PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

83.05

GENERALISATION DES ALGEBRES DE BEURLING

Philippe Tchamitchian

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

83.05

GENERALISATION DES ALGEBRES DE BEURLING

Philippe Tchamitchian

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

GENERALISATION DES ALGEBRES DE BEURLING

Philippe Tchamitchian

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de généraliser la notion d'algèbre de Beurling.

Si $w_o : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est un poids, on pose

$$Aw_o = \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, w_o(\xi) d\xi < +\infty \right\}.$$

Sous les quatre hypothèses suivantes :

(a) $w_o(\xi+\eta) \leq C \, w_o(\xi) \, w_o(\eta)$

(b) $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbb{R}^N)$

(c) $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$

(d) $1 \leq w_o(\xi) \leq C(1+|\xi|^2)^n$,

Aw_o est une algèbre, dite de Beurling (voir [1] et [4]), dont on peut caractériser les multiplicateurs ponctuels par le théorème suivant .

THEOREME 0.1. $m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ <u>est un multiplicateur d'une algèbre de Beurling</u> Aw_o <u>si et seulement s'il existe</u> $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$, <u>telle que</u> $m(x)\,\varphi(x-t) \in Aw_o$ <u>uniformément en</u> $t \in \mathbb{R}^N$.

Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, avec $s > \frac{N}{2}$, sont les exemples les plus classiques d'algèbres de Beurling.

Nous avons voulu alléger les hypothèses sur le poids, notamment supprimer l'hypothèse (d) (c'est-à-dire envisager des poids croissants ou décroissants, à vitesse lente ou rapide), de façon à obtenir l'un des deux résultats suivants :

(0.1) m <u>est un multiplicateur de</u> Aw_o <u>si et seulement si</u> $x \longrightarrow m(x-t)$ <u>envoie</u> $\left\{f \in Aw_o / \mathrm{Supp}\, f \subset B(0,\, 1)\right\}$ <u>dans</u> Aw_o <u>uniformément en</u> $t \in \mathbf{R}^N$;

(0.2) Aw_o <u>est une algèbre de Banach</u>.

La propriété (0.1) occupe les deux premières parties de ce travail. Nous l'obtenons en imposant une structure particulière à l'espace Aw_o, que nous avons appelée structure de puzzle-L^2. Celle-ci est donc étudiée pour elle-même dans la première partie. Nous montrons ensuite comment l'appliquer à Aw_o, en partant de ce que l'existence de fonctions à support compact dans Aw_o implique que Aw_o soit non quasi-analytique, et, de là, en établissant un lien entre Aw_o et certaines classes non quasi-analytiques. Les conditions que nous imposons à w_o deviennent alors :

$$\text{(e)} \quad \forall\ \xi \in \mathbf{R}^N \qquad w_\infty(\xi) = \mathrm{Max}\left\{\sup_{\eta \in \mathbf{R}^N} \frac{w_o(\xi+\eta)}{w_o(\eta)},\ \sup_{\eta \in \mathbf{R}^N} \frac{w_o(\eta-\xi)}{w_o(\eta)}\right\} < +\infty$$

$$\text{(f)} \quad \frac{\log w_\infty(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^N).$$

Une fois établi que Aw_o, sous ces hypothèses, est un puzzle-L^2, nous en déduisons la propriété (0.1), que nous poussons plus loin en dégageant un résultat à propos des opérateurs pseudo-différentiels sur Aw_o.

Nous traitons la propriété (0.2) dans la troisième partie. Nous commençons par déterminer les poids w_1 tels que Aw_o soit un "module" sur Aw_1, c'est-à-dire tels que les éléments de Aw_1 soient des multiplicateurs de Aw_o. Dans les cas où nous pouvons prendre $w_1 = w_o$, nous trouvons les algèbres Aw_o, qui existent dans des conditions plus larges que celles de Beurling : il suffit simplement que la condition (c) soit vérifiée. Et puisque cela est vrai si $w_o(x) = e^{|x|^\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$, ou bien si $w_o(x) = (1+|x|^2)^s e^{|x|}$, où $s > \frac{N}{2}$, il n'est pas nécessaire que w_o soit à croissance lente, ni même que Aw_o soit non quasi-analytique.

Lorsque Aw_o est une algèbre, il existe une condition nécessaire et suffisante (CNS) particulièrement simple pour que Aw_o soit un puzzle-L^2, à savoir :

$$\text{(h)} \qquad \frac{\operatorname{Log} w_o(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^N).$$

(h) est aussi la CNS pour que Aw_o vérifie la propriété (0.1), qui prend alors la forme simplifiée suivante, proche du théorème 0.1.

THEOREME 0.2. $m : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est un multiplicateur de Aw_o si et seulement s'il existe $\varphi \in Aw_o$, $\varphi = 1$ sur un voisinage de 0, telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^N$, $m(x)\,\varphi(x-t) \in Aw_o$, et $\|m(x)\,\varphi(x-t)\|_{Aw_o} \leq C$.

Le cas où Aw_o est à la fois une algèbre de Banach et un puzzle-L^2 (ce que nous avons nommé algèbre de Beurling généralisée) apparaît donc spécialement intéressant. Il fait l'objet de la quatrième partie dans laquelle, après avoir établi quelques propriétés générales, nous améliorons le théorème obtenu à la deuxième partie sur les opérateurs pseudo-différentiels. Puis, nous donnons deux exemples d'algèbres de Beurling généralisées, dont nous déterminons complètement les multiplicateurs. Le premier est le cas bien connu des algèbres de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, où $s > \frac{N}{2}$. Le second concerne les poids log-concaves à croissance au moins aussi rapide que $e^{\operatorname{Log}^2 |x|}$; il recouvre le cas des poids de Gevrey $e^{a|x|^\alpha}$, où $a > 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Enfin, nous nous plaçons du point de vue des transformées de Fourier dans la cinquième et dernière partie, en démontrant certaines propriétés des fonctions à spectres compacts d'un espace $L^2(\mathbf{R}^N, w_o(x)\,dx)$, puis $L^p(\mathbf{R}^N, w_o(x)\,dx)$, qui concernent la dérivation et la presque-orthogonalité. Nous terminons en complétant par une information numérique un résultat d'Yves Meyer, qui donne une condition suffisante d'appartenance à $BMO(\mathbf{R}^N)$ à partir d'une décomposition de Littlewood-Paley.

NOTATIONS

La lettre N est réservée à la dimension.

$x \in \mathbf{R}^N$ veut dire $x = (x_1, \ldots, x_N)$, où $x_i \in \mathbf{R}$.

On a adopté la notation multi-indicielle : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$,

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}.$$

Si $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est une fonction, $\operatorname{Supp} f$ désigne son support, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

Si E est un espace vectoriel topologique, E' est son dual, et $\mathcal{F}E$ son image par la transformée de Fourier. $\|.\|_E$ et $(.\,,\,.)_E$ désignent sa norme et son produit scalaire, lorsqu'ils existent.

Les distributions sont notées comme le fait Laurent Schwartz : $C_o^\infty(\mathbf{R}^N) = D(\mathbf{R}^N)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide, $D'(\mathbf{R}^N)$ l'espace des distributions, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ l'espace des distributions tempérées.

Si $a \in \mathbf{R}^N$, δ_a est la distribution de Dirac en a.

Les constantes sans importance sont notées $C, C_1, C_2, \ldots$

Les chiffres entre crochets, par exemple ([4]), renvoient à la bibliographie.

1. LE POINT DE VUE ABSTRAIT

1.1. Les puzzles-L^p

Dans toute cette partie, on suppose donnés un espace fonctionnel Φ', au sens de Gelfand, Shilov et Vilenkin (voir [6], et l'annexe 1 pour un bref rappel), et un sous-espace E, muni d'une norme invariante par translation, dont la topologie est plus fine que celle induite par Φ'. E sera toujours un espace de Banach.

DEFINITION 1.1. *On appelle fonction découpante associée aux compacts* K *et* H *de* $\mathbb{R}^N$, $H \subset \overset{\circ}{K}$, *toute fonction positive* $\Delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *telle que*

(D.a) Supp $\Delta = K$ *et* $\Delta = 1$ *sur* H

(D.b) Δ *réalise une partition de l'unité, c'est-à-dire qu'il existe* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1,1]^N$ *tels que, pour tout* x :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \Delta(x-x_1-k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \Delta(x-x_2-k) + \ldots + \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \Delta(x-x_n-k) = 1. \tag{1}$$

DEFINITION 1.2. E *est un puzzle-*L^p *si, quels que soient les compacts* K *et* H, H *d'intérieur non vide et* $H \subset \overset{\circ}{K}$, *il existe une fonction découpante* Δ, *associée à* K *et* H, *telle que*

(P.a) $\forall\ f(x) \in E \qquad \Delta(x)\, f(x) \in E$

(P.b) *si on pose, pour tout* $f(x) \in E$, $F_\Delta(t) = \|f(x)\,\Delta(x-t)\|_E$, *alors* $F_\Delta(t) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *et il existe une constante* $C > 0$, *dépendant de* K *et de* H, *telle que*

$$\frac{1}{C}\|F_\Delta\|_{L^p} \le \|f\|_E \le C\|F_\Delta\|_{L^p}. \tag{2}$$

VOCABULAIRE. *Si une fonction découpante* Δ, *pour les compacts* K *et* H, *vérifie (P.a) et (P.b), on dit que* Δ *est associée à* E.

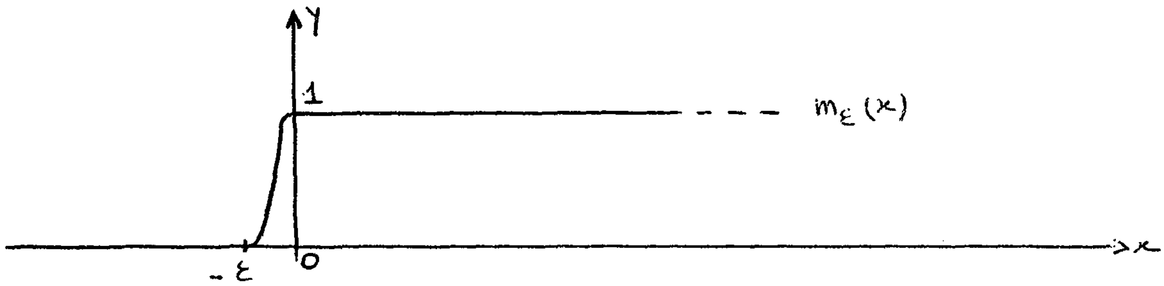
Les exemples de puzzles-L^p que nous pouvons donner tout de suite sont, en premier lieu, les espaces $L^p(\mathbf{R}^N, w_o(x)\,dx)$, où w_o est un poids quelconque. On a en effet, si $f \in L^p(w_o(x)\,dx)$:

$$\|F_\Delta\|_{L^p} = \|\Delta\|_{L^p} \|f\|_{L^p(w_o)} \, ,$$

ce qui est plus précis que (2).

Il y a aussi les espaces de Sobolev $\mathcal{L}^s_p(\mathbf{R}^N)$, et plus généralement les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbf{R}^N)$, qui sont des puzzles-L^p (voir les démonstrations dans Strichartz [14] et Peetre [11] respectivement).

En revanche, les espaces H^p de Hardy ne sont pas des puzzles-L^p, parce qu'ils ne contiennent pas de fonctions non nulles à supports compacts. $BMO(\mathbf{R}^N)$ n'est pas non plus un puzzle-L^p, quel que soit p, parce que la deuxième condition, (P.b), de la définition n'est pas vérifiée. Montrons-le en dimension 1. Si (P.b) était paire, toute fonction du type suivant :



serait un multiplicateur de $BMO(\mathbf{R})$, ce qui est faux. Il suffit de prendre $f(x) = \log|x|$ pour le constater.

REMARQUE. Il y a un lien étroit entre les puzzles-L^p et les espaces du type de Wiener définis par Hans G. Feichtinger. Ce point est développé dans l'annexe 1.

<u>On suppose maintenant que</u> E <u>est un puzzle-L^p</u>. Cette dénomination fait référence à la structure des éléments de E. En effet, si $f \in E$ et si Δ est une fonction découpante associée à E, on écrit

(3) $$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f(x)\,\Delta(x-x_1-k) + \ldots + \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f(x)\,\Delta(x-x_n-k),$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des points de $[-1,1]^N$ vérifiant (1) avec Δ. (3) se formalise ainsi :

(4) $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f_{i,k}(x)\,,$$

où $f_{i,k} \in E$ et $\operatorname{Supp} f_{i,k} \subset x_i + k + K$. Chaque élément de E est donc un "puzzle", norme d'éléments à supports compacts de E, qui en sont les "pièces". Les supports des "pièces" forment un recouvrement localement fini du support de f.

De telles décompositions permettent de substituer au point de vue continu de la définition 1.2 (où l'on estime la norme L^p de $F_\Delta(t)$) un point de vue discret (où l'on estime la norme ℓ^p de la suite $(\|f_{i,k}\|_E)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ k\in\mathbf{Z}^N}}$ ce qui correspond à une discrétisation du paramètre t). L'objet de ce premier paragraphe est de démontrer la stricte équivalence de ces deux points de vue.

Pour cela, nous commençons par estimer la norme de f en fonction des normes des "pièces" $f_{i,k}$. Nous le faisons en deux étapes. La première consiste à se restreindre à certains éléments de E, définis de la manière suivante.

DEFINITION 1.3. <u>On pose, si</u> K <u>est un compact,</u>

$$E_K = \left\{ f\in E / f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f_k(x-k)\ ,\ f_k\in E \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} f_k \subset K \right\}.$$

Les supports des fonctions $f_k(x-k)$ sont 2 à 2 disjoints si et seulement si $(K-K) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$. Dans ce cas, l'appartenance à E_K s'exprime simplement.

PROPOSITION 1.1. <u>Soit</u> K <u>un compact de</u> $\mathbf{R}^N$, <u>avec</u> $(K-K)\cap Z^N = \{0\}$. <u>Soit</u> $(f_k)_{k\in Z^N}$ <u>une famille d'éléments de</u> E, <u>vérifiant</u> $\operatorname{Supp} f_k \subset K$. <u>Alors,</u> $f(x) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^N} f_k(x-k)$ <u>appartient à</u> E <u>si et seulement si</u> $\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|f_k\|_E^p < +\infty$. <u>De plus, il</u>

existe une constante $C > 0$ telle que

$$(5) \qquad \frac{1}{C} \sum_k \|f_k\|^p \leq \|f\|_E^p \leq C \sum_k \|f\|^p .$$

L'intérêt de la Proposition 1.1, démontrée plus loin, réside dans le fait que tout élément de E est somme finie d'éléments de E_K, si K est bien choisi. Autrement dit, il existe $K_1, K_2, \ldots, K_n$ tels que

$$E = E_{K_1} + E_{K_2} + \ldots\ldots + E_{K_n} .$$

C'est ce qu'exprime la proposition suivante, qui nous permet d'estimer la somme des éléments de E.

PROPOSITION 1.2. Soit K un compact de $\mathbf{R}^N$, d'intérieur non vide, tel que $(K-K) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$. Alors, il existe $x \in \mathbf{N}$ et $C > 0$, dépendant de K, et des points $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1,1]^N$, tels que pour toute $f \in E$

$$(6) \qquad \begin{cases} f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n, \quad \underline{\text{où}} \quad f_j \in E_{K+x_j} \\ \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_E^p \leq \|f\|_E^p \leq C \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_E^p . \end{cases}$$

Soit alors $f \in E$. L'égalité (4) était $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} f_{i,k}(x)$, où $f_{i,k} \in E$ et $\operatorname{Supp} f_{i,k} \subset K + x_i + k$. On voit que la même égalité, écrite différemments, apparaît dans (6). Mais (6) et (5) nous apprennent en plus qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a

$$(7) \qquad \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \|f_{i,k}\|_E^p \leq \|f\|_E^p \leq C \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \|f_{i,k}\|_E^p .$$

Les inégalités (7) ne sont cependant pas vraies a priori, c'est-à-dire pour toute $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} f_{i,k}$, où $f_{i,k} \in E$ et $\operatorname{Supp} f_{i,k} \subset K + x_i + k$, à cause du fait que les supports des $f_{i,k}$ se chevauchent. Il faut savoir, pour affirmer la validité de (7), soit que $f \in E$ et que $f_{i,k}(x) = f(x)\,\Delta(x - x_i - k)$, où Δ est une fonction découpante associée à E, soit que $(K - K) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$.

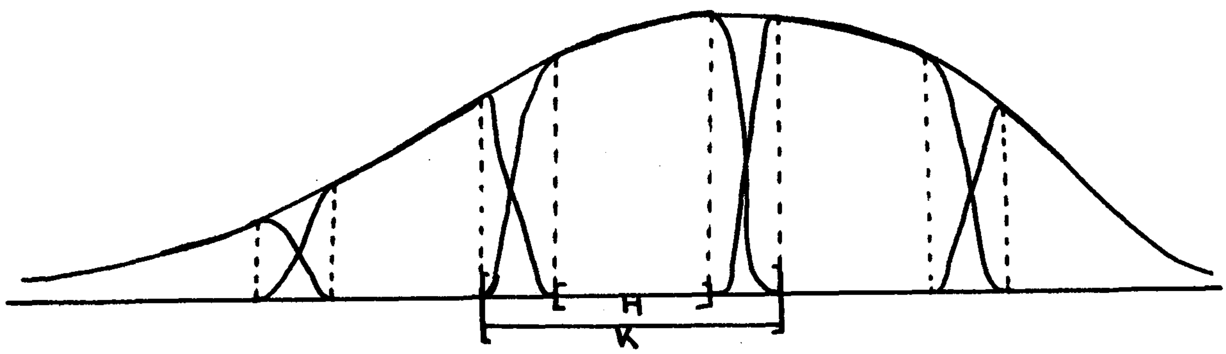
On est ainsi amené à poser la définition suivante.

DEFINITION 1.4. Soit K un compact de $\mathbf{R}^N$, d'intérieur non vide, et tel que $(K - K) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$. Si $f \in E$, on appelle K-décomposition de f une écriture $f = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$, où $f_j \in E_{K+x_j}$, $x_j \in [-1\ ,\ 1]^N$, avec

$$\frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_E^p \leq \|f\|_E^p \leq C \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_E^p ,$$

C ne dépendant que de K.

Pour un même élément de E, il existe plusieurs K-décompositions, dépendant du compact choisi et de la fonction découpante.



Il faut maintenant démontrer les propositions 1.1 et 1.2.

<u>Démonstration de la proposition</u> 1.1. On choisit un compact H d'intérieur non vide, tel que $K-H$ soit d'intérieur non vide, que $\left[(K-H)-(K-H)\right]\cap Z^N=\{0\}$, puis un autre compact K', tel que $K-H\subset \overset{\circ}{K'}$ et $\left[K'-(K-H)\right]\cap Z^N=\{0\}$. Soit alors Δ une fonction découpante associée à K' et $K-H$, vérifiant (P.a) et (P.b).

Soit $a\in\mathbb{N}$ tel que $K-K'\subset B(0,a)$. Soit, si $L\in\mathbb{N}$, $S_L(x)=\sum_{|k|\le L} f_k(x-k)$. Alors, $S_L\in E$, et, si $t\in R^N$,

$$S_L(x)\,\Delta(x-t)=\sum_{|k|\le L} f_k(x-k)\,\Delta(x-t).$$

Si $|t|\in[j,j+1]$, où $j\in\mathbb{N}$, $f_k(x-k)\,\Delta(x-t)$ est non nul seulement si k appartient à une couronne, notée $\mathcal{C}_j$:

si $j\le a+1$, ce sera $B(0\,,\,a+j+1)$

si $j>a+1$, ce sera $-a+j\le |x|\le a+j+1$.

Il existe donc C_1, constante dépendant de Δ et de a, telle que, pour tout j :

$$\int_{j\le|t|\le j+1} \|S_L(x)\,\Delta(x-t)\|_E^p\,dt\le C_1\sum_{\substack{|k|\le L\\ k\in\mathcal{C}_j}}\|f_k\|_E^p\,.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\int_{R^N} \|S_L(x)\,\Delta(x-t)\|_E^p\,dt \le C_2 \sum_{|k|\le L} \|f_k\|_E^p ,$$

où C_2 ne dépend que de Δ, a et N. Les inégalités $|(2)|$ appliquées à S_L, donnent alors une constante C_3 telle que, pour tout L :

$$\|S_L\|_E^p \le C_3 \sum_{|k|\le L} \|f_k\|_E^p .$$

Par conséquent, si $\sum_{k\in Z^N} \|f_k\|_E^p < +\infty$, alors $f\in E$, et

$$\|f\|_E^p \le C_3 \sum_{k\in Z^N} \|f_k\|_E^p .$$

Pour démontrer une inégalité en sens inverse, on remarque que, si $j\in Z^N$ et $t\in j+H$, $f_k(x-k)\,\Delta(x-t)$ est non nul seulement si $k=j$ et $x\in j+K$. Dans ce cas, on aura :

$$f(x)\,\Delta(x-t) = f_j(x-j)\,\Delta(x-t) = f_j(x-j).$$

On en déduit, puisque $(H-H)\cap Z^N = \{0\}$:

$$\int_{R^N} \|f(x)\,\Delta(x-t)\|_E^p\,dt \ge \sum_{j\in Z^N} \int_{j+H} \|f(x)\,\Delta(x-t)\|_E^p\,dt$$

$$\ge |H| \sum_{j\in Z^N} \|f_j\|_E^p .$$

Les inégalités $|(2)|$, appliquées cette fois à f, montrent qu'il existe $C_4 > 0$ telle que

$$C_4 \sum_{k\in Z^N} \|f_k\|_E^p \le \|f\|_E^p$$

<u>Démonstration de la proposition 1.2</u>. Soit H un compact inclus dans $\overset{o}{K}$, et Δ une fonction découpante associée à E, pour les compacts K et H. D'après (1), il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1,1]^N$ tels que, pour tout x :

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in Z^N} \Delta(x-x_j-k).$$

Si $f\in E$, on pose

$$f_j(x) = \sum_{k \in Z^N} f(x)\, \Lambda\,(x-x_j-k), \qquad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit maintenant de montrer l'existence d'une constante C_1, ne dépendant que de K et Λ, telle que $\|f_j\|_E \leq C_1 \|f\|_E$ pour tout j. Cela est très proche d'un résultat de Hans G. Feichtinger ([5], Théorème 2), et se démontre de façon voisine.

On choisit $\psi \in \mathcal{C}_o^\infty(R^N)$ associée à E, avec $\psi = 1$ sur $K-K$. Puis, on pose, si $t \in R^N$:

$$F_j(t) = \sum_{k \in Z^N} \|f(x)\, \Lambda(x-x_j-k)\|_E \; 1_{x_j+k+K}(t).$$

Alors

(8) $$\int_{R^N} |F_j(t)|^p dt = |K| \sum_{k \in Z^N} \|f(x)\, \Lambda(x-x_j-k)\|_E^p.$$

Or, il est facile de voir que

$$F_j(t) = \sum_{k \in Z^N} \|f(x)\, \Lambda(x-x_j-k)\, \psi(x-t)\|_E \; 1_{x_j+k+K}(t).$$

La condition (P.a) implique alors

$$|F_j(t)| \leq C_2 \sum_{k \in Z^N} \|f(x)\, \psi(x-t)\|_E \; 1_{x_j+k+K}(t).$$

Quand varie k, les ensembles x_j+k+K sont 2 à 2 disjoints. On en déduit que

$$\int_{R^N} |F_j(t)|^p\, dt \leq C_2^p \int_{R^N} \|f(x)\, \psi(x-t)\|_E^p\, dt.$$

D'après (P.b) :

(9) $$\int_{R^N} |F_j(t)|^p\, dt \leq C_3 \|f\|_E^p .$$

Alors, les inégalités (8) et (9), avec la proposition 1.1, permettent de conclure.

Les propositions 1.1 et 1.2 ont une réciproque, qui exprime le fait qu'on a une double caractérisation des puzzles-L^p. La première, celle de la définition, peut être qualifiée de continue, ou de L^p, tandis que la seconde serait plutôt la caractérisation discrète, ou ℓ^p.

PROPOSITION 1.3. On obtient une définition des puzzles-L^p équivalente à la définition 1.2 en remplaçant (P.b) par :

(P.c) il existe un compact K_o, d'intérieur non vide, tel que les inégalités (5) soient vraies sur E_{K_o}, et que tout élément de E admette une K_o-décomposition.

Démonstration. On suppose que (P.c) est vraie sur E. Soient K et H compacts, H d'intérieur non vide, $H \subset \overset{o}{K}$, et Δ une fonction découpante associée à K et H, vérifiant (P.a). On veut montrer que Δ vérifie (P.b).

La première partie de la démonstration consiste à remplacer K_o par un compact adéquat. Soit K_1 un compact d'intérieur non vide, inclus dans K_o, tel que $K_1-K_1 \subset H$ et $(K_1-K_1) \cap Z^N = \{0\}$. Il est clair que les éléments de E_{K_1} vérifient encore (5). D'autre part, il existe $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m \in \mathcal{C}_o^\infty(R^N)$ telles que $\operatorname{Supp} \psi_j \subset y_j + K_1$, où $y_j \in R^N$, et $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_m(x) = 1$ si $x \in K_o$, chaque ψ_j vérifiant (P.a).

Soit alors $f \in E$. D'après (P.c), on peut supposer $f \in E_{K_o}$, soit $f(x) = \sum_{k \in Z^N} f_k(x-k)$, avec $\operatorname{Supp} f_k \subset K_o$. Ecrivant $f_k = f_k\psi_1 + f_k\psi_2 + \ldots + f_k\psi_m$, on se ramène, puisque ψ_j vérifie (P.a), au cas $\operatorname{Supp} f_k \subset K_1$, c'est-à-dire au cas où $f \in E_{K_1}$.

La dernière partie, qui vise à démontrer les inégalités (2) pour f et Δ, se fait sur le modèle des deux démonstrations précédentes. A partir de (5), on a

$$(10) \quad \frac{1}{C} \sum_{k \in Z^N} \|f_k(x-k)\Delta(x-t)\|_E^p \leq \|f(x)\,\Delta(x-t)\|_E^p \leq C \sum_{k \in Z^N} \|f_k(x-k)\,\Delta(x-t)\|_E^p .$$

Or, $f_k(x-k)\,\Delta(x-t)$ est non nul seulement si $t \in k+K_1-K$, d'où

$$(11) \quad \int_{R^N} \|f_k(x-t)\,\Delta(x-t)\|_E^p\, dt \leq C_1\, |K_1-K|\, \|f_k\|_E^p ,$$

puisque Δ vérifie (P.a), (10) et (11) donnent alors :

$$\int_{R^N} \|f(x)\,\Lambda(x-t)\|_E^p\, dt \le C_2 \|f\|_E^p .$$

Dans l'autre sens, il faut remarquer que, si $t \in k+K_1$, alors $f_k(x-k)\,\Lambda(x-t) = f_k(x-k)$. Par conséquent :

(12) $$\int_{R^N} \|f_k(x-k)\,\Lambda(x-t)\|_E^p\, dt \ge |K_1|\,\|f_k\|_E^p .$$

Synthétisant (12) et (10) avec (5), on obtient :

$$\int_{R^N} \|f(x)\,\Lambda(x-t)\|_E^p\, dt \ge C_3 \|f\|_E^p .$$

Le point de vue abstrait s'achève pour le moment, et se justifie, par l'étude des multiplicateurs d'un puzzle-L^p. Quelques propriétés supplémentaires sont données dans les annexes 1 et 2.

1.2. Les multiplicateurs des puzzles-L^p

DEFINITION 1.5. $m : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est un multiplicateur de E si, pour tout $f \in E$, $m(x)\,f(x) \in E$, et si l'opérateur $T_m : E \to E$ qui à f associe $m.f$ est continu.

Cette définition est en réalité incomplète. Car, puisque E est un sous-espace d'un espace fonctionnel Φ', il faut supposer que m est un multiplicateur de Φ'. Ainsi, si E est par exemple un espace de distributions, on supposera que m est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Si $E \subset L^2(R^N)$, on supposera seulement que m est borné.

Si E est un puzzle-L^p, ses multiplicateurs vérifient une propriété locale qu'on peut résumer ainsi : les multiplicateurs d'un puzzle sont les multiplicateurs des pièces du puzzle.

THEOREME 1.1. Soit E un puzzle-L^p, K un compact d'intérieur non vide. m est un multiplicateur de E si et seulement si $m(x-t)$ envoie $\{f \in E / \mathrm{Supp}\, f \subset K\}$ dans E uniformément par rapport à t, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une constante $C>0$, dépendant de K et de m, telle que, si $f \in E$ et $\mathrm{Supp}\, f \subset K$, alors $m(x-t)\, f(x) \in E$, et $\|m(x-t)\, f(x)\|_E \leq C\|f\|_E$, pour tout $t \in \mathbf{R}^N$.

Démonstration. Le théorème du graphe fermé et l'invariance de la norme de E par translation impliquent que la condition est nécessaire.

Nous allons donner deux preuves que la condition est suffisante, l'une "continue" et l'autre "discrète", afin de montrer que l'équivalence des deux points de vue s'étend aux multiplicateurs.

Dans le cas continu, on choisit Δ fonction découpante associée à E, pour deux compacts K et H, $H \subset \overset{\circ}{K}$ et H d'intérieur non vide, puis Δ_1 une autre fonction découpante, associée à E et dont le support est inclus dans H. Alors, on a $\Delta_1(x) = \Delta_1(x)\, \Delta(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Si maintenant $t \in \mathbf{R}^N$, $m(x)\, \Delta_1(x-t) \in E$, avec $\|m(x)\, \Delta_1(x-t)\|_E \leq C_1$, quel que soit t. Soit $f \in E$; alors $m(x)\, \Delta_1(x-t)\, f(x) \in E$, puisque $\mathrm{Supp}\, f(x+t)\, \Delta_1(x) \subset K$. Par conséquent, $m(x)\, \Delta_1(x-t)$ est un multiplicateur de E, nécessairement de norme $\leq C_1$ uniformément par rapport à t. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} \|m(x)\, f(x)\, \Delta_1(x-t)\|_E^p\, dt &= \int_{\mathbf{R}^N} \|m(x)\, f(x)\, \Delta_1(x-t)\, \Delta(x-t)\|_E^p\, dt \\ &\leq C_1^p \int_{\mathbf{R}^N} \|f(x)\, \Delta\, (x-t)\|_E^p\, dt \\ &\leq C_2^p\, \|f\|_E^p ,\end{aligned}$$

ce qui prouve $m(x)\, f(x) \in E$, et $\|m.f\|_E \leq C_3\|f\|_E$.

