pour la dimension de Hausdorff au livre de C. A. Rogers [24] ; simplement on l'utilisera aussi pour chaque espace pseudométrique  $(X, d)$  (la définition reste la même) et on la notera  $\dim(X, d)$  ; rappelons que la dimension métrique est notée  $\text{Dim}(X, d)$ .

(3.14) La dimension de Hausdorff est, comme la dimension métrique, un invariant lipschitzien des espaces pseudométriques ; autrement dit, elle ne change pas si on remplace la pseudodistance par une pseudodistance équivalente. Par ailleurs les Propositions 3.6 et 3.8 s'étendent à la dimension de Hausdorff (on peut y remplacer partout  $\text{Dim}$  par  $\dim$ ) sauf 3.8.4 et 3.8.5.

(3.15) Notons deux propriétés qui distinguent les deux dimensions (voir aussi 4.15) :

(3.15.1) la dimension de Hausdorff d'une suite est toujours nulle ; il n'en est pas de même pour la dimension métrique (ainsi la suite discrète  $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p^2 \leq q \right\}$ , munie de la distance induite par la distance euclidienne sur  $[0, 1]$ , est de dimension métrique 1 ; voir Assouad [3]).

(3.15.2) la dimension métrique d'un espace pseudométrique est la même que celle de son complété (voir Assouad [3]) ; il n'est pas de même pour la dimension de Hausdorff.

Enfin les notations  $\dim$  et  $\text{Dim}$  sont justifiées par le résultat suivant :

PROPOSITION 3.16 (Assouad [3]). Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique. On a alors :

$$\dim(X, d) \leq \text{Dim}(X, d).$$

On a vu en 3.15.1 que l'inégalité est stricte en général, même pour un espace métrique compact. On verra en 4.1, 4.2 un cas d'égalité.

### (3.17) BREVE HISTOIRE DE LA DIMENSION METRIQUE.

(3.17.1) (Bouligand [9] 1928). Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne  $d$  ; on dit que l'ordre dimensionnel de  $(X, d)$  est moindre que  $s$  (resp. plus grand que  $s$  de façon homogène) s'il existe  $C \in ]0, \infty[$  tel que pour tout  $a, b \in ]0, \infty[$  ( $a < b$ ) et tout  $x$  dans  $X$ , on ait :

$$(i) \quad a^{-n} \lambda(V_a(X \cap B_d(x, b))) \leq C \left(\frac{b}{a}\right)^s \quad (\text{resp. } \geq C \left(\frac{b}{a}\right)^s),$$

où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue et  $V_a(X \cap B(x, b))$  le  $a$ -voisinage de  $X \cap B(x, b)$ .

(3.17.2) A. Appert ([2], 1937) remarque que, dans (i), on peut remplacer  $a^{-n} \lambda(V_a(X \cap B_d(x, b)))$  par  $\text{Card}(Y_a \cap B_d(x, b))$  où  $Y_a$  est un  $a$ -réseau de  $(X, d)$ . Autrement dit ce que j'appelle dimension métrique n'est autre que l'ordre dimensionnel introduit par Bouligand, qu'il appelle ordre dimensionnel C. M. (de Cantor Minkowski) dans d'autres articles.

Cependant cet ordre dimensionnel n'est alors considéré que pour les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  (notamment chez Bouligand du fait de sa définition "par l'extérieur").

(3.17.3) Bien qu'il n'étudie aucun indice de dimension, je signale l'article de G. Glaeser ([15], 1958) pour deux raisons :

- il pose le problème de la caractérisation des espaces métriques de rang fini (p. 119, note 3)
- il donne le premier exemple non trivial d'un tel espace (p. 57, voir ci-dessous § 4C).

(3.17.4) D. G. Larman ([18], 1967) introduit un concept proche, l'indice de

dimension  $\dim\text{-}n(X,d)$  d'un espace métrique  $(X,d)$ . Je renvoie à [18] pour la définition ; en termes de dimension métrique, elle signifie :

on dit que  $\dim\text{-}n(X,d)$  est moindre que  $s$  si il existe un recouvrement ouvert  $(X_i)_{i \in I}$  de  $X$  avec  $\text{Dim}(X_i, d) \leq s$  pour chaque  $i \in I$ . On a donc  $\dim\text{-}n(X,d) \leq \text{Dim}(X,d)$  et cette inégalité est en général stricte (car l'indice  $\dim\text{-}n$  d'une suite discrète est nul).

Dans le même article [18], D. G. Larman appelle  $\beta$ -espaces les espaces métriques  $(X,d)$  tels qu'il existe un entier  $L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall x \in X, \forall r \in ]0, \infty[; \exists x_1, \dots, x_L \in X, B_d(x,r) \subset \bigcup_{i=1}^L B_d(x_i, \frac{r}{2}).$$

En d'autres termes (c'est le Lemme 3.7) un espace métrique est de dimension métrique finie si et seulement si c'est un  $\beta$ -espace.

(3.17.5) La notion de  $\beta$ -espace apparaît aussi dans le livre de Coifman et Weiss [10] (1971) (sous le nom d'espaces de nature homogène, p. 66) ; mais ils sont surtout intéressés par les espaces homogènes avec pseudodistance et mesure (voir ci-dessous 4.3) utiles en analyse harmonique.

(3.17.6) L. Le Cam [19] (1975) utilise en statistique des  $\beta$ -espaces (espaces de paramètres "of finite dimension" dans sa terminologie [19] p. 20) comme un substitut à l'hypothèse qu'un modèle statistique est paramétrique (c'est-à-dire est paramétrisé d'une bonne façon par  $\mathbb{R}^n$ ). Dans ce cadre, il donne un très beau résultat de vitesse d'estimation.

(3.17.7) J'ai étudié dans une partie de ma thèse [A] (1977) cette même notion ("espaces pseudométriques de dimension finie" [A, 1.21]) en mettant pour la première fois en évidence ses relations avec le rang (voir ci-dessous 3.9) ; dans ma note [3] (1979), je commence ensuite à étudier la dimension métrique.

(3.17.8) Enfin les  $\beta$ -espaces apparaissent sous le nom d'espaces HTB (c'est-à-dire "homogeneously totally bounded") dans un article de Tukia et Väisälä [28] (1979).

Les auteurs ci-dessus ont travaillé indépendamment (hormis ce que 3.17.2 doit à

3.17.1 et ce que 3.17.7 doit à 3.17.3 et à 3.17.6).

#### 4. EXEMPLES D'ESPACES DE DIMENSION METRIQUE FINIE.

##### A. EGALITE AVEC LA DIMENSION DE HAUSDORFF : ESPACES B-HOMOGENES

Un espace pseudométrique de dimension métrique  $s$ , même complet, n'est en général pas assez homogène pour être de dimension de Hausdorff  $s$  ; cependant, dans la situation suivante (considérée par Bouligand [9] dans  $\mathbb{R}^n$ , cf 3.17.1), les deux dimensions vont coïncider :

(4.1) On dit que l'espace pseudométrique  $(X, d)$  est B-homogène de dimension  $s$  (B comme Bouligand) s'il existe  $C_1, C_2 \in ]0, \infty[$  tels que, pour tout  $a, b \in ]0, \infty[$  ( $a < b$ ), tout  $a$ -réseau  $Y_a$  de  $(X, d)$  et tout  $x \in X$ , on ait :

$$C_1 \left(\frac{b}{a}\right)^s \leq \text{Card}(Y_a \cap B_d(x, b)) \leq C_2 \left(\frac{b}{a}\right)^s .$$

Je vais donner maintenant une démonstration rapide d'un résultat de Bouligand [9] (pp. 361-364, seulement pour les sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$ ) :

**PROPOSITION 4.2.** Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique complet B-homogène de dimension  $s$ . On a alors  $\dim(X, d) = \text{Dim}(X, d) = s$ .

Démonstration. Il suffit d'étudier le cas où  $(X, d)$  est borné ; il est alors précompact donc compact. Par ailleurs, quitte à remplacer  $d$  par une pseudodistance équivalente, on peut supposer que  $d$  est continue pour la topologie qu'elle définit (voir ci-dessus 1.6). Soit  $\mu$  une valeur d'adhérence (pour la topologie étroite, lorsque  $a$  tend vers 0) de la famille des lois de probabilités  $\frac{1}{\text{Card } Y_a} \sum_{y \in Y_a} \varepsilon_y$ , où  $a$  parcourt  $]0, \infty[$  et  $Y_a$  est un  $a$ -réseau de  $(X, d)$ . Alors  $\mu$  est une loi de probabilité sur  $X$  et on applique l'inégalité (4.1.1), pour chaque  $x$  de  $X$ , avec  $b = \frac{r}{2}$ , puis  $b = 2r$ , puis enfin  $b = \text{diam}(X, d)$  ; on obtient :

$$(4.2.1) \quad \forall x \in X, \forall r \in ]0, \infty[ \left[ \frac{C_1}{C_2} \left( \frac{r}{2 \operatorname{diam}(X, d)} \right)^s \leq \mu(B_d(x, r)) \leq \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{2r}{\operatorname{diam}(X, d)} \right)^s \right].$$

L'existence d'une telle mesure entraîne que la dimension de Hausdorff de  $(X, d)$  est au moins  $s$  (voir Kahane, Salem [17] p. 27, l'inégalité de droite suffit).

#### LES ESPACES PSEUDOMETRIQUES MESURES HOMOGENES.

L'existence sur  $(X, d)$  d'une mesure  $\mu$  vérifiant 4.2.1 implique inversement que  $(X, d)$  est  $B$ -homogène de dimension  $s$  (c'est clair). Une situation plus générale est fréquente en analyse harmonique (pour les espaces homogènes sous l'action d'un groupe de Lie, voir Coifman, Weiss [10] pp. 77-80 ; voir aussi Macias, Segovia [21]) :

(4.3) Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique muni d'une mesure positive  $\mu$  sur la tribu engendrée par les boules, on dira que  $(X, d, \mu)$  est un espace pseudométrique mesuré homogène s'il existe  $C \in ]1, \infty[$  tel qu'on ait :

$$\forall x \in X, \forall b \in ]0, \infty[ \left[ 0 < \mu(B_d(x, b)) \leq C \mu(B_d(x, \frac{b}{2})) < +\infty \right]$$

(la mesure  $\mu$  est alors appelée une mesure homogène sur  $(X, d)$ ).

PROPOSITION 4.4 (Coifman, Weiss [10] p. 67). Un espace pseudométrique mesuré homogène est un espace pseudométrique de dimension métrique finie.

Une question se pose maintenant : si  $(X, d)$  est un espace pseudométrique de dimension métrique finie, existe-t-il une mesure homogène sur  $(X, d)$  ?

(4.5) La réponse est non en général. Considérons par exemple  $\mathbb{Q}$  muni de la distance euclidienne ; c'est un espace métrique de dimension métrique finie sur lequel il n'existe pas de mesure homogène.

Démonstration de 4.5.

(4.5.1) Dans un espace pseudométrique mesuré homogène  $(X, d, \mu)$ , un point  $x$  non isolé est nécessairement de masse nulle : en effet soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $X \setminus \{x\}$  tendant vers  $x$  ; quitte à remplacer cette suite par une suite extraite, on peut supposer qu'on a :  $d(x, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2A(d)} d(x, x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;

les boules  $B_n = B_d(x_n, \frac{1}{2A(d)^2} d(x, x_n))$  sont donc disjointes et incluses dans la boule  $B_d(x, \frac{1}{2} d(x, x_0))$ ; soit  $r$  un entier tel qu'on ait :  $2A(d)^2 < 2^r$ , on a alors  $\mu(B_n) \geq C^{-r} \mu(\{x\})$  pour tout  $n$  et donc  $\mu(\{x\}) = 0$  ;

(4.5.2) si  $\mu$  était une mesure homogène sur  $\mathbb{Q}$  muni de la distance euclidienne, on aurait donc  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout rationnel  $x$  et donc  $\mu = 0$  ; il n'y a donc pas de telle mesure.

Je pense cependant que, sur un espace pseudométrique complet  $(X, d)$  de dimension métrique finie, il existe une mesure homogène. Comme une mesure est homogène sur  $(X, d)$  si et seulement si elle est homogène sur  $(X, d^p)$  ( $p \in ]0, 1[$ ) (voir ci-dessous 4.9), cette conjecture peut, grâce à 3.9, s'énoncer de la façon suivante :

CONJECTURE 4.6. Soient  $X$  une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  et  $g$  la restriction à  $X$  de la distance euclidienne ; alors il existe une mesure homogène sur  $(X, g)$ .

En fait je ne sais même pas démontrer 4.6 en dimension 1.

On va voir que, si  $(X, d, \mu)$  est un espace mesuré homogène, on peut par un changement de distance se ramener à la situation du paragraphe A).

Pour simplifier, on va supposer que l'espace  $(X, d)$  n'a pas de point isolé : c'est le cas si  $(X, d)$  est  $B$ -homogène et, en général, on peut s'y ramener en remplaçant chaque point isolé par une composante connexe convenable.

PROPOSITION 4.7 (Macias, Segovia [21] p.259 ). Soit  $(X, d, \mu)$  un espace mesuré homogène sans point isolé. Soit  $\alpha > 0$  ; on pose pour tout  $x, y \in X$  :

$$g(x, y) = \mu(B_d(x, \alpha d(x, y)) \cup B_d(y, \alpha d(x, y))).$$

Alors  $g$  est une pseudodistance définissant la même topologie que  $d$  et il existe  $A_1, A_2 \in ]0, \infty[$  tels que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r \in ]0, \infty[$ , on ait :

$$(4.7.1) \quad A_1 r \leq \mu(B_g(x, r)) \leq A_2 r .$$

Démonstration. On renvoie à [21]. Observons cependant que Macias et Segovia

travaillent non pas avec  $g$  mais avec  $\delta$  définie par :

$$\delta(x, y) = \text{Inf} \left\{ \mu(B_d(z, r)) \mid z \in X, r \in ]0, \infty[ , x, y \in B(z, r) \right\} ;$$

mais il est facile de voir que  $\delta$  et  $g$  (quel que soit  $\alpha$ ) sont équivalentes.

En fait, la notion de facteur permet de préciser la Proposition 4.7.

**PROPOSITION 4.8.** Dans les hypothèses de 4.7, il existe  $q \in ]0, \infty[$  tel que  $g$  soit un facteur de  $d^q$ . En particulier  $d$  admet un facteur  $h$   $B$ -homogène. Si de plus  $(X, g)$  est connexe, alors il existe  $p \in ]0, \infty[$  tel que  $d^p$  soit un facteur de  $g$ .

Démonstration. Prenons  $\alpha = 1$ . Il est clair qu'il existe  $B \in ]0, \infty[$  tel que :  
 $\forall x, y \in X, \mu(B_d(x, d(x, y))) \leq g(x, y) \leq B \mu(B_d(x, d(x, y)))$ .

Par ailleurs définissons  $q$  par  $2^q = C$ , où  $C$  est la constante qui intervient dans 4.3.1.

On a alors pour tout  $x \in X$  et tout  $r, t \in ]0, \infty[$  :

$$\mu(B_d(x, t)) \leq C \cdot \text{Sup} \left( 1, \left( \frac{t}{r} \right)^q \right) \mu(B_d(x, r)).$$

Cela entraîne qu'on a pour tout  $x, y, z \in X$  :

$$\frac{g(x, z)}{g(y, z)} \leq B C \text{Sup} \left( 1, \frac{d^q(x, z)}{d^q(y, z)} \right).$$

Donc (d'après 2.2),  $g$  est un facteur de  $d^q$ . D'autre part, il est clair (par 4.7.1) que  $g$  est  $B$ -homogène. On prend donc  $h = g^{1/q}$ .

Si de plus l'espace  $(X, d)$  est connexe, alors il existe  $p \in ]0, \infty[$  tel que  $d^p$  soit un facteur de  $g$  :

pour cela on note que  $g$  est facteur de  $d^q$  et que  $g$  est de dimension métrique finie ; puis on applique 3.13.

Comme on l'a noté en 2.15, l'hypothèse de connexité faite ci-dessus pourrait être sensiblement affaiblie. Il va en être de même ci-dessous :

**LEMME 4.9.** Soient  $d$  et  $g$  deux pseudodistances sur un ensemble  $X$ . On suppose que  $d$  est un facteur de  $g^q$ , que  $g^p$  est un facteur de  $d$  (avec  $p, q \in ]0, \infty[$ ) et que  $(X, d)$  et  $(X, g)$  sont connexes. Alors  $d$  et  $g$  ont mêmes

mesures homogènes.

Démonstration. On a (appliquant 2.2) pour tout  $x, y, z \in X$  :

$$(4.9.1) \quad \frac{g^p(x, z)}{g^p(x, y)} \leq K \sup\left(1, \frac{d(x, z)}{d(x, y)}\right), \quad \frac{d(x, z)}{d(x, y)} \leq L \sup\left(1, \frac{g^q(x, z)}{g^q(x, y)}\right).$$

Soit  $\mu$  une mesure homogène sur  $(X, g)$ , soient  $x \in X$  et  $r \in ]0, \infty[$ ; on se propose d'évaluer  $\mu(B_d(x, 2r))$  à l'aide de  $\mu(B_d(x, r))$ . Si  $B_d(x, 2r) = B_d(x, r)$ , il n'y a rien à faire. Sinon, on choisit  $y \in X$  vérifiant  $\frac{r}{2L} \leq d(x, y) \leq \frac{r}{L}$  et on pose  $g(x, y) = s$ ; on a alors  $B_g(x, s) \subset B_d(x, r)$  (seconde inégalité de 4.9.1) et  $B_d(x, 2r) \subset B_g(x, (4KL)^{1/p}s)$  (première inégalité de 4.9.1). Cela établit le lemme.

PROPOSITION 4.10. Soit  $X$  un arc de  $\mathbb{R}^n$  à rotation bornée (voir 2.11) et muni de la restriction  $d$  de la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $(X, d)$  admet une mesure homogène.

Démonstration.  $d$  est facteur (voir 2.1 2) d'une distance  $B$ -homogène  $g$  et admet une puissance de  $g$  pour facteur. On conclut avec 4.2.1 et 4.9.

C. LES ESPACES METRIQUES  $([0, 1]^k, \|s-t\|^p)$ .

Il résulte de la Proposition 3.9 que  $[0, 1]^k$  muni de la distance  $s, t \rightarrow \|s-t\|^p$  (avec  $p \in ]0, 1[$  et où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne) est un espace de rang fini.

Rappelons qu'un cas particulier en est connu depuis longtemps : (Glaeser [15] p. 57) la courbe de Koch (voir [31]) réalise un plongement Lipschitzien de  $([0, 1], |s-t|^{\frac{\log 3}{\log 4}})$  dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne.

Il est possible de préciser presque complètement le rang de l'espace  $([0, 1]^k, \|s-t\|^p)$  (autrement dit de répondre pour cet espace à la question 3.3.2) :

(4.11.1) la dimension métrique de cet espace est  $\frac{k}{p}$  (voir 3.8.1), donc il ne peut pas se plonger dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n < \frac{k}{p}$  ;

(4.11.2) (Assouad [7]) pour  $n = \frac{k}{p}$  ( $p < 1$ ), l'espace  $([0, 1]^k, \|s-t\|^p)$  n'admet pas non plus de plongement lipschitzien dans  $\mathbb{R}^n$  ;

(4.11.3) (Assouad [6]) pour  $n > \frac{1}{p}$ , l'espace  $([0, 1], |s-t|^p)$  se plonge

dans  $\mathbb{R}^n$  (en utilisant par exemple des courbes de Koch généralisées (cf. [6]).

On a donc démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 4.11. L'espace métrique  $([0,1]^k, \|s-t\|^p)$  est de rang  $r$  et on a (pour  $p < 1)$  :  $\lceil \frac{k}{p} \rceil \leq r \leq k \lceil \frac{1}{p} \rceil$  où  $\lceil t \rceil$  désigne le plus petit entier strictement plus grand que  $t$  (je pense que le rang est exactement  $\lceil \frac{k}{p} \rceil$ ).

L'espace  $([0,1], \sqrt{|s-t|})$  n'est autre que l'espace métrique du mouvement brownien ; autrement dit, on a  $\sqrt{|s-t|} = \|W_s - W_t\|_{L^2}$  pour tout  $s, t \in [0,1]$  (où  $t \rightarrow W_t$  désigne le mouvement brownien). Il résulte de 4.11 que  $([0,1], \sqrt{|s-t|})$  est de rang 3 : il est de dimension métrique égale à 2 et on pourrait utiliser aussi un résultat de Besicovitch, Schoenberg ([8], Th. 3) pour montrer que son rang est au moins 3.

De façon précise, en utilisant une courbe de Koch généralisée, on trouve :

PROPOSITION 4.12 (Assouad [6]). Il exist une application  $f$  de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}^3$  (muni de la distance euclidienne) vérifiant :

$$(4.12.1) \quad \forall s, t \in [0,1], \quad \sqrt{|s-t|} \leq \|f(s)-f(t)\| \leq 2184 \sqrt{|s-t|}.$$

L'espace  $([0,1]^k, \|s-t\|^p)$  est un sous espace métrique d'un espace de Hilbert ; mais on ne sait répondre à la réponse 3.3.3 que pour l'espace  $([0,1], \sqrt{|s-t|})$  (dans ce cas le plongement dans un espace de Hilbert est le mouvement brownien) :

PROPOSITION 4.13 (Kahane [16]).  $D_n([0,1], \sqrt{|s-t|})$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ; de façon précise, il existe  $B \in ]0, \infty[$  tel qu'on ait pour tout  $n$  :

$$D_n([0,1], \sqrt{|s-t|}) \leq \frac{B}{n}.$$

(4.14) Montrons aussi que 4.12 permet une démonstration rapide de la continuité des trajectoires du mouvement brownien  $t \rightarrow W_t$  (c'est l'application au mouvement brownien d'un résultat plus général, voir [6] et ci-dessous 4.16.4).

Démonstration de 4.14. Soit  $f = (f_1, f_2, f_3)$  le plongement donné en 4.12 ; on

définit un processus gaussien par  $Y_t = \sum_{i=1}^3 f_i(t) \xi_i$  (où  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont des variables gaussiennes centrées normées et indépendantes) ; le second membre de (4.12.1) montre que  $f_1, f_2$  et  $f_3$  et donc toutes les trajectoires du processus  $(Y_t)_{t \in [0,1]}$  sont continues ; le premier membre de (4.12.1) s'écrit :  $\forall s, t \in [0,1]$ ,  $\|W_s - W_t\|_{L^2} \leq \|Y_s - Y_t\|_{L^2}$  ; le lemme de Slepian [27] entraîne donc que le processus  $(W_t)_{t \in [0,1]}$  a une modification presque sûrement continue.

#### D. EXPOSANT D'ENTROPIE ET EXPOSANT DE DENSITE.

Je reviens d'abord sur les rapports entre la dimension métrique et la dimension de Hausdorff (notées  $\text{Dim}$  et  $\text{dim}$ , voir § 3) :

(4.15) soient  $d$  et  $\delta$  deux pseudodistances sur un ensemble  $X$  avec  $d \leq \delta$  ; on a alors :  $\text{dim}(X, d) \leq \text{dim}(X, \delta)$  (voir Rogers [24] p. 53) ; par contre, il n'y a pas d'inégalité semblable pour la dimension métrique (voir ci-dessous 4.16.1), sauf dans le cas où  $\delta$  est un facteur de  $d$  (considéré en 3.8.2 ;  $\delta$  est alors "localement plus grande" que  $d$  comme on l'a vu en 2.5).

