PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

89-02

ANALYSE HARMONIQUE
GROUPE DE TRAVAIL SUR LES
ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

89-02

ANALYSE HARMONIQUE
GROUPE DE TRAVAIL SUR LES
ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

CODE MATIERE AMS (1980) : 46L10 - 22D25 - 47D30 - 43A46 - 43A15

Table des matières

RESUME

Ce tome contient quatre exposés : les deux premiers sont des exposés de séminaires sur les travaux de leurs auteurs, le troisième est un travail original, le quatrième est une rédaction détaillée d'un résultat de J. Bourgain paru ailleurs.

1. **C* algèbres et analyse harmonique, par R. Exel.** On applique le théorème de F. et M. Riesz non commutatif à un problème lié au théorème de Sarason sur $H^\infty + C$.

2. **Opérateurs p-nucléaires et strictement p-intégraux, par C. S. Cardassi.** On donne des conditions portant sur X ou Y pour que les opérateurs strictement p-intégraux : $X \to Y$ soient compacts ou p-nucléaires.

3. **Des sous-espaces de C(G) invariants par translation qui ont la propriété de Schur forte, par W. Schachermayer.** Soit G un groupe abélien métrique compact, soit Λ un sous ensemble de son dual. On donne une condition suffisante pour que l'espace $C_\Lambda(G)$ des fonctions continues à spectre dans Λ ait la propriété de Schur forte.

4. **Existence de vrais Λ(p), par H. Queffelec, d'après J. Bourgain.** Il existe des parties E de Z qui sont $\Lambda(p)$ mais pas $\Lambda(p+\epsilon)$ $(2 < p < \infty)$.

ABSTRACT

This volume contains four papers : the first two are expository papers on their authors' work. The third one is an original work. The fourth one is a detailed version of a result of J. Bourgain which is published elsewhere.

1. **C* algebras and harmonic analysis, by Ruy Exel.** We show an application of the non-commutative F. and M. Riesz theorem to a question related to Sarason's theorem on the closedness of $H^\infty + C$.

2. **Strictly p-integral and p-nuclear operators by Carmen Silvia Cardassi.** In this note we present conditions under which every strictly p-integral operator is compact or p-nuclear, first independently of the range space and afterwards of the domain.

3. **Some translation invariant subspaces of C(G) which have the strong Schur property by Walter Schachermayer.** Let G be a compact metric abelian group and Λ a subset of the dual group. We give a condition which ensures that the space $C_\Lambda(G)$ of continuous functions on G with spectrum in Λ has the strong Schur property.

4. **There exist true Λ(p)'s, after J. Bourgain, by Hervé Queffelec.** We give a detailed proof of the recent result of J. Bourgain on the existence, for $2 < p < \infty$, of subsets E of Z which are $\Lambda(p)-$sets, but not $\Lambda(p+\epsilon)-$sets if $\epsilon > 0$.

Ruy EXEL*

C^* ALGEBRAS AND HARMONIC ANALYSIS

Abstract. We show an application of the non-commutative F. and M. Riesz theorem to a question related to Sarason's theorem on the closedness of $H^\infty + C$.

INTRODUCTION.

In this notes we shall show an application of the non-commutative F and M. Riesz theorem [2] to a question related to Sarason's theorem on the closedness of $H^\infty + C$ [4]. The main ingredient in the proof of Sarason's theorem is the following : if f is a continuous function on the unit circle then the distance from f to the space H^∞ (in the uniform norm) is the same as its distance to the space of continuous functions in H^∞.

Our main interest will be a non-commutative generalization of this fact. We shall work in the setting of C^*-algebras and analytic sub-algebras as defined in [2] which we briefly describe below.

The results presented here were communicated at the Harmonic Analysis Seminar, Université de Paris-Sud, centre d'Orsay on April 27, 1987. The author wishes to express his thanks to Prof. Myriam Dechamps for the oportunity to speak at this seminar.

PRELIMINARIES.

We should fix, throughout, a unitar C^*-algebra A with a positive normalized trace τ and an analytic subalgebra B. In precise terms τ is a continuous linear functional on A satisfying

i) $\tau(a^*a) \geqslant 0 \quad \forall a \in A$

ii) $\tau(1) = \|\tau\| = 1$

iii) $\tau(ab) = \tau(ba) \quad \forall a,b \in A$

(*) Partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnologico-CNP$_q$., Brazil

While B is a (possibly non-self adjoint) closed sub-algebra of A satisfying

i) $B + B^\star$ is dense in A

ii) $1 \in B$

iii) $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y) \qquad \forall x,y \in B$

The kernel of the restriction of τ to B will be denoted by Bo.

The Gelfand-Naimark-Segal representation of A [3] will be denoted by (π,H,ξ). That is, H is a Hilbert-space, π is a $\star$-representation of A by bounded operators on H which admits ξ as a cyclic vector and moreover satisfy

$$\tau(a) = \langle \pi(a)\xi,\xi \rangle \qquad \forall a \in A .$$

Let $\mathcal{A}$ be the von Neumann algebra generated by the range of π and let $\mathcal{B}_0$ be the ultra weak closure of $\pi(B_0)$. The problem we shall deal with is the following equality

$(\star) \qquad \mathrm{dist}(\pi(a),\mathcal{B}_0) = \mathrm{dist}(a,B_0),\ a \in A.$

The main example is obtained when A is the $C^\star$ algebra of continuous complex valued functions on the unit circle, τ is given by integration against Lebesgue measure and B is the disc algebra. In this case $(\star)$ is true and takes the form :

$$\mathrm{dist}(f,H_0^\infty) = \mathrm{dist}(f,H_0^\infty \cap C),\ f \in C$$

where C denotes the spaces of continuous functions on the unit circle and H_0^∞ is the classical Hardy space of bounded analytic functions on the open unit disc vanishing at the origin.

Sarason's theorem follows easily from this formula.

Another basic source of examples is given by right ordered groups [2]. If G is such a group let A be its reduced $C^\star$-algebra (here we assume G is given the discrete topology), τ be the canonical trace on A [3] and B be the closed subalgebra of A generated by the positive group elements together with the identity operator (see [2]). In this case $(\star)$ is true provided G is amenable and a proof of this result may be found in [1].

THE MAIN RESULTS

As far as we know (★) is not known to be universally valid. We shall nevertheless be able to obtain some positive results in the general case.

To start the argument observe that given $a \in A$ one has for all $b \in B_0$

$$\|a-b\| \geq \|\pi(a)-\pi(b)\| \geq \mathrm{dist}(\pi(a),\pi(B_0)) \geq \mathrm{dist}(\pi(a),\mathscr{B}_0) \ .$$

So it is clear that

$$\mathrm{dist}(a,B_0) \geq \mathrm{dist}(\pi(a),\mathscr{B}_0)$$

A standard use of the Hahn-Banach extension theorem provides a continuous linear functional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ such that

i) $\|\varphi\| = 1$

ii) $\varphi(B_0) = 0$

iii) $|\varphi(a)| = \mathrm{dist}(a,B_0)$.

By the non-commutative F. and M. Riesz theorem [2] we may write

$$\varphi = \varphi_\alpha + \varphi_\sigma$$

where

i) φ_α is absolutely continuous with respect to τ

ii) φ_σ is singular with respect to τ

iii) $\|\varphi\| = \|\varphi_\alpha\| + \|\varphi_\sigma\|$

iv) $\varphi_\alpha(B_0) = \varphi_\sigma(B_0) = 0$

v) $\varphi_\sigma(1) = 0$

1. Lemma $|\varphi_\alpha(a)| = \|\varphi_\alpha\| . \mathrm{dist}(a,B_0)$.

Proof. It b is chosen in B_0 such that $\|a-b\| \leq \mathrm{dist}(a,B_0) + \varepsilon$ we have

$$\mathrm{dist}(a,B_0) = |\varphi(a)| \leq |\varphi_\alpha(a)| + |\varphi_\sigma(a)| =$$

$$= |\varphi_\alpha(a-b)| + |\varphi_\sigma(a-b)| \leq \|\varphi_\alpha\|\|a-b\| + \|\varphi_\sigma\|\|a-b\| \leq$$

$$\leq \|\varphi_\alpha\|(\mathrm{dist}(a,B_0)+\varepsilon) + \|\varphi_\sigma\|(\mathrm{dist}(a,B_0)+\varepsilon) = \mathrm{dist}(a,B_0)+\varepsilon$$

In this chain of inequalities the increase at each step cannot therefore be by more than ε . So it follows that

$$\|\varphi_\alpha\|(\mathrm{dist}(a,B_0)+\varepsilon) \leq |\varphi_\alpha(a)|+\varepsilon$$

Taking ε to the limit we conclude that

$$\|\varphi_\alpha\| \ \mathrm{dist}(a,B_0) \leq |\varphi_\alpha(a)|$$

and since the converse inequality is clearly true the lemma is proved. □

2. Lemma. If $\varphi_\alpha \neq 0$ then

$$\mathrm{dist}(a,B_0) = \mathrm{dist}(\pi(a),\mathscr{B}_0)$$

Proof. Given that $\varphi_\alpha \neq 0$ let $\psi = \|\varphi_\alpha\|^{-1} \varphi_\alpha$ so that

i) ψ is absolutely continuous with respect to τ

ii) $\|\psi\| = 1$

iii) $\psi(B_0) = 0$

iv) $|\psi(a)| = \mathrm{dis}(a,B_0)$.

In other words we may have chosen, under our present hypothesis, an absolutely continuous φ at the very start. Therefore by [2], proposition 1, there exists a normal linear fonctional $\bar{\psi}$ on $\mathcal{A}$ such that

i) $\bar{\psi}\pi(x) = \psi(x) \qquad \forall x \in A$

ii) $\|\bar{\psi}\| = \|\psi\|$.

It follows that $\bar{\psi}(\mathscr{B}_0) = 0$ so for all $x \in \mathscr{B}_0$ we have

$$\|\pi(a)-x\| \geq |\bar{\psi}(\pi(a)-x)| = |\bar{\psi}(\pi(a))| = |\psi(a)| = \mathrm{dist}(a,B_0)$$

whence

$$\mathrm{dist}(\pi(a),\mathscr{B}_0) \geq \mathrm{dist}(a,B_0)$$

concluding the proof. □

3. Lemma. Suppose $a = a_0+\lambda.1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ and that $|\lambda| > 2\|a_0\|$ then

$$\mathrm{dist}(a,B_0) = \mathrm{dist}(\pi(a),\mathscr{B}_0).$$

Proof. In view of the last lemma it clearly suffices to show that $\varphi_\alpha \neq 0$. Suppose this is not the case so that $\|\varphi_\sigma\| = 1$ and $\mathrm{dist}(a,B_0) = |\varphi_\sigma(a)|$. We then have

$$\mathrm{dist}(a,B_0) = |\varphi_\sigma(a)| + |\varphi_\sigma(a_0 + \lambda.1)| = |\varphi_\sigma(a_0)| \leq \|a_0\|$$

On the other hand

$$\mathrm{dist}(a,B_0) = \mathrm{dist}(a_0+\lambda,B_0) \geqslant \mathrm{dist}(\lambda,B_0)-\mathrm{dist}(a_0,B_0) \geqslant |\lambda| - \|a_0\| .$$

Note that we have used that $\mathrm{dist}(\lambda,B_0) = |\lambda|$, a fact that follows easily from $\tau(\lambda) = \lambda$, $\tau(B_0) = 0$ and $\|\tau\| = 1$.

Comparing the last two inequalities we have

$$|\lambda| \leqslant 2\|a_0\|$$

contradicting the hypothesis. □

Fix a_0 in A and define for all $\lambda \in C$

$$D(\lambda) = \mathrm{dist}(a_0+\lambda,B_0)$$

$$\mathscr{D}(\lambda) = \mathrm{dist}(\pi(a_0+\lambda),\mathscr{B}_0) .$$

As we have just shown $D = \mathscr{D}$ for λ sufficiently large. Otherwise we have

4. Lemma. Suppose $D(\lambda) \neq \mathscr{D}(\lambda)$. Then D attains its minimum at λ.

Proof. Let $a = a_0 + \lambda$ and choose φ, φ_α and φ_σ as before. By lemma 2 we must have $\varphi_\alpha = 0$. Observe that for all $\mu \in \mathbb{C}$, $X \in B_0$

$$D(\lambda) = \mathrm{dist}(a_0+\lambda,B_0) = |\varphi_\sigma(a_0+\lambda)| = |\varphi_\sigma(a_0+\mu-X)| \leqslant \|a_0+\mu-X\| .$$

Taking the infimum for $X \in B_0$ we get

$$D(\lambda) \leqslant \mathrm{dist}(a_0+\mu,B_0) = D(\mu) . \quad □$$

Putting together the previous results we have

5. Theorem. For every $a_0 \in A$ there is a (possibly empty) convex open set of complex numbers contained in $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 2\|a_0\|\}$ and a real positive constant K (see figure 1) such that

i) for $\lambda \notin \Omega$

$$\mathrm{dist}(a_0+\lambda,B_0) = \mathrm{dist}(\pi(a_0+\lambda),\mathscr{B}_0)$$

ii) for $\lambda \in \Omega$

$$\mathrm{dist}(a_0+\lambda,B_0) \equiv K \text{ and}$$

$$\mathrm{dist}(\pi(a_0+\lambda),\mathscr{B}_0) < K$$

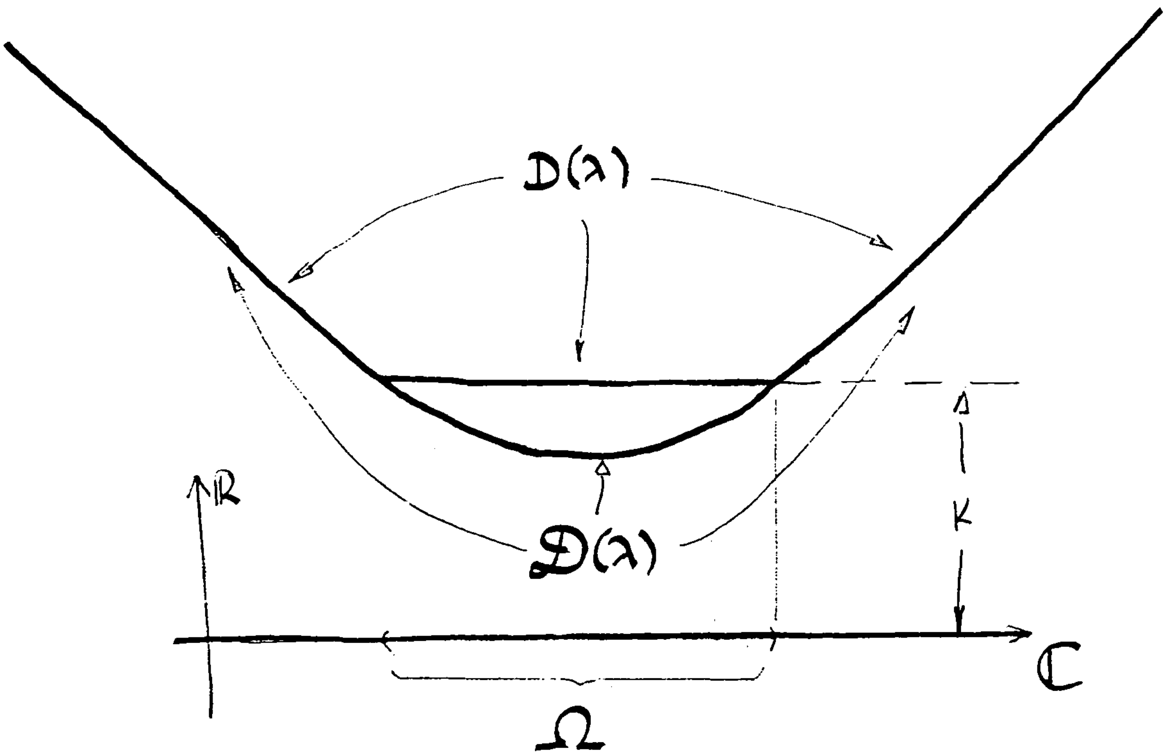


figure 1. Comparison between D and $\mathscr{D}$

Proof. Let $K = \inf_{\lambda \in C} D(\lambda)$ and let

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathscr{D}(\lambda) < K\} .$$

It is clear that Ω is open and convex (even if it is empty).

For $\lambda \in \Omega$ we have $\mathscr{D}(\lambda) < K \leqslant D(\lambda)$ so lemma 4 gives $D(\lambda) = K$ and lemma 3 gives $|\lambda| \leqslant 2\|a_0\|$.

For $\lambda \notin \Omega$ we must have $D(\lambda) = \mathscr{D}(\lambda)$ since otherwise lemma 4 will imply that

$$\mathscr{D}(\lambda) < D(\lambda) = K. \qquad \square$$

6. Corollary. Suppose $a \in A$ and $\|a-1\| < \frac{1}{2}$ then

$$\mathrm{dist}(a, B_0) = \mathrm{dist}(\pi(a), \mathscr{B}_0)$$

Proof. Let $a_0 = a-1$ and $\lambda = 1$. Then $|\lambda| > 2\|a_0\|$ and the result follows from lemma 3. $\square$

CONCLUDING REMARKS

We were led to study the above question because of its relations to the theory of Hankel matrices over right ordered groups. In particular a positive answer to (★) will enable us to deduce Hartman's theorem from Nehari's theorem (see [1]) for general riht ordered groups.

