UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

155

75-44

Séminaire d'Analyse Harmonique

1974-1975

Analyse Harmonique d'Orsay

1975

CONNES Bernard   Sur un théorème d'Alpar 1

EL HELOU Youssef   Analyse de Fourier et trajectoire du mouvement brownien (d'après Robert Kaufman) 7

KORNER Thomas W.   Everywhere divergent Fourier series 17

COIFMAN Ronald et MEYER Yves   Le théorème des commutateurs de Calderón 37

Rappels sur BMO 47

COIFMAN Ronald   Opérateurs de Calderón-Zygmund et BMO 52

COIFMAN Ronald et MEYER Yves   La décomposition de l'opérateur de Calderón 62

MONTGOMERY, Hugh L.   A note on rearrangements of Fourier coefficients 66

PIQUARD-LUST Françoise   L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact a la propriété de Schur 72

Sur un théorème d'Alpar

Bernard Connes

Alpar a démontré (1966) le théorème suivant : soit g une fonction périodique dont la série de Fourier est *absolument* convergente, et f un homéomorphisme analytique du tore sur lui-même, alors la série de Fourier de $g \circ f$ est *uniformément* convergente. Ce résultat est faux si la condition d'analyticité est remplacée par C^∞, comme l'a montré Y. Katznelson. Nous allons maintenant présenter un lemme, dû à R. Kaufman, qui permet d'étendre ce résultat à une classe de fonctions beaucoup plus vaste que les fonctions analytiques, et qui a l'avantage d'avoir d'autres applications.

THEOREME 1 (R. Kaufman). *Si* f *est une fonction réelle de classe* C^n $(n \geq 2)$ *sur l'intervalle* $[-r\,,\,r]$ *vérifiant* : $\max |f^{(n)}| < b \min |f^{(n)}|$, *alors* $\left| vp\int_{-r}^{r} \frac{e^{if(x)}}{x}\,dx \right| \leq C(n,b)$, *où* $C(n,b)$ *ne dépend ni de* f *ni de* r.

La démonstration s'appuie sur les deux lemmes suivants :

LEMME 1. *Pour* n *entier* ≥ 2 *les deux implications suivantes sont équivalentes, pour tout* f *de classe* C^n *sur* $[-r\,,\,r]$

(a) $\max |f^{(n)}| < b \min |f^{(n)}| \Longrightarrow \left|vp\int_{-r}^{r} \frac{e^{if(x)}}{x}\,dx\right| \leq C(n,b)$

(b) $1 \leq f^{(n)} < b \qquad \Longrightarrow \qquad$ " " "

Preuve. Il est clair que (a) $\Rightarrow$ (b) car l'hypothèse de (b) entraîne celle de (a) puisque $[-r\,,\,r]$ est compact.

(b) $\Rightarrow$ (a) car, si $\max |f^{(n)}| < b \min |f^{(n)}|$, d'une part $f^{(n)}$ ne peut changer de signe donc peut être supposé positif, d'autre part on peut alors trouver λ tel que : $g(x) = f(\lambda x)$ vérifie $1 \leq g^{(n)} < b$ sur $[-\frac{r}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}]$.

Alors : $\left|vp\int_{-r}^{r} \frac{e^{if(x)}}{x}\,dx\right| = \left|vp\int_{-r/\lambda}^{r/\lambda} \frac{e^{ig(x)}}{x}\,dx\right| \leq C(n,b)$ (b).

LEMME 2. Sous l'hypothèse que $|f^{(n)}| \geq 1$ sur un intervalle fermé I, on a : (c) : $\left|\int_u^v e^{if(x)}dx\right| < C(n)$ pour tout couple u, v de I, où $C(n)$ ne dépend ni de I ni de f.

Preuve. Pour $n = 2$, ceci est une formulation du lemme de van der Corput. Pour $n > 2$, on raisonne par récurrence, en supposant la propriété vraie pour $n-1$. On remarque, en prolongeant f de façon à avoir $|f^{(n)}| \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver (c) pour $I = \mathbb{R}$. Alors $f^{(n-1)}$ s'annule pour une valeur x_o, car sa dérivée est soit ≥ 1 soit ≤ -1. Il en résulte que $|f^{(n-1)}| \geq 1$ sur $[-\infty, x_o - 1]$ et $[x_o + 1\,,\,+\infty]$ (accroissements finis). En majorant l'exponentielle sur l'intervalle restant, on obtient :
$\left|\int_u^v e^{if(x)}\,dx\right| \leq C(n-1) + 2 + C(n-1) = 2 + 2C(n-1)$, ce qui prouve le lemme.

Preuve du théorème. D'après le lemme 1, il nous suffira de montrer la propriété, pour n donné, en supposant que $1 \leq f^{(n)} < b$ sur $[-r\,,\,r]$. Mais alors si $r > 1$, on a :

$$\mathrm{vp}\int_{-r}^{r}\frac{e^{if(x)}}{x}\,dx = \mathrm{vp}\int_{-1}^{1}\frac{e^{if(x)}}{x}\,dx + \int_{-r}^{-1}\cdot + \int_{1}^{r}\cdot$$

et $$\left|\int_{1}^{r}\frac{e^{if(x)}}{x}\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{x}.\mathrm{prim}\; e^{if(x)}\right]_{1}^{r} + \int_{1}^{r}\frac{1}{x^2}.\mathrm{prim}\; e^{if(x)}.dx\right|$$

$\leq C(n) + C(n)$ si l'on choisit la primitive qui s'annule en 1, d'après le lemme 2. On peut donc se contenter de montrer la propriété pour $0 < r \leq 1$. La démonstration se fait par récurrence, le cas $n = 2$ étant laissé pour la fin. Supposons donc la propriété vraie pour $2, \ldots, n-1$. Nous allons considérer deux cas :

- Premier cas : il existe $2 \leq p < n$ tel que : $\max|f^{(p)}| < 2 \min|f^{(p)}|$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left|\mathrm{vp}\int_{-r}^{r}\cdot\right| \leq C(p,2) \leq \sup_{2\leq k\leq n-1} C(k,2).$$

- Second cas : pour tout $2 \leq p < n$ $\max|f^{(p)}| \geq 2\min|f^{(p)}|$. Alors par les accroissements finis, pour $2 \leq k \leq n-1$

$$\max|f^{(k+1)}| \geq |f^{(k+1)}(\theta)| \geq \frac{\max|f^{(k)}| - \min|f^{(k)}|}{2r} \geq \frac{\max|f^{(k)}|}{4}.$$

Il en résulte que $\max|f^{(2)}| \leq 4^{n-2}\max|f^{(n)}| < 4^{n-2}.b$, car on a supposé $1 \leq |f^{(n)}| < b$ et $0 < r \leq 1$.

Alors $e^{if(x)} = e^{if(0)}.e^{ixf'(0)}.e^{ix^2\varphi(x)}$, avec $|\varphi| < 4^{n-3}.b$. Donc $e^{if(x)} = e^{if(0)}.e^{ixf'(0)} + O(x^2)$ où O ne dépend que de n et b. Alors posant $f'(0) = \lambda$ un changement de variable donne :

$$\left|\mathrm{vp}\int_{-r}^{r}\frac{e^{if(x)}}{x}\,dx\right| \leq \left|\int_{0}^{\lambda r}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_{-r}^{r}0(x)\,dx\right| \leq C\,(n,b)$$

ce qui prouve aussi le cas $n = 2$ donc le théorème.

REMARQUE. Dans le théorème, on peut remplacer l'inégalité stricte : $\max|f^{(n)}| < b\min|f^{(n)}|$, par une inégalité au sens large. En effet, le seul cas difficile est

$|f^{(n)}| = 0$, ce qui implique : soit $|f^{(p)}| = a \neq 0$ pour $2 \leq p < n$, auquel cas la propriété reste vraie, soit $|f^{(2)}| = 0$. Dans ce dernier cas la fonction est linéaire, et le dernier argument du théorème s'applique, même si $r > 1$.

A l'aide du théorème précédent le résultat d'Alpar se généralise de la manière suivante.

THEOREME 2. Soient g une fonction périodique dont la série de Fourier est absolument convergente, et f une fonction de classe C^m $(2 \leq m \leq \infty)$, du tore dans lui-même, telle que en tout point l'une de ses dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2 soit non nulle. Alors $g \circ f$ est une fonction périodique dont la série de Fourier converge uniformément.

Clairement, à l'exception des fonctions linéaires, pour lesquelles la propriété est triviale, les fonctions analytiques satisfont aux hypothèses de f.

Preuve. Désignons génériquement par (φ), la série de Fourier de la fonction continue périodique φ, et par φ_ν $(\nu\in\mathbb{Z})$ le terme d'ordre ν de cette série.

On a pour $x\in T$, $gof(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inf(x)}$ où les a_n sont les coefficients de Fourier de g.

L'espace U des séries de Fourier uniformément convergentes étant un Banach pour la norme $\|(\varphi)\| = \sup \left|\sum_{-N}^{N} \varphi_\nu\right| : (x\in\mathbb{T}\ ,\ N\in\mathbb{N})$, si on montre que $(e^{inf}) \in U$ et que $\|(e^{inf})\| \leq A$ pour tout n, on pourra écrire $(gof) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (e^{inf}) \in U$ (Cauchy).

Puisque f est de classe C^2, e^{inf} est de classe C^2, donc sa série de Fourier est absolument (donc uniformément) convergente.

Pour prouver que $\|(e^{inf})\| \leq A$, remarquons que puisque le tore est compact, il nous suffira de prouver cette propriété au voisinage de tout point, on aura alors $\|(e^{inf})\| \leq \sup \|(e^{inf})|_{I_k}\|$ où les I_k sont les intervalles du recouvrement fini.

Soit donc x_o un point de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, il existe par hypothèse $p \geq 2$ tel que $f^{(p)} \neq 0$, donc, par continuité, un intervalle $(x_o - 2\alpha\ ,\ x_o + 2\alpha)$ dans lequel : $\max |f^{(p)}| < 2 \min |f^{(p)}|$. Nous allons montrer que $\|(e^{inf})|_I\|$ est majorée, où $I = (x_o - \alpha\ ,\ x_o + \alpha)$. $\|(e^{inf})|_I\| = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}, x\in I} \left|\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, e^{inf(t+x)} dt\right|$

où D_N est le noyau de Dirichlet.

$$\|(e^{inf})|_I\| \leq \sup \left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\,t}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{inf(t+x)}\, dt\right| + A$$

où A est indépendant de n et vaut : $2\int_{\alpha}^{\pi} \frac{dt}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$

$$\|(e^{inf})|_I\| \leq 2 \sup_{\pm\,\cdot} \left| vp \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{t}\, e^{\pm i(N+\frac{1}{2})t + inf(t+x)}\, dt\right| + B$$

où B est indépendant de n et vaut : $A + \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}} \right| dt$.

Posant $h(t) = \pm (N + \frac{1}{2})t + nf(t + x)$, h vérifie (puisque $p \geq 2$) l'hypothèse : $\max |h^{(p)}| < 2 \min |h^{(p)}|$ sur $[-\alpha , \alpha]$, d'après le choix de l'intervalle I. Le premier théorème donne $\| (e^{inf}) |_I \| \leq 2C(p,2) + B$, ce qui achève la preuve.

Analyse de Fourier et trajectoire du mouvement brownien

d'après Robert Kaufman

par Youssef EL HELOU

Soit E le support compact d'une mesure positive μ vérifiant une condition de Lipschitz d'exposant $b > \frac{1}{2}$: $\mu(T) << (\text{diam}\, T)^b$ pour tout borélien T de $\mathbb{R}$; ce qui signifie que la dimension de Hausdorff de E est au moins égale à $b > \frac{1}{2}$. Si X est un mouvement brownien linéaire, on sait que, p. s., $X(E)$ a une mesure de Lebesgue positive. Ce résultat peut être amélioré et le but de ce papier est de démontrer le résultat suivant

THEOREME.- Presque sûrement, l'image par X de E a un intérieur non vide. Plus précisément : p. s. l'image par X de μ est une mesure à densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour prouver que la mesure image $\lambda = X(\mu)$ a une densité continue, nous utilisons sa transformée de Fourier-Stieltjes $\hat{\lambda}(u) = \int e^{-iut}\, d\lambda(t)$. Pour réobtenir λ à partir de $\hat{\lambda}$, nous choisissons et fixons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, à support dans $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$, et nous notons : $I(x,k) = \int \varphi(k^{-1}.u).e^{iux}.\hat{\lambda}(u)\, du$, pour $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Nous savons alors que $I(x,k)$ converge vers la mesure $2\pi\, d\lambda(x)$ pour la topologie $*$-faible des mesures ; et λ aura une densité continue, s'il existe une sous-suite de $I(x,k)$ qui converge uniformément sur les ensembles compacts de l'axe des x.

En regardant de près, nous tirons la formule : $I(x,k) = \int k.\hat{\varphi}(kt - kx).d\lambda(t)$; et si $\eta > 0$ est fixé arbitrairement, la décroissance rapide vers 0 à l'∞ de la transformée

Fourier $\hat{\varphi}$ assure que : si $|x-t| > k^{\eta-1}$, alors $|k.\hat{\varphi}(kt-kx)| < k^{-L}$ pour toute constante L, et tout $k > k(\eta, L)$. Pour estimer la grandeur de $I(x,k)$ quand k tend vers $+\infty$, on est ramené à évaluer la λ-mesure totale des intervalles de longueur $k^{\eta-1}$ On approche alors $I(x,k) - I(x,2k)$ par la "fonction somme" d'une martingale ; ce qui nous permet d'évaluer la norme L^p de $I(x,k) - I(x,2k)$ d'après un théorème de Burkholder sur la "fonction carrée" d'une martingale.

Avant de commencer la démonstration, rappelons les différentes écritures de $I(x,k)$:

$$I(x,k) = \int \varphi(k^{-1}u).e^{iux}.\hat{\lambda}(u)du = \int d\mu(t) \int \varphi(k^{-1}u).e^{iu(x-X(t))}.du =$$
$$\int k.\varphi(kX(t)-kx)\, d\mu(t) = \int k \cdot \hat{\varphi}(kt-kx)\, d\lambda(t).$$

1. On va démontrer deux lemmes préliminaires.

LEMME 1.- <u>Soit</u> $M(x,r)$ <u>la μ-mesure de</u> $\{t\in\mathbb{R} ; |X(t)-x| \le r\}$ <u>où</u> $0<r<1$ <u>et</u> $x\in\mathbb{R}$ <u>sont donnés. Alors toute norme</u> L^p <u>vérifie</u> : $\|M(x,r)\|_p \le B_p.r$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

En effet : $(M(x,r))^p = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} 1_{\{(t_1,\ldots,t_p);\, |X(t_n)-x| \le r, n=1,\ldots,p\}} d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_p)$

$$= p! \int_{\{t_1\le t_2\le\ldots\le t_p\}} 1_{\{(t_1,\ldots,t_p);\, |X(t_n)-x| \le r,\ n=1,\ldots,p\}}\, d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_p).$$

Or si $|X(t_n)-x| \le r$ pour $n = 1,\ldots,p$, on a alors : $|X(t_1)-x| \le r$, et $|X(t_{n+1}) - X(t_n)| \le 2r$ pour $n = 1,\ldots,p-1$. Ce qui donne la majoration :

$$(M(x,r))^p \le p! \int_{\{t_1\le t_2\le\ldots\le t_p\}} 1_{\{|X(t_1)-x| \le r,\ |X(t_{n+1})-X(t_n)| \le 2r, n=1,\ldots,p-1\}} d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_p)$$

Prenant le moment d'ordre p de $M(x,r)$ et utilisant l'indépendance des accroissements :

$$E((M(x,r))^p) \le p! \int_{\{t_1\le\ldots\le t_p\}} P\left([|X(t_1)-x| \le r] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{p-1} [|X(t_{n+1})-X(t_n)| \le 2r]\right)\right) d\mu(t_1)\ldots d\mu(t_p)$$

$$E((M(x,r))^p) \leq p! \int_{\{t_1 \leq \ldots \leq t_p\}} P([|X(t_1)-x| \leq r]) \ldots P([|X(t_{n+1})-X(t_n)| \leq 2r]) \ldots d\mu(t_1) \ldots d\mu(t_p).$$

Or $X(t_{n+1}) - X(t_n)$ est une variable Gausienne de variance $t_{n+1} - t_n$, d'où :

$$P([|X(t_{n+1}) - X(t_n)| \leq 2r]) = \frac{2}{\sqrt{t_{n+1}-t_n}} \int_0^{2r} e^{-\pi \frac{u^2}{t_{n+1}-t_n}} . du \leq \operatorname{Min}(1, 4r\, |t_{n+1} - t_n|^{-1/2}),$$

ce qui provient du fait que pour $\lambda \geq 0$: $2\int_0^{\lambda} e^{-\pi v^2} dv \leq \operatorname{Min}(1, 2\lambda)$. On intègre par rapport à t_{n+1} en gardant t_n fixe, puis on majore l'intégrale obtenue par son suprémum sur tous les t_n ; ceci donne une constante que l'on fait sortir de l'intégrale multiple ; cette constante est : $\sup_s \int \operatorname{Min}(1, 4r. |t-s|^{-1/2})\, d\mu(t)$. La dernière intégrale qui reste est : $\int_R P([|X(t_1)-x| \leq r])\, d\mu(t_1)$. Or $P([X(t_1) - x| \leq r]) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \int_{x-r}^{x+r} e^{-\pi \frac{u^2}{t_1}} du \leq$ $\frac{1}{\sqrt{t_1}} \int_{-r}^{r} e^{-\pi \frac{u^2}{t_1}} du = P([|X(t_1)| \leq r])$;et l'intégrale de cette dernière fonction est encore majorée par $\sup_s \int \operatorname{Min}(1, 4r\, |t-s|^{-1/2})\, d\mu(t)$. D'où :

$$E((M(x,r))^p) \leq p!\, (\sup_s \int \operatorname{Min}(1, 4r\, |t-s|^{-1/2})\, d\mu(t))^p \leq p!.4^p.r^p.(\sup_s \int |t-s|^{-1/2} d\mu(t))^p$$

$\Longrightarrow \|M(x,r)\|_p \leq (p!)^{1/p}.4.r.(\sup_s \int |t-s|^{-1/2} d\mu(t))$. Et le lemme sera démontré dès que l'on montre que le suprémum qui intervient est fini.

Montrons plus généralement que, vue l'hypothèse fait sur μ, pour tout f tel que $0 < f < b$: $\int |t-s|^{-f} d\mu(t) \leq C(f)$ constante ne dépendant que de f. En effet : on peut supposer $E \subset [\alpha, \beta]$ et prendre le sup pour $s \in [\alpha, \beta]$. On intègre par parties :

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\mu(t)}{|t-s|^f} = \left[\frac{\mu(t) - \mu(s)}{|t-s|^f}\right]_\alpha^\beta \pm f \int_\alpha^\beta \frac{\mu(t) - \mu(s)}{|t-s|^{f+1}} dt \leq C_0 (2\, |\beta - \alpha|^{b-f} + f \int_\alpha^\beta \frac{1}{|t-s|^{1+f-b}} dt).$$

Or $0 < 1 + f - b < 1 \Longrightarrow t \longrightarrow \frac{1}{|t-s|^{1+f-b}}$ est intégrable pour dt sur $[\alpha, \beta]$; et son intégrale est une fonction continue de s, donc bornée sur $[\alpha, \beta]$. D'où

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\mu(t)}{|t-s|^f} \leq C(f).$$

LEMME 2. Soient E_j des ensembles fermés disjoints, et $m = \operatorname{Max}_j \mu(E_j)$. Soient $M_j(x,r)$ la μ-mesure de $\{t \in E_j \ ; \ |X(t) - x| \leq r\}$, et $M^*(x,r) = \sup_j M_j(x,r)$. Alors $\|M^*(x,r)\|_p \leq B_{p,q}.rm^q$ pour tout $q < \frac{2b-1}{2b}$, et $p = 1, 2, 3, \ldots$

En effet, on commence par écrire $(M_j(x,r))^p$ sous la forme d'une intégrale multiple, comme au lemme précédent, en ajoutant la condition $t_n \in E_j$; ceci permet de majorer le moment d'ordre p de $M_j(x,r)$ par une grandeur comparable à $r^p.(\sup_s \int_{E_j} |t-s|^{-\frac{1}{2}} d\mu(t))^p$. Je dis que pour tout $q < \frac{2b-1}{2b}$, $\sup_s \int_{E_j} |t-s|^{-\frac{1}{2}} d\mu(t) \ll (\mu(E_j))^q$. En effet, si f est choisi tel que $2f$ soit le conjugué de $\frac{1}{q}$ qui est > 1, on a que :

$\frac{1}{2f} + \frac{1}{\frac{1}{q}} = 1 \Rightarrow 2f = \frac{1}{1-q} < \frac{1}{1 - \frac{2b-1}{2b}} = 2b \Rightarrow f < b$. Appliquant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\int_{E_j} |t-s|^{-1/2} d\mu(t) \leq \left(\int |t-s|^{-f} d\mu(t)\right)^{1/2f} . \left(\int (1_{E_j})^{1/q} d\mu\right)^q \leq (C(f))^{1/2f} . (\mu(E_j))^q .$$

On en déduit que : $(\|M_j(x,r)\|_p)^p << r^p.(\mu(E_j))^{pq}$. Or $(M^*(x,r))^p \leq \sum_j (M_j(x,r))^p$; ce qui donne : $E((M^*(x,r))^p) \leq \sum_j E((M_j(x,r))^p)$; d'où :

$(\|M^*(x,r)\|_p)^p << r^p.\sum_j (\mu(E_j))^{pq} << r^p.m^{pq-1}$; cette dernière majoration provient du fait que si $s \geq 1$ et $a = \sup_j a_j$ alors $\sum_j a_j^s \leq a^{s-1}.\sum_j a_j$. Ici $s = pq$; il faudrait donc que $pq \geq 1$, donc que p soit suffisamment grand. En première conclusion :

$$\|M^*(x,r)\|_p << r.m^{q-1/p}, \quad p = p_o, \ p_o+1, \ldots$$

De même pour un q' tel que $q < q' < \frac{2b-1}{2b}$:

$$\|M^*(x,r)\|_p << r.m^{q'-1/p}, \quad p = p_1, \ p_1+1, \ldots$$

Deux cas se présentent :

* $m \geq 1 \Rightarrow m^{q-1/p} \leq m^q$
* $m < 1 \Rightarrow q'-1/p$ dépasse q dès que $p \geq p_2$, et alors $m^{q'-1/p} \leq m^q$.

Donc $\|M^*(x,r)\|_p << r.m^q$, pour chaque $p \geq \sup(p_o, p_1, p_2)$. Si maintenant $p < \sup(p_o, p_1, p_2)$: $\|M^*(x,r)\|_p \leq \|M^*(x,r)\|_{p'}$ pour tout $p' \geq \sup(p_o, p_1, p_2)$, à cause de la croissance de la norme L^p. Le résultat final s'en déduit : $\|M^*(x,r)\|_p << r.m^q$, $p = 1, 2, 3\ldots$

Dans les paragraphes suivants, nous allons approcher $I(x,k) - I(x,2k)$ par la "fonction somme" d'une martingale, et utiliser les estimations de M et M^* déjà trouvées.