#### 4.16. Sous dimension métrique.

Considérons maintenant la question suivante :

Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique ; existe-t-il une pseudodistance  $\delta$  sur  $X$ , de dimension métrique finie, vérifiant  $d \leq \delta$  et définissant la même topologie que  $d$  ? (On peut appeler sous dimension métrique de  $(X, d)$  la borne inférieure de  $\text{Dim}(X, \delta)$  pour de telles pseudodistances). Je veux donner quelques observations à ce sujet :

(4.16.1) Soient  $X$  un ensemble dénombrable et  $d$  une distance sur  $X$  ; on peut alors trouver une distance  $\delta$  sur  $X$ , de dimension métrique  $\leq 1$  et vérifiant  $d \leq \delta$  ; si de plus  $(X, d)$  est discret, alors  $\delta$  définit la même topologie que  $d$ .

Démonstration. Soit  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une numérotation de  $X$  ; on pose (pour  $i < j$ )

$$\delta(x_i, x_j) = \sum_{k=i}^{j-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

(4.16.2) Soient  $(X, d)$  un espace pseudométrique et  $\delta$  une pseudodistance sur  $X$  avec  $d \leq \delta$  ; alors la topologie relative à  $\delta$  et la topologie relative à  $d$  coïncident sur toute partie bornée et complète (donc compacte) de  $(X, \delta)$ .

(4.16.3) Notons  $\underline{\text{Dim}}(X, d)$  la sous dimension métrique de  $(X, d)$  ; on a alors  $\dim(X, d) \leq \underline{\text{Dim}}(X, d) \leq \text{Dim}(X, d)$  ;

la seconde inégalité est en général stricte (adapter 4.16.1 à certaines suites compactes ayant un seul point non isolé) ; on verra en 4.17.4 que la première inégalité l'est aussi (par exemple pour  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , mais il serait préférable d'avoir un exemple compact).

#### 4.17. L'exposant d'entropie métrique.

C'est encore un affaiblissement de la notion de dimension métrique (voir 3.5) :

DEFINITION 4.17.1. Soient  $(X, d)$  un espace pseudométrique et  $s \in [0, \infty[$ .

On pose  $\overline{\text{dim}}(X, d) < s$  si pour tout  $b \in ]0, \infty[$  et tout  $x$  dans  $X$ , il existe  $C(x, b) \in ]0, \infty[$  tel que pour tout  $a \in ]0, \infty[$  et tout  $a$ -réseau  $Y_a$  de  $(X, d)$ , on ait :

$$\text{Card}(Y_a \cap B_d(x, b)) \leq C(x, b) a^{-s}.$$

On note  $\overline{\text{dim}}(X, d)$  (exposant d'entropie métrique de  $(X, d)$ ) la borne inférieure des  $s \in [0, \infty[$  tels qu'on ait  $\overline{\text{dim}}(X, d) < s$  (on pose  $\overline{\text{dim}}(X, d) = +\infty$  s'il n'existe pas de tel  $s$ ).

Je donne (sans démonstration) quelques propriétés de cet exposant :

(4.17.2) Soient  $d$  et  $\delta$  deux pseudodistances sur un ensemble  $X$  avec  $d \leq \delta$  ; on suppose que les boules de  $(X, d)$  sont de diamètre fini pour  $\delta$  ; on a alors :  $\overline{\text{dim}}(X, d) \leq \overline{\text{dim}}(X, \delta)$  ;

(4.17.3) Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique : on a alors :  $\dim(X, d) \leq \overline{\text{dim}}(X, d) \leq \underline{\text{Dim}}(X, d) \leq \text{Dim}(X, d)$  ;

(4.17.4) l'exposant d'entropie métrique d'un espace pseudométrique est le même que celui de son complété ; la première inégalité de 4.17.3 est donc stricte en général (prendre  $\mathbb{Q}$  muni de la distance usuelle) ;

(4.17.5) supposons ici que  $(X, d)$  soit de diamètre fini et notons  $N_d(X, a)$  la borne supérieure du cardinal des  $a$ -réseaux de  $(X, d)$ , pour chaque  $a > 0$  ; on a alors pour tout  $p \in ]0, \infty[$  et tout  $\varepsilon \in ]0, p[$

$$\overline{\dim}(X, d) < p - \varepsilon \implies \int_0^1 [N_d(X, a)]^{\frac{1}{p}} da < +\infty \implies \overline{\dim}(X, d) < p .$$

Rappelons ici l'usage des évaluations d'entropie métrique pour montrer la continuité des trajectoires de certains processus :

PROPOSITION 4.17.6 (Pisier [22] Th. 1.9) Soit  $(X_t)_{t \in T}$  une processus stochastique réel, borné dans  $L^p$  ( $p \in ]1, \infty[$ ). On pose  $d_p(s, t) = \|X_s - X_t\|_{L^p}$  pour tout  $s, t \in T$  et on suppose qu'on a  $\int_0^1 [N_d_p(T, a)]^{\frac{1}{p}} da < +\infty$ . Alors le processus  $(X_t)_{t \in T}$  admet une version à trajectoires continues.

Supposons que  $(X_t)_{t \in T}$  soit un processus gaussien centré (auquel cas  $d_p$ , à une constante près, ne dépend pas de  $p$ ) et que l'hypothèse d'entropie de 4.17.6 soit remplacée par la condition  $\underline{\dim}(T, d_p) < +\infty$  (qui est plus forte, voir 4.17.3) ; dans ce cas on peut donner une preuve très rapide de 4.17.6 en calquant 4.14 : on compare directement le processus  $X$  à un processus  $Y$  continu et de rang fini et on utilise le lemme de Slepian [27] (voir Assouad [6] Proposition 4).

Naturellement pour des processus gaussiens, la condition  $\underline{\dim}(T, d_p) < +\infty$  correspond aux cas "faciles" de continuité (pour des conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas stationnaire, voir Fernique [13]).

On va voir maintenant que certaines classes de parties d'un ensemble fournissent une grande variété d'espaces métriques de dimension finie (en divers sens).

### L'exposant de densité.

Commençons par une notation :

(4.18) Soient  $\mathcal{J}$  une classe de parties d'un ensemble  $\Omega$  et  $A$  une partie de  $\Omega$  ; on note  $\mathcal{J} \cap A$  la classe de toutes les parties de  $\Omega$  de la forme  $S \cap A$  (avec  $S \in \mathcal{J}$ ).

On se propose de mesurer la "densité" d'une classe  $\mathcal{J}$  de parties d'un ensemble  $\Omega$  par la fonction  $\Delta^{\mathcal{J}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie de la façon suivante :

$$(4.19) \text{ pour tout } r \in \mathbb{N}, \text{ on pose } \Delta^{\mathcal{J}}(r) = \text{Sup}\{\text{Card}(\mathcal{J} \cap A) \mid A \subset \Omega, \text{Card } A = r\}.$$

On va d'abord évaluer  $\Delta^{\mathcal{J}}$  dans quelques cas particuliers :

(4.19.1) soit  $\mathcal{J} = 2^{\Omega}$  (c'est-à-dire la classe de toutes les parties de  $\Omega$ ) ; on a alors  $\Delta^{\mathcal{J}}(r) = 2^r$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$

(4.19.2) soit  $\mathcal{J} = \bigcup_{k=0}^n \binom{\Omega}{k}$  (où  $\binom{\Omega}{k}$  désigne la classe de toutes les parties de cardinal  $k$  de  $\Omega$ ) ; on a alors  $\Delta^{\mathcal{J}}(r) = \varphi(r, n)$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , où on a posé  $\varphi(r, n) = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k}$  ;

(4.19.3) soit  $\Omega$  l'ensemble de tous les hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$  ; pour tout hyperplan affine  $\ell$  et tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $x \ell y$  si  $\ell$  sépare  $x$  et  $y$  (c'est-à-dire si on a  $\ell \cap [x, y] \neq \emptyset$ ) ; pour tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $S_{x, y} = \{\ell \in \Omega \mid x \ell y\}$  ; on pose enfin  $\mathcal{J} = \{S_{0, x} \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  ; on a encore  $\Delta^{\mathcal{J}}(r) = \varphi(r, n)$  (en d'autres termes  $r$  hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$  en position générale déterminent  $\varphi(r, n)$  régions, c'est classique).

Notons que  $\varphi(r, n)$  est majoré par une puissance de  $r$  (de façon précise on a par exemple  $\varphi(r, n) \leq r^n$  dès que  $\text{Inf}(r, n) \geq 2$ ). On trouve qu'en fait, pour toute classe  $\mathcal{J}$  de parties de  $\Omega$ , ou bien  $\Delta^{\mathcal{J}}(r) = 2^r$  pour tout  $r$ , ou bien  $\Delta^{\mathcal{J}}(r)$  est majoré par une puissance de  $r$  ; précisément on a le résultat suivant qui est dû (indépendamment) à Vapnik et Cervonenkis [30], à Perles et Shelah (voir Shelah [26] p. 254) et à Sauer [25] :

**PROPOSITION 4.20.** Soient  $\mathcal{J}$  une classe de parties d'un ensemble  $\Omega$  telle que  $\Delta^{\mathcal{J}}(n+1)$  soit strictement inférieur à  $2^{n+1}$  pour un certain entier  $n$  ; on a alors  $\Delta^{\mathcal{J}}(r) \leq \varphi(r, n)$  pour tout entier  $r$ .

De telles classes  $\mathcal{J}$  sont utilisées en calcul des probabilités : moyennant des hypothèses de mesurabilité, on peut montrer que ce sont des classes de Donsker

universelles, c'est-à-dire assurant un théorème central limite pour la loi empirique, dans la topologie de la norme uniforme sur  $\mathcal{F}$ , quelle que soit la loi de départ (voir Dudley [11]).

On va utiliser une terminologie inspirée de Sauer [25]:

DEFINITION 4.21. Si  $\mathcal{F}$  est une classe de parties d'un ensemble  $\Omega$ , on pose  $\text{dens}(\mathcal{F}) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \exists C \forall r \Delta^{\mathcal{F}}(r) \leq C r^s\}$ ,  $\text{dens}(\mathcal{F}) = +\infty$  s'il n'existe pas de tel  $s$  (exposant de densité de la classe  $\mathcal{F}$ ). Une classe  $\mathcal{F}$  est dite de densité finie si on a  $\text{dens}(\mathcal{F}) < +\infty$ .

Les classes de densité finie sont douées de nombreuses propriétés de stabilité (voir Dudley [11] p. 922). Le lien de 4.19.3 avec d'autres exemples est étudié dans Dudley [12]. Cependant on s'y intéresse ici surtout à cause du résultat suivant :

PROPOSITION 4.22 (Dudley [11] p. 922). Soient  $\mathcal{F}$  une classe de parties d'un ensemble  $\Omega$  et  $P$  une loi de probabilité sur la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\mathcal{F}$  ; on définit un écart  $d_P$  sur  $\mathcal{F}$  par :  $d_P(S, S') = P(S \Delta S')$  pour tout  $S, S' \in \mathcal{F}$ . On a alors  $\overline{\text{dim}}(\mathcal{F}, d_P) \leq \text{dens}(\mathcal{F})$ .

Démonstration. Soit  $\mathcal{D} = (S_1, \dots, S_m)$  une famille  $a$ -discernable d'éléments de  $(\mathcal{F}, d_P)$  ; soit  $n$  l'entier minimal tel que  $\frac{m(m-1)}{2}(1-a)^n < 1$  ; on montre qu'alors il existe  $A \subset \Omega$  avec  $\text{Card } A \leq n$  et  $\text{Card}(A \cap \mathcal{D}) \geq m$ . Soient maintenant  $s > t > \text{dens}(\mathcal{F})$  ; on en déduit successivement  $m \leq C n^t$  puis  $m \leq C' a^{-s}$  (où  $C$  et  $C'$  ne dépendent pas de  $m$ ,  $n$  et  $a$ ).

Noter que, par définition, si  $(X, d)$  est un ensemble muni d'un écart, la dimension  $\overline{\text{dim}}(X, d)$  est celle de l'espace métrique quotient ; on fait de même pour les autres indices de dimension introduits.

Examinons quelques exemples supplémentaires :

(4.23.1) la classe  $\mathcal{F} = \{[-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$  est de densité finie ; de plus pour toute loi  $P$ , on a  $\text{Dim}(\mathcal{F}, d_P) \leq 1$  ;

(4.23.2) la classe  $\mathcal{J} = \left\{ \prod_{i=1}^n ]-\infty, t_i] \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$  est de densité finie ;  
de plus, pour toute loi  $P$ , il existe une distance  $\delta_P$  sur  $\mathcal{J}$  vérifiant :  
 $d_P \leq \delta_P$  et  $\text{Dim}(\mathcal{J}, \delta_P) \leq n$  ;

(4.23.3) reprenons la terminologie de (4.19.3) ; si  $P$  est une loi sur  $\Omega$  qui ne charge pas  $S_{x,x}$  (pour chaque  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ ), alors l'écart  $x, x' \rightarrow d_P(S_{0,x}, S_{0,x'})$  est un écart arguésien sur  $\mathbb{R}^n$  (c'est-à-dire où les droites sont des géodésiques, [5] 4.7) ; de plus il est plongeable dans  $L^1$  (voir aussi [5]) et de diamètre fini.

(4.24) Notons qu'en 4.22, 4.23.1 et 4.23.2 les majorations de  $\text{Dim}$  ou de  $\overline{\text{dim}}$  ont lieu tout à fait uniformément en  $P$ , ce qui signifie (par définition) que les constantes ( $C$  et  $C(x,b)$  de 3.5 et de 4.17.1) qui apparaissent quand on exprime ces majorations sont majorées elles aussi uniformément en  $P$ .

Avec cette précision, la Proposition 4.22 a une réciproque :

**PROPOSITION 4.25.** Soit  $\mathcal{J}$  une classe de parties d'un ensemble  $\Omega$  ; on suppose que  $\overline{\text{dim}}(\mathcal{J}, d_P)$  est majoré tout à fait uniformément en  $P$  ; alors  $\mathcal{J}$  est de densité finie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'hypothèse aux lois de la forme

$$\frac{1}{\text{Card } A} \sum_{\omega \in A} \varepsilon_{\omega} \quad (\text{pour tout } A \text{ partie finie de } \Omega).$$

(en fait je sais montrer mieux : (4.25)'  $\text{dens}(\mathcal{J}) = \sup_P \overline{\text{dim}}(\mathcal{J}, d_P)$ ).

Je termine avec quelques problèmes.

(4.26.1) Trouver une caractérisation simple des classes  $\mathcal{J}$  telles que  $\text{Dim}(\mathcal{J}, d_P)$  soit majorée tout à fait uniformément en  $P$  (c'est le cas de l'exemple 4.23.1) ; même question avec la conclusion de 4.23.2 supposée réalisée tout à fait uniformément en  $P$  ;

(4.26.2) Calculer  $\text{dim}(\mathcal{J}, d_P)$  pour certaines classes  $\mathcal{J}$  de densité infinie et des lois  $P$  prises dans une famille convenable  $\mathcal{P}$  (par exemple pour  $\mathcal{J}$  une famille de convexes de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{P}$  une famille de lois  $P$  ne chargeant aucune

frontière de convexe) ;

(4.26.3) Calculer directement  $\overline{\dim}(\mathbb{R}^n, d)$  lorsque  $d$  est un écart argnésien sur  $\mathbb{R}^n$  (voir 4.23.3), de diamètre fini mais non nécessairement plongeable dans  $L^1$  (c'est-à-dire ne s'écrivant pas forcément  $x, x' \rightarrow d_P(S_{O,x}, S_{O,x'})$ ) ;

(4.26.4) Soit  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) une classe de parties de  $\Omega$  (resp.  $\Theta$ ) ; on dit que  $f : \Omega \rightarrow \Theta$  est un plongement de  $\mathcal{J}$  dans  $\mathcal{C}$  si on a  $\mathcal{J} \subset f^{-1}(\mathcal{C})$  (où  $f^{-1}(\mathcal{C})$  désigne l'ensemble des parties de  $\Omega$  de la forme  $f^{-1}(T)$ ,  $T \in \mathcal{C}$ ) ; il est clair qu'alors on a :  $\text{dens } \mathcal{J} \leq \text{dens } \mathcal{C}$  ; caractériser les classes de densité finie par plongement dans certaines classes "simples" (par exemple liées à une notion de convexité comme 4.19.3 ; noter que par ailleurs l'exposant de densité a un lien évident avec le nombre de Radon, voir Reay [23]).

Cet exposé doit beaucoup aux encouragements de Jacques Peyrière et de Jean-Pierre Kahane et à de longues conversations avec eux ; je tiens à les en remercier. Je suis très reconnaissant aussi à Jouni Luukkainen d'avoir détecté plusieurs erreurs dans mon texte initial.

### Bibliographie

- [A] ASSOUAD, P. Espaces métriques, plongements, facteurs. (Thèse, Orsay, janvier 1977). Publ. Math. Orsay, no. 223-77-69.
- [1] AHLFORS, L. Quasiconformal reflections. Acta Math. 109 (1963), 291-301.
- [2] APPERT, A. Remarques sur l'extension d'un ensemble. Bull. Sc. Math. 61 (1937), 228-234.
- [3] ASSOUAD, P. Etude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans  $\mathbb{R}^n$ . C. R. Acad. Sc. Paris 288 (1979), 731-734.
- [4] ASSOUAD, P. Plongements Lipschitziens dans un espace pentagonal. Sém. Anal. fonctionnelle 1979-1980 (Ecole Polytechnique, Palaiseau), exposé no. 3 (9 novembre 1979).
- [5] ASSOUAD, P. Plongements isométriques dans  $L^1$  : aspect analytique. Sém. Initiation à l'Analyse (G. Choquet, Paris 6) 1979-1980, exposé no. (22 mai 1980).
- [6] ASSOUAD, P. Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$  et courbes de Von Koch. C. R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 591-594.
- [7] ASSOUAD, P. On Lipschitz embeddings into  $\mathbb{R}^n$ . A paraître.
- [8] BESICOVITCH, A. S., SCHOENBERG, I. J. On Jordan arcs and Lipschitz

- classes of functions defined on them. *Acta Math.* 106 (1961), 119-136.
- [9] BOULIGAND, G. Ensembles impropres et ordre dimensionnel. *Bull. Sc. Math.* 52 (1928), 320-344 et 361-376.
- [10] COIFMAN, R. R., WEISS, G. Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. *Lecture Notes in Math.* 242 (1971), Springer.
- [11] DUDLEY, R. M. Central limit theorems for empirical measures. *Ann. of Prob.* 6 (1978), 899-929.
- [12] DUDLEY, R. M. Balls in  $\mathbb{R}^k$  do not cut all subsets of  $(k+2)$  points. *Advances Math.* 31 (1979), 306-308.
- [13] FERNIQUE, X. Cours à l'Ecole d'Eté de St Flour 1974. *Lecture Notes in Math.* 480 (1975), 1-95.
- [14] FRINK, A. H. Distance functions and the metrization problem. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43 (1937), 133-142.
- [15] GLAESER, G. Etude de quelques algèbres tayloriennes. *J. Anal. Math.* 6 (1958), 1-124.
- [16] KAHANE, J.-P. Hélices et quasihélices. *Advances Math. Supplementary Studies* (vol. in honour L. Schwartz). To appear.
- [17] KAHANE, J.-P., SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1963), Paris.
- [18] LARMAN, D. G. A new theory of dimension. *Proc. London Math. Soc.* 17 (1967), 178-192.
- [19] LE CAM, L. On local and global properties in the theory of asymptotic normality of experiments, in *Stochastic Processes and related topics*, vol. 1 (Bloomington 1975), 13-54.
- [20] LEHTO, O., VIRTANEN, K. I. *Quasikonforme Abbildungen.* Springer (1965).
- [21] MACIAS, R. A., SEGOVIA, C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Advances Math.* 33 (1979), 257-270.
- [22] PISIER, G. Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'analyse harmonique. *Sém. Analyse Fonctionnelle 1979-1980* (Ecole Polytechnique, Palaiseau), exposé no. 13-14 (1er et 8 février 1980).
- [23] REAY, J. R. Open problems around Radon's theorem. Preprint (1980).
- [24] ROGERS, C. A. *Hausdorff measures.* Cambridge Univ. Press (1970).
- [25] SAUER, N. On the density of families of sets. *J. Comb. Th. A* 13 (1972), 145-147.
- [26] SHELAH, S. A combinatorial problem ; stability and order for models and theories in infinitary languages. *Pacific J. Math.* 41 (1972), 247-261.
- [27] SLEPIAN, D. The one sided barrier for gaussian noise. *Bell system Techn. J.* 41 (1962), 463-501.
- [28] TUKIA, P., VÄISÄLÄ, J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces. *Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. A* 5(1980), 97-114.
- [29] VÄISÄLÄ, J. Quasisymmetric embeddings in euclidean spaces. Preprint (1979).
- [30] VAPNIK, V. N., CERVONENKIS, A. Ya. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theor. Prob. Appl.* 16 (1971), 264-280.
- [31] VON KOCH, H. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Math.* 30 (1906), 145-174.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

**EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU CNRS (296)**

**ANALYSE HARMONIQUE**

**MATHEMATIQUE (Bât. 425)**

91405 ORSAY CEDEX

Table des principales notions .

- 1.1 pseudodistance, c'est-à-dire (1.6) noyau équivalent à une puissance d'une distance
- 1.2.2 plongement lipschitzien
- 1.3 quasidistance, c'est-à-dire noyau équivalent à une distance
- 2.1 facteur d'une pseudodistance
- 2.3 noyau quasi  $(\alpha, g)$  croissant
- 2.11 arc à rotation bornée
- 2.13 plongements quasisymétriques
- 2.14 plongements quasiconformes
- 3.2 rang d'un espace quasimétrique
- 3.4.3  $a$ -dense,  $a$ -discernable,  $a$ -réseau
- 3.5 dimension métrique (notée  $\text{Dim}(X, d)$ )
- 3.14 dimension de Hausdorff (notée  $\text{dim}(X, d)$ )
- 3.17 ordre dimensionnel C. M. (c'est-à-dire de Cantor Minkowski)  
 $\text{dim-}n(X, d)$   
 $\beta$ -espace  
 espaces de nature homogène  
 espaces HTB (c'est-à-dire "homogeneous totally bounded")
- 4.3 espace pseudométrique mesuré homogène  
 mesure homogène sur  $(X, d)$
- 4.10.3 courbes de Koch généralisées
- 4.16 sous dimension métrique (notée  $\underline{\text{Dim}}(X, d)$ )
- 4.17 exposant d'entropie métrique (noté  $\overline{\text{dim}}(X, d)$ )
- 4.20 classes de Donsker
- 4.21 exposant de densité (noté  $\text{dens}(\mathcal{F})$ )
- 4.23.3 écart arguésien (ou de Desargues)
- 4.26.4 nombre de Radon (cf. partitions de Radon)

A PROPOS DU THEOREME DE FATOU SUR CERTAINS DOMAINES  
FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES.