Le cas discret est un peu plus simple. Soit K_o un compact d'intérieur non vide, $K_o \subset K$ et $(K_o - K_o) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$. Soit $f \in E$. D'après la proposition 1.2, on peut supposer $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} f_k(x-k)$, avec $\mathrm{Supp}\, f_k \subset K_o$. Alors, si l'on pose $m_k(x) = m(x+k)$, on a

$$m(x)\, f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} m_k(x-k)\, f_k(x-k).$$

On utilise alors la proposition 1.1 pour prouver $m.f \in E$, en écrivant :

$$\|m.f\|_E^p \le C_4 \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|m_k f_k\|_E^p \le C_5 \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|f_k\|_E^p \le C_6 \|f\|_E^p .$$

Lorsque E est une algèbre de Banach, on a le corollaire important suivant.

COROLLAIRE 1.1. Supposons que E soit un puzzle-L^p et une algèbre de Banach. Alors, m est un multiplicateur de E si et seulement s'il existe K compact d'intérieur non vide et $\varphi \in E$, $\varphi = 1$ sur K, tels que $m(x-t)\,\varphi(x) \in E$, uniformément par rapport à t.

Démonstration. La condition est suffisante, car si $f\in E$, avec $\operatorname{Supp} f \subset K$, $m(x-t)\, f(x) = m(x-t)\,\varphi(x)\, f(x)$, d'où $\|m(x-t)\, f(x)\|_E \le \|m(x-t)\,\varphi(x)\|_E \|f\|_E \le C\|f\|_E$. Elle est nécessaire de façon évidente.

Ce corollaire s'applique notamment aux algèbres de Beurling (d'ailleurs, la définition discrète des puzzles-L^2 est sous-jacente dans l'article de Beurling). Ainsi, dans le cas des espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, où $s > \frac{N}{2}$, il redonnera la caractérisation bien connue des multiplicateurs de ces algèbres, redémontrée au paragraphe 4.3.

REMARQUE TECHNIQUE. Ces résultats ont été obtenus sans rien imposer à la forme des compacts K et H, dans la définition 1.2 notamment. Il est facile de voir qu'on peut se contenter de prendre uniquement des cubes fermés, ou des boules fermées, sans rien y changer. C'est ce que nous ferons dans ce qui va suivre.

Nous pouvons maintenant quitter ce terrain abstrait pour mener l'étude des espaces Aw_o. Nous aurons d'abord des résultats généraux, puis, distinguant des algèbres parmi ces espaces, nous pousserons plus loin l'étude des multiplicateurs.

2. ESPACES Aw_o - STRUCTURE DE PUZZLE-L^2. MULTIPLICATEURS ET OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

DEFINITIONS 2.1.

a. On appelle poids toute fonction $w : R^N \to [0,+\infty]$ localement intégrable.

b. Un poids w est à croissance lente (resp. décroissance lente) s'il existe C et n, réels positifs, tels que $w(x) \leq C(1+|x|^2)^n$ pour tout $x \in R^N$ (resp. $w(x) \geq C(1+|x|^2)^{-n}$).

c. Un poids w est à croissance rapide (resp. décroissance rapide) si, pour tout $n > 0$, il existe $C_n > 0$ tel que $w(x) \geq C_n(1+|x|^2)^n$ (resp. $w(x) \leq C_n(1+|x|^2)^{-n}$).

2.1. Définition provisoire des espaces Aw_o. Les espaces Aw_o comme puzzle-L^2.

Provisoirement, nous posons

DEFINITION 2.2. Soit w_o un poids. L'espace Aw_o est défini par

$$Aw_o = \left\{ f \in \mathcal{S}'(R^N) / \int_{R^N} |\hat{f}(\xi)|^2 w_o(\xi)\, d\xi < +\infty \right\}.$$

Une telle définition ne pose pas de problèmes si w_o est à décroissance lente. En revanche, quand w_o est à décroissance rapide, on souhaite alléger la condition $f \in \mathcal{S}'(R^N)$. Cela sera possible une fois l'étude des espaces Aw_o, dans le cas $w_o \geq 1$, plus avancée. Naturellement, la nouvelle définition ne remettra rien en cause de ce qui aura été démontré. Elle est donnée en l'annexe 2 .

Quand w_o est à décroissance rapide, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\xi|^n \hat{f}(\xi) \in L^1(R^N)$ si $f \in Aw_o$. Autrement dit, les éléments de Aw_o sont tous de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On munit l'espace Aw_o de la norme

$$\|f\|_{Aw_o} = \left(\int_{R^N} |\hat{f}(\xi)|^2 w_o(\xi)\, d\xi . \right)^{1/2}$$

Aw_o est alors un Hilbert, dont la norme est invariante par translation.

Le but de la partie 2 est de donner des conditions suffisantes sur w_o pour que Aw_o soit un puzzle-L^2. Il est donc nécessaire que Aw_o contienne des fonctions à support compact, ce qui ne va pas de soi.

En dimension $N = 1$, cela implique

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Log}^+ w_o(x)}{1+x^2}\, dx < +\infty .$$

Ecrivons $w_o = e^{\theta_o}$. Beurling et Malliavin ([2]) ont montré que les conditions suivantes étaient suffisantes :

(13) $\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \sup_{x\in R} \left|\theta_o(x+t) - \theta_o(x)\right| < +\infty$

(14) $\dfrac{\theta_o^+(x)}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

D'après la définition 1.2, pour prouver que Aw_o est un puzzle-L^2, il faut déjà connaître certains multiplicateurs de Aw_o, qui soient des fonctions découpantes. L'idée naturelle que nous allons mettre en oeuvre est de choisir ces fonctions dont nous avons besoin dans un espace Aw_1, où w_1 est un majorant de w_o construit ad hoc.

Nous inspirant de la condition (13), nous posons, dans la suite de l'exposé <u>et quelle que soit la dimension</u>

(15) $$\theta_\infty(t) = \sup_{x\in R^N} \left|\theta_o(x+t) - \theta_o(x)\right| ,$$

puis $w_\infty(t) = e^{\theta_\infty(t)}$ et $w_1(t) = (1+|t|^2)^{\frac{N+1}{2}}\, w_\infty(t)$.

Le poids w_∞ est un régularisé sous-multiplicatif de w_o, qui majore w_o. Il est également son propre régularisé. Le poids w_1 nous fournit tout un espace de multiplicateurs de Aw_o.

PROPOSITION 2.1. <u>Soit</u> w_o <u>un poids vérifiant</u>

(13') $\forall\, t \in \mathbb{R}^N \qquad \theta_\infty(t) < +\infty$.

<u>Alors, tout élément de</u>

Aw_1, où $w_1(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w_\infty(x)$, est un multiplicateur de Aw_o.

Démonstration. Soient $f \in Aw_o$ et $m \in Aw_1$. Ecrivant $g(x) = m(x)\, f(x)$, on a $\hat{g} = \hat{m} * \hat{f}$. Cela donne

$$|\hat{g}(\xi)| \leq \int_{R^N} \left(\frac{1+|\xi-\eta|^2}{1+|\xi-\eta|^2}\right)^{\frac{N+1}{4}} |\hat{m}(\xi-\eta)|\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta$$

d'où, par l'application de Cauchy-Schwarz

(16)
$$|\hat{g}(\xi)|^2 \leq C_N \int_{R^N} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{N+1}{2}} |\hat{m}(\xi-\eta)|^2 |\hat{f}(\eta)|^2\, d\eta .$$

Par construction de w_∞, on a, pour tous $\xi, \eta \in R^N$:

(17)
$$w_o(\xi) \leq w_o(\eta)\, w_\infty(\xi - \eta).$$

Il suffit de réunir (16) et (17) pour conclure par

$$\|g\|_{Aw_o} \leq C_N \|m\|_{Aw_1} \|f\|_{Aw_o} .$$

Cette démonstration fait comprendre pourquoi nous avons besoin de w_∞ : à cause de l'importance primordiale de la relation (17). Ce point sera vu plus en détail dans la troisième partie.

Pour obtenir des fonctions découpantes dans Aw_1, il faut nous assurer que cet espace contient des fonctions à support compact. Ce sera le rôle de l'hypothèse suivante :

(18)
$$\int_{R^N} \frac{\theta_\infty(t)}{(1+|t|^2)^{\frac{N+1}{2}}}\, dt < +\infty ,$$

qui suppose que (13') est vérifiée (car, nécessairement, $\theta_\infty(t) < +\infty$ presque partout, et donc partout en vertu de la sous-additivité de θ_∞ : voir Proposition 2.2).

A cause de l'importance qu'aura dans la suite l'hypothèse (13'), nous appellerons (19) la double hypothèse (13') $\cup$ (18). Cela nous permettra de bien distinguer le rôle que joue chaque hypothèse. On a donc :

$$(19) \quad \begin{cases} \forall\, t\in\mathbb{R}^N \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\theta_o(x+t)-\theta_o(x)| = \theta_\infty(t) < +\infty & (13') \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\theta_\infty(t)}{(1+|t|^2)^{\frac{N+1}{2}}}\, dt < +\infty. & (18) \end{cases}$$

Le résultat que nous allons démontrer est :

THEOREME 2.1. Soit un poids w_o vérifiant (19). Alors, Aw_o est un puzzle-L^2.

L'hypothèse (19) est seulement suffisante dans ce théorème. Nous démontrerons dans la troisième partie une réciproque partielle.

THEOREME 2.2. Soit w_o un poids vérifiant (13'). Alors, l'espace Aw_o est un puzzle-L^2 si et seulement si w_o vérifie (18).

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous allons décrire les poids w_o vérifiant (13') et les poids w_∞ associés.

PROPOSITION 2.2. a) Un poids w_o vérifie (13') si et seulement s'il existe un poids p_1, de classe C^1 et dont le logarithme soit lipschitzien, et une constante $C_1 > 0$ tels que : $\frac{1}{C_1}\, p_1 \le w_o \le C_1 p_1$.

b) Soit w_o vérifiant (13') et $n\in\mathbb{N}$. Alors, il existe un poids p_n, de classe C^n, et une constante $C_n > 0$ tels que $\frac{1}{C_n}\, p_n \le w_o \le C_n\, p_n$. De plus, si $\theta_n = \log p_n$, toutes les dérivées partielles de θ_n d'ordre non nul et $\le n$ sont bornées.

c) Soit w_o vérifiant (13'). Alors, $w_o(t) \le C\, w_\infty(t)$, $w_\infty(0) = 1$, $w_\infty(t) = w_\infty(-t)$, et $w_\infty(s+t) \le w_\infty(s)\, w_\infty(t)$, quels que soient $s,t \in \mathbb{R}^N$.

d) Soit w_o un poids pair, tel que $w_o(0) = 1$ et $w_o(s+t) \le w_o(s)\, w_o(t)$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}^N$. Alors, w_o vérifie (13') et $w_\infty = w_o$.

Démonstration. a) On suppose que w_o vérifie (13'). En reprenant mot pour mot un argument de Beurling et Malliavin ([2], p. 306), on choisit $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $A = \left\{t\in\mathbb{R}^N / \theta_\infty(t) \le \alpha\right\}$ soit de mesure non nulle. Alors, $A-A$ contient une boule $B(x_o,r)$, $r > 0$. Grâce à la sous-additivité de θ_∞, on a $\theta_\infty(t) \le 2\alpha$ sur $B(x_o,r)$. On en déduit $\theta_\infty(t) \le M_1$ sur $B(0,r)$, puis $\theta_\infty(t) \le M_2\,|t|$ pour tout $t\in\mathbb{R}^N$.

On pose alors $\theta(x) = \int_{[0,1]^N} \theta_o(x+u)\,du$, puis $\pi_1(x) = \int_{[0,1]^N} \theta(x+u)\,du$, et enfin $p_1 = e^{\pi_1}$. On a :

$$|\theta_o(x) - \theta(x)| \leq \int_{[0,1]^N} |\theta_o(x+u) - \theta_o(x)|\,du \leq \int_{[0,1]^N} \theta_\infty(u)\,du = M_3 \ ,$$

et

$$|\theta(x+t) - \theta(x)| \leq \int_{[0,1]^N} |\theta_o(x+u+t) - \theta_o(x+u)|\,du \leq \theta_\infty(t).$$

On majore de même $|\theta(x) - \pi_1(x)|$, d'où on déduit $|\theta_o(x) - \pi_1(x)| \leq M$, ce qui s'écrit aussi $e^{-M} p_1 \leq w_o \leq e^M p_1$.

Or, p_1 est de classe C^1, avec, e_j étant le j-ème vecteur unitaire de base :

$$\frac{\partial \pi_1(x)}{\partial x_j} = \theta(x + e_j) - \theta(x).$$

Cela implique $\left\|\frac{\partial \pi_1}{\partial x_j}\right\|_\infty \leq \theta_\infty(e_j)$, pour tout j. π_1 est donc bien lipschitzien.

b) En itérant le procédé : $\pi_n(x) = \int_{[0,1]^N} \pi_{n-1}(x+u)du$, on trouve facilement les poids p_n.

c) et d) sont laissés au lecteur.

Donnons quelques exemples.

1) Si $w_o(x) = (1+|x|^2)^s$, $s\in\mathbb{R}$, alors w_o vérifie (13'), et $(1+|x|^2)^{|s|} \leq w_\infty(x) \leq C(1+|x|^2)^{|s|}$. Donc, w_o vérifie (19).

2) Plus généralement, si w_o est un poids de Beurling (voir Beurling [1] et l'introduction), alors w_o vérifie (19) et $w_\infty = w_o$.

3) Si $w_o(x) = e^{a|x|^\alpha}$, $a\in\mathbb{R}$ et $\alpha\geq 0$, w_o vérifie (13') seulement si $0 \leq \alpha \leq 1$. Dans ce cas, $w_\infty(x) = e^{|a||x|^\alpha}$. w_o vérifie donc (19) seulement si $0 \leq \alpha < 1$. On peut remarquer que le signe de a, comme en 1) le signe de s, est indifférent pour w_o. Cela vient de ce que w_o et $\frac{1}{w_o}$ ont le même régularisé w_∞.

Les poids w_o sont donc croissants ou décroissants.

4) Un exemple oscillant : si $w_o(x) = e^{|x|^{\alpha} \cos |x|^{1-\beta}}$, avec $\alpha \geq 0$ et $0 \leq \beta \leq 1$, alors w_o vérifie (13') seulement si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\beta \geq \alpha$. Alors, $e^{c_1 |x|^{1+\alpha-\beta}} \leq w_\infty(x) \leq e^{c_2 |x|^{1+\alpha-\beta}}$. w_o vérifie donc (19) dans le cas $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta > \alpha$.

5) On peut traiter de même les cas des poids non radiaux $(1+x_1^2)^{s_1} \ldots \ldots (1+x_N^2)^{s_N}$, $e^{a_1 |x_1|^{\alpha_1} + \ldots + a_N |x_N|^{\alpha_N}}$, etc....

Nous démontrons maintenant le théorème 2.1 dans les paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4. Le premier est le plus important. Il établit un lien entre les classes non quasi-analytiques et les espaces Aw_∞. Une telle idée, et les techniques utilisées pour l'exploiter, sont inspirées directement de Szolem Mandelbrojt, [8] et [9].

2.2. Classes non quasi-analytiques de fonctions et espaces Aw_o.

DEFINITION 2.3. a) Si $(M_n)_{n \in N}$ est une suite croissante log-convexe, avec $M_o = 1$, on note $C_N(M_n)$ la classe des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(R^N)$ telles que, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, on ait :

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \right\|_2 \leq \beta_f B_f^{|\alpha|} M_{|\alpha|},$$

où β_f et B_f sont deux constantes dépendant de f.

b) $C_N(M_n)$ est appelée quasi-analytique si elle ne contient pas de fonction à support compact non nulle.

Nous aurons souvent besoin des deux poids suivants :

$$\tau(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^n}{M_n} \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

définis pour chaque suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a une extension du théorème de Denjoy-Carleman en dimension N.

THEOREME 2.2. Soit $(M_n)_{n\in N}$ une suite croissante log-convexe, $M_o = 1$. Il y a équivalence entre

a) $C_N(M_n)$ est non quasi-analytique

b) $\displaystyle\int_o^{+\infty} \frac{\tau(r)}{1+r^2}\, dr < +\infty$

c) $\displaystyle\int_o^{+\infty} \frac{T(r)}{1+r^2}\, dr < +\infty$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < +\infty$.

Le résultat en dimension $N = 1$ est bien connu. On peut en trouver la démonstration dans Katznelson ([7], p. 114) ou dans Rudin ([11], p. 376). En dimension N quelconque, la preuve est la même, à quelques modifications simples près. C'est pourquoi nous ne la ferons pas ici.

Nous allons maintenant comprendre les rapports entre une classe $C_N(M_n)$ et l'espace A_{τ^2}, puis entre les poids τ et ceux qui vérifient (19). Cette dernière question sera vue en détail dans la partie 4 également (paragraphe 4.4).

PROPOSITION 2.3. Soient $C_N(M_n)$ une classe de fonctions, quasi-analytiques ou non. Soient $\tau(x) = \sup_{n\in N} \frac{|x|^n}{M_n}$, et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(R^N)$. Alors, $\varphi \in C_N(M_n)$ si et seulement s'il existe $C_\varphi > 0$ tel que

$$\int_{R^N} |\hat{\varphi}(C_\varphi \xi)|^2\, \tau(\xi)^2\, d\xi < +\infty.$$

Démonstration. Supposons $\varphi \in C_N(M_n)$, c'est-à-dire $\left\|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}\right\|_2 \le \beta_\varphi B_\varphi^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$, pour tout multi-indice α. Soit $n\in\mathbb{N}$, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ tel que

$|\alpha| = n$. L'égalité de Parseval montre que

$$\int_{R^N} |\xi_1|^{2\alpha_1} \ldots |\xi_N|^{2\alpha_N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq C_1 B_\varphi^{2n} M_n^2 .$$

Or

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 |\xi|^{2n} d\xi = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_N=n} |\xi_1|^{2\alpha_1} \ldots |\xi_N|^{2\alpha_N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi ,$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 |\xi|^{2n} d\xi \leq C_1 N^n B_\varphi^{2n} M_n^2 .$$

Posons $C_\varphi = 2N B_\varphi$. L'inégalité précédente montre que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(C_\varphi \xi)|^2 \frac{|\xi|^{2n}}{M_n^2} d\xi \leq C_2 2^{-n} ,$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(C_\varphi \xi)|^2 \tau(\xi)^2 d\xi < +\infty .$$

La réciproque se fait en "remontant" le calcul.

Cette proposition met en lumière le rôle joué par les dilatations dans la définition des classes de fonctions qui interdit a priori toute relation du type $C_N(M_n) \subset Aw_o$, puisque Aw_o n'est pas stable sous l'action des dilatations.

Or, d'après la définition des puzzles-L^2, nous avons besoin d'inclure dans Aw_o des fonctions découpantes de support aussi petit qu'on veut. Puisque nous ne pouvons pas utiliser les dilatations, nous devrons faire jouer un autre paramètre qui caractérise la taille des fonctions d'une classe $C_N(M_n)$: la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}}$.

Nous allons maintenant faire le lien entre deux catégories de poids : ceux qui vérifient (19)(poids w_o et w_∞) et ceux qui sont issus d'une classe $C_N(M_n)$ (poids τ). Un résultat d'Ostrowsky, cité par Mandelbrojt ([8] , p. 70 et suiv.), et légèrement amélioré, nous servira.

LEMME 2.1. <u>Soit</u> $p(r) : [0,+\infty] \to [1,+\infty]$ <u>une fonction croissante telle que</u> $\int_o^{+\infty} \frac{\text{Log } p(r)}{1+r^2} dr < +\infty$. <u>Alors, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $(M_n)_{n \in N}$ <u>suite croissante log-convexe, avec</u> $M_o = 1$, <u>dépendant de</u> ε <u>et de</u> p, <u>telle que</u>

a) $\exists\, C = C(\varepsilon, p) > 0 \qquad p(r) \leq C\, \tau(r) = C \sup_{n\in N} \frac{r^n}{M_n}$;

b) $\sum_{n\in N} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \varepsilon.$

Démonstration. Soit $\pi(r) = \log p(r)$. Quitte à remplacer $\pi(r)$ par $\pi(r) + \sqrt{r}$, on peut supposer que π est strictement croissante et non bornée. On peut aussi supposer qu'elle est continue. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que $e\int_A^{+\infty} \frac{\pi(r)}{r^2}\, dr \leq \varepsilon$.

On définit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ par les relations $\pi(e\,\mu_n) = n + B$, où $B > 0$ est choisi de telle sorte que $e\mu_1 \geq A$ et $\mu_1 \geq 1$. La suite $(\mu_n)_{n\in N}$ est strictement croissante, tendant vers l'infini. On pose $M_0 = 1$, $M_n = \mu_1 \ldots \mu_n$ si $n \geq 1$. $(M_n)_{n\in N}$ est alors log-convexe et croissante. Soit $\tau(r) = \sup_{n\in N} \frac{r^n}{M_n}$ et soit $r \in [0, +\infty]$.

Si $r \in [\mu_n, \mu_{n+1}]$, pour un certain n, on a :

$$\tau(e\, r) \geq \frac{(er)^n}{\mu_1 \ldots \mu_n} \geq \frac{r^n}{\mu_n^n} e^n \geq e^n = e^{-1-B+\pi(e\,\mu_{n+1})}$$

d'où

$$\tau(e\, r) \geq e^{-1-B}\, p(e\, r).$$

Il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $r \geq 0$, $p(r) \leq C\, \tau(r)$, ce qui démontre a) (c'est ce résultat qui vient d'Ostrowsky).

Pour prouver b), on écrit $\sum_{n\in N} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n}$. Or

$$\int_{e\,\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(r)}{r^2}\, dr = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{e\mu_n}^{e\mu_{n+1}} \frac{\pi(r)}{r^2}\, dr \geq \sum_{n=1}^{+\infty} (n+B)\left(\frac{1}{e\mu_n} - \frac{1}{e\mu_{n+1}}\right).$$

Par un réarrangement du type d'Abel, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n} \leq e \int_{e\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(r)}{r^2}\, dr$$

Or, nous avons construit μ_1 de telle façon que

$$e\int_{e\mu_1}^{\infty} \frac{\pi(r)}{r^2}\,dr \leq \varepsilon.$$

Nous pouvons maintenant élucider le lien entre les classes non quasi-analytiques et les espaces A_{w_o}.

PROPOSITION 2.4. Soit w_o un poids vérifiant (19). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une classe non quasi-analytique $C_N(M_n)$, dépendant de ε et de w_o, telle que

a) si $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $\left\|\frac{\partial^{\alpha}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots dx_N^{\alpha_N}}\right\|_2 \leq \beta_\varphi M_{|\alpha|}$,

pour tout multi-indice α, alors $\varphi \in Aw_o$;

b) $\sum\limits_{n\in N} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \varepsilon.$

Démonstration. Posons, si $r \geq 0$, $\theta_{\infty}^{*}(r) = \sup\limits_{|t|\leq r} \theta_{\infty}(t)$.

Nous admettons pour l'instant le lemme suivant :

LEMME 2.2. Si w_o vérifie (19), alors

$$\int_{o}^{+\infty} \frac{\theta_{\infty}^{*}(r)}{1+r^2}\,dr < +\infty. \tag{20}$$

On applique le lemme 2.1 à la fonction $p(r) = e^{\frac{1}{2}\theta_{\infty}^{*}(2N\,r)}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on obtient une suite $(M_n)_{n\in N}$ telle que $p(r) \leq C\,\tau(r)$ et $\sum\limits_{n\in N} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \varepsilon$. $C_N(M_n)$ est donc non quasi-analytique. De plus, si $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ vérifie pour tout α

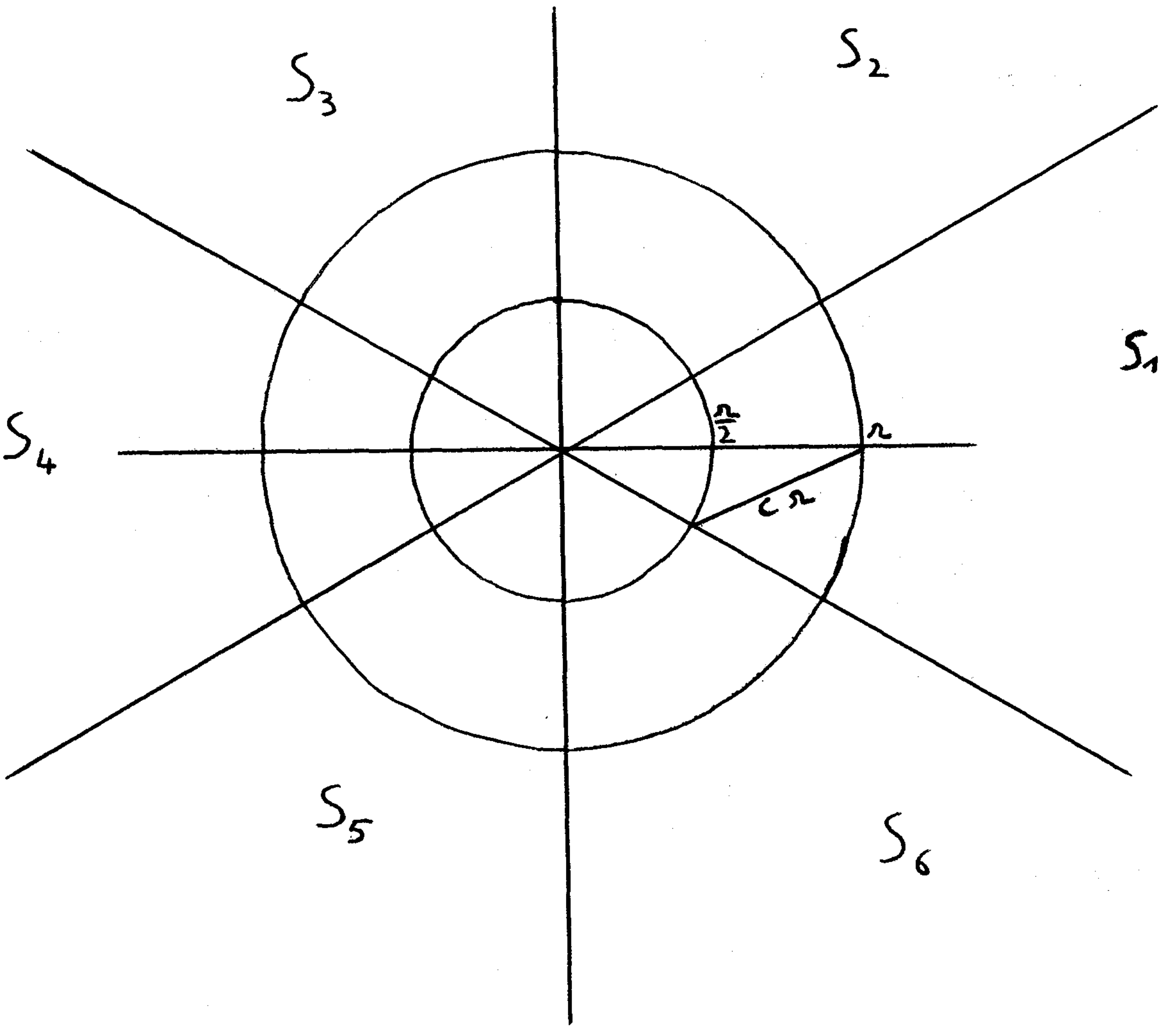
$$\left\|\frac{\partial^{\alpha}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\right\|_2 \leq \beta_\varphi M_{|\alpha|},$$

en reprenant ligne à ligne la démonstration de la proposition 2.3, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2\, \tau\!\left(\frac{\xi}{2N}\right)^2 d\xi < +\infty,$$

ce qui implique $\varphi \in Aw_o$, et même $\varphi \in Aw^*_\infty$.

<u>Démonstration du lemme 2.2.</u> On munit $\mathbb{R}^N$ de ses coordonnées polaires $(r, \sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1})$, avec $\sigma_1 \in [0,2\pi]$ et $\sigma_j \in [0,\pi]$ si $j = 2,\ldots,N-1$. Les inégalités $k_{i,j}\frac{\pi}{3} \leq \sigma_j \leq (k_{i,j}+1)\frac{\pi}{3}$, où $k_{i,1} \in \{0,1,2,3,4,5\}$ et $k_{i,j} \in \{0,1,2\}$ si $j \geq 2$, définissent 2.3^{N-1} secteurs qui recouvrent $\mathbb{R}^N$. On les appelle $S_1, S_2, \ldots, S_{2.3^{N-1}}$, S_1 étant le secteur donné par $\frac{\pi}{3} \leq \sigma_j \leq \frac{2\pi}{3}$. On appelle ρ_k une rotation qui envoie S_1 sur S_k, et on note R l'ensemble $\{\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{2.3^{N-1}}\}$. Si $r \geq 0$, on note r_k l'image par ρ_k du point $(r, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2})$.
Voici le dessin en dimension $N = 2$:



Puisque w_o vérifie (18), on a

$$\int_{r=1}^{+\infty}\int_{\sigma_1,\dots,\sigma_{N-1}} \frac{\theta_\infty(r,\sigma_1,\dots,\sigma_{N-1})}{r^2}\,dr\,d\sigma_1\dots d\sigma_{N-1} < +\infty .$$

Posons $f(\sigma_1,\dots,\sigma_{N-1}) = \int_{r=1}^{+\infty} \frac{\theta_\infty(r,\sigma_1,\dots,\sigma_{N-1})}{r^2}\,dr$. D'après Fubini, f est finie presque partout. Il existe donc $s_1, \dots, s_{N-1}$ tels que pour tout $\rho \in R$:

(21) $$\int_{r=1}^{+\infty} \frac{\theta_\infty(\rho\,[r,s_1,\dots,s_{N-1}])}{r^2}\,dr < +\infty .$$

A un changement d'axes près, on peut supposer $s_1 = \dots = s_{N-1} = \frac{\pi}{2}$. On pose $\theta_{\infty,R}(r) = \sup\limits_{1\le k\le 2.3^{N-1}} \theta_\infty(r_k)$. Les inégalités (21) sont alors équivalentes à :

(22) $$\int_{r=1}^{+\infty} \frac{\theta_{\infty,R}(r)}{r^2}\,dr < +\infty .$$

La relation (20) (lemme 2.2) découlera de (22) et de la relation auxiliaire suivante :

(23) $$\forall\, r \ge 0 \quad \theta^*_\infty(r) \le \theta_{\infty,R}(r) + \theta^*_\infty(cr) ,$$

où $c = c(N) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (voir le dessin). Admettons (23) pour l'instant et montrons (20).

