

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91-ORSAY (FRANCE)

N° 25

MAURICE HOLT

LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES  
DE DYNAMIQUE DES FLUIDES

Notes de Cours rédigées par J.J. CHATTOT

## PREFACE

Ces notes représentent un sommaire d'un cours que l'auteur a fait en Mathématiques à l'Université de PARIS XI (Orsay) pendant le deuxième semestre de l'année Universitaire 1971-1972. Je voudrais remercier M. Le Professeur Roger TEMAM qui m'a invité à Orsay, M. Jean Jacques CHATTOT, qui a rédigé les notes et Mme CARTIER qui les a tapé avec grand soin.

Maurice HOLT

le 28 juin 1972

## INTRODUCTION

Le sujet de ce cours est l'application des méthodes numériques aux problèmes de dynamique de fluides. La dynamique des fluides a une histoire très longue, puisque des études générales dans ce domaine sont réalisées depuis plus de deux siècles par les mathématiciens et ingénieurs de l'Europe, en particulier de France, d'Angleterre, d'Allemagne et de Russie.

Les premières recherches sur ce sujet s'attaquaient principalement aux problèmes des écoulements dans l'eau ou dans l'atmosphère à basse vitesse. On peut alors supposer, soit que la masse spécifique est constante partout dans le fluide, soit de façon plus générale, que cette quantité, attachée à chaque élément du fluide, reste constante au cours du mouvement. En utilisant cette simplification et, en même temps, en négligeant les effets de viscosité, les équations du mouvement se réduisent à l'équation de Laplace pour le potentiel de vitesse. Par conséquent si nous nous restreignons aux problèmes dans lesquelles la forme des frontières est assez simple, nous pouvons résoudre de tels problèmes par les méthodes classiques de l'analyse mathématique.

Au milieu du dixneuvième siècle, quelques chercheurs (notamment Riemann) essayent de calculer l'écoulement dans un canon après la mise à feu de la charge. Dans ce cas, on ne peut plus considérer que la masse spécifique du gaz explosif à l'intérieur du canon est constante et les équations du mouvement ne sont plus linéaires. Cependant Riemann a remarqué, dans le cas du mouvement unidimensionnel, on peut ramener ces équations à une forme linéaire par changement de variables.

Avec les vitesses croissantes des avions, on ne peut négliger les variations de la masse spécifique et on ne peut plus regarder l'équation de Laplace comme une bonne approximation des équations du mouvement. D'ailleurs il y a beaucoup de problèmes pour lesquels l'influence de la viscosité est très importante ; si on tient compte de cet effet, les équations

.../...

du mouvement contiennent des dérivées du deuxième ordre et les équations ne sont plus linéaires.

En effet, aujourd'hui, la majorité des problèmes de dynamique des fluides sont non linéaires et ne peuvent être résolus que par des méthodes numériques. Pendant les dernières années, les spécialistes de dynamique des fluides ont consacré, de plus en plus d'attention à ces méthodes. Naturellement il n'est pas utile de découvrir une nouvelle méthode numérique si l'on ne peut l'appliquer aux problèmes actuels. Au moment des premières recherches sur ces méthodes, les possibilités des machines à calculer étaient trop limitées pour permettre d'effectuer beaucoup d'applications. Aujourd'hui la situation a changée ; les machines actuelles sont assez puissantes pour permettre de traiter tous les problèmes qui se présentent, et il suffit de découvrir des méthodes efficaces.

Tandis que les machines à calculer ont été construites et développées surtout aux Etats Unis, les recherches numériques pour les problèmes de dynamique des fluides étaient faites principalement en Union Soviétique. On peut diviser ces méthodes en deux catégories : dans la première on utilise uniquement une méthode aux différences finies et dans la deuxième catégorie on réduit le nombre des variables indépendantes en supposant que les inconnues sont fonctions polynômes ou trigonométriques de l'une de ces variables.

Nous nous intéressons aux problèmes de dynamique des gaz. Dans beaucoup de ces problèmes, la viscosité n'intervient pas et les équations du mouvement se réduisent à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Si le problème est instationnaire, ce système est toujours hyperbolique. Si le problème est stationnaire le type du système dépend de la valeur de la vitesse du fluide. Si celle-ci est supérieure à la vitesse du son le système est hyperbolique sinon il est elliptique. Ainsi les problèmes de dynamique des gaz sont de trois types : premièrement elliptiques ce qui correspond aux basses vitesses ; deuxièmement hyperbolique quand la vitesse est supersonique partout ; et finalement du type mixte quand la vitesse prend une valeur subsonique dans une région, et une valeur super-

.../...



sonique dans une autre. Dans le cas des méthodes aux différences finies que nous discuterons dans ce cours, on regarde l'écoulement stationnaire comme un écoulement non stationnaire. Donc en décrivant ces méthodes, nous ne résoudrons que des systèmes hyperboliques.

Nous allons décrire deux méthodes aux différences finies. La première est la méthode de GODUNOV qu'il présenta il y a environ dix ans. La deuxième plus récente, nous l'appellerons la méthode de RUSANOV ; cependant il faut rappeler que trois autres mathématiciens l'ont aidé pour sa mise au point. Le véritable fondement de ces deux méthodes est la méthode des caractéristiques. En principe, on pourrait résoudre tous les problèmes instationnaires de dynamique des gaz par cette méthode, et actuellement il y a quelques chercheurs qui emploient exclusivement cette méthode. Mais cette méthode ne se prête pas facilement aux calculs sur machines. La difficulté principale de la méthode réside dans le fait que le système des coordonnées caractéristiques n'est pas rectangulaire mais curviligne et souvent l'angle entre deux lignes de familles opposées est très petit. Naturellement il est préférable d'utiliser un système de coordonnées rectangulaires si cela est possible.

Le point de départ de la méthode de GODUNOV est la solution du problème du mouvement d'un piston que l'on pousse dans un cylindre. C'est un problème classique ; quand la vitesse du piston est constante la solution est bien connue : une onde de choc se propage dans le gaz, précède le piston avec une vitesse plus grande mais également constante. La valeur de cette vitesse est donnée par une formule. Quand la trajectoire du piston est non uniforme on sait résoudre le problème par une méthode des caractéristiques et des invariants de RIEMANN.

GODUNOV propose de résoudre ce problème comme suit : on divise la région entre la surface du piston et l'onde de choc au nombre de cellules de longueur assez petite (en général les longueurs de toutes ces cellules sont égales). Si la distribution de vitesse le long du cylindre est donnée à un instant, on peut calculer la valeur moyenne de la vitesse (et également des autres variables dépendantes) dans chaque cellule. On remplace la distribution réelle

par une réponse de valeurs constantes, une par cellule. Donc à travers la frontière entre deux cellules voisines les valeurs de la vitesse, la pression et la masse spécifique sont en général discontinues. Pour calculer les valeurs correspondantes un instant plus tard, il faut résoudre un problème de cassure d'un diaphragme. C'est un problème classique et les valeurs sont données par des formules bien établies. Ainsi, à l'instant suivant, on connaît les variables dépendantes sur chaque frontière limitant une cellule comme moyennes des valeurs à ces frontières. De cette façon, GODUNOV continue pas à pas.

Pour résoudre un problème plus général, par exemple, celui de l'écoulement d'un gaz autour d'un cylindre, on divise le champ d'écoulement en tranches dont les frontières sont parallèles à l'axe de symétrie. L'épaisseur des tranches est constante et on traite chaque tranche comme une tuyère unidimensionnelle. Cependant il faut considérer maintenant la cassure d'un diaphragme entre deux cellules consécutives. La méthode est très subtile et très importante.

La méthode de RUSANOV est purement une méthode aux différences finies. Il introduit trois variables indépendantes ; le temps (ou une variable spatiale qui joue le rôle du temps) et deux coordonnées. Pour faire progresser le calcul dans le temps, il faut lier les valeurs dans les deux plans à temps constants par certaines relations aux différences finies le long des lignes caractéristiques. RUSANOV remplace ces relations par celles qui courent dans les directions du temps et des coordonnées. En plus, une partie importante du calcul est la détermination de la forme de l'onde de choc qui entoure le corps donné. Pour cela, il faut lier les conditions aux limites à la paroi à celles de l'onde de choc. La méthode que RUSANOV et ses collaborateurs ont proposé est particulièrement ingénieuse. C'est un prolongement de la méthode de double balayage proposée par GELFAND et LOKUTSIEVSKI.

Dans la deuxième catégorie, nous allons discuter deux méthodes, la méthode des relations intégrales et celle de TELENIN. La première méthode a été développée par DORODNITSYN au Centre de Calcul de Moscou.

.../...

En 1950, il a proposé une méthode pour résoudre le problème de l'écoulement stationnaire d'un gaz autour d'un corps émoussé à grande vitesse. L'application de cette méthode par BELOTSEKOVSKII a donné la première solution du problème de la rentrée d'un véhicule spatial dans l'atmosphère. A partir de 1960, DORODNITSYN a généralisé sa méthode par l'application aux problèmes visqueux, en particulier aux problèmes de la couche limite et du sillage. Aux ETATS UNIS, nous avons beaucoup utilisé cette méthode et je vous montrerai plusieurs exemples intéressants. La méthode consiste à écrire les équations du mouvement sous forme divergente puis à intégrer les équations par rapport à l'une des variables indépendantes d'un bout à l'autre du champ de l'écoulement. Pour calculer les intervalles, on suppose que les intégrands sont des fonctions polynomiales ou trigonométriques de la variable d'intégration. Ces fonctions contiennent des coefficients inconnus. Pour l'écoulement en deux dimensions la méthode conduit à un système d'équations différentielles ordinaires pour ces coefficients.

La méthode de TELENIN est plus récente. A nouveau on représente les inconnues comme fonctions polynomiales ou trigonométriques de l'une des variables mais il n'est plus nécessaire d'intégrer les équations par rapport à cette variable. TELENIN et ses collaborateurs ont appliqué la méthode au problème de l'écoulement supersonique autour d'un corps émoussé en deux ou trois dimensions. A BERKELEY, NDEFO et HOLT ont résolu le problème de l'écoulement supersonique autour d'un cône circulaire avec angle d'attaque. Finalement CHATTOT a développé la méthode de TELENIN dans le plan hodographique pour résoudre le problème de l'écoulement transonique autour d'un losange en deux dimensions.

En fin de cours nous exposerons quelques applications de la méthode des pas fractionnaires. Cette méthode a été introduite originalement par PEACEMAN, RACHFORD et DOUGLAS. Pour généraliser la méthode, et pour ses applications aux problèmes de Dynamique des Fluides, YANENKO et ses collaborateurs à NOVOSIBIRSK et LIONS, TEMAM en FRANCE, ont développé la méthode. La méthode est très efficace pour les problèmes des équations de NAVIER-STOKES et les problèmes hydrodynamiques avec une frontière libre (ondes de surfaces par exemple.).

## 2. IDEES FONDAMENTALES

### Quelques remarques sur la stabilité

Quand on utilise une méthode aux différences finies pour obtenir une solution des équations aux dérivées partielles, il faut s'assurer que les conditions de stabilité soient satisfaites.

L'importance de la propriété de stabilité est bien illustrée par RICHTMYER et MORTON, en considérant l'équation de la chaleur à une dimension.

Ils posent le problème suivant :

Trouver la solution de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(où  $\sigma$  est constante,  $x$  est dans l'intervalle  $(0, \pi)$   $t$  est le temps et  $u$  est la température) qui satisfait à la condition initiale

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 < x < \pi$$

et aux conditions limites

$$(3) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(\pi, t) &= 0 \end{aligned} \quad t > 0$$

Pour simplifier le calcul prenons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Cx & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ &= C(\pi-x) & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{aligned}$$

La solution exacte, qui est obtenue en utilisant une série de Fourier, est la suivante

$$(4) \quad u(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{(imx - m\sigma^2 t)}$$

.../...



où  $A_m = 0$   $m$  pair

$$(5) \quad = \frac{2 i C}{nm^2} (-1)^{\frac{(m+1)}{2}} \quad m \text{ impair}$$

Maintenant, RICHTMYER et MORTON résolvent le même problème par une méthode aux différences finies. Ils divisent l'intervalle  $(0, \pi)$  en  $J$  parties, chacune égale à  $\Delta x$ , et ils introduisent l'incrément du temps  $\Delta t$  tel que  $t = n\Delta t$ . Nous appelons "maillage" le groupe des points de coordonnées  $(j\Delta x, n\Delta t)$ . La valeur approximative de  $u$  au point  $(j\Delta x, n\Delta t)$  est dénotée par  $u_j^n$ .