Aline Bonami et Noël Lohoué

Soit  $D$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$ , défini par

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n ; \lambda(z) < 0\}$$

où  $\lambda$  est une fonction réelle de classe  $C^2$  dans un voisinage de  $\bar{D}$ , de gradient non nul sur  $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^n ; \lambda(z) = 0\}$ . Si  $D_\varepsilon$  désigne le domaine  $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n ; \lambda(z) < -\varepsilon\}$  et  $\sigma_\varepsilon$  la mesure euclidienne sur  $\partial D_\varepsilon$ , rappelons que l'espace  $\mathcal{H}^p(\partial D)$  est, pour tout  $p > 0$ , l'espace des fonctions  $f$  holomorphes pour lesquelles

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)}^p = \sup_\varepsilon \int_{\partial D_\varepsilon} |f(z)|^p d\sigma_\varepsilon(z) < \infty.$$

Il est bien connu (et c'est une généralisation du théorème de Fatou en une variable) que de telles fonctions admettent en presque tout point  $z^0 \in \partial D$  des limites admissibles : on dit que  $f$  possède en  $z^0$  une limite admissible si  $f(z)$  a une limite lorsque  $z$  tend vers  $z^0$  en restant à l'intérieur d'une région admissible

$$\mathcal{Q}_\alpha(z^0) = \{z \in D ; |(z-z^0) \cdot \nabla \lambda(z^0)| < (1+\alpha) \delta_{z^0}(z), |z-z^0|^2 < \alpha \delta_{z^0}(z)\}$$

où  $\delta_{z^0}(z)$  est la plus petite des distances de  $z$  à  $\partial D$  ou au plan tangent à  $\partial D$  en  $z^0$  ([4]). Autrement dit,  $f(z)$  a une limite lorsque  $z$  est autorisé à s'approcher de  $z^0$  de manière parabolique dans certaines directions. Mieux, on a l'inégalité :

$$(*) \quad \left\| \sup_{z \in \mathcal{Q}_\alpha(z^0)} |f(z)| \right\|_p \leq C_{\alpha,p} \|f\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)}$$

quels que soient  $\alpha > 0$ ,  $p > 0$ . Ce théorème est, pour la boule de  $\mathbb{C}^n$  ou les domaines strictement pseudo-convexes, le meilleur possible. Il est toutefois naturel de penser que lorsque le domaine  $D$  est assez aplati on peut autoriser une convergence encore plus "tangente" au bord (c'est le cas dans [3] pour des domaines très aplatis). Le but de cet exposé est de considérer l'exemple le plus simple d'un domaine pseudo-convexe non strictement pseudo-convexe :

$$D = \{z \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}.$$

L'ensemble des points de non stricte pseudo-convexité de  $\partial D$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $(e^{i\theta}, 0)$ , étant de mesure nulle, on ne peut espérer améliorer le théorème de Fatou lui-même, mais l'inégalité (\*) en remplaçant la famille des régions d'approche  $\mathfrak{A}_\alpha(z^0)$  par une famille de domaines plus larges. Nous allons voir que :

PROPOSITION. Soit  $D = \{z \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$  : quels que soient  $p > 0$  et  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $C_{p,\alpha}$  telle que pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}^p(\partial D)$  :

$$(**) \quad \left\| \sup_{z \in \mathfrak{B}_\alpha(z^0)} |f(z)| \right\|_p \leq C_{p,\alpha} \|f\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)}$$

avec  $\mathfrak{B}_\alpha(z^0) = \{z \in D ; |1 - z_1 \cdot \overline{z_1^0} - z_2 \cdot \overline{z_2^0}| < \alpha(1 - |z_1|^2 - |z_2|^4)\}$ .

Pour se persuader que les régions  $\mathfrak{B}_\alpha$  sont plus larges que les régions admissibles  $\mathfrak{A}_\alpha$ , il suffit de considérer le cas où  $z^0 = (1, 0)$  : alors  $\mathfrak{B}_\alpha(z^0)$  est de la forme :

$$|\operatorname{Im} z_1| < \alpha(1 - \operatorname{Re} z_1) \quad ; \quad |z_2|^4 < \alpha(1 - \operatorname{Re} z_1)$$

tandis que  $\mathfrak{A}_\alpha(z^0)$  est de la forme :

$$|\operatorname{Im} z_1| < \alpha(1 - \operatorname{Re} z_1) \quad , \quad |z_2|^2 < \alpha(1 - \operatorname{Re} z_1).$$

Nous allons donner deux démonstrations de la proposition. La première est basée sur le fait que si  $z \in D$ , le point  $(z_1, z_2^2)$  appartient à la boule unité  $B$  de  $\mathbb{C}^2$ . Ecrivons tout d'abord  $f \in \mathcal{H}^p(\partial D)$  comme

$$f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2^2) + z_2 h(z_1, z_2^2)$$

$$\text{avec } \|g(z_1, z_2^2)\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)}$$

$$\|z_2 h(z_1, z_2^2)\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p(\partial D)}.$$

Il est immédiat qu'on peut le faire lorsque  $p = 2$  puisque  $\{z_1^{m_1} z_2^{m_2}\}_{\substack{m_1 \geq 0 \\ m_2 \geq 0}}$  forme une base de  $\mathcal{H}^2(\partial D)$  et qu'il suffit de trier suivant les puissances de  $z_2$ . Le cas général découle de ce cas par densité ; en fait  $g(z_1, z_2^2)$  et  $z_2 h(z_1, z_2^2)$  sont les parties paire et impaire en  $z_2$  de  $f$ , d'où les inégalités en norme.

Il nous suffit donc, pour démontrer la proposition, de démontrer l'inégalité (\*\*) lorsque  $f$  est de l'une des formes

$$f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2^2) \quad \text{ou} \quad f(z_1, z_2) = z_2 h(z_1, z_2^2).$$

Mais, si  $B$  désigne la boule unité de  $\mathbb{C}^2$ ,  $\sigma$  la mesure euclidienne sur  $\partial D$  et  $\sigma_B$  la boule euclidienne sur  $\partial B$ , il est aisé de montrer que (cf. [1], § 1), pour une fonction  $\varphi$  positive,

$$\int_{\partial D} \varphi(z_1, z_2^2) d\sigma(z) \approx \int_{\partial B} \varphi(z_1, z_2) |z_2|^{-1} d\sigma_B(z).$$

Si donc  $f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2^2) \in \mathcal{H}^p(\partial D)$ , c'est que la fonction  $g$  appartient à l'espace  $\mathcal{H}^p$  de la sphère munie de la mesure  $|z_2|^{-1} d\sigma_B(z)$  ; si  $f(z_1, z_2) = z_2 h(z_1, z_2^2) \in \mathcal{H}^p(\partial D)$ , c'est la fonction  $z_2 h^2(z_1, z_2)$  qui appartient à l'espace  $\mathcal{H}^{p/2}(\partial B, |z_2|^{-1} d\sigma_B(z))$ . Pour démontrer l'inégalité (\*\*), il suffit de démontrer une inégalité semblable sur la sphère, pour l'espace  $\mathcal{H}^r(\partial B, |z_2|^{-1} d\sigma_B(z))$ ,  $r > 0$  :

$$\left\| \sup_{|1-z \cdot z^0| < \alpha(1-|z|^2)} |g(z)| \right\|_{L^r(\partial B, |z_2^0|^{-1} d\sigma_B(z^0))} \leq C_{r, \alpha} \|g\|_{\mathcal{H}^r(\partial B, |z_2|^{-1} d\sigma_B(z))}.$$

De telles inégalités à poids sont démontrées dans [2], du moins dans le cas du disque : il suffit de vérifier que le poids considéré  $|z_2|^{-1}$  appartient à la classe  $(A_\infty)$ , ce qui est démontré dans [1].

La démonstration ci-dessus est évidemment très particulière, et l'on aimerait voir les régions  $\mathfrak{B}_\alpha$  décrites à partir d'une pseudo-distance sur  $\partial D$  comme le sont les régions admissibles  $\mathcal{Q}_\alpha$ . D'où la seconde démonstration :

LEMME. Soit  $\lambda(z) = |z_1|^2 + |z_2|^4 - 1$  la fonction définissant le domaine  $D$ .

Alors

$$(i) \quad d(z, \zeta) = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial z_1}(\zeta)(z_1 - \zeta_1) + \frac{\partial \lambda}{\partial z_2}(\zeta)(z_2 - \zeta_2) \right|$$

définit une pseudo-distance sur  $\partial D$  ;

(ii) Soit

$$c_\alpha(z^0) = \left\{ z \in D ; \left| \frac{\partial \lambda}{\partial z_1}(z^0)(z_1 - z_1^0) + \frac{\partial \lambda}{\partial z_2}(z^0)(z_2 - z_2^0) \right| < -\alpha \lambda(z) \right\} ;$$

alors  $c_\alpha(z^0)$  est un "cône" relatif à la pseudo-distance  $d$  : si  $z \in c_\alpha(z^0)$  et si  $\hat{z}$  désigne la projection de  $z$  sur  $\partial D$  parallèlement à la normale  $\nu_{z^0}$  en  $z^0$  à  $\partial D$ , alors  $\hat{z}$  appartient à la pseudo-boule de centre  $z^0$  et de rayon  $c_\alpha(-\lambda(z))$ .  
De plus, si  $z^1 = (z_1^0, -z_2^0)$ , il existe  $\beta > 0$  tel que :

$$\mathfrak{B}_\alpha(z^0) \subset c_\beta(z^0) \cup c_\beta(z^1) ;$$

(iii) Soit  $M_f$  la fonction maximale de  $f$  relative à la pseudo-distance  $d$  sur  $\partial D$ ,  $f^*$  la fonction maximale de  $f$  relative à la distance ordinaire sur  $\partial D$ . Alors, si  $u$  est continue dans  $\bar{D}$  et plurisousharmonique dans  $D$  et si  $f$  est la restriction de  $u$  à  $\partial D$ ,

$$\sup_{z \in c_\alpha(z^0)} |u(z)| \leq C_\alpha M(f^*)(z^0).$$

Il est tout à fait classique que le lemme entraîne la proposition. Le fait que  $d(z, \zeta)$  définisse une pseudo-distance est démontré dans [1], § 6, où est donnée pour  $d(z, \zeta)$  l'expression équivalente

$$d(z, \zeta) \simeq |\Pi_\zeta(z, \zeta)| + |z_1 - \zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 |z_2 - \zeta_2|^2 + |z_2 - \zeta_2|^4$$

si  $\nu_\zeta$  désigne la normale en  $\zeta$  à  $\partial D$ ,  $\Pi_\zeta$  la projection sur la droite réelle engendrée par le vecteur tangent  $i\nu_\zeta$ . L'assertion (ii) découle également des calculs

de [1]. Quant à l'assertion (iii), il suffit pour la prouver de transcrire la démonstration générale de [4] de l'inégalité (\*) en utilisant le fait que :

$$|u(z)| \leq \frac{C}{(-\lambda(z)) \sigma(\hat{P})} \int_P |u(\zeta)| dV(\zeta)$$

où  $V$  désigne la mesure volume et  $P$  l'ensemble :

$$P = \left\{ \zeta \in D ; \frac{\delta}{2} < -\lambda(\zeta) < \frac{3\delta}{2}, \hat{\zeta} \in \hat{P} = B(z^0, C\delta) \right\}$$

si  $\delta = -\lambda(z)$  et  $B(z^0, C\delta)$  désigne évidemment la boule relative à la pseudo-distance  $d$ . Une telle inégalité est obtenue en construisant dans  $P$  un polydisque de volume comparable.

Il nous reste à faire plusieurs remarques : la première que la première méthode se généralise immédiatement aux domaines :

$$\{z \in \mathbb{C}^n ; |z_1|^{2p_1} + |z_2|^{2p_2} + \dots + |z_n|^{2p_n} < 1\},$$

où  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont  $n$  entiers positifs, tandis que la seconde méthode peut se généraliser non seulement à ces domaines mais aux domaines :

$$\{z \in \mathbb{C}^N ; |z_1|^{2/\alpha_1} + |z_2|^{2/\alpha_2} + \dots + |z_k|^{2/\alpha_k} < 1\}$$

où, cette fois,  $z_j$  appartient à  $\mathbb{C}^{n_j}$ ,  $N = n_1 + \dots + n_k$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont  $k$  réels de l'intervalle  $]0, 1]$ .

La seconde remarque est que la proposition peut, pour ce domaine particulier, découler également de majorations du noyau de Poisson-Szegö comme dans le cas de la boule. Il est montré dans [1] que, si  $S(z, \zeta)$  désigne le noyau de Szegö de  $D$ ,  $\delta(z, \zeta) = |S(z, \zeta)|^{-1}$  est également une pseudo-distance sur  $\partial D$  donnant lieu à la même famille de boules que la pseudo-distance  $d$ . De plus :

$$|S(z, \zeta)|^{-1} \simeq |S(z, z')|^{-1} + |S(z', \zeta)|^{-1}$$

si  $\zeta \in \partial D$ ,  $z \in D$  et  $z' = ((1+\lambda(z))^{-1/2} z_1, (1+\lambda(z))^{-1/4} z_2)$  est la "projection" de  $z$  sur  $\partial D$ . Si  $P(z, \zeta)$  désigne le noyau de Poisson-Szegö de  $D$  :

$$P(z, \zeta) = \frac{|S(z, \zeta)|^2}{S(z, z)},$$

on en déduit la majoration :

$$P(z, \zeta) \leq \frac{C |S(z, z)|^{-1}}{[S(z, z)]^{-2} + (\delta(z', \zeta))^2}$$

et la majoration de la fonction maximale de Poisson-Szegö

$$\sup_{\delta(z, z^0) \leq \alpha [S(z, z)]^{-1}} \left| \int_{\partial D} P(z, \zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta) \right|$$

par la fonction maximale relative aux pseudo-distances  $d$  et  $\delta$ . D'où une autre démonstration de la proposition si l'on remarque que justement le cône

$\{z \in D ; \delta(z, z^0) \leq \alpha |S(z, z)|^{-1}\}$  contient un cône  $C_{\beta}(z^0)$ .

- [1] BONAMI, A. et LOHOUÉ, N. Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations  $L^p$ . A paraître.
- [2] GARCIA-CUERVA, J. Weighted Hardy spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35, part 1 (1979).
- [3] LEMPERT, L. Boundary behavior of meromorphic functions of several variables. Acta Math. 144 (1980).
- [4] STEIN, E. Boundary behavior of holomorphic functions of several variables. Mathematical Notes, Princeton University Press (1972).

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)

ANALYSE HARMONIQUE

MATHÉMATIQUE (Bât. 425)

91405 ORSAY CEDEX

UNE DEMONSTRATION ELEMENTAIRE DU THEOREME DE RUDIN-CARLESON  
ET DE CEUX DE F. ET M. RIESZ.

Raouf Doss

Une mesure de Borel complexe sur  $\mathbf{T}$ , en particulier une fonction de  $L^1(\mathbf{T})$ , est dite de type analytique si

$$a_n = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{T}} e^{-int} d\mu(t) = 0 \quad \text{pour } n = -1, -2, \dots$$

Voici les théorèmes dont il est question dans le titre.

THEOREME DE RUDIN-CARLESON. Soit  $F$  un fermé de  $\mathbf{T}$  de mesure de Lebesgue nulle. Si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $F$ , alors il existe une fonction continue  $f$ , de type analytique, telle que l'on ait

$$f(t) = \varphi(t) \quad (t \in F)$$

$$(*) \quad \sup_{t \in \mathbf{T}} |f(t)| \leq M \sup_{t \in F} |\varphi(t)|$$

où  $M$  est une constante. Rudin a montré que l'on peut prendre  $M = 1$ . Voir [8] et [1].

PREMIER THEOREME DE F. et M. RIESZ. Si la fonction  $f$  de  $L^1(\mathbf{T})$  est de type analytique et si  $f$  s'annule sur un ensemble  $S^*$  de mesure non nulle, alors  $f = 0$ .

SECOND THEOREME DE F. et M. RIESZ. Si une mesure de Borel complexe sur  $\mathbf{T}$  est de type analytique, alors  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue [7].

Les démonstrations de ces théorèmes utilisent, le plus souvent, les valeurs au bord de fonctions analytiques dans le disque unité et la théorie des espaces  $H^p$ . Pour le second théorème de F. et M. Riesz, par exemple, voir trois variantes dans [3], [5] et [9]; d'autres démonstrations de ce théorème utilisent des méthodes hilbertiennes (voir, par exemple, [2] et [4]); une démonstration directe et brève est donnée dans [6].

Le présent article expose une méthode qui donne une démonstration élémentaire des théorèmes ci-dessus.

LEMME. Soit  $F$  un fermé de  $T$ , de mesure nulle, et  $\varphi$  une fonction continue sur  $F$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$  et un ouvert  $G$  contenant  $F$ , il existe une fonction continue  $g$  de type analytique telle que l'on ait

$$\sup_{t \in F} |g(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \sup_{t \in F} |\varphi(t)|$$

$$(**) \quad |g(t)| < \varepsilon \quad (t \notin G).$$

$$\sup_{t \in T} |g(t)| \leq 3 \sup_{t \in F} |\varphi(t)|.$$

Démonstration. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que

$\sup_{t \in F} |\varphi(t)| = 1$  et aussi que  $\varphi$  est un polynôme trigonométrique

$$\varphi(t) = \sum_{|k| \leq m} \alpha_k e^{ikt}$$

tel que

$$|\varphi(t)| < \varepsilon/3 \quad (t \notin G).$$

Posons  $e^{-A} = \varepsilon$ . Soit  $h$  une fonction continue sur  $T$ , à support dans l'intervalle  $[-2A, 2\varepsilon]$  et telle que

$$|h(t) + 2A| < \varepsilon \quad (t \in F).$$

Puisque  $m(F) = 0$  nous pouvons prendre  $\|h\|_1$  arbitrairement petit et, donc, nous pouvons supposer que

$$\hat{h}(k) = 0 \quad \text{pour } |k| \leq m.$$

Prenons une somme de Fejér  $p$  de  $h$  telle que

$$|p(t) + 2A| < \varepsilon \quad (t \in F).$$

Ecrivons

$$p(t) = \sum_{k < -m} \beta_k e^{ikt} + \sum_{k > m} \beta_k e^{ikt} = p^-(t) + p^+(t)$$

où

$$p^+(t) = \sum_{k > m} \beta_k e^{ikt}.$$

Nous avons  $\operatorname{Re}(p^+) = p/2 \leq \varepsilon$ . Posons maintenant

$$g(t) = \varphi(t) [1 - e^{p^+(t)}].$$

Le développement de  $[1 - e^{p^+(t)}]$  est de la forme  $\sum_{k > m} \gamma_k e^{ikt}$ . La fonction  $g$  est donc continue et de type analytique. Nous avons

$$|g(t) - \varphi(t)| = |\varphi(t)| |e^{p^+(t)}| \leq e^{p/2} < e^{-A+\varepsilon} < 2\varepsilon \quad (t \in F),$$

et, en outre,

$$|g(t)| \leq |\varphi(t)| |1 - e^{p^+(t)}| \leq 1 + e^\varepsilon < 3 \quad (t \in T)$$

$$|g(t)| < (\varepsilon/3) 3 = \varepsilon \quad (t \notin G).$$

La démonstration du lemme est donc achevée.

#### Démonstration du théorème de Carleson-Rudin.

$\varepsilon < 1/4$  étant fixé, notons  $\gamma(\varphi)$  une des fonctions continues et de type analytique associée à  $\varphi$  par le lemme précédent. Nous partons de  $\varphi_0 = \varphi$  et nous posons

$$\varphi_{m+1} = \varphi_m - \gamma(\varphi_m).$$

Nous avons

$$\sup_F |\varphi_{m+1}| \leq \varepsilon \sup_F |\varphi_m| \leq \dots \leq \varepsilon^{m+1} \sup_F |\varphi_0|$$

$$\sup_T |\gamma(\varphi_m)| \leq 3 \sup_F |\varphi_m| \leq 3\varepsilon^m \sup_F |\varphi_0|.$$

La série  $\sum_{m=0}^{\infty} \gamma(\varphi_m)$  est donc uniformément convergente sur  $T$ ; sa somme  $f$  est

de type analytique et satisfait la relation

$$f(t) = \varphi(t) \quad (t \in F).$$

De plus

$$\sup_{\mathbf{T}} |f(t)| \leq 3(1-\varepsilon)^{-1} \sup |\varphi_0| < 4 \sup_F |\varphi|.$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

Remarque. On peut voir facilement que l'on peut prendre  $M = 1 + \varepsilon$  dans l'inégalité (\*). En effet, étant donné un ouvert  $G$  contenant  $F$ , l'utilisation de (\*\*) permet d'obtenir

$$|f(t)| < \varepsilon \quad (t \notin G).$$

Puisque  $f$  est continue, il existe un ouvert  $G'$ , contenant  $F$ , tel que l'on ait

$$G' \subset G \quad \text{et} \quad |f(t)| < 1 + \varepsilon \quad (t \in G').$$

Par suite, nous pouvons obtenir

$$|f(t)| \geq 1 + \varepsilon \quad \text{seulement si} \quad t \in G \setminus G'.$$

Partant de  $G'$  nous obtenons  $f'$ , coïncidant avec  $\varphi$  sur  $F$ , bornée par 4 avec

$$|f'(t)| \geq 1 + \varepsilon \quad \text{seulement si} \quad t \in G' \setminus G''$$

pour un  $G''$  convenable contenant  $F$  et contenu dans  $G'$ . Il suffit d'observer que les ensembles  $G \setminus G'$ ,  $G' \setminus G''$ ,  $G'' \setminus G'''$ , ... sont disjoints et de prendre une moyenne arithmétique pour obtenir une fonction dont le module est partout majoré par  $1 + 2\varepsilon$ .

Démonstration du premier théorème de F. et M. Riesz. Il suffit de montrer que

l'on a

$$a_0 = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{T}} f(t) dt = 0$$

car, en considérant de même la fonction  $e^{-it} f(t)$ , on démontrerait que  $a_1$  est nul, puis ensuite que  $a_2$  est nul ... et finalement que l'on a  $f = 0$ . La démonstration suit les mêmes lignes que celle du théorème de Rudin-Carleson.

Notons  $S$  l'ensemble  $\{t \in T : f(t) \neq 0\}$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$ , posons  $\varepsilon = e^{-A}$ . Soit  $h$  une fonction bornée, à valeurs réelles, égale à  $-2A$  sur  $S$  et telle que  $\hat{h}(0) = 0$ . De telles fonctions existent puisque l'on a  $m(S^*) > 0$ . Soit  $p_n$  la suite des sommes de Fejér de  $h$ . Comme auparavant nous écrivons

$$p_n(t) = \sum_{k < 0} \beta_k e^{ikt} + \sum_{k > 0} \beta_k e^{ikt} = p_n^-(t) + p_n^+(t)$$

où

$$p_n^+(t) = \sum_{k > 0} \beta_k e^{ikt}.$$

Alors

$$\operatorname{Re}(p_n^+(t)) = \frac{1}{2} p_n(t) \longrightarrow \frac{1}{2} h(t) = -A \quad \text{presque partout sur } S$$

et ces fonctions sont uniformément bornées.

Posons maintenant

$$g_n(t) = f(t) [1 - e^{p_n^+(t)}].$$

Le développement de  $g_n$  est de la forme  $\sum_{k > 0} \gamma_k e^{ikt}$  et, donc,  $\int g_n dt = 0$ .