2. Appelons T_j l'intervalle $[j.k^{-1}, (j+1)k^{-1}]$; alors $I(x,k) - I(x,2k)$ est divisée en des intégrales sur les intervalles T_j de l'axe des t, que nous notons Γ_j :
$I(x,k) - I(x,2k) = \sum_j \Gamma_j$ et $\Gamma_j = \int_{T_j} d\mu(t) \int \left[\varphi(k^{-1}u) - \varphi(2^{-1}k^{-1}u)\right] e^{iu(x-X(t))}.du.$
Nous allons chercher une estimation de $\sum_j \Gamma_{2j}$; et les termes de rang impair sont traités de la même manière.

Puisque Γ_{2j} est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{F}_{2j}$ engendrée par les variables aléatoires $X(s)$, $s \leq (2j+1)k^{-1}$, les variables $\Gamma_{2j} - \mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})$ forment la suite des différences d'une martingales. Je dis que : $|\mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})| << k^{-\delta}.\mu(T_{2j})$ pour un certain $\delta > 0$. En effet, Γ_{2j} est l'intégrale par rapport à μ sur T_{2j} de : $\int \left[\varphi(k^{-1}u) - \varphi(2^{-1}k^{-1}u)\right] e^{iu(x-X(t))} d\mu$; nous allons donc donner une borne uniforme pour $t > 2jk^{-1}$ de l'espérance conditionnelle de cette dernière intégrale ; pour borner $\mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})$ il suffit de multiplier par $\mu(T_{2j})$.

D'après la propriété de Markoff, le conditionnement dépend seulement de la variable $X((2j-1)k^{-1}) = X(v)$, et nous avons pour $t > 2jk^{-1}$ l'inégalité $t-v > k^{-1}$. On est alors ramené à trouver l'espérance conditionnelle de $e^{-iuX(t)}$:

$\mathcal{E}(e^{-iuX(t)}|X(v)) = e^{-iuX(v)}.\mathcal{E}(e^{-iu(X(t)-X(v))}|X(v)) \underset{p.s.}{=} e^{-iuX(v)}.e^{-1/2u^2|t-v|}$ car $X(t)-X(v)$ et $X(v)$ sont indépendantes.

Posant $\sigma^2 = |t-v|$, et remarquant que : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-iuy}.e^{-1/2(\frac{y-X(v)}{\sigma})^2}dy = e^{-iuX(v)}.e^{-1/2u^2\sigma^2}$, on en déduit que :

$$\mathcal{E}(\Gamma_{2j}|\mathfrak{F}_{2j-2}) = \int_{T_{2j}} d\mu(t)\iint\left[\varphi(k^{-1}u)-\varphi(2^{-1}k^{-1}u)\right]e^{iu(x-y)}e^{-1/2(\frac{y-X(v)}{\sigma})^2}\frac{dy\,du}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

On écrit cette variable aléatoire sous la forme :

$$\mathcal{E}(\Gamma_{2j}|\mathfrak{F}_{2j-2}) = \int_{T_{2j}} d\mu(t)\int_{\mathbb{R}}\left[k\,\hat{\varphi}(ky-kx)-2k\hat{\varphi}(2ky-2kx)\right]e^{-1/2(\frac{y-X(v)}{\sigma})^2}\frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Nous allons faire deux intégrations par parties successives de l'intégrale par rapport à y.

$r(s) = \hat{\varphi}(s) - 2\hat{\varphi}(2s)$ est la transformée de Fourier de $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(t/2)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact ; et chaque primitive de r, convenablement normalisée de manière à tendre vers 0 à l'infini, est la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact : par exemple la transformée de Fourier de $\frac{i\psi(x)}{x}$ (qui est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact) est une primitive de $r(s)$... etc. Appelons R une primitive de r, et $\mathfrak{R}$ une primitive de R, convenablement choisies. On a : $\int kr(ky-kx)\,dy = R(ky-kx)$, et $\int R(ky-kx)dy = k^{-1}\mathfrak{R}(ky-kx)$. Il y a donc un facteur k^{-1} qui apparaît à chaque intégration.

Puisque les intégrations par parties se font sur $\mathbb{R}$, et que les transformées de Fourier sont nulles à l'infini, le seul terme qui intervient après une deuxième intégration par parties est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} k^{-1}.\mathfrak{R}(ky-kx).g(y)dy$, où g est la dérivée seconde de $y \longrightarrow e^{-1/2(\frac{y-y_o}{\sigma})^2}$ avec $y_o = X(v)$. Or $\mathfrak{R}$ est bornée, donc $\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} k^{-1}\mathfrak{R}(ky-kx).g(y)dy\right| << k^{-1}.\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|dy$. Mais

$g(y) = \frac{1}{\sigma}\left[-\frac{1}{\sigma}e^{-1/2(\frac{y-y_o}{\sigma})^2} + \frac{1}{\sigma}e^{-1/2(\frac{y-y_o}{\sigma})}.(\frac{y-y_o}{\sigma})^2\right]$. Un changement de variable permet d'écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy \leq \sigma^{-1}(\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-u^2/2} + u^2.e^{-u^2/2})\,du)$ qui est $<< \sigma^{-1}$. Comme $\sigma^2 > k^{-1}$, alors $\sigma^{-1} < k^{1/2}$. Finalement, l'intégrale par rapport à y est majorée par une grandeur comparable à $k^{1/2}.k^{-1} = k^{-1/2}$.

D'où : $|\mathcal{E}(\Gamma_{2j}|\mathcal{F}_{2j-2})| << k^{-\delta}.\mu(T_{2j})$ pour un certain $\delta > 0$.

3. Nous passons à Γ_{2j} et nous allons trouver des estimations des normes L^p de $\operatorname*{Max}_j|\Gamma_{2j}|$, $\sum_j|\Gamma_{2j}|$ et $\sum_j|\Gamma_{2j}|^2$.

$$\Gamma_{2j} = \int_{T_{2j}} d\mu(t)\int\left[\varphi(k^{-1}u) - \varphi(2^{-1}k^{-1}u)\right]e^{iu(x-X(t))}\,du = \int_{T_{2j}} k\left[\hat{\varphi}(kX(t)-kx)-2\hat{\varphi}(2kX(t)-2kx)\right].d\mu(t)$$

que je note $\int_{T_{2j}} C(t)\,d\mu(t) = \int_{T_{2j}\cap\{t;C(t)\leq k^{-L}\}} C(t)\,d\mu(t) + \int_{T_{2j}\cap\{t;C(t)\geq k^{-L}\}} C(t)\,d\mu(t)$.

Or on sait que : $|s| > k^{\eta} \Rightarrow k.|r(s)| < k^{-L}$ pour k assez grand. D'où :

$\{s\ ;\ k|r(s)|\geq k^{-L}\} \subset \{s\ ;\ |s|\leq k^{\eta}\}$. Ce qui s'écrit aussi :

$\{t\ ;\ C(t)\geq k^{-L}\} \subset \{t\ ;\ |kX(t) - kx|\leq k^{\eta}\}$. Et tenant compte du fait que $r(s)$ est borné, on a :

$$|\Gamma_{2j}| \leq k^{-L}\mu(T_{2j}) + C.k.\mu(\{t\ ;\ |X(t)-x|\leq k^{\eta-1}\}\cap T_{2j}),\quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

D'où : $|\Gamma_{2j}| << k^{-L}.\mu(T_{2j}) + k.M_j(x,k^{\eta-1})$. Prenant : $\eta < 1$, $E_j = T_{2j}$, $m = \max_j(\mu(T_{2j}))$, on a $m << k^{-b}$ d'après l'hypothèse faite sur μ. Appliquant le lemme 2, la norme L^p de $k.M^*(x,k^{\eta-1})$ a une grandeur comparable à $k.k^{\eta-1}.k^{-bq} = k^{\eta-bq}$. Prenant $\eta < bq$, et L suffisamment grand, k^{-L} est un infiniment petit devant $k^{\eta-bq}$ quand k tend vers l'infini ; comme de plus $k^{\eta-bq}$ s'écrit $k^{-\delta}$, avec $\delta > 0$, on en déduit que :

$$\|\max_j|\Gamma_{2j}|\|_p << k^{-\delta},\quad \text{pour un certain } \delta > 0;\ \text{et pour } p = 1, 2, 3, \ldots .$$

Or $\sum_j M_j(x,r) \leq M(x,r)$, avec les notations des lemmes. Utilisant alors le lemme 1 au lieu du lemme 2 : $\|kM(x,k^{\eta-1})\|_p \ll k^{\eta}$; et comme k^{-L} est infiniment petit devant k^{η}, ceci entraîne que : $\|\sum_j |\Gamma_{2j}|\|_p \ll k^{\eta}$. Ensuite : $\sum_j |\Gamma_{2j}|^2 \leq (\max_j |\Gamma_{2j}|).(\sum_j |\Gamma_{2j}|)$ d'où :

$$\int(\sum_j |\Gamma_{2j}|^2)^p \, dP \leq \int(\max_j |\Gamma_{2j}|)^p.(\sum_j |\Gamma_{2j}|)^p.dP \leq \left(\int(\max_j |\Gamma_{2j}|)^{2p}\right)^{1/2}.\left(\int(\sum |\Gamma_{2j}|)^{2p}\right)^{1/2}$$

et ceci d'après l'inégalité de Schwarz.

D'où : $\|\sum_j |\Gamma_{2j}|^2\|_p \leq \|\mathrm{Max}_j |\Gamma_{2j}|\|_{2p}.\|\sum_j |\Gamma_{2j}|\|_{2p} \ll k^{\eta-\delta}$. Et si on a pris soin de choisir $\eta < \frac{bq}{2}$, ceci impliquera que $\eta - \delta < 0$ et donc que : $\|\sum_j |\Gamma_{2j}|^2\|_p \ll k^{-\delta'}$ pour un certain $\delta' > 0$.

4. Nous allons utiliser dans ce paragraphe une inégalité sur les martingales pour conclure.

D'après le § 2, $\sum_j |\mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})|$ et $\sum_j |\mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})|^2$ sont $\ll k^{-\delta}$ pour un $\delta \geq 0$. Et donc la "fonction carrée" $S^2 = \sum_j |\Gamma_{2j} - \mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})|^2$ associée à une martingale a des normes L^p qui sont $\ll k^{-\delta}$ pour un $\delta > 0$. On applique alors un théorème de Burkholder ([2] , Théo. 3.2) et l'on tire que : $\sup_n \|\sum_1^n (\Gamma_{2j} - \mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2}))\|_p \ll k^{-\delta}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ La somme est en réalité finie, et si l'on pose $J(x,k) - J(x,2k) = \sum_j \Gamma_{2j}$, on a : $\|J(x,k) - J(x,2k) - \sum_j \mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})\|_p \ll k^{-\delta}$. Utilisant de nouveau le fait que $\|\sum_j |\mathcal{E}(\Gamma_{2j} | \mathfrak{F}_{2j-2})|\|_p \ll k^{-\delta}$, on en déduit que :

$\|J(x,k) - J(x,2k)\|_p \ll k^{-\delta}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ D'où finalement :

$\|I(x,k) - I(x,2k)\|_p \ll k^{-\delta}$ pour un $\delta > 0$; $p = 1, 2, 3, \ldots$ Cherchons alors une estimation de $P(\left[|I(x,k) - I(x,2k)| > k^{-\gamma}\right])$ pour un γ qu'on choisira.

$$P(\left[|I(x,k) - I(x,2k)| \geq k^{-\gamma}\right]) = \int 1_{[|I(x,k)-I(x,2k)| \geq k^{-\gamma}]} dP \leq \int |I(x,k)-I(x,2k)|^p.k^{p\gamma} dP$$

$<< k^{p\gamma}.k^{-p\delta} = k^{p(\gamma-\delta)}$, $p = 1, 2, 3, \dots$ On choisit $\gamma < \delta$, d'où $\gamma - \delta < 0$; et $p(\gamma - \delta)$ est arbitrairement voisin de $-\infty$, quand p varie de 1 à $+\infty$.

D'où : $P\left(\left[\,|I(x,k) - I(x,2k)| > k^{-\gamma}\right]\right) << k^{-L}$, pour tout $L > 0$, et pour un $\gamma > 0$.

Remarquons qu'il apparaît clairement que les constantes intervenant dans toutes les estimations - en particulier dans la précédente - ne dépendent pas de x. Je dis qu'on a une estimation semblable pour la probabilité de l'évènement $\left[\sup_{|x|\leq k} |I(x,k)-I(x,2k)| > k^{-\delta}\right]$ pour un $\delta > 0$. En effet, il est facile de voir que la dérivée de $I(x,k) - I(x,2k)$ par rapport à x est $<< k^{-2}$, avec une constante ne dépendant ni de x ni du hasard. Ecrivons pour simplifier : $\left|\frac{d}{dx}(I(x,k) - I(x,2k)\right| \leq k^2$, $k \geq k_o$.

Choisissons alors δ : $0 < \delta < \gamma$; alors $k^{-\delta} - k^{-1} \sim k^{-\delta}$; et comme $k^{-\delta} > k^{-\gamma}$, on a que $k^{-\delta} - k^{-1} > k^{-\gamma}$ pour k assez grand. D'un autre côté, choisissons $L > 4$. Subdivisons l'intervalle $[-k,k]$ en k^4 intervalles de longueur commune $2k^{-3}$; appelons x_i, $i = 1,\dots,k^4$ les centres de ces intervalles. Je dis que pour k assez grand, on a l'inclusion suivante entre évènements :

$$\mathcal{A} = \left[\sup_{|x|\leq k} |I(x,k) - I(x,2k)| > k^{-\delta}\right] \subset \bigcup_{i=1}^{k^4} \left[\,|I(x_i,k) - I(x_i,2k)| > k^{-\gamma}\right] = \mathcal{B}.$$

En effet, le sup est atteint en un certain x_o, qui est dans l'un des petits intervalles, de centre x_i ; la formule des accroissements fini entraîne que :

$$|(I(x_o,k) - I(x_o,2k)) - (I(x_i,k) - I(x_i,2k))| \leq |x_i - x_o|.k^2 \leq k^{-3}.k^2 = k^{-1}$$

$\Rightarrow \sup_{|x|\leq k} |I(x,k) - I(x,2k)| = |I(x_o,k) - I(x_o,2k)| \leq |I(x_i,k) - I(x_i,2k)| + k^{-1}$ et si $\sup_{|x|\leq k} |I(x,k) - I(x,2k)| > k^{-\delta}$ alors $|I(x_i,k) - I(x_i,2k)| > k^{-\delta} - k^{-1} > k^{-\gamma}$. D'où $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ pour k assez grand.

On en déduit que :

$$P\left(\left[\sup_{|x|\leq k} |I(x,k) - I(x,2k)| > k^{-\delta}\right]\right) << k^4 . k^{-L} = k^{4-L} = k^{-L'} \quad \text{pour} \quad \delta>0 \ \text{et} \ L' > 0.$$

Prenant alors $k = 2^j$; le lemme de Borel-Cantelli assure que :

p. s., $\exists j_o \,|\, (\forall j \geq j_o) \quad \sup_{|x|\leq 2^j} |I(x,2^j) - I(x,2^{j+1})| \leq 2^{-\delta j}$.

Et donc, pour $j \geq j_o$ et $i > 0$:

$$\sup_{|x|\geq 2^j} |I(x,2^j) - I(x,2^{j+1})| \leq 2^{-\delta j} + 2^{-\delta(j+1)} + \ldots + 2^{-\delta(j+i-1)} \leq C.2^{-\delta j},$$

où C est une constante indépendante de j et i.

Donc, presque sûrement : $\lim\limits_{\substack{j\to+\infty \\ i\to+\infty}} \left(\sup_{|x|\leq 2^j} |I(x,2^j) - I(x,2^{j+i})| \right) = 0$. Comme $\{x \,;\, |x|\leq 2^j\}$ contient tout compact donné à l'avance, pour j assez grand, la suite $I(x,2^j)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact. Il existe donc une sous-suite de $I(x,k)$ convergeant uniformément sur tout compact, avec la probabilité 1. Ceci termine la démonstration.

Références

[1] BURKHOLDER, D. Martingale transforms. Ann. Math. Stat. 37 (1966), 1494-1504.

[2] Distribution function inequalities for martingales. Ann. Prob. 1 (1973), 19-42.

[3] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Heath Mathematical Monographs ; Lexington, Mass., 1968.

[4] KAUFMAN, R. A metric property of some random functions. Bull. Soc. Math. France 99 (1971), 241-245.

Everywhere divergent Fourier series

T. W. Körner
Trinity Hall, Cambridge

ABSTRACT.- We give an exposition of Kolmogorov's theorem using an idea of Stein and Kahane. The material covered corresponds to pages 305 to 314 of Zygmund's treatise on trigonometric series (volume I).

INTRODUCTION. We write $\mathbf{T} = R/2\pi\mathbf{Z}$ for the unit circle considered as the real line with $t+2\pi$ identified with t. If μ is a measure on $\mathbf{T}$ we write $\hat{\mu}(r) = \int_{\mathbf{T}} \exp(-irx)\, d\mu(x)$ and $S_n(\mu, t) = \sum_{r=-n}^{n} \hat{\mu}(r)\exp(irt)$. If $f \in L^1(\mathbf{T})$ (i. e. if f is Lebesgue integrable on $\mathbf{T}$) we write $\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} \exp(-irx)\, dx$, $S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \hat{f}(r)\exp(irt)$ Carleson has shown [1] that if $f \in L^2(\mathbf{T})$ then $S_n(f, \ ) \to f$ almost everywhere with respect to Lebesgue measure. On the other hand we have the famous theorem of Kolmogorof.

THEOREM A. <u>There exists an</u> $f \in L^1(\mathbf{T})$ <u>such that</u> $S_n(f, \ )$ <u>diverges unboundedly everywhere</u>.

The purpose of this paper is to give a proof of this and related results. The basic idea remains that of Kolmogorov but the exposition is simplified by using modern notation and by using a number theoretic result of Kronecker. The idea of using this occured to Stein and Kahane independently ([7], [3]). We add a further simplification (as compared say to the presentation of these ideas by Katznelson [5] Chapter 2) by using Lemma 1.2.

This is the only originality claimed.

INDEPENDENCE. In this section we lay out the simple number theoretic results that we need.

DEFINITION 1.1. We say that $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{T}$ are independent if $\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = 0$ with $m_j \in \mathbf{Z}$ $[1 \le j \le n]$ only has the solution $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$.

Thus for example $1+\pi, 1$ are not independent since $2(1+\pi) + (-2).1 = 0$.

Independence is not presented under translation but, on the other hand, translation cannot introduce more than one relation.

LEMMA 1.2. <u>Suppose</u> $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{T}$ <u>are independent and</u> $t \in \mathbf{T}$. <u>Then if</u> $\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - t) = 0$, $\sum_{j=1}^{n} m_j'(x_j - t) = 0$ <u>with</u> $m_j, m_j' \in \mathbf{Z}$ $[1 \le j \le n]$ <u>we can find</u> $k, \ell \in \mathbf{Z}$ <u>not both zero with</u> $km_j = \ell m_j'$.

Proof. If $\sum_{j=1}^{n} m_j = 0$ then $\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - t) = 0$ gives $\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = 0$ so that $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$ and the result follows with $k = 1$, $\ell = 0$. Thus we may assume that $\sum_{j=1}^{n} m_j \ne 0$. Set $k = \sum_{j=1}^{n} m_j'$, $\ell = \sum_{j=1}^{n} m_j$. then

$$\sum_{j=1}^{n} (km_j - \ell m_j')\, x_j = k \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - t) - \ell \sum_{j=1}^{n} m_j'(x_j - t) = 0$$

and so $km_j - \ell m_j' = 0$ $[1 \le j \le n]$ as stated.

The basic result on independence that we need is due to Kronecker.

THEOREM 1.3. <u>Suppose</u> $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{T}$ <u>are independent. Then given</u> $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ <u>with</u> $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_n| = 1$ <u>and</u> $\varepsilon > 0$ <u>we can find</u>

$m \in \mathbf{Z}$ with

$$|\exp imx_j - \lambda_j| < \varepsilon \qquad [1 \leq j \leq n].$$

This result is intuitively plausible. Suppose we have several clocks running at different speeds and we observe them once every second. Then unless there is some simple relationship between the speeds (one clock is stopped or one clock runs exactly twice as fast as another and so on) we should expect to see every possible configuration (one clock showing 3.15, the next 4.35, the next 4.37 and so) eventually approached arbitrarily closely. Hardy and Wright give a discussion of the theorem together with three different proofs in Chapter XXIII of [2].

As a trivial consequence we have the following corollary.

LEMMA 1.4. _Suppose_ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{T}$ _are independent. Then given_ $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ _with_ τ_j _taking the value_ ± 1, _and given_ $\varepsilon > 0$ _we can find an_ $m \in \mathbf{Z}$ _with_

$$|\sin(m+\tfrac{1}{2})\, x_j - \tau_j| < \varepsilon \qquad [1 \leq j \leq n].$$

Proof. Take $\lambda_j = \tau_j\, i \exp(-\frac{1}{2} i x_j)$ in Theorem 1.3.

Finally we need to know that we can always find enough independent points. This is easy to show.

LEMMA 1.5. _Suppose_ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ _are open intervals in_ $\mathbf{T}$. _Then we can find independent points_ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ _with_ $x_j \in I_j$ $[1 \leq j \leq n]$.

Proof. Pick rational numbers $q_1, q_2, \ldots, q_n$ such that $2\pi q_j \in I_j$ and a transcendental number γ. Then if N is a positive integer the points $x_j = 2\pi(q_j + \gamma^j N^{-1})$

are certainly independent and, provided we take N large enough, the $x_j \in I_j$ $[1 \leq j \leq n]$.

2. <u>The Basic Measure</u>. Let us choose $n \geq 10^6$ and $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{T}$ independent points such that x_j is close to $2\pi j/n$; to be more precise,

$$|x_j - 2\pi j/n| \leq \varepsilon(n)$$

where $0 < \varepsilon(n) \leq 10^{-4}n^{-1}$ (later we may require $n\varepsilon(n) \to 0$ at some particular speed as $n \to \infty$ but for the proof of Theorem A the reader can take $\varepsilon(n) = 10^{-4}n^{-1}$). If δ_{x_j} is the Dirac unit point mass at x_j then

$$\hat{\delta}_{x_j}(r) = \exp(-irx_j)$$

and $S_m(\delta_{x_j}, t) = \sum_{-m}^{m} \exp(ir(t-x_j)) = \dfrac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin\frac{1}{2}(t-x_j)}$ where, $\dfrac{\sin(m+\frac{1}{2})\,s}{\sin\frac{1}{2}\,s}$ has the value $2m+1$ when $s = 0$.