Nous remplaçons la dérivée par rapport au temps dans l'éq. (1) par un rapport aux différences simple. Nous représentons le deuxième membre par une formule générale du deuxième ordre et nous arrivons à l'équation aux différences suivantes:

$$(6) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{\theta(\partial^2 u)_j^{n+1} + (1-\theta)(\partial^2 u)_j^n}{(\Delta x)^2}$$

où  $0 < \theta < 1$  et

$$(7) \quad (\partial^2 u)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

On peut démontrer facilement que la solution de l'éq. (6) qui satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} u_0^n &= 0 \\ u_J^n &= 0 \\ &\text{et} \\ u_j^0 &= \varphi(j\Delta x) \quad j = 0, 1, \dots, J \end{aligned}$$

est la suivante

$$(8) \quad u_j^n = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{imj\Delta x} [\xi(m)]^n$$

où

$$(9) \quad \xi(m) = \frac{1 - (1-\theta)L(1 - \cos m \Delta x)}{1 + \theta L(1 - \cos m \Delta x)}$$

et 
$$L = 2 \sigma \Delta t / (\Delta x)^2$$

Pour assurer que le schéma (6) soit stable nous demandons que

$|u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)|$  ne croît pas quand  $n \rightarrow \infty$  à tous points du maillage  
 Pour satisfaire à cette condition

$$(10) \quad \frac{2 \sigma \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{1 - 2\theta} \quad \text{si } 0 < \theta < \frac{1}{2}$$

et 
$$\frac{2 \sigma \Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{valeur quelconque si } \frac{1}{2} < \theta < 1 .$$

si  $\theta = 0$  l'inconnue n'intervient pas au deuxième membre de l'eq. (6) et nous appelons le schéma (6) explicite. En revanche si  $\theta \neq 0$  le schéma (6) s'appelle implicite et le calcul de  $u_j^{n+1}$  est plus compliqué.

Remarquons que le schéma explicite est stable seulement si  $\sigma \Delta t / (\Delta x)^2 < \frac{1}{2}$ ; ainsi il faut utiliser un pas de temps très petit et on demande un long temps à la machine pour faire le calcul. En revanche on peut employer un pas de temps plus grand dans un schéma implicite; si  $\theta > \frac{1}{2}$  ce schéma est toujours stable.

Si possible, il est préférable à utiliser les schémas implicites quand on veut résoudre numériquement les équations du mouvement en dynamique des fluides.

La convergence

Selon le théorème de LAX un schéma stable est aussi convergent en général. Dans le problème ci-dessus la condition de la convergence est que :

$$|u_j^n - u(j\Delta t, n\Delta t)| \rightarrow 0$$

quand  $\Delta t \rightarrow 0$  ,  $\Delta x \rightarrow 0$

L'erreur et la précision

la différence  $|u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)|$  est l'erreur de l'approximation. La précision d'un schéma dépend de l'ordre de magnitude de l'erreur. Par exemple si  $\Delta x = k$  ,  $\Delta t = k$  et  $|u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)| = O(h^2 + k^2)$  nous constatons que le schéma est du deuxième ordre de précision.

La méthode de caractéristiques

Pour comprendre la méthode de GODUNOV (ou celle de RUSANOV) il faut rappeler les propriétés principales des lignes caractéristiques d'un système hyperbolique des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Tout d'abord nous considérons le système simplifié

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + -u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ces équations correspondent à l'écoulement unidimensionnel d'un gaz dans une tuyère quand l'entropie est une constante partout et la pression est une fonction de la masse spécifique uniquement.

Ainsi

$$(13) \quad p = p(\rho)$$

Nous introduisons une nouvelle variable indépendante

$$\sigma = \int \frac{dp}{\rho a} \quad \text{et la vitesse du son} \quad a = \frac{dp}{d\rho}$$

(pour un gaz parfait (polytrophe)  $\rho = k\rho^\gamma$   
 $\sigma = \frac{2}{\gamma-1} a$

où  $a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$

Maintenant les équations sont écrites sous la forme

$$(14) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$(15) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Si nous additionnons les équations (14 + 15) et soustrayons l'équation (15) de l'équation (14) nous obtenons :

$$(16) \frac{\partial(u + \sigma)}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial}{\partial x}(u + \sigma) = 0$$

L'équation (16) exprime les faits suivants :

Le long des lignes  $\frac{dx}{dt} = u + a$

La variable  $u + \sigma = \text{constante}$  ou  $d(u + \sigma) = 0$

Le long des lignes  $\frac{du}{dt} = u - a$

La variable  $u - \sigma = \text{constante}$  où  $d(u - \sigma) = 0$

Notons que chaque équation contient seulement les dérivées le long des lignes, les dérivées dans la direction normale aux lignes sont absentes. Par conséquent, on peut satisfaire ces équations même si les dérivées normales sont discontinues.

Nous appelons les lignes avec ces propriétés les lignes caractéristiques ou les caractéristiques .

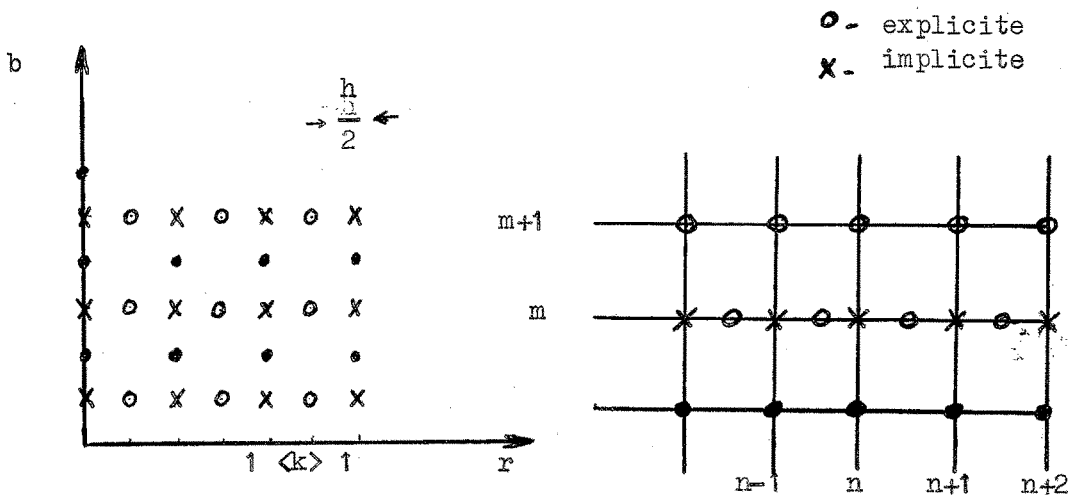


Schéma nouveau de GODUNOV ET al

Tout d'abord considérons l'équation modèle

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

dans le domaine rectangulaire ci-dessus représenté.

Nous dénotons  $u(t, r) = u(m\tau, nh)$  par  $u_n^m$ .

Supposons que les valeurs de  $u_n^m$  soient connues pour tout  $n$ .

Nous écrivons les équations pour déterminer  $u_n^{m+1}$ .

Tout d'abord nous calculons la quantité  $u_n^{m+1/2}$  au temps  $t = (m + \frac{1}{2})\tau$

en utilisant l'équation aux différences

$$(2) \quad \frac{u_n^{m+1/2} - u_n^m}{\tau/2} + A \frac{u_{n+1}^{m+1/2} - u_{n-1}^{m+1/2}}{2h} = 0$$

(formule implicite)

Ensuite nous calculons  $u_{n+1/2}^{m+1/2}$  par interpolation

$$(3) \quad u_{n+1/2}^{m+1/2} = (1-\alpha) \frac{u_{n+1}^{m+1/2} + u_n^{m+1/2}}{2} + \alpha \frac{u_{n+2}^{m+1/2} + u_{n-1}^{m+1/2}}{2}$$

En général  $\alpha = 0.25$

Pour calculer  $u_n^{m+1}$  au temps  $t = (m+1)\tau$  nous utilisons

$$(4) \quad \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} + A \frac{u_{n+1/2}^{m+1/2} + u_{n-1/2}^{m+1/2}}{h} = 0$$

(formule explicite)

La combinaison des formules (2) et (4) détermine la valeur  $u_n^{m+1}$  avec une

précision du deuxième ordre  $\tau^2$ ,  $h^2$

Le schéma est stable pour toutes valeurs du rapport  $\tau/h$  si  $0 < \alpha < 0.25$

C'est un schéma prédicteur-correcteur.

Nous appliquons ce schéma aux équations du mouvement d'un fluide.

Pour commencer, nous écrivons les équations de dynamique de gaz sous la forme :

$$(5) \quad \frac{\partial[\rho Q(r)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u Q(r)]}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial[\rho u Q(r)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u^2 Q(r)]}{\partial r} + \frac{\partial[p Q(r)]}{\partial r} = \rho Q'(r)$$

$$\frac{\partial[\rho(\frac{u^2}{2} + E) Q(r)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(E + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}) Q(r)]}{\partial r} = 0$$

$\rho$  masse spécifique

$u$  vitesse du fluide

$p$  pression

$E$  Energie interne

$p, \rho, E$  sont liées par l'équation d'état

$$(6) \quad p = p(\rho, E)$$

Si nous regardons le mouvement unidimensionnel comme celui qui se produirait dans un tube de section variable  $Q$  est proportionnel à l'aire d'un secteur croissant du tube.

$$Q(r) = 1 \quad \text{symétrie plane}$$

$$Q(r) = r \quad \text{symétrie cylindrique}$$

$$Q(r) = r^2 \quad \text{symétrie sphérique}$$

Nous utilisons aussi la forme suivante de ces équations

$$(7) \quad \left( -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u+a) \left( -\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -ua \frac{Q'(r)}{Q(r)}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u-a) \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = ua \frac{Q'(r)}{Q(r)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$



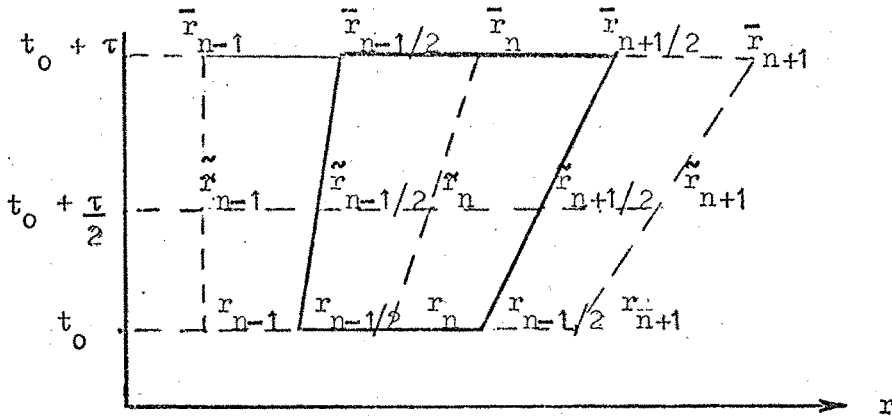
S est l'entropie

$$dE - pd\rho/\rho^2 = TdS$$

a vitesse du son

Les équations (7) sont écrites sous la forme caractéristique.

Nous intégrons les équations (7) le long des lignes d'un maillage mobile



Comme le montre la figure, nous considérons trois niveaux : le niveau initial  $t=t_0$ , le niveau intermédiaire  $t=t_0 + \frac{\tau}{2}$  et le niveau final  $t=t_0 + \tau$ .

Nous divisons chaque niveau en segments égaux.

Nous dénotons les points au niveau initial par  $r_{n-1}, r_n, r_{n+1}$ , au niveau intermédiaire par  $\tilde{r}_{n-1}, \tilde{r}_n, \tilde{r}_{n+1}$  et au niveau final par  $\bar{r}_{n-1}, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}$ .

La valeur de  $\tilde{r}_n$  est déterminée par la formule

$$\tilde{r}_n = \frac{r_n + \bar{r}_n}{2}$$

Pour écrire le schéma aux différences au niveau intermédiaire, nous utilisons les variables auxiliaires

$$\mu = \mu(u) \quad \pi = \pi(p) \quad \sigma = \sigma(S)$$

Evidemment  $\mu = u$  mais  $\pi$  et  $\sigma$  restent à choisir.