A positive answer to (★) would also provide the closedness of $\pi(A) + \mathcal{B}_0$ generalizing Sarason's theorem.

We believe it would be interesting to understand the obstructions, if any, to the validity of (★) from the point of view of geometry of Banach spaces.

REFERENCES

[1] Exel, R., "Hankel Matrices Over Right Ordered Amenable Groups", preprint, 1986.

[2] Exel, R., "The F. and M. Riesz Theorem for C^*-Algebras", preprint, 1986

[3] Pedersen, G.K., "C^*-Algebras and their Automorphism Groups", Acad. Press, 1979

[4] Sarason, D., "Algebras of functions on the unit circle", Bull. Amer. Math. Soc., 79, (1973), 286-299.

Current Address :
Mathematics Research Centre
University of Warwick
Coventry CV4 7AL
England

Permanent Address :
Departamento de Matematica
IMEUSP
C.P. 20570 (Ag. Iguatemi)
01498 Sao Paulo SP
Brazil

Exposé n°2
Carmen Silvia Cardassi

STRICTLY p-INTEGRAL AND p-NUCLEAR OPERATORS

ABSTRACT. In this note we present conditions under which every strictly p-integral operator is compact or p-nuclear, first independently of the range space and afterwards of the domain.

I. DEFINITIONS AND EXAMPLES

In all that follows X, Y and Z are Banach spaces and $L(X,Y)$, $K(X,Y)$ and $W(X,Y)$ denote respectively the spaces of all bounded linear operators, of the compact operators, and of the weakly compact operators from X into Y. Also, RNP and wRNP are shortenings for the Radon-Nikodym and the weak Radon-Nikodym properties, respectively.

DEFINITION I.1. A linear mapping $T : X \to Y$ is <u>p-nuclear</u>, $1 \leq p \leq \infty$, if there are sequences $\{x_n^\star\}$ in $X^\star$ and $\{y_n\}$ in Y such that

(i) $Tx = \sum_n \langle x_n^\star , x \rangle y_n$, for every $x \in X$;

(ii) $\sum_n \|x_n^\star\|^p < \infty$, if $1 \leq p < \infty$,

and $\lim_n \|x_n^\star\| = 0$, if $p = \infty$;

(iii) $\sup \{\sup_n |\langle y^\star, y_n \rangle| : y^\star \in B_{Y^\star}\} = \sup_n \|y_n\| < \infty$, if $p = 1$,

and $\sup\{(\sum_n |\langle y^\star, y_n\rangle|^q)^{1/q} : y^\star \in B_{Y^\star}\} < \infty$, if $1 < p \leq \infty$, where q is the conjugate exponent of p.

In this case, the <u>p-nuclear norm</u> of T is given by

$n_1(T) = \inf\{(\sum_n \|x_n^\star\|) \sup_n \|y_n\|\}$, if $p = 1$,

$n_p(T) = \inf\{(\sum_n \|x_n^\star\|^p)^{1/p} \sup(\sum_n |\langle y^\star, y_n\rangle|^q)^{1/q} : y^\star \in B_{Y^\star}\}$, if $1 < p < \infty$, and

$n_\infty(T) = \inf\{(\sup_n \|x_n^\star\|) \sup \{\sum_n |\langle y^\star, y_n\rangle| : y^\star \in B_{Y^\star}\}$, if $p = \infty$, where the infima are taken over all possible representations of T as in (i), satisfying (ii) and (iii).

The set of p-nuclear linear mappings from X into Y is denoted by $N_p(X,Y)$.

DEFINITION I.2. A linear mapping $T : X \to Y$ is <u>strictly p-integral</u>, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, if there is a σ-additive vector measure $G : \mathcal{B}(B_{X^\star}) \to Y$ such that

(i) $Tx = \int_{B_{X^\star}} \langle x^\star, x\rangle \, dG(x^\star)$, for every $x \in X$;

(ii) If $p < \infty$, there exists $\mu \in rca^+(\mathcal{B}(B_{X^\star}))$ such that

$$\left\| \int_{B_{X^\star}} f \, dG \right\| \leqslant \left[\int_{B_{X^\star}} |f|^p \, d\mu \right]^{1/p} ,$$

for every $f \in C(B_{X^\star})$.

In this case, the <u>strictly p-integral</u> norm of T is given by

$si_p(T) = \inf\{\mu(B_{X^\star})^{1/p} : G$ and μ satisfy (i) (ii)$\}$, if $1 \leqslant p < \infty$, and

$si_\infty(T) = \inf\{\|G\|(B_{X^\star}) : G$ satisfies (i)$\}$, if $p = \infty$.

The set of strictly p-integral linear mappings from X into Y is denoted by $SI_p(X,Y)$.

DEFINITION I.3. A linear mapping $T : X \to Y$ is <u>p-integral</u>, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, if $J_Y \circ T : X \to Y^{\star\star}$ is strictly p-integral, where J_Y is the canonical injection of Y into $Y^{\star\star}$.

In this case, the <u>p-integral norm</u> of T is given by $i_p(T) = si_p(J_Y \circ T)$.

The set of p-integral linear mappings from X into Y is denoted by $I_p(X,Y)$.

REMARK. It can be shown that $N_p(X,Y) \subset SI_p(X,Y) \subset I_p(X,Y) \subset L(X,Y)$, with $\|.\| \leqslant i_p(.) \leqslant si_p(.) \leqslant n_p(.)$, and that all these sets of operators are Banach spaces when endowed with their respective norms.

Also, $N_p(X,Y)$, $SI_p(X,Y)$ and $I_p(X,Y)$ have an ideal structure, ie, the composition either on the left or on the right side of an arbitrary operator with one in any of these classes produces a new element of the same class. For this reason they are usually refered as operator ideals.

It is worthy to note that $N_p(X,Y) \subset K(X,Y)$. Also, $SI_p(X,Y) \subset W(X,Y)$ and $SI_p(X,Y) \subset C(X,Y)$, where $C(X,Y)$ denotes the set of completely continuous operators from X into Y.

EXAMPLE I.4. Canonical p-nuclear operators, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Let $\delta = \{\delta_n\} \varepsilon \ell_p$, if $1 \leqslant p < \infty$, and $\delta \varepsilon c_0$, if $p = \infty$, and define diagonal operators $\Delta_p : \ell_\infty \to \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, and $\Delta_\infty : \ell_\infty \to c_0$ by

$$\Delta_p\{a_n\} = \{\delta_n a_n\} \text{ , for all } \{a_n\} \varepsilon \ell_\infty.$$

Then $\Delta_p \varepsilon N_p(\ell_\infty, \ell_p)$, $1 \leqslant p < \infty$, and $\Delta_\infty \varepsilon N_\infty(\ell_\infty, c_0)$, with $\|\Delta_p\| = \|\delta\|_p = n_p(\Delta_p)$.

They are called canonical because every p-nuclear operator admits Δ_p as a factor (Theorem I.7).

EXAMPLE I.5. Canonical strictly p-integral operators, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Let K be a compact Hausdorff space, $\nu \varepsilon rca^+(\mathscr{B}(K))$, (Ω,Σ,μ) be a finite measure space and J_p be either the inclusion of $C(K)$ into $L_p(K,\nu)$ or the inclusion of $L_\infty(\Omega,\mu)$ into $L_p(\Omega,\mu)$, for $1 \leqslant p < \infty$. Then J_p is a strictly p-integral operator, with $\|J_p\| = si_p(J_p)$. In the first case, $si_p(J_p) = \nu(K)^{1/p}$ and in the second one, $si_p(J_p) = \mu(\Omega)^{1/p}$. They are canonical because any strictly p-integral operator, $1 \leqslant p < \infty$, admits J_p as a factor, for some compact Hausdorff space K and some finite measure space (Ω,Σ,μ) (Theorem I.8).

For $p = \infty$, we have $W(C(K),Y) = SI_\infty(C(K),Y)$ and $W(L_\infty(\mu),Y) = SI_\infty(L_\infty(\mu),Y)$, for any Banach space Y, and $\|.\| = si_\infty(.)$. Any strictly ∞-integral operator $T : X \to Y$ is such that $T = B \circ A$, where $A \varepsilon L(X,C(K))$ and $B \varepsilon W(C(K),Y)$ for some compact Hausdorff space K, or $A \varepsilon L(X,L_\infty(\mu))$ and $B \varepsilon W(L_\infty(\mu),Y)$, for some finite measure space (Ω,Σ,μ) (Theorem I.8).

EXAMPLE I.6.

Let $i_r : \ell_1 \to \ell_r$, $2 \leq r < \infty$ and $i_0 : \ell_1 \to c_0$ be the canonical inclusions.

Then $i_r \in SI_p(\ell_1,\ell_r)$, for any p, $1 < p \leq \infty$, and $i_0 \in SI_p(\ell_1,c_0)$, for any p, $1 < p \leq \infty$.

Also, $i_2 \notin SI_1(\ell_1,\ell_2)$, but $K_{\ell_2} \circ i_2 \in SI_1(\ell_1,\ell_\infty(B_{\ell_2}))$, where $\ell_\infty(B_{\ell_2})$ is the canonical injective space associated to ℓ_2 and K_{ℓ_2} is the canonical injection of ℓ_2 into $\ell_\infty(B_{\ell_2})$. Recall that for a Banach space Z, $\ell_\infty(B_{Z^\star})$ is the space of bounded families of scalars $\{a_{z^\star}\}_{z^\star \in Z^\star}$, with norm $\|\{a_{z^\star}\}\| = \sup\{|a_{z^\star}| : z^\star \in Z^\star\}$ and that Z can be identified with a subspace of $\ell_\infty(B_{Z^\star})$ through the mapping $K_Z : Z \to \ell_\infty(B_{Z^\star})$, given by $K_Z(z) = \{z^\star(z)\}_{z^\star \in Z^\star}$.

THEOREM I.7

I. Let $1 \leq p < \infty$. An operator T belongs to $N_p(X,Y)$ if and only if it admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "\Delta_p"'] & \ell_p \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

where $P \in L(X,\ell_\infty)$, $Q \in L(\ell_p,Y)$ and Δ_p is a diagonal operator, ie, there is $\delta = \{\delta_n\} \in \ell_p$ such that $\Delta_p\{a_n\} = \{a_n\delta_n\}$, for $\{a_n\} \in \ell_\infty$.

II. An operator T belongs to $N_\infty(X,Y)$ if and only if it admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "\Delta_\infty"'] & c_0 \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

where $P \in L(X,\ell_\infty)$, $Q \in L(c_0,Y)$ and Δ_∞ is a diagonal operator as in Example I.4.

Moreover, given $\varepsilon > 0$, a factorization can be chosen in I or II such that $\|P\| \leq 1$, $\|Q\| \leq 1$ and $n_p(\Delta_p) \leq n_p(T) + \varepsilon$.

THEOREM I.8.

I. Let $1 \leq p < \infty$. The following conditions are equivalent :

(1) $T \in SI_p(X,Y)$;

(2) T admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & Y \\ C(K) \arrow[r, "J_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

where K is a compact Hausdorff space, $\mu \in rca^+(\mathscr{B}(K))$, J_p is the canonical injection of $C(K)$ into $L_p(K,\mu)$, $A \in L(X, L_\infty(K,\mu))$ and $B \in L(L_p(\Omega,\mu),Y)$;

(3) T admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & Y \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "J_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

where (Σ,Ω,μ) is a finite measure space, J_p is the canonical injection of $L_\infty(\Omega,\mu)$ into $L_p(\Omega,\mu)$, $A \in L(X, L_\infty(\Omega,\mu))$ and $B \in L(L_p(\Omega,\mu),Y)$.

In this case, given $\varepsilon > 0$, it is possible to choose a factorization as in (2) or (3) such that $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ and $si_p(J_p) \leq si_p(T) + \varepsilon$.

II. The following conditions are equivalent :

(1) $T \in SI_\infty(X,Y)$;

(2) T admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & Y \\ & C(K) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

where K is a compact Hausdorff space, $A \in L(X,C(K))$ and $B \in W(C(K),Y)$;

(3) T admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & Y \\ & L_\infty(\mu) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

where (Ω,Σ,μ) is a finite measure space, $A \in L(X,L_\infty(\Omega,\mu))$ and $B \in W(L_\infty(\Omega,\mu),Y)$.

In this case, given $\varepsilon > 0$, it is possible to choose a factorization as in (2) or (3) such that $\|A\| \leqslant 1$ and $\|B\| = si_\infty(B) \leqslant si_\infty(T) + \varepsilon$.

REMARK. More information about these operator ideals can be found in [PP] and [CA].

In this work, we present conditions under which $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$ and $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, for $1 < p \leqslant \infty$. These problems were suggested by the following well-known results.

THEOREM A. $X^\star$ has RNP $\Leftrightarrow SI_1(X,.) = N_1(X,.)$, with $si_1 = n_1$.

THEOREM B. Y has RNP $\Leftrightarrow SI_1(.,Y) = N_1(.,Y)$, with $si_1 = n_1$.

II. SPACES X SUCHT THAT $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$

Our first result is a characterization of the spaces X for which $SI_p(X,.) \subset K(X,.)$, for one or all p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. It is interesting to note that the characterization does not depend on p, and that it is equivalent to $I_p(X,.) \subset K(X,.)$.

THEOREME II.1. The following conditions on X are equivalent :

(1) $X^\star$ has the weak Radon-Nikodym property ;

(2) $X \not\supset \ell_1$;

(3) for every p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $SI_p(X,.) \subset K(X,.)$;

(4) there exists p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, such that $SI_p(X,.) \subset K(X,.)$;

(5) for every p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $I_p(X,.) \subset K(X,.)$;

(6) there exists p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, such that $I_p(X,.) \subset K(X,.)$.

PROOF. (1) $\Leftrightarrow$ (2) It is well-known [DUP-page 151].

(2) $\Rightarrow$ (3) Let p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Y and $T \in SI_p(X,Y)$ be given.

Then $T = B_\circ A$ where $A \in L(X,C(K))$ and $B \in W(C(K),Y)$, for some compact Hausdorff space K.

Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in X. Since $X \not\hookleftarrow \ell_1$, from Rosenthal's Theorem it follows that $\{x_n\}$ has a weakly Cauchy subsequence $\{x_{n_k}\}$, so that $\{Ax_{n_k}\}$ is a weakly Cauchy sequence in $C(K)$. But $W(C(K),Y) = C(C(K),Y)$ [DU-VI.2.17] and then $\{Tx_{n_k}\} = \{B(Ax_{n_k})\}$ is norm convergent in Y because B is completely continuous. Hence T is a compact operator.

(3) $\Rightarrow$ (4) It is obvious.

(4) $\Rightarrow$ (2) From Example I.6, for any p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, there are a space Y and an operator $T : \ell_1 \to Y$ such that $T \in SI_p(\ell_1,Y)$ but $T \notin K(\ell_1,Y)$. Namely, $Y = \ell_2$ and $T = i_2$, if $1 < p \leqslant \infty$, and $Y = \ell_\infty(B_{\ell_2})$ and $T = K_{\ell_2} \circ i_2$, if $p = 1$.

Then T admits a factorization $T = B_\circ A$, with $A \in L(\ell_1,L_\infty(\mu))$ and $B \in L(L_\infty(\mu),Y)$, for some finite measure space (Ω,Σ,μ).

Suppose $X \hookleftarrow \ell_1$. By the extension property of $L_\infty(\mu)$, there is an operator $\hat{A} \in L(X,L_\infty(\mu))$, such that $\hat{A}|_{\ell_1} = A$.

The operator $\hat{T} = B_\circ \hat{A} : X \to Y$ is strictly p-integral because B is, and is not compact, otherwise $\hat{T}|_{\ell_1} = T$ would be compact, too.

This contradicts (4). Hence $X \not\hookleftarrow \ell_1$.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) and (4) $\Leftrightarrow$ (6) Since $T \in I_p(X,Y)$ if and only if $J_Y \circ T \in SI_p(X,Y^{**})$, for any p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, and $T \in K(X,Y)$ if and only if $J_Y \circ T \in K(X,Y^{**})$ for J_Y is an isometry, it follows that $I_p(X,.) \subset K(X,.)$ if and only if $SI_p(X,.) \subset K(X,.)$. □

While a necessary condition for $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$ is given by Theorem II.1, we have a sufficient condition in Theorem II.4, as a consequence of a multiplication theorem.

DEFINITION II.2. An operator $T : X \to Y$ is an Asplund operator if it admits a factorization as

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \\ & W \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

where $P \in L(X,W)$, $Q \in L(W,Y)$ and $W^\star$ has RNP (ie, W is an Asplund space).

THEOREM II.3. Let $1 \leqslant p \leqslant \infty$. If $S \in L(X,Y)$ is an Asplund operator, and $T \in SI_p(Y,Z)$, then $T_\circ S \in N_p(X,Z)$ and $n_p(T_\circ S) \leqslant \|S\|\ si_p(T)$.