We define our basic measure to be $\mu = n^{-1} \sum_{r=1}^{n} \delta_{x_j}$. We note at once that $\|\mu\| = 1$ and that μ is a positive measure. Further

$$S_m(\mu, t) = n^{-1} \sum_{r=1}^{n} S_m(\delta_{x_j}, t)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin\frac{1}{2}(t-x_j)} \qquad (*).$$

How large is $S_m(\mu, t)$? Observe that since $|\sin x| \leq |x|$ for $|x| \leq \pi/2$ we have $|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|^{-1} \geq 2\,|t-x_j|^{-1}$. Moreover since the x_j are more or less uniformly distributed round $\mathbb{T}$ so are the $t - x_j$. In particular if we choose $j(0)$ so that $|t - x_{j(0)}| \leq |t - x_j|$ $[1 \leq j \leq n]$ then $|t - x_{j(0)+1}|$, $|t - x_{j(0)-1}| \leq 4\pi/n$,

$|t - x_{j(0)+2}|$, $|t - x_{j(0)-2}| \leq 6\pi/n$ and, in general,

$|t - x_{j(0)+r}|$, $|t - x_{j(0)-r}| \leq (2r+2)\,\pi/n$ $\left[1 \leq r \leq \frac{n-2}{2}\right]$ (making the obvious convention that $x_{j+n} = x_j$). Thus

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}(t-x_j)|} \geq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq r \leq (n-2)/2} \frac{2n}{(2r+2)\,\pi}$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \sum_{2 \leq r \leq n/2} \frac{1}{r} \geq \frac{\log n}{5}\,.$$

In other words, if we can choose m so that there is no cancelation in our formula (*) for $S_m(\mu, t)$ we can get $|S_m(\mu, t)|$ of the order of $\log n$. Choosing the x_j to be independent ensures that we can always do this.

LEMMA 2.1. <u>If</u> μ <u>is chosen as above then</u>

$$\sup_{m \in \mathbf{Z}} |S_m(\mu, t)| \geq 10^{-1} \log n \quad \underline{\text{for all}} \quad t \in \mathbf{T}.$$

Proof. There are 4 possible cases to consider of which the first may be considered typical.

<u>CASE 1</u>. All the (x_j-t) are independent. Then by Lemma 1.4 we can find an m such that

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin \frac{1}{2}(t-x_j)} \geq \frac{2}{3\,|\sin \frac{1}{2}(t - x_j)|} \qquad \text{for all } j$$

<u>CASE 2</u>. There exist $m_1, m_2, \ldots, m_n$ integers of which at least 2 are non zero such that $\Sigma\, m_j(x_j-t) = 0$. Choose $j(0)$ to be a j with $m_j \neq 0$ for which $|x_j - t|$ is greatest. Then $|x_{j(0)}-t| > \pi/2n$ and so (since $|\sin x| \geq 2|x|/\pi$ for $|x| \leq \pi/2$) $|\sin \frac{1}{2}(t - x_{j(0)})|^{-1} \leq 4n/\pi$. But, by Lemma 1.1, the points x_j-t with $j \neq j(0)$ must be independent and so we can find an m such that

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin\frac{1}{2}(t-x_j)} \geq \frac{2}{3\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} \quad \text{for all} \quad j \neq j(0) \quad \text{and so}$$

$$S_m(\mu,t) \geq \frac{1}{n}\sum_{j\neq j(0)} \frac{2}{3}\frac{1}{|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} - \frac{1}{n\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_{j(0)})|} \geq \frac{2}{3n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} - \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{\pi} \geq 10^{-1}\log n$$

CASE 3. There exists a $j(0)$ such that $m_o(x_{j(0)}-t) = 0$ for some $m_o \neq 0$ but $x_{j(0)}-t \neq 0$. Then, by Lemma 1.1, the points x_j-t and so also the points $m_o(x_j-t)$ with $j \neq j(0)$ must be independent. Thus by Theorem 1.3 we can find an integer q with $\dfrac{\sin(m_oq+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin\frac{1}{2}(t-x_j)} \geq \dfrac{2}{3\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|}$ for all $j \neq j(0)$. Then

$$S_{m_oq}(\mu,t) = \frac{1}{n}\sum_{j\neq j(0)} \frac{2}{3\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} + \frac{1}{n} \geq 10^{-1}\log n.$$

CASE 4. There exists a $j(0)$ such that $x_{j(0)} - t = 0$. Once again the points $x_j - t$ with $j \neq j(0)$ are independent and we can find an m such that

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x_j)}{\sin\frac{1}{2}(t-x_j)} \geq \frac{2}{3\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} \quad \text{for all} \quad j \neq j(0). \quad \text{We have} \quad S_m(\mu,t) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j\neq j(0)} \frac{2}{3\,|\sin\frac{1}{2}(t-x_j)|} + \frac{2m+1}{n} \geq 10^{-1}\log n.$$

Since the 4 cases are exhaustive the lemma is proved.

3. The Basic Function. The contents of this section are routine third year undergraduate analysis. Proofs are given for completeness but it is unlikely that the reader will need to consult them.

LEMMA 3.1. *If μ is as in section 2 then we can find an M such that*

$$\sup_{|m|\leq M} S_m(\mu,t) \geq 20^{-1}\log n \qquad \text{for all} \quad t\in\mathbb{T}.$$

Proof. For each $t \in \mathbb{T}$ we can find an $m(t)$ such that $S_{m(t)}(\mu, t) \geq 15^{-1} \log n$. Since $S_{m(t)}(\mu, t)$ is a trigonometric polynomial and so a continuous function we can find an $\eta(t) > 0$ such that $S_{m(t)}(\mu, s) \geq 20^{-1} \log n$ for all $s \in (t-\eta(t), t+\eta(t))$. Since $\mathbb{T}$ is compact we can find $t_1, t_2, \ldots, t_r$ such that $\bigcup_{k=1}^{r} (t_k - \eta(t_k), t_k + \eta(t_k)) = \mathbb{T}$. Setting $M = \max_{1 \leq k \leq r} |m(k)|$ we have the result.

Now we approximate our measure by a function.

LEMMA 3.2. There exists an infinitely differentiable positive function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ such that

(i) $\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left[2\pi j/n - 2\varepsilon(n) \,,\, 2\pi j/n + 2\varepsilon(n)\right]$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{2\pi j/n - 2\varepsilon(n)}^{2\pi j/n + 2\varepsilon(n)} f(t)\, dt = \dfrac{1}{n}$

(iii) $\sup_{|m| \leq M} |S_m(f, t)| \geq 40^{-1} \log n$.

Proof. Let $h_r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ be an infinitely differentiable positive function such that

$(i)_r$ $\operatorname{supp} h_r \subseteq [-\pi/r \,,\, \pi/r]$

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi/r}^{\pi/r} h_r(t)\, dt = 1$.

Direct calculation shows that $\hat{h}_r(m) \to 1 = \hat{\delta}_0(m)$ and thus, writing $f_r(t) = \mu * h_r(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} h_r(t - x_j)$, $\hat{f}_r(m) \to \hat{\mu}(m)$ as $r \to \infty$ for each fixed m. Thus $S_m(f_r, \ ) \to S_m(\mu, \ )$ uniformly as $r \to \infty$ for each fixed m. Moreover $\operatorname{supp} f_r \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} [x_j - \pi/r \,,\, x_j + \pi/r]$ and $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{x_j - \pi/n}^{x_j + \pi/n} f(t)\, dt = \dfrac{1}{n}$ so the result follows on taking r large enough and setting $f = f_r$.

Finally we approximate our function by a trigonometric polynomial.

LEMMA 3.3. <u>There exists a trigonometric polynomial</u> P <u>given by</u> $P(t) = \sum_{r=-N}^{N} a_r \exp irt$ $[t \in \mathbf{T}]$ <u>say such that</u>

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |P(t)|\,dt \leq 2$

(ii) $\sup_{|m| \leq N} |S_m(P,t)| \geq 40^{-1} \log n.$

Proof. Since the f of Lemma 3.2 is infinitely differentiable we may integrate twice by parts to obtain $|\hat{f}(m)| \leq Am^{-1}$ $[m \neq 0]$ where $A = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f''(t)|\,dt$. In particular we may find an $N \geq M$ such that $\sum_{|m|>N} |\hat{f}(m)| \leq 1$. The Weierstrass M test now tells us that $\sum_{|m|>N} \hat{f}(m) \exp imt$ converges uniformly to a continuous function g. Using uniform convergence we obtain at once $\hat{g}(m) = \hat{f}(m)$ for $|m| > N$, $\hat{g}(m) = 0$ for $|m| \leq N$ and $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(t)|\,dt \leq \sum_{|m|>N} |\hat{f}(m)| \leq 1$.

Set $P(t) = \sum_{r=-N}^{N} \hat{f}(r) \exp irt$. Then P is a trigonometric polynomial and $\hat{P}(m) = \hat{f}(m)$ for $|m| \leq N$, $\hat{P}(m) = 0$ for $|m| > N$. In particular $S_m(P,t) = S_m(f,t)$ for $|m| \leq N$ so (ii) follows from Lemma 3.2 (iii). Since $(P+g)\hat{}\,(m) = \hat{f}(m)$ for all m it follows by the uniqueness theorem for continuous functions that $P+g = f$. Thus $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |P(t)|\,dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(t)|\,dt \leq 2$ and (i) holds.

4. <u>The proof of Kolmogorov's Theorem</u>. We can now prove Kolmogorof's Theorem by the condensation of singularities. The proof, in fact, gives slightly more.

THEOREM A.1. <u>There exists an</u> $f \in L^1(\mathbf{T})$ <u>such that</u> $\hat{f}(r) = 0$ <u>for</u> $r < 0$ <u>and such that</u> $S_n(f, \ )$ <u>diverges unboundedly everywhere</u>.

Proof. By Lemma 3.3 we can find trigonometric polynomials P_k and integers $N(k)$ such that

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} |P_k(t)|\, dt \leq 2$

(ii) $\sup_{|m|\leq N(k)} |S_m(P_k,t)| \geq 2^{2k}$ for all $t \in \mathbf{T}$

(iii) $\hat{P}_k(r) = 0$ for $|r| > N(k)$.

Set $M(k) = (N(k)+1) + 2\sum_{q=1}^{k-1}(N(q)+1)$ and write $Q_k(t) = \exp(iM(k)t)\, P_k(t)$. Then

(i)' $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} |Q_k(t)|\, dt \leq 2$

and since $S_m(Q_k,t) = \exp(iM(k)t)\, S_{m-M(k)}(P_k,t)$ $[m \geq M(k)]$ we have

(ii)' $\sup_{m,n\geq 0} |S_m(Q_k,t) - S_n(Q_k,t)| \geq \sup_{m\geq 0} |S_m(P_k,t)| \geq 2^{2k}$.

Automatically

(iii)' $\hat{Q}_k(r) = 0$ for $|r - M(k)| \geq N(k) + 1$.

Now observe that since L^1 is complete $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} Q_k$ converges in L^1 to f say and $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|Q_k|$ to ψ say. Since $|\psi(t)| \geq |\sum_{k=1}^{r'} 2^{-k} Q_k(t)|$ almost everywhere we can use the dominated convergence theorem of Lebesgue to show that

$\hat{f}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\hat{Q}_k(r)$ and so

(iv) $\hat{f}(r) = 2^{-k}\hat{Q}_k(r)$ for $|r - M(k)| \leq N(k)$ $[k \geq 1]$

and $\hat{f}(r) = 0$ otherwise.

Thus $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$ and

$$\sup_{m,n\geq 0} |S_m(f,t) - S_n(f,t)| \geq \sup_{M(k)+N(k)\geq m,\, n\geq M(k)-N(k)} |S_m(Q_k,t) - S_n(Q_k,t)|$$

$$\geq 2^{-k} \sup_{m\geq 0} |S_m(P_k,t)|$$

$$\geq 2^k \quad \text{for all} \quad k \geq 0.$$

Thus $S_m(f,t)$ diverges unboundedly for all $t \in \mathbf{T}$.

5. Further Remarks on Kolmogorov's Theorem. This section contains remarks of more specialised interest and should be omitted by the general reader.

REMARK 1. Minor variations of the condensation method used in Section 4 yield minor variations of the theorem.

THEOREM A.2. There exists a real function $f \in L^1(\mathbf{T})$ such that $S_n(f, \ )$ diverges everywhere.

Proof. Checking through the work of Section 3 we see that the P of Lemma 3.3 is, in fact, real. Thus proceding inductively we can find real trigonometric polynomials P_k and a strictly increasing sequence of positive integers $N(k)$ such that (writing $N(0) = 1$)

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |P_k(t)| \leq 2$

(ii) $\sup_{|m| \leq N(k)} |S_m(P_k,t)| \geq 2^{4k+1}(N(k-1)+1)(1+ \sum_{\ell=1}^{k-1} \sup_{|m|\leq N(\ell)} \sup_{t\in\mathbf{T}} |S_m(P_\ell,t)|)$

(iii) $\hat{P}_k(r) = 0$ for $|r| > N(k)$.

Note that condition (i) implies $|\hat{P}_k(m)| \leq 2$ and so $|S_m(P_k,t)| \leq 2m+1 \leq 2N(k-1)+1$ for $|m| \leq N(k-1)$. Simple computation shows that $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k-1}(N(k-1)+1)\, P_k$ converges in L^1 to a real function f such that $\limsup_{m\to\infty} |S_m(f,t)| = \infty$ for all $t \in \mathbf{T}$.

REMARK 2. Our calculations do not tell us how fast $S_n(f, \ )$ diverges. Indeed if the $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are chosen arbitrarily then no bound can be put on the N of Lemma 3.3. However if we take $x_j = 2\pi(100^{-j} + j/n)$ $[1 \le j \le n]$ (though now the x_j are not strictly speaking independent but only "almost independent") we can show using the quantitative version of Kronecker's theorem given in Appendix V of Kahane and Salem [4] (or borehanded methods) and the arguments of section 3 that the following is true.

LEMMA 2.1'. <u>With the</u> x_j <u>chosen as in the paragraph above we have</u>
$\sup\left\{|S_m(\mu, t)| : |m| \le 100^n\right\} \ge 10^{-1}\log n$ for all $t \in \mathbf{T}$.

Next examining the approximations to the δ function we get the following result.

LEMMA 3.2'. <u>There exists an infinitely differentiable positive function</u> $f : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ <u>such that</u>

(i) $0 \le f(t) \le 100^{n+2}$

(ii) $\int_{\mathbf{T}} f(t)\, dt = 1$

(iii) $\sup\left\{|S_m(f, t)| : |m| \le 100^n\right\} \ge 40^{-1}\log n.$

This can be trivially rewritten as

LEMMA 3.2". <u>There exists an infinitely differentiable positive function</u> $f : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ <u>such that</u>

(i) $0 \le f(t) \le N$

(ii) $\int_{\mathbf{T}} f(t)\, dt = 1$

(iii) $\sup\left\{|S_m(f, t)| : |m| \le N\right\} \ge 10^{-6} \log\log N.$

The argument of section 4 and the first remark of this section give

LEMMA 5.1. If $\psi(n) = O(\log\log n)$ as $n \to \infty$ then we can find an $f \in L^1(\mathbf{T})$ (which may be taken to be real or to have $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$) such that

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{|S_m(f,t)|}{\psi(m)} = \infty \qquad \text{for all} \quad t \in \mathbf{T}.$$

LEMMA 5.2. If $\psi(x) = O(\log\log x)$ as $x \to \infty$ then we can find an $f \in L^1(\mathbf{T})$ (which may be taken to be real or to have $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$) such that

$$\int_{\mathbf{T}} |f(t)|\ \psi(|f(t)|)\, dt < \infty$$

but $\limsup_{m\to\infty} |S_m(f,t)| = \infty$ for all $t \in \mathbf{T}$.

We thus recover the results of Tandori [8].

It is known (by a remark of Carleson expanded by Sjölin [6]) that $\psi(n) = O(\log\log n)$ cannot be replaced by $\psi(n) = O(\log n \log\log n)$. Better results are claimed by M. and S. Izumi but these are still controversial.

REMARK 3. By direct construction of suitable x_j with $|x_j - 2\pi j/n| \le 10^{-4}/n$ $[1 \le j \le n]$ we can prove the following result.

LEMMA 5.3. Suppose $m(1), m(2), \ldots$ is a sequence of positive integers with $m(r) \to \infty$. Then given $p \ge 1$ an integer we can find $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and a collection of positive integers; $s(1), s(2), \ldots, s(nP)$ with $m(s(r+1)) > 10m(s(r))$ such that $\mu = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}$ has the following property. If $(j-1)p+1 \le s \le jp$ then

$$|S_{m(r(s))}(\mu, t)| \ge 40^{-1} \log n$$

whenever $t \in [x_{j-1}, x_j]$, $|t - 2\pi u/m(r(s))| \le (10^4\, m(r(s)))^{-1}$ for some integer u.

(Here, as usual, $x_0 = x_n$).

Repeating with minor modifications the construction used in the first remark of this section we get a version of another theorem of Kolmogorof.

THEOREM 5.4. Given a sequence of positive integers $m(r) \to \infty$ we can find a real function $f \in L^1(\mathbb{T})$ such that $\limsup_{r\to\infty} S_{m(r)}(f,t) = \infty$ for almost all $t \in \mathbb{T}$.

It can be shown that if $m(r+1) \geq \lambda m(r)$ for all $r \geq 1$ and some $\lambda > 1$ then if $f \in L^1(\mathbb{T})$ and $\hat{f}(k) = 0$ for all $k < 0$ it follows that $S_{m(r)}(f,t)$ converges almost everywhere [9] Chap. XV § 4. It is also not very difficult to show that, provided $m(r) \to \infty$ sufficiently fast then if $f \in L^1(\mathbb{T})$ is a real function we canfind an $x \in \mathbb{T}$ such that $S_{m(r)}(f,x)$ converges as $r \to \infty$.

6. Bounded Divergence. A Theorem of Marcinkiewicz. Let us look again at the basic function f of Lemma 3.2.

LEMMA 6.1. If $0 < n\,\varepsilon(n) \leq (\log n)^{-1}$ and $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is an infinitely differentiable positive function satisfying conditions (i) and (ii) of Lemma 3.2 then

(iv) $|S_m(f,t)| \leq 40 \log n$ provided only that $t \notin \bigcup_{j=1}^{n} [2\pi j/n - 4\varepsilon(n), 2\pi j/n - 4\varepsilon(n)]$

Proof.
$$\left|S_m(f,t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sum_{r=-m}^{m} \exp(ir(t-x))\, f(x)\, dx\right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\, f(x)\, dx\right|$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{2\pi j/n-2\varepsilon(n)}^{2\pi j/n+2\varepsilon(n)} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\, f(x)\, dx\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sup\left\{\left|\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right| : |x - 2\pi j/n| \leq 2\varepsilon(n)\right\}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sup\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{(t-x)} : |x - 2\pi j/n| \leq 2\varepsilon(n)\right\}$$

$$\leq \frac{\pi}{n}(2n \log n + 3 \sum_{0\leq r\leq n/2} \frac{n}{2r+1})$$

$$\leq 40 \log n$$

bearing in mind, first, that $|\sin t| \geq \frac{2t}{\pi}$ for $|t| \leq \pi/2$ and, second, that if we choose $j(0)$ so that $|t - 2\pi j(0)/n| \leq |t - 2\pi j/n|$ for $1 \leq j \leq n$ then $|t - 2\pi(j(0)+1)/n|$, $|t - 2\pi(j(0)-1)/n| \geq \pi/n$, $|t - 2\pi(j(0)+2)/n|$, $|t - 2\pi(j(0)-2)/n| \geq 3\pi/n$ and, in general $|t - 2\pi(j(0) + r)/n|$, $|t - 2\pi(j(0) - r)/n| \geq (2r-1)\pi/n$. Finally we note that if $|x - 2\pi j(0)/n| \leq 2\varepsilon(n)$ and $|t-2\pi j(0)/n| \geq 4\varepsilon(n)$ then $|x - t| \geq 2\varepsilon(n) \geq 2(n \log n)^{-1}$ which allows us to complete our estimate.

We can now sharpen Lemma 3.3 without further work.

LEMMA 6.2. <u>There exist a trigonometric polynomial</u> P <u>and a closed set</u> E <u>such that</u>

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} |P(t)|\,dt \leq 2$, $|P(t)| \leq 1$ for $t \notin E$

(ii) $\sup_{m\in\mathbf{Z}} |S_m(P,t)| \geq 40^{-1} \log n$

(iii) $\text{meas}(E) \leq 8n^{-1}\log n$

(iv) $50 \log n \geq |S_m(P,t)|$ for all $t \notin E$, $m\in\mathbf{Z}$.

Using this we get the remarkable theorem of Marcinkiewicz.

THEOREM B1. <u>There exists an</u> $f \in L^1(\mathbf{T})$ <u>such that</u> $\hat{f}(r) = 0$ <u>for</u> $r < 0$ <u>and such that</u> $S_r(f, \ )$ <u>diverges boundedly almost everywhere and diverges everywhere.</u>

Proof. By Lemma 6.2 we can find closed sets E_k, trigonometric polynomials P_k and integers $N(k)$ such that

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} |P_k(t)|\,dt \leq 2$, $|P_k(t)| \leq 1$ for $t \notin E_k$

(ii) $\sup_{|m|\leq N(k)} |S_m(P_k,t)| \geq 40^{-1}\,2^k$

(iii) $\hat{P}_k(r) = 0$ for $r > N(k)$

(iv) meas $E_k \leq 2^{-k}$

(v) $50.2^k \geq |S_m(P_k,t)|$ for all $t \notin E_k$, $m \in \mathbf{Z}$.

Set $M(k) = (N(k)+1) + 2\sum_{q=1}^{k-1}(N(q)+1)$ and write $Q_k(t) = \exp(iM(k)t)\,P_k(t)$.
As in the proof of Kolmogorov's theorem in Section 4 we see that $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} Q_k$ converges in L^1 to a function f such that

(vi) $\hat{f}(r) = 2^{-k}\hat{Q}_k(k)$ for $|r - M(k)| \leq N(k)$ $[k \geq 1]$

and $\hat{f}(r) = 0$ otherwise.

Now suppose $t \notin \sum_{k=p}^{\infty} E_k$. Then if $k \geq p$ we know from (i) and (vi) that

$$\begin{aligned}|S_{M(k)+N(k)}(f,t) - S_{M(k)-N(k)}(f,t)| &= 2^{-k}|Q_k(t)| \\ &= 2^{-k}|P_k(t)| \\ &\leq 2^{-k}\end{aligned}$$

whilst if $|r - M(k)| \leq N(k)$ we have from (i) and (v) by a silimar argument that

$$\begin{aligned}|S_r(f,t) - S_{M(k)-N(k)}(f,t)| &= \left|\sum_{s=M(k)-N(k)}^{r} \hat{Q}_k(s)\exp(ist)\right| \\ &= 2^{-k}\left|\sum_{s=-N(k)}^{r-M(k)} \hat{P}_k(s)\exp(ist)\right| \\ &= 2^{-k}\,2\sup_{|m|\leq N(k)} |S_m(P_k,t)| \\ &\leq 100.\end{aligned}$$

Thus $|S_r(f,t) - S_{M(p)-N(p)}(f,t)| \le 200 + \sum_{k=p}^{\infty} 2^{-k} \le 20|$ and $\limsup_{r\to\infty} |S_r(f,t)| < \infty$.

We have thus shown that if $t \notin E = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=p}^{\infty} E_k$ then $\limsup_{r\to\infty} |S_r(f,t)| < \infty$.

But $E \subseteq \bigcup_{k=p}^{\infty} E_k$ so by (iv) meas $E \le \sum_{k=p}^{\infty}$ meas $E_k \le 2^{-p+1}$ for all $p \ge 1$, i. e. meas $E = 0$.

Finally, just as in the proof of Kolmogorov's theorem (version Theorem A1) we note that $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$ and that

$$\sup_{m,n\ge q} |S_m(f,t) - S_n(f,t)| \ge \sup_{M(k)+N(k)\ge m,n\ge M(k)-N(k)} 2^{-k} |S_m(Q_k,t)-S_n(Q_k,t)|$$

$$\ge 2^{-k} \sup_{m\ge 0} |S_m(P_k,t)|$$

$$\ge 40^{-1},$$

for all k with $M(k) - N(k) \ge q$, so that $\limsup_{m,n\to\infty} |S_m(f,t) - S_n(f,t)| \ge 40^{-1}$ for all $t \in \mathbb{T}$ and $S_m(f, \ )$ diverges everywhere.