Soient, si $n\in\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_{c^{-n}}^{c^{-n-1}} \frac{\theta^*_\infty(r)}{r^2}\,dr \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_{c^{-n}}^{c^{-n-1}} \frac{\theta_{\infty,R}(r)}{r^2}\,dr .$$

Alors, (23) implique, pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0\}$:

$$I_n \le J_n + c\, I_{n-1} ,$$

d'où, si $q \ge 1$:

$$I_q + (1-c)\sum_{n=0}^{q-1} I_n \le \sum_{n=0}^{q} J_n .$$

D'après (22), on a $\sum_{n=0}^{+\infty} J_n < +\infty$ (ne pas oublier que $c < 1$). On en déduit immédiatement que $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n < +\infty$, puis la relation (20).

Il reste à montrer (23). <u>C'est ici que la sous-additivité de</u> θ_∞ <u>joue un rôle essentiel.</u> Soit en effet $r \geq 0$ et $t \in B(0,r)$. Il existe k tel que $t \in S_k$. Supposons $|t| \geq \frac{r}{2}$. On écrit alors :

(24) $$\theta_\infty(t) \leq \theta_\infty(r_k) + \theta_\infty(t - r_k).$$

Or, il existe $c = c(N)$ tel que $t - r_k \in B(0, cr)$. En dimension $N = 1$, $c = \frac{1}{2}$. En dimension $N = 2$, un rapide calcul fait à l'aide du dessin montre que $c = \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{3}}$. Ce qui est important est que $c < 1$ quelle que soit la dimension. (24) devient alors

(25) $$\theta_\infty(t) \leq \theta_\infty(r_k) + \theta_\infty^*(cr).$$

Si maintenant on a $|t| \leq \frac{r}{2}$, on peut écrire :

(26) $$\theta_\infty(t) \leq \theta_\infty^*(\tfrac{r}{2}).$$

Il est facile de voir que $c \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent, (26) implique (25), qui devient valable pour tout $t \in S_k \cap B(0,r)$. Faisant varier k, on trouve pour tout $t \in B(0,r)$:

(27) $$\theta_\infty(t) \leq \theta_{\infty,R}(r) + \theta_\infty^*(cr)\ ,$$

d'où finalement (23).

La démonstration de la proposition (2.4) est achevée.

Nous obtiendrons nos fonctions découpantes grâce au résultat suivant, que nous énonçons en dimension $N = 1$.

LEMME 2.3. <u>Soit</u> $C_1(M_n)$ <u>une classe non quasi-analytique, et</u>

$\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}}$. <u>Alors, pour tous</u> $\nu, \omega > 0$, <u>avec</u> $\omega > \mu + \nu$, <u>il existe</u> $\varphi_{\nu,\omega} \in C_1(M_n)$ <u>telle que</u> :

a) $\operatorname{Supp} \varphi_{\nu,\omega} = [-\omega-\nu-\mu\ ,\ \omega+\nu+\mu]$

b) $\varphi_{\nu,\omega} = 1$ <u>sur</u> $[-\omega+\nu+\mu\ ,\ \omega-\nu-\mu]$

c) <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi^{(n)}_{\nu,\omega}\|_2 \leq C\, M_n$.

C'est ce lemme qui permet de comprendre l'importance du paramètre $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}}$ (voir remarque précédente, page 24) à propos de la taille des fonctions d'une classe $C_N(M_n)$.

<u>Démonstration</u>. Imitant le style de Mandelbrojt, elle est fondée sur l'étude des fonctions

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega z}{z} \frac{\sin \nu z}{\nu z} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin \mu_n z}{\mu_n z},$$

où $\mu_n = \frac{M_n}{M_{n+1}}$, et $\varphi(u) = \hat{\Phi}(u)$.

On écrit, si $\zeta > 0$, $\delta_\zeta(u) = \frac{1}{2\zeta} 1_{[-\zeta,\zeta]}(u)$, et on pose $\Delta_\mu = \prod_{n=0}^{+\infty} (* \delta_{\mu_n}) = \delta_{\mu_0} * \delta_{\mu_1} * \ldots * \delta_{\mu_n} * \ldots.$ Alors, $\varphi(u) = 2\,\omega\, \delta_\omega * \delta_\nu * \Delta_\mu(u)$, ce qui prouve a).

Si maintenant $|u| \leq \omega-\nu-\mu$, on écrit

$$\varphi(u) = 2\omega \int_{\mathbb{R}} \delta_\omega(u-v)\, \delta_\nu * \Delta_\mu(v)\, dv.$$

Or, $\operatorname{Supp} \delta_\nu * \Delta_\mu = [-(\mu+\nu)\ ,\ \mu+\nu]$, et si $|v| \leq \mu + \nu$, alors $|u-v| \leq \omega$.

Par conséquent :

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} \delta_\nu * \Delta_\mu(v)\, dv = 1\ ,$$

ce qui prouve b).

Enfin, compte-tenu de a), il suffit, pour prouver c), de démontrer $\|\varphi^{(n)}\|_\infty \leq C\, M_n$. Or :

$$\varphi^{(n)}(u) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n\, \Phi(x)\, e^{-ixu}\, dx \ ,$$

d'où $$|\varphi^{(n)}(u)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |x|^n \left|\frac{\sin \omega x}{x}\right| \left|\frac{\sin \nu x}{\nu x}\right| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|\mu_k x|}\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin \omega x \ \sin \nu x}{\nu x^2}\right| dx \ \frac{1}{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_{n-1}} \ .$$

Cela s'écrit exactement $|\varphi^{(n)}(u)| \leq C\, M_n$, pour tous u,n.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 2.1 .

2.3. Démonstration du théorème 2.1 : première partie

Il s'agit ici de démontrer la propriété (P.a) des puzzles-L^2 (voir définition 1.2) pour l'espace Aw_o, quand w_o vérifie (19). Suivant la remarque faite à la fin de la partie 1, nous nous limiterons à des cubes pour les compacts K et H.

Commençons par le lemme suivant, vers lequel ont tendu les résultats précédents.

LEMME 2.4. *Soit w_o vérifiant (19), soient K et H deux cubes de $\mathbb{R}^N$, avec $H \subset \overset{o}{K}$. Alors, il existe une fonction découpante associée à K et H appartenant à Aw_o.*

Démonstration. a) en dimension $N = 1$: on se ramène à $H = [-a\ ,\ a]$ et $K = [-b,b]$, $a < b$. Appliquant 2.4, on choisit $C_1(M_n)$ classe non quasi-analytique telle que :

(28) si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\varphi^{(n)}\|_2 \leq \beta_\varphi\, M_n$, alors $\varphi \in Aw_o$

(29) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \mu \leq \inf\left(\frac{b-a}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right).$$

On choisit alors ν et ω tels que ω soit de la forme $\frac{1}{2(k_o+1)}$ où $k_o \in \mathbb{N}$, et que $\omega+\nu+\mu \leq b$, $\omega-\nu-\mu = a$ (cela est possible parce que $\mu < \frac{b-a}{2}$). D'après le lemme 2.3, il existe $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi_1 \subset K$, $\varphi_1 = 1$ sur H et $\|\varphi_1^{(n)}\|_2 \leq CM_n$.

Sur l'intervalle $[\omega-\nu-\mu\ ,\ \omega+\nu+\mu]$, on remplace $\varphi_1(x)$ par $1-\varphi_1(x-2\omega)$. Cela donne $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$, $\varphi = 1$ sur H, et $\|\varphi^{(n)}\|_2 \leq CM_n$, ce qui prouve que $\varphi \in Aw_o$.

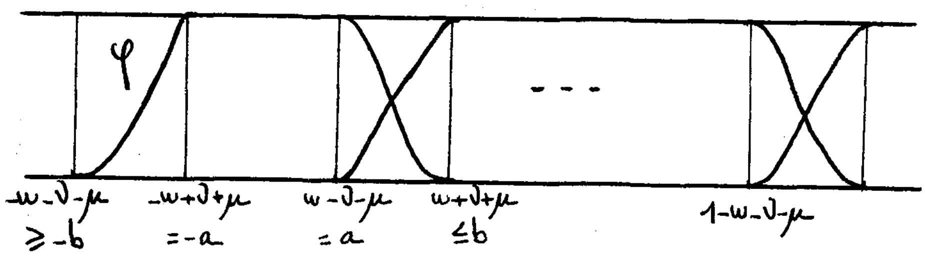
On translate φ de la quantité 2ω une première fois, une seconde fois,..., jusqu'à k_o fois. Alors :

(30) $$\varphi(x) + \varphi(x-2\omega) + \ldots + \varphi(x-2k_o\omega) = 1$$

si $x \in [-\omega+\nu+\mu\ ,\ 1-\omega-\nu-\mu]$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $\mu < \frac{1}{2}$),

(31) $$\operatorname{Supp}\left\{\varphi(x) + \varphi(x-2\omega) + \ldots + \varphi(x-2k_o\omega)\right\} = [-\omega-\nu-\mu\ ,\ 1-\omega+\nu+\mu]$$

(32) $$\varphi(x) = 1 - \varphi(x-2k_o\omega) \quad \text{si} \quad x \in [-\omega-\nu-\mu\ ,\ -\omega+\nu+\mu] :$$



Il est maintenant facile de voir que φ est une fonction découpante associée à K et H.

b) En dimension N : le passage se fait sans difficulté. Avec les notations précédentes, il suffit de poser, si $H = [-a,a]^N$ et $K = [-b,b]^N$, $\psi(x_1,\ldots,x_N) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_N)$. ψ est une fonction découpante associée à H et K, et

$$\left\|\frac{\partial^{\alpha}\psi}{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_N}}\right\|_2 \leq \beta_{\varphi}^{N} M_{\alpha_1}\ldots M_{\alpha_N} \leq \beta_{\varphi}^{N} M_{|\alpha|}$$

en vertu de la log-convexité de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, $\psi \in Aw_o$, ce qui achève la démonstration.

La preuve de (P.a) est terminée : car si w_o vérifie (13), w_∞ le vérifie aussi, et donc w_1 (rappelons que $w_1(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w_\infty(x)$). Il suffit dès lors de faire la synthèse entre la proposition 2.1 et le lemme 2.4 appliqué à w_1 pour obtenir (P.a).

2.4. <u>Démonstration du théorème 2.1</u> : <u>deuxième partie</u>

Pour achever de démontrer que Aw_o est un puzzle-L^2, deux voies sont possibles.

Utilisant la proposition 1.3, on peut démontrer la propriété (P.c). Le chemin à suivre est sensiblement le même que celui emprunté par Beurling dans l'étude des algèbres qui porte son nom ([1]), et qui est le plus clairement exposé dans Meyer et Coifman ([4], pp. 8-10). Mais la démonstration, sans être difficile, est longue.

Nous démontrerons donc directement (P.b), à partir d'un résultat inspiré de Meyer et Bourdaud ([3]).

PROPOSITION 2.5. <u>Soit</u> w_o <u>un poids vérifiant (13'),et soient</u> $f \in Aw_o$, $\varphi \in Aw_\infty$. <u>Alors, on a les inégalités</u>

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|f(x)\,\varphi(x-t)\|^2_{Aw_o}\, dt \leq (2\pi)^N \|\varphi\|^2_{Aw_\infty} \|f\|^2_{Aw_o}$$

<u>et</u>

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|f(x)\,\varphi(x-t)\|^2_{Aw_o}\, dt \geq (2\pi)^N \|\varphi\|^2_{A\frac{1}{w_\infty}} \|f\|^2_{Aw_o}.$$

Il faut bien voir qu'on ne suppose pas que φ est un multiplicateur de Aw_o. On verra d'ailleurs plus loin que φ peut effectivement ne pas l'être (voir la troisième partie). Pour obtenir (P.b), il faut donc choisir comme fonction φ une fonction découpante Δ dans l'espace Aw_1. Enfin, il faut remarquer que l'hypothèse (18) est absente de la proposition 2.5. Dans la démonstration de (P.b), elle n'intervient donc que pour assurer l'existence de fonctions découpantes dans Aw_1.

Démonstration. C'est une application directe de l'égalité de Plancherel. En effet, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^N} \|f(x)\,\varphi(x-t)\|^2_{Aw_o}\,dt = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N}\left|\int_{\mathbf{R}^N} e^{-it.\eta}\,\hat{f}(\xi-\eta)\,\hat{\varphi}(\eta)\,d\eta\right|^2 w_o(\xi)\,d\xi\,dt.$$

Fixons ξ et intégrons par rapport à t. Cela donne, d'après l'égalité de Plancherel :

$$\int_{\mathbf{R}^N} \|f(x)\,\varphi(x-t)\|^2_{Aw_o}\,dt = (2\pi)^N\int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N}|\hat{f}(\xi-\eta)\,\hat{\varphi}(\eta)|^2\,w_o(\xi)\,d\eta\,d\xi.$$

Il suffit d'utiliser les deux relations suivantes :

$$\forall\ \xi,\eta \in \mathbf{R}^N \qquad w_o(\xi) \leq w_o(\xi-\eta)\,w_\infty(\eta)$$

et

$$w_o(\xi) \geq w_o(\xi-\eta)\frac{1}{w_\infty(\eta)}$$

pour obtenir les inégalités voulues.

Le théorème 2.1 est donc complètement démontré.

Remarque. C'est la proposition 2.5, et plus précisément le rôle crucial qu'y joue l'égalité de Parseval, qui permet de comprendre l'importance du caractère hilbertien des espaces Aw_o.

2.5. Multiplicateurs et opérateurs pseudo-différentiels sur Aw_o

Nous pouvons maintenant énoncer :

THEOREME 2.3. Soit w_o vérifiant (19), $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^N)$. Alors, m est un multiplicateur de Aw_o si et seulement si $m(x-t)$ envoie l'ensemble $\{f \in Aw_o / \mathrm{Supp}\, f \subset B(0,1)\}$ dans Aw_o, uniformément par rapport à t.

On a choisi de privilégier la boule unité, mais n'importe quel compact d'intérieur non vide contient pour le théorème. Celui-ci est plus intéressant si Aw_o est une algèbre de Banach : c'est l'objet de la troisième partie.

Dans le cadre général des espaces Aw_o, on peut énoncer un résultat sur les opérateurs pseudo-différentiels classiques, qui prolonge le théorème. Rappelons comment sont définis ces opérateurs : si $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est continue et si $f \in Aw_o$, on pose

$$(33) \qquad \sigma(x,D)\, f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

THEOREME 2.4. <u>Soient</u> w_o <u>et</u> w <u>deux poids vérifiant (19) et tels que tout élément de</u> Aw <u>soit un multiplicateur de</u> Aw_o. <u>Soit</u> $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. <u>On suppose que, pour tout</u> $\xi \in \mathbf{R}^N$, $x \to \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)$ <u>appartient localement à</u> Aw, <u>quel que soit</u> $\alpha \in \{0,1\}^N$. <u>Autrement dit, il existe une fonction découpante</u> Δ <u>telle que, pour tout</u> $t \in \mathbf{R}^N$, $\Delta(x-t)\, \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi) \in Aw$, <u>et</u> $\|\Delta(x-t)\, \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)\|_{Aw} \leq C$. <u>Alors,</u> $\sigma(x,D)$ <u>est un opérateur continu de</u> Aw_o <u>dans</u> Aw_o.

Comme pour la proposition 2.5, ce théorème est une adaptation de la démarche de Bourdaud et Meyer ([3], p. 15).

<u>Démonstration.</u> Soit $f \in Aw_o$. D'après les hypothèses faites sur w, on peut trouver une fonction découpante Δ telle que :

(34) $f(x)\, \Delta(x-t) \in Aw_o$ pour tout $t \in \mathbf{R}^N$, et

$$\frac{1}{C_1} \|f\|^2_{Aw_o} \leq \int_{\mathbf{R}^N} \|f(x)\, \Delta(x-t)\|^2_{Aw_o}\, dt \leq C_1 \|f\|^2_{Aw_o} \quad ;$$

(35) si $\alpha \in \{0,1\}^N$, alors $\Delta(x-t)\, \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi) \in Aw$, et

$\|\Delta(x-t)\, \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)\|_{Aw} \leq C_2$, quels que soient $t, \xi \in \mathbf{R}^N$.

Si $\eta \in \mathbf{R}^N$, on pose $q(\eta) = (1+\eta_1^2)\ldots(1+\eta_N^2)$. On appelle $\rho(x+t\ ,\ \eta)$ la transformée de Fourier de la fonction $\xi \longrightarrow \Delta(x)\,\sigma(x+t\ ,\ \xi)$, et $\lambda_t(y,\eta)$ celle de $(x,\xi) \to \Delta(x)\,\sigma(x+t\ ,\ \xi)$. L'hypothèse sur σ s'écrit alors :

(36) $$\int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} |\lambda_t(y,\eta)|^2\, w(y)\, q(\eta)\, dy\, d\eta \leq C.$$

Soit $g(x) = \sigma(x,D)\, f(x)$

$$= (2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{R}^N} e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi,$$

et posons $g_t(x) = g(x)\,\Delta(x-t)^2$. L'égalité de Parceval nous donne

$$g_t(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho(x,\eta)\,\Delta(x-t)\,f(x+\eta)\,d\eta$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \rho(x,\eta)\,f_{t,\eta}(x)\,d\eta\ ,$$

où $f_{t,\eta}(x) = f(x+\eta)\,\Delta(x-t)$. Par définition de λ_t, on a

$$\hat{g}_t(y) = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} \lambda_t(z,\eta)\,e^{it.z}\,\hat{f}_{t,\eta}(y-z)\,d\eta\,dz.$$

En appliquant Fubini, puis Cauchy-Schwarz, on obtient :

(37) $$|\hat{g}_t(y)| \leq \int_{\mathbf{R}^N} \Lambda_t(z)\,F_t(y-z)\,dz\ ,$$

avec

(38) $$\Lambda_t(z)^2 = \int_{\mathbf{R}^N} |\lambda_t(z,\eta)|^2\, q(\eta)\,d\eta$$

et

(39) $$F_t(z)^2 = \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}_{t,\eta}(z)|^2\,\frac{1}{q(\eta)}\,d\eta.$$

Dire que tout élément de Aw est un multiplicateur de Aw_o revient à dire que, si $\varphi \in L^2(w_o(x)\,dx)$ et si $\psi \in L^2(w(x)\,dx)$, alors $\varphi * \psi \in L^2(w_o(x)\,dx)$. Il existe donc $C_3 > 0$ tel que, en vertu de (37) :

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_t(y)|^2 \, w_o(y)\, dy \le C_3 \int_{\mathbf{R}^N} \Lambda_t(z)^2 \, w(z)\, dz \int_{\mathbf{R}^N} F_t(z)^2 \, w_o(z)\, dz.$$

D'après (36), (38) et (39), cela devient :

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_t(y)|^2 \, w_o(y)\, dy \le C_4 \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}_{t,\eta}(z)|^2 \frac{1}{q(\eta)} \, w_o(z)\, d\eta \, dz \ ,$$

soit

$$\|g(x)\, \Delta(x-t)^2\|^2_{Aw_o} \le C_4 \int_{\mathbf{R}^N} \|f(x+\eta)\, \Delta(x-t)\|^2_{Aw_o} \frac{1}{q(\eta)}\, d\eta .$$

On intégre maintenant par rapport à t en utilisant (34) :

$$\int_{\mathbf{R}^N} \|g(x)\, \Delta(x-t)^2\|^2_{Aw_o}\, dt \le C_5 \int_{\mathbf{R}^N} \|f\|^2_{Aw_o} \frac{d\eta}{q(\eta)} .$$

Or, $\frac{1}{q} \in L^1(\mathbf{R}^N)$:

$$\int_{\mathbf{R}^N} \|g(x)\, \Delta(x-t)^2\|^2_{Aw_o} \le C_6 \, \|f\|^2_{Aw_o} .$$

Bien que Δ^2 ne soit pas une fonction découpante, il est facile d'en déduire que $g \in Aw_o$ (essentiellement en utilisant $\Delta^2 = 1$ sur un compact d'intérieur non vide), et que $\|g\|_{Aw_o} \le C_7 \|f\|_{Aw_o}$.

Ce résultat peut être amélioré dans certains cas. Pour le voir, nous devons mieux cerner les rapports entre Aw_o et Aw_∞, et dire quand Aw_o est une algèbre. Nous irons alors plus loin dans l'étude des multiplicateurs et des opérateurs pseudo-différentiels sur Aw_o.

3. ETUDE DES STRUCTURES D'ALGEBRES OU DE MODULES DES ESPACES Aw_o ET Aw_∞

DEFINITION 3.1. <u>Soient deux poids</u> w_o <u>et</u> w. <u>L'espace</u> Aw_o <u>est un pseudo-module sur l'espace</u> Aw <u>si tous les éléments de</u> Aw <u>sont des multiplicateurs</u>

de Aw_o. Dans le cas où Aw est une algèbre, on rejoint la terminologie courante en disant que Aw_o est un module sur Aw.

Soit w_o un poids quelconque. On suppose qu'il existe un autre poids w tel que Aw_o soit un pseudo-module sur Aw. En vertu du théorème du graphe fermé, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall f \in Aw_o \quad \forall m \in Aw \qquad \|mf\|_{Aw_o} \leq C\|m\|_{Aw}\,\|f\|_{Aw_o}.$$

En construisant une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Aw_o et une autre $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Aw, telles que $\hat{f}_n$ tende vers δ_x et $\hat{m}_n$ vers δ_y, où $x,y \in R^N$, on obtient l'inégalité

$$w_o(x+y) \leq C^2\, w_o(x)\, w(y).$$

Ecrivant $w_o = e^{\theta_o}$ et $w = e^{\theta}$, on obtient

$$\theta_o(x+y) - \theta_o(x) \leq \theta(y) + K.$$

Ces deux inégalités montrent que nécessairement w_o vérifie (13'), avec $\theta_\infty(y) \leq \mathrm{Max}(\theta(y)\,,\,\theta(-y)) + K$. Par conséquent, w_∞ est le poids minimal parmi l'ensemble des poids w tels que Aw_o soit un pseudo-module sur Aw. De plus, si Aw_o est une algèbre, on doit avoir

(40) $$\mathrm{Max}(\theta_o(y)\,,\,\theta_o(-y)) \leq \theta_\infty(y) \leq \mathrm{Max}(\theta_o(y)\,,\,\theta_o(-y)) + K.$$

On supposera maintenant que w_o est un poids pair. Trois questions se posent :

(41) soit w_o vérifiant (13'), avec $w_o = w_\infty$. Se peut-il que Aw_o soit une algèbre en dehors du cas connu des algèbres de Beurling ? En particulier, qu'en est-il si w_o est à croissance rapide ?

(42) soit w_o vérifiant (13'). Aw_o est-il un pseudo-module sur Aw_∞ ? Sinon, quels sont les poids w tels que Aw_o soit un pseudo-module sur Aw ?

(43) quels rôles jouent les hypothèses (14) et (18) ?

REMARQUE. Quand Aw_∞ n'est pas une algèbre, on a une réponse négative aux deux questions (41) et (42). En revanche, si Aw_∞ est une algèbre, la question (42) reste entière. Elle est donc plus complexe que (41).

Avant de répondre à ces questions, nous allons donner une condition sur deux poids w_o et w permettant que Aw_o soit un pseudo-module sur Aw.

3.1. Généralités

Le résultat suivant est inspiré des travaux de Beurling.

PROPOSITION 3.1. Soient w_o et w deux poids tels que $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w}(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. S'il existe $C > 0$ vérifiant

(44) $$\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w} \leq \frac{C}{w_o} ,$$

alors Aw_o est un pseudo-module sur Aw.

Démonstration. Soient $f \in Aw_o$, $m \in Aw$, et $g = mf$. On écrit $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \frac{1}{\sqrt{w_o(\xi)}}$, $\hat{m}(\xi) = \hat{\mu}(\xi) \frac{1}{\sqrt{w(\xi)}}$: alors, $\varphi, \mu \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Soit $\xi \in \mathbf{R}^N$. On a :

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f} * \hat{m}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{\mu}(\eta) \frac{1}{\sqrt{w_o(\xi-\eta)}} \frac{1}{\sqrt{w(\eta)}} d\eta .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\hat{g}(\xi)|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 |\hat{\mu}(\eta)|^2 d\eta \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{w_o(\xi-\eta)} \frac{1}{w(\eta)} d\eta .$$

Si (44) est vrai :

$$|\hat{g}(\xi)|^2 w_o(\xi) \leq C \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 |\hat{\mu}(\eta)|^2 d\eta$$

Cela implique que $g \in Aw_o$, avec

$$\|g\|_{Aw_o} \leq \sqrt{C}\, \|m\|_{Aw}\, \|f\|_{Aw_o} .$$

Ainsi, si un poids w_o vérifie

$$\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o} ,$$

alors Aw_o est une algèbre de Banach. C'est cette propriété qui fonde notre réponse à la première question.

3.2. Réponse à la question 41 : les algèbres Aw_o

Nous supposons $w_o = w_\infty$. Remarquons tout de suite que Aw_o peut ne pas être une algèbre. C'est le cas, par exemple, si $\theta_o(t) = \theta_\infty(t) = |t_1| + |t_2| + \ldots + |t_N|$. Montrons-le en dimension $N = 1$: on choisit f telle que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^a}\, e^{-\frac{|\xi|}{2}} , \quad \text{où } \frac{1}{4} < a \leq \frac{3}{8} .$$

Alors, $f \in Aw_o$. Posant $g = f^2$, un calcul simple montre que

$$\hat{g}(\xi) \geq C \frac{|\xi|}{(1+|\xi|^2)^{2a}}\, e^{-\frac{|\xi|}{2}}$$

si $|\xi|$ est assez grand. Par conséquent, $g \notin Aw_o$, et Aw_o n'est pas une algèbre.

Mais il y a beaucoup d'autres cas où Aw_o est une algèbre, même quand w_o est à croissance rapide, même quand Aw_o est quasi-analytique. C'est ce que montre la proposition qui suit.

PROPOSITION 3.2. Soit w_o un poids radial, qu'on écrit $w_o(x) = e^{\theta_o(|x|)}$, où θ_o est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. On suppose que θ_o est croissante. Alors :

a) pour avoir $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$, il faut que $\frac{1}{w_o} \in L^1(R^N)$

b) si $\frac{1}{w_o} \in L^1(R^N)$ et si $r\,\theta_o'(r)$ est borné, alors $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$.

c) si θ_o est concave au voisinage de l'infini et si $r^{N-1}\, e^{-\theta_o(r)+r\theta_o'(r)} \in L^1([0,+\infty[)$,

alors $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$.

La condition $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$ apparaît nécessaire, pourvu que θ_o soit croissante. Nous verrons plus loin que, si Aw_o est une algèbre, alors $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Les conditions de régularité sur θ_o, ainsi que la restriction aux poids radiaux, sont donc superflues dans l'assertion a).

Donnons tout de suite quelques exemples pour voir ce que recouvrent les hypothèses :

1) $\theta_o(x) = s\,\mathrm{Log}(1+|x|^2)$: on retrouve un résultat connu sur les espaces de Sobolev, qui dit que $H^s(\mathbf{R}^N)$ est une algèbre si et seulement si $s > \frac{N}{2}$.

2) $\theta_o(x) = |x|^a$: si $0 < a < 1$, on obtient une algèbre, mais pas si $a = 1$ (voir page 40). Cela montre qu'on ne peut se contenter de l'hypothèse "θ_o est concave" dans l'assertion c).

3) $\theta_o(x) = \frac{|x|}{\mathrm{Log}(2+|x|^2)}$, ou bien $\theta_o(x) = |x| + \theta_1(x)$, θ_1 vérifiant les hypothèses de b) ou de c) : ces exemples montrent qu'il existe des algèbres Aw_o qui sont quasi-analytiques, voire même analytiques.

4) Les conditions de c) sont larges. Par exemple, s'il existe $\alpha > N$ tel que $\theta_o(r) - \alpha\,\mathrm{Log}\,r$ soit concave à l'infini, alors θ_o les vérifie. Pour aller vite, si θ_o ne les vérifie pas, $\theta_o(r)$ est compris entre r et $r + N\,\mathrm{Log}\,r$.

5) Les poids oscillants, surtout s'ils sont à croissance rapide, sont exclus. Ainsi, si $\theta_o(x) = |x|^a(2+\cos|x|^{1-b})$, avec $0 < a \leq b \leq 1$, Aw_o n'est pas une algèbre (le paragraphe suivant donnera des résultats plus précis).