PROOF. Let $p < \infty$. If $T \in SI_p(Y,Z)$ and $\varepsilon > 0$ are given, choose a factorization

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & Z \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "J_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

where (Ω,Σ,μ) is a finite measure space, $A \in L(Y,L_\infty(\mu))$; $\|A\| \leqslant 1$, $B \in L(L_p(\mu),Z)$, $\|B\| \leqslant 1$ and $\mu(\Omega)^{1/p} \leqslant si_p(T) + \varepsilon$.

Since S is an Asplund operator, it admits a factorization

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \\ & W \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

where $W^\star$ has RNP , $P \in L(X,W)$, $Q \in L(W,Y)$, $\|Q\| \leqslant 1$ and $\|P\| \leqslant \|S\| + \varepsilon$.

Then

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"] & Z \\ & W \arrow[ur, "Q"'] & L_\infty(\mu) \arrow[r, "J_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

Consider $A_\circ Q : W \to L_\infty(\mu)$ and $(A_\circ Q)^\star : L_\infty(\mu)^\star \to W^\star$. Let $R = (A_\circ Q)^\star|_{L_1(\mu)}$.
Since $W^\star$ has RNP, R is representable by a bounded μ-mesurable function $g : \Omega \to W^\star$,

$$Rf = \int_\Omega f(t)g(t)d\mu(t), \text{ for } f \in L_1(\mu) ,$$

with $\|g\|_\infty = \|R\| \leqslant \|(A_\circ Q)^\star\| = \|A_\circ Q\| \leqslant 1$.

Defining $F : \Omega \to W^\star$ by

$$\langle F(t),w\rangle = [(A_\circ Q)w](t) \ , \text{ for } t\varepsilon\Omega \text{ and } w\varepsilon W \ ,$$

one has $\langle F(.),w\rangle \varepsilon L_\infty(\mu)$ for every $w\varepsilon W$, so that the integral $\int_\Omega f(t)\langle F(t),w\rangle d\mu(t)$ exists, for every $f\varepsilon L_1(\mu)$ and $w\varepsilon W$.

But

$$\int_\Omega f(t)\langle F(t),w\rangle d\mu(t) = \int_\Omega f(t)\langle (A_\circ Q)w\rangle(t) d\mu(t)$$

$$= \langle f,(A_\circ Q)w\rangle = \langle Rf,w\rangle \ ,$$

for every $f\varepsilon L_1(\mu)$ and $w\varepsilon W$.

Then $\langle F(t),w\rangle = \langle g(t),w\rangle$, μ-a.e. in Ω, for every $w\varepsilon W$. Hence $F = g$ μ-a.e. and $F\varepsilon L_\infty(\mu,W^\star)$.

<u>Case 1</u>. F has countable range.

Let $\{u_n^\star : n\varepsilon\mathbb{N}\}$ be the set of distinct nonzero essential values of F. Defining, for each $n\varepsilon\mathbb{N}$, $E_n = F^{-1}\{u_n^\star\}$, one has that E_n is μ-measurable and $\mu(E_n) > 0$. Moreover, $\{E_n\}$ is a pairwise disjoint sequence in Σ.

Let the sequences $\{w_n^\star\}$ in $W^\star$ and $\{f_n\}$ in $L_p(\mu)$ be given by

$$w_n^\star = \mu(E_n)^{1/p}\, u_n^\star \quad\text{and}\quad f_n = \mu(E_n)^{-1/p}\chi E_n \ ,$$

for $n\varepsilon\mathbb{N}$. Then

$$\sum_n \|w_n^\star\|^p = \sum_n \|u_n^\star\|^p \mu(E_n) = \|F\|_p^p \leqslant \|F\|_\infty^p \mu(\Omega) \ ,$$

and, for $h\varepsilon L_q(\mu) = L_p(\mu)^\star$,

$$\sum_n |\langle h,f_n\rangle|^q = \sum_n \mu(E_n)^{-q/p} \left|\int_{E_n} h d\mu\right|^q$$

$$\leqslant \sum_n \mu(E_n)^{-q/p}\left[\left(\int_{E_n} 1^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_{E_n} |h|^q d\mu\right)^{1/q}\right]^q$$

$$= \sum_n \int_{E_n} |h|^q d\mu \leqslant \|h\|_q^q \ , \text{ if } 1 < q < \infty,$$

and

$$\sup_n |\langle h,f_n\rangle| = \sup_n \mu(E_n)^{-1}\left|\int_{E_n} h d\mu\right| \leqslant \|h\|_\infty \ , \text{ if } q = \infty.$$

Hence

$$\sup\{(\sum_n |\langle h,f_n\rangle|^q)^{1/q} : h \in B_{L_q}\} \leq 1 \text{ , if } 1<q<\infty \text{ ,}$$

and

$$\sup\{\sup_n |\langle h,f_n\rangle| : h \in B_{L_\infty}\} \leq 1 \text{ , if } q=\infty \text{ ,}$$

so that $\{w_n^\star\}$ and $\{f_n\}$ satisfy (ii) and (iii) of Definition I.1.

Since, for $w \in W$,

$$(J_p \circ A \circ Q)w = \langle F(.),w\rangle = \sum_n \langle u_n^\star, w\rangle \chi_{E_n}(.) = \sum_n \langle w_n^\star, w\rangle f_n \quad ,$$

it follows that $J_p \circ A \circ Q \in N_p(W,L_p(\mu))$, with $n_p(J_p \circ A \circ Q) \leq \|F\|_\infty \, \mu(\Omega)^{1/p} \leq si_p(T) + \varepsilon$, for $\|F\|_\infty = \|g\|_\infty \leq 1$.

Then $T \circ S = B \circ J_p \circ A \circ Q \circ P \in N_p(X,Z)$ and $n_p(T \circ S) \leq (\|S\| + \varepsilon)(si_p(T) + \varepsilon)$. Since ε is arbitrary, $n_p(T \circ S) \leq \|S\| si_p(T)$.

<u>Case 2</u>. F does not have necessarily countable range.

Since F is μ-measurable, there is a sequence $\{F_n\}$ in $L_\infty(\mu,W^\star)$, each F_n with countable range, such that $\|F_n - F\|_\infty \to 0$ [DU-II.1.3].

Defining $R_n : W \to L_\infty(\mu)$ for each $n \in \mathbb{N}$ by

$$R_n w = \langle F_n(.),w\rangle \text{ , for } w \in W \text{ ,}$$

one has $\|R_n\| = \|F_n\|_\infty$ and $J_p \circ R_n \in N_p(W,L_p(\mu))$, with $n_p(J_p \circ R_n) \leq \|F_n\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p}$, from Case 1. Also, $J_p \circ (R_n - R_m) \in N_p(W,L_p(\mu))$, with $n_p(J_p \circ (R_n - R_m)) \leq \|F_n - F_m\|_\infty \, \mu(\Omega)^{1/p}$, for any $n, m \in \mathbb{N}$, for the same reason, so that $\{J_p \circ R_n\}$ is a Cauchy sequence in $N_p(W,L_p(\mu))$, thus n_p-norm convergent to some element in this space of operators. But $\{J_p \circ R_n\}$ is norm convergent to $J_p \circ A \circ Q$ and since $\|.\| \leq n_p(.)$, $\{J_p \circ R_n\}$ converges in norm to $J_p \circ A \circ Q$.

Hence, $J_p \circ A \circ Q \in N_p(W,L_p(\mu))$ and $n_p(J_p \circ A \circ Q) \leq \|F\|_\infty \, \mu(\Omega)^{1/p} \leq si_p(T) + \varepsilon$. As before, it follows that $T \circ S \in N_p(X,Z)$ and $n_p(T \circ S) \leq \|S\| si_p(T)$.

Now let $p = \infty$. Given $\varepsilon > 0$, choose factorizations for S and T

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"] & & Z \\
& W \arrow[ur, "Q"'] & & L_\infty(\mu) \arrow[ur, "B"'] &
\end{tikzcd}$$

where $W^\star$ has RNP, $P \in L(X,W)$, $Q \in L(X,Y)$, $\|Q\| \leq 1$, $\|P\| \leq \|S\| + \varepsilon$, (Ω,Σ,μ) is a finite measure space, $A \in L(Y,L_\infty(\mu))$, $\|A\| \leq 1$, and $B \in W(L_\infty(\mu),Z)$ is represented by a σ-additive vector measure $G : \Sigma \to Z$, with $\|G\|(\Omega) \leq si_\infty(T) + \varepsilon$.

As before, the operator $R = (A_\circ Q)^\star|_{L_1(\mu)}$ is representable by a function $F \in L_\infty(\mu,W^\star)$ given by

$$\langle F(t),w\rangle = [(A_\circ Q)w](t), \text{ for } t \in \Omega \text{ and } w \in W,$$

through

$$\int_\Omega f(t)\langle F(t),w\rangle d\mu(t) = \langle f,(A_\circ Q)w\rangle = \langle Rf,w\rangle ,$$

for every $f \in L_1(\mu)$ and $w \in W$.

Again, there are two cases.

<u>Case 1'</u>. F has countable range.

Let $\{u_n^\star : n \in \mathbb{N}\}$ be the set of distinct nonzero essential values of F. Defining, for each $n \in \mathbb{N}$, $E_n = F^{-1}\{u_n^\star\}$, one has that $\{E_n\}$ is a pairwise disjoint sequence in Σ, with $\mu(E_n) > 0$, for $n \in \mathbb{N}$.

For $w \in W$,

$$(B_\circ A_\circ Q)w = \int_\Omega [(A_\circ Q)w](t)dG(t) = \int_\Omega \langle F(t),w\rangle dG(t)$$

$$= \sum_n \langle u_n^\star,w\rangle G(E_n) ,$$

and $\sup_n \|u_n^\star\| = \|F\|_\infty \leq \|A_\circ Q\| \leq 1$.

Since G is σ-additive, and $\{E_n\}$ is a pairwise disjoint sequence,

$$\sup \{\sum_n |\langle z^\star,G(E_n)\rangle| : z^\star \in B_{Z^\star}\} \leq \|G\|(\Omega) < \infty$$

and

$$\lim_n \sum_{m>n} |\langle z^\star,G(E_m)\rangle| = 0 , \text{ uniformly in } z^\star \in B_{Z^\star}$$

[DU-I.1.18]. Let $\delta > 0$ be given and choose $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ such that

$$\sum_{n>n_k} |\langle z^\star,G(E_n)\rangle| \leq \delta/_k 2^k , \text{ for } k \in \mathbb{N} \text{ and } z^\star \in B_{Z^\star} .$$

Defining sequence $\{w_n^\star\}$ in $W^\star$ and $\{z_n\}$ in Z by

$$w_n^\star = \begin{cases} u_n^\star \ , \text{ if } \ 1 \leqslant n \leqslant n_1 \ , \\ k^{-1} \ u_n^\star \ , \text{ if } \ n_k < n \leqslant n_{k+1} \ , \text{ for } \ k \geqslant 1, \end{cases}$$

and

$$z_n = \begin{cases} G(E_n) \ , \text{ if } \ 1 \leqslant n \leqslant n_1 \ , \\ kG(E_n) \ , \text{ if } \ n_k < n \leqslant n_{k+1} \ , \text{ for } \ k \geqslant 1 \ , \end{cases}$$

one has $\lim_n \|w_n^\star\| = 0$, $\sup_n \|w_n^\star\| \leqslant 1$, because

$$\|w_n^\star\| \leqslant \begin{cases} \|F\|_\infty \ , \text{ if } \ 1 \leqslant n \leqslant n_1 \ , \\ k^{-1} \|F\|_\infty \ , \text{ if } \ n_k < n \leqslant n_{k+1} \ , \text{ for } \ k \geqslant 1 \ , \end{cases}$$

and $\|F\|_\infty \leqslant 1$; also, for each $z^\star \varepsilon B_{Z^\star}$,

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle z^\star, z_n \rangle| &= \sum_{n=1}^{n_1} |\langle z^\star, G(E_n)\rangle| + \sum_k \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |\langle z^\star, G(E_n)\rangle| \\ &\leqslant \sum_n |\langle z^\star, G(E_n)\rangle| + \sum_k k\Big(\sum_{n > n_k} |\langle z^\star, G(E_n)\rangle|\Big) \\ &\leqslant \|G\|(\Omega) + \sum_k k\delta/_{k2^k} = \|G\|(\Omega) + \delta \ . \end{aligned}$$

Then $\{w_n^\star\}$ and $\{z_n\}$ satisfy (ii) and (iii) of Definition I.1 and since $(B \circ A \circ Q)w = \sum_n \langle u_n^\star, w\rangle G(E_n) = \sum_n \langle w_n^\star, w\rangle z_n$, for $w \varepsilon W$, it follows that $B \circ A \circ Q \ \varepsilon \ N_\infty(W,Z)$ with $n_\infty(B \circ A \circ Q) \leqslant \|F\|_\infty \|G\|(\Omega)$, since δ is arbitrary.

It follows that $T \circ S = B \circ A \circ Q \circ P \ \varepsilon \ N_\infty(X,Z)$ and $n_\infty(T \circ S) \leqslant \|P\| n_\infty(B \circ A \circ Q) \leqslant (\|S\| + \varepsilon)(si_\infty(T) + \varepsilon)$. Since ε is arbitrary, $n_\infty(T \circ S) \leqslant \|S\| si_\infty(T)$.

<u>Case 2'</u>. F does not have necessarily countable range.

Again, from [DU.II.1.3] there is a sequence $\{F_n\}$ in $L_\infty(\mu, W^\star)$, each F_n with countable range, such that $\|F_n - F\|_\infty \to 0$. For each $n \varepsilon \mathbb{N}$, define $R_n : W \to Z$ by

$$R_n w = \int_\Omega \langle F_n(t), w\rangle dG(t) \ , \text{ for } \ w \varepsilon W \ ,$$

so that

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "R_n"] \arrow[dr, "A_n"'] & & Z \\ & L_\infty(\mu) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

where $A_n w = \langle F_n(.), w\rangle$, for $w \in W$.

From Case 1', for any $n, m \in \mathbb{N}$, $R_n \in N_\infty(W,Z)$ and $R_n - R_m \in N_\infty(W,Z)$, with $n_\infty(R_n) \leqslant \|F_n\|_\infty \|G\|(\Omega)$ and $n_\infty(R_n - R_m) \leqslant \|F_n - F_m\|_\infty \|G\|(\Omega)$. Then $\{R_n\}$ is a Cauchy sequence in $N_\infty(W,Z)$ that converges in n_∞-norm to some element $U \in N_\infty(W,Z)$, with $n_\infty(U) \leqslant \|F\|_\infty \|G\|(\Omega)$. But $\{R_n\}$ converges in norm to $B \circ A \circ Q$ and $\|.\| \leqslant n_\infty(.)$, so that $U = B \circ A \circ Q$. Then $T \circ S = B \circ A \circ Q \circ P \in N_\infty(X,Z)$, with $n_\infty(T \circ S) \leqslant \|P\| \|G\|(\Omega) \leqslant (si_\infty(T) + \varepsilon)(\|S\| + \varepsilon)$. Since ε is arbitrary, $n_\infty(T \circ S) \leqslant \|S\| si_\infty(T)$. □

THEOREM II.4. If $X^\star$ has RNP, then $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$, for every p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, with $si_p(.) = n_p(.)$.

PROOF. Since $X^\star$ has RNP, Id_X is an Asplund operator and the result follows from Theorem II.3. □

REMARK. When $X^\star$ is complemented in a Banach lattice, RNP and wRNP coincide in $X^\star$ and in this case Theorems II.1 and II.4 give a complete description of $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$. Important classes of spaces are included in this situation, such as $C(K)$-spaces, L_p-spaces, Lorentz spaces, Orlicz spaces, Marcinkiewicz spaces, and Banach spaces with unconditional basis.

III. SPACES Y SUCH THAT $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$.

The problem $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$ defines completely different situations for $p = 1$ and $p > 1$. As example I.6 shows, when $p > 1$, wRNP, RNP, reflexive or even Hilbert spaces can fail to satisfy $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$. Moreover, RNP is not a necessary condition, either, since the space $JH^\star$, where JH is Hagler's space, is not a RNP space, but it has Schur property, so that $SI_p(.,JH^\star) = N_p(.,JH^\star)$ (Theorem III.3).

Let us present first a sufficient condition for $1<p\leqslant\infty$. For $p=\infty$ we will need the following Lemma.

LEMMA III.1.

(a) $N_\infty(C(K),.) = K(C(K),.)$, with $n_\infty(.) = \|.\|$, for every compact Hausdorff space K ;

(b) $N_\infty(L_\infty(\ ),.) = K(L_\infty(\ ),.)$, with $n_\infty(.) = \|.\|$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ).

PROOF.

(a) It is known that $N_\infty(C(K),.)\subset K(C(K),.)$, with $\|.\|\leqslant n_\infty(.)$.

For the reverse inclusion and inequality, let $T\in K(C(K),Y)$ be given, where Y is any Banach space . Since $C(K)^\star$ has the approximation property, there is a sequence $\{T_n\}$ of finite rank operators from $C(K)$ into Y such that $\|T_n-T\|\to 0$. Also, $C(K)^\star$ has the metric approximation property, so that for any $n, m\in\mathbb{N}$, $si_\infty(T_n) = n_\infty(T_n)$ and $si_\infty(T_n-T_m) = n_\infty(T_n-T_m)$ [PP-Lemma 11] .