7. Further Remarks on Marcinkiewicz's theorem. This section, like Section 5, is devoted to remarks of more specialised interest and should be omitted by the general reader.

REMARK 1. Methods identical with those of Section 5 produce results corresponding to Theorem A2, Lemma 5.2 and Theorem 5.4.

THEOREM B2. There exists a real function $f \in L^1(\mathbb{T})$ such that $S_n(f, \ )$ diverges boundedly almost everywhere and diverges everywhere.

LEMMA 7.1. If ψ is a continuous positive function $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $\psi(x) = O(\log\log x)$ as $x \to \infty$ then we can find an $f \in L^1(\mathbb{T})$ (which may be taken to be real or to have $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$) such that

$$\int_{\mathbf{T}} |f(t)|\,\psi(|f(t)|)\,dt < \infty$$

but $S_n(f,\ )$ diverges boundedly almost everywhere and diverges everywhere.

LEMMA 7.2. Given a sequence of positive integers $m(r) \to \infty$ we can find a real function $f \in L^1(\mathbf{T})$ such that $S_{m(r)}(f,t)$ diverges for almost all t but $\sup_{m\geq 0} |S_m(f,t)| < \infty$ for almost all t.

REMARK 2. The estimates of Lemma 6.1 and Lemma 3.2 (the latter depending basically on the estimate of Lemma 2.1 can clearly be redefined without any difficulty.

LEMMA 7.3. Suppose we are given $\varepsilon(n), \varepsilon'(n) > 0$ with $n \log n\, \varepsilon(n) \leq 1$, $n \log n\, \varepsilon'(n) \to \infty$. Then we can find positive infinitely differentiable functions $f_n : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ and positive numbers $\delta(n) \to 0$ such that

(i) $\operatorname{supp} f_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left[2\pi j/n - 2\varepsilon(n)\,,\ 2\pi j/n + 2\varepsilon(n)\right]$

(ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi j/n-2\varepsilon(n)}^{2\pi j/n+2\varepsilon(n)} f(t)\,dt = 1 \qquad \left[j = 1, 2, \ldots, n\right]$

(iii) $\sup_{m\geq 0} |S_m(f,t)| \geq (1 - \delta(n)) \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2}\,dt$ for all $t \in \mathbf{T}$

(iv) $\sup_{m\leq 0} |S_m(f,t)| \leq (1 + \delta(n)) \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2}\,dt$

for all $t \notin \bigcup_{j=1}^{n} \left[2\pi j/n - 2\varepsilon'(n)\,,\ 2\pi j/n + 2\varepsilon'(n)\right]$.

From this version of Lemma 6.1 it is easy to get, by the methods of Section 6, the following quantitative version of Theorem B.

LEMMA 7.4. Let h be an increasing continuous function $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $h(0) = 0$ and $h(t) = 0(t \log t^{-1})$ as $t \to 0+$. Then we can find a set E of Hausdorff h-measure 0 and a function $f \in L^1(\mathbf{T})$ (which may be taken to be real or to have $\hat{f}(r) = 0$ for $r < 0$) such that

$$\limsup_{m,n\to\infty} |S_m(f,t) - S_n(f,t)| = 1 \quad \text{for all} \quad t \notin E$$

and $S_n(f, \ )$ diverges everywhere.

In the next and final section we will give an argument of Marcinkiewicz which shows that if $f \in L^1(\mathbf{T})$ diverges almost everywhere then it must diverge unboundedly on a set E' which is everywhere dense. It might, therefore, be interesting to investigate the Hausdorff dimension of this residual set E'.

8. A converse Theorem of Marcinkiewicz. We conclude this exposition by giving a slightly expanded version of Zygmund's account of Marcinkiewicz's elegant converse result.

THEOREM C. If $f \in L^1$ and $S_n(f, \ )$ diverges almost everywhere (with respect to Lebesgue measure) then $S_n(f, \ )$ diverges unboundedly on a dense subset of $\mathbf{T}$.

Thus we cannot improve Theorem B.

We require four results of which the first three are easy to prove but the last is still very difficult.

LEMMA 8.1. If $f_1, f_2, \ldots$ are continuous functions on T and we can find an open interval such that $\sup_j |f_j(x)| < \infty$ for each $x \in I$ then we can find an open interval $J \subset I$ and a $K > 0$ such that $|f_j(x)| < K$ for all $j \geq 1$, $x \in J$.

Proof. By Baire's category theorem at least one of the sets $E_n = \left\{x \in I : |f_j(x)| \leq n \text{ for all } j \geq 1\right\}$ must have non empty interior.

LEMMA 8.2. If $f \in L^1$ and $\limsup_{n\to\infty} |S_n(f,x)| \leq K$ for almost all $x \in I$ an interval then $|f(x)| \leq K$ for almost all $x \in I$.

Proof. Since $f \in L^1$ we know that the Cesaro sums

$$\sigma_n f = \frac{S_0 f + S_1 f + \ldots + S_n f}{n+1} \to f$$

almost everywhere ([5] p. 20 or [9] p. 90). The result follows

LEMMA 8.3 (Principle of localisation). If $f, g \in L^1$, $\varepsilon > 0$ and $f(t) = g(t)$ for almost all $t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ then $|S_n(f,x) - S_n(g,x)| \to 0$.

Proof. See [9] p. 52.

THEOREM 8.4. (Carleson). If $f \in L^2$ (and so in particular if $f \in L^\infty$) then $S_n(f, \ )$ converges almost everywhere to f.

Proof. See [1].

The proof of Theorem C is obtained by a simple application of these results.

Proof of Theorem C. Suppose $f \in L^1$ and that $S_n(f, \ )$ does not diverge unboundedly on a dense subset of $\mathbb{T}$, i. e. that we can find an open interval I such that $\sup_n |S_n(f,x)| < \infty$ for each $x \in I$. By Lemma 8.1 we can find a $K > 0$ and an open interval J such that $|S_n(f,x)| \leq K$ for each $n \geq 1$ and $x \in J$.

Define the characteristic function ξ_J of J by $\xi_J(t) = 1$ if $t \in J$, $\xi_J(t) = 0$ otherwise $g = \xi_J f$. By the Riemann localisation principle (Lemma 8.3) $S_n(g,t) \to 0$ for all t not in the closure of J and $\limsup_{n\to\infty} |S_n(g,t)| = \limsup_{n\to\infty} |S_n(f,t)| \leq K$ for all $t \in J$. But $g \in L^1$ so, by Lemma 8.2, $|g(t)| \leq K$ for almost all $t \in T$. Thus $g \in L^\infty$ and so by Carleson's theorem (Theorem 8.4) $S_n(g,\ ) \to g$ almost everywhere. Using the localisation principle once again we obtain $S_n(f,t) \to g(t) = f(t)$ for almost all $t \in J$. Thus f cannot diverge almost everywhere and the theorem is proved.

Bibliography

[1] CARLESON, L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[2] HARDY, G. H. and WRIGHT, E. M. An introduction to the theory of numbers. Oxford 1938.

[3] KAHANE, J.-P. Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires. Ann. Univ. Scient. Budapest, sect. Math. 3-4 (1960-1961), 101-108.

[4] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann 1963.

[5] KATZNELSON, Y. An introduction to harmonic analysis. Wiley 1968.

[6] SJOLIN, P. An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh-Fourier series. Ark. Mat. 7 (1969), 551-570.

[7] STEIN, E. M. On limits of sequences of operators. Ann. Math. 74 (1961), 140-170.

[8] TANDORI, K. Ein divergenzsatz für Fourierreihen. Acta Sci. Math. (Szeged) 30 (1969), 43-48.

[9] ZYGMUND, A. Trigonometric Series. 2nd ed., Cambridge 1959 (2 vol.).

LE THEOREME DES COMMUTATEURS DE CALDERON

par R. Coifman et Y. Meyer

THEOREME (Calderón). Soient $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $a = A' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$(1) \qquad g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{A(x) - A(y)}{(x-y)^2} f(y)\, dy$$

existe p. p. et

$$(2) \qquad \|g\|_2 \leq C \|a\|_\infty \|f\|_2 .$$

Nous nous proposons de donner une nouvelle preuve de ce résultat. La méthode employée donne des résultats plus précis dans le cas ci-dessus et permet de traiter le double commutateur $\int \frac{[A(x) - A(y)]^2}{(x-y)^3} f(y)\, dy$ ([1]).

Dans le théorème, a est la dérivée de A au sens des distributions.

La preuve sera décomposée en trois paragraphes.

§ 1. Pour a et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\|g\|_{4/3} \leq C \|a\|_2 \|f\|_4$.

§ 2. Pour a et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $p \in]1, +\infty[$ on a

$$\|g\|_p \leq C(p) \|a\|_\infty \|f\|_p .$$

§ 3. On montre la convergence de (1) et l'inégalité (2) sous les hypothèses du théorème.

§ 1. <u>Preuve de</u> $\|g\|_{4/3} \leq C\|a\|_2 \|f\|_4$ <u>lorsque</u> a <u>et</u> $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On va majorer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, g(x)$ lorsque $h \in \mathcal{D}$ vérifie $\|h\|_4 \leq 1$. En écrivant $A(y) - A(x) = \int_x^y a(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e(y-t) - e(x-t)\right] a(t)\, dt$ (où e est la fonction caractéristique de $\left[0,+\infty\right[$), il vient $I = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\, J(t)\, dt$ avec $J(t) = \iint \frac{e(y-t) - e(x-t)}{(x-y)^2} f(y)\, h(x)\, dy\, dx$. On définit le noyau $K(x,y) = \frac{e(y) - e(x)}{(y-x)^2}$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a $J(t) = \langle K(x-t\,,\, y-t)\,,\, h(x) f(y)\rangle$. Le noyau $K(x,y)$ a pour transformée de Fourier (au sens des distributions) $c\omega(u,v)$; c est une constante et $\omega(u,v)$ est la fonction homogène de degré 0 définie par $\omega(u,v) = \frac{u}{u+v} - \frac{1}{2}$ si $u \geq 0$, $v \geq 0$, $\omega(u,v) = -\frac{1}{2}$ si $u \leq 0$, $v \geq 0$ et $\omega(-u,-v) = -\omega(u,v)$.

On a donc, par transformées de Fourier,
$J(t) = c\iint e^{it(u+v)}\, \hat{f}(u)\, \hat{g}(v)\, \omega(u,v)\, du\, dv = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t)$; J_1 est l'intégrale étendue à $u \geq 0$, $v \geq 0$, J_2 concerne $u \leq 0$, $v \leq 0$ et J_3 comme J_4 porte sur le second ou le quatrième quadrant.

Remarquons que J_3 est trivial : $\omega(u,v) = -\frac{1}{2}$ implique $J_3(t) = cf_-(t)\, h_+(t)$ où

$$(f_-)^{\wedge} = \hat{f} \quad \text{si} \quad u \leq 0, \quad (\hat{f_-})(u) = 0 \quad \text{si} \quad u > 0$$

et de même pour h_+.

Essentiellement, f_- et h_+ sont les transformées de Hilbert de deux fonctions de L^4 et leur produit appartient à L^2. On a $\|J_3\|_2 \leq C\|f\|_4\, \|h\|_4$.

Nous allons montrer que $J_1(t) \in L^2$ et que $\|J_1\|_2 \leq C\|f\|_4\, \|h\|_4$. La même preuve sera valable pour J_2.

On a $J_1(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{it(u+v)} \hat{f}(u)\, h(v)\, \omega(u,v)\, du\, dv$. Posons

$$R_1(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+v}\right) e^{it(u+v)}\ \hat{f}(u)\, \hat{h}(v)\, du\, dv.$$

Le raisonnement fait pour J_3 montre que

$$\|J_1 - R_1\|_2 \leq C \|f\|_4\ \|h\|_4.$$

Il reste à majorer $\|R_1\|_2$.

On fait le changement de variables $u = u$, $s = u + v$. Il vient

$$R_1(t) = \int_0^\infty e^{its} \int_0^s \hat{h}(s-u)\, \hat{f}(u)\, \frac{u}{s}\, du = \int_0^\infty e^{its} \rho(s)\, ds \quad \text{où} \quad \rho(s) = \frac{1}{s}\int_0^s \hat{h}(s-u)\, \hat{f}(u)\, u\, du.$$

Il s'agit de montrer que

$$\|\rho\|_2 \leq C\ \|f\|_4\ \|h\|_4. \tag{3}$$

Pour cela, on appelle $\varphi(t)$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle si $t \geq 2$, égale à t si $0 \leq t \leq 1$. On a donc (transformation de Mellin)

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{i\gamma}\, \psi(\gamma)\, d\gamma \quad \text{où} \quad \psi \in \mathscr{S}(R).$$

Finalement, $\rho(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\gamma, s)\, \psi(\gamma)\, d\gamma$

où $\rho(\gamma, s) = s^{-i\gamma} \int_0^s \hat{h}(s-u)\, u^{i\gamma} \hat{f}(u)\, du = s^{-i\gamma}(\hat{h} * \hat{f}_\gamma)(s)$. On a posé $\hat{f}_\gamma(u) = u^{i\gamma}\, \hat{f}(u)$.

D'après le théorème de Marcinkiewicz ([2] p. 108),

$$\|f_\gamma\|_4 \leq C(1 + |\gamma|)\ \|f\|_4$$

et donc $\|\hat{h} * \hat{f}_\gamma\|_2 = \|h\, f_\gamma\|_2 \leq C(1 + |\gamma|)\|f\|_4\ \|h\|_4$. L'inégalité (3) résulte de $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\gamma|)\ |\psi(\gamma)|\, d\gamma < +\infty$. Dans cette démonstration, C et c désignent des constantes éventuellement différentes.

2. Méthodes réelles (a et $f \in \mathscr{D}(R)$).

Nous allons découper f en $f_1 + f_2$; f_2 habite loin de la singularité du noyau et l'intégrale correspondante est estimée en termes des fonctions maximales de a et de f (proposition ci-dessous).

Pour la partie f_1 qui vit près de la singularité, il faut tenir compte des compensations dues aux changements de signes du noyau, c'est-à-dire utiliser l'inégalité L^4 du § 1.

Nous poserons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathscr{C}_\varepsilon(a,f)(x) = \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{A(y)-A(x)}{(y-x)^2}\, f(y)\, dy$$

et $\mathscr{C}(a,f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{C}_\varepsilon(a,f)(x)$

$$\mathscr{C}^*(a,f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |\mathscr{C}_\varepsilon(a,f)(x)|.$$

D'autre part, pour toute fonction f localement dans L^p et tout $x\in\mathbb{R}$, nous poserons

$$(M_p f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> $x\in\mathbb{R}$, $\ell > 0$, I <u>l'intervalle</u> $[x\,,\,x+\ell]$ <u>et</u> J <u>l'intervalle</u> $[x-2\ell\,,\,x+2\ell]$.

<u>Pour tout</u> $f\in\mathscr{D}$, <u>soit</u> $f_2 = 0$ <u>sur</u> J, $f_2 = f$ <u>sur</u> J^c.

<u>Alors, pour toute fonction</u> $a\in\mathscr{D}$ <u>et pour tous les</u> $x\in I$, $x'\in I$ <u>et</u> $\xi\in I$, <u>on a</u>

(4) $$|\mathscr{C}(a,f_2)(x) - \mathscr{C}(a,f_2)(x')| \leq C(Ma)(\xi)(Mf)(\xi).$$

<u>De même, on a</u>

(5) $$|\mathscr{C}^*(a,f_2)(x) - \mathscr{C}^*(a,f_2)(x')| \leq C(Ma)(\xi)(Mf)(\xi).$$

Posons $k(x,y) = A(y)-A(x)/(y-x)^2$. En se servant de

$|A(t) - A(\xi)| \leq |t-\xi|(Ma)(\xi)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on obtient immédiatement, si $y\in J^c$,

(6) $$\left|k(x,y) - k(x',y)\right| \leq C \frac{\ell}{(y-x)^2} (Ma)(\xi).$$

On en déduit

$$\left|\int k(x,y)\, f_2(y)\, dy - \int k(x',y)\, f_2(y)\, dy\right| \leq C(Ma)(\xi)\ \ell \int_{J^c} \frac{|f(y)|}{(y-x)^2} dy \leq C'(Ma)(\xi)(Mf)(\xi).$$

La dernière inégalité est obtenue par le lemme

LEMME. Soient $f \in L^1_{loc}$ et φ une fonction à variations bornées. Supposons que $t\varphi(t)$ est nulle à l'infini et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, d|\varphi|(t) < +\infty$. Alors

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt\right| \leq 2\, (Mf)(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, d|\varphi|(t).$$

PROPOSITION 2. Avec les hypothèses a et $f \in \mathcal{D}(R)$, on a

(7) $$\mathcal{C}^*(a,f)(x) \leq C\left[M_{4/3}\left[\mathcal{C}(a,f)\right](x) + (M_2a)(x)(M_4f)(x)\right].$$

On applique la proposition 1 avec $\ell = \frac{\varepsilon}{2}$. Soit χ la fonction caractéristique de J. Il vient, x étant le centre de J,

(8) $$\mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x) = \mathcal{C}(a,f_2)(x) = \mathcal{C}(a,f_2)(x') + O(Ma)(x)(Mf)(x).$$

Or, si $x' \in I$,

$$\mathcal{C}(a,f_2)(x') = \mathcal{C}(a,f)(x') - \mathcal{C}(a,\chi f)(x') = \mathcal{C}(a,f)(x') - \mathcal{C}(\chi a\, ,\, \chi f)(x').$$

En prenant alors les normes $L^{4/3}$ du second membre de (8) pour la mesure $\frac{dx'}{|I|}$, on obtient

$$|\mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x)| \leq M_{4/3}\left[\mathcal{C}(a,f)\right](x) + \frac{1}{|I|^{3/4}} \|\mathcal{C}(\chi a, \chi f)\|_{4/3} + O(Ma)(x)(Mf)(x).$$

A ce moment, on utilise le § 1. On a donc

$$\|\mathscr{C}(\chi a\,,\,\chi f)\|_{4/3} \le \|\chi a\|_2\,\|\chi f\|_4 \le |I|^{3/4}(M_2a)(x)(M_4f)(x).$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que $Ma \le M_2a$ et $Mf \le M_4f$.

PROPOSITION 3.

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{Mes}\left\{x\ ;\ \mathscr{C}^*(a,f) \ge \lambda\right\} \le C\left(\frac{\|a\|_2\|f\|_4}{\lambda}\right)^{4/3}.$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.

PROPOSITION 4. <u>Pour</u> $0 < \gamma < \gamma_o$, <u>on a, pour tout</u> $\lambda > 0$,

$$\mathrm{Mes}\left\{x\ ;\mathscr{C}^*(a,f)(x) > 2\lambda\ ,\ (M_2a)(M_4f)(x) \le \gamma\lambda\right\} \le C\,\gamma^{4/3}\,\mathrm{Mes}\left\{x\ ;\ \mathscr{C}^*(a,f)(x) > \lambda\right\}.$$

Puisque $a,f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\left\{x\ ;\ \mathscr{C}^*(a,f)(x) > \lambda\right\} = \bigcup\limits_{k\ge 0} I_k$ où $I_k = \left]\alpha_k, \alpha_k+\delta_k\right[$ est un ouvert borné. On appelle J_k l'intervalle $|x - \alpha_k| \le 2\delta_k$ et χ_k la fonction caractéristique de J_k.

Il suffit de montrer que

$$\mathrm{Mes}\left\{x\in I_k\ ;\ \mathscr{C}^*(a,f) > 2\lambda\right\} \le C\,\gamma^{4/3}\,|I_k|$$

pour les I_k contenant un ξ tel que $(M_2a)(\xi)(M_4f)(\xi) \le \gamma\lambda$.

On décompose $f = f_1 + f_2$ comme dans la proposition 1. On a, grâce à la proposition 1,

$$|\mathscr{C}^*(a\,,\,f_2)(x) - \mathscr{C}^*(a\,,\,f_2)(\alpha_k)| \le C_2(Ma)(\xi)(Mf)(\xi).$$

Cela entraîne, pour tout $x \in I_k$,

$$|\mathscr{C}^*(a,f_2)(x)| \le |\mathscr{C}^*(a,f_2)(\alpha_k)| + C_2\,\gamma\lambda\,.$$

Mais α_k étant le centre de J_k, $|\mathscr{C}^*(a,f_2)(\alpha_k)| \le |\mathscr{C}^*(a,f)(\alpha_k)| \le \lambda$. Finalement $|\mathscr{C}^*(a,f_2)(x)| \le \lambda(1 + C_2\gamma)$ pour tout $x\in I_k$.

Montrons que si $\gamma \in \left]0, \gamma_o\right[$, on a $|\mathscr{C}^*(a, f_1)(x)| \leq \lambda(1 - C_2\gamma)$ sauf sur un ensemble de x de mesure au plus $C\gamma^{4/3}|I_k|$.

On a, en fait $\mathscr{C}^*(a, f_1)(x) = \mathscr{C}^*(\chi_k a\, , \chi_k f)(x)$. En appliquant la proposition 3, il vient

$$\text{Mes}\left\{x \; ; \; \mathscr{C}^*(\chi_k a\, , \chi_k f)(x) > \lambda(1 - C_2\gamma)\right\}$$

$$\leq C\left[\frac{\|\chi_k a\|_2 \|\chi_k f\|_4}{\lambda(1-C_2\gamma)}\right]^{4/3} \leq C|I_k|\left[\frac{(M_2 a)(\xi)(M_4 f)(\xi)}{\lambda(1-C_2\gamma)}\right]^{4/3}$$

$$\leq C' \gamma^{4/3}|I_k| \quad \text{si} \quad \gamma \leq \frac{1}{2C_2} = \gamma_o .$$

PROPOSITION 5. <u>Si</u> $a \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{D}$ <u>et</u> $p > 4$, <u>il existe</u> $C(p)$ <u>tel que</u>

$$(10) \qquad \|\mathscr{C}^*(a, f)\|_p \leq C(p)\, \|a\|_\infty \, \|f\|_p .$$

En effet, l'inégalité des bons λ fournit

$$\|\mathscr{C}^*(a, f)\|_p \leq C(p)\|(M_2 a)(M_4 f)\|_p \leq C(p)\|a\|_\infty \|M_4 f\|_p$$

et le théorème de Hardy-Littlewood permet alors de conclure.

PROPOSITION 6. <u>Pour tout</u> $p > 1$, <u>il existe</u> $C(p)$ <u>tel que</u>

$$\|\mathscr{C}(a, f)\|_p \leq C(p)\|a\|_\infty \|f\|_p .$$

En effet, pour $a \in \mathscr{D}$ vérifiant $\|a\|_\infty \leq 1$, on a $|k(x, y) - k(x', y)| \leq C\dfrac{|x-x'|}{|y-x|^2}$ quand $|y-x| \geq 2|x-x'|$. Ceci et (10) permet d'appliquer la méthode de Calderón-Zygmund (décomposition en une bonne et mauvaise fonction) à $\int k(x, y) f(y)dy$.