D'où

$$\begin{aligned} |2\pi a_0| &= \left| \int f \right| = \left| \int (f - g_n) \right| \leq \left| \int f e^{p_n^+} \right| \\ &\leq \int_S |f| e^{p_n/2} \rightarrow e^{-A} \int |f| = \varepsilon \|f\|_1. \end{aligned}$$

puisque  $\varepsilon$  est arbitraire nous avons  $a_0 = 0$  et le théorème est démontré.

Démonstration du second théorème de F. et M. Riesz. On peut supposer que l'on a  $a_0 = 0$ . Soit  $F$  un fermé de mesure nulle. Choisissons une suite décroissante d'ouverts  $G_n$  contenant  $F$  telle que l'on ait  $\bigcap G_n = F$ , et, par le lemme, une suite de fonctions  $g_n$  de type analytique, telle que

$$\begin{aligned} |1 - g_n(t)| &< 1/n \quad \text{pour } t \in F \\ |g_n| &< 3 \quad ; \quad |g_n(t)| < 1/n \quad \text{pour } t \notin G_n. \end{aligned}$$

Alors  $g_n$  tend vers  $\chi_F$ , la fonction caractéristique de  $F$ , et l'on a

$$0 = \int g_n d\mu \longrightarrow \int \chi_F d\mu = \mu(F).$$

Ceci montre que  $\mu$  est absolument continue.

L'auteur remercie Y. Katznelson pour une conversation fructueuse.

References

- [1] L. Carleson. Representations of Continuous Functions. Math. Zeit 66, (1957) p. 447-451.
- [2] R. G. Douglas. Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press, New York, 1972.
- [3] P. Duren. Theory of  $H^p$ -spaces. Academic Press, New York, 1970.
- [4] K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [5] Y. Katznelson. An Introduction to Harmonic Analysis. Dover, New York, 1976.
- [6] B. Øksendal. A short proof of the F. and M. Riesz Theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) p. 204.
- [7] F. Riesz and M. Riesz. Über die Randwerte einer Analytischen Funktion. 4e Congrès des Mathématiciens Scandinaves. p. 27-44, Stockholm 1916.
- [8] W. Rudin. Boundary Values of Continuous Analytic Functions. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) p. 808-811.
- [9] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1974.

State University of New York  
Stony Brook, N. Y. 11794

# LE MOUVEMENT BROWNIEN COMME OBJET MATHÉMATIQUE

Jean-Pierre Kahane

(Ce texte a été écrit pour un public scientifique non mathématicien)

## Table des matières

De la botanique à la physique .....	48
Les monstres en mathématiques .....	50
De la physique à la mathématique .....	52
La fonction de Wiener .....	55
Le mouvement brownien plan .....	57
L'irrégularité locale .....	58
Hélices et quasi-hélices .....	59
Le mouvement brownien et les fonctions analytiques .....	61
Le mouvement brownien et la théorie du potentiel .....	63
En guise d'apologie .....	64
Références .....	65

## Annexes

Comment on construit des variables gaussiennes indépendantes .....	66
Quelques compagnons de la fonction de Wiener .....	67
Construction d'une quasi-hélice .....	68
Courbe de Peano-Paul Lévy .....	69
Le mouvement brownien plan .....	70
Quasi-hélices (de la courbe de Peano-Paul Lévy au mouvement brownien) .....	71

## DE LA BOTANIQUE A LA PHYSIQUE.

Le mouvement brownien est le mouvement désordonné des particules en suspension dans un liquide. Si l'on observe, par exemple, un grain de pollen en suspension dans l'eau, on le voit agité d'un mouvement parfaitement irrégulier, il va et vient, s'arrête, repart, monte, descend, remonte encore, sans tendre aucunement vers l'immobilité (je cite Jean Perrin 1909<sup>\*</sup>, y compris les mots en italiques). La première étude scientifique en a été faite par le botaniste anglais Brown, qui a publié ses principales conclusions en 1827 : 1) contrairement à l'idée courante, il n'y a là aucune manifestation de force vitale, le mouvement n'est pas dû à des animalcules vivants 2) le mouvement est d'autant plus vif que les particules sont plus petites.

Quelques physiciens s'en occupent au cours du 19e siècle : Chr. Wiener (1863), les PP. Delsaulx et Carbonnelle (1877-1880), Gouy (1881-1895). Une explication est en vue, qui repose sur l'hypothèse atomique : c'est le mouvement désordonné des molécules du liquide qui serait la cause du mouvement observé. Lisons le P. Carbonnelle (cité par J. Perrin 1909) :

"Dans le cas d'une surface ayant une certaine étendue, les chocs moléculaires du liquide, cause de la pression, ne produiront aucun ébranlement du corps suspendu, parce que leur ensemble sollicite également ce corps dans toutes les directions. Mais, si la surface est inférieure à l'étendue capable d'assurer la compensation des irrégularités, il n'y a plus lieu de considérer la pression moyenne, il faut reconnaître des pressions inégales et continuellement variables de place en place, que la loi des grands nombres ne ramène plus à l'uniformité, et dont la résultante ne sera plus nulle, mais changera continuellement d'intensité et de direction. De plus, les inégalités deviendront de plus en plus apparentes à mesure qu'on supposera le corps plus petit, et par suite les

---

Jean Perrin 1909, Mouvement brownien et réalité moléculaire. Annales de chimie et de physique, 2e série, tome 18, 5-114.

oscillations deviendront en même temps de plus en plus vives...".

Les travaux de Gouy, à Lyon, confirment cette explication en éliminant d'autres explications possibles : le mouvement brownien n'est pas dû à des trépidations subies par le liquide, ni à des courants de convection, ni à l'éclairement, ni à la nature des particules en suspension, il se poursuit indéfiniment - contrairement au principe de Carnot -. Ainsi - je cite toujours Jean Perrin -, à la fin du 19ème siècle, le mouvement brownien prend rang parmi les problèmes importants de la Physique Générale.

Einstein, en 1905, n'en sait rien. C'est l'année de ses illustres mémoires aux *Annalen der Physik*. Il explique l'effet photoélectrique. Il fonde la théorie de la relativité - en ignorant, semble-t-il, l'expérience de Michelson -. Il fonde la théorie du mouvement brownien - en ignorant tout des expériences faites à son sujet -. C'est une merveilleuse étude théorique : si la théorie cinétique de la chaleur est correcte, on doit pouvoir déceler des mouvements de particules, et en déduire les dimensions des atomes ; et si on ne le peut pas, il faut s'en tenir à la thermodynamique classique. Je cite le début et la fin du mémoire de mai 1905\*.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownischen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!

---

\* Albert Einstein 1905, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik* 19, 371-381.

Le chercheur qui allait réellement démontrer l'hypothèse moléculaire, et mesurer la dimension des atomes était tout prêt à recevoir le message d'Einstein. C'est Jean Perrin. Il a relaté ses expériences et son itinéraire dans un long article des Annales de Chimie et Physique (1909)<sup>\*</sup> et dans son ouvrage "Les Atomes" (1912)<sup>\*\*</sup> qui est, je crois, l'un des très grands monuments de la littérature scientifique. Nous lui avons déjà emprunté beaucoup de citations et d'idées, et nous allons continuer.

Jean Perrin rend un égal hommage à Einstein et à Smoluchowski, qui, en juillet 1906, indépendamment d'Einstein, publiait des résultats voisins au Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. On peut ajouter qu'Henri Poincaré, Langevin et d'autres étaient sur les mêmes pistes. La situation était mûre. Entre 1905 et 1909, la théorie physique du mouvement brownien est constituée, démontrée, exploitée. Comme conséquence, la réalité des atomes était établie. Il était temps. Jusqu'à sa mort (1907), le pape de la chimie en France, Marcelin Berthelot (comme d'ailleurs Kolbe en Allemagne) avait toujours refusé la théorie atomique, et l'enseignement de la chimie dans les lycées devait s'en ressentir jusqu'en 1950 (la France était à cette époque le seul pays au monde où l'on parlait encore "d'hypothèse atomique").

Les travaux de Jean Perrin sur la détermination du nombre d'Avogadro - c'est-à-dire des dimensions moléculaires - devaient lui valoir le Prix Nobel. Francis Perrin, son fils, a commencé sa carrière scientifique par l'étude du mouvement brownien de rotation. C'est un sujet intéressant, mais que nous laisserons de côté. Après la thèse de Francis Perrin (1928), le mouvement brownien semble avoir perdu son mystère pour les physiciens. C'est le travail des mathématiciens qui commence.

## LES MONSTRES EN MATHEMATIQUES.

Il nous faut revenir en arrière. Au début du 19ème siècle, quand Brown publie son étude, les mathématiciens manipulent des fonctions - ils les dérivent, les intègrent, les développent en série, ... - mais ils commencent seulement à dégager les notions fondamentales : celle de fonction continue (Cauchy), celle de fonction (Dirichlet). Les fonctions qui s'imposent à l'attention sont les fonctions analytiques, qui peuvent se définir non seulement sur un intervalle de nombres réels, mais sur toute une région du plan de la variable complexe où elles jouissent d'une propriété remarquable, l'existence de la limite

---

\* cf. p. 48.

\*\* Jean Perrin 1912, Les Atomes, Paris.

$$(1) \quad f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

c'est-à-dire la dérivabilité dans le domaine complexe ; toutes les fonctions usuelles et toutes les fonctions "spéciales" introduites au 19ème siècle pour la solution des équations de la physique sont des fonctions analytiques.

Pour les fonctions d'une variable réelle, la relation entre continuité et dérivabilité n'est pas évidente. C'est seulement en 1972 que Weierstrass donne le premier exemple d'une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point. L'exemple de Weierstrass est la fonction

$$(2) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n t$$

avec  $0 < a < 1$  (ce qui garantit la continuité),  $b$  entier  $\geq 2$  et  $ab$  assez grand (en fait,  $ab \geq 1$  suffit), ce qui garantit la non-dérivabilité. Cet exemple est accueilli avec une admiration teintée d'effroi. Charles Hermite, l'un des meilleurs mathématiciens français de l'époque, aurait déclaré : "je me détourne avec horreur de ces monstres que sont les fonctions continues sans dérivées". D'autres mathématiciens cherchent des constructions géométriques plus intuitives de courbes continues n'ayant de tangente en aucun point.

Je vais indiquer la construction de Von Koch (1904). Elle a beaucoup intéressé Paul Lévy dans sa jeunesse\*, et c'est à des spéculations géométriques de cet ordre qu'est due sans doute sa virtuosité dans le maniement du mouvement brownien. Le dessin indique des approximations successives, et la position des points correspondant aux valeurs  $0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, \dots$  du paramètre. La courbe a une longueur infinie, une aire nulle, et elle n'a de tangente en aucun point. Si on fait varier l'angle  $\alpha$ , on obtient une famille de courbes de Von Koch. Pour  $\alpha = \pi$ , c'est simplement le segment de droite AC. Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ce n'est plus une courbe simple : il apparaît une infinité de points multiples ; lorsque le paramètre  $t$  varie de 0 à 1, le point  $M(t)$  parcourt tout le triangle rectangle ABC. Ce phénomène, à savoir qu'un point animé d'un mouvement continu, puisse couvrir toute une surface plane, avait été découvert par Peano.

Reprenons l'exemple  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ("courbe de Peano-Paul Lévy"), et considérons  $t$  comme le temps. Dans tout intervalle de temps  $(t_0, t_1)$  le point  $M(t)$  parcourt une longueur infinie :

$$(3) \quad \int_{t_0}^{t_1} |\vec{dM}(t)| < \infty.$$

---

\* Paul Lévy 1970, Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Paris.

Par contre, avec des notations faciles à comprendre, on a

$$(4) \quad \int_{t_0}^{t_1} |d\vec{M}(t)|^2 = t_1 - t_0.$$

La premier membre est "la variation quadratique" de  $M(t)$ , définie comme limite de sommes  $\sum |\overrightarrow{\Delta M}|^2$  correspondant à des partages de l'intervalle  $(t_0, t_1)$  au moyen des multiples de  $2^{-\kappa}$ , quand  $\kappa \rightarrow \infty$ .



On voit facilement que, pour  $0 < t < 1$ ,

$$(5) \quad \overrightarrow{AM}(t) = 2 \overrightarrow{AM}(t/4)$$

et cette formule peut servir à définir  $M(t)$  pour  $t > 1$  (d'abord sur l'intervalle  $(0,4)$ , puis sur  $(0, 16)$  et ainsi de suite). La figure 2 indique l'allure de la courbe, quand on lisse la trajectoire entre deux valeurs entières consécutives de  $t$  et qu'on arrondit les coins.

## DE LA PHYSIQUE A LA MATHEMATIQUE.

Retournons maintenant à Jean Perrin. Dans son mémoire de 1909, il explique que la vitesse d'un granule en suspension n'est pas accessible aux mesures, et que les évaluations d'une vitesse moyenne n'ont aucun sens.

Les enchevêtrements de la trajectoire sont si nombreux et si rapides, qu'il est impossible de les suivre et que la trajectoire notée est toujours infiniment plus simple et plus courte que la trajectoire réelle. De même la vitesse moyenne apparente d'un grain pendant un temps donné (quotient du déplacement par le temps) varie *follement* en grandeur et en direction sans tendre aucunement vers une limite quand le temps de l'observation décroît, comme on le voit de façon simple en notant les positions d'un grain à la chambre claire de minute en minute, puis, par exemple, de cinq en cinq secondes, et mieux encore en les photographiant de vingtième en vingtième de seconde, comme l'a fait Victor Henri pour cinématographier le mouvement.

Bien entendu, on ne peut non plus fixer de tangente en aucun point de la trajectoire, même de la façon la plus grossière. C'est un des cas où l'on ne peut s'empêcher de penser à ces fonctions continues qui n'admettent pas de dérivée, qu'on regarderait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque la nature peut les suggérer aussi bien que les fonctions à dérivées.

Dans son livre "Les Atomes", Jean Perrin insiste de nouveau sur cette idée. Et cette idée a eu une influence sur l'orientation des travaux de Norbert Wiener, comme le montrent les longues citations qu'il donne à plusieurs reprises de Jean Perrin.

En fait, ce n'est qu'en 1933 que la conjecture de Perrin a été démontrée : presque sûrement, la fonction du mouvement brownien n'admet de dérivée pour aucune valeur de  $t$  (Paley, Wiener, Zygmund).

Auparavant, il fallait que se dégage la notion de fonction aléatoire. La fonction aléatoire fondamentale (the fundamental random function) selon Norbert Wiener, c'est justement la fonction qui donne la position d'une particule brownienne en fonction du temps, en projection sur un axe donné ou sur un plan donné. Elle est fondamentale en effet dans bien des sens. Avant même de la définir, tentons d'expliquer pourquoi.

D'abord, c'est le premier et le plus important exemple de processus stochastique, c'est-à-dire d'une famille de variables aléatoires indexées par le temps. Auparavant, on avait déjà étudié des suites de variables aléatoires, par exemple le gain d'un joueur au cours d'une suite de parties. La théorie des probabilités s'était développée à partir de méthodes combinatoires (Pascal et son fameux triangle) puis de méthodes analytiques (Laplace, les fonctions génératrices, les moindres carrés, la fonction de Laplace-Gauss). Ce n'est qu'après 1900 (Borel, Lebesgue) que s'était constituée la théorie moderne de la mesure, qui permet de donner un sens à l'expression dont j'ai usé tout à l'heure "presque sûrement, etc.". Mais la nécessité de fonder la théorie des probabilités sur la théorie de la mesure n'est apparue qu'après les premières études sur les fonctions aléatoires (Steinhaus) et particulièrement sur le mouvement brownien (N. Wiener). L'axiomatique de Kolmogorov (1933) est issue de là. A partir de Kolmogorov, un espace de probabilité est donné par un ensemble  $\Omega$ , une tribu de parties de  $\Omega$  qu'on appelle les évènements, une mesure sur cette tribu qu'on appelle la probabilité. Dans beaucoup de cas, on peut prendre pour  $\Omega$  l'intervalle  $[0, 1]$  de la droite réelle, pour tribu des évènements la tribu engendrée par les intervalles<sup>(1)</sup> (on l'appelle tribu borélienne), et pour probabilité la mesure ordinaire (mesure de Lebesgue). Une

---

(1) C'est-à-dire le plus petit ensemble de parties de  $[0, 1]$ , contenant tous les intervalles, et stable par les opérations de réunion dénombrable et de passage au complémentaire.

variable aléatoire est une fonction  $X(\omega)$  définie sur  $\Omega$ . Une fonction aléatoire est une fonction de deux variables  $X(\omega, t)$ . Si  $X(\omega, t)$  est à valeurs réelles, dire qu'elle est presque sûrement non dérivable en tout point se note

$$(6) \quad P(\forall t \overline{\lim}_{h, k \rightarrow 0} \left| \frac{X(\omega, t+h) - X(\omega, t)}{h} - \frac{X(\omega, t+k) - X(\omega, t)}{k} \right| \neq 0) = 1.$$

La conjecture de Jean Perrin est que cela a lieu pour la fonction  $X(\omega, t)$  du mouvement brownien. Avant d'aller plus loin, signalons que le modèle que je viens de donner est insuffisant pour exprimer la conjecture de Jean Perrin ; pour faire apparaître l'expression entre parenthèses comme un événement, on est amené à introduire une tribu plus grande que la tribu borélienne, qu'on appelle tribu de Lusin ou tribu analytique. Dans les exposés les plus modernes, on introduit dès le départ les ensembles analytiques de Lusin. On voit que cela est nécessaire pour prendre en considération le premier problème mathématique posé sur le mouvement brownien. Ainsi, la fonction de Wiener met en question les fondements mêmes de la théorie des probabilités.

Ensuite, la fonction de Wiener est une sorte de prototype pour beaucoup de notions très importantes. 1) C'est la version continue d'une promenade au hasard 2) C'est le plus important des processus à accroissements indépendants, et une étude attentive du mouvement brownien conduit naturellement à d'autres processus à accroissements indépendants (par exemple, le processus de Lévy d'indice  $1/2$ ) 3) C'est le plus important des processus de Markov (où le futur est indépendant du passé) et beaucoup de processus de Markov apparaissent à propos du mouvement brownien 4) Si on arrête le mouvement brownien à ce qu'on appelle un temps d'arrêt (par exemple le premier instant où il atteint un obstacle), on obtient une martingale continue (cela veut dire qu'à un instant donné  $t$ , l'espérance des positions à venir est la position atteinte à l'instant  $t$ ), et inversement, beaucoup de martingales continues se ramènent à ce cas 5) Les intégrales stochastiques les plus importantes sont de la forme

$$(7) \quad G(\omega, t) = \int_0^t g(s, X(\omega, s)) dX(\omega, s)$$

où  $X(\omega, t)$  est la fonction de Wiener. 6) Le mouvement brownien est le plus important des processus gaussiens, c'est-à-dire des familles  $X_t$  de variables aléatoires qui appartiennent à un espace vectoriel  $\mathcal{H}$  de variables gaussiennes.

Chacune de ces notions (promenade au hasard, processus à accroissements indépendants, processus de Markov, martingale, intégrale stochastique, processus

gaussiens) est maintenant l'objet de développements, de travaux, d'applications, et de publications à raison de plusieurs milliers de pages par an.

Enfin, la fonction de Wiener a beaucoup de relations avec les séries de Fourier, les fonctions harmoniques, la théorie du potentiel, la théorie de la diffusion, les mesures et dimensions de Hausdorff, la théorie ergodique, la géométrie des espaces de Hilbert, les fonctions analytiques d'une variable complexe. Dans les dix dernières années, plusieurs énoncés d'analyse classique, dans lesquels n'apparaissent ni processus, ni variables aléatoires, ni probabilités, ont été obtenus par des techniques de mouvement brownien. Un livre et plusieurs articles de synthèse y sont consacrés (voir références p. 65). Je vais tenter tout à l'heure d'expliquer le succès de ces méthodes, et l'intérêt d'une interprétation probabiliste, au moyen du mouvement brownien, de certains problèmes qui en sont en apparence très éloignés.

## LA FONCTION DE WIENER.

Commençons - il est temps ! - par la définition de la fonction de Wiener. Conformément à l'usage, on écrit  $X(t)$  au lieu de  $X(\omega, t)$  ( $\omega$  est donc sous-entendu). Par définition,  $X(t)$  est un processus gaussien, à accroissements indépendants, et normalisé de façon que la variance de  $X(t)$  soit égale à  $t$  ( $t \geq 0$ ).

Cette définition est rapide mais incomplète. Même si le mouvement brownien observé fournit un bon modèle, une construction mathématique est nécessaire pour montrer l'existence de l'objet ainsi défini. J'indique rapidement cette construction. On construit d'abord une suite de variables gaussiennes normalisées indépendantes ; elles engendrent par combinaisons linéaires et passage à la limite un espace de Hilbert de variables gaussiennes,  $\mathcal{H}$ , où la norme est la racine carrée de la variance

$$(8) \quad \|X\|_{\mathcal{H}}^2 = \sigma^2(X) = E(X^2).$$

On sait définir l'orthogonalité dans  $\mathcal{H}$  ; elle équivaut à l'indépendance.

On considère les fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ . Elles forment un espace de Hilbert, qu'on désigne par  $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ . Soit  $W$  une application linéaire et isométrique de  $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$  dans  $\mathcal{H}$ . Posons

$$(9) \quad X(t) = W(1_{[0, t]})$$

$1_{[0, t]}$  étant la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle  $[0, t]$ , et 0 ailleurs.

On vérifie facilement que  $X(t)$  est un processus gaussien, à accroissements indépendants, et normalisé.

Cette définition et cette construction sont valables aussi bien pour le mouvement brownien réel (à une dimension) que complexe (à deux dimensions). Si on veut définir le mouvement brownien dans l'espace à 3 dimensions,  $\mathbb{R}^3$ , ou plus généralement dans un espace  $\mathbb{R}^n$ , on prend des copies indépendantes du mouvement brownien linéaire (réel), et on les considère comme coordonnées d'un point mobile dans  $\mathbb{R}^n$ .

Pour l'étude locale du mouvement brownien (continuité, non-différentiabilité) on peut se restreindre aux valeurs de  $t$  entre 0 et 1, et remplacer  $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$  par  $L^2([0, 1], dx)$ . Chaque choix d'une base orthonormée dans  $[0, 1]$  donne un développement de la fonction de Wiener. Par exemple, la base  $\{\exp 2\pi i n x\}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) fournit ce qu'on appelle la série de Fourier-Wiener \*

$$(10) \quad X(t) = \xi_0 t + \sum_{n \neq 0} \frac{\xi_n}{2\pi i n} (\exp(2\pi i n t) - 1)$$

où les  $\xi_n$  sont des variables gaussiennes normalisées indépendantes. C'est un cas très intéressant de série de Fourier à coefficients aléatoires, et une partie des propriétés du mouvement brownien s'explique par les analogies profondes entre les séries de Fourier aléatoires et les séries de Fourier lacunaires telle que la série de Weierstrass (2).