From Example I.5 one has $si_\infty(T_n) = \|T_n\|$ and $si_\infty(T_n-T_m) = \|T_n-T_m\|$, for any $n, m\in\mathbb{N}$. Then $\{T_n\}$ is a Cauchy sequence in $N_\infty(C(K),Y)$ that converges in norm to T. Therefore, T is also the limit in n_∞-norm of $\{T_n\}$, so that $T\in N_\infty(C(K),Y)$ and $n_\infty(T) = \|T\|$.

(b) It follows from (a) and the identification of any $L_\infty(\mu)$, for a finite measure space (Ω,Σ,μ), with $C(K)$, for a convenient compact Hausdorff space K. □

THEOREME III.2. Let $1<p\leqslant\infty$. If $T\ \ SI_p(X,Y)$ and $S\in C(Y,Z)$, then $S\circ T\in N_p(X,Z)$, with $n_p(S\circ T)\leqslant\|S\|si_p(T)$.

PROOF. Let $p<\infty$. Given $T\in SI_p(X,Y)$ and $\varepsilon>0$, choose a factorization of T as

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle B} \\ C(K) & \xrightarrow[J_p]{} & L_p(\mu) \end{array}$$

where K is a compact Hausdorff space, $\mu \varepsilon rca^+(\mathscr{B}(C(K)))$, J_p is the inclusion, $A \varepsilon L(X,C(K))$, $B \varepsilon L(L_p(\mu),Y)$, $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ and $si_p(J_p) \leq si_p(T) + \varepsilon$.

Hence $S_\circ T$ has a factorization

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S_\circ T} & Z \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S_\circ B} \\ C(K) & \xrightarrow[J_p]{} & L_p(\mu) \end{array}$$

Since S is completely continuous and B is weakly compact, $S_\circ B$ is a compact operator. By the approximation property of $L_q(\mu) = L_p(\mu)^\star$ there is a sequence $\{R_n\}$ of finite rank operators in $L(L_p(\mu),Z)$, with $\|R_n - S_\circ B\| \to 0$.

Then $\{R_n \circ J_p\}$ is a sequence of strictly p-integral finite rank operators from $C(K)$ into Z. The metric approximation property of $C(K)^\star$ and [PP-Lemma 7] give, for any $n, m \varepsilon N$,

$$n_p(R_n \circ J_p) \leq si_p(R_n \circ J_p) \leq \|R_n\| si_p(J_p) ,$$

and

$$n_p[(R_n - R_m)\circ J_p] \leq si_p[(R_n - R_m)\circ J_p] \leq \|R_n - R_m\| si_p(J_p)$$

so that $\{R_n \circ J_p\}$ is a Cauchy sequence in n_p-norm, thus convergent to some element in $N_p(C(K),Z)$.

But $\{R_n \circ J_p\}$ converges in norm to $S_\circ B_\circ J_p$, and $\|.\| \leq n_p(.)$, so that $S_\circ B_\circ J_p \varepsilon N_p(C(K),Z)$, with $n_p(S_\circ B_\circ J_p) \leq \|S_\circ B\| si_p(J_p) \leq \|S\|(si_p(T) + \varepsilon)$. Hence $S_\circ T = S_\circ B_\circ J_p \circ A \varepsilon N_p(X,Z)$ and $n_p(S_\circ T) \leq \|S\| si_p(T)$, since $\|A\| \leq 1$ and ε is arbitrary.

Now let $p = \infty$. For given $T \varepsilon SI_\infty(X,Y)$ and $\varepsilon > 0$, choose a factorization

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle A}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle B} \\ & C(K) & \end{array}$$

where K is a compact Hausdorff space, $A \in L(X,C(K))$, $\|A\| \leq 1$, and $B \in W(C(K),Y)$ is given by $Bf = \int_K f dG$, with $\|B\| = \|G\|(K) \leq si_\infty(T) + \varepsilon$.

Since B is weakly compact and S is completely continuous, $S \circ B \in K(C(K),Z)$. From Lemma III.1, $S \circ B \in N_\infty(C(K),Z)$ and $n_\infty(S \circ B) = \|S \circ B\| \leq \|S\|(si_\infty(T) + \varepsilon)$.

Hence $S \circ T = S \circ B \circ A \in N_\infty(X,Z)$ with $n_\infty(S \circ T) \leq \|S\| si_\infty(T)$, since $\|A\| \leq 1$ and ε is arbitrary. □

A moment of reflection about the precedint proof shows that the essential hypothesis was the compactness of $S \circ B$. When $p = \infty$, a $L_\infty(\mu)$-space could have been used instead of a $C(K)$-espace. These remarks lead us to the following theorem.

THEOREM III.3.

(a) Let $1 < p < \infty$. If $L(L_p(\mu),Y) = K(L_p(\mu),Y)$ for every finite measure space (Ω,Σ,μ), then $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, with $si_p(.) = n_p(.)$.

(b) If $W(C(K),Y) = K(C(K),Y)$ for every compact Hausdorff space K or $W(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y)$ for every finite measure space (Ω,Σ,μ), then $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$, with $si_\infty(.) = n_\infty(.)$.

PROOF. It follows as in Theorem III.2. □

The next theorem gives a necessary condition to $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$ and, in particular, to $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, since p-nuclear operators are compact.

THEOREM III.4. If for some r, $1 < r \leq \infty$, $SI_r(.,Y) \subset K(.,Y)$, then $L(L_p(\mu),Y) = K(L_p(\mu),Y)$, for every p, $2 \leq p < \infty$, and every finite measure space (Ω,Σ,μ).

PROOF. Let (Ω,Σ,μ) be a finite measure space and p, $2 \leq p < \infty$, be a fixed index.

Suppose that there is a non-compact operator $T : L_p(\mu) \to Y$. Then there is a bounded sequence $\{f_n\}$ in $L_p(\mu)$ such that $\{Tf_n\}$ has no norm convergent subsequence. Taking subsequence, translating and/or normalizing, one can assume that

(i) $\{f_n\}$ is weakly convergent to zero, since $L_p(\mu)$ is reflexive ;

(ii) there is an $\varepsilon_0 > 0$ such that $\|f_n\|_p \geqslant \varepsilon_0$, for every $n \in \mathbb{N}$, condition that holds for some subsequence of $\{f_n\}$, otherwise $\|f_n\| \to 0$ and $Tf_n \to 0$;

(iii) $\|f_n\|_p = 1$, for $n \in \mathbb{N}$, otherwise consider $g_n : f_n/\|f_n\|_p$, so that $\|g_n\|_p = 1$, for $n \in \mathbb{N}$, and still $g_n \xrightarrow{w} 0$.

By Bessaga-Pelczynski Selection Principle [DI-page 42], there is a subsequence of $\{f_n\}$, which can still be called $\{f_n\}$, that is a basic sequence, ie, it is a basis for the subspace it generates. Let Z be this subspace of $L_p(\mu)$, $Z = [f_n]$.

If $p = 2$, Z is isomorphic to ℓ_2, because Z is a separable Hilbert space. Moreover, the isomorhism takes the canonical basis of ℓ_2 into the basis of Z.

If $2 < p < \infty$, Z contains a subspaces that is isomorphis to ℓ_2 or ℓ_p [KP-Corollary 6], and the isomorhism takes the canonical basis of ℓ_2 or ℓ_p into a sequence $\{f_{n_k}\}$, still a basic sequence. Although Kadec and Pelczynski work only with $L_p[0,1]$, they remark that their results hold for any measure space [KP-page 162] .

In any case, there is an isomorphism $R : \ell_2 \to L_p(\mu)$ or $R : \ell_p \to L_p(\mu)$ such that $Re_k = f_{n_k}$, for any $k \in \mathbb{N}$, where $\{e_k\}$ is the basis of ℓ_2 or ℓ_p.

Defining an operator $S : \ell_1 \to Y$ by $S = T \circ R \circ i_p$, one has, for $1 < r \leqslant \infty$, that $S \in SI_r(\ell_1, Y)$, since $i_p \in SI_r(\ell_1, \ell_p)$, for $p \geqslant 2$. But S is not a compact operator, because $\{Se_k\} = \{Tf_{n_k}\}$ and no subsequence of $\{Tf_n\}$ is norm convergent.

This contradicts the hypothesis that there is r, $1 < r \leqslant \infty$, such that $SI_r(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$, so that there is no non-compact operator $T : L_p(\mu) \to Y$, or $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$. □

REMARK. Other necessary conditions to $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, for any p, $1 < p \leqslant \infty$, are that $Y \not\supset c_0$ and $Y \not\supset \ell_r$, $r \geqslant 2$, shown by Example I.6, and that $Y \not\supset L_1[0,1]$, because J_1 is strictly p-integral for any p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, but it is not compact.

We have the following characterization of the spaces Y such that $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, when $p \geqslant 2$.

THEOREM III.5.

I. The following conditions on Y are equivalent :

(1) for every p, $2 \leqslant p < \infty$, $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, with $si_p(.) = n_p(.)$;

(2) there exists p, $2 \leqslant p < \infty$, such that $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, with $si_p(.) = n_p(.)$;

(3) for every p, $2 \leqslant p < \infty$, $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$;

(4) there exists p, $2 \leqslant p < \infty$, such that $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$;

(5) for every p, $1 < p < \infty$, $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$;

(6) there exists p, $1 < p < \infty$, such that $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$;

(7) $L(\ell_2,Y) = K(\ell_2,Y)$;

(8) $L(L_2(\mu),Y) = K(L_2(\mu),Y)$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(9) for every p, $2 \leqslant p < \infty$, $L(L_p(\mu),Y) = K(L_p(\mu),Y)$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(10) there exists p, $2 \leqslant p < \infty$, such that $L(L_p(\mu),Y) = K(L_p(\mu),Y)$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ).

II. If $Y = Z^\star$ for some space Z, the conditions (1) to (10) imply

(11) for every q, $1 < q \leqslant 2$, $L(Z,L_q(\mu)) = K(Z,L_q(\mu))$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(12) there exists q, $1 < q \leqslant 2$, such that $L(Z,L_q(\mu)) = K(Z,L_q(\mu))$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(13) $L(Z,\ell_2) = K(Z,\ell_2)$.

III. If Y is a reflexive space, conditions (1) to (13) are equivalent, where, in (11) to (13), $Z = Y^\star$.

PROOF.

I. The chains (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) and (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) and the implications (5) $\Rightarrow$ (6) and (9) $\Rightarrow$ (10) are trivial.

(6) $\Rightarrow$ (9) This is Theorem III.4.

(10) $\Rightarrow$ (7) From Theorem III.3 it follows that, for such a p, $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$. The result follows then from Theorem III.4, applied to $L_2[0,1]$, which is isomorphic to ℓ_2.

(7) $\Rightarrow$ (8) If there is a finite measure space (Ω,Σ,μ) and a non-compact operator $T : L_2(\mu) \to Y$, the same argument of Theorem III.4 says that there is a normalized weakly convergent basic sequence $\{f_n\}$ in $L_2(\mu)$ sucn that $\{Tf_n\}$ has no norm convergent subsequence and, moreover, $Z = [f_n]$ is isomorphic to ℓ_2. Hence the operator $S : \ell_2 \to Y$ given by $S = T|_Z$ is not compact, which contradicts the hypothesis.

(8) $\Rightarrow$ (5) From Theorem III.3 $SI_2(.,Y) \subset K(.,Y)$. If $1<p<2$, $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$, since $SI_p \subset SI_2$. On the other hand, for $2 \leqslant p < \infty$, it follows that $L(L_p(\mu),Y) = K(L_p(\mu),Y)$, from Theorem III.4 . Hence $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$, $2 \leqslant p < \infty$ [Theorem III.3].

It remains to show that (6) $\Rightarrow$ (1). But (6) is equivalent to (9), that implies (1), as seen in Theorem III.4.

II. Assume $Y = Z^\star$.

To show (9) $\Rightarrow$ (11), let q, $1<q\leqslant 2$, a finite measure space (Ω,Σ,μ) and $T \in L(Z,L_q(\mu))$ be given. Then $T^\star \in K(L_p(\mu),Y)$, by hypothesis, because p , the conjugate exponent of q , is such that $2 \leqslant p < \infty$. Hence T is compact.

The same argument shows that (7) implies (13), and the implication (11) $\Rightarrow$ (12) is obvious.

III. Assume that Y is reflexive.

From II, it follows that the equivalent conditions (1) to (10) imply

(11) to (13), with $Z = Y^\star$.

To show that (12) implies (10), let a finite measure space (Ω,Σ,μ) be given and p be the conjugate exponent of the index q, $1<q\leqslant 2$, that exists by hypothesis. If $T \in L(L_p(\mu),Y)$, then $T^\star \in L(Y^\star,L_q(\mu))$, so that $T^\star$ is compact. Hence $T \in K(L_p(\mu),Y)$.

The implication (13) $\Rightarrow$ (7) follows the same pattern and it is obvious that (11) $\Rightarrow$ (12). □

REMARKS. Conditions (9) and (10) in Theorem III.5 can not be extended to $1<p<2$. Indeed, for these indices p, we do have $L(\ell_2,\ell_p) = K(\ell_2,\ell_p)$, but $L(L_p[0,1],\ell_p) \neq K(L_p[0,1],\ell_p)$, since ℓ_p is complemented in $L_p[0,1]$ and the corresponding projection can not be compact.

When $1<p<2$, we do not know a necessary and sufficient condition for $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$ yet.

For $p=\infty$, we have the following result.

THEOREM III.6.

I. The following conditions on Y are equivalent :

(1) $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$, with $si_\infty(.) = n_\infty(.)$;

(2) $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$;

(3) $SI_\infty(.,Y) \subset K(.,Y)$;

(4) $L(C(K),Y) = K(C(K),Y)$, for every compact Hausdorff space K ;

(5) $W(C(K),Y) = K(C(K),Y)$, for every compact Hausdorff space K ;

(6) $L(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y)$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(7) $W(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y)$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ).

II. If $Y = Z^\star$ for some space Z, the conditions (1) to (7) imply

(8) $L(Z,L_1(\mu)) = K(Z,L_1(\mu))$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ) ;

(9) $W(Z,L_1(\mu)) = K(Z,L_1(\mu))$, for every finite measure space (Ω,Σ,μ).

III. If Y is reflexive, conditions (1) to (9) are equivalent, where, in (8) and (9), $Z = Y^\star$.

PROOF.

I. The chain (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) and the implications (4) $\Rightarrow$ (5) and (6) $\Rightarrow$ (7) are trivial.

(3) $\Rightarrow$ (4) Let $X = C(K)$ in the hypothesis to get the inclusion $W(C(K),Y) \subset K(C(K),Y)$, since $SI_\infty(C(K),Y) = W(C(K),Y)$, as seen in Example I.5. Moreover, $Y \not\hookrightarrow c_0$, by the remark before Theorem III.5, so that $L(C(K),Y) = W(C(K),Y)$ [DU-VI.2.1.5].

(3) $\Rightarrow$ (6) Use the preceding argument with $X = L_\infty(\mu)$.

(5) $\Rightarrow$ (7) It follows from the identification of $L_\infty(\mu)$ with $C(K)$, for a convenient compact Hausdorff space K.

(7) $\Rightarrow$ (1) This is just Theorem III.3.

II. Assume $Y = Z^\star$.

(8) $\Rightarrow$ (9) It is trivial.

(6) $\Rightarrow$ (9) Let a finite measure space (Ω,Σ,μ) be given. If $T \in L(Z,L_1(\mu))$, then $T^\star \in L(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y)$, by hypothesis. Hence T is compact.

III. Assume Y reflexive.

From II, the quivalent conditions (1) to (7) imply (8) and (9) and (8) $\Rightarrow$ (9), with $Z = Y^\star$.

To show that (9) implies (5), let a compact Hausdorff space K and $T \in W(C(K),Y)$ be given. Then $T^\star \in L(Y^\star,L_1(\mu))$, for some finite measure space (Ω,Σ,μ). By hypothesis, $T^\star$ is compact and so is T. $\square$

REFERENCES

[CA] CARDASSI, C.S. - "Operadores estritamente p-integrais e p-nucleares", Thesis, IME-USP, 1986.

[DI] DIESTEL, J. - "Sequences and series in Banach spaces", Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.

[DU] DIESTEL, J. & UHL Jr., J.J. - "Vector measures", Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[DUP] DIESTEL, J. & UHL Jr., J.J. - "Progress in vector measures 1977-1983", in Lecture Notes in Mathematics 1033, 144-192, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[KP] KADEC, M.I. & PELCZYNSKI, A. - "Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p", Studia Math. 21 (1962), 161-176.

[PP] PERSON, A. & PIETSCH, A. - "p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen", Studia Math. 33 (1969), 19-62.

INSTITUTO DE MATHEMATICA E ESTATISTICA (IME)
UNIVERSIDADE DE SAO PAULO (USP)
C.P. 20.570 (AG. IGUATEMI)
01498 - SAO PAULO - SP
BRASIL

Exposé n° 3 Année 1987-1988
Walter Schachermayer

SOME TRANSLATION INVARIANT SUBSPACES OF C(G) WHICH HAVE THE STRONG SCHUR PROPERTY

Abstract : Let G be a compact metric abelian group and Λ a subset of the dual group. We give a condition which ensures that the space $C_\Lambda(G)$ of continuous functions on G with spectrum in Λ has the strong Schur property.