3. Existence de l'intégrale dans le cas général.

Revenant aux notations de la proposition 1, on a

$$(11)\qquad |\mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x)| \leq |\mathcal{C}(a,f)(x')| + |\mathcal{C}(a,f_1)(x')| + C(Ma)(x)\,(Mf)(x).$$

On suppose maintenant $\|a\|_\infty \leq 1$ et $\|f\|_2 \leq 1$. On veut alors majorer la norme L^2 de $\mathcal{C}^*(a,f)(x)$. Pour cela on fixe $p \in \left]1,2\right[$ et l'on calcule la norme L^p du second membre de (11) par rapport à la mesure $\frac{dx'}{|I|}$. Il vient

$$|\mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x)| \leq M_p\mathcal{C}(a,f)(x) + |I|^{-1/p}\|\mathcal{C}(a,f_1)\|_p + C(Ma)(x)(Mf)(x).$$

Pour majorer $|I|^{-1/p}\|\mathcal{C}(a,f_1)\|_p$ on utilise la proposition 6 ; il vient $|I|^{-1/p}C(p)\|a\|_\infty\|f_1\|_p \leq C(p)\|a\|_\infty(M_pf)(x)$. En prenant le sup en $\varepsilon > 0$, on a

$$|\mathcal{C}^*(a,f)(x)| \leq M_p\mathcal{C}(a,f)(x) + C'\|a\|_\infty(M_pf)(x).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $1 < p < q$ et $g \in L^q \Longrightarrow \|M_pg\|_q \leq C(p,q)\|g\|_q$. On prend dans notre cas $q = 2$ et l'on obtient

$$\|\mathcal{C}^*(a,f)\|_2 \leq C\|a\|_\infty\|f\|_2.$$

Nous revenons maintenant au cas $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ arbitraire et $f \in L^2(\mathbb{R})$ arbitraire.

Soit $a_j \in \mathcal{D}$, $f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $j \geq 0$, telles que $|a_j(x)| \leq \|a\|_\infty$, $a_j(x) \to a(x)$ p. p. $(j \to +\infty)$ et $\|f_j - f\|_2 \to 0$ $(j \to +\infty)$.

On vérifie sans peine que, dans ces conditions, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et tout $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\mathcal{C}_\varepsilon(a_j,f_j)(x) \longrightarrow \mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x) \qquad (j \to +\infty).$$

Donc $\sup\limits_{\varepsilon>0} |\mathcal{C}_\varepsilon(a,f)(x)| \leq \liminf\limits_{j\to+\infty} \sup\limits_{\varepsilon>0} |\mathcal{C}_\varepsilon(a_j,f_j)(x)|$ pour tout x fixé. Ou encore

$|\mathscr{C}^*(a,f)(x)| \leq \liminf_{j\to+\infty} |\mathscr{C}^*(a_j,f_j)(x)|$. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour avoir $\| \mathscr{C}^*(a,f)\|_2 \leq C\|a\|_\infty \|f\|_2$.

Les techniques usuelles permettent d'en déduire l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{C}_\varepsilon(a,f)(x)$. On peut remarquer que cette limite existe si a étant fixé, $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Car

$$\mathscr{C}_\varepsilon(a,f)(x) = - \left[\frac{A(x)-A(y)}{x-y} f(y)\right]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} - \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{A(x)-A(y)}{x-y} f'(y)\,dy +$$

$$\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{a(y)\,f(y)}{x-y}\,dy$$

(intégration par parties) et tous les termes ont des limites presque partout.

4. Un problème ouvert.

Soit $z(t)$ une fonction 2π périodique d'une variable réelle à valeurs complexes. Supposons que $z'(t)$ soit continue sur $\mathbb{R}$ et partout non nulle et que $t \to z(t)$ soit injective sur $[0\,,\,2\pi[$. Appelons Γ la courbe fermée, sans point double, paramétrée par $t \to z(t)$. Nous écrirons que $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ appartient à $L^p(\Gamma)$ si $(f \circ z)(t) \in L^p[0,2\pi]$.

Formons l'intégrale de Cauchy F de $f \in L^p(\Gamma)$: F est définie dans le domaine Δ limité par Γ par

$$(1) \qquad F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\ .$$

Le problème est d'étudier F au bord et de savoir si $F \in L^p(\Gamma)$.

Considérons la version "locale" de ce problème. A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on est ramené à étudier l'intégrale singulière

$$(2) \qquad G(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-t_0+A(t)-A(t_0)}\,dt$$

où $A' \in L^{\infty}$ et $\|A'\|_{\infty} \leq \frac{1}{4}$. La fonction $g(t)$ est le produit de $f(z(t))\, z'(t)$ par l'une des fonctions utilisées dans notre partition et en négligeant les constantes, $z(t)$ s'écrit localement comme la somme d'un terme linéaire et d'un terme d'erreur dont la dérivée est petite.

On écrit

$$\frac{1}{t - t_o + A(t) - A(t_o)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[A(t) - a(t_o)]^k}{(t-t_o)^{k+1}}$$

et notre problème se ramène à celui d'obtenir des théorème du type Calderón pour tous les $k \geq 0$. Le terme $k = 0$ donne dans (2) une transformée de Hilbert, $k = 1$ est le commutateur de Calderon, $k = 2$ est obtenu dans [1] et les termes $k \geq 3$ n'ont pas encore été étudiés.

[1] COIFMAN, R. and MEYER, Y. On commutators of singular integrals. (A paraître)

[2] STEIN, E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press 1970.

Rappels sur BMO

Soit Q_o un cube fixé de $\mathbb{R}^n$ et considérons le découpage dyadique de Q_o en cubes Q ; si le côté de Q_o est d, les côtés des 2^n cubes Q de la première génération seront $d/2$, les côtés des 4^n cubes de la seconde génération seront $d/4$ etc.

On pose pour tout $x \in Q_o$ et toute fonctions $f \in L^1(Q_o)$

(1) $$f^{\#}(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - \mathfrak{M}_Q f| \, dt$$

où le sup est pris sur tous les cubes dyadiques Q de la subdivision de Q_o qui contiennent x ; $\mathfrak{M}_Q f$ désigne la moyenne de f sur Q.

De même on pose

(2) $$f^{*}(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| \, dt.$$

On a, de façon évidente $f^{\#}(x) \leq 2f^{*}(x)$. Nous allons prouver que si $\int_{Q_o} f(t)dt = 0$, on a "presque" l'inégalité en sens inverse

THEOREME 1. Pour tout $p > 0$, il existe une constante $C(p) > 0$ telle que pour toute fonction continue $f : Q_o \to \mathbb{C}$ telle que $\int_{Q_o} f(t) \, dt = 0$, on ait

(3) $$\left(\int_{Q_o} (f^{*})^p \, dt\right)^{1/p} \leq c(p)\left(\int_{Q_o} (f^{\#})^p \, dt\right)^{1/p}.$$

La condition de continuité imposée à f a pour seul rôle de donner un sens aux deux membres de (3) pour tout $p > 0$. Elle peut être remplacée par $f^{\#} \in L^{\infty}(Q_o)$, par exemple.

La preuve du théorème repose sur l'inégalité des bons λ suivante.

PROPOSITION 1. <u>Pour tout</u> $\lambda > 0$ <u>et tout</u> $\gamma \in]0,1[$ <u>on a, si</u> $\int_{Q_o} f(t)\,dt = 0$,

$$(4) \qquad \left|\left\{x\in Q_o, f^* > (2^n+2)\lambda,\ f^{\#} \le \gamma\lambda\right\}\right| \le \gamma \left|\left\{x\in Q_o\ ,\ f^* > \lambda\right\}\right| .$$

Il est bien connu que (4) entraîne (3) et nous allons nous limiter à la preuve de (4).

Deux cas sont possibles.

a) Si $\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o} |f(t)|\,dt > \lambda$ et si, pour tout $x \in Q_o$, $f^{\#}(x) > \gamma\lambda$, alors le premier membre de (4) est nul et (4) est vérifié ; s'il existe un $\xi \in Q_o$ pour lequel $f^{\#}(\xi) \le \gamma\lambda$, on a, en particulier, $\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o} |f(t)|\,dt \le \gamma\lambda$ (car $\int_{Q_o} f(t)\,dt = 0$ et c'est la seule fois où intervient cette hypothèse). On applique à f^* l'inégalité de type faible (dont la preuve est triviale dans ce contexte). On obtient

$$\left|\left\{x\in Q_o\ ,\ f^* > (2^n+2)\lambda\right\}\right| \le \frac{\gamma\lambda}{(2^n+2)\lambda}\ |Q_o| < \gamma \left|\left\{x\in Q_o\ ,\ f^* > \lambda\right\}\right| \quad \text{car, pour tout}$$

$x\in Q_o$, on a $f^*(x) > \lambda$.

b) Si $\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o} |f(t)|\,dt \le \lambda$, on appelle Q_k, $k \ge 1$, les cubes maximaux de la subdivision dyadique pour lesquels on ait $\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(t)|\,dt > \lambda$. Pour chacun de ces cubes Q_k, de côté d_k, on appelle Q_k^* le cube de la subdivision dyadique de la précédente génération contenant Q_k (le côté de Q_k^* est $2d_k$ et Q_k^* existe grâce à $Q_k \neq Q_o$). Soit Ω la réunion des Q_k ; les Q_k ont des intérieurs disjoints car ils sont dyadiques et maximaux. Donc $|\Omega| = \sum_{k\ge 1} |Q_k|$ et enfin Ω est précisément l'ensemble des $x\in Q_o$

tels que $f^* > \lambda$. Si pour tout $x \in Q_k$, $f^{\#}(x) > \gamma\lambda$, cette valeur de k ne fournit pas de contribution au premier membre de (4) et nous pourrons nous limiter aux k tels qu'il existe un $\xi \in Q_k$ pour lequel $f^{\#}(\xi) \leq \gamma\lambda$. Appelons alors $E_k \subset Q_k$ l'ensemble des $x \in Q_k$ tels que $f^*(x) > (2^n + 2)\lambda$ et montrons que

(5) $$|E_k| \leq \gamma |Q_k|.$$

On appelle f_1 la fonction égale à f sur Q_k et à 0 ailleurs et l'on désigne par m la moyenne de f_1 sur Q_k ; enfin $f_2 = f - f_1$.

On a $\frac{1}{|Q_k^*|} \int_{Q_k^*} |f(t)| dt \leq \lambda$ ce qui entraîne $\int_{Q_k} |f(t)| dt \leq 2^n \lambda |Q_k|$ et, en particulier, $|m| \leq 2^n\lambda$. Par ailleurs, pour tout $x \in Q_k$ $f_2^*(x) \leq \lambda$. Enfin, on a $\gamma\lambda \geq f^{\#}(\xi) \geq \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(t) - m| dt$. L'inégalité $f^* \leq (f_1 - m)^* + |m| + f_2^*$ montre que E_k est contenu dans l'ensemble des $x \in Q_k$ tels que $(f_1 - m)^*(x) > \lambda$. L'inégalité de type faible donne alors (5).

Partons maintenant de la décomposition dyadique usuelle de $\mathbb{R}^n$ en cubes

(6) $$m_j 2^k \leq x_j < (m_j + 1)2^k, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et définissons $f^{\#}(x)$ et $f^*(x)$ à l'aide des formules (1) et (2) où Q décrit les cubes de la forme (6) contenant x. Alors la preuve du théorème 1 fournit l'inégalité

(7) $$\|f^*\|_p \leq C_p \|f^{\#}\|_p$$

pour tout $p > 0$; cette inégalité n'est plus vraie si $p = +\infty$ ce qui conduit à la définition de BMO.

DEFINITION. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. Nous dirons que $f \in BMO$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout cube Q de $\mathbb{R}^n$, on ait

(6) $$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - m_Q f| \, dt \leq C.$$

On définit alors $\|f\|_{BMO}$ comme la plus petite constante C telle que toutes les inégalités (6) soient vérifiées. On a alors

THEOREME 2. *Pour tout* $p \geq 1$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour toute fonction* $f \in BMO$, *on ait*

(7) $$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - m_Q f|^p \, dt \right)^{1/p} \leq C_p \|f\|_{BMO}.$$

La preuve de (7) est immédiate. On fixe Q que l'on appelle Q_o et l'on définit $F : Q_o \to \mathbb{C}$ par $F = f - m_Q f$; à F on applique (3).

Une dernière remarque importante pour ce qui suit est la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit* $K(x,y)$ *un moyen ayant les propriétés suivantes* :

i) *l'opérateur* T *défini par* $T(f)(x) = \int K(x,y) f(y) \, dy$ *est borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\|\nabla_x K(x,y)\| \leq C \|y-x\|^{-n-1}$.

Alors pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) = \int K(x,y) \varphi(y) \, dy$ *appartient à* BMO.

En fait ψ est mal définie car l'intégrale $\int K(x,y) \varphi(y) \, dy$ n'est pas nécessairement convergente. Mais l'espace BMO est défini modulo les fonctions constantes ; ainsi il est naturel de poser $\psi(x) = \int [K(x,y) - K(x_o,y)] \varphi(y) \, dy$ et l'arbitraire du point x_o n'a pas d'importance - l'intégrale écrite est convergente grâce à (ii).

Pour prouver la proposition 2, soit Q un cube, x_o son centre, Q^* le cube double de Q, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 est portée par Q^* et φ_2 est nulle sur Q^*. On a donc $\psi = \psi_1 + \psi_2$ et

$$\psi_1(x) = \int K(x,y)\, \varphi_1(y)\, dy$$

$$\psi_2(x) = \int \left[K(x,y) - K(x_o,y)\right] \varphi_2(y)\, dy.$$

Il en résulte que $\int_Q |\psi_1(x)|\, dx \leq |Q|^{1/2} \|\psi_1\|_2 \leq C\,|Q|\,\|\varphi\|_\infty$ grâce à (i). D'autre part pour tout $x \in Q$, $\quad |\psi_2(x)| \leq C \int_{Q_*^c} \frac{\|x-x_o\|\,\|\varphi\|_\infty}{\|x_o-y\|^{n+1}}\, dy \leq C_1$ et cela entraîne $\int_Q |\psi(x) - C_o|\, dx \leq C\,|Q|$ et donc $\psi \in BMO$.

Opérateurs de Calderón-Zygmund et BMO

R. Coifman

Soit $n \geq 1$ un entier, $K(x,y)$ un noyau défini sur le complémentaire de la "diagonale" $y = x$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et ayant les propriétés suivantes

(1) $K(x,y) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{2n} \setminus D)$

(2) pour tout y fixé, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} K(x,y) = 0$

(3) il existe $C > 0$ tel que $\|\nabla_x K(x,y)\| \leq \dfrac{C}{\|y-x\|^{n+1}}$ et $\|\nabla_y K\| \leq \dfrac{C}{\|y-x\|^{n+1}}$

(4) l'opérateur T défini par

$$T(f)(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy$$

envoie L^2 sur L^2.

THEOREME 1. Pour tout noyau K vérifiant les propriétés (1), (2), (3) et (4) et pour toute fonction $a \in BMO$, le commutateur $L = aT - Ta$ envoie L^2 dans L^2.

Remarque 1. La démonstration qui suit fournit aussi que L est borné sur L^p pour $1 < p < +\infty$.

Remarque 2. Le noyau $L(x,y)$ de L est $[a(x)-a(y)]\, K(x,y)$.

On désigne, dans les lemmes ci-dessous, par α un point de $\mathbb{R}^n$, par J un cube de centre α et par I un cube contenant α dont le diamètre ne dépasse pas le quart de celui de J. Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, f_1 désigne le produit de f et de la fonction caractéristique de J et $f = f_1 + f_2$. On désigne enfin par T^*f l'opérateur maximal associé à T et défini par

$(T^*f)(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \left| \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} K(x,y)\, f(y)\, dy \right|$ où $Q^c_{x,\varepsilon}$ est le complémentaire du cube de centre x et de côté ε.

Avec ces notations, on a

LEMME 1. <u>Pour tout</u> $x \in I$ <u>et tout</u> $\xi \in I$, <u>on a</u>

$$(5) \qquad |Tf_2(x)| \leq C\, T^*f(\xi) + Cf^*(\xi).$$

On a désigné par f^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood :

$f^*(\xi) = \sup\limits_{Q \ni \xi} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|\, dt.$

Pour prouver le lemme 1, on commence par majorer $|Tf_2(x) - Tf_2(\xi)|$ par $Cf^*(\xi)$ en utilisant (3). On remarque ensuite que $|Tf_2(\xi)| \leq T^*f(\xi) + Cf^*(\xi)$; le terme d'erreur provient de ce que J n'a pas pour centre ξ.

Pour énoncer le lemme 2, définissons, si $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la fonction maximale suivante

$$(6) \qquad b^{\#}(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(t) - m_Q b|\, dt$$

où Q parcourt les cubes contenant x et où $m_Q b$ est la moyenne de b sur Q.

LEMME 2. <u>Soient</u> $C > 0$, Q, Q', Q'' <u>des cubes tels que</u> $Q \subseteq Q''$, $Q' \subseteq Q''$, $|Q| \geq C|Q''|$, $|Q'| \geq C|Q''|$. <u>Alors</u> $|m_Q b - m_{Q'} b| \leq \frac{2}{C}\, b^{\#}(x)$ <u>pour tout</u> $x \in Q''$.

En effet $|m_Q b - m_{Q'} b| \leq |m_Q(b - m_{Q''} b)| + |m_{Q'}(b - m_{Q''} b)| \leq$

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q''} |b - m_{Q''}b|\,dt + \frac{1}{|Q'|}\int_{Q''} |b - m_{Q''}b|\,dt \leq \frac{2}{C}\, b^{\#}(x).$$

LEMME 3. Soit

$$L^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \left[m_I b - b(y)\right] K(x,y)\, f(y)\, dy \right|$$

où $Q_{x,\varepsilon}$ est le cube de centre x et de côté ε et où I est défini par

$x_j \leq y_j \leq x_j + \varepsilon/4$, $1 \leq j \leq n$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Alors si

$p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$|L^*(f)(x) > \lambda| \leq C \frac{\|b\|_p \|f\|_q}{\lambda}. \tag{7}$$

Preuve. On utilise l'inégalité triviale

$$L^*(f)(x) \leq b^*(x)(T^* f)(x) + T^*(bf).$$

Le premier terme est dans L^1 et le second dans L^1 faible avec un contrôle de normes.

LEMME 4. Avec les notations du lemme 3, on a

$$\Delta = \varepsilon \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \frac{|b(y) - m_I b|}{\|x-y\|^{n+1}} |f(y)|\,dy \leq C\, b^{\#}_p(x_o)\, M_q f(x_o)$$

lorsque $\|x - x_o\| \leq \varepsilon/4$; $Q_{x,\varepsilon}$ est le cube de centre x et de côté ε ;

$b^{\#}_p(x_o) = \sup_{Q \ni x_o} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b - m_Q b|^p\,dt\right)^{1/p}$ et enfin $(M_q f)(x_o) = \sup_{Q \ni x_o} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^q\,dt\right)^{1/q}$.

Preuve. En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\Delta \leq \left(\varepsilon \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \frac{|b(y) - m_I b|^p}{\|x-y\|^{n+1}}\,dy\right)^{1/p} \left(\varepsilon \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \frac{|f(y)|^q}{\|x-y\|^{n+1}}\,dy\right)^{1/q}.$$

Le second terme est dominé par $C(M_q f)(x_o)$. Pour le premier, on utilise un découpage dyadique de $Q^c_{x,\varepsilon}$ en $\bigcup_1^\infty E_k$ où E_k est défini par $E_k = I_k \setminus I_{k-1}$, I_k est le cube de centre x et de côté $2^k\varepsilon$. On a, par applications répétées du lemme 2,

$$|m_{I_k} b - m_{I_{k-1}} b| \leq Cb^{\#}(x_o), \qquad |m_{I_1} b - m_I b| \leq Cb^{\#}(x_o)$$

ce qui entraîne $|m_{I_k} b - m_I b| \leq C(k+1)b^{\#}(x_o)$ et donc, si $y \in E_k$

$$|b(y) - m_I b|^q \leq C_q |b(y) - m_{I_k} b|^q + C_q (k+1)^q (b^{\#}(x_o))^q.$$

De sorte que $$\int_{E_k} \frac{|b(y)-m_I b|^q}{\|x-y\|^{n+1}} dy \leq C_q (2^k\varepsilon)^{-n-1} \int_{I_k} |b(y) - m_{I_k} b|^q dy$$

$$+ C_q (2^k\varepsilon)^{-n-1} |E_k| (k+1)^q (b^{\#}(x_o))^q$$

$$\leq C_q (2^k\varepsilon)^{-1} (b^{\#}_q(x_o))^q + C_q (2^k\varepsilon)^{-1} (k+1)^q (b^{\#}(x_o))^q.$$

Finalement, en ajoutant les inégalités précédentes et en tenant compte de $b^{\#}(x_o) \leq b^{\#}_q(x_o)$, on obtient le lemme 4.

Définissons une fonction maximale $S(x)$ associée à $f \in BMO$ et $f \in L^q_{loc}$ par $S(x) = b^{\#}_p(x) \left[T^* f(x) + (M_q f)(x)\right]$. Nous allons maintenant nous limiter au cas où $f \in \mathcal{D}(R)$, où b est une fonction continue et où $K(x,y)$ est nul si $\|x-y\| \geq T$. Cette dernière condition pourra être assurée en tronquant K par multiplication avec $\theta(\frac{x-y}{T})$ où θ est une fonction fixée de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, égale à 1 au voisinage de 0. Cette troncation n'affecte pas les autres propriétés de K.

Dans ces conditions $L^*(f)$ est une fonction s. c. i. à support compact et pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble des x tels que $L^*(f)(x) > \lambda$ est un ouvert borné, de mesure finie.

PROPOSITION (inégalité des bons λ). Il existe un $C > 0$ et un $\gamma_o > 0$ tels que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si b est continue et si $K(x,y) = 0$ lorsque $\|x - y\| > T$, on ait pour tout $\lambda > 0$ et tout $\gamma \in \left]0, \gamma_o\right[$,

(8) $$\left|L^*(f)(x) > 2\lambda\,,\quad S(x) \leq \gamma\lambda\right| \leq C\gamma\,\left|L^*(f)(x) > \lambda\right|.$$

Appelons Ω l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $L^*(f) > \lambda$; Ω est un ouvert borné et à ce titre Ω est une réunion de cubes Q_k, d'intérieurs disjoints et tels que distance $(Q_k, \Omega^c) \leq 4\delta_k$, $\delta_k = \text{diam}\, Q_k$.

Appelons α_k un point, appartenant à Ω^c et tel que distance $(Q_k, \alpha_k) \leq 4\delta_k$ et appelons Q_k^* un cube de centre α_k et de côté $20\delta_k$.

Nous pouvons nous limiter aux k pour lesquels il existe un $\xi \in Q_k$ tel que $S(\xi) \leq \gamma\lambda$.

On appelle alors E_k l'ensemble des $x \in Q_k$ tels que $L^*(f) > 2\lambda$ et l'on se propose de prouver que $|E_k| \leq C\gamma\,|Q_k|$, qui par addition donnera (8).