Après le changement des variables la première des équations (7)

s'écrit :

$$(8) \quad \left(-\frac{\partial \mu}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \pi}{\partial t}\right) + (u+a)\left(-\frac{\partial \mu}{\partial r} + \lambda \frac{\partial \pi}{\partial r}\right) = -\mu'(u) u.$$

où 
$$\lambda = \mu'(u) / \pi'(p)\rho c.$$

Nous choisissons le schéma aux différences pour calculer à  $\tilde{r}_{n-1}, \tilde{r}_n, \tilde{r}_{n+1}$  comme il suit

$$(9) \quad c_n(\tilde{\mu}_{n+1} - \tilde{\mu}_{n-1}) + \lambda_n c_n(\tilde{\pi}_{n+1} - \tilde{\pi}_{n-1}) + \tilde{\mu}_n + \lambda_n \tilde{\pi}_n = f_n$$

où  $\tilde{u}_n = \mu(\tilde{u}_n) = \mu [u(t_0 + \frac{\pi}{2}, \tilde{r}_n)]$

$\tilde{\pi}_n = \pi(\tilde{p}_n) = \pi [p(t_0 + \frac{\pi}{2}, \tilde{r}_n)]$

$f_n = -\mu_n^1 u_n a_n \frac{Q_n^1}{Q_n} \frac{\pi}{2} + \mu_u + \lambda_u \pi_u$

$c_n = \frac{\frac{\pi}{2}(u_n + a_n) + r_n - \tilde{r}_n}{(\tilde{r}_{n+1} - \tilde{r}_{n-1})k}$  le paramètre k est introduit pour calculer les conditions sur un choc

Les valeurs  $\mu_n$  etc., correspondent à l'instant initial (t=t<sub>0</sub>)

Si nous supposons que Q = constante et λ = constante en écri-

vant  $\mu + \lambda\pi = Z$ , notre schéma coïncide avec le schéma pour l'équation

$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ . Puisque nous utilisons un maillage mobile il faut

remplacer l'expression

$c_n = \frac{\frac{\pi}{2}(u_n + a_n)}{(\tilde{r}_{n+1} - \tilde{r}_{n-1})}$

par l'expression

$c_n = \frac{-\frac{\pi}{2}(u_n + a_n) + r_n - \tilde{r}_n}{(\tilde{r}_{n+1} - \tilde{r}_{n-1})k}$   
 (( $\frac{r_n - \tilde{r}_n}{\tau/2}$ ) est la vitesse du maillage mobile.)

On peut interpréter cette équation comme suit. Si nous considérons

le coefficient (u+a) comme une constante et la variable z est comparable

à une fonction de RIEMANN. Nous appliquons un schéma analogue aux autres

équations (7) (le long des caractéristiques négatives et les trajectoires

des particules, respectivement). De cette façon, nous obtenons trois équations

aux différences dont l'équation (9) est typique. Les trois équations

peuvent être écrites sous la forme matricielle

(10)  $A \tilde{U}_{n,n+1} + B \tilde{U}_{n,n} + C \tilde{U}_{n,n-1} = G_n$

où les coefficients sont fonctions des valeurs au niveau initial et des coordonnées données.

Dans l'équation (10)  $2 \leq n \leq N-1$ . Donc cette équation représente

N-2 conditions pour déterminer N inconnues. Les conditions qui manquent

sont les conditions limites ; elles sont satisfaites aux frontières à

gauche et à droite à chaque niveau.

Nous résolvons ces équations, conditions aux limites comprises par la méthode de double balayage.

Après avoir calculé les valeurs des inconnues aux points entiers nous déterminons les valeurs aux points  $n$  par interpolation linéaire (voir Eq. (3)).

Pour calculer les valeurs au niveau final ( le pas correcteur) nous utilisons les équations dans la forme intégrale

$$\begin{aligned} \oint (\rho Q dr - \rho u Q dt) &= 0 \\ \oint (\rho u Q dr - (\rho + \rho u^2) Q dt) &= \iint p Q' dr dt \\ \oint \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + E \right) Q dr - \rho u \left( E + \frac{p}{\rho} + \frac{u}{2} \right)^2 Q dt \right] &= 0 \end{aligned}$$

Comme courbe d'intégration, nous prenons la frontière de la cellule comme le montre la figure, c'est à dire la frontière indiquée par les lignes pleines. Le long de chaque ligne nous supposons que les valeurs de chaque inconnue sont constantes. De cette façon, nous trouvons les formules (p 22 N° 5) GODUNOV et al.

.../...

Les conditions aux limites

La région de l'écoulement peut être bordée par une frontière de trois types principaux : une onde de choc, un interface ou une caractéristique (trajectoires comprises). Les conditions aux limites que l'on applique à une telle frontière sont très compliquées et nous expliquons seulement les principes.

Supposons par exemple, qu'une onde de choc sépare la région d'écoulement  $m+1$  à droite de la région  $m$  à gauche. Nous désignons les deux derniers points de la région  $m$  sur un niveau (soit un niveau intermédiaire, soit un niveau final) par  $N-1$  et  $N$ , et les deux premiers points de la région  $m+1$  par  $1$  et  $2$ .

Nous pouvons obtenir trois équations aux différences si, dans l'Eq. (8) nous remplaçons les dérivées par rapport à  $r$  par des différences simples au lieu des différences centrées. Ces équations s'écrivent

$$(12) \quad B_N \tilde{U}_N + C_N \tilde{U}_{N-1} = G_N$$

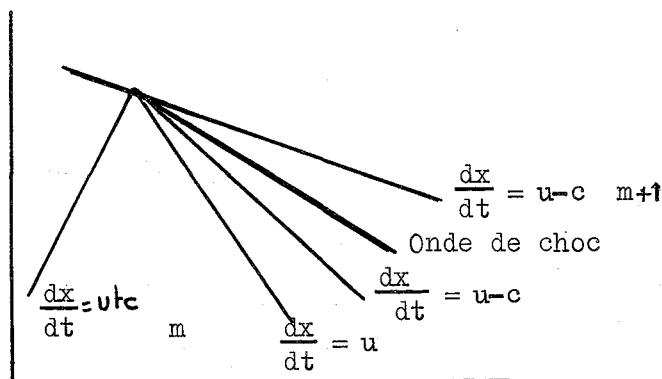
où  $\tilde{U}_N$  est le vecteur  $(\tilde{\mu}_N, \tilde{\pi}_N, \tilde{\sigma}_N)$  et  $B_N, C_N$  sont des matrices rectangulaires  $(2 \times 3)$ .

A travers le choc on peut obtenir deux équations pour les inconnues  $\tilde{U}_N$  et  $\tilde{U}_1$ . (13)

Dans la région  $m+1$  il y a une équation pour les valeurs  $\tilde{U}_1$  et  $\tilde{U}_2$  de la forme

$$(14) \quad A_1 \tilde{U}_2 + B_1 \tilde{U}_1 = G_1$$

$(A_1)(B_1)$  vecteurs ligne.



La caractéristique et la trajectoire du coté droit de l'onde de choc sont découpées par le choc, pour cette raison deux des équations à gauche disparaissent.

Si les conditions à l'intérieur de la région  $m+1$  sont connues ces équations représentent six conditions pour déterminer les six inconnues.

La méthode de double balayage

Posons nous le problème

$$u_0 = \varphi$$

$$(1) \quad a_n u_{n+1} - 2 b_n u_n + c_n u_{n-1} = g_n \quad (1 \leq n \leq N-1)$$

$$u_N = \Psi$$

Considérons l'équation

$$(2) \quad a_1 u_0 - 2 b_1 u_1 + c_1 u_2 = g_1$$

Puisque  $u_0 = \varphi$ , l'équation (2) s'écrit

$$(3) \quad u_1 = \frac{c_1}{2 b_1} u_2 + \frac{a_1 \varphi - g_1}{2 b_1} = L^{3/2} u_2 + K^{3/2}$$

où  $L^{3/2}$ ,  $K^{3/2}$  sont définis par

$$(4) \quad L^{3/2} = \frac{c_1}{2 b_1} \quad K^{3/2} = \frac{a_1 \varphi - g_1}{2 b_1}$$

A l'aide de (3) nous éliminons  $u_1$  dans l'équation

$$(5) \quad a_2 u_1 - 2 b_2 u_2 + c_2 u_3 = g_2$$

Il s'en suit que

$$(6) \quad u_2 = \frac{c_2}{2 b_2 - a_2 L^{3/2}} + \frac{a_2 K^{3/2} - g_2}{2 b_2 - a_2 L^{3/2}}$$

Après avoir posé

$$(7) \quad L_{5/2} = \frac{c_1}{2 b_2 - a_2 L^{3/2}} \quad K_{5/2} = \frac{a_2 K^{3/2} - g_2}{2 b_2 - a_2 L^{3/2}}$$

Nous pouvons écrire (6) sous la forme

$$(8) \quad u_2 = L_{5/2} u_3 + K_{5/2}$$

Nous continuons ce processus d'élimination pas à pas vers la droite. A un point courant nous trouvons la formule

$$(9) \quad u_n = L_{n+1/2} u_{n+1} + K_{n+1/2}$$

où

$$(10) \quad L_{n+1/2} = \frac{c_n}{2b_n - a_n L_{n-1/2}} \quad K_{n+1/2} = \frac{a_n K_{n-1/2} - g_n}{2b_n - a_n L_{n-1/2}}$$

La dernière valeur du type (10) est la suivante

$$(11) \quad u_{N-1} = L_{N-1/2} u_N + K_{N-1/2}$$

A la frontière droite  $u_N = \Psi$

Par conséquent nous déterminons  $u_{N-1}$  de l'éq. (11)

Puis  $u_{N-2}$  est donné par la formule

$$(12) \quad u_{N-2} = L_{N-3/2} u_{N-1} + K_{N-3/2}$$

ensuite

$$(13) \quad u_{N-3} = L_{N-5/2} u_{N-2} + K_{N-5/2}$$

Le calcul est en deux parties

D'abord pendant le balayage direct nous calculons les coefficients  $L_{n+1/2}$ ,  $K_{n+1/2}$ , successivement (Eq. (10)). Ensuite, pendant le balayage inverse nous calculons les inconnues  $u_n$  par l'Eq. (11) (12) etc.

Les erreurs

Si  $a_n > \delta$ ,  $c_n > \delta$ ,  $b_n > 1/2 (a_n + c_n) + \delta$

on peut démontrer que le problème est bien posé et que la solution est unique.

.../...



En outre si on change les valeurs de  $\varphi$ ,  $\Psi$ , d'une quantité  $\varepsilon$  (une quantité de l'ordre de  $\varepsilon$ ) la solution que l'on obtient par cette méthode s'écarte de la précédente d'une quantité  $Q\varepsilon$  où  $Q$  est une constante indépendante de  $\varphi$ ,  $\Psi$ ,  $N$ .

3 - Solution des équations aux différences au niveau intermédiaire

Rappelons qu'au niveau intermédiaire nous résolvons un système d'équations aux différences du deuxième ordre de la forme

$$(1) \quad A_n \tilde{U}_{n+1} + B_n \tilde{U}_n + C_n \tilde{U}_{n-1} = G_n$$

où  $\tilde{U}_n = (\tilde{\mu}_n, \tilde{\pi}_n, \tilde{\sigma}_n)$

$A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  sont les coefficients matriciels,  $G_n$  est un vecteur. Il faut ajouter six conditions aux limites au système (1)

A la frontière gauche nous utilisons l'équation aux différences simples suivantes

$$(2) \quad \tilde{U}_1 = P_{3/2} \tilde{U}_2 + Q_{3/2}$$

$P_{3/2}$  matrice

$Q_{3/2}$  vecteur.

Dénotons les éléments de  $P_{3/2}$ ,  $Q_{3/2}$  par  $w_{3/2}$

$$(3) \quad P_{3/2} = \begin{pmatrix} w_{11}^{3/2} & w_{12}^{3/2} & w_{13}^{3/2} \\ w_{21}^{3/2} & w_{22}^{3/2} & w_{23}^{3/2} \\ w_{31}^{3/2} & w_{32}^{3/2} & w_{33}^{3/2} \end{pmatrix} \quad Q_{3/2} = \begin{pmatrix} w_{14}^{3/2} \\ w_{24}^{3/2} \\ w_{34}^{3/2} \end{pmatrix}$$

Nous supposons que  $P_{3/2}$ ,  $Q_{3/2}$  sont connus

Aux points intérieurs nous satisfaisons au système (1)

$n = 2, 3, \dots, N-1$

où 
$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & \lambda_n a_n & 0 \\ b_n & -\lambda_n b_n & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{pmatrix} \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n & 0 \\ 1 & -\lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} -a_n & -\lambda_n a_n & 0 \\ -b_n & \lambda_n b_n & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{pmatrix} \quad G_n = \begin{pmatrix} f_u \\ g_n \\ -l_n \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{-\frac{\pi}{2}(u_n + c_n) + r_n - \tilde{r}_n}{(r_{n+1} - \tilde{r}_{n-1})k} \quad \lambda = \frac{\mu'(u)}{\pi'(p)\rho c}$$

Prenons  $n = 2$  dans l'Eq. (1)

Nous éliminons  $\tilde{U}_1$  des équations (1) ( $n=2$ ) et (2) pour arriver à l'équation

$$\tilde{U}_2 = P_{5/2} \tilde{U}_3 + Q_{5/2}$$

Nous progressons de cette façon pas à pas vers la droite et nous

obtenons l'Eq. matrice suivante :

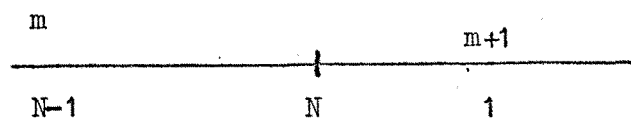
$$(4) \quad \tilde{U}_{n-1} = P_{n-1/2} \tilde{U}_n + Q_n$$

où 
$$(5) \quad P_{n+1/2} = -(B_n + C_n P_{n-1/2})^{-1} A_n$$

$$Q_{n+1/2} = (B_n + C_n P_{n-1/2})^{-1} (G_n - C_n Q_{n-1/2})$$

Pendant le balayage direct nous calculons les coefficients  $P_{n+1/2}$  successivement .