Résumé : Soient G un groupe abélien métrique compact et Λ un sous ensemble du groupe dual. On donne une condition suffisante pour que l'espace $C_\Lambda(G)$ des fonctions continues sur G à spectre dans Λ ait la propriété de Schur forte.

SOME TRANSLATION INVARIANT SUBSPACES OF C(G) WHICH HAVE THE STRONG SCHUR PROPERTY

by Walter Schachermayer

Let G be a compact metric abelian group, Λ a subset of the dual group Γ and $C_\Lambda(G)$ the closed subspace of $C(G)$ spanned by the characters in Λ. We show (theorem A) that if $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind, ie if every neighborhood of $\{0\}$ in G is associated to $C_\Lambda(G)$ in a wide sense (see definition 1 below) then $C_\Lambda(G)$ has the strong Schur property. Under the same assumption $C_\Lambda(G)$ was known to have the Schur property [L.P$_1$ Lemma 2].

The following question which F. Lust Piquard communicated to us remains open : under the same assumption is it true that $C_\Lambda(G) = L^\infty_\Lambda(G)$?

Theorem A is implied by a more general result (theorem B) on ℓ^1 subsequences of some sequences of bounded continuous functions on a Polish space.

I. Notations, definitions, motivations, examples.

All Banach spaces in this paper are vector spaces over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. $\bar{\mathbb{D}}$ denotes the closed unit disc in $\mathbb{C}$. We denote by $\operatorname{diam} A = \sup_{z_1,z_2\in A} |z_1-z_2|$ the diameter of a subset $A\subset\bar{\mathbb{D}}$. An ℓ^1-sequence in a Banach space X is a bounded sequence $(x_n)_{n\geq 1}$ such that there exists $\delta>0$ and

$$\forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C}\quad \Big\|\sum_{n=1}^{N}\lambda_n x_n\Big\| \geq \delta \sum_{n=1}^{N}|\lambda_n| .$$

Let G be a set. $\ell^\infty(G)$ denotes the space of bounded functions : $G\to\mathbb{C}$. Let G be a topological space. For $t\in G$ $V(t)$ denotes an open neighborhood of t. When G is assumed to be a metric space $B(t,\rho)$ denotes the open ball centered at t with radius ρ. $C(G)$ denotes the space of bounded continuous functions on G.

Let G be a compact metric group. $L'(G)$ denotes the space of equivalence classes of integrable functions on G with respect to the Haar measure $L^\infty(G)$ denotes the dual space of $L^1(G)$.

Let Λ be a subset of the dual group Γ. $C_\Lambda(G)$ is the closed subspace of $C(G)$ spanned by the characters in Λ, $L^\infty_\Lambda(G)$ is the closure of $C_\Lambda(G)$ for $\sigma(L^\infty(G),L^1(G))$, $L^1_\Lambda(G)$ is the norm closure of $C_\Lambda(G)$ in $L^1(G)$.

Definition 1 : Let G be a compact abelian group. $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind if every neighborhood of $\{0\}$ in G is associated to $C_\Lambda(G)$ in a wide sense i.e. there exists a constant $K>0$ such that for every neighborhood V of $\{0\}$ in G there exists a finite set $\Lambda_0 \subset \Lambda$ such that

$$\forall f \in C_{\Lambda\setminus\Lambda_0}(G) \qquad \|f\|_{C(G)} \leq K\|f\|_{C(V)}$$

It is easy to see [DG p.70] that if $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind then the pace of Λ tends to infinity i.e. $\forall F \subset \Gamma$ F finite, $0 \notin F$ $\Lambda+F\cap\Lambda$ is finite.

Definition 1 above was introduced in [B1] for general $C_\Lambda(G)$ spaces, but was introduced before in the special case of Sidon sets i.e. when the characters in Λ are an ℓ^1-sequence in $C_\Lambda(G)$ (see for example [DG. definition 1.3, 5.2, 5.3]).

Examples of spaces of first kind :

By [B_1 proposition 3.2] every Sidon set Λ is a finite union $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ such that the pace of each Sidon set Λ_i tends to infinity.

By [B_2.part 3. Corollary 2] if the pace of a Sidon set Λ tends to infinity $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind. As there are Sidon sets whose pace does not tend to $+\infty$, there are Sidon sets Λ such that $C_\Lambda(G)$ is not a space of first kind.

Apart from Sidon sets whose pace tends to infinity, a large class of spaces of first kind is available [Bl. proof of theorem B] or [L.P$_1$ theorem 2] : Let $\Lambda \subset \Gamma$. We assume that there exists a dense subgroup $D \subset G$ such that the canonical injection $\Gamma \to \bar{\Gamma}/_{D^\perp}$ ($\bar{\Gamma}/_{D^\perp}$ is the compact dual group of the discrete group D) maps Λ into a countable set with one limit point. Then $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind. Moreover in this case $C_\Lambda(G) = L^\infty_\Lambda(G)$ by Loomis'theorem [L] and [L.P$_2$ théorème 2.2].

Definition 2 : A Banach space X has the Schur property if every $\sigma(X,X')$ convergent sequence is norm convergent.

Let us recall Rosenthal's theorem [R] : every bounded sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in a Banach space X either has a weak Cauchy sequence or an ℓ^1-subsequence. It follows that if X has the Schur property every bounded sequence in X either has a norm convergent subsequence or an ℓ^1-subsequence.

Definition 3 : (eg. Bg. Definition 7.3.11). A Banach space X has the strong Schur property if there exists $C > 0$ such that for every $0 < \delta \leqslant 2$ every sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in X such that

(i) $\|x_n\| \leqslant 1 \quad n \geqslant 1$ (ii) $\|x_n - x_k\| \geqslant \delta \quad n \neq k$

has a ℓ^1-subsequence $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ such that

$$\forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_K \in \mathbb{C} \qquad \Big\|\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, x_{n_k}\Big\| \geqslant C\delta \sum_{k=1}^{K} |\lambda_k| \;.$$

It is well known that ℓ^1 (hence $C_\Lambda(G)$ if Λ is a Sidon set) has the strong Schur property.

By [J.O] ,[J.L] there are Banach spaces which have the Schur property but fail the strong Scnur property. We do not know whether there are $C_\Lambda(G)$ spaces having the Schur property and failing the strong Schur property.

II. The results

Our purpose is to prove theorem A :

Theorem A : Let G be a compact metric abelian group. Let $C_\Lambda(G)$ be a space of first kind. Then $C_\Lambda(G)$ has the strong Schur property.

Theorem A will be a consequence of theorem B below which might have its own interest :

Theorem B : Let G be a separable complete metric space. Let $(f_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of continuous functions : $G \to \bar{\mathbb{D}}$. We assume that there exists $\rho > 0$ such that for every open set $O \subset G$ and every infinite subset $S \subset \mathbb{N}$ there exists $n \in S$ such that

$$\operatorname{diam} f_n(O) > \rho$$

then there exists a ℓ^1-subsequence $(f_{n_j})_{j\geq 1}$ such that

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C} \quad \Big\| \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_{n_j} \Big\|_{C(G)} \geq \rho/30 \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| .$$

We first show how theorem B implies theorem A : this will follow from the subsequent lemma 2. In order to prove lemma 2 we need the following lemma 1 :

Lemma 1 : Let G be a compact metric abelian group. Let $C_\Lambda(G)$ be a space of first kind and let $K \geq 1$ be the constant appearing in the definition. Then for every open set $O \subset G$ there exists a finite $\Lambda_0 \subset \Lambda$ such that

$$\forall f \in C_{\Lambda \setminus \Lambda_0}(G) \quad \|f\|_{C(G)} \leq 4K^2 \quad \operatorname{diam} f(O)$$

Remark : As $\operatorname{diam} f(O) \leq 2\|f\|_{C(O)}$ we see that $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind iff the conclusion of lemma 1 is satisfied.

Proof of lemma 1 : If the conclusion of lemma 1 is false there exists an open set $0 \subset G$ such that for every finite subset $F \subset \Lambda$ there exists $f \in C_{\Lambda \setminus F}(G)$ such that $\|f\|_{C(G)} = 1$ and $\operatorname{diam} f(0) < (4K^2)^{-1}$.

As $C_\Lambda(G)$ is a space of first kind and as $C_\Lambda(G)$ is translation invariant let $t \in 0$ and let $\Lambda_o \subset \Lambda$ be a finite set given by the definition for $V = 0 - t$.

There exists f in the unit ball of $C_{\Lambda \setminus \Lambda_o}(G)$ such that

$$\operatorname{diam} f(0) < (4K^2)^{-1} .$$

There exists a finite set $F_o \subset \Gamma$ and φ in the unit ball of $L^1_{F_o}(G)$ such that

$$|\langle f, \varphi \rangle| \geqslant 3/4 .$$

Let $F = \Lambda_o \cup (\Lambda \cap F_o)$. Again there exists g in the unit ball of $C_{\Lambda \setminus F}(G)$ such that

$$\operatorname{diam} g(0) < (4K^2)^{-1}$$

As $F \supset \Lambda_o$ $\|g\|_{C(\bar{0})} \geqslant K^{-1}$. Let $t_o \in \bar{0}$ be such that $|g(t_o)| \geqslant K^{-1}$ and let

$$h = f - f(t_o)\, g(t_o)^{-1} g$$

Hence $\|h\| \geqslant |\langle h, \varphi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle| \geqslant 3/4$ and as $h(t_o) = 0$ $\|h\|_{C(\bar{0})} \leqslant \operatorname{diam} h(0)$.

As $h \in C_{\Lambda \setminus \Lambda_o}(G)$ we have

(i) $3/4 \leqslant \|h\|_{C(G)} \leqslant K \|h\|_{C(\bar{0})}$

ii) $\|h\|_{C(\bar{0})} \leqslant \operatorname{diam} h(0) \leqslant \operatorname{diam} f(0) + K \operatorname{diam} g(0) \leqslant 1/2K$ which is impossible.

<u>Lemma 2</u> : let G be a compact metric abelian group. Let $C_\Lambda(G)$ be a space of first kind and let $K \geqslant 1$ be the constant appearing in the definition. Let $\delta > 0$ and let $(f_n)_{n \geqslant 1}$ be a sequence in the unit ball of $C_\Lambda(G)$ such that

$$\forall n \neq k \qquad \|f_n - f_k\|_{C(G)} \geqslant \delta$$

Then for every open set $0 \subset G$ and every infinite subset $S \subset \mathbb{N}$ there exists $n \in S$ such that

$$\operatorname{diam} f_n(0) \geqslant (8K^2)^{-1} \delta$$

Proof : Let $\Lambda_0 \subset \Lambda$ be defined as in lemma 1. There exists an infinite subset $S' \subset S$ such that the sequence $(f_n)_{n\in S'}$ converges $\sigma(L^\infty_\Lambda(G), L^1(G))$, hence there exists $N > 0$

$$\forall n,p \geq N \quad n,p \in S' \quad \sum_{\lambda\in\Lambda_0} |\hat{f}_n(\lambda) - \hat{f}_p(\lambda)| \leq (32K^2)^{-1}\delta .$$

For $n \geq 1$ let $f'_n(t) = f_n(t) - \sum_{\lambda\in\Lambda_0} \hat{f}_n(\lambda)\,\lambda(t)$ $(t \in G)$. For every $n,p \geq N$ and $n, p \in S'$ we get by lemma 1 :

$$\operatorname{diam} f_n(0) + \operatorname{diam} f_p(0) \geq \operatorname{diam}(f_n - f_p)(0) \geq \operatorname{diam}(f'_n - f'_p)(0) - (16K^2)^{-1}\delta$$
$$\geq (8K^2)^{-1}\delta \quad .$$

Hence either $\operatorname{diam} f_n(0) \geq (8K^2)^{-1}\delta$ or $\operatorname{diam} f_p(0) \geq (8K^2)^{-1}\delta$.

The rest of this paper is devoted to the proof of theorem B. This proof is inspired by Talagrand's proof of Rosenthal's theorem [T. chap. 14. Prop. 14;1.5].

We first recall the standard last two steps.

Lemma 3 : Let G be a set and $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ be a sequence in $\ell^\infty(G)$. We assume that there exist $\rho > 0$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ with $|\alpha - \beta| \geq \rho/3$ such that for every $N > 0$ and every subset J of $\{1,\dots,N\} = I_N$, there exists $t \in G$ such that

$$\forall j \in J \quad |\varphi_j(t) - \alpha| \leq \rho/15$$
$$\forall j \in I_N \setminus J \quad |\varphi_j(t) - \beta| \leq \rho/15$$

Then

$$\forall N > 0 \ \ \forall \ \ \lambda_1,\dots,\lambda_N \in C \quad \Big\| \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j \Big\|_{\ell^\infty(G)} \geq \rho/30 \sum_{j=1}^N |\lambda_j|$$

Proof : Let us fix $N > 0$. We first prove that

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^N |\lambda_j| \leq 2 \sup_{J\subset I_N} \Big| \sum_{j\in J} \lambda_j - \sum_{j\in I_N\setminus J} \lambda_j \Big|$$

Inded let $|\lambda_j| = \lambda_j\, h(j)$ $(1 \leq j \leq N)$, which defines $h \in \ell^\infty_N$. Let $(g_k)_{1\leq k\leq 2^N}$ be an enumeration of the functions in ℓ^∞_N whose range is

$\{+1,-1\}$. As $\mathrm{Re}\, h$ and $\mathrm{Im}\, h$ lie in the unit ball of ℓ^∞_N , for every $\varepsilon > 0$ there are finite sequences of real numbers $(a_k)_{k\leqslant 2^N}$, $(b_k)_{k\leqslant 2^N}$ such that $\sum_k |a_k| \leqslant 1$, $\sum_k |b_k|$ 1 and $\| h - \sum_k (a_k+ib_k)\, g_k \|_{\ell^\infty_N} \leqslant \varepsilon / \sum_{j=1}^N |\lambda_j|$.
Hence

$$\sum_{j=1}^N |\lambda_j| = \sum_{j=1}^N \lambda_j h(j) \leqslant \varepsilon + |\sum_k (a_k+ib_k) \sum_j \lambda_j\, g_k(j)| \leqslant \varepsilon + 2 \sup_k |\sum_{j=1}^N \lambda_j\, g_k(j)|$$

which obviously implies (1).

For every $J \subset I_N$

$$2 \| \sum_{j=1} \lambda_j \varphi_j \|_{\ell^\infty(G)} \geqslant \mathrm{diam}(\sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j)(G) \geqslant |\sum_{j\in J} \lambda_j(\alpha-\beta) + \sum_{j\in I_N \setminus J} \lambda_j(\beta-\alpha)| - \frac{2}{15}\ \rho \sum_{j=1}^N |\lambda_j|$$

$$\geqslant |\alpha-\beta| \sup_J |\sum_{j\in J} \lambda_j - \sum_{j\in I_N\setminus J} \lambda_j| - \frac{2}{15}\rho \sum_{j=1}^N |\lambda_j| \geqslant \rho/30 \sum_{j=1}^N |\lambda_j|$$

<u>Lemma 4</u> : Let G be a topological space. Let $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence in $C(G)$. We assume that there exist $\rho > 0$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ such that $|\alpha - \beta| \geqslant \rho/3$ and $O \subset G$ such that for every finite collection $O_1,\dots,O_k$ of open subsets of O and every N, there exists $n \geqslant N$ such that for every $1 \leqslant i \leqslant k$ $f_n(O_i)$ meets $B(\alpha,\rho/15)$ and $B(\beta,\rho/15)$.
Then there exists a subsequence $(f_{n_j})_{j\geqslant 1}$ of $(f_n)_{n\geqslant 1}$ such that the sequence $(\varphi_j)_{j\geqslant 1} = (f_{n_j})_{j\geqslant 1}$ verifies the assumptions of lemma 3.

Proof : We may choose n_1 such that $f_{n_1}(O)$ meets $B(\alpha,\rho/15) = B_1$ and $B(\beta,\rho/15) = B_2$. As f_{n_1} is continuous let $O_{1,1} = f^{-1}_{n_1}(B_1)$ and $O_{1,2} = f^{-1}_{n_1}(B_2)$. We may choose $n_2 > n_1$ such that $f_{n_2}(O_{1,1})$ and $f_{n_2}(O_{1,2})$ meet B_1 and B_2 and we define $O_{2,1} = f^{-1}_{n_2}(B_1) \cap O_{1,1}$, $O_{2,2} = f^{-1}_{n_2}(B_2) \cap O_{1,1}$ $O_{2,3} = f^{-1}_{n_2}(B_1) \cap O_{1,2}$, $O_{2,4} = f^{-1}_{n_2}(B_2) \cap O_{1,2}$, and so on. ∎

We will now prove that under the assumptions of theorem B there exist an infinite subset $S_o \subset \mathbb{N}$, $O \subset G$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ with $|\alpha-\beta| \geqslant \rho/3$ such that $(f_n)_{n\in S_o}$ verifies the assumptions of lemma 4. This will need some work.