Enfin on décompose f en $f_1 + f_2$ où f_1 est le produit de f et de la fonction caractéristique de Q_k^* ; f_2 est nulle sur Q_k^*. Nous allons prouver que, pour tout $x \in Q_k$

(9) $$L^*f(x) \leq \lambda + C\,\gamma\lambda + \mathcal{R}(x)$$

où, pour notre $\lambda > 0$ et tout $\beta > 0$

(10) $$\left|x \in Q_k\ ;\ \mathcal{R}(x) > \beta\lambda\right| \leq \frac{C\gamma}{\beta}\,|Q_k|.$$

Les inégalités (9) et (10) entraînent évidemment (8).

On a d'abord $f = f_1 + f_2$ et donc $L^*f \leq L^*f_1 + L^*f_2 = \mathcal{R}_1(x) + L^*f_2(x)$.

Posons de même $b_1(y) = (b(y) - m_{Q_k^*}b)\,\chi_{Q_k^*}(y)$. Alors si $x \in Q_k$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \left[m_I b - b(y)\right] K(x,y)\, f_1(y)\, dy = \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} \left[m_I b_1 - b_1(y)\right] K(x,y)\, f_1(y)\, dy.$$

(On a deux cas possibles : si $\varepsilon \leq 20\delta_k$ et $x \in Q_k$, $m_I b = m_I b_1$; si $\varepsilon > 20\delta_k$, les deux intégrales sont nulles).

On a donc $L^*(b,f_1)(x) = L^*(b_1,f_1)(x)$ si $x \in Q_k$; d'où $|x \in Q_k$, $L^*(f_1) > \beta\lambda$ $\leq \frac{C}{\beta\lambda}\|b_1\|_p \|f_1\|_q \leq \frac{C|Q_k|}{\beta\lambda} S(\xi) \leq \frac{C\gamma}{\beta}|Q_k|$ comme annoncé.

Il reste à majorer $L^*(f_2) = \sup_{\varepsilon>0} |L_\varepsilon(f_2)|(x)$ avec $L_\varepsilon(f_2)(x) = \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} [m_I b - b(y)] K(x,y) f_2(y)\,dy$; I étant défini par $x_j \leq y_j \leq x_j + \varepsilon/4$, $1 \leq j \leq n$.

Nous allons prouver que

(11) $\quad 0 < \varepsilon \leq 10\delta_k$ et $x \in Q_k$ impliquent $|L_\varepsilon(f_2)(x) - L_{20\delta_k}(f_2)(\alpha_k)| \leq C\gamma\lambda + \mathcal{R}_2(x)$

où $\mathcal{R}_2(x)$ vérifie (10).

Si $10\delta_k \leq \varepsilon \leq 20\delta_k$, on a, pour tout $x \in Q_k$,

$$|L_\varepsilon(f_2)(x) - L_{20\delta_k}(f_2)(\alpha_k)| \leq C\gamma\lambda$$

tandis que si $\varepsilon > 20\delta_k$ et $x \in Q_k$, nous obtiendrons

$$|L_\varepsilon(f_2)(x) - L_\varepsilon(f_2)(\alpha_k)| \leq C\gamma\lambda. \tag{12}$$

Si $\varepsilon \geq 20\delta_k$, on a $|L_\varepsilon(f_2)(\alpha_k)| = |L_\varepsilon(f)(\alpha_k)| \leq L^*(f)(\alpha_k) \leq \lambda$; (11) et (12) terminent donc la preuve de (9).

<u>Vérification de</u> (11).

Appelons $\tilde{Q}_k$ le cube défini par $\alpha_k^j \leq x^j \leq \alpha_k^j + 5\delta_k$, $1 \leq j \leq n$, $\alpha_k = (\alpha_k^1, \ldots, \alpha_k^n)$. Alors

$$L_{20\delta_k}(f_2)(\alpha_k) = \int_{Q_k^{*c}} [m_{\tilde{Q}_k} b - b(y)] K(x,y) f_2(y)\,dy.$$

Posons $B(y) = b(y) - m_{\tilde{Q}_k} b$. On aura, si $0 < \varepsilon \leq 10\delta_k$

$$L_\varepsilon(f_2)(x) - L_{20\delta_k}(f_2)(\alpha_k) = \int \left[m_I B - B(y)\right] K(x,y)\, f_2(y)\, dy + \int B(y)\, K(\alpha_k, y)\, f_2(y)\, dy$$

(la limitation de l'intervalle d'intégration définie par le support de f_2 est plus précise, si $0 < \varepsilon \leq 10\delta_k$, que celle définie par $Q^c_{x,\varepsilon}$ lorsque $x \in Q_k$).

D'où $|L_\varepsilon(f_2)(x) - L_{20\delta_k}(f_2)(y)| \leq$

$$|m_I B|\,|Tf_2|(x) + C\delta_k \int \frac{|B(y)|\,|f_2(y)|}{\|x-y\|^{n+1}}\, dy.$$

Grâce au lemme 1 et au lemme 4, on majore cette somme par $|m_I B|\,((T^* f)(\xi) + Cf^*(\xi)) + C\gamma\lambda$. Enfin si $0 < \varepsilon \leq 10\delta_k$ et $x \in Q_k$ on a $m_I B = m_I B_1$ où $B_1 = B\chi_{Q_k^*}$.

Posons $\mathcal{R}_2(x) = B_1^*(x)((T^* f)(\xi) + cf^*(\xi))$; l'inégalité $S(\xi) \leq \gamma\lambda$ fournit, compte tenu du lemme 2, $\left[(T^* f)(\xi) + Cf^*(\xi)\right] \int_{Q_k^*} |B_1(x)|\, dx \leq C\gamma\lambda$. L'inégalité de type faible pour B_1 implique (10).

Si $10\delta_k \leq \varepsilon \leq 20\delta_k$, c'est beaucoup plus simple. On écrira

(13) $$L_{20\delta_k}(f_2)(\alpha_k) - L_\varepsilon(f_2)(x) =$$

$$\int_{Q_k^{*c}} B(y)\, K(\alpha_k, y)\, f(y)\, dy - \int_{Q_k^{*c}} B(y)\, K(x,y)\, f(y)\, dy$$

$$- \int_R B(y)\, K(x,y)\, f_2(y)\, dy + \int_{R'} B(y)\, K(x,y)\, f_2(y)\, dy$$

$$+ (m_{\tilde{Q}_k} b - m_I b) \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} K(x,y)\, f_2(y)\, dy \quad \text{où}$$

$$R = Q^c_{x,\varepsilon} \setminus Q_k^{*c} \quad \text{et} \quad R' = Q_k^{*c} \setminus Q^c_{x,\varepsilon}.$$

La première différence de (13) est $O(\gamma\lambda)$ grâce au lemme 4 ; compte tenu de $|K(x,y)| \leq \dfrac{\mathcal{C}}{\|y-x\|^n}$, les deux autres termes sont $O(\delta_k^{-n}) \int_{R_k} |B(y)\, f_2(y)|\, dy \leq C\, b_p^{\#}(\xi)\, M_q f(\xi) \leq C\gamma\lambda$. Enfin le dernier terme est estimé grâce aux lemmes 1 et 2. Si enfin $\varepsilon > 20\delta_k$, on change la définition de B en posant $B(y) = b(y) - m_I b$ où I est le cube $\alpha_{j,k} \leq y_j \leq \alpha_{j,k} + \frac{\varepsilon}{4}$, $1 \leq j \leq n$. Alors

$$(14) \qquad L_\varepsilon(f_2)(\alpha_k) - L_\varepsilon(f_2)(x) = \int_{Q^c_{\alpha_k,\varepsilon}} [K(\alpha_k, y) - K(x,y)] B(y) f(y)\, dy$$

$$- \int_{R_\varepsilon} K(x,y)\, B(y)\, f(y)\, dy + \int_{R'_\varepsilon} K(x,y)\, B(y)\, f(y)\, dy$$

$$+ (m_I b - m_J b) \int_{Q^c_{x,\varepsilon}} K(x,y)\, f(y)\, dy \ ;$$

la troncation de f en f_2 est rendue superflue par la restriction portant sur le domaine d'intégration et J désigne le cube $x_j \leq y_j \leq x_j + \varepsilon/4$, $1 \leq j \leq n$. Le premier terme de (14) est encore estimé grâce au lemme 4 en $O(\gamma\lambda)$. On a $R_\varepsilon = Q^c_{x,\varepsilon} \setminus Q^c_{\alpha_k,\varepsilon}$ et $R'_\varepsilon = Q^c_{\alpha_k,\varepsilon} \setminus Q^c_{x,\varepsilon}$; compte tenu de $|K(x,y)| \leq C\|y-x\|^{-n}$, on estime les deux termes suivants de (14) par $Cb^{\#}_p(\xi)\, M_q f(\xi) \leq C\gamma\lambda$. Enfin le dernier terme se traite grâce aux lemmes 1 et 2. Pour démontrer le théorème à l'aide de l'inégalité aux bons λ, on choisit $1 < q < 2$. Alors $f \in L^2$ implique $M_q f \in L^2$. Par ailleurs $b \in BMO \Longrightarrow b^{\#}_p \in BMO$. Donc on a, grâce à l'inégalité des bons λ,

$$\|L(f)\|_2 \leq \|L^* f\|_2 \leq C\|S\|_2 \leq C\|b\|_{BMO}\|f\|_2 .$$

On raisonne de même pour prouver que L est borné sur L^r, $r > 1$.

THEOREME 2. <u>Soient</u> $R_1, \ldots, R_n$ <u>les transformées de Riesz. Soit</u> $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ <u>une fonction mesurable et</u> A <u>l'opérateur de multiplication par</u> a. <u>Si les commutateurs</u> $[A, R_j]$, $1 \leq j \leq n$, <u>sont bornés sur</u> L^2, <u>alors nécessairement</u> $a \in BMO$.

La preuve débute par le lemme suivant.

LEMME. <u>L'ensemble</u> E <u>des opérateurs</u> $T : L^2 \to L^2$ <u>tels que</u> T <u>et</u> $[A, T]$ <u>soient bornés sur</u> L^2 <u>est une algèbre</u>.

Si en effet S et $T \in E$, on a

$$[A, ST] = [A, S]T + S[A, T].$$

Donc $ST \in E$.

Appelons $Y_1, \dots, Y_N$ une base orthogonale d'harmoniques sphériques de degré n et considérons les opérateurs T_j, $1 \le j \le N$, associés aux noyaux $\Omega_j(x) = \frac{Y_j(x)}{\|x\|^n}$. En vertu du lemme $[A, T_j]$ est borné sur L^2 pour $1 \le j \le N$.

Soit Q un cube de $\mathbb{R}^n$ de diamètre δ et de centre ξ. Alors on a, si $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$c_n = \sum_1^N \Omega_j^2(x, y) = \sum_1^N \frac{Y_j(x-y)}{\|x-y\|^{2n}} Y_j(x-y)$$

$$= \sum_1^N \sum_{(\alpha,\beta)} \frac{Y_j(x-y)}{\|x-y\|^{2n}} c_{\alpha,\beta}(x-\xi)^\alpha (y-\xi)^\beta \ ;$$

cette dernière égalité est obtenue en remarquant que $x-y = (x-\xi) - (y-\xi)$ et en développant le polynôme $Y_j(X-Y)$ en monômes - enfin $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $|\alpha| + |\beta| = n$.

Donc $c_n = \sum \frac{\Omega_j(x-y)}{\|x-y\|^n} c_{\alpha,\beta}(x-\xi)^\alpha (y-\xi)^\beta$ et cela entraîne

$$|Q|\, a(x) - \int_Q a(y)\, dy = \sum C_{\alpha,\beta}(x-\xi)^\alpha f_{\beta,j}(x)$$

où Σ est une somme portant sur α, β, j et

$$f_{\beta,j}(x) = \int \frac{a(x) - a(y)}{\|x-y\|^n} \Omega_j(x-y)(y-\xi)^\beta \chi_Q(y) dy.$$

Montrons que $\int_Q |f_{\beta,j}(x)|\, dx \le C\delta^{|\beta|+n}$. Il en résultera que

$\int_Q |(x-\xi)^\alpha|\, |f_{\beta,j}(x)|\, dx \le C\delta^{|\alpha|+|\beta|+n} = C\delta^{2n}$ et cela entraîne

$$\int_Q |a(x) - m_Q a|\,dx \leq C\delta^n = C\,|Q|\,.$$

Grâce à l'inégalité de Schwarz, on a

$$\int_Q |f_{\beta,j}(x)|\,dx \leq |Q|^{1/2}\Big(\int_Q |f_{\beta,j}(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \leq |Q|^{1/2}\|f_{\beta,j}\|_2 \leq$$

$$C\,|Q|^{1/2}\|(y-\xi)^\beta \chi_Q(y)\|_2 \leq C\,|Q|\,\delta^{|\beta|}\,.$$

La décomposition de l'opérateur de Calderón

R. Coifman et Y. Meyer

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tout α réel, définissons f_α par $\hat{f}_\alpha(y) = (\operatorname{sign} y)|y|^{i\alpha}\hat{f}(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$. On a alors le théorème

THEOREME. On peut trouver une fonction ω, d'une variable réelle, à valeurs complexes, appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schartz et telle que, pour tout couple a, f de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on ait, en posant $A(x) = \int_0^x a(t)\,dt$,

$$\int \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2} f(y)\,dy = \int \frac{a(y)}{x-y} f(y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{[a_{-\alpha}, H] f_\alpha\right\}(x)\,\omega(\alpha)\,d\alpha.$$

Dans la seconde intégrale le commutateur $\left\{[a_{-\alpha}, H] f_\alpha\right\}(x)$ vaut $a_{-\alpha}(x)(Hf_\alpha)(x) - [H(a_{-\alpha}f_\alpha)](x)$ où H est la transformation de Hilbert ; la seconde intégrale est prise en α. L'identité (1) signifie que l'opérateur de Calderon, si $a \in L^\infty$ et $f \in L^2$ s'obtient en prenant la transformée de Hilbert du produit af et en lui ajoutant une moyenne de commutateurs $[a_{-\alpha}, H]$ entre la multiplication par $a_{-\alpha} \in BMO$ et la transformée de Hilbert. La norme de $a_{-\alpha}$ dans BMO peut être majorée de façon grossière en $O(|\alpha|^{3/2})$ (ch. II, prop. 2) ; celle de f_α dans L^2 est $O(1)$ et la formule (1) donne, de façon évidente, la continuité du commutateur de Calderon sur $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve de (1).

On pose $\Omega(t,y) = \dfrac{\mathrm{sign}(y)}{y^2}\chi\left\{0\le t/y\le 1\right\}$; c'est-à-dire que le noyau Ω est impair, homogène de degré -2 et vaut $\dfrac{1}{y^2}$ si $0 \le t \le y$, $-\dfrac{1}{y^2}$ si $\mu \le t \le 0$ et 0 ailleurs.

Un calcul immédiat donne

$$\hat{\Omega}(u,v) = -2i\int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\int_0^y \sin(ut+vy)\,dt$$

$$= -2i\int_0^\infty \frac{\cos(vy)-\cos(u+v)y}{uy^2}\,dy = 2i\int_0^\infty \frac{1-\cos vy}{uy^2}\,dy$$

$$-\ 2i\int_0^\infty \frac{1-\cos(u+v)y}{uy^2}\,dy. \quad \text{Or} \quad \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

On a donc $\hat{\Omega}(u,v) = \pi i\,\dfrac{|v|-|u+v|}{u}$.

D'autre part

$$T(f)(x) = \int \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}\,f(y)dy = -\int \frac{\mathrm{sign}(y-x)}{(y-x)^2}\int_{0\le\frac{t-x}{y-x}\le 1} a(t)\,dt$$

$$= -\iint \Omega(t-x\ ,\ y-x)\,a(t)\,f(y)\,dt\,dy =$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint e^{ix(u+v)}\,\hat{\Omega}(-u\ ,\ -v)\,\hat{a}(u)\,\hat{f}(v)\,du\,dv =$$

$$\frac{i}{4\pi}\iint e^{ix(u+v)}\,\frac{|v|-|u+v|}{u}\,\hat{a}(u)\,\hat{f}(v)\,du\,dv.$$

Nous allons calculer successivement $T(f_+)$ puis $T(f_-)$ où $\hat{f}_+ = \hat{f}\,\chi\{y\ge 0\}$ et $\hat{f}_- = \hat{f}\,\chi\{y<0\}$; de sorte que f_+ et f_- sont respectivement les parties analytiques et antianalytiques de f. On a évidemment $f = f_+ + f_-$ d'où $T(f) = T(f_+) + T(f_-)$; l'intérêt de cette décomposition est de pouvoir remplacer $|v|$ par soit v, soit $-v$. En outre, nous ferons le changement de variable $s = u+v$, $v = v$

pour obtenir

$$T(f)(x) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} F(s)\, ds$$

avec

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|v| - |s|}{s - v} \hat{a}(s-v)\, \hat{f}(v)\, dv.$$

La remarque suivante nous permettra de distinguer les cas $s \geq 0$ et $s < 0$.

Appelons P et Q les opérateurs de $L^2(\mathbb{R})$ définis par $P(f) = f_+$, $Q(f) = f_-$ et soient F_1 et F_2 deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ telles que

$$F_1(s) = F(s) \quad \text{si} \quad s \geq 0$$

$$F_2(s) = F(s) \quad \text{si} \quad s \leq 0.$$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} F(s)\, ds = P\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} F_1(s)\, ds\right] + Q\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} F_2(s)\, ds\right].$

C'est évident.

Dans notre cas F_1 sera l'expression prise par $F(s)$ quand $s \geq 0$, prolongée de la façon la plus simple possible si $s < 0$. De même pour F_2. Une seconde remarque est que si $0 \leq x \leq 1$, $x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{i\alpha}\, \omega(\alpha)\, d\alpha$ où $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose, en effet, $x = e^{-t}$, $t \geq 0$ et l'on appelle $\varphi(t)$ une fonction de la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ coïncidant avec e^{-t} sur $[0, +\infty[$. Il suffit alors de prendre $\omega(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(-\alpha)$.

Pour calculer Tf_+, on posera, pour tout s réel,

$F_1(s) = \frac{1}{4\pi i} \displaystyle\int \hat{a}(s-v)\, \hat{f}_+(v)\, dv$ de sorte que $F_1(s) = F(s)$ si $s \geq 0$.

De même on posera, pour tout s réel,

$$F_2(s) = -\frac{1}{4\pi i} \int \hat{a}(s-v)\, \hat{f}(v)\, dv + \frac{1}{2\pi i} \iint \hat{a}(s-v)\, \hat{f}(v) \left|\frac{v}{s - v}\right|^{i\alpha} \omega(\alpha)\, d\alpha\, dv$$

de sorte que $F_2(s) = F(s)$ si $s \leq 0$.

On a donc

$$\int e^{isx} F_1(s)\, ds = \frac{\pi}{i}\, a(x)\, f_+(x)$$

$$\int e^{isx} F_2(s)\, ds = -\frac{\pi}{i} a(x)\, f_+(x) + \frac{2\pi}{i} \int (M_{-\alpha} a)(M_\alpha f_+)(x)\, \omega(\alpha)\, d\alpha$$

où l'on a appelé M_α l'opérateur de convolution correspondant au multiplicateur $|y|^{i\alpha}$.

En appliquant alors notre première remarque, il vient

$$T(f_+) = -\pi i H(af_+) + Q \int (M_{-\alpha} a)(M_\alpha f_+)(x)\, \omega(\alpha)\, d\alpha$$

où le facteur $\frac{2\pi}{i}$ a été englobé dans $\omega(\alpha)$. Mais $M_{-\alpha} a$ et $-a_{-\alpha}$ diffèrent seulement par un terme "analytique" dont le produit par $M_\alpha f_+$ est analytique et qui finalement disparaît après application de l'opérateur "analytique" Q. On a donc

$T(f_+) = -\pi i H(af_+) - Q \left[\int a_{-\alpha}(x)\, M_\alpha f_+(x)\, \omega(\alpha)\, d\alpha \right]$. On obtient de même

$$T(f_-) = -\pi i H(af_-) + P \left[\int a_{-\alpha}(x)\, M_\alpha f_-(x)\, \omega(\alpha)\, d\alpha \right].$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$M_\alpha f_+ - M_\alpha f_- = f_\alpha \quad , \quad P = \frac{I + H}{2} \quad , \quad Q = \frac{I - H}{2}$$

pour obtenir (1).

A note on rearrangements of Fourier coefficients

Hugh L. Montgomery

Let $\{\varphi_k\}$ be a sequence of functions on $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, with the property that they are uniformly bounded,

$$\|\varphi_k\|_\infty \le M, \tag{1}$$

and satisfy a Bessels inequality

$$\sum_k \left| \int_0^1 f\,\varphi_k \right|^2 \le M^2 \int_0^1 |f|^2 . \tag{2}$$

For the sake of simplicity we suppose that M has the same value in (1) and (2) ; this does not occasion any loss of generality. Suppose that $\sum_k |a_k|^2 < \infty$. Then

$$f(x) = \sum_k a_k\,\varphi_k(x) \tag{3}$$

is a member of $L^2(\mathbf{T})$, since the dual of (2) asserts that

$$\int_0^1 \left|\sum_k a_k\,\varphi_k\right|^2 \le M^2 \sum_k |a_k|^2 . \tag{4}$$

In this note we obtain bounds for $\int_E |f|^2$ in terms of the measure of the set E and the numbers $|a_k|$. Following Hardy and Littlewood, we let the numbers $a_0^*, a_1^*, \ldots.$ be the numbers $|a_k|$, permuted so that $a_n^* \searrow$. Then we set

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \cos 2\pi n x . \tag{5}$$

THEOREM 1. <u>Let</u> $\{\varphi_k\}$ <u>be a sequence of functions satisfying</u> (1) <u>and</u> (2), <u>let</u> f <u>and</u> f* <u>be defined by</u> (3) <u>and</u> (5). <u>Then for any measurable set</u> $E \subseteq T$, <u>with measure</u> $|E| = 2\theta$, <u>we have</u>

(6) $$\int_E |f|^2 \leq 20\, M^2 \int_{-\theta}^{\theta} |f^*|^2.$$

If $C \in L^2(\mathbf{T})$, $C(x) \sim \sum_{n=0} C_n \cos 2\pi nx$, and if $C_n \searrow$, then $C = C^*$, so (6) implies that

$$\int_E |C|^2 \leq 20 \int_{-\theta}^{\theta} |C|^2,$$

where $E \subseteq T$, $|E| = 2\theta$. Thus, although it is not necessarily true that $C(x)$ is decreasing on $[0,\frac{1}{2})$, in a certain sense it is still the case that C is largest near 0.

Using a simple inequality of A. Baernstein [2], we shall derive from Theorem 1 the following

THEOREM 2. Let ψ be a convex increasing function from $[0,\infty)$ to $\mathbf{R}$. Then, in the above notation,

$$\int_E \psi(|f|^2) \leq \int_{-\theta}^{\theta} \psi(20\, M^2 |f^*|^2).$$

Taking $\psi(t) = t^{q/2}$, we see from the above that

(7) $$\|f\|_q \leq 5M \|f^*\|_q \qquad (q \geq 2).$$

Inequalities of this type have a long history. Hardy and Littlewood [3,4] proved that

(8) $$\|f\|_q \leq c_q \|f^*\|_q \qquad (q \geq 2)$$

in the case $\varphi_k(x) = e^{2\pi ikx}$, $-\infty < k < +\infty$. Littlewood [6] has shown that c_q is bounded in this case, and F. R. Keogh [5] has shown that $c_q \to 1$ as $q \to \infty$. In the opposite direction, Littlewood [7] showed that $c_q > 1$ except when q is an even integer. Consequently, the constant 20 in Theorems 1 and 2 can not be replaced by 1. R. E. A. C. Paley [9] extended (7) to the case of arbitrary uniformly bounded orthonormal φ_k (see Zygmund [11, XII 5] for a simple proof). Theorem 2 does not seem to follow from the special case (7), since in general a convex increasing function $\psi(t)$ is not comparable to a sum $\sum_r c_r t^{a_r}$, $c_r \geq 0$, $a_r \geq 1$.