Une autre base orthonormée commode est la base de Haar, qui fournit le développement

$$(11) \quad X(t) = \xi_0 t + \sum_{j,k} \xi_{jk} 2^{-1-\frac{k}{2}} \Delta_{jk}(t)$$

( $j = 1, 2, \dots, 2^k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) où  $\xi_0$  et les  $\xi_{jk}$  sont gaussiennes normalisées indépendantes, et où  $\Delta_{jk}$  est la fonction "triangle" portée par l'intervalle  $[(j-1)2^{-k}, j2^{-k}]$  qui vaut 1 au milieu de cet intervalle. Si l'on restreint la somme aux valeurs de  $k < \kappa$ , on obtient une fonction  $X_\kappa(t)$  dont le graphe est une ligne brisée, et on passe du graphe de  $X_\kappa$  au graphe de  $X_{\kappa+1}(t)$  en remplaçant chaque segment de cette ligne brisée par deux segments. Cela revient à construire  $X(t)$  lorsque  $t$  est un multiple de  $2^{-\kappa}$ , puis lorsque  $t$  est un multiple de  $2^{-\kappa-1}$ , et ainsi de suite.

La fonction  $X(t)$  jouit d'une foule de merveilleuses propriétés, dont une grande partie a été découverte par Paul Lévy et se trouve dans son livre [\*\*].

\* R.E.A.C. Paley, Norbert Wiener 1934, Fourier transforms in the complex domain, Colloquium publications, Amer. Math. Soc.

\*\* Paul Lévy 1948, Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris, Gauthier-Villars.

Nous en présentons quelques unes dans le tableau joint ; on y voit le rôle de certaines fonctions liées à  $X(t)$ , en particulier de ce qu'on appelle le "temps local" du mouvement brownien linéaire, qui décrit non seulement l'ensemble des où  $X(t) = 0$ , mais, d'une façon quantitative, la manière dont le mobile d'abscisse  $X(t)$  "séjourne" au point 0.

## LE MOUVEMENT BROWNIEN PLAN.

Nous allons maintenant nous attacher au mouvement brownien plan. Il est encore décrit par les formules (10) et (11), dans lesquelles les variables gaussiennes  $\xi$  sont à valeurs complexes. Pour chaque  $\omega \in \Omega$  et chaque  $t \geq 0$ ,  $X(t)$  ( $= X(\omega, t)$ ) est un nombre complexe, que nous identifions à un point. Quand  $\omega$  est fixé, le point  $X(t)$  décrit une trajectoire plane, et on montre que, pour presque tout  $\omega$  ("presque sûrement"), cette trajectoire est continue. Cette trajectoire, qu'on peut construire à l'ordinateur (voir la figure dressée par M. Yvon Deschamps, Annexe v) ressemble parfaitement aux trajectoires observées par Jean Perrin. Elle ressemble aussi, à la trajectoire de Peano-Paul Lévy, mais elle est beaucoup moins régulière. Rappelons encore que, lorsque nous parlons de "la" fonction  $X(t)$ , ou de "la" trajectoire brownienne, il s'agit d'un objet qui dépend de  $\omega$ , et les propriétés que nous allons en donner sont des propriétés presque sûres, c'est-à-dire valables sauf pour un ensemble exceptionnel dont la probabilité est nulle.

La propriété fondamentale du mouvement brownien, contenue dans la formule

$$(12) \quad E(|X(t_1) - X(t_0)|^2) = t_1 - t_0 \quad (t_1 > t_0)$$

traduit le fait que le déplacement moyen est proportionnel à la racine carrée du temps écoulé. C'est le point crucial dans le mémoire d'Einstein de 1905 : "die mittlere Verschiebung ist proportional der Quadratwurzel aus der Zeit" (\* , p. 559). C'est là une grande ressemblance avec la courbe de Peano-Paul Lévy.

Voici une ressemblance encore plus remarquable : presque sûrement,

$$(13) \quad \int_{t_0}^{t_1} |dX(t)|^2 = t_1 - t_0$$

où le premier membre a le même sens que la variation quadratique dans (4), c'est-à-dire qu'il est défini à l'aide d'une suite de partages de l'intervalle  $(t_0, t_1)$  par des points dyadiques (Paul Lévy). A fortiori on a

---

\* A. Einstein, cf. p. 49.

$$(14) \quad \int_{t_0}^{t_1} |dX(t)| = \infty,$$

l'analogue de (3), qui exprime que la longueur de la trajectoire est infinie.

Enfin la trajectoire de  $X(t)$  est partout dense dans le plan. Cela signifie qu'au cours du temps le point  $X(t)$  s'approche d'aussi près qu'on veut de n'importe quel point donné dans le plan.

Voilà maintenant une série de propriétés plus fines, où les différences apparaissent.

D'abord, la surface couverte  $X(t)$  est d'aire nulle. C'est encore un théorème de Paul Lévy, et voici sa preuve. Etant donné la propriété d'homogénéité (12), l'ensemble  $S(a,b)$  décrite par  $X(t)$  quand  $t$  parcourt l'intervalle  $(a,b)$  vérifie

$$(15) \quad E(\text{aire } S(a,b)) = \lambda(b-a) \quad (\lambda \text{ constante}).$$

En écrivant (15) pour les couples  $(a,b)$ ,  $(b,c)$ ,  $(a,c)$  ( $a < b < c$ ), on obtient

$$(16) \quad E(\text{aire } S(a,c)) = E(\text{aire } S(a,b)) + E(\text{aire } S(b,c))$$

donc la partie commune à  $S(a,b)$  et  $S(b,c)$  a une aire nulle, presque sûrement. Comme  $S(a,b)$  et  $S(b,c)$  sont des ensembles indépendants, cela n'est possible que si, presque sûrement,  $S(a,b)$  (ou  $S(b,c)$ ) a une aire nulle, c'est-à-dire si  $\lambda = 0$ .

Ensuite, il arrive souvent à  $|X(t)|$  de dépasser de beaucoup la valeur moyenne  $\sqrt{t}$ . Précisément, on a

$$(17) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|X(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad (\text{p. s.})$$

C'est la "loi du logarithme itéré", de Khintchine.

## L'IRREGULARITE LOCALE.

La loi du logarithme itéré a aussi une version locale

$$(18) \quad \overline{\lim}_{|h| \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2|h| \log \log(1/|h|)}} = 1 \quad (\text{p. s. p. p.}).$$

La mention entre parenthèses signifie "presque sûrement presque partout" ; plus précisément, pour chaque  $t$  fixé, l'égalité (18) a lieu presque sûrement, et il s'ensuit que, presque sûrement, (18) a lieu pour presque tout  $t$ . Il est faux que,

presque sûrement, (18) ait lieu pour tout  $t$  (la question est posée par P. Lévy dans son livre (\*), p. 247 ; elle a été résolue en 1974 comme l'indiquent les résultats qui suivent). Ainsi, (18) n'entraîne pas la non-dérivabilité de  $X(t)$  en tout point  $t$ , mais seulement en presque tout point  $t$ .

Sur la non-dérivabilité partout (la question de Jean Perrin), le meilleur résultat est dû à Dvoretzky (\*\*)

$$(19) \quad \overline{\lim}_{|h| \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{|h|^{1/2}} > 0 \quad (\text{p. s.}).$$

Il est inaméliorable, en ce que p. s. il existe des points  $t$  pour lesquels

$$(20) \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{|h|^{1/2}} < \infty.$$

(\*\*\* 1974). En de tels points  $t$ , le premier membre de (18) est nul.

Concluons sur l'irrégularité locale du mouvement brownien. La fonction de Weierstrass, donnée par (1), ou la trajectoire de Peano-Paul Lévy, sont très irrégulières, mais à peu près de la même façon autour de chaque point ; on peut dire qu'elles manifestent une certaine régularité dans l'irrégularité. L'irrégularité du mouvement brownien n'est pas capricieuse ; elle obéit à des lois bien précises ; mais elle est beaucoup plus complexe, elle permet des tracés beaucoup plus tourmentés. Aux instants où la variation du mouvement brownien est la moins rapide (ce sont les instants qui vérifient (20)), le comportement local ressemble le plus à celui de la courbe de Peano (dont la fonction  $M(t)$  vérifie à la fois (19) et (20) pour tout  $t$ ).

## HELICES ET QUASI-HELICES.

Sortons pour un moment du plan, et plongeons nous dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . C'est dans ce grand espace que le mouvement brownien a sa structure géométrique la plus simple. Les éléments de  $\mathcal{H}$  sont des variables gaussiennes, et la distance de  $X$  à  $Y$  est

$$(21) \quad \|X - Y\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{E((X-Y)^2)}.$$

Le mouvement brownien  $X(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) se représente par une courbe dans  $\mathcal{H}$ , qui vérifie

$$(22) \quad \|X(t') - X(t)\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{|t' - t|};$$

\* Paul Lévy 1948, cf. p. 56.

\*\* A. Dvoretzky 1963, On the oscillation of the brownian motion process, Israël J. Math. 1, 212-214.

\*\*\* J.-P. Kahane, Sur l'irrégularité locale du mouvement brownien, C. R. Acad. Sc. Paris 278, 331-333.

cela résulte très facilement de la définition que nous avons donnée (voir (8) et (12)). Appelons  $H$  cette courbe dans  $\mathcal{H}$ . La distance de deux points dans  $H$  est la racine carrée de la distance de leurs paramètres : c'est ce que dit la formule (22). Ainsi, si l'on change  $t$  en  $t+a$  ( $a$  fixe), c'est-à-dire qu'on se translate dans le temps, la courbe  $H$  glisse sur elle-même, comme une hélice. C'est bien, en fait, ce que I. J. Schoenberg, partant de considérations géométriques, a appelé hélice dans un espace de Hilbert à la fin des années 30. L'hélice brownienne, définie par (22), a une propriété supplémentaire : trois points quelconques de l'hélice forment toujours un triangle rectangle - c'est simplement le théorème de Pythagore

Dans un espace euclidien de dimension finie, on ne peut pas construire d'hélice brownienne. Cependant il a été démontré récemment qu'à partir de la dimension 3 on peut construire une courbe  $M(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) telle que

$$(23) \quad 0 < A < \frac{\text{distance}(M(t), M(t'))}{\sqrt{|t'-t|}} < B \quad (A, B \text{ constantes})$$

et que, de plus, si la dimension est assez grande,  $A$  et  $B$  peuvent être choisis arbitrairement proches de 1. Ainsi on peut approcher l'hélice brownienne par des sortes de quasi-hélices situées dans des espaces de dimensions finies.

La figure \* montre des projections sur un plan de ces quasi-hélices, pour les dimensions  $n = 4, 8, \dots, 1024$ . Les procédés de construction sont purement combinatoires. Par exemple, pour  $n = 4$ , on choisit une base de l'espace euclidien à 4 dimensions, formée des vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{\ell}$ . On définit une suite de  $+$  et de  $-$  à l'aide du tableau figuré, dont le lecteur pourra deviner la construction, et l'on met en place la ligne brisée qui joint les sommes partielles de la série

$$(24) \quad \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{\ell} + \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} - \vec{\ell} + \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{\ell} + \dots$$

dans laquelle les signes  $+$  et  $-$  sont déterminés par le tableau. Si l'on applique cette règle de construction pour  $n = 2$ , on retrouve la courbe de Peano-Paul Lévy, qui vérifie bien le second membre de (23) mais pas le premier membre. En fait, il n'existe pas de courbe plane  $M(t')$  qui vérifie (23) (voir ( \*\* ), et les références citées).

---

\* établie par Yvon Deschamps à l'aide de l'ordinateur Ariel de l'I.P.N. à Orsay (annexe p. 71).

\*\* J.-P. Kahane 1980, Hélices et quasi hélices.

## LE MOUVEMENT BROWNIEN ET LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Revenons maintenant au mouvement brownien plan.

Paul Lévy a découvert une relation très curieuse entre le mouvement brownien plan et les fonctions analytiques d'une variable complexe. La voici. Si  $X(t)$  est le mouvement brownien plan, partant de  $0$ , et si  $f(z)$  est une fonction analytique définie au voisinage de  $0$ ,  $f(X(t))$  est un mouvement brownien plan moyennant un changement d'horloge. L'idée de la démonstration est très simple :  $X(t)$  est le mouvement d'une particule qui, à chaque instant, sans aucune mémoire, reprend sa course au hasard en donnant la même chance à toutes les directions. Or l'application  $z \rightarrow f(z)$  est une application conforme, c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point elle se comporte comme une dilatation suivie d'une rotation. Ainsi le point  $f(X(t))$ , lui aussi, n'a pas de mémoire, et reprend sa course à chaque instant en partant au hasard sans privilégier aucune direction. Si on veut formaliser cette démonstration, il est commode d'introduire l'intégrale stochastique

$$(25) \quad \int_0^t f'(X(s)) dX(s)$$

et le nouveau temps qui lui est adapté,

$$(26) \quad T(t) = \int_0^t |f'(X(s))|^2 ds.$$

On peut, soit étudier le mouvement brownien plan en utilisant des fonctions analytiques, soit étudier les fonctions analytiques en utilisant le mouvement brownien. C'est ce qu'on fait, depuis 10 ans, H. P. McKean, D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein, B. J. Davis, N. Varopoulos, B. Øksendal et d'autres (voir l'article d'exposition de Burgess Davis (p. 65)). Donnons quelques exemples.

Nous avons indiqué que l'ensemble des positions de  $X(t)$  est d'aire nulle, et nous avons donné la démonstration de Paul Lévy. En voici une autre, de B. Davis. Fixons un nombre complexe  $a \neq 0$ . La trajectoire du point  $f(X(t)) = a(1 - \exp X(t))$  n'atteint jamais le point  $a$ , parce que la fonction exponentielle ne s'annule jamais. Donc, pour tout  $a \neq 0$  fixé, il est presque sûr que la trajectoire brownienne ne contient pas  $a$ , et il en résulte que l'ensemble recouvert est d'aire nulle. Cet exemple montre comment les fonctions analytiques peuvent servir à étudier le mouvement brownien.

Dans l'autre sens, voici encore un résultat de B. Davis. Etant donné deux points  $a$  et  $b$  ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq b$ ), et un petit disque  $D$  de centre  $0$  qui ne contient ni  $a$  ni  $b$ , on considère le mouvement brownien  $X(t)$  partant de  $0$ , et stoppé à une suite de temps  $T_n \rightarrow \infty$ , tels que  $X(T_n)$  appartienne

à  $D$ . On démontre, par des méthodes combinatoires, que lorsque  $n$  est assez grand la trajectoire de  $X(t)$  ( $0 \leq t \leq T_n$ ) est "nouée" autour des points  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire qu'on ne peut pas la déformer continûment, sans jamais passer par  $a$  ni  $b$ , et en maintenant fixes son origine et son extrémité, jusqu'à la plonger dans  $D$ . Considérons maintenant une fonction  $f(z)$  analytique dans tout le plan (on dit aussi : fonction entière), et non constante. Quitte à lui soustraire  $f(0)$ , nous supposons  $f(0) = 0$ . Si, lorsque  $z$  parcourt le plan de la variable complexe,  $f(z)$  évitait deux valeurs distinctes  $a$  et  $b$ , la trajectoire de  $f(X(t))$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  pourrait être déformée sans jamais passer par  $a$  et  $b$  jusqu'à se transformer en n'importe quelle courbe donnée joignant  $f(0)$  et  $f(X(t))$ . Cela contredit le fait que la trajectoire de  $f(X(t))$  est nouée autour de  $a$  et de  $b$  pour une suite de valeurs de  $T$  tendant vers l'infini. La contradiction établit un fameux théorème de Picard : toute fonction entière non constante prend toute valeur complexe, sauf au plus une.

Le mouvement brownien plan est un bon outil pour l'étude des fonctions  $f(z)$  analytiques dans le disque unité  $D : |z| < 1$ . Il convient alors d'arrêter  $X(t)$  au premier instant où l'on sort de  $D$ , c'est-à-dire au premier instant  $\tau$  où  $|X(\tau)| = 1$ , pour les valeurs  $t \geq \tau$ , on remplace  $X(t)$  par  $X(\tau)$ . Le processus

$$(27) \quad Y(t) = X(t) \text{ pour } t \leq \tau, \quad X(\tau) \text{ pour } t \geq \tau$$

est un module de martingale continue. Supposons toujours  $f(0) = 0$ . Alors  $f(Y(t))$  parcourt une trajectoire brownienne stoppée sur le cercle unité, mais le temps qui lui est adapté est donné par (26) ; si l'on paramètre la trajectoire à l'aide du temps adapté, le temps d'arrêt devient

$$(28) \quad \nu = T(\tau) = \int_0^\tau |f'(X(s))|^2 ds.$$

Le temps d'arrêt  $\nu$  est une variable aléatoire liée à  $f$ , et l'on a pu établir des propriétés de certaines classes de fonctions analytiques dans  $D$  (les classes de Hardy  $H^p$ ) au moyen de la formule

$$(29) \quad \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \approx E(\nu^{p/2}) \quad (0 < p < \infty).$$

Ce qui est remarquable dans la formule (29), c'est que le second membre a toujours un sens (fini ou infini) tandis que le premier n'en a que lorsque on peut définir naturellement  $f(z)$  pour  $|z| = 1$ . Les classes de Hardy  $H^p$  sont justement celles pour lesquelles le second membre de (29) est fini. Cette définition n'est pas du tout celle de Hardy, qui s'exprime en termes d'analyse classique, mais elle s'est avérée d'une grande utilité, et susceptible de généralisations pour des espaces à plus de

deux dimensions (Burkholder et Gundy, voir ( \* )).

Burgess Davis a posé un intéressant problème sur le temps d'arrêt  $\nu = \nu(f)$ . Dans quel sens, relativement à  $\nu(f)$ , la fonction  $z$  est-elle la plus petite des fonctions  $f(z)$  analytiques dans  $D$  satisfaisant  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$  ? Une réponse partielle, négative, est qu'on n'a pas

$$(30) \quad P(\nu(z) > \lambda) \leq P(\nu(f) > \lambda) \quad (\lambda > 0) \quad (\text{Y. Katznelson 1980}).$$

## LE MOUVEMENT BROWNIEN ET LA THEORIE DU POTENTIEL.

Au terme de cet article je suis assez effrayé. A supposer qu'il m'ait suivi jusqu'ici, le lecteur de ce papier n'aura eu connaissance ni de la relation du mouvement brownien à l'équation de la chaleur, connue depuis Einstein, ni de la relation du mouvement brownien à la théorie du potentiel, connue depuis S. Kakutani (1944-45). Tant pis pour l'équation de la chaleur, et aux applications faites par Kolmogorov, pour lesquelles je renvoie au livre de Paul Lévy (\*\*). Je dirai encore un mot sur le point de vue de Kakutani.

Nous nous plaçons toujours dans le plan et  $X(t)$  est toujours le mouvement brownien partant de 0. Soit  $K$  un ensemble compact (= fermé et borné), ne contenant pas 0. Si  $K$  est "assez gros", le point  $X(t)$  pénètre dans  $K$  pour des valeurs de  $t$  arbitrairement grandes. Si  $K$  est "assez mince",  $X(t)$  ne pénètre pas dans  $K$ . C'est ainsi qu'on distingue les ensembles de capacité positive et de capacité nulle. Si maintenant nous avons un domaine  $D$  contenant 0, bordé par une frontière  $\partial D$ , la mesure harmonique relative à 0 sur  $\partial D$  est une répartition de masse sur  $\partial D$  qui permet, par intégration, d'obtenir la valeur en 0 d'une fonction harmonique à partir de ses valeurs sur  $\partial D$ ; on définit de même la mesure harmonique relative à n'importe quel point  $z$  intérieur à  $D$ . L'interprétation probabiliste de la mesure harmonique est très simple : la mesure harmonique par rapport à  $z$  d'un morceau  $M$  de la frontière  $\partial D$  est la probabilité que le mouvement brownien partant du point  $z$  atteigne pour la première fois  $\partial D$  en un point de  $M$ .

Ces interprétations valent aussi pour l'espace à trois dimensions, et elles rendent par exemple très intuitives le fait qu'un segment de droite soit de capacité (logarithmique) positive dans le plan, et de capacité (newtonienne) nulle dans l'espace ; ce dernier fait, c'est la propriété principale du paratonnerre.

---

\* Burgess Davis 1979, p. 65.

\*\* Paul Lévy 1948, p. 56.

## EN GUISE D'APOLOGIE.

Je n'aurai donc parlé ni du bruit de fond, ni de la diffusion, ni des ensembles aléatoires construits à l'aide du mouvement brownien, ni de beaucoup d'autres questions de grand intérêt pour les mathématiques ou leurs applications. Mon excuse d'avoir été si incomplet - et si partial dans mon choix - est sans doute la raison d'être de cet article : le foisonnement de tout ce qui touche au mouvement brownien

Le mouvement brownien n'est pas une théorie mathématique. Il se trouve au carrefour de plusieurs théories constituées, et à l'origine d'autres théories. Je crois qu'on peut le considérer comme un objet mathématique central de notre temps. Il y a vingt ans, je pense que moins d'un mathématicien sur 20 aurait pu donner la définition mathématique du mouvement brownien ; la proportion actuelle est peut être d'un sur deux. Si l'on est probabiliste, on a besoin du mouvement brownien comme le plus important exemple de processus. Si l'on est analyste, géomètre, topologue, on en a besoin comme outil. Ce genre d'objets mathématiques me paraît beaucoup plus caractéristique de la situation générale de la mathématique et de son évolution que toutes les architectures dont on la croit d'ordinaire constituée. Mais c'est là un autre sujet : que sont à chaque époque, et comment évoluent les objets mathématiques sur lesquels reposent la culture et les intérêts des mathématiciens .

## Références

Les références se trouvent en général en notes de bas de page.

### Références de la page 55.

- K. E. Petersen 1977, Brownian motion, Hardy spaces and Bounded mean oscillation, London Math. Soc. Lecture Note Series 28, Cambridge Univ. Press.
- Jean-Pierre Kahane 1976, Brownian motion and classical analysis. Bull. London Math. Soc. 8, 145-155.
- D. L. Burkholder 1977, Brownian motion and classical analysis Probability, Proceedings of symposia in pure mathematics, 5-14.
- Burgess Davis 1979, (special invited paper) Brownian motion and analytic functions, Annals of Probability 7 (1979), 913-932.

### Quelques références complémentaires

- K. Ito, H. P. Mc Kean, Diffusion processes and their sample paths, New York 1965.
- Edward Nelson, Dynamical theories of brownian motion, Princeton University Press 1967.
- J.-P. Kahane, Some random series of functions, Heath 1968.
- J. W. Pitman, One dimensional brownian motion and the three dimensional Bessel process, Advances in Applied Probability 7 (1975), 511-526.
- H. P. Mc Kean, Brownian local times, Advances in Mathematics 15 (1975), 91-111.
- R. K. Gettoor, The Brownian escape process, Annals of Probability 7 (1979), 864-867.
- Patrice Assouad, Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$  et courbes de Bon Koch, C. R. Acad. Sc. Paris (1980).
- Bernt Øksendal, Brownian motion and sets of harmonic measure zero (à paraître).

Comment on construit des variables gaussiennes indépendantes.