<u>Démonstration</u>. a) On suppose $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$. Cela s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\theta_o(t)-\theta_o(x-t)+\theta_o(x)} dt \leq C.$$

Grâce à la croissance de θ_o, on en déduit

$$\int_{B(x,\ |x|)} e^{-\theta_o(t)} dt \leq C \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}^N ,$$

d'où facilement $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

b) On suppose maintenant $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $r\theta_o'(r) \leq M$. Il faut montrer

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\theta_o(t)-\theta_o(x-t)} dt \leq C\, e^{-\theta_o(x)}.$$

Or, la croissance de θ_o implique que

si $|t| \geq \frac{|x|}{2}$, alors $\theta_o(x-t) \geq \theta_o(\frac{x}{2})$

si $|t| \leq \frac{|x|}{2}$, alors $\theta(t) \geq \theta_o(\frac{x}{2})$.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\theta_o(t)-\theta_o(x-t)} dt \leq \left\{\int_{|t| \leq \frac{|x|}{2}} e^{-\theta_o(t)} dt + \int_{|t| > \frac{|x|}{2}} e^{-\theta_o(x-t)} dt\right\} e^{-\theta_o(\frac{x}{2})}.$$

Il existe donc $C_1 > 0$ tel que

$$\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o}(x) \leq C_1 \frac{1}{w_o}(\frac{x}{2}).$$

Mais θ_o' est croissant et $r\theta_o'(r) \leq M$, d'où

$$\theta_o(x) - \theta_o(\frac{x}{2}) = \int_{\frac{|x|}{2}}^{|x|} \theta_o'(r)\, dr \leq \int_{\frac{|x|}{2}}^{|x|} \frac{M}{r}\, dr = M \operatorname{Log} 2.$$

On en déduit tout de suite

$$\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o}(x) \leq \frac{C_2}{w_o}(x).$$

c) Enfin, on suppose que θ_o est concave au voisinage de l'infini et que $r^{N-1} e^{-\theta_o(r)+r\theta_o'(r)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On se ramène immédiatement au cas où θ_o est concave sur $[0,+\infty[$: $\theta_o'(r)$ est alors décroissant sur $[0,+\infty[$, et on a $r\,\theta_o'(r) \leq \theta_o(r)$ (décroissance de $\frac{\theta_o(r)}{r}$).

Il faut prouver

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\theta_o(t)-\theta_o(x-t)+\theta_o(x)}\,dt \leq C.$$

Or, $\theta_o(x-t) = \theta_o(|x-t|) \geq \theta_o(|x|-|t|)$. Posant $|x| = r$ et $|t| = s$, on voit qu'il suffit de prouver

$$\int_o^r e^{-\theta_o(s)-\theta_o(r-s)+\theta_o(r)}\, s^{N-1}\, ds \leq C.$$

Par symétrie, on se ramène à intégrer sur $[0,\frac{r}{2}]$. A ce moment-là, on écrit

$$\theta_o(r) - \theta_o(r-s) \leq s\,\theta_o'(r-s)\ ,$$

puisque θ_o' est décroissante. Mais, si $s \leq \frac{r}{2}$, alors $r - s \geq s$, d'où

$$\theta_o(r) - \theta_o(r-s) \leq s\,\theta_o'(s).$$

On est donc ramené à prouver

$$\int_o^{r/2} e^{-\theta_o(s) + s\,\theta_o'(s)}\, s^{N-1}\, ds \leq C\ ,$$

ce qui est exactement l'hypothèse. La démonstration est ainsi terminée.

Nous avons donc répondu positivement à la question (41), au moyen du critère que nous donne la proposition 3.1. Cela soulève aussitôt une nouvelle question :

(45) la condition $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$, qui est suffisante pour que Aw_o soit une algèbre, est-elle également nécessaire ?

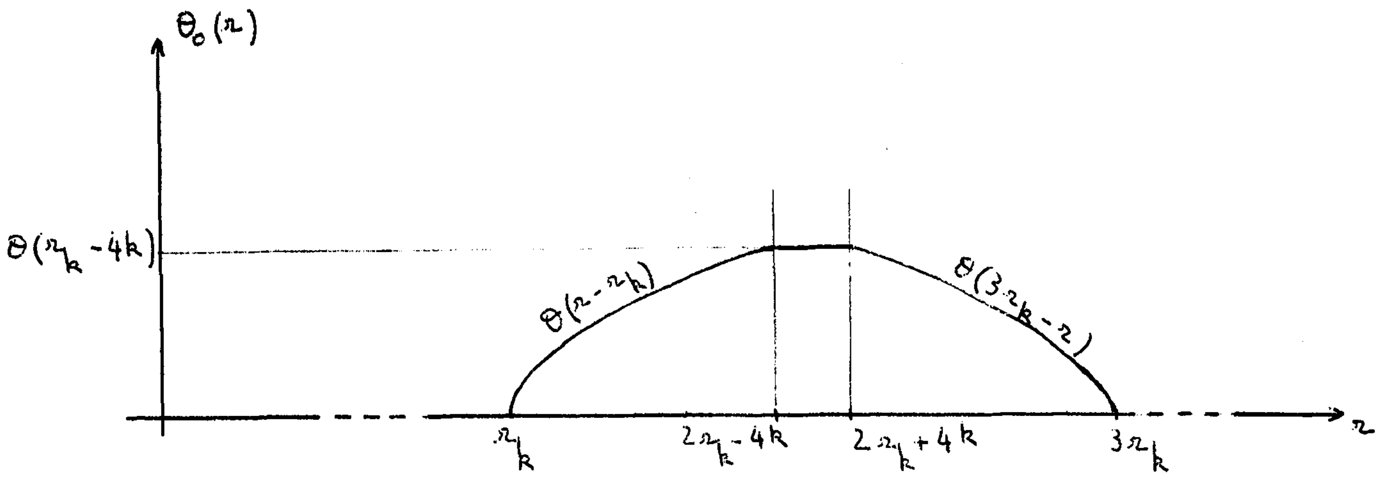
Nous n'avons pas encore su répondre à cette question.

3.3. Réponse à la question (42) : structure de module des espaces Aw_o

Nous voulons maintenant savoir si Aw_o est un module sur Aw_∞. Le paragraphe 3.2 montre que cela peut se faire. Nous allons ici montrer que ce n'est pas vrai a priori :

PROPOSITION 3.3. Soit $\theta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que $\theta(0) = 0$ et que $\theta'(r)$ soit décroissante, tendant vers 0 à l'infini. Alors, il existe sur $\mathbb{R}^N$ un poids radial w_o tel que $w_\infty(x) = e^{\theta(x)}$, et que Aw_o ne soit pas un pseudo-module sur Aw_∞.

Démonstration. A tout entier $k \in \mathbb{N}$ on associe $r_k > 0$ tel que $\theta(r_k) - \theta(r_k - 4k) \leq 2$, en imposant de plus $r_k \geq 3r_{k-1} + 8k$. Le poids $w_o(x)$, qu'on notera également $e^{\theta_o(|x|)}$, sera construit comme l'indique le dessin :



θ_o est ici radial et lacunaire. Il est facile de voir que la construction implique $\theta_\infty(x) = \theta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Si Aw_o était un pseudo-module sur Aw_∞, il existerait une constante $C > 0$ telle que, pour tout $g \in Aw_o$ et pour tout $m \in Aw_\infty$:

(46) $$\|mg\|_{Aw_o} \leq C\|m\|_{Aw_\infty} \|g\|_{Aw_o} .$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que Spec $f_k \subset [-k,k]^N$. On définit g_k par

$$g_k(x) = f_k(x)\, e^{i(r_k-k)(x_1+\ldots+x_N)} .$$

Le spectre de g_k est compact, inclus dans le cube $[r_k-2k\ ,\ r_k]^N$. On en déduit les (in)égalités suivantes :

$$\|g_k\|_{Aw_o} = \|f_k\|_2\, (2\pi)^{\frac{N}{2}}$$

$$\|g_k\|_{Aw_\infty} \leq (2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{w_\infty(r_k)}\, \|f_k\|_2$$

$$\|g_k^2\|_{Aw_o} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{w_\infty(r_k-4k)}\, \|f_k^2\|_2 .$$

L'ingalité (46) donne alors

$$\|f_k^2\|_2 \leq C(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\frac{w_\infty(r_k)}{w_\infty(r_k-4k)}}\, \|f_k\|_2^2$$

d'où :

(47) $$\|f_k^2\|_2 \leq C(2\pi)^{\frac{N}{2}}\, e\, \|f_k\|_2^2 .$$

(47) serait vraie quelle que soit f_k, ce qui impliquerait, par densité, que $L^2(\mathbb{R}^N)$ soit une algèbre, ce qui est complètement faux !

Aw_o ne peut donc être un pseudo-module sur Aw_∞.

Cependant, il faut se rappeler la proposition 2.5 : si, w_o vérifiant (13'), on a $f \in Aw_o$ et $\varphi \in Aw_\infty$, alors

(48) $$\int_{\mathbb{R}^N} \|f(x)\,\varphi(x-t)\|_{Aw_o}^2\, dt \leq (2\pi)^N \|\varphi\|_{Aw_\infty}^2 \|f\|_{Aw_o}^2 .$$

Autrement dit, Aw_o n'est pas loin d'être un pseudo-module sur Aw_∞. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 3.4. Soit w_o vérifiant (13'), et soient $f \in Aw_o$, $\varphi \in Aw_\infty$. Alors, pour presque tout $t \in \mathbf{R}^N$, $f(x)\,\varphi(x-t) \in Aw_o$.

C'est un corollaire évident de l'inégalité (48).

Pour obtenir un poids w_1 tel que Aw_o soit un pseudo-module sur Aw_1, il faut choisir w_1 plus grand que w_∞. On a déjà prouvé que le poids

$$w_1(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}\, w_\infty(x)$$

convenait (proposition 2.1). En fait, cela découle de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.5. Soit w_o un poids vérifiant (13'), et soit p un autre poids tel que $\frac{1}{p} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors, Aw_o est un pseudo-module sur Aw_1, où l'on a posé $w_1(x) = p(x)\, w_\infty(x)$.

Démonstration. D'après la proposition 3.1, il suffit de montrer $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_1}(x) \leq \frac{C}{w_o}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. Or :

$$w_o(x)\,\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_1}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{\theta_o(x)-\theta_o(x-y)-\theta_\infty(y)}\,\frac{1}{p(y)}\,dy\ ,$$

et d'après la définition de θ_∞ :

$$w_o(x)\,\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_1}(x) \leq \left\|\frac{1}{p}\right\|_1 .$$

Ce résultat achève de préciser les rapports entre Aw_o et Aw_∞ (la question de savoir si on peut améliorer la condition $\frac{1}{p} \in L^1(\mathbf{R}^N)$ nous paraît d'importance mineure, comparée au fait que de toute façon on ne peut se contenter du poids w_∞).

3.4. Réponse à la question (43) : structures d'algèbre ou de module et quasi-analyticité des espaces Aw_o

Les démonstrations et les exemples que nous venons de donner prouvent que les rapports entre les espaces Aw_o et Aw_∞ sont régis indépendamment des hypothèses (14) et (18). Elles n'interviennent pas plus pour décider si Aw_o est une algèbre ou non.

Ces hypothèses ont donc pour unique rôle de décider de la structure des espaces Aw_o. Si on suppose que w_o vérifie (13'), elles nous disent si Aw_o est un puzzle-L^2 ou non. Nous savons que (14) est nécessaire et que (18) est suffisante (deuxième partie, théorème 2.1). La question se pose alors de connaître ce qui se passe quand (14) est vérifiée, mais pas (18). La réponse est dans le théorème 2.2, réciproque partielle du théorème 2.1, et que nous démontrons maintenant.

THEOREME 2.2. Soit w_o vérifiant (13'). Alors, l'espace Aw_o est un puzzle-L^2 si et seulement si w_o vérifie (18).

Démonstration. Supposons que Aw_o soit un puzzle-L^2, et soit Δ une fonction découpante vérifiant (P.a) et (P.b). Nous commençons, exactement comme pour la proposition 2.5 de la deuxième partie, à partir de

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\Delta(x-t)\, f(x)\|^2_{Aw_o}\, dt \leq C_1 \|f\|^2_{Aw_o},$$

pour toute $f \in Aw_o$. Cela s'écrit

$$(49) \qquad \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{it.\xi}\, \hat{\Delta}(\xi)\, \hat{f}(\zeta-\xi)\, d\xi \right|^2 w_o(\zeta)\, d\zeta\, dt \leq C_1 \|f\|^2_{Aw_o}.$$

Intégrant d'abord par rapport à t, l'égalité de Plancherel permet d'obtenir :

$$(50) \qquad \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\Delta}(\xi)\, \hat{f}(\zeta-\xi)|^2\, w_o(\zeta)\, d\xi\, d\zeta \leq C_2 \|f\|^2_{Aw_o}.$$

On choisit alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tels que $\hat{f}_n$ soit à support compact, avec, si $\eta \in \mathbb{R}^N$ est fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\hat{f}_n|^2 = \delta_\eta$ (δ_η = masse de Diract en η). L'inégalité (50) devient :

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\Delta}(\xi)|^2 \, w_o(\xi+\eta)\, d\xi \leq C_2 \, w_o(\eta). \tag{51}$$

On utilise ici le lemme suivant.

LEMME 3.1. Soit w_o vérifiant (19), et soit $f \in Aw_o$ à support compact K Alors, il existe une constante $C = C(N, w_o, K)$ telle que, pour tout $\xi_o \in \mathbf{R}^N$:

$$|\hat{f}(\xi_o)|^2 \, w_o(\xi_o) \leq C \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, w_o(\xi)\, d\xi \tag{52}$$

et,

$$\lim_{|\xi_o| \to +\infty} |\hat{f}(\xi_o)|^2 \, w_o(\xi_o) = 0.$$

Avant de démontrer ce lemme, terminons la preuve du théorème ; on obtient immédiatement, par (52) et (51) :

$$|\hat{\Delta}(\xi)|^2 \, w_o(\xi+\eta) \leq C_3 \, w_o(\eta) , \tag{53}$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathbf{R}^N$, où C_3 ne dépend pas de η ! On réécrit (53) :

$$|\hat{\Delta}(\xi)|^2 \, \frac{w_o(\xi+\eta)}{w_o(\eta)} \leq C_3 ,$$

et on prend le supremum en η :

$$|\hat{\Delta}(\xi)|^2 \, w_\infty(\xi) \leq C_3.$$

Puisque Δ est à support compact, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{|\hat{\Delta}(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \, d\xi > -\infty,$$

d'où on déduit que w_∞ vérifie (14), c'est-à-dire que w_o vérifie (18).

Démonstration du lemme 3.1. Si f est à support compact, $\hat{f}$ est entière, à valeurs dans $\mathbf{C}^N = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$: on écrira $\hat{f}(\xi+i\alpha)$, où $\xi, \alpha \in \mathbf{R}^N$. D'après le théorème de la moyenne, si $\xi_o \in \mathbf{R}^N$, on a

$$|\hat{f}(\xi_o)|^2 \leq C(N) \iint_{B(\xi_o,1)\times B(0,1)} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 \, d\xi \, d\alpha.$$

Or, si $\xi \in B(\xi_o,1)$, $w_o(\xi_o) \leq w_\infty^*(1)\, w_o(\xi)$, d'où

$$|\hat{f}(\xi_o)|^2 w_o(\xi_o) \leq C(N,w_\infty) \iint_{B(\xi_o,1)\times B(0,1)} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 \, w_o(\xi)\, d\xi \, d\alpha.$$

Soit maintenant $\alpha \in B(0,1)$ fixé. La fonction $\xi \longrightarrow \hat{f}(\xi+i\alpha)$ est la transformée de Fourier de $x \longrightarrow e^{\alpha.x} f(x)$. Si, K étant le support de f, on choisit une fonction Δ telle que $\Delta(x) = x_1 + \ldots + x_N$ pour $x \in K$, on peut donc écrire $e^{\alpha.x} f(x) = e^{\Delta(\alpha x)} f(x)$, où l'on a noté $\alpha x = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_N x_N)$.

Posons $w(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w_\infty^*(x)$. Il est facile de voir que $L^1(w(x)\,dx)$ est une algèbre de convolution, que $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w} \leq \frac{C}{w_o}$, et qu'on peut trouver Δ, décrite plus haut, telle que $\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\Delta}(\xi)|\, w(\xi)\, d\xi < +\infty$. Alors, si on pose $g(x) = e^{\Delta(x)} - 1$, on a $\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}(\xi)|\, w(\xi)\, d\xi < +\infty$. Notons $g_\alpha(x)\, g(\alpha x)$. De $e^{\alpha.x} = g(\alpha x) + 1$, on déduit que

$$|\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 \leq \Big(\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, d\eta\Big)\Big(\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, |\hat{f}(\xi-\eta)|^2\, d\eta\Big) + 2\,|\hat{f}(\xi)|^2 ,$$

puis, grâce à $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w} \leq \frac{C}{w_o}$:

$$|\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 w_o(\xi) \leq C\|\hat{g}\|_1 \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, |\hat{f}(\xi-\eta)|^2\, w_o(\xi-\eta)\, w(\eta)\, d\eta + 2\,|\hat{f}(\xi)|^2\, w_o(\xi).$$

En intégrant en ξ cette inégalité, on trouve :

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 w_o(\xi)\, d\xi \leq \Big\{ C\|\hat{g}\|_1 \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta + 2 \Big\} \|f\|^2_{Aw_o}.$$

Utilisant le fait que $|a| \leq 1$, on peut écrire

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta = \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}(\xi)|\, w(\alpha\xi)\, d\xi \leq \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}(\xi)|\, w(\xi)\, d\xi ,$$

d'où, pour tout $\alpha \in B(0,1)$:

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2\, w_o(\xi)\, d\xi \leq C(w_o, K)\, \|f\|^2_{Aw_o},$$

puis

$$|\hat{f}(\xi_o)|^2\, w_o(\xi_o) \leq C(N, w_o, K)\, \|f\|^2_{Aw_o},$$

ce qui démontre la première partie du lemme 3.1.

Pour en démontrer la deuxième partie, on se donne $\varepsilon > 0$, puis A et B tels que $\int_{|\eta|>A} |\hat{g}(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta \leq \varepsilon$ et $\int_{|\xi|>B} |\hat{f}(\xi)|^2\, w_o(\xi)\, d\xi \leq \varepsilon$. On choisit alors ξ_o tel que $|\xi_o| > A + B + 1$. Si $\xi \in B(\xi_o, 1)$ et $\alpha \in B(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2\, w_o(\xi) \leq C \int_{|\eta|>A} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, |\hat{f}(\xi-\eta)|^2\, w_o(\xi-\eta)\, w(\eta)\, d\eta \\ + C \int_{|\eta|\leq A} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, |\hat{f}(\xi-\eta)|^2\, w_o(\xi-\eta)\, w(\eta)\, d\eta \\ + 2\, |\hat{f}(\xi)|^2\, w_o(\xi).\end{aligned}$$

Si $|\xi| \leq A$ et $\xi \in B(\xi_o, 1)$, alors $|\xi - \eta| \geq B$, d'où la majoration

$$\begin{aligned}\int_{\xi \in B(\xi_o,1)} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2\, w_o(\xi)\, d\xi \leq C\, \|f\|^2_{Aw_o} \int_{|\eta|>A} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta \\ + C \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta\right)\left(\int_{|\xi|\geq B} |\hat{f}(\xi)|^2\, w_o(\xi)\, d\xi\right) \\ + 2 \int_{\xi \in B(\xi_o,1)} |\hat{f}(\xi)|^2\, w_o(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, parce que $|\alpha| \leq 1$ on écrit

$$\int_{|\eta|>A} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{g}_\alpha(\eta)|\, w(\eta)\, d\eta \leq C,$$

d'où

$$\int_{B(\xi_o, 1)} |\hat{f}(\xi+i\alpha)|^2 \, w_o(\xi)\, d\xi \leq C\varepsilon ,$$

où C dépend de w_o, de g (et donc de K), et de f, mais pas de α. On en déduit donc $|\hat{f}(\xi_o)|^2 \, w_o(\xi_o) \leq C\,\varepsilon$, ce qui achève de prouver le lemme 3.1.

La démonstration du théorème 2.2 est donc achevée.

Si Aw_o est une algèbre de Banach, on sait que w_o vérifie (40). Dans ce cas, (18) est équivalente à

$$\frac{\log w_o(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \in L^1(\mathbb{R}^N), \tag{14}$$

ce qui prouve que Aw_o est un puzzle-L^2 si et seulement si (14) est vérifiée. D'autre part, on a la caractérisation des multiplicateurs de Aw_o donnée par le théorème 2.3 dès que Aw_o est un puzzle-L^2, donc dès que (14) est vérifiée. Inversement, une condition nécessaire à cette caractérisation des multiplicateurs est que Aw_o contienne des fonctions à support compact, ce qui implique que w_o vérifie (14). Le théorème 2.2 et le théorème 2.3 admettent donc pour corollaire l'important théorème suivant.

THEOREME 3.1. <u>Soit</u> w_o <u>un poids tel que</u> Aw_o <u>soit une algèbre de Banach. Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) $m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ <u>est un multiplicateur de</u> Aw_o <u>si et seulement si</u> $x \longrightarrow m(x-t)$ <u>envoie</u> $\{f \in Aw_o / \text{Supp } f \subset B(0,1)\}$ <u>dans</u> Aw_o <u>uniformément par rapport à</u> t ;

b) Aw_o <u>est un puzzle-</u>L^2 :

c) $$\frac{\log w_o(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Si l'une de ces conditions est réalisée, la propriété a) est équivalente à

d) $m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est un multiplicateur de Aw_o si et seulement s'il existe $\varphi \in Aw_o$, $\varphi = 1$ dans un voisinage de 0, telle que $m(x-t)\,\varphi(x) \in Aw_o$ uniformément par rapport à t.

En particulier, si Aw_o est une algèbre de Banach et w_o un poids à croissance lente, Aw_o est un puzzle-L^2 : c'est le cas des algèbres de Beurling. C'est pourquoi nous posons la définition suivante :

DEFINITION 3.1. Soit w_o un poids. Aw_o est une algèbre de Beurling généralisée si Aw_o est une algèbre de Banach et un puzzle-L^2.

Nous allons maintenant regarder de plus près les algèbres de Beurling généralisées : après quelques propriétés générales, nous (re)donnons la forme que prennent les théorèmes 2.3 et 3.4 dans ce cadre. Enfin, nous traitons deux exemples, pour lesquels nous caractérisons explicitement les multiplicateurs. Le premier est bien connu, c'est celui des algèbres de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$, où $s > \frac{N}{2}$.

4. ALGEBRES DE BEURLING GENERALISEES : ETUDE ET EXEMPLES

4.1. Propriétés générales

Ce que nous allons faire ici tourne autour de la notion de spectre.

Nous savons déjà que, si Aw_o est une algèbre (quasi-analytique ou non), et si $x_o \in \mathbb{R}^N$, l'application $f \longrightarrow f(x_o)$ appartient au spectre de Aw_o. Ce fait a pour conséquence la

PROPOSITION 4.1. Soit w_o un poids tel que Aw_o soit une algèbre. Alors,

$\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Il existe, en effet, une constante C telle que, pour toute $f \in Aw_o$:

$$|f(0)| \leq C\|f\|_{Aw_o}.$$

Soit $f \in Aw_o \cap \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. De l'égalité

$$f(0) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

on déduit

$$\left|\int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \leq C(2\pi)^N \|f\|_{Aw_o}.$$

Cette inégalité se prolonge et se transforme aisément en une inégalité sur l'espace $L^2(w_o(x)dx)$:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^N} g(x)\, dx\right| \leq C(2\pi)^N \|g\|_{L^2(w_o(x)dx)}$$

Cela exprime simplement, en mettant en dualité $L^2(w_o(x)\,dx)$ et $L^2(\frac{1}{w_o(x)}\,dx)$, que la fonction constante égale à 1 appartient au dual de $L^2(w_o(x)\,dx)$, c'est-à-dire que $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Soit maintenant Φ un élément du spectre de Aw_o : si $f \in Aw_o$, $\Phi(f) \in \mathbf{C}$, et $|\Phi(f)| \leq C\|f\|_{Aw_o}$, $\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g)$.

Aw_o étant un Hilbert, il existe $\varphi \in Aw_o$ telle que, pour toute $f \in Aw_o$:

$$(54) \qquad \Phi(f) = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, w_o(\xi)\, d\xi.$$

La multiplicité de Φ s'écrit

$$\Phi(fg) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi-\eta)\, \hat{g}(\eta)\, \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, w_o(\xi)\, d\xi$$

$$= \Phi(f)\,\Phi(g) = \left(\int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, w_o(\xi)\, d\xi\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N} \hat{g}(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, w_o(\xi)\, d\xi\right).$$

On applique ces égalités à une suite de couples (f_n, g_n) de fonctions de Aw_o tels que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{f}_n = \delta_{\xi_o}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{g}_n = \delta_{\eta_o}$, où $\xi_o, \eta_o \in \mathbb{R}^N$. Cela donne

$$\overline{\hat{\varphi}(\xi_o,\eta_o)}\, w_o(\xi_o+\eta_o) = (2\pi)^N\, \overline{\hat{\varphi}(\xi_o)}\, w_o(\xi_o)\, \overline{\hat{\varphi}(\eta_o)}\, w_o(\eta_o),$$

d'où

(55) $$\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, w_o(\xi) = (2\pi)^{-N}\, e^{(x_o+iy_o).\xi}, \qquad x_o, y_o \in \mathbb{R}^N.$$

Or $\varphi \in Aw_o$, soit

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2x_o.\xi}\, \frac{1}{w_o(\xi)}\, d\xi < +\infty.$$

Si Aw_o est un puzzle-L^2, c'est-à-dire si w_o vérifie (14), on doit avoir $x_o = 0$. Alors, (54) et (55) donnent

$$\Phi(f) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{iy_o.\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$
$$= f(y_o),$$

la deuxième égalité étant licite parce que, si $f \in Aw_o$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (conséquence de $\frac{1}{w_o} \in L^1(\mathbb{R}^N)$). On a donc déterminé entièrement le spectre de Aw_o.

PROPOSITION 4.2. <u>Si</u> Aw_o <u>est une algèbre de Beurling généralisée, son spectre est constitué des formes multiplicatives</u> $f \longrightarrow f(x_o)$, <u>pour tout</u> $x_o \in \mathbb{R}^N$.

<u>Remarque.</u> Dans le cas général, on a en fait montré que toute $f \in Aw_o$ se prolongeait sur une bande du plan complexe en dimension $N = 1$, et, en dimension quelconque, sur la partie de $\mathbb{C}^N$ définie par $|\mathrm{Im}\, z_i| \le a_i$, où $a = (a_1, \ldots, a_N)$ est défini par $\int_{\mathbb{R}^N} e^{a.x} \frac{1}{w_o(x)}\, dx < +\infty$.

4.2. <u>Multiplicateurs et opérateurs pseudo-différentiels sur les algèbres de Beurling généralisées</u>

Le théorème 2.2, sur les multiplicateurs des puzzles-L^2, s'améliore ainsi :

THEOREME 4.1. Soit Aw_o une algèbre de Beurling généralisée. Alors, $m : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est un multiplicateur de Aw_o si et seulement si m est localement dans Aw_o, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une fonction φ dans Aw_o, $\varphi = 1$ sur un voisinage de 0, telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^N$, $m(x)\,\varphi(x-t) \in Aw_o$, et $\|m(x)\,\varphi(x-t)\|_{Aw_o} \leq C$.

Ce résultat n'est que la transcription du résultat général sur les puzzles-L^2 qui ont une structure d'algèbre (voir corollaire 1.1 du théorème 1.1).

C'est en s'appuyant sur ce théorème, appliqué aux espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, où $s > \frac{N}{2}$, que Coifman et Meyer obtiennent plu sieurs estimations pour des opérateurs pseudo-différentiels de la classe $S^0_{0,0}$ (voir [4], chapitre 1).

Dans une direction voisine, nous généralisons maintenant un théorème de Bourdaud et Meyer à propos de la continu ité L^2 de ces mêmes opérateurs.

THEOREME 4.2. Soit w_o un poids tel que $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$, et vérifiant (14). Soit p un autre poids tel que $\frac{1}{p} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. On pose $\Omega(x,\xi) = w_o(x)\,p(\xi)$. Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur Aw_o, il suffit que son symbole $\sigma(x,\xi)$ soit u n multiplicateur de l'espace $A_\Omega(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Les hypothèses sur w_o impliquent que Aw_o est une algèbre de Beurling généralisée, et donc également que w_o soit sous-multiplicatif.

Démonstration. Soit Δ une fonction découpante de Aw_o vérifiant (P.a) et (P.b) pour Aw_o, et soit $f \in Aw_o$. Suivant Bourdaud et Meyer ([3]), le principe de cette démonstration est une double localisation, en x et en ξ.