If one were to consider, in place of f^*, a function $f^-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$, then one does not in general expect the inequality

$$\|f\|_q \leq c_q \|f^-\|_q \qquad (q \geq 2)$$

to be valid, even when the φ_n are given in some natural order. (See G. A. Bachelis [1], and H. S. Shapiro [10]). However, in the special case of ordinary Dirichlet series, there are good reasons to believe that something positive may be said. For example, we can formulate a

CONJECTURE. Let $\varepsilon > 0$, and $2 \leq q \leq 4$. Then for $T \geq 2$, $N > N_0(\varepsilon, q)$, we have

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \right|^q dt \leq (T + N^{q/2}) N^{q/2+\varepsilon},$$

for arbitrary coefficients a_n satisfying $|a_n| \leq 1$.

The above is known to be true when $q = 2$, $q = 4$; thus by Hölder's inequality it suffices to consider the case $T = N^{q/2}$. The Conjecture is of special interest in multiplicative number theory, since from it one can deduce (see Montgomery [8, Theorem 12.6]) that the interval $(x, x+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ contains a prime number, for all $x > x_0(\varepsilon)$.

We now prove Theorem 1. We have only countably many functions φ_k, so without loss of generality we may suppose that $0 \le k < \infty$. Let π be the permutation such that $a_n^* = a_{\pi(n)}$. Put $N = [(2\theta)^{-1}]$, and set $\mathfrak{N} = \{\pi(n) : 0 \le n \le N\}$. Thus $\mathfrak{N}$ is the set of indices of the $N+1$ coefficients of largest absolute value. Break the sum (3) into two parts,

$$f = \sum_{n\in\mathfrak{N}} + \sum_{n\notin\mathfrak{N}} = f_1 + f_2 ,$$

say. On one hand,

$$\int_E |f_1|^2 \le \|f_1\|_\infty^2 \int_E 1 \le 2\theta \Big(M \sum_{n=0}^{N} a_n^*\Big)^2 ,$$

in view of (1). On the other hand, from (4) we see that

$$\int_E |f_2|^2 \le \int_0^1 |f_2|^2 \le M^2 \sum_{n>N} a_n^{*2} .$$

For each x, $|f|^2 \le 2|f_1|^2 + 2|f_2|^2$, so on combining the above we find that

$$\int_E |f|^2 \le 4\theta \Big(M \sum_{n=0}^{N} a_n^*\Big)^2 + 2M^2 \sum_{n>N} a_n^{*2} . \tag{9}$$

It now remains to relate the right hand side above to $\int_{-\theta}^{\theta} |f^*|^2$. Let $K(x) = \max(0\ ,\ 1-|x|\theta^{-1})$ for $|x| \le \frac{1}{2}$. Then

$$\int_{-\theta}^{\theta} |f^*|^2 \ge \int_{-1/2}^{1/2} K\,|f^*|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m,n=0} a_m^*\, a_n^* (\hat{K}(m+n) + \hat{K}(m-n)).$$

Now $\hat{K}(m) = \theta \left(\frac{\sin \pi m\theta}{\pi m\theta}\right)^2 \ge 0$, so

$$\frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^*\, a_n^*\, \hat{K}(m-n) \le \int_{-\theta}^{\theta} |f^*|^2 . \tag{10}$$

If $|m-n| \le N$ then

$$\hat{K}(m-n) \ge \theta \left(\frac{\sin \pi N\theta}{\pi N\theta}\right)^2 \ge \theta \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2 = 4\pi^{-2}\theta , \tag{11}$$

since $N \le (2\theta)^{-1}$. But $a_n^* \ge 0$, so

$$\theta \Big(\sum_{0\le n\le N} a_n^*\Big)^2 \le \frac{1}{4}\pi^2 \sum_{0\le m,n\le N} \hat{K}(m-n)\, a_m^*\, a_n^* . \tag{12}$$

If $0 < n-N \leq m \leq n$ then $a^*_m \geq a^*_n$, so from (11) we find that

$$\sum_{n-N\leq m\leq n} a^*_m \hat{K}(m-n) \geq 4\pi^{-1}\theta(N+1)a^*_n \geq 2\pi^{-1}a^*_n ,$$

since $N+1 > (2\theta)^{-1}$. Hence

$$\sum_{n>N} a^{*2}_n \leq \tfrac{1}{2}\pi^2 \sum_{\substack{n>N \\ n-N\leq m\leq n}} \hat{K}(m-n)\, a^*_m a^*_n . \tag{13}$$

Combining (9) with (12), (13), we find that

$$\int_E |f|^2 \leq \pi^2 \theta M^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} a^*_m a^*_n \hat{K}(m-n).$$

But $2\pi^2 < 20$, so by (10) our proof is complete.

We note that once (9) is established, the remainder of the proof can be effected in several ways. In proving (8), Hardy and Littlewood [3] established that

$$\int_0^1 |f^*|^q \approx \sum_{n=0}^{\infty} a^{*\,q}_n (n+1)^{q-2}.$$

One can modify their proof of this (see also Keogh [5]) to show that

$$\sum_{m>\theta^{-1}} n^{-2} \Big(\sum_{0\leq m\leq n} a^*_m\Big)^2 < c\int_{-\theta}^{\theta} |f^*|^2.$$

Theorem 1 follows easily from the above and (9), apart from the values of constants.

To prove Theorem 2 we require the following result of A. Baernstein [2].

LEMMA. For $f \in L^1(\mathbf{T})$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, let $f^+(\theta) = \sup_E \int_E |f|$, where the supremum is taken over all measurable sets $E \subseteq (0,1)$ such that $|E| = 2\theta$. For two functions $r, s \in L^1(\mathbf{T})$, the following are equivalent :

(a) For all $\theta \in [0,\frac{1}{2})$, $r^+(\theta) \leq s^+(\theta)$;

(b) For any $\psi(t)$, convex and increasing on $[0,\infty)$, we have

$$\int_0^1 \psi(|r|) \leq \int_0^1 \psi(|s|).$$

In the language of this lemma, we find from Theorem 1 that $(|f|^2)^+(\theta) \leq (20M|f^*|^2)^+(\theta)$. Hence $\|\psi(|f|^2)\|_1 \leq \|\psi(20M|f^*|^2)\|_1$. However, with a little more care we obtain the full strength of Theorem 2. Let $E \subseteq [0,1)$ be a set with $|E| = 2\theta$. Put $r = |f|^2 \chi_E$, $s = 20M^2|f^*|^2 \chi_{(-\theta,\theta)}$. Then by Theorem 1, $r^+ \leq s^+$, so by the Lemma above, $\|\psi(r)\|_1 \leq \|\psi(s)\|_1$. If $\psi(0) = 0$, then this asserts that

$$\int_E \psi(|f|^2) \leq \int_{-\theta}^{\theta} \psi(20M^2|f^*|^2).$$

To obtain this for general ψ we have only to add a constant to both sides of the inequality. This completes the proof of Theorem 2.

Bibliography

[1] BACHELIS, G. A. "On the upper and lower majorant properties of $L^p(G)$". Quart. J. Math. (Oxford, (2) 24 (1973), 119-128.

[2] BAERNSTEIN, A. Acta Math., to appear.

[3] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E. "Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants". J. London Math. Soc. 6 (1931), 3-9.

[4] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E. "A new proof of a theorem on rearrangements". J. London Math. Soc., 23 (1949), 163-168.

[5] KEOGH, F. R. "Some inequalities of Littlewood and a problem on rearrangements". J. London Math. Soc., 36 (1961), 362-376.

[6] LITTLEWOOD, J. E. "On a theorem of Paley". J. London Math. Soc., 29 (1954), 387-395.

[7] LITTLEWOOD, J. E. "On inequalities between f and f*". J. London Math. Soc., 35 (1960), 352-365.

[8] MONTGOMERY, H. L. Topics in multiplicative number theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 227, Springer-Verlag, 1971, 187 p.

[9] PALEY, R. E. A. C. "Some theorems on orthogonal functions". Studia Math. 3 (1931), 226-238.

[10] SHAPIRO, H. S. "Majorant problems for Fourier coefficients". To appear.

[11] ZYGMUND, A. Trigonometric series. 2nd ed., Cambridge Univ. Press. 1968.

L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a le propriété de Schur.

Françoise Piquard-Lust

L'objet de ce travail est de prouver son titre. Les notations sont celles de Bourbaki, E.V.T. On désignera systématiquement par B un espace de Banach, par B' son dual et par $\sigma(B,B')$ la topologie faible sur B définie par la dualité.

DEFINITION 1. <u>Un espace de Banach</u> B <u>a la propriété de Schur si les parties de</u> B <u>compactes pour la topologie</u> $\sigma(B,B')$ <u>sont compactes</u>.

D'après un théorème de Smulian, il est équivalent de dire que les suites convergeant vers 0 pour $\sigma(B,B')$ convergent en norme. H. P. Rosenthal ([7]) vient de prouver que de toute suite bornée en norme x_n, $n \geq 1$, d'un tel espace, on peut, soit extraire une sous-suite convergente, soit extraire une "sous-suite en ℓ^1" ; c'est à dire une sous-suite $x_{n(k)}$, $k \geq 1$, telle que $\left\| \sum_{k\geq 1} c_k x_{n(k)} \right\|_B$ et $\sum_{k\geq 1} |c_k|$ soient des normes équivalentes sur le sous-espace fermé de B engendré par $x_{n(k)}$, $k \geq 1$.

On connaît très peu d'exemples de tels espaces : l'espace ℓ^1, les quotients de ℓ^1 qui sont duals de sous-espaces de c_o [3], les sommes directes ℓ^1 de tels espaces, le produit tensoriel injectif d'un nombre fini de tels espaces [6].

On va montrer, à l'aide de techniques d'analyse harmonique, que certains espaces invariants par translation de fonctions continues sur un groupe localement compact abélien ont la propriété de Schur.

Les notations sont celles du livre de Rudin ([11]). Nous les rappelons pour la commodité du lecteur.

On note

G un groupe topologique localement compact abélien (désigné par l. c. a.)

Γ ou $\hat{G}$ son dual

$\bar{\Gamma}$ le compactifié de Bohr de Γ.

G_d le groupe G muni de la topologie discrète

G_pE le sous-groupe de G_d engendré par un ensemble $E \subset G$

$C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G, tendant vers 0 à l'infini

$C_E(G)$ le sous-espace de $C(G)$ formé des fonctions à spectre dans un ensemble $E \subset \Gamma$

$L^\infty_E(G)$ le sous-espace de $L^\infty(G)$ formé des fonctions à spectre dans un ensemble $E \subset \Gamma$

$C_E(K)$ la fermeture, pour la norme de $C(K)$, de l'espace quotient de $C_E(G)$ par le sous espace des éléments nuls sur un compact $K \subset G$

$M(G)$ le dual de $C(G)$

$PM(G)$ l'espace transformé de Fourier de $L^\infty(\Gamma)$

$A(G)$ l'espace transformé de Fourier de $L^1(\Gamma)$

$PM(E)$ le sous-espace de $PM(G)$ formé des pseudomesures à support dans un fermé $E \subset G$. C'est aussi l'espace transformé de Fourier de $L^\infty_E(\Gamma)$

$A(E)$ l'algèbre quotient de $A(G)$ par l'idéal $I(E)$ des fonctions nulles sur un fermé $E \subset G$

$\ell^1(E)$ l'espace des mesures discrètes sur un ensemble $E \subset G$

$\overline{\ell^1(E)}$ sa fermeture pour la norme de $PM(G)$.

Le résultat essentiel de ce travail est le théorème suivant :

THEOREME 1. Soit E un compact dénombrable dans un groupe G 1. c. a. Alors l'espace $PM(E)$ a la propriété de Schur.

On rappelle [4] que si E est compact dénombrable, l'espace $PM(E)$ est le dual de $A(E)$ et que l'espace $\ell^1(E)$ est dense pour la norme pseudomesure dans $PM(E)$. Il en résulte que $PM(E)$ est l'espace transformé de Fourier de $C_E(\overline{\Gamma})$. Pour étudier $PM(E)$ on peut se limiter au cas où G est métrique compact, comme le montre le lemme suivant :

LEMME 1. Soit E un compact dénombrable dans un groupe G 1. c. a.

a) Sur $\ell^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_pE)$ coïncident

b) Il existe un groupe métrique compact G_1 tel que G_pE soit dense dans G_1, tel que sur $\ell^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_1)$ coïncident et tel que E soit encore compact dénombrable dans G_1.

La preuve du lemme 1 est très simple. Nous la donnons pour la commodité du lecteur

a) Les espaces $C_E(\overline{\Gamma})$, $C_E\left(\frac{\overline{\Gamma}}{(G_pE)^{\perp}}\right)$, $C_E(\widehat{G_pE})$ sont isomorphes et sont fermés respectivement dans $L^\infty(\Gamma)$ et $L^\infty(\widehat{G_pE})$. Par transformation de Fourier, cela signifie que sur $\ell^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_pE)$

coïncident.

b) L'ensemble E est compact dénombrable dans $\bar{G}$, le compactifié de Bohr de G, et dans G_2, fermeture de G_pE dans $\bar{G}$. L'application canonique

$$\Gamma_2 \longrightarrow \frac{\bar{\Gamma}_2}{(G_pE)^{\perp}}$$

est injective, d'image dense dans $\frac{\bar{\Gamma}_2}{(G_pE)^{\perp}}$ qui est un groupe métrique compact isomorphe à $\widehat{G_pE}$.

Le groupe Γ_2 contient un sous-groupe dénombrable Γ_1, d'image dense dans $\frac{\bar{\Gamma}_2}{(G_pE)^{\perp}}$. Son dual G_1 est métrique compact.

Les applications canoniques

$$G_pE \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1$$

définissent une injection de G_pE dans G_1, d'image dense, et l'ensemble E devient un compact dénombrable de G_1.

En appliquant le résultat de a) successivement à G_pE et G, puis à G_pE et G_1 on voit que sur $\ell^1(E)$ les normes induites par $PM(G_pE)$, $PM(G)$, $PM(G_1)$ coïncident.

La définition suivante est due à J.-P. Kahane ([4]).

DEFINITION 2. <u>Soient</u> $\mathcal{G}$ <u>un groupe abélien compact</u>, Λ <u>une partie de son dual</u> $\hat{\mathcal{G}}$ <u>et</u> V <u>une partie compacte de</u> $\mathcal{G}$. <u>On dit que</u> V <u>est associé à</u> $C_\Lambda(\mathcal{G})$, <u>ou plus simplement</u>, <u>associé à</u> Λ <u>s'il existe une constante</u> $k > 0$ <u>telle que</u>

(1) $$\forall f \in C_\Lambda(\mathcal{G}) \ , \quad \|f\|_{C(\mathcal{G})} \leq k \|f\|_{C(V)}.$$

Il est clair alors que les espaces $C_\Lambda(\mathfrak{g})$ et $C_\Lambda(V)$ sont isomorphes, et que tout translaté de V est aussi associé à $C_\Lambda(\mathfrak{g})$.

DEFINITION 3. <u>Dans les conditions de la définition</u> 2, <u>on dit que</u> $C_\Lambda(\mathfrak{g})$ <u>est de première espèce s'il existe une constante</u> k <u>telle que, pour tout voisinage</u> V <u>de zéro dans</u> $\mathfrak{g}$, <u>il existe une partie finie</u> $\Lambda_o \subset \Lambda$ <u>vérifiant</u>

(2) $$\forall f \in C_{\Lambda\setminus\Lambda_o}(\mathfrak{g}) \qquad , \qquad \|f\|_{C(\mathfrak{g})} \leq k\|f\|_{C(V)}.$$

Un résultat essentiel pour la construction de compacts associés est un lemme très utile de Varopoulos [9].

PROPOSITION 1 ([9]). <u>Il existe une constante</u> m_o <u>telle que pour tout groupe</u> G <u>l. c. a.</u>, <u>tout fermé</u> $E \subset G$, <u>tout couple</u> $(\gamma,\gamma') \in \Gamma\times\Gamma$ <u>et tout élément</u> $S \in PM(E)$

(3) $$|\langle S,\gamma-\gamma'\rangle| \leq m_o\|S\|_{PM(E)}\|\gamma-\gamma'\|_{C(E)}.$$

Pour démontrer le théorème 1 on aura besoin du théorème 2 et du lemme 2 qui suivent. La partie a) du théorème 2 est due à Blei ([2]) et a été retrouvée indépendamment par l'auteur. Pour la clarté de l'exposé on en donnera cependant la démonstration.

THEOREME 2. <u>Soit</u> E <u>un compact dénombrable ayant un seul point d'accumulation dans un groupe</u> G <u>l. c. a. Soit</u> G_pE <u>le sous-groupe discret engendré par</u> E <u>dans</u> G. <u>Alors on a</u>

a) [2] <u>l'espace</u> $C_E(G_pE)$ <u>est de première espèce</u>

b) <u>l'espace</u> $PM(E)$ <u>a la propriété de Schur</u>.

En fait a) $\Longrightarrow$ b) comme le prouve le lemme 2.

LEMME 2. Soit G un groupe abélien métrique compact, E un sous-ensemble de Γ, tel que $C_E(G)$ soit de première espèce. Alors $C_E(G)$ a la propriété de Schur.

Démonstration du lemme 2. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in C_E(G)$ une suite de fonctions convergeant vers 0 pour la topologie $\sigma(C(G), M(G))$. En particulier c'est une suite bornée telle que

$$\forall e \in E \qquad \hat{f}_n(e) \longrightarrow 0.$$

Comme E est dénombrable, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, une suite $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in C_E(G)$, et une suite $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ strictement croissante d'entiers positifs telles que

(i) $\quad \forall j \geq 1 \quad \|f_{n_j} - \varphi_j\|_{C_E(G)} \leq \frac{1}{2^j}$

(ii) $\quad \forall j \geq 1 \quad$ support $\hat{\varphi}_j \subset \left\{e_{k_j+1}, \dots e_{k_{j+1}}\right\}$.

S'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \qquad \|f_n\|_{C_E(G)} \geq m$$

il est clair qu'il existe un entier j_1 tel que

$$\forall j \geq j_1 \qquad \|\varphi_j\|_{C_E(G)} \geq \frac{m}{2}.$$

On va montrer que c'est impossible.

Il existe $g_1 \in G$ tel que $\|\varphi_{j_1}\| = |\varphi_{j_1}(g_1)|$ et il existe un voisinage O_1 du zéro de G tel que

$$\forall g \in g_1 + \bar{O}_1 \qquad |\varphi_{j_1}(g)| \geq \frac{m}{2k}$$

où k est la constante de la définition 3.

Soit O_1' un voisinage du zéro de G tel que $\bar{O}_1' \subset O_1$. Il existe j_2 tel que $\bar{O}_1'$ soit associé (avec la constante k) à $C_{E-\{e_1 \dots e_{k_{j_2}}\}}(G)$. Il existe $g_2 \in g_1 + \bar{O}_1'$ tel que

$$\|\varphi_{j_2}\|_{C(G)} \leq k\|\varphi_{j_2}\|_{C(g_1+\bar{O}_1')} = k\,|\varphi_{j_2}(g_2)|$$

puis O_2 tel que $g_2 + \bar{O}_2 \subset g_1 + O_1$ et tel que

$$\forall g \in g_2 + \bar{O}_2 \quad , \quad |\varphi_{j_2}(g)| \geq \frac{m}{2k} .$$

On construit ainsi par récurrence des suites $(\varphi_{j_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$, $(g_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$, $(O_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$.

Soit g_o un point d'accumulation de la suite $(g_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$; il est dans $\bigcap_\ell (g_\ell + \bar{O}_\ell)$. Il en résulte que

$$\forall \ell \geq 1 \quad |\varphi_{j_\ell}(g_o)| \geq \frac{m}{2k}.$$

Or la condition (i) entraîne que la suite $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ converge vers 0 ponctuellement sur G.

Démonstration du théorème 2.

D'après le lemme 1 on peut supposer que G est compact et que G_pE est dense dans G. On peut encore supposer que le point d'accumulation de E est le zéro de G. L'application canonique

$$\Gamma \longrightarrow \bar{\Gamma} \longrightarrow \frac{\bar{\Gamma}}{(G_pE)^{\perp}} = \widehat{G_pE}$$

est une injection d'image dense.

a) Si O est un voisinage ouvert du zéro de $\dfrac{\bar{\Gamma}}{(G_pE)^{\perp}}$, l'ensemble $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma + O$ est un recouvrement ouvert de ce groupe compact, dont on peut extraire un recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{i=N} \gamma_i + O$. Comme la topologie de G est la topologie de dual de Γ ([11]), l'ensemble

$$\left\{ g \,\middle|\, |\langle g,\gamma_i\rangle - 1| < \frac{1}{2m_o} \quad i = 1,\dots N \right\}$$

est un voisinage ouvert du zéro de G (m_o est la constante définie dans la proposition 1).

Il existe un ensemble fini de points isolés dans E, soit E_o, tel que $E \setminus E_o$ soit inclus dans ce voisinage. Pour toute pseudomesure $S \in PM(E \setminus E_o)$, avec

avec $S = \sum_{j=1}^{j=J} \alpha_j \delta_{e_j}$, il existe $\gamma_o \in \Gamma$ tel que

(4) $$\|S\|_{PM(E)} \leq \frac{3}{2} |\hat{S}(\gamma_o)|$$

et il existe $i \in \{1, \ldots N\}$ tel que $\gamma_o \in \gamma_i + 0$.

En posant $\gamma_o = \gamma_i + \gamma'$ $(\gamma' \in 0)$ on a :

$$\forall g \in G \quad \langle \gamma_o, g\rangle = \langle \gamma_i, g\rangle\langle \gamma', g\rangle = \langle \gamma', g\rangle - \langle \gamma', g\rangle(1 - \langle \gamma_i, g\rangle).$$

D'où

(5) $$\hat{S}(\gamma_o) = \sum_{j=1}^{j=J} \alpha_j \langle \gamma_o, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{j=J} \alpha_j \langle \gamma', e_j\rangle - \sum_{j=1}^{j=J} \alpha_j \langle \gamma', e_j\rangle(1 - \langle \gamma_i, e_j\rangle)$$

(6) $$\|S\|_{PM(E)} \leq \frac{3}{2} \sup_{\gamma' \in \overline{O}} |\hat{S}(\gamma')| + \frac{3}{2} |\widehat{S\gamma'}(0) - \widehat{S\gamma'}(\gamma_i)|$$

la relation (3) de la proposition 1 et la construction entraînent alors

$$|\widehat{S\gamma'}(0) - \widehat{S\gamma'}(\gamma_i)| \leq \frac{1}{2} \|S\gamma'\|_{PM(E)} = \frac{1}{2} \|S\|_{PM(E)}.$$

D'où

(7) $$\|S\|_{PM(E)} = \|\hat{S}\|_{C_E(\widehat{G_p E})} \leq 6 \sup_{\gamma' \in \overline{O}} |\hat{S}(\gamma')|.$$

b) Le groupe $G_p E$ étant dénombrable, son dual $\widehat{G_p E} = \frac{\bar{\Gamma}}{(G_p E)^{\perp}}$ est métrique compact. Le lemme 2 et la partie a) du théorème 2 entraînent que l'espace $C_E(\widehat{G_p E})$, qui est isomorphe à PM(E), a la propriété de Schur.