<u>Definition 4</u> : Let G be a topological space and let $(f_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of functions : $G \to \bar{\mathbb{D}}$.

Let S be an infinite subset of $\mathbb{N}$. For every $t \in G$ we define

$F_S(t) = \{z \in \bar{\mathbb{D}} \mid \forall V(t)\ \forall N \geq 1\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists u \in V(t)\ \ \exists n \in S\ ,\ n \geq N\ \ |f_n(u) - z| < \varepsilon\}$

The graph of the mapping $t \rightsquigarrow F_S(t)$ is

$$\mathcal{G}_S = \{(t,z) \mid t \in G\ \ z \in F_S(t)\} \subset G \times \bar{\mathbb{D}}\ .$$

The properties of F_S are summarized in the following lemma.

<u>Lemma 5</u> : Let G , S, $(f_n)_{n\geq 1}$ be as in definition 4.

a) For every $t \in G$, $F_S(t) = \bigcap\limits_{V(t)} \overline{\bigcup\limits_{s \in V(t)} F_S(s)}$ and this is a closed non empty subset of $\bar{\mathbb{D}}$.

b) The graph $\mathcal{G}_S$ is closed in $G \times \bar{\mathbb{D}}$.

Lemma 5 implies that $t \rightsquigarrow F_S(t)$ is an usco (upper semi continuous compact valued) mapping as defined in [S. Definition 3.3] .

Proof of lemma 5 : a) That $\bigcap\limits_{V(t)} \bigcup\limits_{s \in V(t)} F_S(s) \supset F_S(t)$ is obvious. Let us prove the converse inclusion. Let $z \in \bigcap\limits_{V(t)} \overline{\bigcup\limits_{s \in V(t)} F_S(s)}$. Hence

$\forall V(t)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists s \in V(t)\ \ \exists z' \in F_S(s)\ \ |z - z'| < \varepsilon$.

For every $V(t)$ and $\varepsilon > 0$, as $V(t)$ contains a neighborhood of s, we get by the definition of $F_S(s)$ that for $N \geq 1$ there exists $u \in V(t)$ and $n \geq N$, $n \in S$ such that $|z' - f_n(u)| < \varepsilon$ hence $|z - f_n(u)| < \varepsilon$ and $z \in F_S(t)$.

$F_S(t)$ is non empty by definition and is closed in $\bar{\mathbb{D}}$ by the assertion above.

b) Let $t_\alpha \to t$ in G and $z_\alpha \in F_S(t_\alpha)$ be such that $z_\alpha \to z$. Then $z \in \bigcap\limits_{V(t)} \overline{\bigcup\limits_{s \in V(t)} F_S(s)}$. By a) $z \in F_S(t)$ which means that $\mathcal{G}_S$ is closed in $G \times \bar{\mathbb{D}}$ provided with the product topology.

Lemma 6 : Let G be a separable metric space. Let $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence in the unit ball of $\ell^\infty(G)$. There exists an infinite subset $S_o \subset \mathbb{N}$ such that

$$\forall S \text{ infinite } S \subset S_o \quad \forall t \in G \quad F_S(t) = F_{S_o}(t) .$$

Proof : We will define a family (S_α) of subsets of $\mathbb{N}$ indexed by the ordinal numbers of a countable set (we denote by Ω the set of these ordinals) such that

(c) if $\gamma < \beta$ $\quad S_\gamma \setminus (S_\gamma \cap S_\beta)$ is empty or finite.

Hence the graphs $(\mathcal{G}_{S_\alpha})$ of the mappings F_{S_α} form a decreasing family of closed subsets of $G \times \bar{\mathbb{D}}$. Let us put $S_1 = \mathbb{N}$, let $\alpha \in \Omega$ and let us assume that a family $(S_\beta)_{\beta<\alpha}$ verifying (c) has been defined.

If α is an ordinal of the form $\alpha = \gamma+1$ either there exists $t \in G$ and an infinite subset S of S_γ such that $F_S(t) \subsetneqq F_{S_\gamma}(t)$, and we put $S_\alpha = S$, or this is impossible and we stop the construction and put $S_o = S_\gamma$. If α a limit ordinal let $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ be an increasing sequence of ordinals such that $\alpha = \sup\limits_n \alpha_n$. Then we take for $S_\alpha = (n_j)_{j\geqslant 1}$ a diagonal sequence of $(S\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ e.g. n_1 is the least integer in S_{α_1} , n_2 is the least integer in $S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2}$ which is bigger than n_1 , and so on. Hence for every $n \geqslant 1$ $\quad S_\alpha \setminus S_\alpha \cap S_{\alpha_n}$ is empty or finite. As for every $\beta < \alpha$ there exists n such that $\beta < \alpha_n$ we get

$$\forall \beta < \alpha \quad S_\alpha \setminus S_\alpha \cap S_{\alpha_n} \text{ is empty or finite.}$$

Let us assume that S_α has been defined for every $\alpha \in \Omega$ i.e. that the stopping situation does not occur. $(\mathcal{G}_{S_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ is a decreasing family of closed sets in $G \times \bar{\mathbb{D}}$. As $G \times \bar{\mathbb{D}}$ has a countable basis of open sets, there exists [K. theorem 7 chap. IV.15] an ordinal $\alpha_o \in \Omega$ such that

$$\forall\alpha \geqslant \alpha_0 \qquad \mathcal{G}_{S_\alpha} = \mathcal{G}_{S_{\alpha_0}}$$

hence we should have stopped the construction at α_0+1. This proves the lemma.

Lemma 7 : Let G be a metric space, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ a sequence in the unit ball of $\ell^\infty(G)$, S an infinite subset of $\mathbb{N}$. We assume that there exists $\rho>0$ such that for every open set $O\subset G$ and every $N\geqslant 1$ there exists $n\in S$, $n\geqslant N$ such that $\operatorname{diam} f_n(O)>\rho$. Then

$$\forall t\in G \quad \operatorname{diam} F_S(t)\geqslant \rho$$

Proof : For every $t\in G$, and every $B(t,k^{-1})\subset G$ there exist $n_k\in S$, $n_k>n_{k-1}$ such that $\operatorname{diam} f_{n_k}(B(t,k^{-1}))>\rho$ hence there exist s_k, $s'_k\in B(t,B(t,k^{-1})$ such that $|f_{n_k}(s_k)-f_{n_k}(s'_k)|\geqslant\rho$; let z and z' be cluster points of $(f_{n_k}(s_k))_{k\geqslant 1}$ and $(f_{n_k}(s'_k))_{k\geqslant 1}$ respectively. Hence $|z-z'|\geqslant\rho$ and z, $z'\in F_S(t)$.

Lemma 8 (selection lemma) : Let G be a complete metric space. Let $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence in the unit ball of $\ell^\infty(G)$. Let S be an infinite subset of $\mathbb{N}$. We assume that there exists $\rho>0$ such that

$$\forall t\in G \quad \operatorname{diam} F_S(t)\geqslant\rho$$

a) Then there exists a dense G_δ subset $A\subset G$ and two functions g, $h : A\to\bar{\mathbb{D}}$ which are continuous on A and verify

(i) $\forall t\in A \quad g(t)\in F_S(t) \quad h(t)\in F_S(t)$

(ii) $\forall t\in A \quad |g(t)-h(t)|\geqslant\rho/3$.

b) There exist α, $\beta\in\mathbb{C}$ such that $|\alpha-\beta|\geqslant\rho/3$ and there exists an open set $O\subset G$ such that

$$\forall t\in O \quad F_S(t)\cap\bar{B}(\alpha,\beta/16)\neq\emptyset \quad F_S(t)\cap\bar{B}(\beta,\rho/16)\neq\emptyset$$

Proof : a) we use twice the selection theorem [S. theorem 1.51] : by Baire's theorem every countable intersection of dense open sets in G is dense in G. As the graph $\mathcal{G}_S$ is closed in $G \times \bar{\mathbb{D}}$ the selection theorem implies that there exist a dense G_δ subset $A' \subset G$ and a continuous section $g : A' \to \bar{\mathbb{D}}$ such that $g(t) \in F_S(t)$ for every $t \in A'$. We now apply the selection theorem in $A' \times \bar{\mathbb{D}}$ to the set

$$\mathcal{H}_S = \{(t,z) \mid t \in A' \quad z \in F_S(t) \setminus B(g(t), \rho/3)\}.$$

We may apply it because every countable intersection of dense open sets in A' is dense in A', $F_S(t) \setminus B(g(t),\rho/3)$ is non empty for every $t \in A'$ by assumption and $\mathcal{H}_S$ is closed in $A' \times \bar{\mathbb{D}}$ (for if $t_n \to t$ in A', $z_n \to z$ in $\bar{\mathbb{D}}$ and $z_n \in F_S(t_n) \setminus B(g(t),\rho/3)$ then $z \in F_S(t)$ by lemma 5(b) and by the continuity of g

$$|z-g(t)| = \lim_n |z_n - g(t_n)| \geqslant \rho/3)$$

The selection theorem gives a dense G_δ set A in A' (hence A is a dense G_δ set in G) and a continuous section $h : A \to \bar{\mathbb{D}}$ such that (i), (ii) are verified.

b) Let us take $t_0 \in A$ and let $\alpha = g(t_0)$. By the continuity of g there exists an open subset $O' \subset G$ such that

$$\forall t \in O' \cap A \quad |g(t) - \alpha| < \rho/16$$

Let $\beta = h(t_0)$, hence $|\alpha - \beta| \geqslant \rho/3$. By the continuity of h there exists an open subset $O \subset O'$ such that

$$\forall t \in O \cap A \quad |h(t) - \beta| < \rho/16$$

hence for every $t \in O \cap A$ $F_S(t)$ meets $B(\alpha, \rho/16)$ and $B(\beta, \rho/16)$.

As A is a dense G_δ-subset of G, $O \cap A$ is dense in the complete metric space $\bar{O}$. As the graph of F_S is closed by lemma 5(b) the lemma is proved.

Lemma 9 : Let G be a complete separable metric space. Let $(f_n)_{n \geqslant 1}$ be a sequence in the unit ball of $\ell^\infty(G)$. We assume that there exists $\rho > 0$ such that for every infinite subset $S \subset \mathbb{N}$

$$\forall t \in G \quad \operatorname{diam} F_S(t) \geqslant \rho$$

Then there exist an infinite subset S_0, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ such that $|\alpha - \beta| \geqslant \rho/3$ and an open set $O \subset G$ such that for every finite collection $O_1, \dots, O_k$ of open subsets of 0 and for every $N \geq 1$ there exists $n \in S_o$, $n \geq N$ such that for every $1 \leq i \leq k$ $f_n(0_i)$ meets $B(\alpha, \rho/15)$ and $B(\beta, \rho/15)$.

Proof : We define S_o as in lemma 6. α ,β and 0 are defined for this S_o as in lemma 8(b). Let us assume that the conclusion of lemma 9 is false. There exists a collection $0_1, \ldots, 0_k$ of open subsets of 0 such that

$$\exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \ , \ n \in S_o \quad \exists i \leq k$$
$$f_n(0_i) \cap B(\alpha, \rho/15) = \emptyset \quad \text{or} \quad f_n(0_i) \cap B(\beta, \rho/15) = \emptyset \ .$$

Hence there exist $i_o \leq k$ and an infinite subset $S_1 \subset S_0$ such that either

$$\forall n \in S_1 \quad f_n(0_{i_o}) \cap B(\alpha, \rho/15) = \emptyset$$
$$\text{or} \quad \forall n \in S_1 \quad f_n(0_{i_o}) \cap B(\beta, \rho/15) = \emptyset \ .$$

Let us assume that we are in the first case for example. Hence

$$\forall t \in 0_{i_o} \quad F_{S_1}(t) \cap \bar{B}(\alpha, \rho/16) = \emptyset \ .$$

But by the definition of S_o $F_{S_1}(t) = F_{S_0}(t)$ for every $t \in G$ and by lemma 8(b).

$$\forall t \in 0 \quad F_{S_0}(t) \cap \bar{B}(\alpha, \rho/16) \neq \emptyset \ .$$

This is a contradiction. ∎

Obviously lemmas 7, 9, 4, 3 imply theorem B.

Addendum : After this paper was written, theorem B has been used again to produce related examples of Banach spaces with the strong Schur property [F. Lust-Piquard : Means on $CV_p(G)$; subspaces of $CV_p(G)$ having the Radon-Nikodym and Schur property. To appear].

Johannes Kepler Universität Linz
A-4040 Linz - Austria

References

[Bl] R.C. Blei : On subsets with associated compacta in discrete abelian groups. Proc. AMS. vol.37 n°2 (1973) p.453-455.

[Bg] R. Bourgin : Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym Property. Springer lecture notes. vol 993 (1983)

[B_1] J. Bourgain : Propriétés de décomposition pour les ensembles de Sidon. Bull. Soc. Math. France (1983).

[B_2] J. Bourgain : Sidon sets and Riesz products. Annales Inst. Fourier vol 35 (1985) p.136-148.

[D.G] M. Déchamps-Gondim : Ensembles de Sidon topologiques. Annales Inst. Fourier Grenoble vol 22 (1972) p.51-79.

[J.L] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss : Examples of $\mathcal{L}^1$ spaces. Arkiv för Math. vol 18 (1980) p.101-106.

[J.O] W.B. Johnson, E. Odell : Subspaces of L_p which embed into ℓp. Compositio Math. vol 28 (1974) p.37-39.

[K] E. Kamke : Theory of sets. Dover Publications.

[L] L.H. Loomis : The spectral characterization of a class of almost periodic functions. Annals of Math. vol 72 (1960) p.362-368

[$L.P_1$] F. Lust-Piquard : L'espace des fonctions presque périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable à la propriété de Schur. Colloquium mathematicum vol. XLI (1979) p.273-284.

[$L.P_2$] F. Lust-Piquard : Propriétés géométriques des sous espaces invariants par translation de $L^1(G)$ et $C(G)$. Exposé XXVI. Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach (1977-1978). Ecole Polytechnique

[R] H.P. Rosenthal : A characterization of Banach spaces containing ℓ^1 Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 (1974) p.2411-2413

[S] C. Stegall : Applications of a descriptive topology in functional analysis

[T] M. Talagrand : Pettis integral and measure theory. Memoirs of the AMS vol 51 n°307 (1984)

Hervé QUEFFELEC

Existence de vrais $\Lambda(p)$
d'après J. Bourgain

RESUME.

On détaille la preuve du résultat récent de J. Bourgain sur l'existence pour $2<p<\infty$, de parties E de Z qui sont des ensemble $\Lambda(p)$, mais pas des ensembles $\Lambda(p+\varepsilon)$ si $\varepsilon>0$.

Abstract.

We give a detailed proof of the recent result of J. Bourgain on the existence, for $2<p<\infty$, of subsets E of Z which are $\Lambda(p)$-sets, but not $\Lambda(p+\varepsilon)$-sets if $\varepsilon>0$.

NOTATIONS, DEFINITIONS et INTRODUCTION.

T désigne le cercle avec sa mesure de Haar $dm(t) = \frac{dt}{2\pi}$

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques sur T.

$\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de $f\in\mathcal{P}$, i.e. : $\hat{f}(n) = \int f(t)e^{-int}dm(t)$ si $n\in Z$.

$\mathcal{P}_E$ désigne l'ensemble des éléments f de $\mathcal{P}$ à spectre dans E ($\hat{f}(n) = 0$ si $n\notin E$) ; E est une partie de Z.

$\|f\|_p = (\int|f(t)|^p\, dm(t))^{1/p}$ $(0<p<\infty)$; c'est une norme sur $\mathcal{P}$ si $p\geq 1$

$|S|$ désigne le nombre des éléments de l'ensemble fini S.

Si K_1 , K_2 sont deux parties d'un espace vectoriel V, on définit le nombre de recouvrement de K_1 par K_2 par l'égalité

$$N(K_1,K_2) = \inf\left\{m\geq 1 \text{ ; il existe } x_1,\dots,x_m\in V \text{ avec } K_1\subset \bigcup_{j=1}^{m} (x_j+K_2)\right\}.$$

B_2 désigne la boule unité euclidienne dans R^n (n fixé).

Si $\mathcal{E} \subset R^n$ et $t > 0$, on pose :

$$N_2(\mathcal{E}, t) = N(\mathcal{E}, tB_2).$$

Un espace de Banach V est dit de type 2 s'il existe une constante K telle que pour tout n et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in V$

$$\int \| \sum_1^n \varepsilon_i(\omega) x_i \| d\omega \leq K \left(\sum_1^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$$ (La meilleure constante K se notant $T_2(V)$)

où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec probabilité 1/2 (suite de Rademacher).

Si V est de type 2 et si $(g_1, \ldots, g_n)$ est une suite gaussienne standard $(E(g_i g_j) = \delta_{ij}, E(g_i) = 0)$ on a pour tout n et tous $x_1, \ldots, x_n \in V$

$$\int \| \sum_1^n g_i(\omega) x_i \| d\omega \leq T_2(V) \left(\sum_1^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$$

Un espace $L^p(\mu)$, où μ est une mesure positive, est de type 2 si $2 \leq p < \infty$.

C désigne une constante numérique (mais qui peut varier de place en place).