Supposons que nous arrivions à une frontière intérieure qui sépare les régions  $m$  et  $m+1$



Pour traverser la frontière nous utilisons les équations matricielles suivantes

$$(6) \quad \tilde{U}_{N-1}^{(m)} = P_{N-1/2}^{(m)} \tilde{U}_N^{(m)} + Q_{N-1/2}^{(m)}$$

(la dernière équation (4))

$$(7) \quad B_N \tilde{U}_N^{(m)} + C_N \tilde{U}_{N-1}^{(m)} = G_N$$

(relation à la frontière intérieure)

$$(8) \quad \underset{N}{\overset{\sim}{R}}U^{(m)} + \bar{R} = \overset{\sim}{L}U_1^{(m+1)} + \bar{L}$$

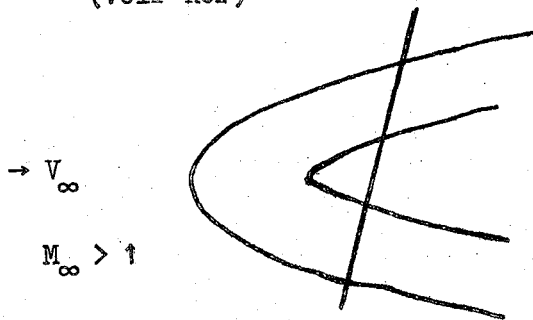
(conditions aux limites à droite dans la région m)

$$(9) \quad A_1 \overset{\sim}{U}_2^{(m+1)} + B_1 \overset{\sim}{U}_1^{(m+1)} = G_1$$

(conditions aux limites pour la frontière gauche)

#### 4- La méthode BVLR ( voir Ref )

(voir Ref)



Nous considérons le problème de l'écoulement supersonique autour d'un corps soit emoussé soit pointu. Nous supposons, pour l'instant, que le corps est symétrique mais le vecteur vitesse à l'infini peut faire un angle avec l'axe de symétrie.

Le corps est entouré par une onde de choc. Si le nez du corps est emoussé l'onde est détachée. Dans ce cas la vitesse près du point d'arrêt est subsonique jusqu'au plan  $\Pi$ . En aval de  $\Pi$  l'écoulement est supersonique.

Dans tous les cas nous supposons que les valeurs des variables dépendantes, sont connues tout le long du plan  $\Pi$ , la position et la pente de l'onde de choc y comprises. La méthode BVLR est une méthode aux différences finies pour avancer le calcul pas à pas vers l'aval d'un plan jusqu'au plan voisin.

Les équations du mouvement stationnaires s'écrivent sous la forme

$$(1) \quad A \frac{\partial X}{\partial z} + B \frac{\partial X}{\partial r} + C \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \Gamma = 0$$

où

$$(2) \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ \rho c^2 & 0 & 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & v & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$$C^\dagger = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$\Gamma$  et  $X$  sont vecteurs

$$(3) \quad \Gamma = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ -w^2 \\ wv \\ \rho c^2 v \\ \rho v \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{pmatrix}$$

Soit l'équation du corps

$$(4) \quad r = G(z, \varphi)$$

et l'équation de l'onde de choc

$$(5) \quad r = F(z, \varphi)$$

Il y a cinq conditions de conservations (de masse quantité de mouvement et de l'énergie) à travers le choc, . Ce sont :

$$\rho Vv = \rho^\infty Vv_\infty$$

$$P + \rho_\infty Vv_\infty Vv = p_\infty + \rho_\infty Vv_\infty^2$$

$$h + \frac{Vv^2}{2} = h_\infty + \frac{Vv_\infty^2}{2}$$

$$u + v \frac{F}{z} = u_\infty + v \frac{F}{z}$$

$$v \frac{F\varphi}{F} + w = v_\infty \frac{F\varphi}{F} + w_\infty$$

$V_v = u \frac{\partial F}{\partial z} - v + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \varphi} w$  est la composante de la vitesse normale au choc.

La condition à la paroi est

$$(7) \quad u \frac{\partial G}{\partial z} - v + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$$

Le problème est le suivant. Les valeurs de  $X$  étant données sur  $\Pi$  déterminer une solution en aval de  $\Pi$  qui satisfasse aux équations (1) et aux conditions limites (6) et (7).

Comme plans  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  nous pouvons choisir les plans  $z = \text{const.}$  si la composante de la vitesse dans la direction  $z$  est toujours supersonique.

Nous faisons un changement de variables indépendantes

$$x = z$$

$$\xi = \xi(z, r, \varphi)$$

$$\theta = \varphi$$

tel que

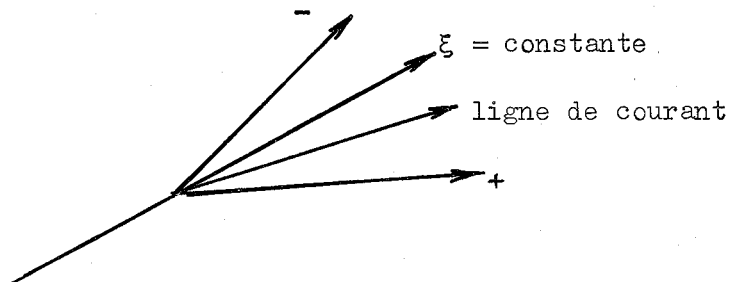
$$\xi = 0 \text{ à la paroi}$$

$$= 1 \text{ sur le choc}$$

Une expression convenable est

$$(8) \quad \xi = \frac{r - G(z, \varphi)}{F(z, \varphi) - G(z, \varphi)}$$

Pour assurer la stabilité et la condition que le problème soit bien posé  $\xi$  doit satisfaire aux deux inégalités.



.../...

Dans un plan  $\varphi = \text{const.}$  la pente de la caractéristique (-) est supérieure tandis que les pentes de la caractéristiques (+) et de la ligne de courant sont inférieures à la pente de la ligne  $(\xi) = \text{constante.}$

Après le changement des variables la région dans laquelle on cherche une solution est la suivante :

$$x > x_0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

L'équation (1) est remplacée par

$$(9) \quad A \frac{dX}{dx} + B \frac{\partial X}{\partial \xi} + C \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Gamma = 0$$

où  $A = A^1$  ,  $B = \xi A^1 + \xi_r B^1 + \xi_\varphi C^1$  ,  $C = C^1$

### Schéma aux différences

Nous construisons un maillage rectangulaire avec les différences

$$\Delta x = \tau \quad \Delta \xi = \frac{1}{M} = h_1 \quad , \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{L} = h_2$$

où M et L sont entiers

Notations :

$$x^n = n\tau + x^0 \quad , \quad \xi_m = mh_1 \quad , \quad \theta_l = lh_2$$

$$f(x^n, \xi_m, \theta_l) = f_{m,l}^n$$

n , m, l entiers

On appelle un niveau le groupe des points avec le même n

On appelle rayon le groupe de points avec les mêmes valeurs de n et

l .

Nous remplaçons l'équation (9) par une équation aux différences finies. Nous utilisons pour les dérivées des formules avec différences centrées, ce qui correspond à une précision du deuxième ordre. En outre, nous introduisons les opérateurs de passage

$$S f_{m;l}^n = f_{m+1;l}^n \quad T f_{m;l}^n = f_{m;l+1}^n$$

.../...



Nous obtenons le système suivant d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned}
 & A_{m+1/2, l}^{m+1/2} (S+I) \{ X_{m, l}^{m+1} - [I + \frac{\alpha k_1}{4} (T - 2I + T^{-1})] X_{m, l}^n \} \\
 (10) \quad & + 2 k_1 B_{m+1/2, l}^{n+1/2} (S-I) (\alpha X_{m, l}^{n+1} + \beta X_{m, l}^n) \\
 & + \frac{k_2}{2} C_{m+1/2, l}^{n+1/2} (S+I) (T - T^{-1}) (\alpha X_{m, l}^{n+1} + \beta X_{m, l}^n) + 2 \tau I_{m+1/2, l}^{n+1/2} = 0 \\
 & a = A + 2 \alpha k_1 B \qquad b = A - 2 \alpha k_1 B
 \end{aligned}$$

On écrit les conditions aux limites sous forme de différences. L'équation

(10) s'écrit sous forme condensée

$$(11) \quad a_{m+1/2, l}^n X_{m+1, l}^{n+1} + b_{m+1/2, l}^n X_{m, l}^{n+1} = f_{m+1/2, l}$$

On résoud l'équation (11) par une méthode itérative. On estime des valeurs de  $X_{m, l}^{n+1}$  et  $X_{m+1, l}^{n+1}$  pour calculer les coefficients  $a, b$ . Puis on résoud l'équation (11) en  $X_{m, l}^{n+1}$  et répète le calcul des coefficients.

L'équation (11) représente 5 ML équations.

En outre il y a, pour chaque  $l$ , une condition à la paroi et 5 sur l'onde de choc.

En somme 5 ML + 6 L équations.

Les inconnues correspondent uniquement au rayon  $l$  donné. Donc on peut diviser les équations en L groupes de 5 M+6 equations le long de chaque rayon.

(On peut exprimer les coefficients  $a$  et  $b$  comme fonction des valeurs déjà connues sur un niveau amont).

Effectivement, la résolution des équations (10) avec les conditions aux limites se réduit à 5 ML + 6L calculs indépendants le long de chaque rayon.

Nous résolvons chaque équation par la méthode de double balayage.

$$(12) \quad a_{m+1/2} X_{m+1} + b_{m+1/2} X_m = f_{m+1/2}, \quad m=0, 1, L, \dots, M-1$$

Nous commençons à la paroi en satisfaisant aux conditions

$$(13) \quad \mu_0 X_0 = g_0$$

$$\mu_0 = w_0 \left\{ G_{X, -1}, \frac{G\theta}{G}, 0, 0 \right\}$$

$$g_0 = 0$$

$w_0$  est une constante

l'équation (13) définit un hyperplan qui contient  $X_0$ .

L'équation (12) détermine une série d'hyperplans contenant  $X_{m+1}$ ,  $m=0, 1, \dots, M-1$ .

Nous supposons que

$$(14) \quad \mu_m X_m = g_m$$

et nous éliminons  $X_m$  entre cette équation et l'équation (12). On trouve alors que :

$$\mu_m (b^{-1}a)_{m+1/2} X_{m+1} = \mu_m (b^{-1}f)_{m+1/2} - g_m$$

SI 
$$\mu_{m+1} = w_{m+1} \mu_m (b^{-1}a)_{m+1/2}$$

$$g_{m+1} = w_{m+1} [\mu_m (b^{-1}f)_{m+1/2} - g_m]$$

où  $w_{m+1} \neq 0$  nous obtenons

$$(15) \quad \mu_{m+1} X_{m+1} = g_{m+1}$$

Nous choisissons les constantes  $w_{m+1}$  de telle façon que la norme des vecteurs  $\mu_m$  soit égal à l'unité.

$$\|\mu_m\| = 1$$

c'est à dire

$$w_{m+1}^{-1} = \|\mu_m (b^{-1}a)_{m+1/2}\|$$

Ce procédé pour calculer  $\mu_m$  et  $g_m$  est le balayage direct.

Au dernier pas nous arrivons à la condition

$$(16) \quad \mu_M X_M = g_M$$

qui ferme le système des équations de choc.

5 équations sur l'onde de choc, 6 inconnues (Fx la pente de l'onde est la

.../...

sixième). Parmi plusieurs solutions seulement une correspond à la réalité physique.