On désigne par $\rho_\eta(x+t\,,\,\zeta)$ la transformée de Fourier en ξ, et par $\lambda_{t,\eta}(y,\zeta)$ celle en (x,ξ), de la fonction $\Lambda(\xi)\,\Delta(x)\,\sigma(x+t\,,\,\xi+\eta)$. Alors, l'hypothèse nous indique

(56) $$\int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} |\lambda_{t,\eta}(y,\zeta)|^2 w_o(y)\, p(\zeta)\, dy\, d\zeta \leq C_1.$$

Soit $g = \sigma(x,D)\, f$, c'est-à-dire

$$g(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

(on suppose, comme de coutume, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans un premier temps). Posons $g_t(x) = g(x)\, \Delta(x-t)^2$:

$$g_t(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \Delta(x-t)\, \Delta(x-t)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= C_2 \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \Delta(x-t)\, \Delta(\xi-\eta)^2\, \Delta(x-t)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi\, d\eta.$$

On définit f_η par

(57) $$\hat{f}_\eta(\xi) = \hat{f}(\xi+\eta)\, \Delta(\xi).$$

Alors

(58) $$g_t(x) = C_3 \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\eta.x}\, g_{t,\eta}(x)\, d\eta,$$

où

$$g_{t,\eta}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho_\eta(x,\zeta)\, \Delta(x-t)\, f_\eta(\zeta+x)\, d\zeta.$$

On écrit $f_{t,\eta,\zeta}(x) = \Delta(x-t)\, f_\eta(\zeta+x)$, puis

$$\hat{g}_{t,\eta}(y) = (2\pi)^N \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} \lambda_{t,\eta}(z,\zeta)\, \hat{f}_{t,\eta,\zeta}(y-z)\, dz\, d\zeta.$$

On en déduit, en appliquant Cauchy-Schwarz :

$$|\hat{g}_{t,\eta}(y)| \leq (2\pi)^N \int_{\mathbf{R}^N} \Lambda_{t,\eta}(z)\, F_{t,\eta}(y-z)\, dz ,$$

où

(59 $$\Lambda_{t,\eta}(z)^2 = \int_{\mathbf{R}^N} |\lambda_{t,\eta}(z,\zeta)|^2\, p(\zeta)\, d\zeta$$

et

(60) $$F_{t,\eta}(z)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}_{t,\eta,\zeta}(z)|^2 \frac{1}{p(\zeta)}\, d\zeta .$$

Puisque Aw_o est une algèbre, on a

$$\|g_{t,\eta}\|^2_{Aw_o} \leq C_4 \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Lambda_{t,\eta}(z)^2 w_o(z)\, dz\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} F^2_{t,\eta}(z)\, w_o(z)\, dz\Big)$$

L'inégalité (56) exprime que $\Lambda_{t,\eta} \in Aw_o$ uniformément en t, η, d'où

(61) $$\|g_{t,\eta}\|^2_{Aw_o} \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^N} F_{t,\eta}(z)^2\, w_o(z)\, dz .$$

Rappelons-nous l' égalité (58) : elle implique

$$\hat{g}_t(\xi) = C_3 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_{t,\eta}(\xi-\eta)\, d\eta .$$

L'hypothèse $\frac{1}{w_o} * \frac{1}{w_o} \leq \frac{C}{w_o}$ entraîne, par Cauchy-Schwarz :

(62) $$w_o(\xi)\ |\hat{g}_t(\xi)|^2 \leq C_6 \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{g}_{t,\eta}(\xi-\eta)|^2\, w_o(\xi-\eta)\, w_o(\eta)\, d\eta .$$

La conjugaison des inégalités (60), (61) et (62) nous donne

(63) $$\int_{\mathbb{R}^N} \|g_t\|^2_{Aw_o} dt \leq C_7 \iiiint |\hat{f}_{t,\eta,\zeta}(z)|^2\, w_o(z)\, w_o(\eta)\, \frac{1}{p(\zeta)}\, dz\, d\zeta\, d\eta\, dt .$$

On commence par intégrer le deuxième membre de (63) par rapport à t : puisque $f_{t,\eta,\zeta}(z) = \Delta(z-t)\, f_\eta(\zeta+z)$, on applique (P.b) à Δ et f_η, ce qui permet de faire disparaître l'indice ζ :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|g_t\|^2_{Aw_o} dt \leq C_8 \iiint |\hat{f}_\eta(z)|^2\, w_o(z)\, w_o(\eta)\, \frac{1}{p(\zeta)}\, dz\, d\eta\, d\zeta$$

$$\leq C_9 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}_\eta(z)|^2\, w_o(z)\, w_o(\eta)\, dz\, d\eta ,$$

car $\frac{1}{p} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. D'après (57), cette inégalité s'écrit exactement

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|g_t\|^2_{Aw_o}\, dt \leq C_9 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(z+\eta)|^2\, \Delta(z)^2\, w_o(z)\, w_o(\eta)\, dz\, d\eta .$$

Il suffit alors d'utiliser $w_o(\eta) \leq w_o(z+\eta)\, w_o(z)$, et le fait que Δ soit à support compact, pour obtenir

$$\int_{\mathbf{R}^N} \|g_t\|^2_{Aw_o}\, dt \leq C_{10} \|f\|^2_{Aw_o} .$$

On a $g_t(x) = g(x)\, \Delta(x-t)^2$: bien que Δ^2 ne soit pas une fonction découpante, le fait que $\Delta^2 = 1$ sur un voisinage de 0 suffit à prouver que $g \in Aw_o$, avec $\|g\|_{Aw_o} \leq C_{11} \|f\|_{Aw_o}$: la démonstration est terminée.

Notre étude théorique des multiplicateurs et des opérateurs pseudo-différentiels s'arrête ici, dans le cadre des espaces Aw_o en général.

Nous allons maintenant exploiter le théorème 4.1 en traitant deux exemples d'algèbres de Beurling généralisées. Nous commençons par retrouver un résultat classique.

4.3. Premier exemple : les algèbres $H^s(\mathbf{R}^N)$, $s > \frac{N}{2}$

DEFINITION 4.1. On appelle $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ mesurables telles que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}^N} \|f(x)\, 1_{B(t,1)}(x)\|_2 < +\infty ,$$

et on note

$$\|f\|_{2,loc} = \sup_{t \in \mathbf{R}^N} \|f(x)\, 1_{B(t,1)}(x)\|_2 . \tag{64}$$

Préliminaires.

. si $f \in L^2$, on note le module de continuité en norme L^2 de f :

$$\omega_f(\alpha) = \|f(x+\alpha) - f(x)\|_2 .$$

. on rappelle le résultat suivant, dont on peut trouver la démonstration dans Stein ([12] , p. 139).

PROPOSITION 4.3. Soit $\sigma \in]0,1[$. Alors, $f \in H^{\sigma}(\mathbf{R}^N)$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et $\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\omega_f(\alpha)^2}{|\alpha|^{N+2\sigma}} d\alpha < +\infty$. De plus, il existe une constante C_N telle que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2\sigma} d\xi = C_N \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\omega_f(\alpha)^2}{|\alpha|^{N+2\sigma}} d\alpha.$$

Soit maintenant $s > \frac{N}{2}$, et m un multiplicateur de $H^s(\mathbf{R}^N)$. Deux cas sont à distinguer :

Premier cas, $s \in \mathbf{N}$. L'appartenance à $H^s(\mathbf{R}^N)$ s'exprime simplement : $f \in H^s(\mathbf{R}^N) \Longleftrightarrow \partial^j f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ pour tout $j = (j_1, \ldots, j_N)$, avec $|j| \leq s$.
On choisit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ tel que $\varphi = 1$ sur $B(0,1)$, et on pose $\varphi_t(x) = \varphi(x-t)$: $m\,\varphi_t \in H^s$, et $\|m\,\varphi_t\|_{H^s} \leq C$.

Puisque $s > \frac{N}{2}$, tout élément f de H^s est borné, avec $\|f\|_\infty \leq C(s,N)\|f\|_{H^s}$. Or, si $x \in B(t,1)$, $m\,\varphi_t(x) = m(x)$. Donc, $m \in L^\infty$.

De plus, si $j = (j_1, \ldots, j_N)$ vérifie $|j| \leq s$, de $\partial^j m\,\varphi_t(x) = (\partial^j m)(x)$ si $x \in B(t,1)$, on déduit que $\partial^j m \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

Réciproquement, soit $m \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ tel que $\partial^j m \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ pour tout multi-indice j, $|j| \leq s$. Nous allons montrer que m est un multiplicateur de H^s.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset B(0,1)$. D'après le théorème 4.1, il suffit de montrer que $m\,\varphi_t \in H^s$ uniformément par rapport à t.

Puisque $m \in L^\infty$, $m\,\varphi_t \in L^2$, uniformément.

Soit maintenant j un multi-indice, $|j| \leq s$. On a la formule de Leibniz suivante sur $\mathbf{R}^N$:

$$\partial^j(m\,\varphi_t) = \sum_{k+\ell=j} C_j^k\, \partial^k m\, \partial^\ell \varphi_t ,$$

où la somme est étendue à tous les multi-indices $k = (k_1, \ldots, k_N)$ et

$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_N)$ tels que $k+\ell = (j_1, \ldots, j_N)$, et où on a posé $C_j^k = C_{j_1}^{k_1} \ldots C_{j_N}^{k_N}$.
il suffit d'utiliser

$$\|\partial^k m\, \partial^\ell \varphi_t\|_2 \leq \|\partial^\ell \varphi\|_\infty \, \|\partial^k m\|_{2,loc}$$

pour prouver $\partial^j(m\,\varphi_t) \in L^2(R^N)$, avec $\|\partial^j m\,\varphi_t\|_2 \leq C$. $m\,\varphi_t$ est donc dans H^s, avec $\|m\,\varphi_t\|_{H^s} \leq C$, pour tout t : m est un multiplicateur de H^s.

Ce raisonnement, que nous avons volontairement détaillé malgré sa simplicité, contient toute notre démarche pour caractériser les multiplicateurs d'un espace Aw_o: d'abord écrire l'appartenance à Aw_o sans passer par la transformée de Fourier, en déduire des conditions nécessaires sur un multiplicateur, enfin montrer qu'elles sont suffisantes en appliquant le théorème 4.1 et en choisissant judicieusement la fonction φ.

<u>Deuxième cas</u>, $s = n + \sigma$, <u>où</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $\sigma \in]0,1[$

$f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, |\xi|^{2n+2\sigma} \, d\xi < +\infty. \tag{65}$$

Or, $|\xi|^{2n} = \sum_{|j| \leq n} C_n^{j_1,\ldots,j_N} \xi^{2j}$, où $C_n^{j_1,\ldots,j_N} = \dfrac{n!}{j_1!\ldots j_N!\,(n-j_1)!\ldots(n-j_N)!}$

et $\xi^{2j} = \xi_1^{2j_1} \ldots \xi_N^{2j_N}$. Par conséquent, (65) est équivalent à

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\partial^j f)\hat{\ }(\xi)|^2 \, |\xi|^{2\sigma} \, d\xi < +\infty \quad \text{pour tout } j,\ |j| \leq n,$$

ou encore à

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\omega_{\partial^j f}(\alpha)}{|\alpha|^{N+2\sigma}} \, d\alpha < +\infty \quad \text{pour tout } j,\ |j| \leq n. \tag{66}$$

Il faut remarquer que, puisque $\omega_{\partial^j f}(\alpha) \leq 2\|\partial^j f\|_2$, les intégrales ci-dessus ne peuvent diverger qu'en 0.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi = 1$ sur $B(0,2)$: $\partial^j m\,\varphi_t(x) = \partial^j m(x)$ si $x \in B(t,2)$, donc $\partial^j m \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ si $|j| \leq n$. De plus, si $|\alpha| \leq 1$, on a

(67) $$\| [\partial^j m(x+\alpha) - \partial^j m(x)] \, 1_{B(t,\,1)}(x) \|_2 \leq \omega_{\partial^j(m\varphi_t)}(\alpha).$$

(66) et (67) montrent qu'il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^N$ et tout multi-indice j, $|j| \leq n$:

(68) $$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\| [\partial^j m(x+\alpha) - \partial^j m(x)] \, 1_{B(t,1)}(x) \|_2}{|\alpha|^{N+2\sigma}} \, d\alpha \leq C.$$

Enfin, comme pour le premier cas, $m \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Supposons récirpoquement que $m \in L^\infty$ et vérifie (68) pour tout t et tout j, $|j| \leq n$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi \subset B(0,1)$, et soit j, $|j| \leq n$. On a encore

$$\partial^j(m \, \varphi_t) = \sum_{k+\ell=j} C_j^k \, \partial^k m \, \partial^\ell \varphi_t .$$

Pour la commodité de l'écriture, nous notons, si $\alpha \in \mathbf{R}^N$, $\Delta_\alpha f(x) = f(x+\alpha) - f(x)$. Il est facile de voir que

(69) $$\Delta_\alpha(fg)(x) = f(x+\alpha) \, \Delta_\alpha g(x) + g(x) \, \Delta_\alpha f(x).$$

Or :

$$\| \partial^k m(x+\alpha) \, \Delta_\alpha(\partial^\ell \varphi_t)(x) \|_2 \leq \begin{cases} 2 \|\partial^\ell \varphi\|_\infty \|\partial^k m\|_{2,loc} \\ |\alpha| \sup\limits_{|\ell'|=1+|\ell|} \|\partial^{\ell'} \varphi\|_\infty \|\partial^k m\|_{2,loc} \end{cases}$$

l'inégalité inférieure étant obtenue par application à $\partial^\ell \varphi_t$ du théorème des accroissements finis. On en déduit

(70) $$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\| \partial^k m(x+\alpha) \, \Delta_\alpha(\partial^\ell \varphi_t)(x) \|_2^2}{|\alpha|^{N+2\sigma}} \, d\alpha \leq C_1(\varphi, m).$$

D'autre part :

$$\|\partial^{\ell}\varphi_t(x)\,\Lambda_\alpha(\partial^k m)(x)\|_2 \leq \|\partial^{\ell}\varphi\|_\infty \|1_{B(t,1)}\,\Lambda_\alpha(\partial^k m)\|_2,$$

d'où

(71) $$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\|\partial^{\ell}\varphi_t(x)\,\Lambda_\alpha(\partial^k m)(x)\|_2^2}{|\alpha|^{N+2\alpha}}\,d\alpha \leq C_2(\varphi,\, m).$$

La conjonction de (69), (70) et (71) prouve que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\omega_{\partial^j(m\varphi_t)}(\alpha)^2}{|\alpha|^{N+2\sigma}}\,d\alpha \leq C_3(\varphi, m),$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 4.3 :

(72) $$\int_{\mathbf{R}^N} |(m\,\varphi_t)^{\wedge}(\xi)|^2\,|\xi|^{2n+2\sigma}\,d\xi \leq C_4(\varphi, m).$$

Puisque $m \in L^\infty$, $m\,\varphi_t \in L^2$ uniformément par rapport à t, ce qui, avec (72) achève de prouver que $m\,\varphi_t \in H^s$, uniformément.

Le théorème 4.1 nous a donc permis de retrouver la caractérisation des multiplicateurs des espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$, quand $s > \frac{N}{2}$:

THEOREME 4.3. Soit $s > \frac{N}{2}$. Alors, $m : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est un multiplicateur de $H^s(\mathbf{R}^N)$ si et seulement si :

a) dans le cas où $s \in \mathbf{N}$, $m \in L^\infty$ et, pour tout multi-indice j tel que $|j| \leq s$, $\partial^j m \in L^2_{loc}$

b) sinon, en posant $s = n + \sigma$, avec $n \in \mathbf{N}$ et $\sigma \in \left]0,1\right[$, $m \in L^\infty$ et, pour tout multi-indice j tel que $|j| \leq n$, $\partial^j m \in L^2_{loc}$, avec

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\|\left[\partial^j m(x+\alpha) - \partial^j m(x)\right] 1_{B(t,1)}(x)\|_2^2}{|\alpha|^{N+2\sigma}}\,d\alpha \leq C\,,$$

quel que soit $t \in \mathbf{R}^N$.

(Rappelons que $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ est défini au début du paragraphe, à la définition 4.1).

4.4. Deuxième exemple

Cette fois-ci, nous allons faire les hypothèses suivantes sur le poids w_o :

$$(75)\left\{\begin{array}{ll}(73) & w_o(x) = e^{\theta_o(|x|)}, \quad \text{où} \quad \theta_o : [0,+\infty[\to[0,+\infty[\text{ est 2 fois dérivable, et} \\ & w_o(0) = 1 \\ (74) & \psi(r) = r\,\theta_o'(r) \text{ est concave, et } r\,\psi'(r) \text{ est croissant et } > 0 \text{ pour} \\ & r \text{ assez grand} \\ (14) & \displaystyle\int_o^{+\infty} \frac{\theta_o(r)}{1+r^2}\,dr < +\infty .\end{array}\right.$$

L'hypothèse (74) indique à la fois une régularité concave de θ_o (puisque $\frac{\psi(r)}{r} = \theta_o'(r)$ est décroissant), et une certaine taille minimale de θ_o (puisque $\theta_o(r) \geq b \log^2 r$ au voisinage de l'infini dès qu'il existe $s \geq 0$ tel que $s\,\psi'(s) > b$). En particulier, w_o est à croissance rapide.

L'ensemble des hypothèses (75) implique que Aw_o est une algèbre de Beurling généralisée. Pour le voir, on prouve en invoquant la proposition 3.2 que

$$(76) \qquad \int_1^{+\infty} e^{-\theta_o(r)+r\theta_o'(r)}\, r^{N-1} dr < +\infty .$$

En effet, $r\,\theta_o'(r) - (N+1)$ est concave et positif pour r assez grand, d'après (74). Par conséquent, $\theta_o'(r) - \frac{N+1}{r}$ est décroissant, et $\theta_o(r) - (N+1)\log r$ est concave. Ainsi, $\frac{\theta_o(r)}{r} - (N+1)\frac{\log r}{r}$ est décroissant pour r assez grand. En dérivant, on trouve

$$-\theta_o(r) + r\,\theta_o'(r) \leq N+1-(N+1)\log r ,$$

ce qui prouve (76).

Nous détaillerons des exemples à la fin du paragraphe. D'ores et déjà, signalons que les poids de Gevrey $e^{|x|^\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$, ou bien $e^{\mathrm{Log}^\alpha(1+|x|)}$, où $\alpha \geq 2$, vérifient les hypothèses (75).

On définit, pour tout ce paragraphe, les fonctions et les quantités suivantes :

(77) si $s \geq 0$, $P(s) = \sup_{r \geq 0} \dfrac{r^s}{\sqrt{w_o(r)}}$, où $w_o(r) = e^{\theta_o(r)}$

(78) si $s \geq 0$, $\pi(s) = \sqrt{s\,\psi'(s)}$

(79) $\Phi = \psi^{-1}$, et $p(x) = \pi \circ \Phi(2x)$

(80) si $n \in \mathbb{N}$, $M_n^2 = p(n)\,P(n)^2$

(81) si $k = (k_1, \dots, k_N)$ est un multi-indice,

$$L_k^2 = \frac{k_1! \dots k_N!}{|k|!} M_{|k|}^2.$$

Les multiplicateurs de Aw_o sont donnés par le

THEOREME 4.4. Soit w_o vérifiant (75). Alors, $m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est un multiplicateur de Aw_o si et seulement si, pour tout multi-indice k, $\partial^k m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, avec $\|\partial^k m\|_{2,loc} \leq \varepsilon_k L_k$, où $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbb{N}^N)$.

Rappel. D'après la définition 4.1,

$$\|\partial^k m\|_{2,loc} = \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \|\partial^k m(x)\, 1_{B(t,1)}(x)\|_2 .$$

Démonstration. L'idée de base est que l'appartenance à Aw_o s'exprime directement, sans passer par la transformée de Fourier, grâce au lemme suivant.

LEMME 4.1. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $r \geq 0$

$$\frac{1}{C} w_o(r) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{M_n^2} \leq C\, w_o(r),$$

où $w_o(r) = e^{\theta_o(r)}$.

Admettons ce lemme pour l'instant, et posons, si $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$T(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{M_n^2}$. Alors, $Aw_o = A_T$. Réécrivons le poids T :

$$T(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2)^n}{M_n^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M_n^2} \Big(\sum_{|k|=n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_N!} \xi_1^{2k_1} \ldots \xi_N^{2k_N} \Big)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \frac{\xi^{2k}}{L_k^2} .$$

Alors, $f \in Aw_o$ veut dire exactement qu'il existe $(\varepsilon_k) \in \ell^2(\mathbb{N}^N)$ telle que, pour tout k :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \xi^{2k} \, d\xi = \varepsilon_k^2 L_k^2 ,$$

c'est-à-dire

(82) $$\|\partial_k f\|_2 = \varepsilon_k L_k ,$$

où l'on a légèrement modifié ε_k, sans le dire !

Soit m un multiplicateur de Aw_o : choisissant $\varphi \in Aw_o$ telle que $\varphi = 1$ sur $B(0,1)$, on a

$$\partial^j (m \, \varphi_t)(x) = \partial^j m(x) \quad \text{si} \quad x \in B(t,1),$$

et $\|\partial^k m \, \varphi_t\|_2 \leq \varepsilon_k L_k$ pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, où $(\varepsilon_k) \in \ell^2(\mathbb{N}^N)$. On en déduit immédiatement

(83) $$\|\partial^k m\|_{2,\mathrm{loc}} \leq \varepsilon_k L_k .$$

Pour montrer que les conditions (83), pour tout multi-indice k, suffisent à donner un multiplicateur de Aw_o, nous choisissons $\varphi \in Aw_o$, $\operatorname{Supp} \varphi \subset B(0,1)$, et nous écrivons

(84) $$\|\partial^j m\,\varphi_t\|_2 \le \sum_{k+\ell=j} C_j^k \,\|\partial^\ell \varphi\|_\infty \,\|\partial^k m\|_{2,\mathrm{loc}}\,,$$

où $C_j^k = C_{j_1}^{k_1} \dots C_{j_N}^{k_N}$.

Nous imposons maintenant sur φ des conditions plus fortes que l'appartenance à Aw_o, soit

(85) $$\|\partial^\ell \varphi\|_\infty \le \alpha_\ell \, L_\ell\,,$$

où

(86) $$\alpha_\ell = \frac{1}{(1+\ell_1^2)^2} \cdots\cdots \frac{1}{(1+\ell_N^2)^2}\,\frac{1}{1+|\ell|^{1/4}}\,,$$

ce qui est possible, par exemple, en choisissant φ dans Aw, où

$$w(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+n^2)^2\,|\xi|^{2n}}{M_n^2}\,.$$

En effet, d'après le lemme 4.1 et l'hypothèse (14), $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < +\infty$. L'existence de φ résulte alors de la théorie des classes non quasi-analytiques (voir Katznelson [7], ou Mandelbrojt [8] et [9]).

Utilisant les relations (83), (84) et (85), on a

(87) $$\frac{\|\partial^j m\,\varphi_t\|_2}{\varepsilon_j\, L_j} \le \sum_{k+\ell=j} C_j^k \,\frac{L_\ell\, L_k}{L_j}\,\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\,\alpha_\ell$$

$$\le \sum_{k+\ell=j} (C_j^k \, C_{|j|}^{|k|})^{1/2}\,\frac{M_{|\ell|} M_{|k|}}{M_{|j|}}\,\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\,\alpha_\ell\,.$$

On fait alors appel au résultat technique suivant.

LEMME 4.2. Si $p+q = r$, alors

$$\frac{M_p}{p!}\,\frac{M_q}{q!} \le 2^{1/4}\,\frac{M_r}{r!}\,q^{1/4}\,.$$

Nous le démontrerons après avoir démontré le lemme 4.1.

Il permet d'écrire, après (87)

$$\frac{\|\partial^{j} m\, \varphi_t\|_2}{\varepsilon_j L_j} \leq 2^{1/4} \sum_{k+\ell=j} \left(\frac{C_j^k}{C_{|j|}^{|k|}}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} \alpha_\ell\, |\ell|^{1/4}.$$

Or, $C_j^k = C_{j_1}^{k_1} \ldots C_{j_N}^{k_N} \leq C_{|j|}^{|k|}$, ce qu'un développement de

$$(1+x)^{j_1} \ldots (1+x)^{j_N} = (1+x)^{j}$$

fait voir tout de suite. Ainsi :

$$\text{(88)} \qquad \frac{\|\partial^{j} m\, \varphi_t\|_2}{\varepsilon_j L_j} \leq 2^{1/4} \sum_{k+\ell=j} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} \alpha_\ell\, |\ell|^{1/4}.$$

Il nous faut montrer, pour pouvoir conclure, que $\sum\limits_{k+\ell=j} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} \alpha_\ell\, |\ell|^{1/4} \leq C$,

d'après (82). Pour cela, nous commençons par modifier la suite (ε_k), en posant sucessivement :

$$\text{(89)} \qquad \beta_\ell = \frac{1}{(1+\ell_1^2)} \cdots \frac{1}{(1+\ell_N^2)},$$

et

$$\text{(90)} \qquad \varepsilon_k^* = \sum_{m+n=k} \varepsilon_m\, \beta_n.$$

Alors, $\varepsilon_k \leq \varepsilon_k^*$, donc les relations (83) peuvent être remplacées par

$$\text{(91)} \qquad \|\partial_j m\|_{2,\text{loc}} \leq \varepsilon_j^* L_j.$$

Et puisque $(\varepsilon_k^*) \in \ell^2(\mathbb{N}^N)$, on peut estimer, d'après (82), $\frac{\|\partial^{j} m\, \varphi_t\|}{\varepsilon_j^* L_j}$ au lieu de $\frac{\|\partial^{j} m\, \varphi_t\|_2}{\varepsilon_j L_j}$. On est donc ramené à prouver que

$$\text{(92)} \qquad \sum_{k+\ell=j} \frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_j^*} \alpha_\ell\, |\ell|^{1/4} \leq C.$$

Or : si $k + \ell = j$, on a d'après (90) :

$$\frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_j^*} = \frac{\sum\limits_{m+n=k} \varepsilon_m \beta_n}{\sum\limits_{p+q=k+\ell} \varepsilon_p \beta_q} \leq \frac{\sum\limits_{m\leq k} \varepsilon_m \beta_{k-m}}{\sum\limits_{m\leq k} \varepsilon_m \beta_{k+\ell-m}} ,$$

où $m \leq k$ signifie $m_1 \leq k_1, \dots, m_N \leq k_N$. On a la relation $\beta_{k+\ell-m} \geq \beta_\ell \beta_{k-m}$, ce qui donne :

$$\frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_j^*} \leq \frac{1}{\beta_\ell} .$$

Mais d'après (86) et (89) on a choisi : $|\ell|^{1/4} \alpha_\ell \leq \beta_\ell^2$, d'où

$$\sum_{k+\ell=j} \frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_j^*} \alpha_\ell |\ell|^{1/4} \leq \sum_{\ell\in\mathbb{N}^N} \beta_\ell < +\infty .$$

Ainsi, moyennant les lemmes 4.1 et 4.2, nous avons démontré le théorème 4.4.

Démonstration du lemme 4.1. Il s'agit ici de comparer $w_o(r) = e^{\theta_o(r)}$ et $T(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{M_n^2}$. Nous avions posé :

(77) si $s \geq 0$, $P(s) = \sup\limits_{r\geq 0} \dfrac{r^s}{\sqrt{w_o(r)}}$ et

(74) $\psi(r) = r\,\theta_o'(r)$.

Un simple calcul montre que le supremum qui définit $P(s)$ est atteint en s défini par

(93) $$\psi(r) = r\,\theta_o'(r) = 2s ,$$

c'est-à-dire, d'après (79) :

$$r = \Phi(2s).$$

On en déduit que, pour tout $r \geq 0$,

(94) $$\sqrt{w_o}(r) = \sup_{s\geq 0} \frac{r^s}{P(s)} = \frac{r^\sigma}{P(\sigma)},$$

avec

(95) $$\sigma = \frac{1}{2}\,\psi(r) = \frac{1}{2}\,r\,\theta_o'(r).$$

<u>Nous supposons maintenant que</u> $r > 0$ <u>est fixé, et nous posons successivement</u> :

(96) $$\tau(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{P(n)}$$

(97) $$q = [\sigma] = \text{partie entière de } \sigma$$

(98) $$\lambda_n = \Phi(2n), \quad \text{soit} \quad n = \frac{1}{2}\,\lambda_n\,\theta_o'(\lambda_n).$$

Alors, d'après (94) et (95) :

(99) $$\sqrt{w_o}(\lambda_n) = \frac{\lambda_n^n}{P(n)}.$$

D'après (94) et (96), il est clair que

(100) $$\tau(r) \leq \sqrt{w_o}(r).$$

La première étape de la démonstration sera de prouver l'existence d'une constante $C_1 = C(w_o)$ telle que

(101) $$\sqrt{w_o}(r) \leq C_1\,\tau(r).$$

La deuxième étape sera la preuve de

(102) $$\frac{1}{C_2}\,w_o(r) \leq T(r) \leq C_2\,w_o(r),$$

où $T(r)$ est donné par

(103) $$T(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{M_n^2},$$

M_n^2 étant défini par (78), (79) et (80) :

(78) $$\text{si} \quad s \geq 0, \quad \pi(s) = \sqrt{s\,\psi'(s)}$$

(79) $$\Phi = \psi^{-1} \quad \text{et} \quad p(x) = \pi \circ \Phi(2x)$$

(80) $$M_n^2 = p(n)\,P(n)^2.$$

Première étape : démonstration de (101)

(101) s'écrit aussi, à l'aide de (97) et (99) :

(102) $$\sqrt{w_o}(r) \leq C_1\,\tau(r) = C_1\,\frac{r^q}{P(q)} = C_1\left(\frac{r}{\lambda_q}\right)^q \sqrt{w_o}(\lambda_q),$$

soit

(103) $$\theta_o(r) - \theta_o(\lambda_q) \leq 2q\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\lambda_q} + K.$$

Or, $\theta_o(r) - \theta_o(\lambda_q) = \int_{\lambda_q}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx$, d'où la condition nécessaire et suffisante pour obtenir (101) :

(104) $$\forall\, n \in N \qquad \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left[\psi(x) - 2n\right]\frac{dx}{x} \leq K.$$

Cette condition est vérifiée en particulier si

(105) $$\lambda_{n+1} \leq C\,\lambda_n.$$

Mais, sous nos hypothèses, on a, d'après (98) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} &= \mathrm{Log}\,\Phi(2n+2) - \mathrm{Log}\,\Phi(2n) \\ &= \int_{2n}^{2n+2} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\,dx \end{aligned}$$

soit, d'après (79) :

$$\mathrm{Log}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \int_{2n}^{2n+2} \frac{1}{\psi' \circ \Phi(x).\Phi(x)}\,dx.$$

L'hypothèse (74) nous permet d'écrire $s\psi'(s) \geq b > 0$ si s est assez grand, d'où, si n est assez grand :

$$\text{Log}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq \frac{2}{b}.$$

(105) est ainsi vérifiée, ce qui prouve (101).

Deuxième étape : démonstration de (102)

On pose maintenant :

(106) $$\mu(s) = \text{Log}\,P(s)$$

(107) $$u_1(s) = 2s\,\text{Log}\,r - 2\,\mu(s)$$

(108) $$u(s) = 2s\,\text{Log}\,r - 2\,\mu(s) - \text{Log}\,p(s).$$

D'après (103) et (94) :

(109) $$T(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{u(n)} \quad \text{et} \quad w_o(r) = e^{u_1(\sigma)} = p(\sigma)\,e^{u(\sigma)}.$$

Les propriétés de μ, u_1 et u, qui sont ici des fonctions de s, paramétrées par $r > 0$ (toujours fixé, bien sûr), sont rassemblées dans le lemme suivant.