<u>Définition</u> : soit $p \in]0, \infty[$ et $E \subset Z$; on dit que E est un ensemble de type $\Lambda(p)$ (en abrégé $E \in \Lambda(p)$) s'il existe $r < p$ et $C_o < \infty$ tels que

(1) $\|f\|_p \leq C_o \|f\|_r$ pour tout $f \in \mathscr{P}_E$

(autrement dit les "normes" L^p et L^r sont équivalentes sur $\mathscr{P}_E$).

<u>Remarque 1</u> : La valeur de r est sans importance dans cette définition, si en effet $0 < s < r$, écrivons $r^{-1} = (1-\theta)s^{-1} + \theta p^{-1}$ avec $0 < \theta < 1$. Si $f \in \mathscr{P}_E$, on a d'après (1) et l'inégalité de Hölder :

$$\|f\|_p \leq C_o \|f\|_r \leq C_o \|f\|_s^{1-\theta} \|f\|_p^{\theta}, \text{ d'où :}$$

$$\|f\|_p \leq C_o^{\frac{1}{1-\theta}} \|f\|_s \ .$$

<u>Remarque 2</u> : Si $E \in \Lambda(p)$ et si $p > 2$, E vérifie nécessairement la condition de lacunarité suivante :

(2) $\qquad |E\cap\{1,\ldots,N\}| \leq C' \, N^{2/p}$

(N entier arbitraire ≥ 1 ; $C' = 4C_0^2\,(2\pi)^{2/p}$ si $\|f\|_p \leq C_0\|f\|_2$ pour $f\in\mathscr{P}_E$).
Posons en effet $E\cap\{1,\ldots,N\} = \{n_1,\ldots,n_k\}$ et $\sum_1^k e^{in_jt} = f(t)$

$|f(t)-k| \leq \sum_{j=1}^{k} |e^{in_jt}-1| \leq \sum_{j=1}^{k} |n_j|t \leq kN|t| \leq \frac{k}{2}$ si $|t|\leq\frac{1}{2N}$, donc

$|t|\leq\frac{1}{2N} \Rightarrow |f(t)| \geq \frac{k}{2}$, d'où $\|f\|_p^p \geq \int_{|t|\leq\frac{1}{2N}} (\frac{k}{2})^p \frac{dt}{2\pi} = (\frac{k}{2})^p \frac{N^{-1}}{2\pi}$, ce qui

implique $\frac{k}{2}\ \frac{N^{-1/p}}{(2\pi)^{1/p}} \leq \|f\|_p \leq C_0\|f\|_2 = C_0\sqrt{k}$, d'où $\sqrt{k}\leq 2\ C_0(2\pi)^{1/p}\,N^{1/p}$

ce qui n'est autre que (2).

Les remarques (1) et (2) sont desrappels de [R].

La notion d'ensemble $\Lambda(p)$ a été introduite par Rudin ([R]) dans un article où il pose la question :

Si $p_1 < p_2$, existe-t-il E tel que $E\in\Lambda(p_1)$, mais $E\notin\Lambda(p_2)$?

Rudin répond affirmativement à cette question si p_1 est un entier pair ≥ 4, sous la forme plus plus précise suivante :

si $p = 4,6,8\ldots$ il existe E avec $E\in\Lambda(p)$, $E\notin\Lambda(p+\varepsilon)$ si $\varepsilon>0$. A la suite de cela, introduisons la

<u>Définition 2</u>. On dira que $E\subset Z$ est "un vrai $\Lambda(p)$" si $E\in\Lambda(p)$, et $E\notin\Lambda(p+\varepsilon)$ si $\varepsilon>0$.

En 1974, Bachelis et Ebenstein [B-E] (utilisant un article de Rosenthal sur les sous-espaces de L^p) ont démontré que si $1\leq p<2$, il n'existe pas de vrai $\Lambda(p)$ (autrement dit $E\in\Lambda(p) \Rightarrow E\in\Lambda(p+\varepsilon)$ pour au moins un $\varepsilon>0$).

En 1988, J. Bourgain a démontré qu'au contraire si $2<p<\infty$ il existe un vrai $\Lambda(p)$, ce que Rudin ne savait montrer pour les entiers pairs ≥ 4 ; c'est cette construction de Bourgain qui est exposée en détail ici.

Les deux problèmes suivants restent ouverts ;

i) Existe-t-il de vrais $\Lambda(2)$?

ii) Si $1 \leqslant p < 2$ et si $E \in \Lambda(p)$, a-t-on $E \in \Lambda(2)$?

(Il résulte de la construction de Bourgain que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe E avec $E \in \Lambda(2)$, $E \notin \Lambda(2+\varepsilon)$, ce qui est plus faible que i).)

Nous allons donc prouver le

Théorème 1 : si $2 < p < \infty$, il existe un sous-ensemble E de Z qui est un vrai $\Lambda(p)$.

Le théorème 1 résultera de la version finie-dimensionnelle suivante, qui peut-être considérée comme le "noyau dur" de la preuve

Théorème 2 : Soit (E,Σ,ν) un espace de probabilité. Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ un système orthonormal uniformément borné sur (E,Σ,ν) $(\|\varphi_i\|_\infty \leqslant M)$ et soit $2 < p < \infty$. Il existe $S \subset \{1,\ldots,n\}$ avec les deux propriétés :

a) $|S| \geqslant \alpha\, n^{2/p}$ (où α ne dépend que de p et M)

b) $\|\sum_{i\in S} a_i\varphi_i\|_p \leqslant \beta \left(\sum_{i\in S} |a_i|^2\right)^{1/2}$ (où β ne dépend que de p et M) pour tout $(a_i) \in \mathbb{C}^S$.

Le théorème 2 entraîne le théorème 1 : en effet, on peut alors trouver pour tout $j \geqslant 1$ une partie E_j de $[2^j, 2^{j+1}[$ telle que $|E_j| \geqslant \alpha\, 2^{j/p}$ et $\|f\|_p \leqslant \beta \|f\|_2$ si $f \in \mathscr{P}_{E_j}$.

Soit $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. $|E \cap \{1,2,3,\ldots,2^j-1\}| \geqslant |E_j| \geqslant \alpha\, 2^{j/p}$, donc si $q > p$, E ne peut être $\Lambda(q)$ (La condition (2) de $\Lambda(q)$-lacunarité est violée). Reste à montrer que E est $\Lambda(p)$; soit $f \in \mathscr{P}_E$; f s'écrit $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ avec

$f_j \in \mathscr{P}_{E_j}$ et d'après l'inégalité de Littlewood-Paley ([K-P])

$$\|f\|_p \leq K_p \left\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{1/2}\right\|_p = K_p \left\|\sum_j |f_j|^2\right\|_{p/2}^{1/2} \leq K_p\left(\sum_j \left\||f_j|^2\right\|_{p/2}\right)^{1/2} \quad \text{(puisque } p/2 > 1)$$

$$= K_p \left(\sum_j \|f_j\|_p^2\right)^{1/2} \leq K_p \left(\beta^2 \sum_j \|f_j\|_2^2\right)^{1/2} = K_p \beta \|f\|_2 \quad \square$$

Le théorème 2 sera prouvé seulement pour $2 < p \leq 3$ (les autres plages de valeurs de p s'en déduisent par des modifications simples).

Le théorème 2 sera prouvé seulement pour des φ_i réelles, ce qui suffira pour les besoins du théorème 1 ; en effet, si les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des caractères distincts $\neq 0$ de Z, les deux familles $(\sqrt{2}\,\mathcal{R}\varphi_i)$ et $(\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\varphi_i)$ sont encore orthonormales et d'autre part, vu le caractère probabiliste de la preuve qui suivra, la plupart des parties S de cardinalité $\geq \alpha\, n^{2/p}$ vérifient le b) du théorème 2 ; on pourra donc trouver $S \subset \{1,\ldots,n\}$, de cardinalité $\geq \alpha\, n^{2/p}$, qui vérifie à la fois

$$\left\|\sum_{i\in S} a_i\, \mathcal{R}\varphi_i\right\|_p \leq C \left(\sum_{i\in S} a_i^2\right)^{1/2} \quad \forall (a_i) \in R^S \quad \text{et}$$

$$\left\|\sum_{i\in S} a_i\, \mathrm{Im}\varphi_i\right\|_p \leq C \left(\sum_{i\in S} a_i^2\right)^{1/2} \quad \forall (a_i) \in R^S .$$

D'où $\left\|\sum_{i\in S} a_i\varphi_i\right\|_p \leq 4C\left(\sum_{i\in S} |a_i|^2\right)^{1/2} \quad \forall (a_i) \in \mathbb{C}^S$.

De toutes façons, il semble qu'on pourrait prouver directement le théorème 2 pour des φ_i complexes, au prix seulement de notations plus compliquées.

La démonstration du théorème 2 utilise les trois ingrédients suivants, qui seront développés d'abord

(A) Une inégalité probabiliste (version du théorème de majoration de Dudley pour les processus gaussiens et sous-gaussiens).

(B) Une estimation d'entropie (destinée à exploiter l'inégalité précédente).

(C) Un principe de découplage relativement simple.

La construction de S n'est pas difficile, et on peut déjà l'indiquer : soient $\xi_1,\ldots,\xi_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs 0 ou 1 (des sélecteurs...) avec $E(\xi_j) = \delta$, <u>où</u> δ <u>est tel que</u> $\delta n = n^{2/p}$. Soit

$$S_\omega = \{j/\xi_j(\omega) = 1\} \text{ , si bien que } |S_\omega| = \sum_1^n \xi_j(\omega) \text{ et que}$$

$E|S_\omega| = \delta n = n^{2/p}$. S sera de la forme $S = S\omega_0$, ω_0 convenable , et on aura automatiquement a). La difficulté sera de montrer que S, qui ne peut être un ensemble $\Lambda(q)$ avec une constante raisonnable pour aucun $q > p$ (à cause de a)), est quand même un ensemble $\Lambda(p)$! (Ie vérifie b))

Ⓐ <u>INEGALITE PROBABILISTE</u>

Dans cette partie, $x = (x_1,\dots,x_n)$ sur un élément de R^n et $|x| = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}$ sa norme euclidienne.

<u>Théorème A</u> : Soit $\mathcal{E} \subset R_+^n$, $B = \sup_{x\in\mathcal{E}} |x|$; soit m un entier $\leqslant n$, q_0 un réel $\geqslant 1$. Alors (les ξ_i étant celles de la page précédente)

$$(A.1)\quad \left\| \sup_{\substack{|A|\leqslant m\\ x\in\mathcal{E}}} \sum_{i\in A} \xi_i x_i \right\|_{q_0} \leqslant C\left[(\delta m)^{1/2}B + \left(\frac{q_0}{\log\frac{1}{\delta}}\right)^{1/2}B + \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1/2}\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)}\,dt\right]$$

Avant de prouver cette inégalité, faisons quelques commentaires :

(A.1) se présente comme une variante de l'inégalité de majoration de Dudley [D] pour les processus gaussiens et sous-gaussiens ; cette inégalité s'écrirait (si $0\in\mathcal{E}$)

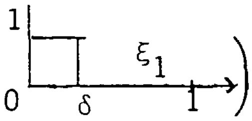
$$(A.1)'\quad \left\| \sup_{x\in\mathcal{E}} \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\|_1 \leqslant C\, B\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)}\,dt .$$

(r_i étant une suite de Rademacher).

On voit apparaître ici trois difficultés supplémentaires :

1°) On prend des moments d'ordre q_0 (dans la suite, q_0 variera et sera arbitrairement grand)

2°) Les ξ_i sont fortement biaisées (sur $[0,1]$, on a la représentation



) .

3°) Il y a un sup supplémentaire (quoique moins violent que celui en x) par rapport aux A avec $|A| \leq m$. (A.1) va résulter des deux lemmes suivants et d'un recopiage de la preuve de (A.1)'.

<u>Lemme 1</u> : Soit ℓ un entier ≥ 1, q un réel ≥ 1. Alors

$$(A.2) \qquad \Big\| \sum_1^{\ell} \xi_i \Big\|_q \leq C \left(\delta\ell + \frac{q}{\log\left(2 + \frac{q}{\delta\ell}\right)} \right) .$$

Ce lemme est intéressant pour q petit devant ℓ ; on y règle les difficultés 1°) et 2°). Voici la preuve

1°) <u>$q \geq 2\delta\ell$</u> : posons $\frac{\delta\ell}{q} = e^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $X = \sum_1^{\ell} \xi_i$, X suit une loi binômiale $\mathscr{B}(\ell,\delta)$, donc

$$E(X^q) = \sum_{K=1}^{\ell} K^q \, C_\ell^K \delta^K (1-\delta)^{\ell-K} \leq \sum_{K=1}^{\ell} K^q \frac{\ell^K}{K!} \delta^K = \sum_{K=1}^{\ell} K^q \left(\frac{\delta\ell}{q}\right)^K \frac{q^K}{K!}$$

$$= \alpha^{-q} \sum_{K=1}^{\ell} (\alpha K)^q e^{-\alpha K} \frac{q^K}{K!} \leq \alpha^{-q} \sum_{K=1}^{\ell} q^q e^{-q} \frac{q^K}{K!} \leq \left(\frac{q}{\alpha}\right)^q e^{-q} e^q = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^q .$$

(On a utilisé $x^q e^{-x} \leq q^q e^{-q}$ si $x \geq 0$), d'où

$$\|X\|_q \leq \frac{q}{\alpha} = \frac{q}{\log \frac{q}{\delta\ell}} \leq C \frac{q}{\log\left(2 + \frac{q}{\delta\ell}\right)} \quad \text{puisqu'ici } q \geq 2\delta\ell .$$

2°) <u>$q < 2\delta\ell$</u> . Soit $q_0 = 2\delta\ell$. D'après le premier cas, on a successivement

$$\|X\|_q \leq \|X\|_{q_0} \leq \frac{C\, q_0}{\log\left(2 + \frac{q_0}{\delta\ell}\right)} = \frac{C\, q_0}{\log 4} = C\delta\ell$$

1°) et 2°) mis ensemble donnent (A.2).

Dans le lemme suivant, on va régler la difficulté 3°) tout en introduisant des coefficients quelconques (mais fixes) $y_1,\ldots,y_n$.

Lemme 2 : soit $y = (y_1,\dots,y_n) \in R_+^n$, $q \geq 1$. Alors :

$$(A.3)\qquad \left\| \sup_{|A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i y_i \right) \right\|_q \leq C \left[(\delta m)^{1/2}\ |y| + \left(\frac{q}{\log 1/\delta} \right)^{1/2} |y| \right]$$

Preuve : On peut supposer $|y| = 1$; soient ρ_1, ρ_2 à ajuster avec $0 < \rho_1 < \rho_2$; coupons $\sum_{i\in A} \xi_i y_i$ en trois

$$\sum_{i\in A} \xi_i y_i \leq \sum_{y_i \geq \rho_2} \xi_i y_i + \sum_{\substack{i\in A \\ y_i < \rho_1}} \xi_i y_i + \sum_{\rho_1 < y_i < \rho_2} \xi_i y_i$$

(Si dans l'ajustement qui suivra on avait $\rho_1 \geq \rho_2$, la troisième somme serait vide). D'après l'inégalité de Tchebycheff pour la mesure de décompte : $|\{i/y_i \geq \rho_2\}| \leq \rho_2^{-2}|y|^2 = \rho_2^{-2}$. L'inégalité de Schwarz donne alors $\sum_{y_i\geq\rho_2} \xi_i y_i \leq \sum_{y_i\geq\rho_2} y_i \leq \rho_2^{-1}\ |y| = \rho_2^{-1}$.

D'autre part $|A| \leq m \Rightarrow \sum_{\substack{i\in A \\ y_i<\rho_1}} \xi_i y_i \leq m\rho_1$. D'où l'inégalité latticielle

$$(A.4)\qquad Y \overset{\text{def}}{=} \sup_{|A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i y_i \right) \leq \rho_2^{-1} + m\rho_1 + \sum_{\rho_1 < y_i < \rho_2} \xi_i y_i$$

Soit E l'ensemble des entiers ℓ qui sont des puissances de 5 et tels que $\rho_2^{-2} < \ell < \rho_1^{-2}$. Soit $I = \{i/\rho_1 < y_i < \rho_2\}$.

Décomposant I en ensembles de niveaux où y_i vaut approximativement $\ell^{-1/2}$, on a une réunion disjointe

$$I = \bigcup_{\ell\in E} I_\ell \quad \text{et} \quad i \in I_\ell \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\ell}} < y_i \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\ell}} .$$

L'inégalité de Tchebycheff entraîne $|I_\ell| \leq \ell|y|^2 = \ell$. (A.4) donne alors

$$(A.5)\qquad \|Y\|_q \leq \rho_2^{-1} + m\rho_1 + \sum_{\ell\in E} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\ell}} \left\| \sum_{i\in I_\ell} \xi_i \right\|_q$$

$$\leq \rho_2^{-1} + m\rho_1 + \sum_{\ell\in E} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\ell}} \left\| \sum_1^{|I_\ell|} \xi_i \right\|_q \leq \rho_2^{-1} + m\rho_1 + \sum_{\ell\in E} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\ell}} \left\| \sum_1^{\ell} \xi_i \right\|_q$$

puisque les ξ_i sont indépendantes équidistribuées positives.