Le balayage inverse détermine les valeurs successives de  $X_m$   $m = M-1 \rightarrow 0$

$$(17) \quad a_{m+1/2} X_{m+1} + b_{m+1/2} X_m = f_{m+1/2}$$

$$(18) \quad \mu_m X_m = g_m$$

Le système (11) seul n'est pas stable puisque

$$\|(b^{-1}a)_{m+1/2}\| > 1$$

Il faut construire à partir des équations (11) (1) cinq combinaisons linéaires telle que (11) et (18) se réduisent à l'équation

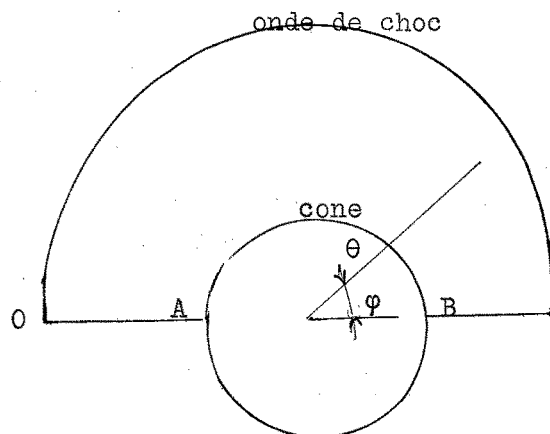
$$(19) \quad X_m = c_m X_{m+1} + d_m$$

RUSANOV et ses collaborateurs ont appliqué leur méthode au problème de l'écoulement supersonique autour d'un cône (voir suite concernant la méthode de TELENIN). La solution correcte de ce problème ne dépend pas de l'échelle et elle est déterminée par des fonctions des variables angulaires ( $r/z$  et  $\varphi$ ). Pour appliquer la méthode BVLR on estime les valeurs initiales et la position du choc dans un plan  $\Pi$ . On applique le procédé décrit ci-dessus pas à pas en aval jusqu'au plan  $\Pi_n$  où la condition

$$\|X_n - X_{n-1}\| < \delta \quad \text{est satisfaite,}$$

où  $\delta$  est une valeur très petite.

### 5 - Analyse de l'écoulement autour d'un cône près de la surface



.../...

La figure montre l'écoulement dans un plan sécant (dans une section de l'écoulement presque normale à la direction non-perturbée.

Dans ce plan  $\theta$  est la distance radiale et  $\varphi$  l'angle

$$(ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

A et B sont points d'arrêt .

Dans le plan de symétrie les particules approchent A et puis suivent la surface du cône. Par conséquent près de A la valeur de l'entropie dans le plan OA est égale à la valeur sur la surface. Donc l'entropie doit être continue dans le voisinage de A et aussi en A.

Les lignes de courants sont les intégrales de l'équation

$$(1) \quad \frac{d\theta}{u_\theta} = \frac{\sin \theta d\varphi}{u_\varphi}$$

Près de A on écrit

$$u_\theta = \alpha(\theta - \theta_0) + \beta(\varphi - \varphi_0) + \dots$$

$$\frac{u_\varphi}{\sin \theta} = \gamma(\theta - \theta_0) + \delta(\varphi - \varphi_0) + \dots$$

A est un point de selle

Les valeurs caractéristiques de la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix}$  ont des signes opposés.

Puisque

$$\lambda_1 \lambda_2 = \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{Bmatrix}$$

nous trouvons que 
$$\frac{\partial(u_\theta, u_\varphi)}{\partial\gamma(\theta, \varphi)} < 0$$

A l'autre point d'arrêt S peut être discontinue. Nous supposons que, près de B, on a les développements suivants :

$$u_\theta = \{\alpha(\theta - \theta_0) + \beta(\varphi - \varphi_0)\} g(\theta, \varphi) + g_1(\theta, \varphi)$$

$$\frac{u_\varphi}{\sin \theta} = \{\gamma(\theta - \theta_0) + \delta(\varphi - \varphi_0)\} g(\theta, \varphi) + g_2(\theta, \varphi)$$

où g est une fonction bornée avec les dérivées qui satisfont aux conditions

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \left( \frac{1}{|\theta - \theta_0|} \right) \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \left( \frac{1}{|\varphi - \varphi_0|} \right)$$

Nous supposons que

$$\Psi = \theta - \theta_0 \quad \sigma^2 = (\theta - \theta_0)^2 + \varphi^2$$

$$0 < \left| \frac{\Psi}{\varphi} \right| < \infty \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0(\sigma)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0(\sigma)$$

De 7.8 
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2 u_r = 0(\sigma)$$

d'où 
$$(\alpha + \delta)g + 2u_r + (\alpha\Psi + \beta\varphi) \frac{\partial g}{\partial \theta} + (\gamma\Psi + \delta\varphi) \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0(\sigma)$$

7.5.→ 
$$g[\alpha\Psi + \beta\varphi] \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + (\gamma\Psi + \delta\varphi) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + 0(\sigma^2) = 0$$

donc  $u_r = f + \omega(\sigma)$  ou  $f \rightarrow 0$  et satisfait l'équation

$g$  est donnée par l'équation

$$(\alpha\Psi + \beta\varphi) \frac{\partial g}{\partial \theta} + (\gamma\Psi + \delta\varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + (\alpha + \delta)g + 2f = 0$$

dont la solution unique est :

$$g = - \frac{2}{\alpha + \delta} f$$

On peut montrer que

$$\beta = \gamma = 0 \quad \alpha = \delta$$

Il s'en suit que

$$(\theta - \theta_0) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

ce qui montre que

$$f(\theta, \varphi) = f\left(\frac{\varphi}{\theta - \theta_0}\right) = f(\zeta)$$

Enfin on peut représenter les composantes de la vitesse, la pression

et la masse spécifique au voisinage de A sous la forme

$$u_r = f(\zeta) + 0(\sigma)$$

$$u_\theta = -(\theta - \theta_0) f(\zeta) + 0(\sigma^2)$$

$$u_\varphi = -\varphi \sin \theta F(\zeta) + 0(\sigma^2)$$

$$p = p_0 + 0(\sigma^3)$$

$$\rho = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{i_0 - \frac{f_2(\zeta)}{2}} + 0(\sigma)$$

Au voisinage de B

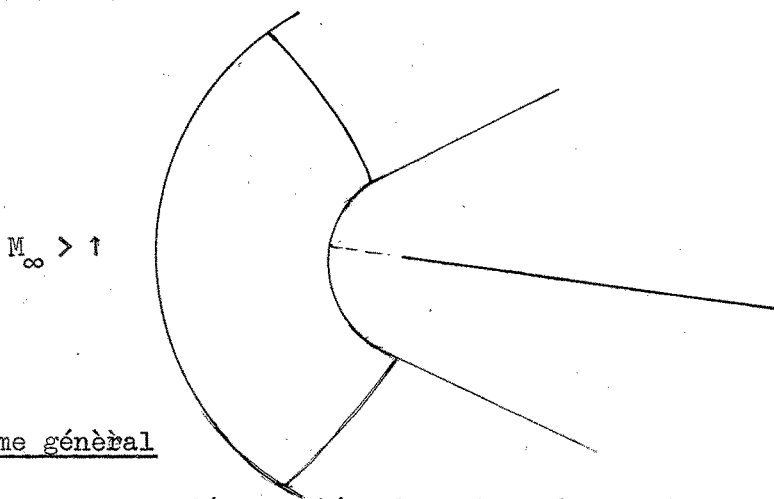
$$\frac{\partial(u_\theta, u_\varphi)}{\partial(\theta, \varphi)} = \sin \theta f^2(\zeta) + o(\sigma)$$

$$\frac{\partial(u_\theta, u_\varphi)}{\partial(\theta, \varphi)} > 0$$

B est un noeud.

Cette analyse est en accord avec celle de HOLT (1952) qui a démontré que les lignes de courant dans le plan sécant peuvent approcher le point B de toutes directions.

6 - Applications de la méthode de RUSANOV- LIUBIMOV au problème de l'écoulement supersonique autour d'un corps émoussé



Problème général

Nous considérons l'écoulement uniforme et supersonique autour d'un corps tridimensionnel dont la forme est émoussée et continue. Puisqu'il y a un point d'arrêt au nez du corps, le corps est entouré par une onde de choc détachée. A la tête du corps, au voisinage du point d'arrêt, il y'a une région subsonique qui est bornée par le corps, une surface sonique et l'onde de choc.

Dans le cas stationnaire le champ d'écoulement se divise en trois régions ; une région uniforme et supersonique en amont du choc, une région subsonique et non uniforme en aval du front du choc, et une région supersonique et non uniforme en aval de la surface sonique. Si nous connaissons les valeurs des inconnues le long de la surface  $\Pi$  qui traverse toute cette dernière région nous pouvons employer la méthode BVLR pour calculer l'écou-

lement plus en aval. Mais les conditions sur la surface  $\Pi$  dépend de l'écoulement dans la région subsonique. Le problème de calculer cet écoulement est très difficile et on a proposé plusieurs méthodes pour y parvenir.

Ces méthodes sont de deux types. Premièrement nous traitons le problème stationnaire. Dans ce cas les équations du mouvement sont du type elliptique. Si les frontières de l'écoulement étaient fixes et d'une forme simple (soit rectangulaire, soit circulaire) on pourrait résoudre ces équations en remplaçant les dérivées par les différences finies et en appliquant une méthode de relaxation. Malheureusement le problème est strictement non linéaire les formes de l'onde de choc et des surfaces sonique qui bornent la région sont inconnues et dépendent de la solution à leur intérieur. EMMONS et UCHIDA et YASUHARA ont essayé d'appliquer cette méthode par un processus itératif mais sa convergence est mauvaise. Le seul moyen pratique pour résoudre le problème stationnaire est de représenter les inconnues par des séries d'interpolation par rapport à une ou deux variables indépendantes de sorte que les équations du mouvement se réduisent à un système des équations différentielles ordinaires pour déterminer ces coefficients. Cette représentation est la base de la méthode des Relations Intégrales, effectuées par BELOTSEKOVSKII et la méthode de TELENIN. Nous décrirons plus tard ces méthodes.

Le deuxième type des méthodes pour résoudre le problème ci-dessus revient à considérer l'écoulement non stationnaire. Si le temps intervient dans le problème les équations sont du type hyperbolique et on peut les résoudre par une méthode aux différences finies. La méthode de GODUNOV est la première de ce type. Cette méthode est une généralisation de la méthode fondamentale pour calculer le mouvement d'un gaz unidimensionnel dans un tube. La deuxième méthode instationnaire est très récente et a été développée par RUSANOV et LIUBINOV. C'est une généralisation de la méthode BVLR et est basée sur les mêmes principes. Dans le problème de l'écoulement supersonique autour d'un cône on suppose que les inconnues sont données dans un plan initial  $\Pi$  qui traverse toute la région de l'écoulement. On applique une méthode

aux différences finies dans les plans parallèles à  $\Pi$  successivement en aval. On arrête le processus quand, dans deux plans voisins,  $\Pi_n$  et  $\Pi_{n+1}$  on satisfait à la condition

$$\|X_{n+1} - X_n\| < \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un scalaire aussi petit que nous le voulons.

Dans la généralisation du problème il y a trois coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  par exemple et le temps  $t$ . Au temps initial  $t = 0$ , on donne les valeurs des inconnues dans un hyperplan  $\varphi(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$  par exemple et on calcule l'écoulement dans les hyperplans successifs  $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$   $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$ . On arrête le calcul quand on satisfait à la condition

$$\|X^{n+1} - X^n\| < \varepsilon$$

Système de coordonnées - Equations du mouvement

Système des coordonnées orthogonales  $q_1, q_2, q_3$  temps  $\tau$ .

Equations du mouvement

$$(1) \frac{\partial X}{\partial \tau} + A^1 \frac{\partial X}{\partial q_1} + B^1 \frac{\partial X}{\partial q_2} + C^1 \frac{\partial X}{\partial q_3} = \Gamma$$

X est un vecteur avec les composantes  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{pmatrix}$

$$\Gamma = r^{-\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ -w^2 \\ vw \\ \rho c^2 v \\ \rho v \end{pmatrix} \quad u, v, w \rightarrow q_1, q_2, q_3$$

$A^1, B^1, C^1$ , sont des coefficients matriciels dont les éléments dépendent des inconnues.

Écoulement à deux dimensions ou à trois dimensions

$$\varepsilon = 0, \quad q_1 = z, \quad q_2 = x, \quad q_3 = y$$

Écoulement autour d'un corps en révolution

$$\varepsilon = 1, \quad q_1 = z, \quad q_2 = r, \quad q_3 = \varphi$$



L'équation du corps est :

$$(2) \quad g(q_1, q_2, q_3, \tau) = 0$$

ou, sous une forme paramétrique

$$(3) \quad q_k = q_k^T(\eta, \zeta, \tau) \quad k = 1, 2, 3,$$

Le vecteur normale à la surface  $\underline{n}$  et la vitesse du corps normale à lui-même,  $\underline{D}$ , et est fonction des dérivées de  $g$  et de  $q_k^T$ .