LEMME 4.3. a) si $t = \Phi(2s)$, $\mu'(s) = \text{Log}\,t$ et $\mu''(s) = \dfrac{1}{t\,\psi'(t)}$ (110) ;

b) en prenant soin d'avoir fixé r assez grand, on a

(111) $$2 \leq \pi(r)\,u_1'(\sigma - \pi(r)) \leq C_3$$

et

(112) $$2 \leq -\pi(r)\,u_1'(\sigma+\pi(r)) \leq C_3 \;;$$

c) pour tout $s \geq 0$,

(113) $$\left|u_1'(s) - u'(s)\right| \leq \frac{\Phi'(2s)}{\Phi(2s)}$$

d) si r est assez grand,

(114) $$\frac{1}{C_4} \leq \pi(r)\, u'(\sigma - \pi(r)) \leq C_4$$

et

(115) $$\frac{1}{C_4} \leq -\pi(r)\, u'(\sigma+\pi(r)) \leq C_4 .$$

Démonstration. Ces quatre propriétés ne sont que des jongleries fastidieuses avec les hypothèses. C'est pourquoi nous n'exposons que brièvement leur démonstration

a) provient de la relation

$$\mu(s) = s \operatorname{Log} \Phi(2s) - \frac{1}{2}\, \theta_o \left[\Phi(2s)\right]$$

déduite de (106), (77) et (93).

b) (107) donne

$$\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) = \pi(r) \left[2 \operatorname{Log} r - 2\mu'(\sigma-\pi(r))\right]$$

$$= 2\pi(r)^2\, \mu''(s) ,$$

où $s \in \left[\sigma-\pi(r), \sigma\right]$, parce que, d'après (110) et (93), $\operatorname{Log} r = \mu'(\sigma)$. Cela se réécrit ainsi :

(116) $$\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) = 2\, \frac{r\, \psi'(r)}{t\, \psi'(t)},$$

où $t = \Phi(2s)$, d'après (110) et (78). L'hypothèse (74) implique $t \leq r$, puis $t\, \psi'(t) \leq r\, \psi'(r)$. Ainsi, on a bien

$$\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) \geq 2 .$$

D'autre part, l'hypothèse (74) implique la croissance de Φ'. Le théorème des accroissements finis nous donne alors

$$t \geq r - 2 \sqrt{\frac{r}{\psi'(r)}} ,$$

d'où $\dfrac{t}{r} \geq 1 - \dfrac{2}{\sqrt{r\, \psi'(r)}}$.

Deux cas se présentent alors :

soit $\lim\limits_{r \to +\infty} r\, \psi'(r) = +\infty$, soit $r\, \psi'(r) \leq C$.

Dans le premier cas $\frac{t}{r} \geq \frac{1}{2}$ pour r assez grand, d'où, d'après (116) :

$$\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) \leq 4 .$$

Dans le second, $t\,\psi'(t) \geq b > 0$ si r est assez grand, d'où, d'après (116) :

$$\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) \leq \frac{C}{b} .$$

c) $\left[s\,\psi'(s)\right]' = \psi'(s) + s\,\psi''(s) \leq \psi'(s)$ d'après (74), d'où

$$\left|u_1'(x) - u'(s)\right| = \frac{p'(s)}{p(s)} = 2\,\frac{\Phi'(2s)\;\pi'\circ\Phi(2s)}{\pi\circ\Phi(2s)}$$

$$\leq \frac{\Phi'(2s)\;\psi'\circ\Phi(2s)}{\Phi(2s)\;\psi'\circ\Phi(2s)} .$$

d) Si $r\,\psi'(r)$ reste borné, le résultat est évident. On suppose donc $\lim\limits_{r\to+\infty} r\,\psi'(r) = +\infty$.

c) nous donne alors

$$\left|\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) - \pi(r)\, u'(\sigma-\pi(r))\right| \leq \pi(r)\,\frac{\Phi'(2\sigma - 2\pi(r))}{\Phi(2\sigma - 2\pi(r))}$$

$$\leq \frac{\pi(r)}{t\,\psi'(t)} ,$$

où $t = \Phi(2\sigma - 2\pi(r))$. Comme en b), on en déduit

$$\left|\pi(r)\, u_1'(\sigma - \pi(r)) - \pi(r)\, u'(\sigma - \pi(r))\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t\,\psi'(t)}} \leq 1$$

si r est assez grand, d'où, avec (111), le résultat voulu.

Une petite modification du lemme, facile à établir, est la suivante :

(117) si $|x| \leq \pi(r)$, alors $\frac{1}{C_4} \leq \pi(r)\left|u'(\sigma+x)\right| \leq C_4$.

Nous démontrons maintenant (102) : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma - p(\sigma) \leq n \leq \sigma + p(\sigma)$.

D'après (78), (79) et (95), $p(\sigma) = \pi(r)$. Donc, par le théorème des accroissements finis, puis par (117) : $\frac{1}{C_4} \le |u(\sigma) - u(n)| \le C_4$.

Utilisant alors (94) et (108) sous la forme

(118) $$e^{u(\sigma)} = \frac{1}{p(\sigma)} w_o(r),$$

il vient

(119) $$\frac{1}{C_5} w_o(r) \le \sum_{\sigma - p(\sigma)}^{\sigma + p(\sigma)} e^{u(n)} \le C_5 w_o(r).$$

Cela prouve

(120) $$\frac{1}{C_5} w_o(r) \le T(r).$$

D'autre part, d'après le lemme 4.3 (a) et (c) :

$$u'(s) \ge 2 \text{ Log } r - 2 \text{ Log } \Phi(2s) - \frac{\Phi'(2s)}{\Phi(2s)} ,$$

$$\ge 2 \text{ Log } r - 2 \log t - \frac{1}{t\, \psi'(t)},$$

en posant $t = \Phi(2s)$. La fonction

$$t \longrightarrow 2 \text{ Log } t + \frac{1}{t\, \psi'(t)}$$

est croissante pour t assez grand. Donc, si $s \in [s_o , \sigma - p(\sigma)]$, on aura

$$u'(s) \ge u_1'(\sigma - p(\sigma)) - \frac{\Phi'(2\sigma - 2p(\sigma))}{\Phi(2\sigma - 2p(\sigma))} ,$$

d'où, d'après (111) et la preuve de (114)

(121) $$p(\sigma)\, u'(s) \ge \frac{1}{C_4} \quad \text{si} \quad s \in [s_o , \sigma - p(\sigma)] .$$

Cela implique la croissance de u sur $[s_o , \sigma - p(\sigma)]$, d'où

$$\sum_{n_o}^{\sigma - p(\sigma) - 1} e^{u(n)} \le \int_{s_o}^{\sigma - p(\sigma)} e^{u(s)}\, ds,$$

et par (121) :

$$\sum_{n_o}^{\sigma-p(\sigma)-1} e^{u(n)} \leq C_4\, p(\sigma) \int_{s_o}^{\sigma-p(\sigma)} e^{u(s)}\, u'(s)\, ds ,$$

$$\leq C_4\, p(\sigma)\, e^{u(\sigma-p(\sigma))} \quad ,$$

d'où

(122)
$$\sum_{n_o}^{\sigma-p(\sigma)-1} e^{u(n)} < 2\, C_4\, p(\sigma)\, e^{u(\sigma)} = 2\, C_4\, w_o(r) ,$$

d'après (117) et (118).

Si maintenant $s \in [\sigma+p(\sigma)\ ,\ +\infty[$, on démontre de même que

$$-\,p(\sigma)\, u'(s) \geq \frac{1}{C_4} ,$$

puis que

(123)
$$\sum_{\sigma+p(\sigma)+1}^{+\infty} e^{u(n)} \leq 2\, C_4\, w_o(r).$$

Finalement, (119), (122) et (123) donnent facilement :

$$T(r) = \sum_{o}^{+\infty} e^{u(n)} \leq C_6\, w_o(r),$$

ce qui, avec (120), achève de prouver le lemme 4.1.

Démonstration du lemme 4.2. Il s'agit de montrer que, si $k + \ell = j$, on a

(124)
$$\frac{M_k}{k!}\, \frac{M_\ell}{\ell!} \leq 2^{1/4}\, \frac{M_j}{j!}\, \ell^{1/4} .$$

Cela s'écrit, d'après (80) :

$$\left(\frac{p(k)\, p(\ell)}{p(j)}\right)^{1/2} \frac{P(k)}{k!}\, \frac{P(\ell)}{\ell!} \leq \frac{P(j)}{j!}\, (2\,\ell)^{1/4} .$$

Or, p est une fonction croissante, d'où $p(k) \leq p(j)$.

D'autre part, ψ étant concave par (74), on a

$$t\, \psi'(t) \leq \psi(t),$$

d'où

$$\Phi(2\ell)\,\psi'\circ\Phi(2\ell) \leq 2\ell,$$

soit
$$p(\ell)^2 \leq 2\ell.$$

Par conséquent :

(125)
$$\left(\frac{p(k)\,p(\ell)}{p(j)}\right)^{1/2} \leq (2\ell)^{1/4}.$$

Il suffit donc de montrer

(126)
$$\frac{P(k)\,P(\ell)}{k!\ \ell!} \leq \frac{P(j)}{j!}$$

pour pouvoir conclure par (124).

Posons $\alpha_n = \dfrac{P(n)}{n\,P(n-1)}$, $\alpha_1 = P(1)$. (126) est équivalent à

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_k)(\alpha_1 \ldots \alpha_\ell) \leq \alpha_1 \ldots \alpha_j .$$

Ainsi, (126) sera prouvée dès qu'on aura montré que la fonction $Q(s) = \dfrac{P(s)}{s\,P(s-1)}$ est croissante pour $s \geq 2$. Or :

$$\frac{Q'(s)}{Q(s)} = \mu'(s) - \mu'(s-1) - \frac{1}{s} .$$

Le problème est donc ramené à montrer

(127)
$$s\left[\mu'(s) - \mu'(s-1)\right] \geq 1.$$

On écrit alors, d'après (110) : $\mu'(s) - \mu'(s-1) = \dfrac{1}{\Phi(t)\,\psi'\circ\Phi(t)}$, où $s-1 \leq t \leq s$. D'après (79), cela se récrit ainsi :

$$\mu'(s) - \mu'(s-1) = \frac{1}{t}\,\frac{\theta'_o\circ\Phi(t)}{\psi'\circ\Phi(t)} .$$

Or, d'après (74), $\psi'(r) \leq \theta'_o(r)$ pour tout r, d'où

$$\mu'(s) - \mu'(s-1) \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{s} ,$$

ce qui prouve (127), et donc le lemme 4.2.

La démonstration du théorème 4.4 est donc complète.

Pour terminer, voici une série d'exemples de poids vérifiant (75), avec les quantités M_n associées :

a) $w_o(r) = r^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\frac{2}{\alpha}r^\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$, $M_n = (n!)^{1/\alpha}$

b) $w_o(r) = r^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{2}{\alpha e}r^\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$, $M_n = n^{\frac{n}{\alpha}}$

c) $w_o(r) = e^{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Log}^2 r}{\mathrm{Log}\, R}}$, où $R > 1$, $M_n = R^{n^2}$

d) $w_o(r) = \left[1 + (\mathrm{Log}\, r)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right] e^{2\gamma\, \mathrm{Log}^\alpha r}$, où $\alpha \geq 2$ et $\gamma = \frac{1}{\alpha}(\frac{\alpha}{\alpha-1}\mathrm{Log}\, R)^{1-\alpha}$, $M_n = R^{n^a}$, où $a = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

5. DISTRIBUTIONS A SPECTRES COMPACTS DANS DES ESPACES L^2 A POIDS

Dans cette dernière partie, nous exploitons les résultats de la partie 2, et notamment les théorèmes 2.1 et 2.2, en nous plaçant du point de vue des transformées de Fourier, c'est-à-dire dans des espaces L^2 à poids.

DEFINITION 5.1. <u>Si</u> w_o <u>est poids, on note</u> $L^2_{w_o}$ <u>l'espace</u>
$$L^2(w_o(x)\,dx) = \left\{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^2\, w_o(x)\,dx < +\infty\right\}.$$

On munit $L^2_{w_o}$ de sa norme habituelle.

Si w_o vérifie (19), les résultats de la partie 2 trouvent à la fois une traduction et des conséquences dans l'espace $L^2_{w_o}$, notamment dans le domaine de la presque-orthogonalité : c'est pourquoi nous nous intéressons surtout aux éléments de $L^2_{w_o}$ à spectres compacts.

5.1. Presque-orthogonalité et dérivation

Nous commençons par la transcription de la proposition 1.1 appliquée aux espaces Aw_o.

PROPOSITION 5.1. Soit w_o vérifiant (19), et K un compact de $\mathbb{R}^N$, tel que $(K-K) \cap \mathbb{Z}^N = \{0\}$. Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^N}$ une famille d'éléments de $L^2_{w_o}$, dont les spectres sont inclus dans K. Alors,

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g_k(x)\, e^{ik.x}$$

appartient à $L^2_{w_o}$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \|g_k\|^2_{L^2_{w_o}} < +\infty$. De plus, il existe une constante $C = C(K, w_o)$ telle que

$$\frac{1}{C} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \|g_k\|^2_{L^2_{w_o}} \leq \|g\|^2_{L^2_{w_o}} \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \|g_k\|^2_{L^2_{w_o}} . \tag{128}$$

Ce résultat est lié à un autre résultat portant sur la dérivation, que nous exposons maintenant.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$:

$$P(X) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_N^{\alpha_N} , \tag{129}$$

α étant le multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. L'opérateur de dérivation $P(D)$ est alors défini par

$$(P(D)\, g)^{\wedge}(\xi) = P(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 5.2. <u>Soit</u> w_o <u>vérifiant (19), et</u> $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ <u>un polynôme s'écrivant sous la forme (129). Il existe deux constantes</u> M <u>et</u> C <u>telles que, pour tout</u> $\ell > 0$ <u>et pour tout</u> $g \in L^2_{w_o}$, <u>dont le spectre est inclus dans</u> $[-\ell, \ell]^N$, <u>on ait</u> $P(D)\, g \in L^2_{w_o}$, <u>avec</u>

(130) $$\|P(D)\, g\|_{L^2_{w_o}} \leq C \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha| (M+\ell)^{|\alpha|} \|g\|_{L^2_{w_o}} .$$

<u>Démonstration</u>. On écrit $g = \hat{f}$, où $f \in Aw_o$: il faut estimer $\|P(x).f(x)\|_{Aw_o}$.

Puisque Aw_o est un puzzle-L^2, on peut décomposer f sous la forme $f(x) = \sum_{|k| \leq \ell} f_k(x-k)$, où $f_k \in Aw_o$ et $\operatorname{Supp} f_k \subset [-1, 1]^N$.

Soit $C(M_n)$ une classe non quasi-analytique telle que, si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\|\partial^\alpha \varphi\|_2 \leq \beta_\varphi M_\alpha$, pour tout multi-indice α, alors $\varphi \in Aw_1$, où l'on a posé $w_1(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w_\infty(x)$ (proposition 2.4). Si $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, on choisit $m_i \in C(M_n)$ telle que $\|\partial^\alpha m\|_2 \leq \beta M_\alpha$ et $m_i(x) = x_i$ si $x \in [-1, 1]^N$ (l'existence de telles fonctions est laissée au lecteur). Alors, la proposition 2.1 montre que m_i est un multiplicateur de Aw_o, pour tout i. Soit $M > 0$ tel que $\|m_i f\|_{Aw_o} \leq M \|f\|_{Aw_o}$ pour tout i.

Ecrivant alors

$$P(x)\, f(x) = \sum_{|k| \leq \ell} P(x)\, f_k(x-k),$$

il vient

(131) $$\|P(x)\, f(x)\|^2_{Aw_o} \leq C_1 \sum_{|k| \leq \ell} \|P(x)\, f_k(x-k)\|^2_{Aw_o} .$$

Posons, si $k \in \mathbf{Z}^N$ est fixé, $y = x-k$. Alors

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha (y_1+k_1)^{\alpha_1} \dots (y_N+k_N)^{\alpha_N} ,$$

d'où

$$\|P(x)\, f_k(x-k)\|_{Aw_o} \leq \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha| \, \|(y_1+k_1)^{\alpha_1} \dots (y_N+k_N)^{\alpha_N} f_k(y)\|_{Aw_o} .$$

D'après le choix de M, et puisque $|k| \leq \ell$:

$$\|(y_i+k_i)\, f_k(y)\|_{Aw_o} \leq (M+\ell) \|f_k\|_{Aw_o} ,$$

d'où par itération

$$\|P(x)\, f_k(x-k)\|_{Aw_o} \leq \sum_{|\alpha|=0} |a_\alpha| (M+\ell)^{\alpha} \|f_k\|_{Aw_o} .$$

On en déduit, avec (131) :

$$\|P(x)\, f(x)\|^2_{Aw_o} \leq C_1 \Big\{ \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha| \, (M+\ell)^{|\alpha|} \Big\}^2 \sum_{|k|\leq \ell} \|f_k\|^2_{Aw_o}$$

$$\leq C_2 \Big\{ \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha| (M+\ell)^{|\alpha|} \Big\}^2 \|f\|^2_{Aw_o} .$$

Il y a un lien entre cette propriété de la dérivation et la relation de presque-orthogonalité du début : en effet, la proposition 5.1 a été démontrée sous les hypothèses (13')et (18). Si on suppose que seule (14) est vérifiée, alors la propriété de la dérivation peut remplacer (18) pour montrer 5.1. C'est ce qu'exprime le résultat suivant.

PROPOSITION 5.3. Soit w_o vérifiant (13') et (14). On suppose que, pour tout $\ell > 0$, il existe une constante $C_\ell > 0$, dépendant également de w_o et de N, telle que :

si $P(X_1, \dots, X_N) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_N^{\alpha_N}$ et si $g \in L^2_{w_o}$,

avec $\operatorname{Spec} g \subset [-\ell, \ell]^N$, alors $P(D)g \in Aw_o$, et

(132) $$\|P(D)\, g\|_{L^2_{w_o}} \leq C_\ell \sum_{|\alpha|=0}^{N} |a_\alpha| \, \|g\|_{L^2_{w_o}} .$$

<u>Soient</u> g_k , $k\in\mathbf{Z}^N$, <u>des éléments de</u> $L^2_{w_o}$, <u>dont les spectres sont inclus dans</u> $[-\ell , \ell]^N$. <u>Alors,</u> $g(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} e^{ik.x} g_k(x)$ <u>appartient à</u> $L^2_{w_o}$, <u>et il existe une constante</u> C'_ℓ <u>telle que</u>

$$\|g\|_{L^2_{w_o}} \leq C'_\ell \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|g_k\|^2_{Aw_o} \Big)^{1/2} , \tag{133}$$

<u>et</u> $C'_\ell \leq C(1+C_\ell)$, <u>où</u> $C = C(w_o,N)$.

<u>Démonstration.</u> Avant toute chose, on se ramène, d'après la proposition 2.2, au cas où w_o est de classe C^N, toutes les dérivées partielles de θ_o jusqu'à l'ordre N étant majorées, de sorte que

$$|\partial^\alpha w_o(x)| \leq M\, w_o(x) \qquad \text{si} \quad 1 \leq |\alpha| \leq N. \tag{134}$$

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension N.

CAS $N = 1$. On fixe $n\in\mathbf{N}$, et on étudie

$$\int_{\mathbf{R}} \Big| \sum_{|k|\leq n} e^{ikx} g_k(x) \Big|^2 w_o(x)dx = \sum_{|j|\leq n} \sum_{|k|\leq n} \int_{\mathbf{R}} g_j(x)\, \overline{g_k(x)}\, e^{i(j-k)x}\, w_o(x)\, dx$$

$$= \sum_{j=k} + \sum_{j\neq k}$$

$$= D + T.$$

Les termes diagonaux (D) ne pose évidemment pas de problèmes. Les termes transversaux (T) sont traités à partir de l'inégalité de Hilbert :

$$\Big| \sum_{\substack{p\neq q \\ p,q\in\mathbf{Z}}} \frac{z_p \overline{z_q}}{p - q} \Big| \leq \pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \sqrt{\sum_{p\in Z} |z_p|^2} \sqrt{\sum_{q\in Z} |z_q|^2} .$$

Une intégration par parties de T donne

$$T = T_1 + T_2 + T_3 ,$$

avec

$$T_1 = \left[\sum_{j \neq k}\sum g_j(x)\, \overline{g_k}(x)\, \frac{e^{i(j-k)x}}{j-k}\, w_o(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$T_2 = \sum_{j \neq k}\sum \int_{\mathbb{R}} (g_j'(x)\, \overline{g_k}(x) + g_j(x)\, \overline{g_k'}(x))\, \frac{e^{i(j-k)x}}{j-k}\, w_o(x)\, dx$$

$$T_3 = \sum_{j \neq k}\sum \int_{\mathbb{R}} g_j(x)\, \overline{g_k}(x)\, \frac{e^{i(j-k)x}}{j-k}\, w_o'(x)\, dx .$$

Laissons T_1 de côté pour le moment. Par (134) et l'inégalité de Hilbert, on a

$$T_3 \leq M \sum_{j \neq k}\sum \int_{\mathbb{R}} |g_j(x)\, \overline{g_k}(x)\, w_o(x)|\, \frac{1}{|j-k|}\, dx$$

$$\leq M\, \pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{|j| \leq n} |g_j(x)|^2\, w_o(x)\, dx ,$$

et

$$T_2 \leq 2\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{|j| \leq n} |g_j'(x)|^2 w_o(x)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{|k| \leq n} |g_k(x)|^2\, w_o(x)\Big)^{1/2} dx .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse sur la dérivation nous donnent

$$T_2 \leq 2\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, C_\ell^2 \sum_{|j| \leq n} \int_{\mathbb{R}} |g_j(x)|^2\, w_o(x)\, dx .$$

Il reste à traiter le terme T_1 tout intégré. On montre qu'il est nul grâce au lemme 3.1, qui nous indique que, pour tout j

$$\lim_{|x| \to +\infty} |g_j(x)|^2\, w_o(x) = 0 ,$$

en ayant soin d'appliquer l'inégalité de Hilbert au préalable.

Ainsi, nous avons prouvé le résultat désiré si $N = 1$, avec $C_\ell' \leq 3(M+1)(1 + C_\ell)$.

<u>On suppose maintenant le résultat prouvé pour toutes les dimensions</u> $N_1 \leq N-1$, <u>y compris le fait que la constante</u> C'_ℓ <u>ne dépende que de</u> N_1, M <u>et</u> C_ℓ. <u>On étudie donc l'expression</u>

$$S = \sum_{|j|\leq n} \sum_{|k|\leq n} \int_{\mathbb{R}^N} g_j(x)\, \overline{g_k(x)}\, e^{i(j-k).x}\, w_o(x)\, dx.$$

On classe les multi-indices $i = (i_1, \ldots, i_N)$ en $N+1$ ensembles $A_o, A_1, \ldots$ $\ldots, A_N$, définis par

$$A_p = \left\{ i = (i_1, \ldots, i_N)/p \text{ composantes de } i \text{ sont non nulles, et les autres nulles} \right\}.$$

On a alors :

(135) $$S = \sum\sum_{j-k\in A_o} + \sum\sum_{j-k\in A_1} + \ldots + \sum\sum_{j-k\in A_N} = S_o + S_1 + \ldots + S_N.$$

Le terme S_o, qui correspond aux termes diagonaux de S, ne pose toujours pas de problèmes ! Les termes $S_1, \ldots, S_{N-1}$ vont être traités grâce à l'hypothèse de récurrence.

Soit $p \in \{1, \ldots, N-1\}$. A chaque élément $i = (i_1, \ldots, i_N)$ de A_p, on associe une injection $\sigma : \{1, \ldots, p\} \longrightarrow \{1, \ldots, N\}$ définie par $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots$ $\ldots < \sigma(p)$ et $i_{\sigma(1)} \neq 0, \ldots, i_{\sigma(p)} \neq 0$. On note $i_{p,\sigma}$ l'élément de A_p associé à σ. On peut alors écrire :

$$S_p = \sum_\sigma \Big(\sum\sum_{j-k = i_{p,\sigma}} \Big) = \sum_\sigma S_{p,\sigma}.$$

Chaque terme $S_{p,\sigma}$ se traitant de la même manière, on suppose $\sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(p) = p$. Si $x \in \mathbb{R}^N$, on écrit $x = (x^1, x^2)$, avec $x^1 = (x_1, \ldots, x_p)$ et $x^2 = (x_{p+1}, \ldots, x_N)$. Avec ces notations, on a :

$$S_{p,\sigma} = \sum_{j^2} \sum_{j^1_s \neq k^1_s} \int_{\mathbb{R}^N} g_{j^1,j^2}(x)\, \overline{g_{k^1,k^2}}(x)\, e^{i(j^1-k^1).x^1}\, w_o(x^1,x^2)\, dx^1\, dx^2.$$

On intègre d'abord par rapport à x^1, et on utilise l'hypothèse de récurrence, avec les poids $w_o(.,\dots,., x_{p+1}, \dots, x_N)$. Appelant $C'_\ell(x_{p+1},\dots,x_N)$ les constantes associées à ces poids, il vient :

$$|S_{p,\sigma}| \leq \sum_{(j^1,j^2)} \int_{\mathbb{R}^N} C'_\ell(x^2)^2 \, |g_{j^1,j^2}(x^1,x^2)|^2 \, w_o(x^1,x^2)\, dx^1\, dx^2 .$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence et à la définition de M, on peut voir facilement que, pour tout $x^2 = (x_{p+1},\dots,x_N)$, $C'_\ell(x^2) \leq C'_\ell$, C'_ℓ ne dépendant que de N, C_ℓ et M. Par conséquent :

$$|S_{p,\sigma}| \leq \sum_j C'^2_\ell \int_{\mathbb{R}^N} |g_j(x)|^2 \, w_o(x)\, dx,$$

et, puisque $\operatorname{Card} A_p = C^p_N$:

(136) $$|S_p| \leq C^p_N \, C'^2_\ell \sum_{j\leq n} \int_{\mathbb{R}^N} |g_j(x)|^2 \, w_o(x)\, dx.$$

Pour prouver le résultat en dimension N, il reste à traiter le terme

$$S_N = \sum_{j_s\neq k_s}\sum \int_{\mathbb{R}^N} g_j(x)\, \overline{g_k}(x)\, e^{i(j-k)} \, w_o(x)\, dx.$$

On utilise l'inégalité de Hilbert en dimension N :

(137) $$\left| \sum_{j_s\neq k_s}\sum \frac{z_{j_1,\dots,j_N}\, z'_{k_1,\dots,k_N}}{(j_1-k_1)\dots(j_N-k_N)} \right| \leq \left(\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^N \sqrt{\sum_j |z_j|^2}\ \sqrt{\sum_k |z'_k|^2} .$$

Grâce au lemme 3.1, on peut écrire

$$S_N = \sum_{j_s\neq k_s}\sum \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^N(g_j(x)\,\overline{g_k}(x) w_o(x))}{\partial x_1\dots\partial x_N} \, \frac{e^{i(j-k).x}}{(j_1-k_1)\dots(j_N-k_N)}\, dx$$

$$= \sum_{j_s,k_s}\sum \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \sum_{\alpha+\beta+\delta=(1,\dots,1)} \partial^\alpha g_j(x)\, \partial^\beta \overline{g_k}(x)\, \partial^\delta w_o(x) \Big\} \frac{e^{i(j-k).x}}{(j_1-k_1)\dots(j_N-k_N)}\, dx.$$

On utilise encore une fois (134), l'inégalité de Hilbert (135), puis celle de Cauchy-Schwarz :

$$|S_N| \leq \sum_{\alpha+\beta+\delta=(1,\ldots,1)} M(\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}})^N \left(\int_{\mathbf{R}^N} \sum_{|j|\leq n} |\partial_\alpha g_j(x)|^2 w_o(x)dx\right)^{1/2} \times$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} \sum_{|k|\leq n} |\partial_\beta\, g_k(x)|^2\, w_o(x)\, dx\right)^{1/2}$$

$$\leq C_N\, M\, C_\ell^2 \sum_{|j|\leq n} \int_{\mathbf{R}^N} |g_j(x)|^2\, w_o(x)\, dx.$$

Finalement, avec (135) et (136), on obtient la bonne estimation de S :

$$|S| \leq C(N,M)(1+C_\ell)^2 \sum_{|j|\leq n} \int_{\mathbf{R}^N} |g_j(x)|^2\, w_o(x)\, dx,$$

quel que soit $n\in\mathbf{N}$. La proposition est donc démontrée en dimension N, avec toutes les précisions voulues sur la constante C'_ℓ.

Remarque. Dans cette démonstration, on ne s'est apparemment servi que de l'hypothèse (13'), par l'intermédiaire du lemme 3.1 et de la proposition 2.2. L'hypothèse (14) joue en fait un rôle caché. elle assure simplement l'existence de fonctions à spectres compacts dans $L^2_{w_o}$.

Les propositions 5.2 et 5.3 permettent d'énoncer un résultat dans le style de la proposition 5.1.

PROPOSITION 5.4. Soit w_o vérifiant (19), et $(g_k)_{k\in\mathbf{Z}^N}$ une famille d'éléments de $L^2_{w_o}$, dont les spectres sont inclus dans $[-\ell,\ell]^N$. On suppose que $\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|g_k\|^2_{L^2_{w_o}} < +\infty$, et on pose $g(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} e^{ik.x} g_k(x)$. Alors, $g\in L^2_{w_o}$, et il existe une constante $C = C(N,w_o)$ telle que

$$\|g\|_{L^2_{w_o}} \leq C(1+\ell)^N \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} \|g_k\|^2_{L^2_{w_o}}\Big)^{1/2}.$$

Ici, le compact $K = [-\ell, \ell]^N$ ne vérifie pas a priori la condition $(K-K) \cap \mathbb{Z}^N = \{0\}$, ce qui implique l'impossibilité d'avoir une double inégalité.

La proposition 5.2 a été démontrée grâce à la structure hilbertienne du puzzle-L^2 de Aw_o, et au lien avec les classes non quasi-analytiques. Ce dernier argument permet d'obtenir d'autres résultats dans les espaces $L^p_{w_o}$, avec une méthode moins précise. Mais d'abord :

DEFINITION 5.2. <u>Si</u> w_o <u>est un poids, et si</u> $1 \leq p \leq +\infty$, <u>on note</u> $L^p_{w_o}$ <u>l'espace</u> $L^p(w_o(x)\,dx)$.