L'ordinateur dont on dispose permet des calculs sur nombres de 64 bits. Tous les nombres sont écrits dans le système binaire. On choisit pour  $M$  le plus grand multiple de 13 qui s'écrit avec 31 bits (c'est très arbitraire), puis on choisit un nombre de 31 bits dans une table de nombres aléatoires (car il n'est pas si facile d'imiter le hasard !), soit  $x_1$ . On effectue le produit  $Mx_1$  (qui occupe 62 bits) et on conserve les 31 derniers bits ; ils forment un nombre  $x_2$ . On répète avec  $x_2$  ce qu'on vient de faire avec  $x_1$ , et ainsi de suite. Pratiquement, la suite  $x_n$  représente une bonne suite de nombres pris au hasard et indépendamment les uns des autres, entre 0 et  $2^{31}-1$ . Pour avoir des variables gaussiennes indépendantes, on répartit les  $x_n$  par tranches de 12, on les ajoute dans chaque tranche de 12 et on normalise les sommes obtenues. Naturellement, rien n'est au hasard là dedans, si ce n'est le choix de  $x_0$ . Mais c'est une bonne simulation du hasard. Les constructions effectuées par M. Yvon Deschamps utilisent cette technique.

Quelques compagnons de la fonction de Wiener.

$X(t)$  est la fonction du mouvement brownien linéaire ( $t \geq 0$ ).

$M(t)$  est la plus petite fonction croissante supérieure à  $X(t)$ .

$Y(t) = M(t) - X(t)$ .

$T(x)$  est la fonction réciproque de  $M(t)$  (restreinte au plus grand ensemble fermé à droite où elle est strictement croissante) ; c'est aussi le premier temps d'entrée de  $X(t)$  dans le demi-droite  $[x, \infty)$  ( $y > 0$ ).

$L(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \text{mes} \{s \leq t, |X(s)| \leq \varepsilon\}$  mesure le temps passé par  $X(t)$  au point 0 ; c'est le "temps local" en 0.

$\mathcal{E}$  est l'ensemble  $X^{-1}(0)$ . La fonction  $L(t)$  est strictement croissante sur  $\mathcal{E}$ , et constante sur chaque intervalle  $I$  contigu à  $\mathcal{E}$ .

Le couple  $(M(t), Y(t))$  et le couple  $(L(t), |X(t)|)$  ont la même distribution.

$T(x)$  est un processus positif à accroissements indépendants, stable, d'indice  $\frac{1}{2}$  (processus de Lévy d'indice  $\frac{1}{2}$ , ou subordonateur d'indice  $\frac{1}{2}$ ).

Les intervalles  $I$  contigus à  $\mathcal{E}$  peuvent être construits comme les sauts d'un tel processus ; sur chaque intervalle  $I$ ,  $X(t)$  est une "excursion brownienne" qui a un signe constant, et ces excursions sont mutuellement indépendantes quand  $\mathcal{E}$  est fixé.

Tous ces résultats sont dûs à Paul Lévy.

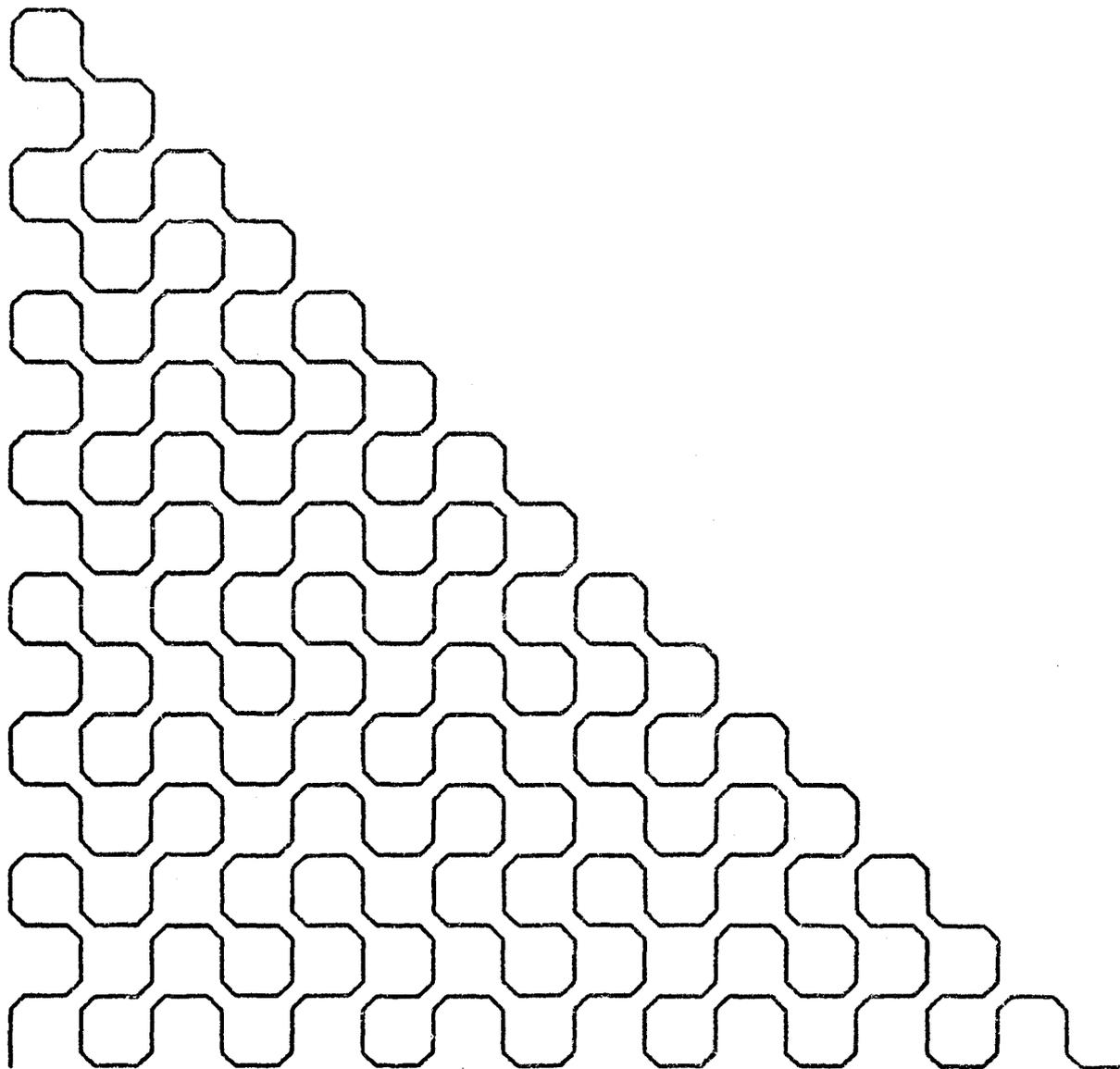
$X_3(t)$  est la fonction du mouvement brownien tridimensionnel.

$\|X_3(t)\|$  a même distribution que  $2M(t) - X(t)$  (Pitman 1975).

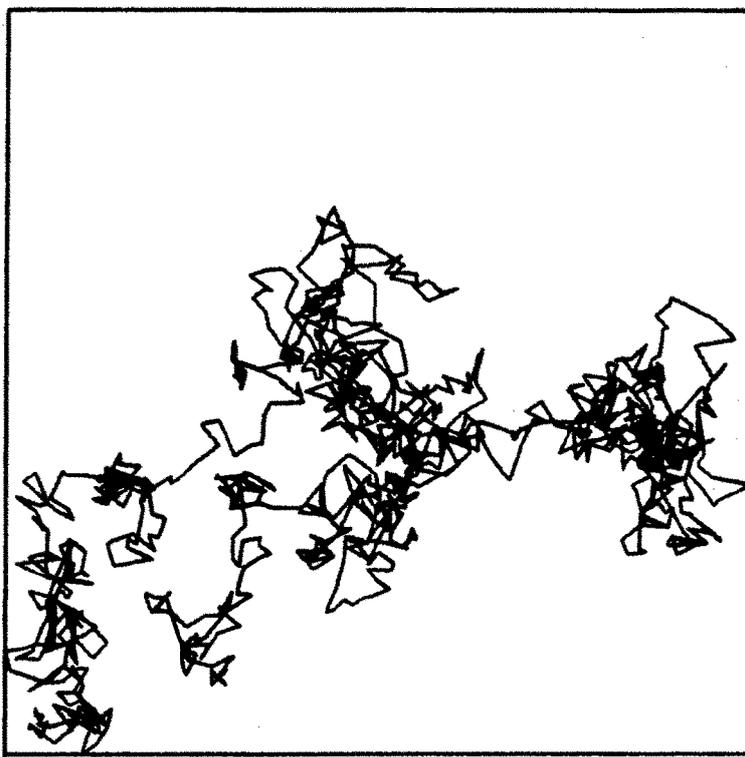
Construction d'une quasi-hélice

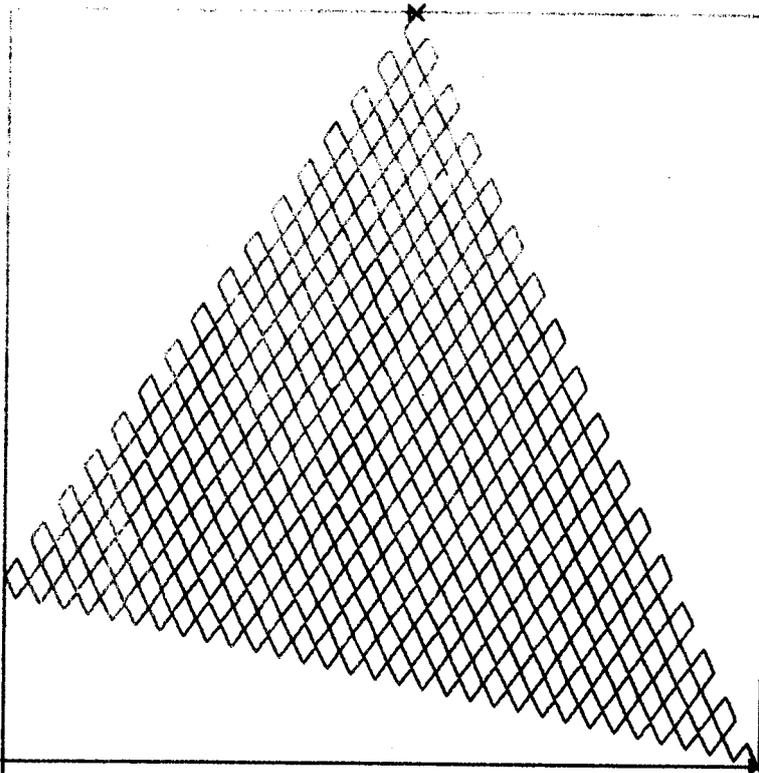
$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{array}$	$W_0$
$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ + & + & - & - \\ - & + & + & - \end{array}$	$W_1$
$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ - & - & + & + \\ - & + & + & - \end{array}$	$W_2$
$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & - & - & + \end{array}$	$W_4$
$W_0$	$W_5$
$-W_1$	$W_6$

Courbe de Peano-Paul Lévy

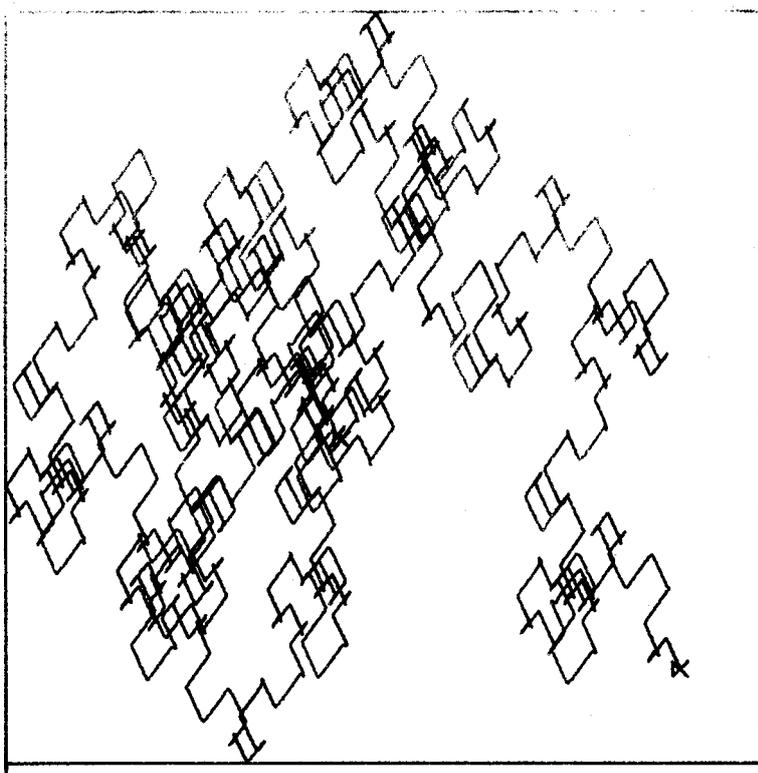


Le mouvement brownien plan

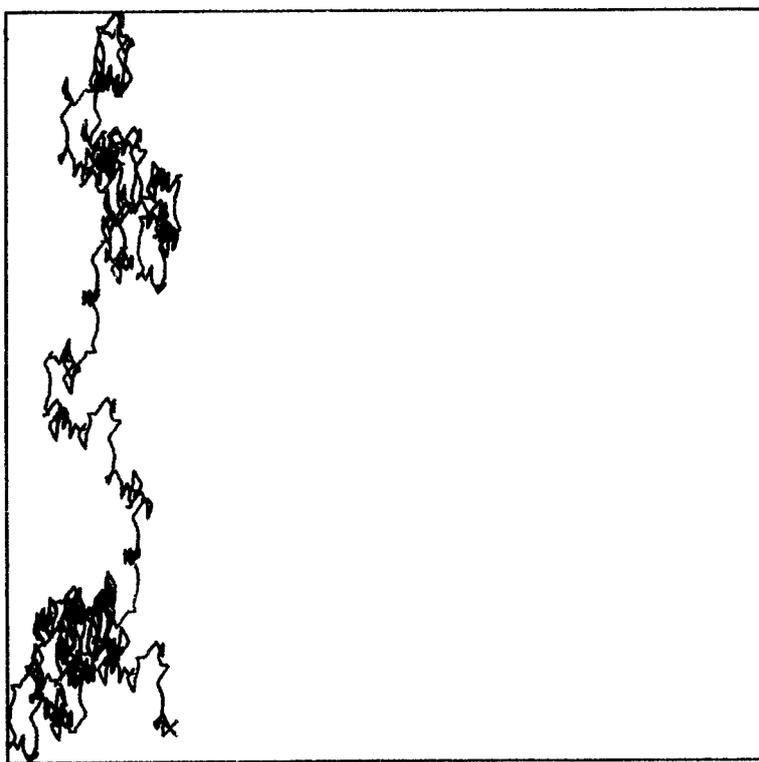


Quasi-hélices (de la courbe de Peano-Paul Lévy au mouvement brownien)