De la même façon, nous traitons l'équation de l'onde de choc

$$(4) \quad f(q_1, q_2, q_3, \tau) = 0$$

Transformation des coordonnées

Nous transformons le système des coordonnées en un nouveau système

$$(5) \quad q_k = q_k(\xi, \eta, \zeta, t)$$

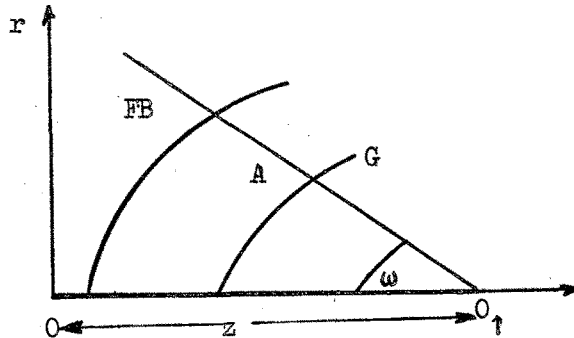
Nous choisissons  $\xi$  tel que

$\xi = 0$  soit l'équation du corps

$\xi = 1$  soit l'équation de l'onde de choc

Les autres coordonnées sont choisies telles que la formulation du problème soit aussi simple que possible.

Dans le cas général le choix de  $\eta$  et  $\zeta$  est compliqué? Nous nous bornons au cas du corps de révolution



$z$  est la coordonnée dans la direction de l'axe de symétrie

$r$  est la distance de cet axe dans un plan médian

$\theta$  est l'angle entre un plan fixe et un plan méridien général

Nous considérons  $\eta$  comme un paramètre.

Pour un certain point  $O_1$

$$O_1 A = G(\eta, \theta, \tau)$$

$$O_1 B = F(\eta, \theta, \tau)$$

$$R = G + \xi(R - G)$$

$\omega$  = angle entre  $AO_1$  et l'axe

$$\xi = \frac{R-G}{R-G}, \quad \eta = \omega, \quad \zeta = \theta.$$

Les équations aux différences finies

Après cette transformation les équations (1) s'écrivent

$$(6) \quad \frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial \xi} + B \frac{\partial X}{\partial \eta} + C \frac{\partial X}{\partial \zeta} + \Gamma = 0$$

ou  $A, B, C, \Gamma$  sont fonctions des inconnues.

A un point à l'intérieur du champ de l'écoulement ces dérivées partielles sont remplacées par les expressions aux différences de la forme

$$(7) \quad a_{m+1/2, k, l}^{n+1} X_{m+1, k, l}^n + b_{m+1/2, k, l}^n X_{m, k, l}^{n+1} = \Pi_{m+1/2, k, l}^n$$

$a, b, c$ , sont des coefficients matriciels qui contiennent les opérateurs de passage dans toutes les directions  $n$  (temps)  $m, \xi, k, \omega(\eta), l, \theta$ .

On peut résoudre individuellement ces équations le long de chaque rayon entre la paroi et à l'onde de choc.

La condition à la paroi s'écrit

$$(8) \quad \mu_0 X_0 = g_0 \quad (g_0 = 0)$$

Si nous fixons le système de coordonnées dans le corps, les coefficients  $\mu_0$  sont connus même pour un écoulement non-stationnaire.

On peut transférer cette condition sur l'onde de choc en utilisant

.../...

la méthode de double balayage. L'équation (7) peut être écrite

$$(9) \quad a_{m+1/2} X_{m+1} + b_{m+1/2} X_m = \Pi_{m+1/2}$$

Faisons  $m = 0$  et éliminons  $X_0$  entre l'équation (8) et (9). Nous arrivons à l'équation

$$(10) \quad \mu_1 X_1 = g_1$$

où  $\mu_1$  est un vecteur connu et  $g_1$  est un produit scalaire connu. En répétant ce processus pas à pas nous arrivons à l'équation générale

$$(11) \quad \mu_m X_m = g_m$$

Enfin nous arrivons à l'onde de choc

$$(12) \quad \mu_M X_M = g_M$$

Sur le choc cinq conditions sont satisfaites comprenant la vitesse de l'onde elle même. Si nous éliminons cette inconnue des deux équations (11) et (12) il reste cinq équations pour déterminer les composantes de  $X_M$ .

Ensuite on applique le balayage inverse aux équations (9) et (11) pour calculer  $X_m$ .

## 7- La méthode des relations intégrales

DORODNITSYN a proposé cette méthode en 1956. Dans la formulation originale il a appliqué la méthode aux problèmes de mécanique des fluides non visqueux. Les équations du mouvement correspondantes sont du type elliptique si l'écoulement est subsonique et du type mixte pour un écoulement transonique. CHUSHKIN a appliqué la méthode au problème de l'écoulement subsonique autour d'une ellipse et d'un profil. BELOTSEKOVSKI a résolu le problème de l'écoulement autour d'un corps émoussé par la méthode. La méthode n'est pas convenable pour les problèmes purement supersoniques.

En 1960 DORODNITSYN a généralisé la méthode pour l'application aux problèmes visqueux, en particulier aux problèmes de la couche limite. Il a considéré les écoulements incompressibles ~~seulement~~. En 1962 PAVLOVSKII et LIU ont formulé la méthode pour les couches limites compressibles, même avec soufflage à la paroi. Depuis 1964 NIELSEN, HOLT et d'autres chercheurs ont essayé une généralisation de la méthode plus loin pour résoudre le problème du décollement de la couche limite laminaire.

Tout d'abord, nous expliquons les principes de la méthode pour les équations modèles (voir ci-joint)

Formulation générale

Problème non-visqueux

Il y a deux coordonnées

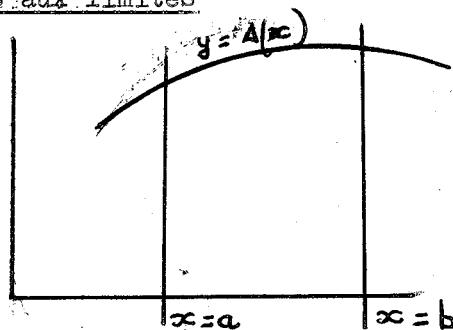
k inconnues  $u_1 \dots u_k$

k équations du 1<sup>er</sup> ordre

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} P_i + \frac{\partial}{\partial y} Q_i = F_i \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

P, Q, F sont fonctions de  $x, y, u_1, \dots, u_k$ .

Conditions aux limites



Il y a k conditions  $x=a$   $x=b$

et k conditions  $y=0$   $y=\Delta$

.../...

Points singuliers

Nous remplaçons quelques conditions aux limites par les conditions d'analytité.

Pour appliquer la méthode nous multiplions l'équation (1) par  $f(y)$  et nous intégrons par rapport à  $y$  entre 0 et  $\Delta$ .

Nous obtenons l'équation suivante :

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} f(y) P dy - \Delta'(x) f(\Delta) F_{\Delta} + f(\Delta) Q_{\Delta} - f(0) Q_0 - \int_0^{\Delta} Q f'(y) dy = \int_0^{\Delta} f(y) F dy$$

Introduisons  $y_n = \frac{n}{N} \Delta(x) \quad n=1, 2, \dots, N-1$   
 $y_0 = 0 \quad y_N = \Delta(x)$

Représentons

$$\int_0^{\Delta} f_n(y) P dy = \Delta(x) \sum_{n=0}^N A_n P_n(x)$$

Nous arrivons à  $kN$  équations aux dérivées ordinaires pour déterminer  $k(N+1)$  inconnues  $u_{vn}(x) \quad v = 1, \dots, k$   
 $n = 0, 1, \dots, N$

Le choix de  $f$

(1)  $f_n = \delta(y - y_n) \quad n = 1, \dots, N$  ( $\delta$  fonction de DIRAC)

(2)  $f_n = \begin{cases} 0 & y < y_{n-1} \\ 1 & y_{n-1} < y < y_n \\ 0 & y > y_n \end{cases}$

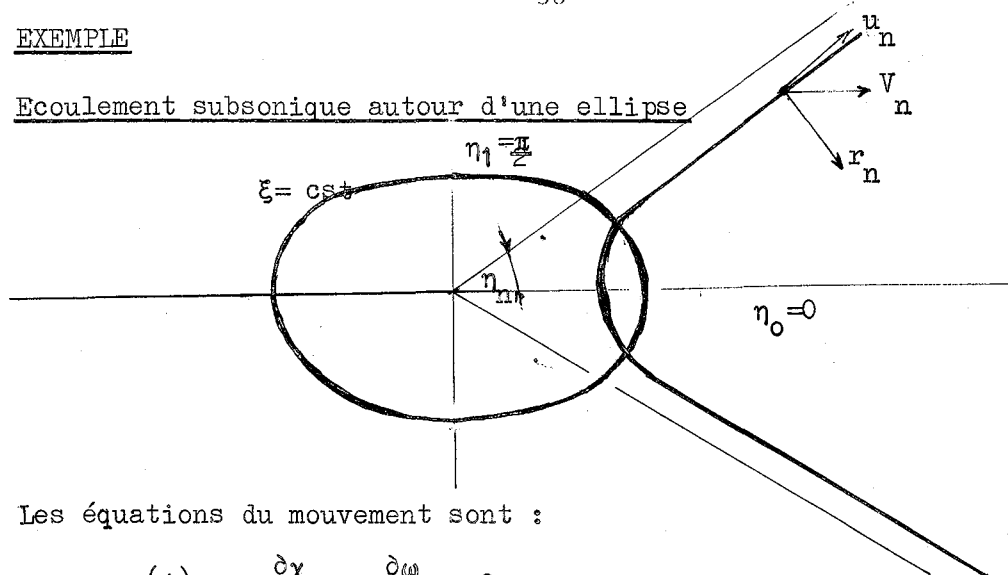
Dans le cas (1) nous arrivons à la méthode des lignes droites.

Dans le cas (2) la relation intégrale, fondamentale, s'écrit

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \int_{y_{n-1}}^{y_n} P dy - y_n P_n + y_{n-1} P_{n-1} + Q_n - Q_{n-1} = \int_{y_{n-1}}^{y_n} F dy$$

EXEMPLE

Ecoulement subsonique autour d'une ellipse



Les équations du mouvement sont :

$$(4) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0$$

où  $\chi = Hpu$

$\omega = Hpr$

$\lambda = Hv$

$\mu = Hu$

$$\rho = (1 - u^2 - r^2)^{1/(\lambda-1)}$$

$$H = (\sin^2 \xi + \sin^2 \eta)^{1/2}$$

Conditions aux limites

$$u \rightarrow V_\infty \cos \eta$$

a l'infini

$$v \rightarrow V_\infty \sin \eta$$

$$u = 0 \quad \text{à la paroi}$$

Nous divisons la région  $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$  en N-1 hyperboles

Nous supposons que

$$\chi = \sum_{n=0}^{N-1} a_{2n+1}(\xi) \cos(2n+1)\eta$$

$$\lambda = \sum_{n=1}^{N-1} b_{2n+1}(\xi) \sin(2n+1)\eta$$

où  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n+1}$  sont fonctions linéaires et indépendantes des  $\chi_n$

et  $\chi_n$ .

Nous obtenons 2 N équations ordinaires pour déterminer  $u_n$ ,  $v_n$  le long

$\eta = \eta_n$ .

Il y a N-1 valeurs données de  $r_n$ .

REFERENCES

BELOTSEKOVSKII	PMM <u>22</u>	201-219	1958
	Vych Mat <u>3</u>	149-185	1958
	PMM 60 <u>24</u>	511-517	1960
	Sov. Zh VMMF <u>2</u>	1062-1085	1962
CHUSHKIN	PMM <u>21</u>	353-360	1957
	Vych Mat <u>3</u>	99-110	1958
	Vych Mat <u>2</u>	20-44	1957

Le problème de l'ellipse a été résolu par CHUSHKIN (1957,1958)

BELOTSEKOVSKII (1958) a résolu le problème d'un corps émoussé.

Ces applications et les autres applications aux problèmes visqueux sont décrites dans le volume rédigé par HOLT (1965).

.../...

8 - METHODE DE TELENIN

Il est bien connu que, généralement, le problème de CAUCHY est mal posé pour des équations elliptiques. Cependant on peut avoir un problème correcte si la frontière du domaine est fermée se comporte de courbes analytiques et si on restreint les solutions à la classe des fonctions analytiques.

Rappelant ce principe TELENIN et ses collaborateurs ont développé un schéma numérique pour trouver la solution de l'équation de LAPLACE, qui satisfait aux conditions limites le long d'une frontière fermée.