Nous voulons démontrer un résultat semblable à la proposition 5.2 dans les espaces $L^p_{w_o}$. Pour cela, il nous faut l'analogue de la proposition 2.1.

LEMME 5.1. a) <u>si</u> $1 < p < +\infty$, <u>et si</u> q <u>est le conjugué de</u> p $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, <u>si</u> $g \in L^p_{w_o}$ <u>et si</u> $\mu \in L^p_{w_{o,p}}$, <u>avec</u> $w_{o,p}(x) = (1+|x|^2)^{(\frac{N+1}{2})\frac{p}{q}}\, w_\infty(x)$, <u>alors</u> $g * \mu \in L^p_{w_o}$, <u>et</u>

$$\|g * \mu\|_{L^p_{w_o}} \leq C(p,N) \|\mu\|_{L^p_{w_{o,p}}} \|g\|_{L^p_{w_o}}$$

b) <u>si</u> $g \in L^1_{w_o}$ <u>et si</u> $\mu \in L^1_{w_\infty}$, <u>alors</u> $g * \mu \in L^1_{w_o}$, <u>et</u>

$$\|g * \mu\|_{L^1_{w_o}} \leq \|\mu\|_{L^1_{w_\infty}} \|g\|_{L^1_{w_o}}$$

c) <u>si</u> $g \in L^\infty_{w_o}$ <u>et si</u> $\mu \in L^\infty_{w_{o,2}}$, <u>alors</u> $g * \mu \in L^\infty_{w_o}$, <u>et</u>

$$\|g * \mu\|_{L^\infty_{w_o}} \leq C(N) \|\mu\|_{L^\infty_{w_{o,2}}} \|g\|_{L^\infty_{w_o}} .$$

La démonstration reposant sur le même principe que celle de la proposition 2.1, nous ne l'écrivons pas.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ et $p \in]1,+\infty[$. Soit $g \in L^p_{w_o}$ de spectre inclus dans $[-\ell, \ell]^N$. Supposons pour commencer $\ell = 1$.

On considère la classe non quasi-analytique associée au poids $w_p(x) = (1+|x|^2)^{N+1} w^*_\infty(x)^{2/p}$ (nous avions posé $\theta^*_\infty(x) = \sup_{|t| \leq |x|} \theta_\infty(t)$ et montré que w^*_∞ vérifiait (19) à la proposition 2.4) telle que, si φ est de classe C^∞ et $\|\partial^\beta \varphi\|_2 \leq C M_{|\beta|}$ pour tout multi-indice β, alors $\varphi \in Aw_p$. On choisit $m_\alpha \in C^\infty_o$ telle que $\|\partial^\beta m_\alpha\|_2 \leq C_1 M_{|\beta|}$ et $m_\alpha(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_N^{\alpha_N}$ si $|\xi_j| \leq 1$ pour tout j. On pose $\mu_\alpha = (2\pi)^{-N} \hat{m}_\alpha$.

D'après le lemme 3.1, il existe une constante C_α telle que $|\mu_\alpha(x)| (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w^*_\infty(x)^{1/p} \leq C_\alpha$. Il est facile de voir que cela implique $\mu_\alpha \in L^p_{w^*_{o,p}}$, où $w^*_{o,p}(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}} w^*_\infty(x)$. Si $P_\alpha(X) = (-i)^{|\alpha|} X_1^{\alpha_1} \ldots X_N^{\alpha_N}$, on a $P_\alpha(D)\, g = g * \mu_\alpha$, donc $P_\alpha(D)\, g \in L^p_{w_o}$, et

$$\|P_\alpha(D)\, g\|_{L^p_{w_o}} \leq C_3 \|g\|_{L^p_{w_o}} .$$

Si maintenant on pose $P(X) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_N^{\alpha_N}$, on obtient

$$\|P(D)\, g\|_{L^p_{w_o}} \leq C_4 \sum_{|\alpha|=0} |a_\alpha| \|g\|_{L^p_{w_o}} .$$

Dans le cas général, on choisit $\ell \geq 1$. Soit $m_{\alpha,\ell}(\xi) = \ell^{|\alpha|} m_\alpha(\frac{\xi}{\ell})$ et $\mu_{\alpha,\ell}(x) = (2\pi)^{-N} \hat{m}_{\alpha,\ell}(x)$. Alors, $P_\alpha(D)\, g = g * \mu_{\alpha,\ell}$. Or :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mu_{\alpha,\ell}(x)|^p w^*_{o,p}(x)\, dx = (2\pi)^{-Np} (\ell^{\alpha+N})^p \int_{\mathbb{R}^N} |\mu_\alpha(\ell x)|^p w^*_{o,p}(x)\, dx$$

$$\leq (2\pi)^{-Np}\ \ell^{p\,\alpha + N(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\mu_\alpha(x)|^p\, w^*_{o,p}(\tfrac{x}{\ell})\, dx .$$

La croissance de $r \longrightarrow w^*_{o,p}(r)$ montre que

$$\|\mu_{\alpha,\ell}\|^p_{L_{w^*_{o,p}}} \leq C_5\ \ell^{|\alpha|+N\frac{p-1}{p}} = C_5\ \ell^{|\alpha|+\frac{N}{q}} .$$

On en déduit que

$$\|P_\alpha(D)\,g\|_{L^p_{w_o}} \leq C_6\ \ell^{|\alpha|+\frac{N}{q}} \|g\|_{L^p_{w_o}} ,$$

puis

$$\|P(D)g\|_{L^p_{w_o}} \leq C_7 \sum_{\alpha=0}^{n} |a_\alpha|\ \ell^{|\alpha|+\frac{N}{q}} \|g\|_{L^p_{w_o}} ,$$

cette formule étant valable si $\ell \geq 1$ et $1 < p < +\infty$.

Les calculs dans les cas $p = 1$ et $p = +\infty$, moyennant les modifications nécessaires, conduisent au même résultat. On énonce donc :

PROPOSITION 5.5. Soit w_o vérifiant (19) et $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ s'écrivant $P(X) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_N^{\alpha_N}$. Soit $p \in [1,+\infty]$. Alors, il existe une constante C, dépendant de N, p et w_o, telle que, pour tout $\ell > 0$ et pour toute $g \in L^p_{w_o}$ de spectre inclus dans $[-\ell, \ell]^N$, on ait $P(D)g \in L^p_{w_o}$, avec :

$$\|P(D)\,g\|_{L^p_{w_o}} \leq C \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha|(1+\ell)^{\alpha+\frac{N}{q}} \|g\|_{L^p_{w_o}} ,$$

q étant l'exposé conjugué de p.

On remarque que, dans le cas $p = 2$, l'estimation obtenue est moins bonne que par la proposition 5.2, ce qui est dû à la différence de méthode.

Pour obtenir, dans $L^p_{w_o}$, une estimation de même qualité que dans $L^2_{w_o}$, qui serait

$$\|P(D)\,g\|_{L^p_{w_o}} \leq C \sum_{|\alpha|=0}^{n} |a_\alpha|(1+\ell)^{\alpha} \|g\|_{L^p_{w_o}} ,$$

il faudrait que $Aw_o^p = \mathcal{F}^{-1}(L^p_{w_o})$ soit un puzzle-L^p, ce que nous ignorons. La preuve que Aw_o est un puzzle-L^2 utilise en effet la structure hilbertienne de cet espace, et ne peut donc être transposée telle quelle dans Aw_o^p.

5.2. Poids à croissance lente. Une propriété de $BMO(\mathbb{R}^N)$

Un théorème de Paley et Wiener nous indique à quelle condition on peut écrire $w_o(x) = \hat{S}(x)$, où S doit être une distribution à support compact. Mais, dans le cadre des espaces $L^p_{w_o}$, il est plus intéressant de pouvoir simplement écrire

$$\frac{1}{C}\, w_o(x) \leq \hat{S}(x) \leq C\, w_o(x).$$

Le lien entre les espaces Aw_o et les classes non quasi-analytiques nous permet de donner une condition suffisante à cela.

PROPOSITION 5.6. Soit w_o vérifiant (19), et à croissance lente. Alors, pour tout $a > 0$, il existe une distribution S_a à support inclus dans $[-a,a]^N$, et une constante $C = C(w_o,a)$, telles que

$$\frac{1}{C}\, w_o(x) \leq |\hat{S}_a(x)| = \hat{S}_a(x) \leq C\, w_o(x). \tag{138}$$

De plus, si w_o est pair, S_a est paire aussi.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $w_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $a > 0$. D'après la deuxième partie, on peut écrire

$$w_\infty(x) \leq C\, \tau(x) = C \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x|^n}{M_n} , \tag{139}$$

avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \frac{a}{2\sqrt{N}}$, $M_o = 1$. Posons $\alpha_n = \sqrt{N}\,\frac{M_n}{M_{n+1}}$, $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ (donc, $\alpha \leq \frac{a}{2}$), et, si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\Phi(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha_n x_1}{\alpha_n x_1} \cdots \frac{\sin \alpha_n x_N}{\alpha_n x_N}\right).$$

On pose ensuite, si $\zeta \in \mathbb{R}^*$ et $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\gamma_\zeta(u) = \frac{1}{2\zeta}\, 1_{[-\zeta,\zeta]}(u_1) \cdots \frac{1}{2\zeta}\, 1_{[-\zeta,\zeta]}(u_N).$$

Alors, $\hat{\Phi}(u) = (2\pi)^N \gamma_{\alpha_1} * \gamma_{\alpha_2} * \ldots * \gamma_{\alpha_n} * \ldots (u)$, ce qui prouve que $\mathrm{Supp}\,\hat{\Phi} \subset [-\alpha,\alpha]^N$. Φ est donc prolongeable en une fonction entière de type exponentiel α.

Soit $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^N$, $x \neq 0$. De $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_N^2$, on déduit l'existence de $j \in \{1,\ldots,N\}$ tel que $x_j^2 \geq \frac{|x|^2}{N}$. On peut alors écrire :

$$|\Phi(x)| \leq \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{|\alpha_n x_j|} \leq \frac{1}{(\sqrt{N})^{k+1}} \frac{M_{k+1}}{|x_j|^{k+1}} \leq \frac{M_{k+1}}{|x|^{k+1}},$$

d'où

(140) $$|\Phi(x)| \leq \frac{1}{\tau(x)}, \quad \text{quel que soit } x.$$

On pose alors $\varphi(z) = \Phi(z)^2$ si $z\in\mathbb{C}^N$, et $\psi(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z-t)\, w_o(t)\, dt$.

ψ est entière, parce qu'on a supposé $w_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, en écrivant $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}^N$:

$$|\psi(x+iy)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x-t+iy)|\, w_o(t)\, dt.$$

Or, φ est exponentielle de type 2α, d'où

$$|\psi(x+iy)| \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\alpha(|y_1|+\dots+|y_N|)} w_o(t)\, dt$$

$$\leq C \|w_o\|_1 e^{a(|y_1|+\dots+|y_N|)}$$

ψ est donc de type exponentiel $\leq a$, ce qui prouve que $\mathrm{Supp}\,\hat{\psi} \subset [-a,a]^N$.

On a enfin, d'après (139) et (140) :

$$\frac{\psi(x)}{w_o(x)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t)\, w_\infty(t)\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{C}{\tau(t)}\, dt < +\infty, \quad \text{et}$$

$$\frac{\psi(x)}{w_o(x)} \geq \int_{t\in B(x,1)} \varphi(x-t) \frac{w_o(t)}{w_o(x)}\, dt \geq \int_{t\in B(0,1)} \varphi(t) \frac{dt}{w_\infty(t)} > 0.$$

Le lecteur a compris qu'on choisit $S_a = \hat{\psi}$, ce qui donne le résultat voulu si $w_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Si maintenant w_o est seulement à croissance lente, il existe $p > 0$ tel que $\dfrac{w_o(x)}{(1+|x|^2)^p} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, d'où une distribution S_a, à support inclus dans $[-a,a]^N$, telle que $\dfrac{1}{C} \dfrac{w_o(x)}{(1+|x|^2)^p} \leq \hat{S}_a(x) \leq C \dfrac{w_o(x)}{(1+|x|^2)^p}$. Il suffit de poser $T_a = (I-\Delta)^p S_a$ pour avoir

$$\frac{1}{C} w_o(x) \leq \hat{T}_a(x) \leq C\, w_o(x),$$

et $\mathrm{Supp}\, T_a \subset [-a,a]^N$.

Enfin, il suffit de reprendre le calcul pour voir que, si w_o est pair, S_a l'est aussi.

Ce résultat trouve une application dans l'étude de $BMO(\mathbb{R}^N)$. Si $f\in BMO$, on effectue une décomposition de Littlewood-Paley de f, soit $f(x) = S_o(f)(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_k(f)(x)$, où $\mathrm{Spec}\, S_o(f) \subset [-1,1]^N$ et $\mathrm{Spec}\, \Delta_k(f) \subset \Gamma_k = \left\{ \xi\in\mathbb{R}^N / 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^k \right\}$.

Plus généralement, on se donne une distribution f sous la forme

$$f(x) = \rho(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x), \quad \text{avec} \quad \mathrm{Spec}\,\rho \subset [-1,1]^N \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}\, f_k \subset \Gamma_k .$$

PROPOSITION 5.7. Avec les notations précédentes, si $|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2 \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, alors $f \in BMO$. De plus, il existe une constante C, dépendant de la dimension N, telle que

(141) $$\|f\|_{BMO} \leq C \| (|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2)^{1/2} \|_\infty .$$

On peut prendre $C = 8N + \sqrt{3}\,(2{,}20)^N$.

La preuve est adaptée de celle donnée par Yves Meyer sur $\mathbf{T}$ ([10]).

Démonstration. On notera $S_m = \sum_{o}^{m-1} f_k$ et $R_m = \sum_{m}^{+\infty} f_k$. Soit Q un cube de $\mathbf{R}^N$, et $m \in \mathbf{Z}$ tel que

(142) $$2^{-Nm} \leq |Q| \leq 2^{-N(m-1)} .$$

On étudie la quantité $\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - c_Q|$, où c_Q est une constante dépendant de Q. Si $m \geq -1$, on choisira $c_Q = S_{m+2}(x_Q)$, où x_Q est le centre de Q, et si $m \leq -2$, $c_Q = 0$.

L'idée de la démonstration est que les basses fréquences ont des amplitudes raisonnables, tandis que les hautes fréquences sont contrôlées en moyenne. Les notions de basses et hautes fréquences dépendent ici de la mesure du cube.

On décomposera la preuve en deux lemmes.

LEMME 5.2. Si $|Q| \leq 2^{-N(m-1)}$, avec $m \geq -1$, alors, pour tout $x \in Q$:

(143) $$|S_{m+2}(x) - S_{m+2}(x_Q)| \leq C_1 \| (|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{m+1} |f_k|^2)^{1/2} \|_\infty ,$$

<u>et on peut prendre</u> $C_1 = 8N$.

<u>Démonstration du lemme</u>. Soit M un majorant de la norme de la différentielle de S_{m+2}. Alors, on a

$$|S_{m+2}(x) - S_{m+2}(x_Q)| \leq M|x - x_Q|.$$

Pour estimer M, on utilise les inégalités de Bernstein : si $i \in \{1,\ldots,N\}$, on a $\|\frac{\partial S_{m+2}}{\partial x_i}\|_\infty \leq \|\rho\|_\infty + 2\|f_o\|_\infty + \ldots + 2^{m+2}\|f_{m+1}\|_\infty$. Si $k \in \{0,\ldots,m+1\}$, on a $\|f_k\|_\infty \leq \|(\sum_{k=0}^{m+1} |f_k|^2)^{1/2}\|_\infty$, d'où $\|\frac{\partial S_{m+2}}{\partial x_i}\|_\infty \leq 2^{m+3}\|(|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{m+1} |f_k|^2)^{1/2}\|_\infty$.

On peut donc choisir

$$M = \sqrt{N}\; 2^{m+3} \|(|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{m+1} |f_k|^2)^{1/2}\|_\infty .$$

Il suffit alors de remarquer que, si $x \in Q$, alors $|x-x_Q| \leq \sqrt{N}\, 2^{-m}$, pour pouvoir conclure.

LEMME 5.3. <u>Si</u> $|Q| \geq 2^{-Nm}$, <u>on a</u>

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |R_{m+2}(x)|^2\, dx \leq C_2 \|\sum_{k=m+2}^{+\infty} |f_k|^2\|_\infty , \tag{144}$$

<u>en remplaçant</u> $m+2$ <u>par</u> 1 <u>si</u> $m \leq -1$. <u>On peut prendre</u> $C_2 = 3(4,84)^N$.

Avant de démontrer le lemme, terminons la preuve de la proposition 5.7. D'après (143) et (144), on a, si $m \geq -1$:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-c_Q| \leq (C_1 + \sqrt{C_2})\|(|\rho|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2)^{1/2}\|_\infty ,$$

et le lemme 5.3 entraîne le même résultat si $m \leq -2$. L'estimation numérique de C découle de l'approximation

$$C_1 + \sqrt{C_2} \leq 8N + \sqrt{3}\,(2,20)^N .$$

<u>Démonstration du lemme 5.3.</u> Si le lemme est vrai pour (m,Q), il l'est aussi pour (m_1,Q), avec $m_1 \geq m$. On peut donc se ramener au cas $2^{-Nm} \leq |Q| \leq 2^{-N(m-1)}$. Si $m \leq -1$, on découpe Q en petits cubes de volumes égaux et $\leq 2^N$, ce qui permet de supposer $m \geq 0$. Par une translation, on se ramène à $Q \subset [-1,1]^N$, avec $|Q| \geq 1$. Il s'agit dès lors de majorer $\int_{[-1,1]^N} |\sum_{j=2}^{+\infty} g_j(x)|^2$, avec $\operatorname{Spec} g_j \subset \Gamma_j$.

Soit n un paramètre réel, qu'on fixera lors du calcul numérique. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_N)$, on a :

$$1_{[-1,1]^N}(x) \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1+n^2}{1+n^2 x_i^2}\right)^2. \tag{145}$$

D'après la proposition 5.6, il existe pour tout $a > 0$ une fonction $S_{n,a}$, dans $L^2(\mathbb{R})$, à support inclus dans $[-a,a]$, telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \frac{1+n^2}{1+n^2t^2} \leq C_{n,a}\, \hat{S}_{n,a}(t).$$

On pose, si $x \in \mathbb{R}^N$, $T_{n,a}(x) = \prod_{i=1}^{N} S_{n,a}(x_i)$. D'après (145), on peut écrire

$$\int_{[-1,1]^N} \Big|\sum_{j=2}^{+\infty} g_j(x)\Big|^2 dx \leq (C_{n,a})^{2N} \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{j=2}^{+\infty} g_j(x)\, \hat{T}_{n,a}(x)\Big|^2 dx.$$

Or, $\operatorname{Supp} T_{n,a} \subset [-a,a]^N$, donc, en imposant $a<8$, les spectres des fonctions $g_j(x)\, \hat{T}_{n,a}(x)$ sont disjoints quand j parcourt les ensembles $3\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}+1$ et $3\mathbb{N}+2$, sans oublier que $j \geq 2$. Par conséquent :

$$\int_{[-1,1]^N} \Big|\sum_{j=2}^{+\infty} g_j(x)\Big|^2 dx \leq 3\, C_{n,a}^{2N} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{\substack{j\in 3\mathbb{N}\\ j\geq 3}} g_j(x)\, \hat{T}_{n,a}(x)\Big|^2 dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{\substack{j\in 3\mathbb{N}+1\\ j\geq 4}} g_j(x)\, \hat{T}_{n,a}(x)\Big|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{j\in 3\mathbb{N}+2} g_j(x)\, \hat{T}_{n,a}(x)\Big|^2 dx \Big\}.$$

D'après la remarque sur les spectres, on obtient

$$\int_{[-1,1]^N} \left| \sum_{j=2}^{+\infty} g_j(x) \right|^2 dx \leq C_2 \left\| \sum_{j=2}^{+\infty} |g_j|^2 \right\|_\infty ,$$

avec

$$C_2 = 3\, C_{n,a}^{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{T}_{n,a}(x)|^2\, dx ,$$

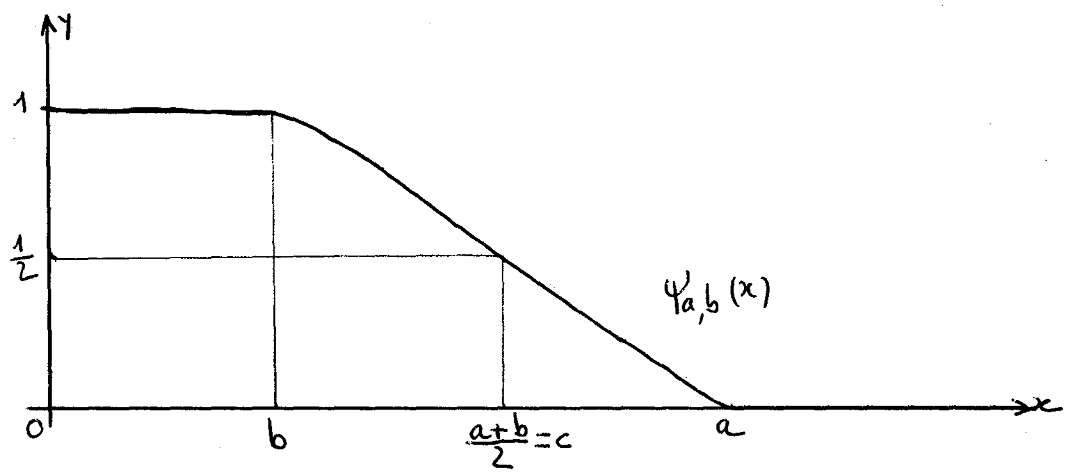
soit

(146)
$$C_2 = 3\, C_{n,a}^{2N} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{S}_{n,a}(x)|^2\, dx \right)^N .$$

Il faut maintenant en venir à l'estimation numérique de C_2. La démonstration de la proposition 5.6 ne nous est là d'aucun secours. Nous allons employer un procédé élémentaire de construction de la fonction $S_{n,a}$. On pose

(147)
$$\varphi_n(\xi) = \frac{1+n^2}{2n}\, e^{-\left|\frac{\xi}{n}\right|} , \quad \text{si} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Alors, $\hat{\varphi}_n(x) = \dfrac{1+n^2}{1+n^2x^2}$. Soient a et b tels que $a > b > 0$: il existe $\psi_{a,b}$ paire, dans $C_o^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\psi_{a,b}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq b$, $\psi_{a,b}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq a$, $\psi_{a,b}(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}$, $\psi'_{a,b}(\xi) \leq 0$, $\psi''_{a,b}(\xi) \leq 0$ si $\xi \in \left[b, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\psi''_{a,b}(\xi) \geq 0$ sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Enfin, si on doit avoir $\psi'_{a,b}(\frac{a+b}{2}) < -\frac{1}{a-b}$, on peut néanmoins choisir la quantité $-\psi'_{a,b}(\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{a-b}$ aussi proche de 0 qu'on le veut :



On écrit

$$\begin{aligned} \varphi_n(\xi) &= \varphi_n(\xi)\, \psi_{a,b}(\xi) + \varphi_n(\xi)(1 - \psi_{a,b}(\xi)) \\ &= \varphi_{n,1}(\xi) + \varphi_{n,2}(\xi), \end{aligned}$$

en oubliant momentanément a et b.

Alors, il est clair que $\varphi_{n,2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Plus précisément, on a

$$\frac{1+n^2}{1+n^2x^2} = \hat{\varphi}_{n,1}(x) + \hat{\varphi}_{n,2}(x),$$

ce qui s'écrit

$$\hat{\varphi}_{n,1}(x) = \frac{1+n^2 - (1+n^2x^2)\,\hat{\varphi}_{n,2}(x)}{1+n^2x^2}.$$

Posons $\alpha_{n,a,b} = \|(1+n^2x^2)\,\hat{\varphi}_{n,2}(x)\|_\infty$. Si on impose $\alpha_{n,a,b} < 1$, il vient

(148) $$\frac{1+n^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1-\alpha_{n,a,b}}\,\hat{\varphi}_{n,1}(x),$$

et $S_{n,a}$ sera ici $\varphi_{n,1}$. Or, d'après (147) :

(149) $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}_{n,1}(x)|^2\,dx &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{n,1}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leq 2\pi \int_{-a}^{a} \left(\frac{1+n^2}{2n}\right)^2 e^{-2\left|\frac{\xi}{n}\right|}\,d\xi \\ &\leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+n^2}{n}\right)\left(1-e^{-2\frac{a}{n}}\right).\end{aligned}$$

Finalement, d'après (146), (148) et (149) on aura $C_2 \leq 3(C_3)^N$, avec

(150) $$C_3 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+n^2}{\sqrt{n}}\right)\frac{1-e^{-\frac{2a}{n}}}{(1-\alpha_{n,a,b})^2},$$

avec $0 < b < a < 8$ et $\alpha_{n,a,b} < 1$.

Les paramètres a,b,n vont être choisis de façon à minimiser C_3. Nous allons indiquer rapidement les étapes du calcul, et pour commencer, celui de $\alpha_{n,a,b}$. On part de

$$\alpha_{n,a,b} = \|(1+n^2x^2)\,\hat{\varphi}_{n,2}(x)\|_\infty \leq \|\varphi_{n,2}(\xi) - n^2\,\varphi''_{n,2}(\xi)\|_1.$$

Un calcul facile donne alors

$$\alpha_{n,a,b} \leq 2 \int_b^a \left| \psi'_{a,b}(\xi) + \frac{n}{2}\psi''_{a,b}(\xi) \right| e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi .$$

Utilisant les hypothèses faites sur $\psi_{a,b}$, on écrit

$$\alpha_{n,a,b} \leq 2 \int_b^a -\psi'_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi + \int_b^c -n\,\psi''_{a,b}(\xi) e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi$$
$$+ \int_c^a n\,\psi''_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi ,$$

où l'on a posé $c = \frac{a+b}{2}$. Des intégrations par parties successives donnent

$$\alpha_{n,a,b} \leq \left[-2\psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}}\right]_b^a - \frac{2}{n} \int_b^a \psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi$$
$$+ \left[- n\psi'_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} - \psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}}\right]_b^c - \frac{1}{n} \int_b^c \psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi$$
$$+ \left[n\psi'_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} + \psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}}\right]_c^a + \frac{1}{n} \int_c^a \psi_{a,b}(\xi)\, e^{-\frac{\xi}{n}} d\xi .$$

On développe, on minore $\psi_{a,b}$ par $\frac{1}{2}$ sur $[b,c]$ et par 0 sur $[c,a]$:

$$\alpha_{n,a,b} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{b}{n}} + e^{-\frac{c}{n}}\left(- n\psi'_{a,b}(c) - \frac{1}{2}\right).$$

Faisant tendre $\psi'_{a,b}(c)$ vers $-\frac{1}{a-b}$, on obtient

$$\alpha_{n,a,b} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{b}{n}} + e^{-\frac{c}{n}}\left(\frac{n}{a-b} - \frac{1}{2}\right).$$

Posons $d = a - b$, et $K(x) = \frac{1}{2} e^{x} + e^{x/2}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right)$. Alors

$$C_3 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+n^2}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1 - e^{-\frac{2a}{n}}}{\left(1-K\left(\frac{d}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}\right)^2} .$$

Le minimum de la fonction $K(x)$ est atteint en $x \simeq 0{,}9824$. Celui de $\frac{(1+n^2)^2}{n}$ en $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On est ainsi conduit à choisir $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{d}{n} = 0{,}9824$, ce qui donne

$$C_3 = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \; \frac{1-e^{-2\sqrt{3}\,a}}{(1-Ke^{-\sqrt{3}\,a})^2} \; ,$$

où $K - K(0,9824) \simeq 3,8454$. La condition $a < 8$ impose de faire tendre a vers 8, d'où une valeur numérique de C_3 : $C_3 = 4,84$, et

$$C_2 = 3(4,84)^N .$$

La démonstration du lemme, et avec elle celle de la préposition, est terminée.

<u>Remarque.</u> Dans l'expression $C = 8N + \sqrt{3}(2,20)^N$, nous aurions pû nous passer du 8, et obtenir 4, ou 2 (voir le lemme 5.2). Mais cela aurait empêché que la propriété de disjonction des spectres des fonctions $g_j(x)\,\hat{T}_{n,a}(x)$ soit vérifiée pour $j \in 3\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}+1$, $3\mathbb{N}+2$. Elle ne serait devenue vraie que pour $j \in 4\mathbb{N}$, etc..., ou $j \in 5\mathbb{N}$, etc... ce qui, au lieu de $C_2 = \sqrt{3}(2,20)^N$, nous aurait donné $C_2 = 2(2,20)^N$ ou $C_2 = \sqrt{5}(2,20)^N$, etc... Le choix que nous avons opéré est donc celui qui nous donne la meilleure constante pour les grandes dimensions. Il désavantage, en revanche, les petites dimensions.

Par exemple, pour obtenir la meilleure constante en dimension $N = 1$, il faut écrire

$$f(x) = \rho(x) + S_{m-2}(x) + R_{m-2}(x) ,$$

appliquer la méthode du lemme 5.2 à $S_{m-2}(x)$ au lieu de $S_{m+2}(x)$, et majorer $\int_Q |R_{m-2}(x)|^2 \, dx$. Cela donne $C = 6,33$ au lieu de $14,01$. De même, on trouve une meilleure constante pour $N = 2$ et $N = 3$, ce que nous résumons dans le tableau suivant :

dimension	constante C
$N = 1$	6,33
$N = 2$	10,83
$N = 3$	25,30
$N \geq 4$	$8N + \overline{3}(2,20)^N$.

ANNEXE 1.- RAPPORTS ENTRE LES PUZZLES-L^p ET LES ESPACES DU TYPE DE WIENER

Les espaces du type de Wiener ont été définis et étudiés par Hans G. Feichtinger (voir [5]). Ils sont construits à l'aide de deux espaces de Banach, qui en seront les composantes locale et globale.