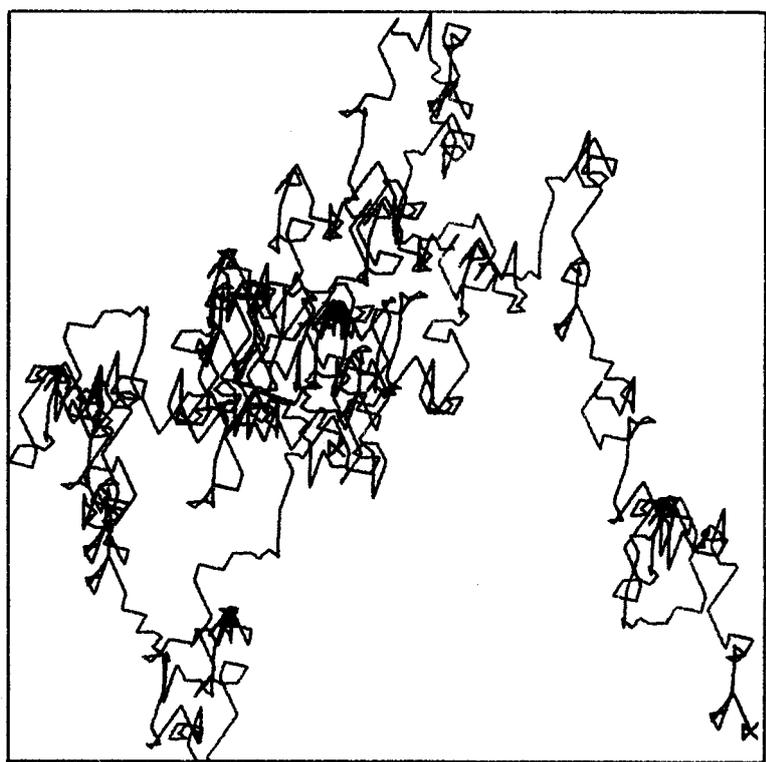
2



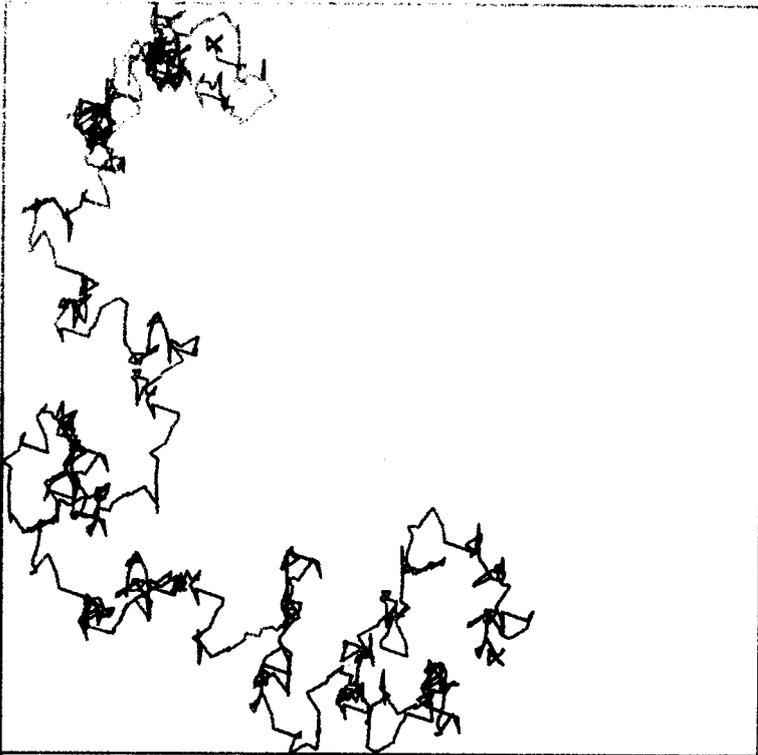
4



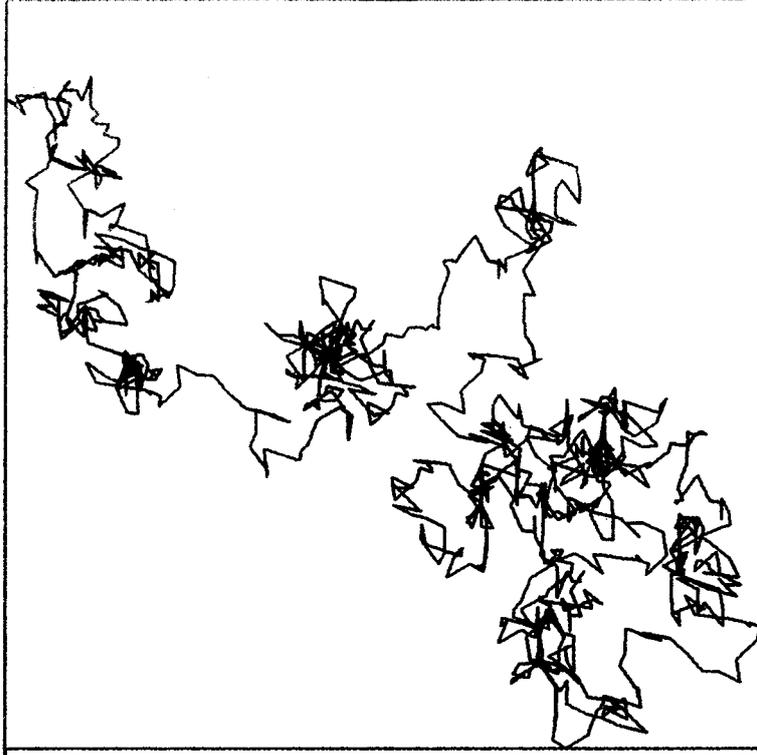
8



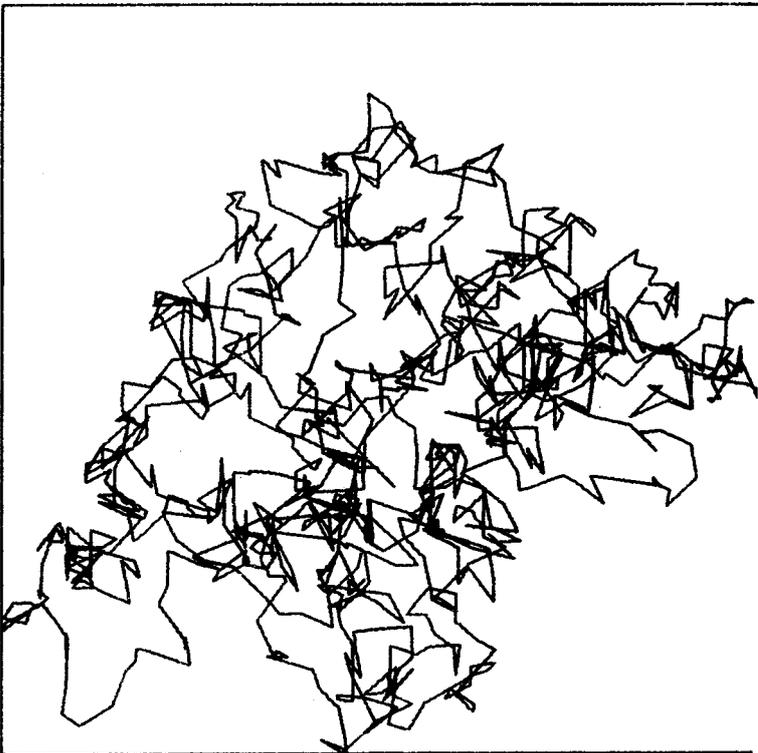
16



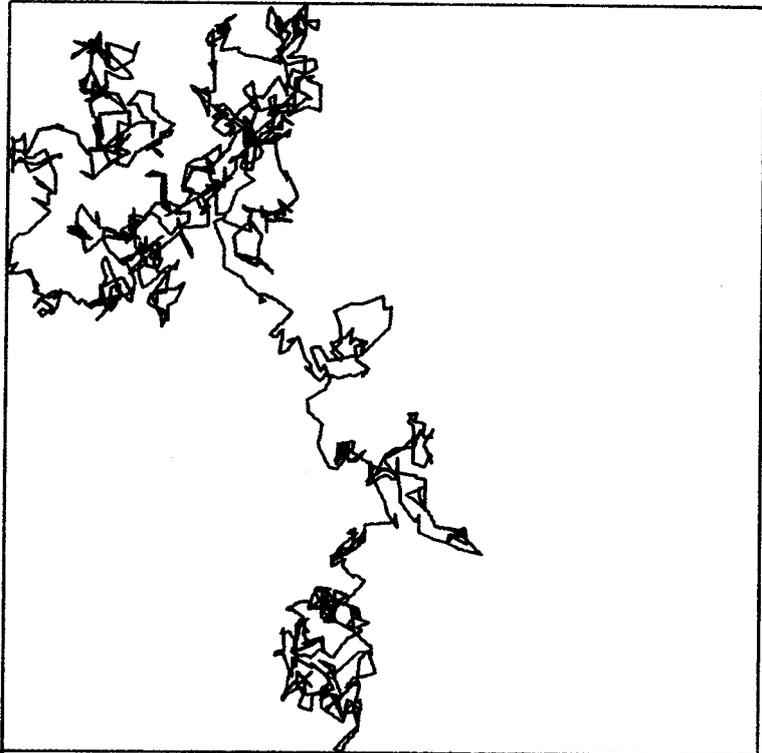
32



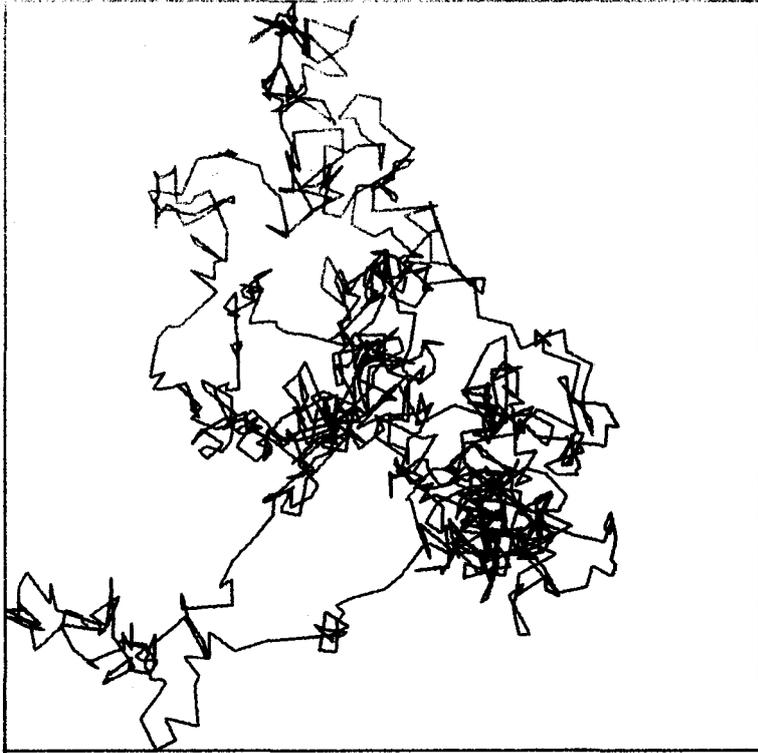
64



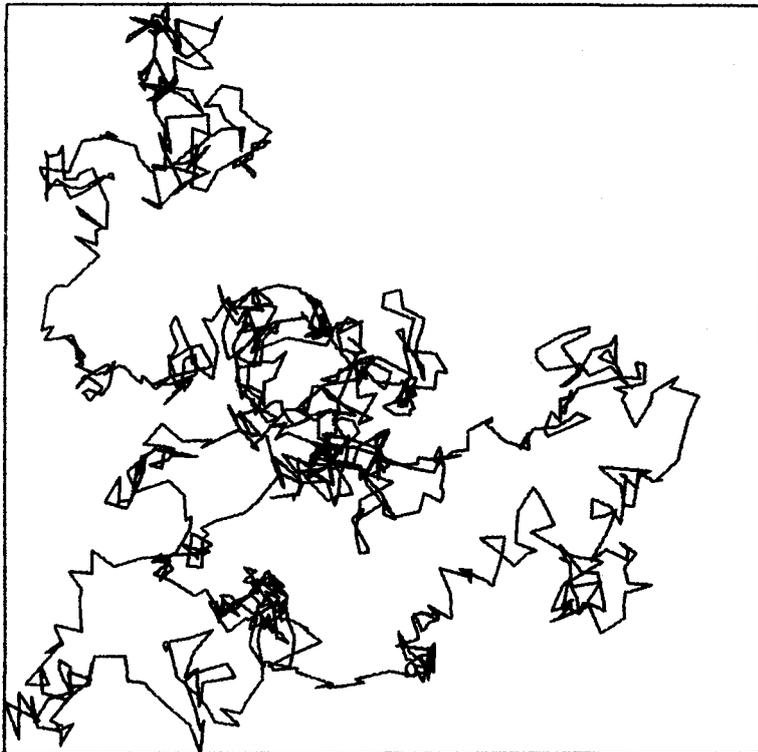
128



256



512



1024

LA TRANSFORMATION DE FOURIER ANALYTIQUE  
DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS.

Nghiem Xuan Hai

Lorsque l'on veut élargir le cadre de l'analyse harmonique sur les espaces  $\mathbb{R}^n$ , les premiers groupes non commutatifs que l'on aborde sont les groupes de Lie nilpotents. Les représentations et la transformation de Fourier Plancherel (en abrégiation T.F.P.) de ce groupes sont étudiées depuis longtemps et fort connues [1,2,3] et on peut se demander le pourquoi de l'étude ici présentée. A notre sens, bien que l'objet abordé soit considéré comme trivial par bien des mathématiciens, l'étude elle-même présente des intérêts multiples.

D'un point de vue pratique, nous donnons un accès rapide et facile, donc largement rentable, à la T.F.P. des groupes de Lie nilpotents (connexes et simplement connexes pour nous concentrer seulement sur l'aspect analytique du problème). La méthode est particulièrement efficiente lorsque le groupe est donné explicitement avec une dimension raisonnable (voir l'application avec un groupe de dimension 10). Elle permet d'écrire explicitement toutes les formules et donne même un noyau intégral analytique. La T.F.P. du groupe de Lie nilpotent  $G$  s'obtient par décomposition d'une seule et unique représentation unitaire  $\Pi$  de  $G$  opérant dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  des fonctions de carré sommables sur un ouvert de Zariski  $\Omega$  d'un espace  $\mathbb{R}^{M+R}$ . La représentation  $\Pi$  elle-même est l'exponentielle d'une représentation infinitésimale  $\pi$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  du groupe  $G$ .

Les éléments de  $\mathcal{G}$  sont représentés par  $\pi$  en des opérateurs différentiels

antihermitiens du premier ordre à coefficients rationnels et réguliers sur  $\Omega$ . En conséquence, la représentation  $\Pi$  de  $G$ , qui est une intégrale directe de sous-représentations unitaires irréductibles  $\Pi_\sigma$ , a toutes les propriétés d'analyticité et ce sont les meilleures possibles car on a même une analyticité en fonction de l'indice  $\sigma$ , ce qui n'aurait pas pu s'obtenir si l'on déterminait les représentations irréductibles une à une. La méthode proposée est donc analytique et globale. Les groupes à un paramètre de  $G$  opèrent dans  $\mathcal{H}$  par l'exponentielle d'un opérateur différentiel du premier ordre avec un terme constant, ce qui peut être calculé explicitement et se traduit par un changement de phase et un déplacement sur  $\Omega$  donné par le champ de vecteurs constitué par la partie homogène de degré 1 de l'opérateur différentiel : l'action de  $\Pi(g)$  pour  $g \in G$  est donc locale. La décomposition de  $\Pi$  en représentations irréductibles  $\Pi_\sigma$  coïncide avec le feuilletage de  $\Omega$  sous l'action de  $G$  (voir le groupe de déplacement ci-dessus) en des  $G$ -orbites  $\sigma$ . Les  $G$ -orbites  $\sigma$  sont toutes des sous-espaces affines  $\mathbb{R}^M \subset \Omega$ . Comme nous l'avons déjà signalé, les représentations  $\Pi_\sigma$  dépendent analytiquement de  $\sigma \in \Omega/G$  mais on a encore mieux, puisque les éléments de matrice généralisés qui sont donnés par le noyau  $\mathcal{K}_\sigma$  de la représentation  $\Pi_\sigma$  dépendent aussi analytiquement des paramètres.

Pour les applications, la méthode présentée est intéressante car elle repose sur une sous-algèbre commutative  $\mathcal{A}$  de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . L'ouvert  $\Omega$  est un fait un ouvert de Zariski de l'espace des caractères antihermitiens  $\hat{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  et la représentation infinitésimale  $\pi$  est déduite naturellement de l'action "co-adjointe" de  $\mathfrak{g}$  dans  $\hat{\mathcal{A}}$ . La construction de  $\mathcal{A}$  elle-même ne demande que des calculs faciles d'algèbre linéaire et de primitives. L'algèbre  $\mathcal{A}$  est non-centrale, ce qui donne naissance à des opérateurs non bi-invariants sur le groupe  $G$ . Comme  $\mathcal{A}$  opère diagonalement dans  $\mathcal{H}$ , on fait immédiatement le calcul fonctionnel sur  $\Pi(\mathcal{A})$  (ou sur  $\hat{\mathcal{A}}$ ), d'où une étude possible des opérateurs non bi-invariants sur le groupe donnés par  $\mathcal{A}$ , et ceci permet de s'éloigner du cadre des opérateurs bi-invariants habituellement étudiés.

Le noyau  $\mathcal{K}_\sigma$  de la représentation irréductible  $\pi_\sigma$  est une distribution sur  $G$  qui est fonction propre à droite et à gauche de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , avec les valeurs propres appartenant à  $\hat{\mathcal{A}}$  (plus exactement à  $\Omega$ ). On a ainsi une famille de distributions indexées par  $\Omega \times \Omega$  et leurs valeurs sur une fonction  $\varphi \in C^\infty$  à support compact sur  $G$  définissent une fonction  $\hat{\varphi}$  sur  $\Omega \times \Omega$ . On peut alors réinterpréter la T.F.P. de  $G$  en termes de distributions propres et en un résultat de complétion de cette famille de distributions (type "Parseval").

Du point de vue théorique, la méthode exposée ici sert d'introduction à une étude générale des groupes de Lie résolubles connexes et simplement <sup>connexes</sup> [4] par des méthodes entièrement originales et nouvelles. Celles-ci se basent sur un étude de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et sur la sous-algèbre  $\mathcal{A}$ . Elles permettent de retrouver bien des aspects de l'analyse de Fourier commutative (différentiabilité, décroissance à l'infini, type exponentiel, analyticité, etc...) et ce parallèle qu'on peut mener loin ouvre un large champ d'investigation pour la généralisation des résultats classiques (le théorème de Paley-Wiener par exemple).

Un dernier aspect de la théorie est de n'utiliser aucun outil sophistiqué de la théorie des représentations (comme la théorie de Mackey par exemple) et de ne comporter aucune récurrence sur la dimension du groupe (si ce n'est pour la démonstration de certaines propriétés de  $\mathcal{A}$ , bien que le calcul de  $\hat{\mathcal{A}}$  soit fait globalement). Son principal avantage (ou désavantage (?)) est donc d'être élémentaire et accessible sans aucun préalable. Elle se décompose en deux étapes.

1. Construction algébrique de la sous-algèbre commutative  $\mathcal{A}$  et obtention de  $\pi$  par l'action "co-adjointe" sur le spectre  $\hat{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$ .

2. Exponentiation explicite de  $\pi$  pour l'obtention de  $\Pi$ ,

- Décomposition de  $\Pi$  en représentations irréductibles  $\pi_\sigma$  (où  $\sigma$  est une  $G$ -orbite dans  $\Omega$ ) ;
- Calcul explicite du noyau  $\mathcal{K}_\sigma$  et des distributions propres
- Formule de Fourier Plancherel pour  $G$ .

Nous ne donnerons pas les démonstrations qui sont déjà écrites ailleurs [5].

## 1. Notations et conventions.

$G$  groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe ;

$\mathfrak{g}$  algèbre de Lie de  $G$  ;

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$  algèbre et corps enveloppants de  $\mathfrak{g}$  ;

Caractéristique : invariant par tout automorphisme de  $\mathfrak{g}$  ;

$k$  corps de base de caractéristique 0 ( $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  par exemple) ;

$\vee$  symbole du produit symétrisé  $a \vee b = \frac{1}{2}(ab + ba)$  ;

$Z_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ .

Avec  $\ell \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ , on note

$k[\ell]$  algèbre engendrée par  $\ell$

$k(\ell)$  corps engendré par  $\ell$

$k \vee \{\ell\}$  espace vectoriel symétrisé engendré par  $\ell$

$[\ell ; q]$  matrice dont les coefficients sont les commutateurs  $[L, Q]$  avec  $L \in \ell$ ,

$Q \in q$  et ordonnés suivants les ordres des ensembles  $\ell, q$ .

2. Constructions algébriques.

2.1. LEMME. La suite des sous-ensembles  $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$  tels que pour tout  $p = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathfrak{g}_p$  est formé des éléments  $X$  de  $\mathfrak{g}$  vérifiant  $[X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{p-1}$  est une suite croissante d'idéaux caractéristiques de  $\mathfrak{g}$ .

2.2. Bases.

On prend une base d'un supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{p-1}$  dans  $\mathfrak{g}_p$  et la note  $\ell_p^2$ . La base  $(\ell_1^2, \ell_2^2, \dots, \ell_n^2)$  de  $\mathfrak{g}$  est notée  $\ell$ .

2.3. Le cas  $p = 1$  ( $p$  est un indice variant de 1 à  $n$ , cf. lemme 2.1).

$\mathfrak{g}_1$  est le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\ell_1^2$  commute à  $\mathfrak{g}_n$ . On pose

$$q_{1,n+1} = \ell_1^2$$

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_{1,2} = \mathbb{A}_{1,3} = \dots = \mathbb{A}_{1,n+1} = k[\ell_1^2]$$

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_{1,2} = \mathbb{K}_{1,3} = \dots = \mathbb{K}_{1,n+1} = k(\ell_1^2).$$

2.4. On se propose de construire à partir de  $\ell$  une nouvelle base algébrique formée de blocs partiels  $q_{p,j}$  ( $j = p, p+1, \dots, n+1$ ;  $p = 1, 2, \dots, n$ ) au moyen de "substitutions triangulaires" avec extension des scalaires pour obtenir :

- i.  $q_{p,j}$  provient de  $\ell_p^2$  et commute à  $\mathfrak{g}_{j-1}$  ;
- ii. Une condition de minimalité sur  $q_{p,j}$  qui ne contiendra que le nombre strictement nécessaire d'éléments ;
- iii. Une condition d'intégralité : l'image sous l'action de  $\mathfrak{g}$  de chaque élément de  $q_{p,j}$  est un polynôme en les éléments de base précédemment construits ;
- iv. Une condition de commutation supplémentaire à i.

#### 2.5. Le cas $p = 2$ .

On fait une extension des scalaires de  $k$  à  $\mathbb{K}_1$ .

$\mathbb{K}_1 \mathfrak{g}_2$  est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur  $\mathbb{K}_1$  et le crochet définit sur  $\mathbb{K}_1 \mathfrak{g}_2$  une forme bilinéaire alternée notée  $\mathfrak{B}$ . On choisit dans  $\ell_2^2$  une base  $\ell_{2,2} = q_{2,2}$  d'un supplémentaire du noyau de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathbb{K}_1 \mathfrak{g}_2$  et on note  $\ell_2^3 = \ell_2^2 \setminus \ell_{2,2}$ . On note  $\theta_2$  la projection sur ce noyau parallèlement à  $\mathbb{K}_1 \vee \{\ell_{2,2}\}$  d'où la base  $(Z_0, \theta_2(\ell_2^3))$  du centre de  $\mathbb{K}_1 \mathfrak{g}_2$ . Le corps engendré par ce centre est noté  $\mathbb{K}_2$ , i.e.  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\theta_2(\ell_2^3))$  et il est caractéristique. On choisit  $\ell_{3,2} \subset \ell_3^2$  maximal tel que les dérivations définies par  $\ell_{3,2}$  par l'action adjointe soient  $\mathbb{K}_1$ -linéairement indépendantes. Ceci équivaut à l'existence de  $\ell_{2,3} \subset \ell_2^3$  de même cardinal que  $\ell_{3,2}$  tel que la matrice des commutateurs  $[\ell_{3,2}; \theta(\ell_{2,3})]$  soit de déterminant non nul et de rang maximal. On pose  $q_{2,3} = \theta_2(\ell_{2,3})$ ,  $\mathbb{K}_{2,3} = \mathbb{K}_1(q_{2,3})$ ,  $\mathbb{A}_{2,3} = \mathbb{A}_1[q_{2,3}]$ .

Plus généralement, supposons  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_j, q_{2,2}, q_{2,3}, \dots, q_{2,j}, \ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{j,2}$  déterminés. On complète  $(\ell_{3,2}, \dots, \ell_{j,2})$  avec  $\ell_{j+1,2} \subset \ell_{j+1}^2$  pour obtenir un nombre maximal de dérivations de  $\mathbb{K}_2$  définies par l'action adjointe de  $\mathfrak{g}_{j+1}$  qui sont  $\mathbb{K}_1$ -linéairement indépendantes. Ceci équivaut à l'existence de  $\ell_{2,j+1} \subset \ell_{2,j+1} \subset \ell_2^2 \setminus (\ell_{2,2}, \ell_{2,3}, \dots, \ell_{2,j})$  telle que  $q_{2,j+1} = \theta_j(\ell_{2,j+1})$  vérifie : la matrice  $[\ell_{3,2}, \dots, \ell_{j+1,2}; q_{2,3}, \dots, q_{2,j+1}]$  est non singulière et de rang

maximal.

L'application  $\varphi_{j+1}$  transforme des éléments de base de  $\ell_2^2$  en des éléments qui commutent à  $\mathfrak{g}_{j+1}$  (condition 2.4.i). A cause de la maximalité qui précède, cette condition est réalisée dès que l'on a la commutation à  $(\ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{j+1,2})$ . On obtient cette commutation ici en retranchant un élément convenable de  $\mathbb{K}_1 \vee \{q_{2,3}, q_{2,4}, \dots, q_{2,j+1}\}$  car  $\mathbb{K}_1$  est central. On multiplie par le dénominateur commun qui se présente pour obtenir un élément de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  dont les commutateurs avec les éléments de  $\mathfrak{g}$  sont dans  $\mathbb{A}_1$  (condition 2.4.iii). Les conditions ii correspondent à la non singularité de la matrice des commutateurs et iv est vide pour  $p = 2$ .

## 2.6. Le cas général : $p = 3, 4, \dots, n$ .

On suppose les objets manipulés ci-dessous déterminés avec les propriétés que l'on énoncera en temps utile pour les valeurs  $2, 3, \dots, p-1$  de l'indice. On fait une extension des scalaires de  $\mathbb{K}_{p-2}$  à  $\mathbb{K}_{p-1} = \mathbb{K}_{p-2}(q_{p-1,p}, q_{p-1,p+1}, \dots, q_{p-1,n+1})$  qui est un sous-corps commutatif caractéristique. Le commutant de  $\mathfrak{g}_j$  dans  $\mathbb{K}_{p-1}$  est  $\mathbb{K}_{p-1,j+1} = \mathbb{K}_{p-2,j+1}(q_{p-1,j+1}, q_{p-1,j+2}, \dots, q_{p-1,n+1})$ . Les anneaux correspondants

$$\mathbb{A}_{p-1} = \mathbb{A}_{p-2} [q_{p-1,p}, q_{p-1,p+1}, \dots, q_{p-1,n+1}]$$

$$\mathbb{A}_{p-1,j+1} = \mathbb{A}_{p-2,j+1} [q_{p-1,p+1}, q_{p-1,p+2}, \dots, q_{p-1,n+1}]$$

sont contenus dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathfrak{g}$ -stables.

1. Par action adjointe,  $\mathfrak{g}_j$  agit dans  $\mathbb{K}_{p-1}$  par des dérivations dont une base sur  $\mathbb{K}_{p-1}$  provient des bases partielles  $\ell_{k,q} \subset \ell_k^2$  avec  $2 \leq k \leq j$  et  $2 \leq q < \text{Inf}(k,p)$ . Cette action est déterminée par la matrice des commutateurs

$$\left[ \begin{array}{l} \ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{j,2}, \ell_{4,3}, \dots, \ell_{j,3}, \dots, \ell_{p,p-1}, \ell_{p+1,p-1}, \dots, \ell_{j,p-1}; \\ q_{2,3}, q_{2,4}, \dots, q_{2,j}, q_{3,4}, q_{3,5}, \dots, q_{3,j}, q_{p-1,p}, q_{p-1,p+1}, \dots, q_{p-1,j} \end{array} \right]$$

qui est régulière et de rang maximal.

Figurent ici les bases partielles  $q_{r,k}$  de  $\mathbb{K}_{p-1}$  avec  $r \leq p-1$  et  $r < k \leq j$

qui sont les seules à ne pas commuter à  $\mathfrak{g}_j$  (car  $k \leq j$ ). La condition 2.4.iv est d'imposer à  $q_{r,k}$  à commuter aussi à  $l_{k,s}$  si  $s < r$ .

2. Le commutant  $\mathfrak{h}_{p-1}$  de  $\mathbb{K}_{p-1}$  dans  $\mathfrak{g}_{p-1} \mathbb{K}_{p-1}$  est une algèbre de Heisenberg de base  $(Z_0, q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1})$ . L'ensemble  $\mathfrak{g}_p \mathbb{K}_{p-1}$  est une algèbre de Lie bilatère [6] sur  $\mathbb{K}_{p-1}$  et compte-tenu de 1 on peut définir la projection dans  $\mathfrak{g}_p \mathbb{K}_{p-1}$  sur le commutant  $\mathfrak{h}_p^\sim$  de  $\mathbb{K}_{p-1}$  parallèlement à

$$V = \mathbb{K}_{p-1} \vee \{l_{3,2}, l_{4,2}, \dots, l_{p,2}, l_{4,3}, l_{5,3}, \dots, l_{p,3}, \dots, l_{p,p-1}\}.$$

Ce commutant  $\mathfrak{h}_p^\sim$  est une algèbre de Lie 2-nilpotente dont  $(Z_0, q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1})$  est une base partielle. Rajoutant au besoin une combinaison  $\mathbb{K}_{p-1}$ -linéaire de  $q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1}$ , on peut définir à partir de  $\theta$  la projection  $\theta'$  sur le commutant de  $\mathfrak{h}_{p-1}$ .