Problème de GAUCHY

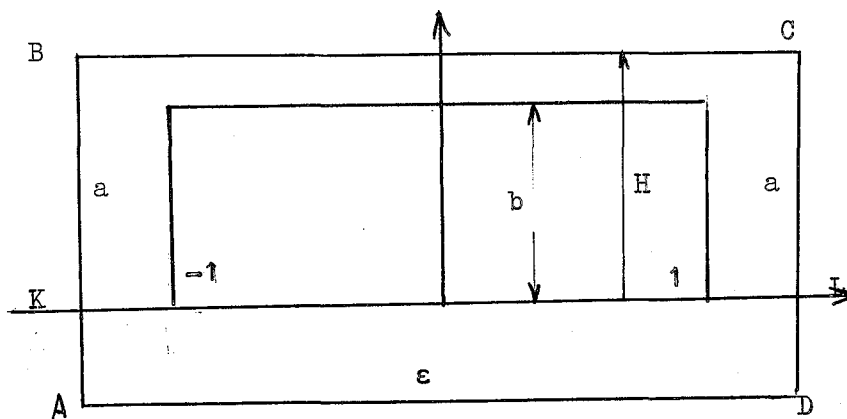
Trouver la solution  $\varphi$  de l'équation de LAPLACE

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

dans la région  $-1 < x < 1$  ,  $0 < y < b$

qui satisfait aux conditions initiales

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(x,0) &= \sigma(x) \\ \varphi_y(x,0) &= \tau(x) \end{aligned}$$



Supposons que dans une région plus grande ABCD

$\varphi$  soit harmonique

et  $|\text{grad}\varphi| < M$



tandis que les valeurs initiales sur KL sont inférieures à  $1/2 m$

On peut démontrer que la solution générale de ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$(3) \quad \varphi(x,y) = \operatorname{Re} \left\{ \sigma(z) - i \int_0^z \tau(\xi) d\xi \right\}$$

$$T(x) = \int_0^x \tau(\xi) d\xi$$

où  $z = x+iy$

$\sigma(\zeta)$   $T(\zeta)$  sont les prolongements analytiques des fonctions  $\sigma(x)$  et  $T(x)$  dans le plan complexe  $\zeta = x+i\eta$ .

Nous choisissons  $2n+1$  noeuds sur le segment  $-1 < x < 1$ .

Nous représentons  $\sigma(\zeta)$  et  $\tau(\zeta)$  par les polynômes de LAGRANGE

$$(4) \quad \sigma(\zeta) = \sigma_n^*(\zeta) = \sum_{j=0}^{2n} a_j \zeta^j$$

$$\tau(\zeta) = \tau_n^*(\zeta) = \sum_{j=0}^n b_j \zeta^j$$

$a_j$ ,  $b_j$  sont combinaisons linéaires des valeurs  $\sigma(x_j)$ ,  $\tau(x_j)$  aux noeuds

Si nous substituons l'équation (4) dans l'équation (3) nous arrivons à la solution approximative du problème de CAUCHY

$$(5) \quad \varphi(x,y) = \varphi_n^*(x,y) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=0}^{2n} a_j z^j - i \sum_{j=0}^{2n} \frac{b_j}{j+1} z^{j+1} \right]$$

qui satisfait aux données initiales

$$\varphi_n^*(x,0) = \sigma_n^*(x)$$

$$\sigma_{nj}^*(x,0) = \tau_n^*(x)$$

Dans la régions G cette solution converge uniformément vers la solution exacte du problème lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Maintenant nous représentons la solution cherchée par un pôleynôme de LAGRANGE en x

$$(6) \quad \varphi(x,y) = \varphi_n^*(x,y) = \sum_{j=0}^{2n} \varphi_{jn}^0(y) x^j$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial x^2} = \sum_{j=2}^{2n} j(j-1) \varphi_{jn}^0(y) x^{j-2}$$

où  $\varphi_{jn}^0(y)$  est une fonction linéaire des valeurs

$$\varphi_{jn}^*(y) = \varphi_n^*(x_j, y) \text{ le long de chaque rayon } x=x_j$$

Quand on substitue ces expressions dans l'équation (1) on trouve

$$(7) \quad \frac{d^2 \varphi_{kn}^*}{dy^2} + \sum_{j=2}^{2n} j(j-1) \varphi_{jn}^0(y) x_k^{j-2} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, 2n+1)$$

avec les conditions limites  $\varphi_{kn}^*(0) = \sigma(x_k)$   $\varphi_{kny}^*(0) = \tau(x_k)$

La fonction (8)  $\varphi_{kn}^*(y) = \varphi_n^*(x_k, y) = \text{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{2n} a_j z_k^j - i \sum_{j=0}^{2n} \frac{b_j}{j+1} z_k^{j+1} \right\}$

$$z_k = x_k + iy$$

satisfait l'équation (7) et, en même temps les conditions aux limites.

Quand  $n \rightarrow \infty$  cette solution approche de la solution exacte du problème.

Généralement on ne peut pas intégrer le système (7)

L'erreur de la solution approximative se comporte de trois parties

- $\delta_a^x \varphi$  des polynômes  $x$
- $\delta_a^y \varphi$  des polynômes  $y$
- $\delta_b \varphi$  erreurs d'arrondis

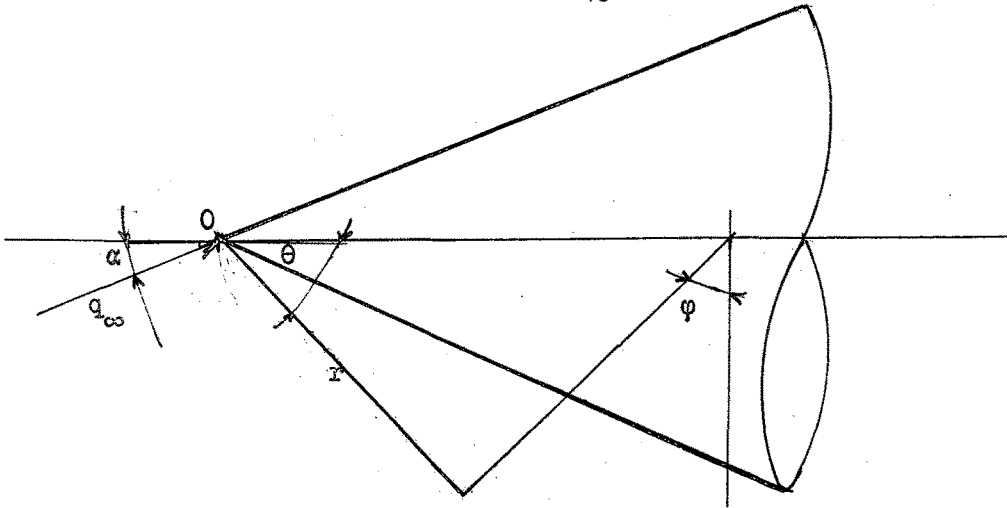
On peut démontrer que les erreurs  $\delta_a^x \varphi$  croissent exponentiellement avec le nombre de noeuds  $N$  ?

Les erreurs de  $\delta_b^y \varphi$  croissent en même temps que  $\delta_a^x \varphi$ . Donc on demande que des données initiales puissent être représentées par un polynôme de degré bas. On demande également que les erreurs d'arrondis soient assez petites à chaque pas.

Le problème du cône

NDEFO et HOLT ont appliqué la méthode de TELENIN au problème de l'écoulement stationnaire, supersonique mais non symétrique autour d'un cône circulaire.

Nous utilisons un système de coordonnées sphérique lié au cône tel que l'origine soit l'apex du cône et l'axe celui du cône.



Puisque l'écoulement est conique, les inconnues ne sont fonctions que des coordonnées angulaires et elles sont indépendantes du rayon  $r$ . Par conséquent on résoud le problème dans un plan sécant perpendiculaire à l'axe du cône.

Nous plaçons le cône dans un écoulement supersonique qui arrive sur le cône avec un angle d'attaque  $\alpha$ . Nous dénotons le demi-angle du cône par  $\theta_c$ . Si  $\theta_c < \alpha$  la composante de la vitesse dans le plan sécant est inférieure à la célérité du son et les équations du mouvement sont du type elliptiques.

Les inconnues sont les trois composantes de la vitesse,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , dans les directions  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , respectivement, la pression  $p$  la masse spécifique  $\rho$  et l'entropie  $S$ .

Elles satisfont aux deux équations de conservation de la quantité du mouvement à l'équation de BENOULLI à l'équation de conservation de la masse et à la condition d'entropie constante le long des lignes (ou surfaces) de courant.

Nous cherchons les solutions de ces équations qui satisfont aux conditions aux limites sur l'onde de choc qui entraîne le cône et sur la surface du cône lui-même.

Ces conditions s'écrivent

Sur le cône : (c)

$$(1) \quad v=0 \quad \theta=\theta_c$$

Sur le choc :

$$(2) \quad u_s = q_\infty n_1$$

$$r_s = q_\infty n_3 \sin \epsilon \cos \epsilon - n_4$$

$$w_s = q_\infty n_3 \cos^2 \epsilon + n_4 \tan \epsilon$$

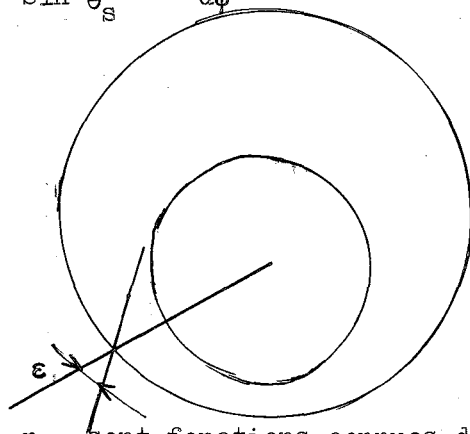
$$\rho_\infty = q_\infty n_2 \cos^2 \epsilon / n_4$$

$$p_s = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) q_\infty^2 n_2^2 \cos^2 \epsilon - \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) (1-\mu^2 q_\infty^2)$$

$\epsilon$  est l'angle entre la normale au choc et le plan méridien

$\varphi = \text{constante}$ .

$$\text{Soit } \tan \epsilon = \frac{1}{\sin \theta_s} \frac{d\theta_s}{d\varphi}$$



$n_1, n_2, n_3, n_4$  sont fonctions connues de  $\alpha, \theta_s, \varphi, \epsilon, \dots$

Puisque l'écoulement est symétrique il suffit de résoudre le problème dans le demi-plan  $0 < \varphi < \pi$ . En même temps on doit satisfaire aux conditions de symétrie.

$$w = 0 \quad \varphi = 0, \pi$$

$$\frac{d\theta_s}{d\varphi} = 0 \quad \varphi = 0, \pi$$

Les points singuliers

Les points où  $v=0$   $w=0$  sont points singuliers de l'équation

$$(3) \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{v \sin \theta}{w}$$

Ils se trouvent aux points

$$\theta = \theta_c$$

$$\varphi = 0$$

$$\theta = \theta_c$$

$$\varphi = \pi$$

Le point  $\theta=\theta_c$   $\varphi = 0$  est un point selle.

Une seule ligne de courant passe par ce point et la valeur de chaque inconnue est unique.

Au contraire le point  $\theta = \theta_c$   $\varphi = \pi$  est un point noeud par lequel passent toutes les lignes de courant. Ces lignes peuvent approcher le point de toutes les directions. La valeur de la pression est unique en ce point mais la valeur de l'entropie dépend de la pente de la ligne de courant correspondante c'est à dire; l'entropie est fonction de l'angle entre la ligne de courant et le plan de symétrie.

Pour résoudre le problème nous transformons la région de l'écoulement en un rectangle.

Nous posons

$$\eta = \varphi / \pi \quad , \quad \xi = \frac{\theta_s(\eta) - \theta}{\sigma(\eta)}$$

$$\text{où } \sigma(\eta) = \theta_s(\eta) - \theta_c$$

Le choc correspond à la fonction  $\xi = 0$  , le cône à  $\xi = 1$ , tandis que les segments du plan de symétrie deviennent les frontières  $\eta=0$ ,  $\eta = 1$  respectivement.

Pour satisfaire aux conditions de symétrie nous représentons les inconnues par des séries trigonométriques finies

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} u_k^0(\xi, \eta) \cos k \eta \pi \\
 v(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} v_k^0(\xi, \eta) \cos k \eta \pi \\
 p(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} p_k^0(\xi, \eta) \cos k \eta \pi \\
 \rho(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} \rho_k^0(\xi, \eta) \cos k \eta \pi \\
 \theta_s(\eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} \theta_{s_k}^0 \cos k \eta \pi \\
 w(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{m+1} w_k^0(\xi) \sin(k \eta \pi)
 \end{aligned}$$

Nous substituons ces expressions dans les équations du mouvement et nous demandons à ce que celles-ci soient satisfaites le long de chaque ligne. De cette façon nous arrivons à  $5(m+2)$  équations ordinaires du premier ordre pour déterminer 5 inconnues le long de chacune de  $(m+2)$  lignes  $\eta_i = \text{constante}$ .

Par exemple l'équation qui détermine  $u_i$  est

$$\frac{du_i}{d\xi} = \frac{(v_i^2 + w_i^2) \pi \sin \beta_i - u_i w_i}{\pi k_i \sin \beta_i}$$

où  $\beta_i = \theta_{s_i} - \xi \sigma_i$

et  $k_i$  est une fonction donnée des inconnues

( $u_i'$  dénote  $du_i/d\varphi$ )

Procédure numérique

Le long de chaque ligne  $\eta = \text{constante}$  nous résolvons 5 équations du type (5) par une méthode aux différences finies.

Nous initions le calcul sur l'onde de choc.