COROLLAIRE 1. Soit E un compact dénombrable dans un groupe G l. c. a. Si le dérivé E' de E est fini, l'espace PM(E) a la propriété de Schur.

Cela résulte immédiatement du théorème 2 et du facile

LEMME 3. Sous les hypothèses du corollaire 1, l'espace PM(E) est somme directe d'un nombre fini d'espaces $PM(E_i)$ où $E_i \subset E$ est un compact dénombrable ayant un seul point d'accumulation.

Démonstration du lemme 3.

Soit $\{e_1 \ldots e_N\}$ l'ensemble E'. On choisit des voisinages ouverts $v_1(e_1)$ et $w_1(\{e_2 \ldots e_N\})$ dans G tels que $\bar{v}_1$ soit disjoint de $\bar{w}_1$. Il existe alors $\varphi_1 \in A(G)$ telle que

(i) $\varphi_1 = 1$ sur $\bar{v}_1$

(ii) $\varphi_1 = 0$ sur $\bar{w}_1$

ceci parce que l'algèbre $A(G)$ est normale.

On choisit ensuite dans w_1 des voisinages $v_2(e_2)$ et $w_2(\{e_3 \ldots e_N\})$ tels que $\bar{v}_2$ soit disjoint de $\bar{w}_2$, et on construit φ_2 comme φ_1. En répétant ce processus un nombre fini de fois on obtient une partition de E

$$E = E_o \cup \left(\bigcup_{i=1}^{i=N} \overline{v_i(e_i)} \cap E \right) = E_o \cup \left(\bigcup_{i=1}^{i=N} E_i \right)$$

où E_o est un ensemble fini. Pour tout élément S dans $PM(E \setminus E_o)$ on a

$$S = \sum_{i=1}^{i=N} S\,\varphi_i .$$

Pour la démonstration du théorème 1 on a besoin encore du

LEMME 4. <u>Soit</u> E <u>un espace topologique compact dénombrable. Il existe un ordinal dénombrable</u> α <u>tel que le dérivé</u> $E^{(\alpha)}$ <u>soit un ensemble fini non vide.</u>

Démonstration du lemme 4. D'après le théorème de Cantor-Bendixon [5] il existe un ordinal dénombrable ν tel que le dérivé $E^{(\nu)}$ est vide. L'ensemble $\{\beta \mid E^{(\beta)} \neq \emptyset\}$ est une partie majorée de l'ensemble des ordinaux qui admet un élément maximal α_o. L'ensemble $E^{(\alpha_o)}$ ne peut contenir une infinité de points car $E^{(\alpha_o+1)}$ ne serait pas vide et α_o ne serait pas maximal. Donc, ou bien $E^{(\alpha_o)}$ est fini non vide, ou bien $E^{(\alpha_o)}$ est vide. Dans ce cas α_o a ou non un prédécesseur. Si α_o a un prédécesseur, noté $\alpha_o - 1$, l'ensemble $E^{(\alpha_o-1)}$ ne peut être que fini non vide. Si α_o n'a pas de prédécesseur, par définition $E^{(\alpha_o)}$ est l'ensemble $\bigcap\limits_{\beta<\alpha_o} E^{(\beta)}$. Les ensembles $E^{(\beta)}$ étant compacts, il existe $\beta_o < \alpha_o$ tel que $E^{(\beta_o)}$ est vide, ce qui contredit le fait que α_o est maximal.

Démonstration du théorème 1.

A tout compact dénombrable E est associé d'après le lemme 4 un ordinal α tel que $E^{(\alpha)}$ est fini non vide. La démonstration se fait par récurrence transfinie sur α. Le corollaire 1 du théorème 2 résoud le cas $\alpha = 1$. Etant donné un $\alpha > 1$ on suppose démontré que pour tout compact dénombrable E ayant un dérivé fini non vide d'ordre $\alpha' < \alpha$ l'espace $PM(E)$ a la propriété de Schur. Soit maintenant E un compact dénombrable tel que $E^{(\alpha)}$ soit fini non vide. Pour alléger la démonstration, on se ramène, grâce au lemme 1, au cas où G est métrique compact.

Soit $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de norme 1 dans $PM(E)$, telle que $S_n \to 0$ pour $\sigma(PM(E)\,,\, PM(E)')$. On va montrer que cette situation est impossible. On note $(e_1 \dots e_n \dots)$ une énumération de E, avec $E^{(\alpha)} = (e_1 \dots e_{k_1})$. On peut toujours supposer, comme dans la démonstration du lemme 2, qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\forall n > 1 \qquad \text{Support } S_n \subset \left\{e_{k_n+1}, \dots e_{k_{n+1}}\right\}.$$

Soit $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite décroissante d'ouverts de G tels que

$$\forall i \geq 1 \qquad \overline{v_{i+1}} \subset v_i$$

et formant une base de voisinages de $E^{(\alpha)}$.

Soit $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de fonctions dans $A(G)$ telle que

(i) $\forall i \geq 1 \quad \psi_i = 1$ dans $\overline{v_i}$

(ii) $\forall i \geq 1 \quad \psi_i = 0$ dans v_{i-1}^c.

On est dans l'alternative suivante :

a) Ou bien

(8) $$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists i_o \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \|S_n(1-\psi_{i_o})\|_{PM(E)} > \varepsilon.$$

La suite $(S_n(1-\psi_{i_o}))_{n=N}^{\infty}$ est en fait dans $PM(E \cap v_{i_o}^c)$ et converge faiblement vers 0 dans cet espace. Or le dérivé d'ordre α de $E \cap v_{i_o}^c$ est vide. Cette situation est impossible d'après l'hypothèse de récurrence.

b) Ou bien

(9) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \quad \forall N \quad \exists n_i \geq N \quad \|S_{n_i}(1 - \psi_i)\|_{PM(E)} \leq \varepsilon.$$

On construit alors une sous-suite $(S_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ telle que

(10) $$\forall i \geq 1 \quad \|S_{n_i}(1 - \psi_i)\|_{PM(E)} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Le support (fini) de chaque élément $S_{n_i}\psi_i$ est dans $v_{i-1} \cap E$. La réunion de ces supports a ses points d'accumulation dans E. La suite $(S_{n_i}\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ est en fait dans un espace $PM(F) \subset PM(E)$ où F est un compact dénombrable ayant un nombre fini de points d'accumulation. Or elle converge faiblement vers 0, et est minorée en norme par $\frac{1}{2}$. Cette situation est impossible d'après le corollaire 1 du théorème 2.

Le théorème 1 peut être utile même dans le cas des groupes discrets comme le montre la

PROPOSITION 2. Soit G un groupe abélien localement compact, $K \subset G$ un ensemble compact et dénombrable, $PM(K)$ l'espace de Banach des distributions portées par K et dont la transformée de Fourier est bornée, G_d le groupe G muni de la topologie discrète et $PM(K_d)$ l'espace de Banach des distributions portées par $K \subset G_d$ et dont la transformée de Fourier est bornée sur le compactifié de Bohr de $\hat{G}$.

Alors $PM(K_d) = PM(K)$.

Pour prouver cette proposition, nous remarquerons d'abord que pour une mesure μ, à valeurs complexes, dont le support est une partie finie de K, les normes de μ dans $PM(K)$ ou $PM(K_d)$ sont égales. D'autre part, d'après un théorème de Loomis, tout élément $S \in PM(K)$ est limite, pour la norme de $PM(K)$, d'une suite μ_n, $n \geq 1$, de mesures à support fini. On a donc $PM(K) \subset PM(K_d)$ et la norme de $PM(K)$ est induite par celle de $PM(K_d)$.

Soit H le sous groupe dénombrable de G_d engendré par K et soit D_n, $n \geq 1$, une approximation de l'identité pour $A(H)$; c'est-à-dire que

(1) $D_n(x) \to 1 \quad (n \to +\infty)$ pour tout $x \in H$

(2) le support de D_n est une partie finie $F_n \subset H$

(3) $\|D_n\|_{A(H)} \leq C$.

Alors on peut, dans le théorème de Loomis mentionné ci-dessus, choisir pour μ_n le produit $D_n S$. Ce produit a bien un sens car $PM(K_d)$ est un $A(H)$-module.

Pour prouver que $PM(K_d) = PM(K)$, soit $\mu \in PM(K_d)$ et $\mu_n = D_n \mu$. On a $\|D_n \mu\|_{PM(K)} = \|D_n \mu\|_{PM(K_d)} \leq C \|\mu\|_{PM(K_d)}$. Enfin $PM(K)$ est l'espace dual de $A(K)$ car tout compact dénombrable est un ensemble de synthèse spectrale. De la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$, bornée dans $PM(K)$, on peut extraire une sous-suite $(\mu_n)_{n\in\Lambda}$, convergente vers $S \in PM(K)$, au sens de la topologie $\sigma(PM(K)\ , A(K))$.

Soit ν la différence $\mu - S$. Pour tout ordinal dénombrable α, appelons $K^{(\alpha)}$ le dérivé d'ordre α de K et soit I l'ensemble des ordinaux dénombrables α tels que le support de ν (qui est une partie de K) soit contenu dans $K^{(\alpha)}$. Nous allons démontrer que I est l'ensemble de tous les ordinaux denombrables ; alors il existera un $\alpha\in I$ tel que $K^{(\alpha)} = \emptyset$ ce qui entraînera $\mu - S = 0$.

Il suffit de prouver que $\alpha\in I \Longrightarrow \alpha+1 \in I$ et que $\beta = \sup I \in I$.

Supposons donc que ν soit porté par $K^{(\alpha)}$ et montrons que ν est portée par $K^{(\alpha+1)}$, le dérivé de $K^{(\alpha)}$.

Soit $x_o \in K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)}$; il suffit de prouver que $\nu\{x_o\} = 0$ ($\nu\{x\}$ a un sens pour tout $x\in H$ car $\nu \in PM(H)$ et H est discret).

Soit $f \in A(K)$, égale à 1 en x_o et à 0 en tout $x\in K^{(\alpha)}$, distinct de x_o. Une telle fonction existe car x_o est un point isolé dans $K^{(\alpha)}$.

On a $\langle(\mu - S)\, D_n\ , f\rangle \to 0$ $(n\in\Lambda\ , n \to +\infty)$. En effet, $\|SD_n - S\|_{PM(K)} \to 0$, et $\langle \mu D_n, f\rangle \to \langle S, f\rangle$, $(n\in\Lambda,\ n \to +\infty)$ pour tout $f \in A(K)$.

D'autre part, puisque le support de $\mu - S$ est contenu dans $K^{(\alpha)}$, le choix de f montre que $\langle(\mu - S)\, D_n, f\rangle \to \nu\{x_o\}$. On a bien $\nu\{x_o\} = 0$ et ν est portée par $K^{(\alpha+1)}$.

Puisque le support L de ν vérifie $L \subset K^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha\in I$, il vérifie $L \subset \bigcap_{\alpha\in I} K^{(\alpha)} = K^{(\beta)}$.

THEOREME 3. Soit H un groupe abélien dénombrable, E une partie de H et Δ le groupe compact dual de H. Supposons qu'il existe un groupe abélien localement compact G, une partie compacte et dénombrable $K \subset G$ et un homomorphisme $h : H \to G$, injectif, tel que $h(E) \subset K$.

Alors l'espace $C_E(\Delta)$ des fonctions continues sur Δ à spectre dans E a la propriété de Schur et est égal à $L^\infty_E(\Delta)$.

En effet $L^\infty_E(\Delta)$ s'identifie au sous-espace de $PM(K_d)$ formé des μ nuls en tout $x \in K$, $x \notin h(E)$. L'égalité $PM(K_d) = PM(K)$ entraîne que $\|\mu D_n - \mu\|_{PM(K)} \to 0$ $(n \to +\infty)$. On a donc $L^\infty_E(\Delta) = C_E(\Delta)$.

Exemples.

1. Soit d_k, $k \geq 1$, une suite d'entiers naturels tendant vers l'infini, telle que $d_1 \geq 1$ et que d_k divise d_{k+1} pour tout $k \geq 1$. Supposons qu'une partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ ait la propriété suivante : pour tout $k \geq 1$, il y a une partie finie $F_k \subset \mathbb{Z}$ telle que $\Lambda \subset F_k \cup d_k\mathbb{Z}$. Alors $C_\Lambda(\mathbb{T}) = L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})$ et cet espace de Banach a la propriété de Schur.

En effet, soit G la limite projective des groupes finis $\mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$ et soit $h : \mathbb{Z} \to G$ l'homomorphisme canonique. Alors $h(\Lambda)$ est une suite d'éléments de G tendant vers 0. Le théorème 3 s'applique donc.

2. Partons de l'ensemble Λ construit ci-dessus et appelons $k\Lambda$ l'ensemble des sommes $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ où $\lambda_j \in \Lambda$, $1 \leq j \leq k$. Alors $C_{k\Lambda}(\mathbb{T}) = L^\infty_{k\Lambda}(\mathbb{T})$ et cet espace de Banach a la propriété de Schur.

L'exemple n° 1 est dû à Y. Meyer qui m'en a donné une preuve différente. Le théorème 1 admet la réciproque suivante :

PROPOSITION 3. a) Soit E un ensemble compact métrisable dans un groupe G l. c. a. Si $PM(E) \subset PM(G)$ a la propriété de Schur, l'ensemble E est dénombrable ; en particulier $\ell^1(E)$ est dense en norme dans $PM(E)$.

a) Soit E un ensemble dans un groupe discret dénombrable Γ. Si $PM(E) \subset PM(\Gamma)$ a la propriété de Schur, $\ell^1(E)$ est dense en norme dans $PM(E)$.

En d'autres termes, si G est un groupe métrique compact et si $L^\infty_E(G)$ a la propriété de Schur, on a $L^\infty_E(G) = C_E(G)$.

Démonstration. a) Il résulte de [10] que tout compact parfait métrisable E dans un groupe G l. c. a. (non discret) contient un compact parfait E_1 qui est un ensemble de Helson, c'est-à-dire que $M(E_1)$ est fermé dans $PM(E_1)$. Or cet espace $M(E_1)$ n'a pas la propriété de Schur. Si $PM(E)$ a la propriété de Schur, l'ensemble E ne peut contenir aucun parfait donc est dénombrable.

b) Soit $(K_n)_{n=1}^\infty$ une approximation de l'identité dans $A(E) = \frac{A(\Gamma)}{I(E)}$, définie comme dans la démonstration de la proposition 2. Si une sous-suite de (K_n) pouvait engendrer dans $A(E)$ un sous-espace isomorphe à ℓ^1, l'espace dual $PM(E)$ contiendrait d'après [8] un sous espace isomorphe à $M(\mathbf{T})$ et n'aurait pas la propriété de Schur. Il résulte du profond théorème de Rosenthal [7] qu'on peut extraire de $(K_n)_{n=1}^\infty$ une suite $(K_{n_i})_{i=1}^\infty$ de Cauchy pour la topologie $\sigma(A(E), PM(E))$. Tout élément $S \in PM(E)$ est limite pour la topologie $\sigma(PM(E), A(E))$ de la suite $(SK_{n_i})_{i=1}^\infty$. Or cette suite est une suite de Cauchy dans $\overline{\ell^1(E)}$ pour $\sigma(\overline{\ell^1(E)}, \overline{\ell^1(E)}')$ donc converge en norme dans $\overline{\ell^1(E)}$, nécessairement vers S.

Un dernier résultat complète le théorème 3. Soit Λ une partie de $\mathbb{Z}$ et pour tout $k \geq 1$, appelons $k\Lambda$ l'ensemble de toutes les sommes $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, $\lambda_j \in \Lambda$.

THEOREME 4. Supposons que pour tout $k \geq 1$, l'espace $C_{k\Lambda}(\mathbf{T})$ ne contienne pas de sous-espaces fermés isomorphes à c_0. Alors tout intervalle fermé de $\mathbf{T}$, non réduit à un point, est associé à $C_\Lambda(\mathbf{T})$.

Dans la preuve du théorème 4, $\mathbf{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la loi du groupe $\mathbf{T}$ est notée additivement et un intervalle fermé de $\mathbf{T}$ est noté $a \leq x \leq b$ lorsque $b-a < 2\pi$; en fait l'intervalle considéré est l'image modulo $2\pi\mathbb{Z}$ de cet intervalle de $\mathbb{R}$.

La preuve du théorème 4 nécessite les lemmes suivants.

LEMME 1. Soit I un ensemble métrisable compact, x_o un élément de I et $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions continues sur I telles que

a) $0 < c_1 \leq \|f_n\|_\infty \leq c_2$

b) $f_n(x_o) \to 0$ et pour toute partie compacte $J \subset I$, ne contenant pas x_o, $\sup_J |f_n| \to 0$ $(n \to +\infty)$. Alors on peut trouver une partie infinie $\Lambda \subset \mathbb{N}$ et deux constantes C_3 et C_4 telles que

c) $C_3 \sup_{n\in\Lambda} |c_n| \leq \sup_I \left| \sum_{n\in\Lambda} c_n f_n(x) \right| \leq C_4 \sup_{n\in\Lambda} |c_n|$.

Il s'agit du phénomène classique de la "bosse glissante".

LEMME 2. On conserve les notations et les hypothèses du lemme 1 mais on supprime la condition $f_n(x_o) \to 0$. Alors on peut trouver deux suites $n_1 < m_1 < n_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$ telles qu'en posant $g_k(x) = f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x)$, on ait

$$C_3 \sup_{k\geq 0} |c_k| \leq \sup_I \left| \sum_{k\geq 0} c_k g_k(x) \right| \leq C_4 \sup_{k\geq 0} |c_k|.$$

Ou bien $f_n(x_o) \to 0$ et le lemme 1 s'applique. Sinon, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $f_n(x_o) \longrightarrow \ell \neq 0$. Alors la sous-suite extraite n'est pas une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}(I)$. Il existe donc un $\delta > 0$ et deux suites n_k, $k \geq 0$ et $m_k \geq 0$ telles que $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ et que $\sup_I |f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \delta$. La suite $g_k(x)$, $k \geq 0$, vérifie donc les hypothèses du lemme 1.

LEMME 3. <u>Les notations étant celles du lemme 1, soit</u> X <u>un sous-espace fermé de</u> $C(I)$, <u>ne contenant aucun sous-espace fermé isomorphe à</u> c_o.

<u>Alors pour tout</u> $x_o \in I$, <u>il existe un voisinage ouvert</u> $V(x_o)$ <u>de</u> x_o <u>tel qu'en posant</u> $J = I \setminus V(x_o)$, <u>les normes</u> $\sup_I |f|$ <u>et</u> $\sup_J |f|$ <u>soient équivalentes sur</u> X.

Supposons en effet que la conclusion du lemme 3 ne soit pas satisfaite : il existerait donc un système fondamental V_n, $n \geq 1$, de voisinages de x_o et une suite $f_n \in X$ telle que $\sup_{V_n} |f_n| = 1$ et que $\sup_{I \setminus V_n} |f_n| \longrightarrow 0$.

Les hypothèses du lemme 2 sont donc satisfaites et X contient un sous-espace fermé isomorphe à c_o.

LEMME 4. <u>Soit</u> Λ <u>une partie de</u> $\mathbb{Z}$ <u>et</u> E <u>l'ensemble</u> $\Lambda + \Lambda$. <u>On suppose que</u> $C_E(\mathbb{T})$ <u>ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à</u> c_o. <u>Soit</u> $[-L, L]$ <u>un intervalle associé à</u> $C_E(\mathbb{T})$. <u>Alors pour tout</u> $\ell > \frac{L}{2}$, $[-\ell, \ell]$ <u>est un intervalle associé à</u> $C_\Lambda(\mathbb{T})$.

Remarquons d'abord qu'en appliquant le lemme 3 à $X = C_E(T)$ et $I = [-\pi, \pi]$

où $-\pi$ et π sont identifiés à x_o, on vérifie qu'il existe un $L < \pi$ tel que $[-L, L]$ soit associé à E. En prenant cette fois $x_o = 0$, on montre qu'il y a un $\varepsilon > 0$ tel que la réunion de $[-L, -\varepsilon]$ et de $[\varepsilon, L]$ soit associée à $E = \Lambda + \Lambda$.

Soit d la borne inférieure des longueurs des intervalles associés à Λ. On a évidemment $0 \leq d \leq 2L \leq 2\pi$.

En raisonnant par l'absurde, supposons $d > L$. Soit $\eta > 0$ un nombre assez petit pour que $2L + \eta < 2\pi$ et que $\eta < d/3$; considérons les deux intervalles $I_1 = [-d, -\eta]$ et $I_2 = [-d, \eta]$ de $\mathbf{T}$. Alors I_1 n'est pas associé à Λ tandis que I_2 l'est. Il existe donc une suite $f_n \in C_\Lambda$ telle que $\sup\limits_{I_1} |f_n| \to 0$, $f_n(x_n) = 1$, $-\eta \leq x_n \leq \eta$ et $\sup\limits_{\mathbf{T}} |f_n| \leq C(\eta)$. Formons $g_n(x) = f_n(x - x_n)$. On a

$\sup\limits_{[-d+\eta, -2\eta]} |g_n| \to 0$, $g_n(0) = 1$ et $\sup\limits_{T} |g_n| \leq C$. Posons $h_n(x) = \overline{g_n(-x)}$;

$h_n \in C_\Lambda$, $\sup\limits_{[2\eta, d-\eta]} |h_n| \to 0$, $h_n(0) = 1$ et $\sup\limits_{T} |h_n| \leq C(\eta)$. Alors $F_n = g_n h_n \in C_E(\mathbf{T})$, converge uniformément vers 0 sur la réunion de $[-d+\eta, -2\eta]$ et de $[2\eta, d-\eta]$ et vaut 1 en 0. Si $d > L$, $2\eta < \varepsilon$ et $\eta < d-L$ ceci contredit le fait que $[-L, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, L]$ soit associé à $C_E(T)$.

La preuve du théorème 4 est maintenant évidente. Partant de $[-\pi, \pi]$ associé à $C_{2^k\Lambda}$, on déduit, par applications répétées du lemme 4 que $\left[-\frac{\pi}{2^k}, \frac{\pi}{2^k}\right]$ est associé à C_Λ.

L'idée d'utiliser le produit $F_n = g_n h_n$ dans la preuve du théorème 4 est due à J.-F. Méla.

Bibliographie

[1] BESSAGA, C. and PELCZYNSKI, A. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math. 17 (1958).

[2] BLEI, R.

[3] GROTHENDIECK, A. Sur les applications faiblement compactes d'espaces du type C(K). Canadian J. Math. (1953).

[4] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag. Chap. IV, 5 et chap. X, 5.

[5] KAMKE, E. Theory of sets.

[6] LUST, F. Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon. Colloquium Mathematicum.

[7] ODELL, E. and ROSENTHAL, H. A double dual characterisation of separable Banach spaces containing ^{1}. A paraître.

[8] PELCZYNSKI, A.

[9] VAROPOULOS, N. Th. Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques. C. R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 3831-3834.

[10] Tensor algebras and harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967), 4.3.

[11] RUDIN, W. Fourier analysis on groups.