On peut encore, en trouvant la primitive d'une 1-forme fermée et polynomiale et la rajoutant à  $\theta'$ , obtenir l'application  $\theta''$  dont l'image commute aussi à  $V$ , d'où 2.4.i et iv. Enfin, on multiplie par un dénominateur commun (qui sera central et élément de  $\mathbb{A}_{p-1}$ ) pour satisfaire à 2.4.iii. On choisit  $l_{p,p} \in l_p^2 \setminus \{l_{p,2}, l_{p,3}, \dots, l_{p,p-1}\}$  telle qu'avec  $q_{p,p} = \theta''(l_{p,p})$ ,  $(q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p,p})$  est la base d'un supplémentaire  $W$  du centre de  $\mathfrak{h}_p$  dans  $\mathfrak{h}_p^\sim$ . On note  $\theta_p$  l'application déduite de  $\theta''$  par composition avec la projection sur le centre de  $\mathfrak{h}_p^\sim$  parallèlement à  $W$ . Une base sur  $\mathbb{K}_{p-1}$  de ce centre est  $(Z_0, \theta_p(l_p^2 \setminus (l_{p,2}, l_{p,3}, \dots, l_{p,p})))$ . Par substitution  $\mathbb{K}_{p-1}$ -triangulaire (et addition d'une fonction de  $\mathbb{K}_{p-1}$  considérée comme coefficient de  $Z_0 = 1$  et qui se détermine par le calcul d'une primitive d'une 1-forme fermée et polynomiale) on transforme cette base en la base  $(Z_0, q_{p,p+1}, \dots, q_{p,n+1})$  satisfaisant à 2.4. Nous donnons ici le calcul de  $q_{p,p+1}, l_{p+1,p}$  qui illustre clairement le cas général. Le corps  $\mathbb{K}_p$  est engendré par le centre de  $\mathfrak{h}_p^\sim$ ; il est donc caractéristique, d'où l'action adjointe de  $\mathfrak{g}_{p+1}$  dans  $\mathbb{K}_p$  qui se traduit par une famille de dérivations. On choisit alors  $l_{p+1,p} \in l_{p+1}^2 \setminus (l_{p+1,2}, l_{p+1,3}, \dots, l_{p+1,p-1})$  maximal tel que

$$(\ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{p+1,2}, \ell_{4,3}, \ell_{5,3}, \dots, \ell_{p+1,3}, \dots, \ell_{p,p-1}, \ell_{p+1,p-1}, \ell_{p+1,p})$$

engendre un nombre maximal de dérivations de  $\mathbb{K}_p$  qui sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{K}_p$ . Ceci équivaut à trouver aussi  $\ell_{p,p+1} \subset \ell_p^2 \setminus (\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \dots, \ell_{p,p})$  de même cardinal que  $\ell_{p+1,p}$  tel qu'avec  $q'_{p,p+1} = \vartheta_p(\ell_{p,p+1})$ , la matrice des commutateurs

$$[\ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{p+1,2}, \ell_{4,3}, \dots, \ell_{p+1,3}, \dots, \ell_{p+1,p};$$

$$q_{2,3}, q_{2,4}, \dots, q_{2,p+1}, q_{3,4}, q_{3,5}, \dots, q_{3,p+1}, \dots, q'_{p,p+1}]$$

est régulière et de rang maximal. On peut, en ajoutant une fonction appartenant à  $\mathbb{K}_{p-1}$  à l'image de  $\theta_p$ , obtenir la commutation à  $\ell_{p+1,2}, \ell_{p+1,3}, \dots, \ell_{p+1,p-1}$  (i.e. la condition 2.4.iv) et par multiplication par un élément de  $\mathbb{A}_{p-1}$  et central convenable, satisfaire aussi à 2.4.iii, d'où la définition de  $q_{p,p+1}$ .

Pour les éléments de base restants, en rajoutant une combinaison  $\mathbb{K}_{p-1}$ -linéaire de  $q_{p,p+1}$ , on peut les rendre commutant aussi à  $\ell_{p+1,p}$ , donc commutant à  $\mathfrak{g}_{p+1}$ . En calculant de nouveau une primitive, on obtient la commutation à  $\ell_{p+2,2}, \ell_{p+2,3}, \dots, \ell_{p+2,p-1}$  et ceci permet de définir comme auparavant  $\ell_{p+2,p}$  et  $q_{p,p+2}$ , etc...

## 2.7. La représentation $\pi$ et la conjecture de Gelfand et Kirillov.

Nous avons déjà sous la main le corps caractéristique  $\mathbb{K}_n = k(q_{1,n+1}, q_{2,3}, \dots, q_{2,n+1}, \dots, q_{n-1,n}, q_{n-1,n+1}, q_{n,n+1})$  et l'algèbre de Heisenberg sur  $\mathbb{K}_n$  de base  $(Z_0, q_{2,2}, \dots, q_{n,n})$  qui n'est autre que le commutant  $\tilde{\mathfrak{h}}_{n+1}$  de  $\mathbb{K}_n$  dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_n}$ .

Une base d'un supplémentaire de ce commutant  $\tilde{\mathfrak{h}}_{n+1}$  est  $(\ell_{3,2}, \ell_{4,2}, \dots, \ell_{n,2}, \ell_{4,3}, \ell_{5,3}, \dots, \ell_{n,3}, \dots, \ell_{n,n-1}) = \ell^n$  et elle détermine des dérivations de  $\mathbb{K}_n$  qui sont  $\mathbb{K}_n$ -linéairement indépendantes. Ces dérivations sont données par la matrice des commutateurs des éléments de cette base avec les éléments de la base  $(q_{2,3}, q_{2,4}, \dots, q_{2,n}, q_{3,4}, q_{3,5}, \dots, q_{3,4}, \dots, q_{n-1,n}) = q^n$ . Une diagonalisation de cette matrice permet d'obtenir une base de dérivations conjuguée à la base  $q^n$ ,

c'est-à-dire formée d'éléments  $P_i^!$  vérifiant  $[P_i^!, Q_j^!] = \delta_{i,j}$  pour  $(Q_1, \dots, Q_N) = q^n$ . On a  $P_i^! \in \mathbb{K}_n \vee \ell^n$ , mais  $[P_i^!, P_j^!] = c_{i,j}$  définit une 2-forme fermée, polynômiale (à une localisation invariante près) qui ne sera pas nulle en général. On est amené à calculer sa primitive donnée par les coefficients  $\nu_i$  tels que  $[P_i^! + \nu_i, P_j^! + \nu_j] = 0$ , et la conjecture de Gelfand et Kirillov est vérifiée avec les  $P_i = P_i^! + \nu_i$  (on peut les prendre commutant à  $(q_{2,2}, \dots, q_{n,n})$ ).

On diagonalise symplectiquement  $(q_{2,2}, \dots, q_{n,n})$  en  $(Q_{N+1}, \dots, Q_M, P_{N+1}, \dots, P_M)$  (avec  $[P_i, Q_j] = \delta_{i,j}$ ) et on peut satisfaire encore à une condition d'intégralité 2.4.iii pour les  $Q_{N+1}, \dots, Q_M$ .

Les éléments de base  $Q_1, \dots, Q_M, P_1, \dots, P_M$  et ceux provenant de  $(q_{1,n+1}, \dots, q_{n,n+1})$  qu'on écrit  $(Z_1, \dots, Z_R)$  peuvent être pris fonctions propres de l'antiautomorphisme principal avec la parité notée  $d(?)$ . La représentation  $\pi$ , dont l'antihermiticité est assurée par la présence des facteurs  $\sqrt{-1}$  s'obtient en posant

$$\begin{aligned} \pi(Q_j) &= \sqrt{-1} \frac{d(Q_j)}{x_j} \\ \pi(P_j) &= \sqrt{-1} \frac{-d(Q_j)}{\frac{\partial}{\partial x_j}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, M \\ \pi(Z_k) &= \sqrt{-1} \frac{d(Z_k)}{z_k} \quad \text{pour } k = 1, \dots, R \end{aligned}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ ,  $z = (z_1, \dots, z_R) \in \mathbb{R}^R$  sont les coordonnées et opèrent par multiplication dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{M+R}, \delta \, dx \, dz)$  où la mesure  $\delta \, dx \, dy = \delta \, dx_1 \, dx_2 \, \dots \, dx_M \, dz_1 \, dz_2 \, \dots \, dz_R$  est le produit de la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{M+R}$  par le jacobien du changement de base

$$(Z_0, Z_1, \dots, Z_R, Q_1, \dots, Q_M, P_1, \dots, P_M) \longrightarrow (Z_0, \ell)$$

qui est un invariant (donc fonction de  $Z_1, \dots, Z_R$  seulement) évalué en  $Z_i = z_i$ .

**THEOREME 1.** L'application  $\pi$  est une représentation de  $\mathcal{G}$  dans l'algèbre

$$(k(z_1, \dots, z_R) [x_1, \dots, x_M]) \vee \left\{ 1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M} \right\}$$

des opérateurs différentiels du premier ordre en  $x_1, \dots, x_M$  à coefficients polynômiaux

en  $x$  et rationnels en  $z$ . L'image de  $\pi$  est constituée d'opérateurs antihermitiens localement nilpotents tels que avec un ordre convenable de  $(Q_1, \dots, Q_M)$ , le coefficient de  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  est un polynôme en les variables  $x_\ell$  d'ordre  $\ell > k$ . A un facteur invariant non nul près,  $\pi(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$  contient les opérateurs  $\sqrt{-1} x_j$ ,  $\sqrt{-1} z_k$  et  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ .

L'ouvert  $\Omega$  est définie par la non nullité des polynômes invariants (i. e. fonctions de  $(z_1, \dots, z_R) = z$ ) qui apparaissent dans les changements de bases.

### 3. La représentation unitaire $\pi$ et la transformation de Fourier Plancherel.

Il est agréable de voir que la construction algébrique précédente suffit pour l'écriture explicite de la formule de Fourier Plancherel. Toute l'analyse harmonique qui reste à faire est immédiate.

i. On appelle  $\pi$  la représentation unitaire de  $G$  obtenue par exponentiation de  $\pi$ . Le calcul explicite d'un groupe à un paramètre  $\exp t \pi(x)$  où  $x \in \mathcal{G}$  et  $t \in \mathbb{R}$  se ramène à déterminer le groupe de déplacement sur la variété  $\Omega$  engendré par le champ de vecteur  $\delta(x)$  constitué par la partie homogène de  $\pi(x)$ . Ce déplacement se calcule explicitement et donne des fonctions polynomiales de  $x$  et de  $t$  (car on a une action nilpotente de  $\delta(x)$ ). Le terme constant  $\pi(x) - \delta(x)$  contribuera par une phase encore polynomiale en  $x$  et en  $t$  que l'on peut écrire directement par une intégrale.

La base  $\mathfrak{L}$  de  $\mathcal{G}$  détermine un paramétrage de  $G$  grâce au produit des exponentielles

$$g = g(t) = \prod_{L \in \mathfrak{L}} \exp t_L \cdot L$$

où l'ordre du produit est celui de  $\mathfrak{L}$  et  $t = (t_L)_{L \in \mathfrak{L}} \in \mathbb{R}^\ell$ . La mesure invariante de

$G$  est prise égale à  $dg = dt = \bigwedge_{L \in \mathfrak{L}} dt_L$  (notation abusive !)

et on a explicitement

$$\pi(g) = \prod_{L \in \mathfrak{L}} \exp t_L \pi(L).$$

ii. Les opérateurs  $\pi(g)$  effectuent seulement un déplacement sur la variable  $x$  et un changement de phase dépendant de  $x$  et de  $z$ . Aucun déplacement en  $z$  n'ayant lieu, on a un feuilletage immédiat de  $\Omega$  en des  $G$ -orbites  $\mathcal{O}_z$  paramétrées par la

variable  $x \in \mathbb{R}^M$  et la désintégration de la représentation  $\pi$  en des représentations  $\pi_z$  qui opèrent sur chaque orbite  $\sigma_z$  (où  $z$  paramètre  $\mathfrak{g}/G$ ). Les représentations  $\pi_z$  sont irréductibles et opèrent par un noyau intégral  $\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x})$  où  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^M$  dont on peut donner l'expression explicite. Comme  $\pi_z(g)$  opère sur  $\sigma_z$  par un déplacement  $\gamma_g$  et un changement de phase, ce noyau comporte une mesure de Dirac  $\delta(\gamma_g x - \tilde{x})$  et une phase.

PROPOSITION. Pour tout  $(z, x, \tilde{x})$  fixé,  $\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x})$  est une distribution sur  $G$  (qui est en fait une mesure) fonction propre à gauche et à droite pour  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{n+1}$ . Notant  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  les représentations canoniques de  $\mathfrak{g}$  (et de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ) en des champs de vecteurs invariants à gauche et en des champs de vecteurs invariants à droite sur  $G$ , on a pour tout  $L \in \mathfrak{g}$

$$\mathcal{R}(L)\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x}) = \mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x}) \pi(L)^t$$

$$\mathcal{L}(L)\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x}) = \pi(L)\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x})$$

où  $\pi(L)^t$  opère sur les variables  $\tilde{x}$  et  $\pi(L)$  opère sur les variables  $x$ . En particulier, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on a  $\mathcal{L}(A)\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x}) = \pi(A)\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x})$  où  $\pi(A)$  est une fonction de  $z$  et de  $x$ .

Pour toute fonction  $\varphi$ ,  $C^\infty$  à support compact sur  $G$ , l'opérateur  $\pi_z(\varphi) = \int_G \pi_z(g) \varphi(g) dg$  agit par un noyau intégral

$$\mathcal{K}_z(\varphi; x; \tilde{x}) = \int_G \mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x}) \varphi(g) dg$$

et la proposition précédente, après des intégrations par parties identiques à celles utilisées en analyse de Fourier commutative, permet de conclure que

$\mathcal{K}_z(\varphi; x; \tilde{x})$  est  $C^\infty$  (grâce au support compact de  $\varphi$ )

$\mathcal{K}_z(\varphi; x; \tilde{x})$  est à décroissance rapide en  $x, \tilde{x}$  à  $z$  fixé (grâce au caractère  $C^\infty$  de  $\varphi$ ).

On a aussi la propriété de différentiabilité à tous les ordres en  $z$ .

Des propriétés précédentes, on conclut que  $\pi_z(\varphi)$  est traçable avec sa trace donnée par une intégrale diagonale en  $x$  qui est convergente. L'évaluation de cette

intégrale se fait sans difficulté aucune par un résultat facile d'inversion de Fourier commutative et lorsque l'on effectue les intégrations restantes en  $z$ , on peut encore appliquer une formule d'inversion de Fourier pour retrouver la valeur en l'élément neutre de  $\varphi$ . Tous ces résultats se regroupent en le théorème 2 qui suit.

THEOREME 2. ( $G$  nilpotent connexe et simplement connexe sur  $\mathbb{R}$ ).

1. La représentation  $\pi$  se désintègre en représentations unitaires continues et irréductibles  $\pi_z$  dans les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_z = L^2(\mathbb{R}^M, n \, dx)$  suivant les formules

$$\mathcal{H} = \int_{z \in \mathbb{R}^R}^{\oplus} \mathcal{H}_z \, \delta \, dz$$

$$\pi = \int_{z \in \mathbb{R}^R}^{\oplus} \pi_z \, \delta \, dz.$$

2. Les représentations  $\pi_z$  (pour  $(z, x) \in \Omega$ ) sont irréductibles et pour toute fonction  $\varphi$ ,  $C^\infty$  à support compact  $\pi_z(\varphi)$  opère par un noyau  $\mathcal{K}_z(\varphi; x; \tilde{x})$  qui est  $C^\infty$  à décroissance rapide en  $x$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^M$ . L'opérateur  $\pi_z(\varphi)$  est donc traçable et sa trace est

$$\text{Tr } \pi_z(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{K}_z(\varphi; x; x) \, dx.$$

3. On a la formule de Fourier-Plancherel pour  $G$  :

$$(2\pi)^{M+R} \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^R} \delta \, dz \, \text{Tr } \pi_z(\varphi)$$

où  $\varphi(0)$  est la valeur de  $\varphi$  à l'élément neutre de  $G$  noté  $\sigma$ .

En terme des distributions propres  $\mathcal{K}_z(g; x; \tilde{x})$ , on a donc déterminé une famille complète au sens  $L^2$  puisque l'on peut faire une décomposition de toute fonction  $\varphi$   $C^\infty$  à support compact sur cette famille (i.e. calculer  $\mathcal{K}_z(\varphi; x; \tilde{x})$ ) et ne pas "perdre de la norme  $L^2$  pour  $\varphi$ ".

4. Application au groupe unipotent  $G$  des matrices triangulaires supérieures  $5 \times 5$ .

Algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . La base choisie est formée des unités matricielles  $X_{i,j}$  avec  $0 < i < j \leq 5$  et elles vérifient

$$[X_{i,j}, X_{k,\ell}] = \delta_{j,k} X_{i,\ell} - \delta_{i,\ell} X_{k,j}$$

$\mathfrak{g}$  est de dimension et de degré de nilpotence  $n = 4$ .

Les générateurs algébriques sont écrits en des blocs du type  $q_{p,j}$  dans le tableau suivant

	j=2	j=3	j=4	j=5
p=1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$Z_1 = X_{1,5}$
p=2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} Q_1 = X_{1,4} \\ Q_2 = X_{2,5} \end{cases}$	$\emptyset$
p=3	$\emptyset$	$\begin{cases} Q_3 = X_{1,3} \\ Z_1 P_3 = -X_{3,5} \end{cases}$	$\emptyset$	$Z_2 = X_{2,4} X_{1,5} - X_{1,4} X_{2,5}$
p=4	$\begin{cases} Z_1 P_2 = X_{1,2} \\ Z_1 P_1 = -X_{4,5} \end{cases}$	$\emptyset$	$\begin{cases} Q_4 = X_{1,5} X_{2,3} - X_{2,5} X_{1,3} \\ Z_1 Z_2 P_4 = -X_{1,5} X_{3,4} + X_{1,4} X_{3,5} \end{cases}$	$\emptyset$

La représentation  $\pi$  est, avec  $z = (z_1, z_2)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$X_{1,5} \rightarrow iz_1 \quad ; \quad X_{1,4} \rightarrow ix_1 \quad ; \quad X_{2,5} \rightarrow ix_2 \quad ; \quad X_{1,3} \rightarrow ix_3$$

$$X_{2,4} \rightarrow \frac{i}{z_1} (z_2 + x_1 x_2) \quad ; \quad X_{2,3} \rightarrow \frac{i}{z_1} (x_4 + x_2 x_3) \quad ; \quad X_{3,5} \rightarrow -z_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_{1,2} \rightarrow z_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad ; \quad X_{4,5} \rightarrow -z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad ; \quad X_{3,4} \rightarrow z_2 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Paramétrage de  $G$  :  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4$  ,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$g = g(\alpha, \beta, \gamma) = \exp \alpha_1 X_{1,5} \exp \alpha_2 X_{2,4} \exp \beta_1 X_{1,4} \exp \beta_2 X_{2,5} \\ \exp \beta_3 X_{1,3} \exp \beta_4 X_{2,3} \exp \gamma_4 X_{3,4} \exp \gamma_3 X_{3,5} \exp \gamma_2 X_{1,2} \exp \gamma_1 X_{4,5} .$$

La représentation  $\pi$  de  $G$ .

$$\pi(g) = \pi(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 \frac{z_2 + x_1 x_2}{z_1} + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 \frac{x_4 + x_2 x_3}{z_1})}$$

$$T_{x_4}(\gamma_4 z_2) T_{x_3}(\gamma_4 x_1) T_{x_3}(-\gamma_3 z_1) T_{x_2}(\gamma_2 z_1) T_{x_1}(-\gamma_1 z_1)$$

où les opérateurs  $T_{x_i}(\gamma)$  opèrent par translation  $x_i \rightarrow x_i + \gamma$  sur la composante  $x_i$  de l'argument  $x$  de la fonction  $f(x)$  qui est de carré sommable en  $x$ .

Si  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact sur  $G$ , l'opérateur  $\pi(\varphi)$  est donné par

$$\begin{aligned} \pi(\varphi) f(z, x) &= \int e^{i(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 \frac{z_2 + x_1 x_2}{z_1} + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 \frac{x_4 + x_2 x_3}{z_1})} \\ &\varphi(\alpha, \beta, \gamma) f(z, x_1 - \gamma_1 z_1, x_2 + \gamma_2 z_1, x_3 - \gamma_3 z_1 + \gamma_4 x_1, x_4 + \gamma_4 z_2) d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \int \varphi(\hat{z}_1, \widehat{\frac{z_2 + x_1 x_2}{z_1}}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \widehat{\frac{x_4 + x_2 x_3}{z_1}}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \\ &\quad f(z, x_1 - \gamma_1 z_1, x_2 + \gamma_2 z_1, x_3 - \gamma_3 z_1 + \gamma_4 x_1, x_4 + \gamma_4 z_2) d\gamma \\ &= \int \varphi(\hat{z}_1, \widehat{\frac{z_2 + x_1 x_2}{z_1}}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \widehat{\frac{x_4 + x_2 x_3}{z_1}}, \frac{x_1 - \tilde{x}_1}{z_1}, \frac{x_2 - \tilde{x}_2}{z_1}, \\ &\quad \frac{x_3 - \tilde{x}_3}{z_1} + x_1 \frac{\tilde{x}_4 - x_4}{z_1 z_2}, \frac{\tilde{x}_4 - x_4}{z_2}) f(z, \tilde{x}) \frac{1}{|z_1^3 z_2|} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Dans ces formules,  $z = (z_1, z_2)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ , les variables  $x_i$  et  $\tilde{x}_i$  varient dans  $\mathbf{R}$  tout entier et  $z_i$  dans  $\mathbf{R}^*$ . A  $z$  fixé, on a la représentation irréductible  $\pi_z$  de  $G$  qui agit dans  $L^2(\mathbf{R}^4, dx) = \mathcal{H}_z$  et  $\pi_z(\varphi)$  a pour noyau

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z(\varphi; x; \tilde{x}) &= \frac{1}{|z_1^3 z_2|} \varphi(\hat{z}_1, \widehat{\frac{z_2 + x_1 x_2}{z_1}}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \widehat{\frac{x_4 + x_2 x_3}{z_1}}, \frac{x_1 - \tilde{x}_1}{z_1}, \frac{x_2 - \tilde{x}_2}{z_1}, \\ &\quad \frac{x_3 - \tilde{x}_3}{z_1} + x_1 \frac{\tilde{x}_4 - x_4}{z_1 z_2}, \frac{\tilde{x}_4 - x_4}{z_2}) \end{aligned}$$

où la présence du chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  signifie qu'une transformation de Fourier partielle sur la variable coiffée a été effectuée et que la fonction obtenue est évaluée à l'argument qui figure dans cette case. Le noyau est  $C^\infty$  à décroissance rapide en  $x, \tilde{x}$  lorsque  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ . A  $x$  fixé, le support est même compact en  $\tilde{x}$ . On passe de la base des générateurs  $P_j, Q_j$  et  $Z_k$  à la base des  $X_{i,j}$  par une substitution triangulaire de jacobien  $\delta = |z_1 z_2|$ .

L'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^6, \delta \, dx \, dz)$  a la décomposition directe

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \mathcal{H}_z \, \delta \, dz$$

et la représentation  $\pi$  se désintègre en représentations  $\pi_z$  qui opèrent dans chacun des sous-espaces  $\mathcal{H}_z$ .

La formule de Fourier Plancherel s'écrit

$$(2\pi)^6 \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr } \pi_z(\varphi) \, \delta \, dz = \int_{\mathbb{R}^6} z_1^{-2} \varphi(\hat{z}_1, \frac{\hat{z}_2 + \hat{x}_1 x_3}{z_1}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \frac{\hat{x}_4 + \hat{x}_2 x_3}{z_1}, 0, 0, 0, 0) \, dz \, dx$$

## Références

- [1] DIXMIER, J. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 325-355.  
ibid 87 (1959), 65-79.  
Can. J. Math. 10 (1958), 321-348.  
ibid 111 (1959), 321-344.
- [2] KIRILLOV, A. A. Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Usp. Mat. Nauk 17 (1962), 57-110.
- [3] PUKANSZKY, L. Leçons sur les représentations des groupes. Paris, Dunod (1967) (Monographies de la Soc. Math. France).
- [4] NGHIEM XUAN HAI A paraître.
- [5] \_\_\_\_\_ Construction analytique de la transformation de Fourier Plancherel des groupes de Lie. Cours de 3ème cycle, Orsay 1978-1979. Publ. Math. Orsay 79-06.
- [6] \_\_\_\_\_ Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand et Kirillov. Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 241-267.

No. d'impression 466  
4ème trimestre 1980