Nous prenons  $m = 3$ , nous représentons la forme du choc par une série de cosinus de cinq termes. Tout d'abord nous estimons les valeurs de cinq constantes  $\theta_{s_0}^0, \dots, \theta_{s_4}^0$  (elles sont combinaisons linéaires des valeurs de  $\theta_s$  aux rayons  $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ ).

Avec ces valeurs on peut construire la série  $\theta_s(\eta)$  et , ensuite, on peut calculer les valeurs de toutes les inconnues sur le choc. Ces données déterminent les deuxièmes membres des équations (5) et, par conséquent, les valeurs des dérivées par rapport à  $\xi$  sur le choc. Donc, nous pouvons effectuer le premier pas de la résolution numérique des équations en se dirigeant vers la surface (5). A la fin de ce pas nous connaissons les valeurs des cinq inconnues  $u_i$  ,  $v_i$  ,  $w_i$  ,  $p_i$  ,  $\rho_i$  , et nous résolvons le système des équations algébriques (4) pour calculer les coefficients  $u_k^0$  etc. Ensuite nous calculons les dérivées  $u_i^1$  etc , de nouveau les deuxièmes membres des équations (5) et nous répétons le calcul numérique pour le suivant. De cette façon, nous arrivons finalement à la surface et nous vérifions si la condition (1) est satisfaite. Si ce n'est pas le cas, nous utilisons les valeurs de  $v$  trouvées à  $\theta=\theta_c$  pour corriger les valeurs estimées de  $\theta_s$  et nous répétons la procédure à partir du choc. Nous continuons cette procédure jusqu'au temps où la condition (1) est satisfaite.

.../...

## 9 - METHODE DE TELENIN (suite)

Les équations du type mixte

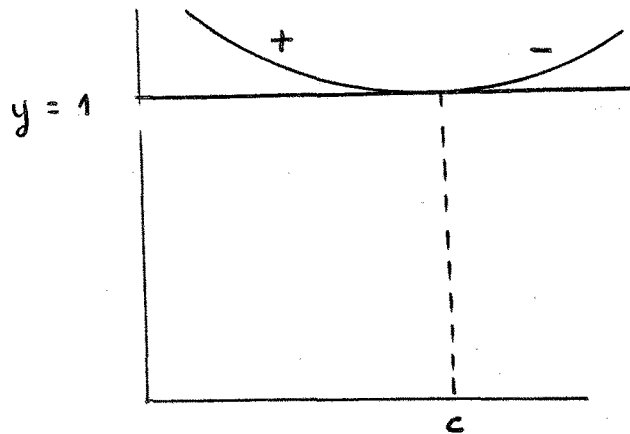
Nous considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation est du type elliptique lorsque  $|y| < 1$ hyperbolique si  $|y| > 1$ 

Les lignes caractéristiques sont

$$y = \cos h(x-c)$$

où  $c$  est une constante $x < c$  correspond à la première famille $x > c$  correspond à la deuxième familleLa ligne  $y=1$  est tangente aux lignes caractéristiques (au point  $x = c$ )

Nous cherchons des solutions de l'équation (1) du type

$$\varphi = F(x) f(y)$$

En substituant dans l'équation (1) nous arrivons à deux familles de solutions

$$(2) \quad F_k''(x) - (\pm \lambda_k^2) F_k(x) = 0$$

$$(3) \quad f_k''(y) + \frac{(\pm \lambda_k^2) f_k(y)}{1 - y^2} = 0$$

.../...



Nous supposons que les solutions de l'équation (1) sont paires

Donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad y = 0$$
 Pour satisfaire à la condition  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  quand  $y = 1$  nous demandons que

$$(4) \quad \begin{aligned} f_k(1) &= 0 \\ f_k'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Nous résolvons le problème de CAUCHY

$$(5) \quad f_k(0) = \varepsilon_k \quad f_k'(0) = 0$$

Nous choisissons  $\varepsilon_k$  tel que (4) soit satisfaite. La seule solution avec  $-\lambda_k^2$  est la solution  $f_k(y) \equiv 0$ . La solution qui correspond à  $+\lambda_k^2$

$$(6) \quad \lambda_k^2 = k(k+1)$$

$$(7) \quad \varphi_k(x, y) = (1-y^2) P_k(y) [A_k \sin h \lambda_k x + B_k \cosh \lambda_k x]$$

$P_k$  polynôme de LEGENDRE

Problème de CAUCHY

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi(0, y) &= \sigma_1(y) \\ \varphi(1/2, y) &= \sigma_2(y) \\ \varphi_y(x, 0) &= 0 \quad (\text{conditions de symétrie}) \end{aligned} \quad 0 < y < 1$$

Solution unique si les fonctions sont analytiques et bornées

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \sigma_1(y) \\ \varphi_x(0, y) &= \tau_1(y) \end{aligned} \quad 0 < y < 1$$

Nous choisissons  $\tau_1(y)$  tel que  $\varphi(1/2, y) = \sigma_2(y)$  soit satisfait.

Nous dessinons  $m$  rayons

$$y = y_j$$

Représentons  $\varphi$  par le polynôme de LAGRANGE

$$(10) \quad \varphi(x, y) \approx \varphi_m^*(x, y) = \sum_{j=0}^m \varphi_{jm}^0(x) y^{2j}$$

$\varphi_{jm}^0(x)$  est une fonction linéaire de  $\varphi_{jm}^*(x) = \varphi_m^*(x, y_j)$

valeur de la fonction cherchée sur chaque rayon des  $m+1$  dans le demi plan supérieur .

En substituant (10) dans l'équation (1) qui doit être satisfaite le long de chaque rayon nous arrivons au système des équations ordinaires

$$(11) \quad \frac{d^2 \varphi_{km}^*}{dx^2} + (1-y_k^2) \sum_{j=1}^m 2j(2j-1) \varphi_{jm}^0(k) y_k^{2j-2} = 0$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ )

qui déterminent les  $\varphi_{km}^*$  le long des rayons.

Problème de CAUCHY

Dans la région  $0 < x < 1/2$  ,  $0 < y < \cos h(1/2 - \xi_0)$

trouver la solution qui satisfasse aux conditions

$$(12) \quad \varphi(0, y) = \Phi_{2m}(y) = a_0 + a_2 y^2 + \dots + a_{2m} y^{2m}$$

Evidemment

$$(13) \quad \Phi_{2m} = \alpha_0 + \alpha_k P_k^j(y)(1-y^2) + \dots + \alpha_{2m} P_{2m-1}^j(y)(1-y^2)$$

donc la solution du problème est

$$(14) \quad \varphi(x, y) = \alpha + \sum_{j=1}^m [\alpha_{2j} P_{2j-1}^j(y) (1-y^2) \cos h\{\sqrt{2j(2j-1)}x\}]$$

La solution de l'équation (11) est :

$$(15) \quad \varphi_{km}^*(x) = \varphi(x, y_k) \quad k = 0, 1, \dots, m$$

En ce cas la solution de (11) conduit à la solution de (1)

Solution du problème non linéaire

Equation du mouvement

$$\left\{ \gamma_p(\gamma-1)/\gamma P(\psi) - u^2 \right\} \frac{\partial u}{\partial r} - uv \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$+ \frac{1}{r} \left\{ [\gamma_p(\gamma-1)/\gamma P(\psi) - v^2] \frac{\partial v}{\partial r} - uv \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}$$

$$+ \frac{\gamma P(\psi)}{r} p(\gamma-1)/\gamma (2m + v \cot \theta) = 0$$

.../...

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} - \frac{\gamma}{\gamma-1} r \sin \theta \frac{P}{P(\psi)} \frac{dP(\psi)}{d\psi}$$

$$(1) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho(\Psi)} p^{1/\gamma} \left( \frac{v^2}{r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{\rho(\Psi)} p^{1/\gamma} r v \sin \theta$$

$$(\rho(\Psi) = \frac{1}{\rho} p^{1/\gamma})$$

sur le choc

$$(2) \quad u = v_y \sin \theta - v_x \cos \theta$$

$$v = v_y \cos \theta + v_x \sin \theta$$

$$v_x = v_x(\sigma) \quad v_y = v_y(\sigma)$$

$$p = p(\sigma) \quad \rho = \rho(\sigma)$$

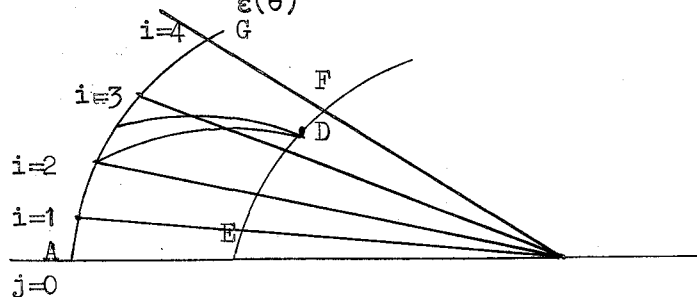
$$\Psi = 1/2 \frac{V_\infty}{V_{\max}} r_c^2 \sin^2 \theta$$

Paroi

$$(3) \quad u = v \frac{r - r_i}{r_i}$$

Nous introduisons les variables

$$(4) \quad \xi = \frac{r - r_i(\theta)}{\varepsilon(\theta)} \quad \text{où } \varepsilon(\theta) = r_c(\theta) - r_i(\theta)$$



Nous dessinons  $m$  rayons dans les demi-plans supérieurs et inférieurs ; au total de  $2m+1$  (l'axe compris). Nous représentons les inconnues par des polynômes de LAGRANGE en tenant compte des conditions de symétrie.

$$(5) \quad u \approx \sum_{j=0}^m u_j^0(\xi) \theta^{2j} \quad p, \rho$$

$$v \approx \sum_{j=0}^m v_j^0(\xi) \theta^{2j+1}$$

$$r \approx \sum_{j=0}^m r_j^0 \theta^{2j}$$

Les valeurs  $u_j^0$ ,  $v_j^0$  et  $r_{ck}^0$  sont les fonctions linéaires des valeurs  $u$ ,  $v$ , et  $r_c$  le long de chacun des  $m+1$  rayons dans le demi plan supérieur.

Nous substituons les dérivées par rapport à  $\theta$  dans les équations (1) et nous demandons que ces équations soient satisfaites le long de chaque rayon.

Donc nous obtenons un système des équations ordinaires pour déterminer

les inconnues  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $p_k$ ,  $\psi_k$  (et  $\rho_k$ ) (6) et (7)

Il faut ajouter une conditions géométrique entre la distance de l'onde de choc des paroi et l'angle de choc.

$$\frac{d\theta_k}{d\theta} = - (r_{tk} + \xi \epsilon_k) \cot. (\alpha_k + \theta_k) - \frac{dr_{tk}}{d\theta}$$

Nous cherchons la solution des équations (6) et (7) qui satisfont aux conditions sur le choc, à la condition à la paroi, à la condition de symétrie et enfin à la condition que la solution soit analytique au voisinage de la ligne sonique (équivalent à la condition que les dérivées soient bornées partout).

La deuxième condition est satisfaite automatiquement par les polynômes (5). En même temps ces polynômes satisfont à la condition de symétrie. Pour effectuer le calcul on choisit  $m+1$  paramètre:  $r_{ck}$  .. Donc les équations (2) déterminent toutes les inconnues sur le choc et, en résolvant (5) les coefficients  $u_j^0(1)$ ,  $v_j^0(1)$  .. Ensuite, nous déterminons les dérivées  $u_k^1$  sur le choc, les deuxièmes membres des équations (6), et par conséquent les dérivées  $\frac{du_k}{d\xi}$ . Maintenant nous déterminons les valeurs de  $u_k$  à la fin du premier pas de  $\xi$ , en résolvant les équations (6) par une méthode aux différences. Nous répétons le calcul effectué à  $\xi=1$  et déterminons les inconnues à la fin du deuxième pas etc. De cette façon nous arrivons à la paroi et nous vérifions si la condition (3) est satisfaite. Sinon, nous retournons à la ligne  $\xi=1$  et après une correction des valeurs de  $r_{ck}$  nous répétons le calcul. Nous continuons jusqu'à ce que la condition (3) soit satisfaite.

REFERENCES - (BIBLIOGRAPHIE)

- GODUNOV S.K. et al. Solutions des problèmes unidimensionnels  
de dynamique de gaz avec maillages mobiles  
NAUKA -Moscou 1970
- RUSANOV V.V. et al (BVLIR) NAUKA -Moscou 1964  
NASA TTF 380
- RUSANOV V.V. et LIUBINOV A.A.N. NAUKA - Moscou 1970
- HOLT M. (ed) Basic Developments in Fluid Dynamics  
Vol I  
Academic Press 1965
- TELENIN G.F. et al NASA TTF-297 - 1964
- CHATTOT J.J. University of California  
College of Engineering Report AS 71-3

=====