Concrètement, on se donne deux Banach B et C sur un groupe G, localement compact mais non compact lui-même et non discret (par ex. $\mathbb{R}^N$). G est muni de sa mesure de Haar à gauche, dx. L'espace du type de Wiener construit sur B et C, noté $W(B,C)$, est défini par :

DEFINITION A 1.1. Soit Q un compact quelconque de G, d'intérieur non vide. Alors, $W(B,C)$ est l'ensemble des $f \in B_{loc}$ telles que la fonction

$$F : z \longrightarrow \|f\|_{B(zQ)}$$

appartienne à C. On pose alors

$$\|f\|_{W(B,C)} = \|F\|_C .$$

L'espace obtenu ne dépend pas du choix du compact Q.

Il faut préciser les notations et les hypothèses de cette définition, qui forment le cadre général d'étude de Hans G. Feichtinger.

L'espace B est en fait un espace d'ultradistributions, définies à partir d'une algèbre A, ce qui diffère sensiblement du point de vue de Gelfand. Les hypothèses faites sur A sont les suivantes :

- A est homogène, c'est-à-dire que G agit isométriquement sur A, et que les translations à gauche sont continues ($\forall f \in A$ $\lim_{y \to e} \|f(y^{-1}x) - f(x)\|_A = 0$) ;

$$(151)\begin{cases} - & A \text{ est régulière (séparant les points des fermés) ;} \\ - & A \text{ est stable par la conjugaison complexe :} \\ - & A \text{ est plongé dans } (C_b(G), \|.\|_\infty), \text{ espace des fonctions continues bornées} \\ & \text{sur } G \text{ et à valeurs complexes.} \end{cases}$$

On peut prendre par exemple $A = C^o(G)$, algèbre des fonctions continues nulles à l'infini. On note $K(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact, et $A_K = A \cap K(G)$. Alors, les hypothèses sur B sont que

$$(152)\begin{cases} - & B \text{ est plongé dans } A'_K, \text{ dual topologique de } A_K \text{ ;} \\ - & B \text{ est un module sur } A \text{ pour la multiplication ponctuelle :} \\ & \forall\, h\in A \quad \forall\, f\in B \quad hf\in B \quad \text{et} \quad \|h\, f\|_B \leq \|h\|_A\, \|f\|_B. \end{cases}$$

L'espace B_{loc} sera alors l'espace des $f\in A'_K$ telles que $hf \in B$ pour toute $h \in A_K$. Si $f\in B_{loc}$, on aura

$$\|f\|_{B(zQ)} = \inf\left\{\|g\|_B / g\in B \quad \text{et} \quad g = f \quad \text{sur} \quad zQ\right\}.$$

Les hypothèses sur C sont plus simples :

$$(153)\begin{cases} - & C \text{ est plongé dans } L^1_{loc}(G) \\ - & \text{si } |g(x)| \leq |f(x)| \text{ et } f\in C, \text{ alors } g\in C \text{ et } \|g\|_C \leq \|f\|_C \\ - & \text{les opérateurs de translation à gauche :} \\ & \qquad L_y :\ f(x) \longrightarrow f(y^{-1}x) \\ & \text{sont bornés sur } C. \end{cases}$$

EXEMPLES. On peut prendre comme espace B les espaces $L^p(G)$ ou $C^o(G)$, ou $\mathfrak{F}L^p(G)$ si G est abélien, et, dans le cas où $G = \mathbb{R}^N$, les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)$ conviennent. Comme espace C, on peut choisir $L^p_W(G) = \left\{f / fW^{1/p} \in L^o(G)\right\}$, W étant un poids sous-multiplicatif. On obtient ainsi les égalités remarquables :

$$W(\mathfrak{F} L^p(G)\ ,\ L^p(G)) = \quad L^p(G)$$

$$W(B^s_{p,q}(\mathbf{R}^N)\ ,\ L^p(\mathbf{R}^N)) = B^s_{p,q}(\mathbf{R}^N)$$

$$W(L^p(G)\ ,\ L^p_W(G)) = L^p_W(G).$$

La situation de départ dans la définition des puzzles-L^p est très différente de celle de l'espace B dans la définition A 1.1 (hypothèse (152)). Nous avons seulement demandé à l'espace E, futur puzzle-L^p, d'être un espace de Banach sur $\mathbf{R}^N$, plongé dans un espace de distributions au sens de Gelfand, noté Φ'. Cela veut dire qu'on dispose d'un espace Φ, dénombrablement normé, complet, et tel que tout sous-ensemble borné de Φ soit compact (on dit que Φ est parfait). Φ' est le dual topologique de Φ.

Supposons maintenant que E vérifie à la fois les hypothèses (152) et les nôtres :

PROPOSITION A 1.1. <u>Soit un espace</u> E, <u>plongé dans un espace de distributions</u> Φ', <u>et vérifiant les hypothèses (152) avec</u> $G = \mathbf{R}^N$ <u>et</u> A <u>une algèbre contenant des fonctions découpantes, en plus des hypothèses</u> (151). <u>Alors, dire que</u> E <u>est un puzzle-</u>L^p <u>revient à dire que</u> $E = W(E\ ,\ L^p(\mathbf{R}^N))$.

<u>Démonstration</u>. 1) Supposons que E soit un puzzle-L^p, et montrons que $W(E\ ,\ L^p(\mathbf{R}^N)) = E$. Soit un cube Q de R^N, non réduit à $\{0\}$, et soit Δ_1 une fonction découpante valant 1 sur Q.

Si $f \in E$ et $z \in \mathbf{R}^N$, alors

$$\|f\|_{E(zQ)} = \|f(x-z)\|_{E(Q)} \leq \|f(x-z)\ \Delta_1(x)\|_E .$$

D'après (P.b), il s'ensuit que $f \in W(E\ ,\ L^p(\mathbf{R}^N))$, avec

$$\|f\|_{W(E,L^p)} \leq C_1 \|f\|_E .$$

Si maintenant $f \in W(E,L^p)$, soit Δ_2 une autre fonction découpante, dont le support est inclus dans Q. Parce que $f \in E_{loc}$, $f(x-z)\,\Delta(x) \in E$ pour tout z, et il est facile de voir que, d'après (P.a) :

$$\|f(x-z)\,\Delta(x)\|_E \leq C_2 \|f\|_{E(zQ)} ,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|f(x-z)\,\Delta(x)\|_E^p \, dz \leq C_2^p \, \|f\|^p_{W(E,L^p)} .$$

Par conséquent, $f \in E$, et $\|f\|_E \leq C_2 \|f\|_{W(E,L^p)}$.

2) Dans l'autre sens, supposons que $W(E,L^p) = E$. Cela implique l'existence de $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C}\|f\|_{W(E,L^p)} \leq \|f\|_E \leq C\|f\|_{W(E,L^p)} .$$

On utilise alors le résultat suivant de Hans G. Feichtinger.

LEMME. <u>Soient</u> A,B,C <u>trois espaces de Banach sur un groupe</u> G <u>vérifiant les hypothèses</u> (151), (152) <u>et</u> (153). <u>Alors, la norme de</u> $z \longrightarrow \|f(x-z)\,g(x)\|_B$ <u>dans</u> C <u>définit une norme équivalente à</u> $\|.\|_{W(B,C)}$ <u>sur</u> $W(B,C)$, <u>quelle que soit</u> $g \in A_K = A \cap K(G)$ <u>telle que</u> $g = 1$ <u>sur un ouvert de</u> G.

Il suffit de prendre $G = \mathbb{R}^N$, $B = E$ et $C = L^p(\mathbb{R}^N)$ dans ce lemme pour obtenir (P.b) avec une classe plus large de fonctions que les fonctions découpantes, (P.a) étant vraie par hypothèse (B est un module sur A). E est donc exactement un puzzle-L^p.

La proposition A 1.1 montre dans quel sens on peut généraliser la notion de puzzle-L^p : si E vérifie les hypothèses (152), on dira que E est un puzzle-L^p quand $W(E\;,\;L^p(G)) = E$.

Appliquant alors les résultats de Hans G. Feichtinger, on définit encore deux points de vue équivalents, l'un continu et l'autre discret. Le premier est obtenu à à l'aide des normes de $z \longrightarrow \|f(x-z)\,g(x)\|_E$ dans $L^p(G)$, où $g \in A \cap K(G)$ vaut 1 dans un voisinage de l'unité e. Le deuxième n'est pas obtenu à l'aide de la partition de l'unité que réalise une fonction découpante, puisque les hypothèses (151), faites sur A, n'indiquent pas s'il existe de telles fonctions dans A. Il faut utiliser une espèce plus large de partitions de l'unité, appelées "uniformément bornées" : <u>une famille</u> $\psi = (\psi_i)_{i\in I}$ <u>est une partition de l'unité uniformément bornée s'il existe une famille discrète</u> $(y_i)_{i\in I} \subset G$ <u>et un voisinage</u> U <u>de</u> e <u>tels que</u> :

a) $\sum_{i\in I} \psi_i(x) = 1$ <u>pour tout</u> x

b) $\sup_{i\in I} \|\psi_i\|_A < +\infty$

c) $\mathrm{Supp}\,\psi_i \subset y_i U$

d) $\sup_{x\in G} \# \left\{ i / x \in y_i K \right\} < +\infty$ <u>pour tout compact</u> $K \subset G$.

Si V est un compact inclus dans U, alors la norme dans $L^p(G)$ de la fonction

$$F_V = \sum_{i\in I} \|f\,\psi_i\|_E \, 1_{y_i V}$$

est équivalente à $\|f\|_E$: c'est le point de vue discret généralisé.

Dans un tel cadre, la caractérisation des multiplicateurs ponctuels de E donnée par le théorème 1.1 reste entièrement valable.

ANNEXE 2.- DEFINITION COMPLETE DES ESPACES Aw_o

Nous avions posé

$$Aw_o = \left\{ f \in \mathcal{S}' / \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, w_o(\xi) \, d\xi < +\infty \right\}.$$

Quand w_o est à décroissance rapide, la condition $Aw_o \subset \mathcal{S}'$ est beaucoup trop restrictive. Nous allons l'étendre, en faisant de Aw_o un espace fonctionnel, dans l'esprit de Gelfand, Shilov et Vilenkin.

Tous les poids que nous considérerons vérifieront (19).

NOTATIONS. Si E est un Banach, E' sera son dual, les éléments de E' seront appelés des fonctionnelles sur E. Si $\varphi \in E$ et $f \in E'$, l'action de f sur φ sera notée $(f\ ,\ \varphi)_E$. Pour plus de commodité, l'espace $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ sera noté D.

1) Etudions pour commencer le cas où w_o est à décroissance et à croissance lentes, c'est-à-dire où

$$\frac{1}{C}(1+x^2)^{-M} \leq w_o(x) \leq C(1+x^2)^M.$$

Soit $f \in Aw_o$, et $\varphi \in A_{\frac{1}{w_o}} \cap D$, où $D = \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors, on peut écrire :

$$\left| \int \hat{f}\ \bar{\hat{\varphi}} \right| \leq \|f\|_{Aw_o} \|\varphi\|_{A_{\frac{1}{w_o}}} .$$

Or, f est une distribution tempérée. On en déduit

$$|(f\ ,\ \varphi)_D| \leq (2\pi)^{-N} \|f\|_{Aw_o} \|\varphi\|_{A_{\frac{1}{w_o}}} .$$

Puisque $A_{\frac{1}{w_o}}$ est un puzzle-L^2, $A_{\frac{1}{w_o}} \cap D$ est dense dans $A_{\frac{1}{w_o}}$. La distribution f se prolonge donc en une fonctionnelle sur $A_{\frac{1}{w_o}}$. Autrement dit : $Aw_o \subset (A_{\frac{1}{w_o}})'$.

On a en fait $Aw_o = (A_{\frac{1}{w_o}})'$. En effet, si $f \in (A_{\frac{1}{w_o}})'$, il existe $C > 0$ telle que, pour toute $\varphi \in A_{\frac{1}{w_o}}$,

$$|(f,\varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}}| \leq C\|\varphi\|_{A_{\frac{1}{w_o}}}.$$

Mettons $L^2_{w_o}$ et $L^2_{\frac{1}{w_o}}$ en dualité. A f est alors associée $g\in L^2_{w_o}$ telle que, quelle que soit $\varphi\in A_{\frac{1}{w_o}}$:

$$(f\ ,\ \varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}} = (g\ ,\ \hat{\varphi})_{L^2_{\frac{1}{w_o}}}\ .$$

Soient $\psi_n \in \zeta$, $n\in\mathbb{N}$, et ψ_n tendant vers 0 dans $\mathcal{S}$. Alors, par hypothèse sur w_o, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\frac{(1+x^2)^{N+1}}{\sqrt{w_o}(x)}\ \psi_n(x)\right\|_\infty \longrightarrow 0$. Donc, la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $L^2_{\frac{1}{w_o}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (g\ ,\ \psi_n)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} = 0$. Cela prouve que $g\in\mathcal{S}'$. Par définition de $\hat{g}$, si $\varphi \in \mathcal{S} \cap A_{\frac{1}{w_o}}$, on peut écrire :

$$(\hat{g}\ ,\ \hat{\varphi})_\zeta = (2\pi)^N(g\ ,\ \varphi)_\zeta = (2\pi)^N(g,\varphi)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} = (f\ ,\ \varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}}\ .$$

f se prolonge donc en une distribution tempérée, et $\hat{f} \in L^2_{w_o}$. On a bien prouvé que $Aw_o = (A_{\frac{1}{w_o}})'$.

2) On suppose maintenant que w_o est à décroissance rapide. On oublie l'ancienne définition, et on pose :

DEFINITION A 2.1. <u>Soit</u> w_o <u>à décroissance rapide, vérifiant (19). On pose alors</u> : $Aw_o = (A_{\frac{1}{w_o}})'$.

Aw_o est donc un espace fonctionnel.

Si $f \in\mathcal{S}'$, il est clair que f définit une fonctionnelle sur $A_{\frac{1}{w_o}}$ par la formule $(f\ ,\ \varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}} = (2\pi)^{-N}\,(\hat{f}\ ,\ \hat{\varphi})_{L^2_{\frac{1}{w_o}}}$. Donc, $f \in Aw_o$: notre nouvelle définition est (trivialement) une extension de la définition initiale.

Plus généralement, si f est une distribution, tempérée ou non, $f \in Aw_o$, au sens que f se prolonge en une fonctionnelle sur $A_{\frac{1}{w_o}}$. En effet, on a les inégalités suivantes :

LEMME A 2.1. <u>Si</u> $\frac{1}{w_o}$ <u>est à croissance rapide, si</u> $\varphi \in A_{\frac{1}{w_o}}$, <u>alors</u> $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, <u>et il existe, pour tout</u> $\alpha \in \mathbb{N}^N$, <u>une constante</u> $C_n > 0$ <u>telle que</u> $\|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty \le C_\alpha \|\varphi\|_{A_{\frac{1}{w_o}}}$. <u>On a noté</u> $\varphi^{(\alpha)} = D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_N}}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}\,\varphi$.

<u>Démonstration.</u> Si $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_N^{\alpha_N}$, φ est indéfiniment dérivable parce que $\xi^\alpha\,\hat{\varphi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout α. De plus :

$$\|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty \le \|\xi^\alpha\,\hat{\varphi}(\xi)\|_1 \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2|\alpha|} w_o(\xi)\,d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \frac{1}{w_o(\xi)}\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Il devient alors évident que, si f est une distribution, f définit une forme linéaire sur $A_{\frac{1}{w_o}} \cap D$, continue pour la topologie de $A_{\frac{1}{w_o}}$. Or, $A_{\frac{1}{w_o}} \cap D$ est dense dans $A_{\frac{1}{w_o}}$ quand $A_{\frac{1}{w_o}}$ est un puzzle-L^2 : f se prolonge donc en un élément de Aw_o.

3) On définit maintenant la transformation de Fourier sur Aw_o :

DEFINITION A 2.2. <u>Soit</u> w_o <u>à décroissance rapide, vérifiant (19). Si</u> $f \in Aw_o$, <u>la transformée de Fourier de</u> F, <u>notée</u> $\hat{F}$, <u>est la fonction de</u> $L^2_{w_o}$ <u>définie par</u> :

$$\forall\ \psi \in L^2_{\frac{1}{w_o}} \qquad (\hat{F}\ ,\ \psi)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} = (F\ ,\ \hat{\psi})_{A_{\frac{1}{w_o}}} .$$

Il faut vérifier la cohérence de la construction.

PROPOSITION A 2.1. Soit $f \in \mathcal{S}'$, se prolongeant dans Aw_o en une fonctionnelle F. Soient $\hat{f}$ et $\hat{F}$ leurs transformées de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et dans $L^2_{\frac{1}{w_o}}$. Alors, quelle que soit $\psi \in \mathcal{S} \cap L^2_{\frac{1}{w_o}}$, on a $(\hat{f}, \psi)_{\mathcal{S}} = (\hat{F}, \psi)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}}$.

Démonstration. Cette proposition n'est pas évidente, parce que la convergence dans $A_{\frac{1}{w_o}}$ n'entraîne pas la convergence dans $\mathcal{S}$, alors qu'elle entraîne la convergence dans D (lemme A 2.1).

On peut donc seulement affirmer, pour l'instant, que si $\psi \in \mathcal{S} \cap L^2_{\frac{1}{w_o}}$ et $\hat{\psi} \in D$, alors $(\hat{f}, \psi)_{\mathcal{S}} = (\hat{F}, \psi)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}}$. Soit $\psi \in \mathcal{S} \cap L^2_{\frac{1}{w_o}}$, sans condition sur $\operatorname{Supp} \hat{\psi}$. On choisit $\alpha \in D$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\alpha}(\xi)| w^*_\infty(\xi)\, d\xi < +\infty$ et $\alpha(0) = 1$. On peut le faire parce que w_o vérifie (19) (pour la définition de w^*_∞, se reporter à la démonstration de la proposition 2.4).

On pose alors $\hat{\psi}_n(x) = \hat{\psi}(x)\, \alpha(\frac{x}{n})$. On a $\hat{\psi}_n \in D$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi_n = \psi$ dans $\mathcal{S}$. On peut donc écrire :

$$(\hat{f}, \psi)_{\mathcal{S}} = \lim_{n \to +\infty} (\hat{f}, \psi_n)_{\mathcal{S}} = \lim_{n \to +\infty} (\hat{F}, \psi_n)_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} .$$

Il reste à prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi_n = \psi$ dans $L^2_{\frac{1}{w_o}}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi_n = \psi$ pour la convergence uniforme dans $\mathbb{R}^N$, il suffit de prouver que les intégrales $\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n(\xi)|^2 \frac{d\xi}{w_o(\xi)}$ convergent uniformément par rapport à n.

Pour cela, on écrit

$$\psi_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi - \eta)\, n^N \hat{\alpha}(n\eta)\, d\eta ,$$

d'où

$$|\psi_n(\xi)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |n^N \hat{\alpha}(n\eta)|\,d\eta\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(\xi-\eta)|^2 \,|n^N \hat{\alpha}(n\eta)|\,d\eta\right).$$

Soient $T, \varepsilon > 0$ tels que $\displaystyle\int_{|\eta'|>T} |\hat{\alpha}(\eta')|\,w^*_\infty(\eta')\,d\eta' \leq \varepsilon.$

Soit $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_{|\xi'|>A-T} |\psi(\xi')|^2 \frac{1}{w_o(\xi')}\,d\xi' \leq \varepsilon.$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

On a

$$\int_{|\xi|>A} |\psi_n(\xi)|^2 \frac{1}{w_o(\xi)}\,d\xi \leq C \int_{|\xi|>A} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\psi(\xi-\eta)|^2 \,|n^N \hat{\alpha}(n\eta)|\,\frac{w^*_\infty(\eta)}{w_o(\xi-\eta)}\,d\eta\,d\xi,$$

puisque $\dfrac{w_o(\xi-\eta)}{w_o(\xi)} \leq w_\infty(\eta) \leq w^*_\infty(\eta)$.

Par un changement de variables :

$$\int_{|\xi|>A} |\psi_n(\xi)|^2 \frac{1}{w_o(\xi)}\,d\xi \leq C \int_{|\xi|>A} \int_{\eta'\in\mathbb{R}^N} |\psi(\xi-\tfrac{\eta'}{n})|^2 \,|\hat{\alpha}(\eta')|\,\frac{w^*_\infty(\frac{\eta'}{n})}{w_o(\xi-\frac{\eta'}{n})}\,d\eta'\,d\xi,$$

ce qu'on écrit :

(154) $$\int_{|\xi|>A} |\psi_n(\xi)|^2 \frac{d\xi}{w_o(\xi)} \leq C \int_{|\xi|>A} \int_{|\eta'|>Tn} + C \int_{|\xi|>A} \int_{|\eta'|\leq Tn}$$

Le premier terme du membre de droite de (154) est majoré par

$$C\left(\int_{\xi'\in\mathbb{R}^N} |\psi(\xi')|^2 \frac{d\xi'}{w_o(\xi')}\right)\int_{|\eta'|\geq Tn} |\hat{\alpha}(\eta')|\,w^*_\infty(\eta')\,d\eta'$$

$$\leq C\,\|\psi\|^2_{L^2_{\frac{1}{w_o}}}\,\varepsilon, \qquad \text{par construction de } T.$$

Le second terme est majoré par :

$$C \int_{|\xi'|>A-T} \int_{\eta'\in\mathbb{R}^N} |\psi(\xi')|^2 \,|\hat{\alpha}(\eta')|\,\frac{w^*_\infty(\eta')}{w_o(\xi')}\,d\eta'\,d\xi' \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\alpha}(\eta')|\,w^*_\infty(\eta')\,d\eta'\right)\varepsilon,$$

d'après la construction de A. Il faut remarquer que dans ces deux majorations, on a utilisé la croissance de w_∞^* pour écrire $w_\infty^*(\frac{\eta'}{n}) \leq w_\infty^*(\eta')$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{|\xi|>A} |\psi_n(\xi)|^2 \frac{1}{w_o(\xi)} d\xi \leq C\left(\|\psi\|^2_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} + \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\alpha}(\eta')| w_\infty^*(\eta') \, d\eta'\right) \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

La définition A2-2 est donc compatible avec la notion habituelle de transformée de Fourier. Toute fonction de $L^2_{w_o}$ devient ainsi la transformée d'un élément de Aw_o.

Si $f \in Aw_o$ et $\varphi \in A_{\frac{1}{w_o}}$, on aura

$$(f,\varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}} = (2\pi)^{-N}(\hat{f}, \hat{\varphi})_{L^2_{\frac{1}{w_o}}} = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} \, \bar{\hat{\varphi}},$$

donc

$$\sup_{\|\varphi\|_{A_{\frac{1}{w_o}}} \leq 1} \left|(f,\varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}}\right| = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 \, w_o(\xi) \, d\xi.$$

La norme dans l'espace fonctionnel Aw_o est donc, à une constante près, celle sur laquelle nous avons travaillé.

4) Il faut maintenant confirmer que Aw_o est un puzzle-L^2, et pour cela, commencer par définir les multiplicateurs.

DEFINITION A.2-3. $m(x)$ <u>sera un multiplicateur de</u> Aw_o <u>si</u> $\overline{m(x)}$ <u>est un multiplicateur de</u> $A_{\frac{1}{w_o}}$. <u>Si</u> $f \in Aw_o$, $m(x) f(x)$ <u>sera alors défini par</u>

$(mf,\varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}} = (f, \bar{m}\varphi)_{A_{\frac{1}{w_o}}}$ <u>pour toute</u> $\varphi \in A_{\frac{1}{w_o}}$.

Remarquons que cela est compatible avec notre définition de la transformée de Fourier, en vertu de la formule

$$\int_{\mathbf{R}^N} (\hat{m} * \hat{f})\, \bar{\hat{\varphi}} = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}\, (\bar{\hat{m}} * \hat{\varphi}) ,$$

qui est une application directe de Fubini.

Pour prouver que Aw_o est un puzzle-L^2, dans le cadre de la nouvelle définition, on peut reproduire la partie 2. On peut aussi utiliser le résultat suivant, issu du point de vue abstrait.

PROPOSITION A-2-2. Soit E un puzzle-L^2, E' son dual. Alors, E' est aussi un puzzle-L^2.

Démonstration. a) Soient K et H compacts de $\mathbf{R}^N$, $H \subset \overset{o}{K}$, et soit Δ une fonction découpante associée à K et H, telle que

$$\forall\, \varphi \in E \qquad \Delta(x)\, \varphi(x) \in E .$$

Alors, si $f \in E'$, $\Delta f \in E'$, et pour tout $\varphi \in E$:

$$|(\Delta f, \varphi)| = |(f\,,\, \Delta\varphi)| \leq ||f||_{E'} ||\Delta\varphi||_E \leq C ||f||_{E'} ||\varphi||_E ,$$

d'où $||\Delta f||_{E'} \leq C ||f||_{E'}$. On a montré la propriété (P.a) pour E' (voir définition 1.2).

b) Utilisant la proposition 1.3, on va montrer (P.c) pour E'. On suppose maintenant que $(K-K) \cap \mathbf{Z}^N = \{0\}$, et on note $x_1, \ldots, x_n$ des points de $B(0,1)$ tels que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \Delta(x-x_1-k) + \ldots + \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \Delta(x-x_n-k) = 1 .$$

Si $f \in E'$, on écrit $f = f_1 + \ldots + f_n$, où $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \Delta(x-x_j-k)\, f(x)$. Alors, $f_j \in E'$ et $||f_j||_{E'} \leq C ||f||_E$. Cela vient simplement du fait que $\sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \Delta(x-x_j-k)$ est un multiplicateur de E, puisque E est un puzzle-L^2. Moyennant la démonstration des inégalités (5) sur E'_K (voir proposition 1.1 et définition 1.3), on a l'existence d'une K-décomposition pour tout élément de E'. Il faut donc maintenant se donner $f(x) = \sum_{k\in Z^N} f_k(x-k)$, où $f_k \in E'$ et $\operatorname{Supp} f_k \subset K$, et montrer l'existence de $C_2 > c_1 > 0$ telles que

$$(5) \qquad C_1 \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'} \leq \|f\|^2_{E'} \leq C_2 \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'}.$$

Soit $\varphi(x) = \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \varphi_k(x-k) \in E$, $\operatorname{Supp} \varphi_k \subset K$. On a alors :

$$(f,\varphi)_E = \sum_{k,j} (f_k(x-k)\ ,\ \varphi_j(x-j))_E = \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} (f_k,\varphi_k)_E.$$

On choisit φ_k telle que

$$(f_k\ ,\ \varphi_k)_E = |(f_k,\varphi_k)|_E \geq \frac{1}{2}\|f_k\|_{E'}\|\varphi_k\|_E > 0.$$

Alors :

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|_{E'}\|\varphi_k\|_E \leq 2\,|(f,\varphi)| \leq 2\|f\|_{E'}\ \|\varphi\|_E \leq C\|f\|_{E'}\ \sqrt{\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|\varphi_k\|^2_E}\ .$$

Si $(C_k)_{k\in \mathbf{Z}^N} \in \ell^2$, en multipliant φ_k par $\dfrac{C_k}{\|\varphi_k\|_E}$, il vient :

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} C_k\|f_k\|_{E'} \leq C\|f\|_{E'}\|(C_k)\|_{\ell^2}.$$

La suite $(\|f_k\|_{E'})_{k\in \mathbf{Z}^N}$ appartient donc à $\ell^2(\mathbf{Z}^N)$, avec

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'} \leq C\|f\|^2_{E'}\ .$$

Pour démontrer une inégalité en sens inverse, on part à nouveau de $(f,\varphi)_E = \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} (f_k\ ,\ \varphi_k)_E$. Cela donne :

$$|(f,\varphi)_E| \leq \sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|_{E'}\ \|\varphi_k\|_E \leq \sqrt{\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'}}\ \ \sqrt{\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|\varphi_k\|^2_{E'}}$$

d'où

$$|(f,\varphi)|_E \leq C\ \|\varphi\|_E\ \sqrt{\sum_{k\in \mathbf{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'}}\ .$$

Cette inégalité reste encore vraie, à la constante près, pour tout élément φ de E. Il suffit, pour le voir, de faire une K-décomposition de φ dans E. Par conséquent, pour toute $f \in E'$:

$$\|f\|^2_{E'} \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \|f_k\|^2_{E'} \quad ,$$

ce qui termine la démonstration.

L'espace Aw_o est donc un puzzle-L^2, dès que w_o vérifie (19). Il faut remarquer que l'hypothèse (19) nous a permis de définir correctement et complètement l'espace lui-même, la transformée de Fourier, et ce dernier résultat.

Tous les autres résultats restent donc valables, dans le cadre de la nouvelle définition.

Bibliographie

[1] BEURLING, A. Construction and analysis of some convolution algebras. Ann. Inst. Fourier 14 (1964).

[2] BEURLING, A. and MALLIAVIN, P. On Fourier transforms of measures with compact supports. Acta Math. 107 (1962), 291-309.

[3] BOURDAUD, G. et MEYER, Y. Inégalités L^2 précisées pour la classe $S^0_{0,0}$. A paraître.

[4] COIFMAN, R. R. et MEYER, Y. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque nº 57.

[5] FEICHTINGER, H. G. Banach convolution algebras of Wiener's type. Proc. Conf. "Functions, Series, Operators" Budapest (Auguest 1980). Coll. Math. Soc. J. Bolyai. North Holland Publ. Comp.

[6] GEL'FAND, I. M., SHILOV, G. E. and VILENKIN, N. Ya. Generalized functions. Tomes 1, 2 et 4. Academic Press (1964).

[7] KATZNELSON, Y. An introduction to harmonic analysis. Dover Publ. 1968, 1976.

[8] MANDELBROJT, S. Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. Paris, Gauthier-Villars (1935).

[9] MANDELBROJT, S. Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Paris, Gauthier-Villars (1952).

[10] MEYER, Y. Sur un problème de Michael Hermann. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique. Novembre 1980 (M 496.1180).

[11] PEETRE, J. New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series 1 (1976), p. 149.

[12] RUDIN, W. Real and complex analysis. McGraw Hill (1970).

[13] STEIN, E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970).

[14] STRICHARTZ, R. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech. 16 (1967), p. 1041.

[15] ZELAZKO, W. Banach algebras. Elsevier Publ. Cny and PWN-Polish Scient. Publishers (1973).

Table des matières

No. d'impression 629
4ème trimestre 1983