(A.5) et (A.2) donnent

$$\|Y\|_q \leqslant \rho_2^{-1} + m\rho_1 + C \sum_{\ell \in E} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left(\delta\ell + \frac{q}{\log\left(2 + \frac{q}{\delta\ell}\right)}\right)$$

$$\leqslant \rho_2^{-1} + m\rho_1 + C \sum_{\ell < \rho_1^{-2}} \delta\sqrt{\ell} + Cq \sum_{\ell > \rho_2^{-2}} \frac{1}{\sqrt{\ell}\log\left(2 + \frac{q}{\delta\ell}\right)}$$

(ℓ étant une puissance de 5). La dernière somme s'écrit

$\sum_{5^K > \rho_2^{-2}} \varphi(K)$ avec $\varphi(K) = \dfrac{1}{\sqrt{5^K}\,\log\left(2 + \frac{q}{\delta 5^K}\right)}$ si bien que

$$\frac{\varphi(K+1)}{\varphi(K)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\log\left(2 + \frac{q}{\delta 5^K}\right)}{\log\left(2 + \frac{q}{\delta 5^{K+1}}\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \sup_{x>0} \frac{\log(2+5x)}{\log(2+x)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

car $(2+x)^2 - (5x+2) = x^2 - x + 2 \geqslant 7/4 \geqslant 0$. Si K_0 est le plus petit entier tel que $5^{K_0} > \rho_2^{-2}$, il s'ensuit que

$$\sum_{5^K > \rho_2^{-2}} \varphi(K) \leqslant \sum_{j \geqslant 0} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^j \varphi(K_0) \leqslant C\,\varphi(K_0) \leqslant C\rho_2 \frac{1}{\log\left(2 + \frac{5q\rho_2^2}{\delta}\right)}$$

d'où finalement

$$\text{(A.6)} \qquad \|Y\|_q \leqslant C\,(m\rho_1 + \delta\rho_1^{-1}) + C\left(\rho_2^{-1} + \frac{q\rho_2}{\log\left(2 + \frac{5q\rho_2^2}{\delta}\right)}\right).$$

On choisit ρ_1 et ρ_2 indépendamment de façon à minimiser les deux parenthèses ci-dessus. Le choix de ρ_1 est clair :

$$\boxed{\rho_1 = \left(\frac{\delta}{m}\right)^{1/2}}\,.$$

Le choix de ρ_2 l'est moins : mais on vérifie aisément que si

$$\boxed{\rho_2 = q^{-1/2}\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1/2}}$$

les deux quantités ρ_2^{-1} et $\dfrac{q\rho_2}{\log\left(2 + \frac{5q\rho_2^2}{\delta}\right)}$ sont toutes deux du même ordre de grandeur $q^{1/2}\,(\log \frac{1}{\delta})^{-1/2}$. Avec ces choix de ρ_1 et ρ_2, (A.6) s'écrit

$\|Y\|_q \leqslant C \left[(\delta m)^{1/2} + \left(\frac{q}{\log 1/\delta}\right)^{1/2}\right]$, ce qui n'est autre que (A.3)

Avant de passer à la preuve de (A.1), on a encore besoin du

<u>Lemme</u> A_3 : soit $(X_y)_{y\in E}$ une collection de variables aléatoires positives indexée par E fini $(|E| = N)$ et soit $q_o \geqslant 1$. Alors

$$\text{(A.7)} \qquad \|\sup_y X_y\|_{q_o} \leqslant e \sup_y \|X_y\|_{q_o+\log N}$$

<u>Preuve</u> : Soit $M = \sup_y X_y^{q_o}$ et $r \geqslant 1$. Par l'inégalité de Jensen

$(E(M))^r \leqslant E(M^r) \leqslant \sum_y E(X_y^{q_o r}) \leqslant N \sup_y \|X_y\|_{q_o r}^{q_o r}$, d'où

$\|\sup_y X_y\|_{q_o} = (E(M))^{\frac{1}{q_o}} \leqslant N^{\frac{1}{rq_o}} \sup_y \|X_y\|_{q_o r}$.

On ajuste $r \geqslant 1$ de façon que $rq_o \geqslant \log N$ car alors $N^{\frac{1}{rq_o}} \leqslant N^{\frac{1}{\log N}} = e$.

On doit donc prendre $rq_o \geqslant \max(q_o, \log N)$, soit par exemple $rq_o = q_o + \log N$.

D'où (A.7).

Venons-en à la preuve de (A.1) ; on peut supposer $B = 1$ car les deux nombres sont des fonctions homogènes de $\mathcal{E}$; en effet, pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\lambda\mathcal{E},t)}\,dt = \int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},\tfrac{t}{\lambda})}\,dt = \lambda\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},s)}\,ds \;.$$

Soit $N_K = N_2(\mathcal{E},2^{-K})$ $(K\in \mathbb{N})$.

Soit $R_K = \{z^K(1),z^K(2),\ldots,z^K(N_K)\} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E} \subset R_K + 2^{-K} B_2$.

On peut prendre $R_o = \{z^o(1)\} = \{0\}$ puisque $B = 1$.

Soit $x \in \mathcal{E}$; pour tout $K \geqslant 0$, il existe $j_K \in [1,N_K]$ tel que

$|x - z^K(j_K)| \leqslant 2^{-K}$, d'où $x = \sum_{K=1}^{\infty} [z^K(j_K) - z^{K-1}(j_{K-1})]$ puisque $z^o(1) = 0$.

D'autre part $|z^K(j_K)-z^{K-1}(j_{K-1})| \leqslant |z^K(j_K)-x|+|x-z^{K-1}(j_{K-1})| \leqslant 2^{-K}+2^{-K+1} \leqslant C\,2^{-K}$

et $z^K(j_K) - z^{K-1}(j_{K-1})$ rend au plus $N_K N_{K-1} \leqslant N_K^2$ valeurs ; on peut donc poser $z^K(j_K) - z^{K-1}(j_{K-1}) = C\,2^{-K}\,y(K)$ avec $y(K) \in E_K$, $E_K \subset B_2$ et $|E_K| \leqslant N_K^2$ et tout élément x de $\mathcal{E}$ admet une représentation

(A.8) $\quad x = C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K}\, y(K)$ où $y(K) \in E_K$, $E_K \subset B_2$ et $|E_K| \leqslant N_K^2$

$$\sum_{i\in A} \xi_i x_i = C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \Big[\sum_{i\in A} \xi_i y_i(K)\Big] \leqslant C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \Big[\sum_{i\in A} \xi_i |y_i(K)|\Big].$$

Posons $X_y = \sup\limits_{|A|\leqslant m} \Big(\sum\limits_{i\in A} \xi_i |y_i|\Big)$. Ainsi :

$$\sup_{\substack{|A|\leqslant m\\ x\in \mathcal{E}}} \sum_{i\in A} \xi_i x_i \leqslant C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \sup_{y\in E_K} X_y$$. D'où via (A.7)

$$\Big\| \sup_{\substack{|A|\leqslant m\\ x\in \mathcal{E}}} \sum_{i\in A} \xi_i x_i \Big\|_{q_0} \leqslant C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \Big\| \sup_{y\in E_K} X_y \Big\|_{q_0} \leqslant C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \sup_{y\in E_K} \| X_y \|_{q_0 + \log |E_K|} \, .$$

D'après (A.3) et (A.8) ceci est majoré par

$$C \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \Big[(\delta m)^{1/2} + \Big(\frac{q_0 + \log N_K}{\log 1/\delta}\Big)^{1/2}\Big]$$

$$\leqslant C\Big[(\delta m)^{1/2} + \Big(\frac{q_0}{\log 1/\delta}\Big)^{1/2} + \Big(\log \frac{1}{\delta}\Big)^{-1/2} \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \sqrt{\log N_K}\Big]$$

$$\leqslant C\Big[(\delta m)^{1/2} + \Big(\frac{q_0}{\log 1/\delta}\Big)^{1/2} + \Big(\log \frac{1}{\delta}\Big)^{-1/2} \int_0^{\infty} \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)}\,dt\Big]$$

car puisque $g(t) = \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)}$ décroît :

$$\int_0^1 g(t)dt \geqslant \sum_{K=1}^{\infty} \int_{2^{-K-1}}^{2^{-K}} g(t)dt \geqslant \sum_{K=1}^{\infty} g(2^{-K}) \int_{2^{-K-1}}^{2^{-K}} dt = \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K-1} g(2^{-K}) \qquad \square$$

(B) ESTIMATION D'ENTROPIE

Notations : Rappelons que $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est un système orthonormal uniformément borné ($\|\varphi_j\|_\infty \leqslant M$) sur un espace de probabilités (E,Σ,ν).

Si $a = (a_1,\dots,a_n) \in R^n$, on pose $|a| = (\Sigma a_i^2)^{1/2}$ et $\|a\|_\infty = \sup |a_i|$.

On pose également

$L^q = L^q(E,\Sigma,\nu) \quad (q > 2)$

B_q^A = boule unité du sous-espace de L^q engendré par les φ_i, $i \in A$ $(A \subset \{1,\dots,n\})$

$B_q = B_q^{\{1,\dots,n\}}$ = boule unité du sous-espace de L^q engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_n$

$\Pi_A = \{\sum_{i\in A} a_i\ \varphi_i\ ;\ |a|\leq 1\}$. $\mathscr{P}_m = \bigcup_{|A|\leq m} \Pi_A = \{\Sigma\ a_i\ \varphi_i\ ;\ |a|\leq 1$ et $|\mathrm{supp}\,a|\leq m\}$.

On se permettra dans la suite d'identifier $f = \Sigma\ a_i\ \varphi_i \in \mathscr{P}_m$ avec $a = (a_i)$ et on écrira aussi bien $a\in \mathscr{P}_m$. On pose $\mathrm{supp}\ f = \mathrm{supp}\,a = \{i/a_i \neq 0\}$, ainsi que $N_q(\Pi_A,t) = N(\Pi_A,tB_q^A)$ et $N_q(\mathscr{P}_m,t) = N(\mathscr{P}_m,tB_q)$

C_q désignera une constante qui ne dépend que de q et C'_q une constante qui ne dépend que de q et $M = \sup_j \|\varphi_j\|_\infty$ (elles peuvent varier de place en place). L'inégalité fondamentale ici est le

<u>Théorème B</u>.

(B.1) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{\log N_q(\mathscr{P}_m,t)}\,dt \leq C'_q\sqrt{m\log n}$ $\qquad (m\leq n\ ;\ n\geq 2)$

La preuve de (B.1) se déduira des deux inégalités ponctuelles suivantes

$$\begin{cases} \text{(B.2)}\quad \log N_q(\mathscr{P}_m,t)\leq C'_q\ m\log n\ t^{-\nu} \quad \text{si}\quad t\geq t_o \quad (t_o=t_o(q,M)>0\ ;\ \nu=\nu(q)>2) \\ \text{(B.3)}\quad \log N_q(\mathscr{P}_m,t)\leq C'_q\ m\log n\ \log(1+\frac{1}{t}) \quad \text{si}\quad 0<t\leq t_o\ . \end{cases}$$

(B.2) et (B.3) entraînent (B.1) puisque

$$\sqrt{\log(1+\tfrac{1}{t})}\ 1_{]0,t_o]} + t^{-\nu/2}\ 1_{[t_o,\infty[} \in L^1(R^+,dt)\ .$$

On va commencer par estimer $N_q(\Pi_A,t)$; Π_A n'est autre que la copie d'une boule euclidienne en dimension $|A|$; on va donc utiliser le lemme suivant (dit "estimation Sudakov duale") dû à Pajor-Tomczak et dont on reproduit une preuve simple dûe à Pajor-Talagrand

<u>Lemme 1</u> : Soit d un entier ≥ 1, B_2 la boule unité euclidienne de R^d , B la boule unité d'une norme $\|\ \|$ sur R^d et $M = E\,\|\sum_1^d g_ie_i\|$, où (e_i) est la base canonique de R^d et (g_i) une suite gaussienne standard. Alors pour tout $t>0$

(B.4) $\log N(B_2, tB) \leq C(\frac{M}{t})^2$

(B.5) $\log N(B_2, tB) \leq CT_2\ (R^d, \|\ \|)\ \dfrac{\sum_1^d \|e_i\|^2}{t^2}$

<u>Preuve</u> : (B.5) est une conséquence immédiate de (B.4).

(B.4) va résulter d'un argument de volume, mais vis à vis de la probabilité gaussienne $\mu = (2\pi)^{-d/2}\sigma$, avec $\sigma = \exp(-\frac{|x|^2}{2})\ dx_1 \ldots dx_d$. L'inégalité fondamentale est la suivante : soit K un convexe de R^d symétrique par rapport à 0 ; alors

(B.6) $\mu(K+y) \geq \exp(-\frac{|y|^2}{2})\ \mu(K)$

(D'après l'inégalité de Brûnn-Minkonski, on a toujours $\mu(K+y) \leq \mu(K)$). Il suffit de prouver (B.6) avec σ à la place de μ :

$\sigma(K+y) = \int_K \exp(-\frac{|x+y|^2}{2})\ dx \geq \int_K \exp\left[-\frac{1}{4}\left(|x+y|^2+|y-x|^2\right)\right] dx$

(par Cauchy-Schwarz et le fait que $K = -K$)

$= \int_K \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|x|^2+|y|^2\right)\right] dx$ (par l'identité du parallélogramme)

$= \exp(-\frac{|y|^2}{2})\ \sigma(K)$. Avant de poursuivre, notons les deux inégalités

(B.7) $\mu(2MB) \geq \frac{1}{2}$.

En effet, $\mu(R^d \backslash 2MB) = \mu\{x/\|x\| > 2M\} \leq \frac{1}{2M} \int \|x\|\, d\mu(x) = \frac{1}{2M} \times M = \frac{1}{2}$

(B.8) $\|x\| \leq 2M|x|$ (soit $B_2 \subset 2MB$)

Soit en effet $x = \sum_1^d x_i e_i$ avec $|x| = 1$ et soit $\varphi \in (R^d, \|\ \|)^\star$ avec $\|\varphi\| = 1$.

$|\varphi(x)| = |\sum_1^d x_i\ \varphi(e_i)| \leq \left(\sum_1^d |\varphi(e_i)|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{E|g_1|} E|\sum_1^d g_i \varphi(e_i)|$

$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ E\left|\varphi\left(\sum_1^d g_i e_i\right)\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ E\left\|\sum_1^d g_i e_i\right\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ M \leq 2M$. Donc $\|x\| \leq 2M$.

(Pour les banachistes, (B.8) est un cas particulier de $\|u\| \leq C\ell(u)$).

Soit alors $x^1,\dots,x^N$ un système maximal de points de B_2 avec $\|x^i-x^j\|>t$ si $i\neq j$, si bien que les boules $x^i+\frac{t}{2}B$ sont deux à deux disjointes, tout comme les boules $\lambda x^i+\frac{\lambda t}{2}B$ (si $\lambda>0$). Ajustons λ pour avoir $\frac{\lambda t}{2}=2M$, soit $\lambda=\frac{4M}{t}$, nous obtenons via (B.6) et (B.7) puisque μ est une probabilité :

$$1\geqslant\sum_{i=1}^N \mu(\lambda x^i+2MB)\geqslant\sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{|\lambda x^i|^2}{2}\right)\mu(2MB)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N e^{-\lambda^2/2}$$

$$=\frac{N}{2}\exp\left(-\frac{8M^2}{t^2}\right)\text{, d'où }\log N\leqslant\log 2+C\left(\frac{M}{t}\right)^2 .$$

D'après la maximalité du système (x^i), $N(B_2,tB)\leqslant N$ d'où

(B.9) $\log N(B_2,tB)\leqslant\log 2+C\left(\frac{M}{t}\right)^2$.

Pour $t\leqslant 2M$, $\log 2\leqslant 4\log 2\left(\frac{M}{t}\right)^2$, donc (B.9) entraîne (B.4).

Pour $t>2M$, (B.8) entraîne $\log N(B_2,tB)=0\leqslant C\left(\frac{M}{t}\right)^2$. □

<u>Remarque</u> : si on applique l'argument de volume précédent à la mesure de Lebesgue λ sur R^d, on obtient l'inégalité classique, qu'on utilisera par la suite :

(B.4)' $N(B,tB)\leqslant\left(1+\frac{2}{t}\right)^d$

Soit en effet $x^1,\dots,x^N$ un système maximal de points de B avec $\|x^i-x^j\|>t$ si $i\neq j$; les boules $x^i+\frac{t}{2}B$ sont disjointes et contenues dans $\left(1+\frac{t}{2}\right)B$ d'où

$$\left(1+\frac{t}{2}\right)^d\lambda(B)\geqslant\sum_{i=1}^N\lambda\left(x^i+\frac{t}{2}B\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^d N\,\lambda(B)\text{, d'où }N(B,tB)\leqslant N\leqslant\left(1+\frac{2}{t}\right)^d.$$

<u>Corollaire</u> :

(B.10) $\log N_q(\Pi_A,t)\leqslant C'_q\,\frac{|A|}{t^2}$

<u>Preuve</u> : Sur R^A, considérons la norme $\|a\|=\|\sum_{i\in A}a_i\varphi_i\|_q$; Π_A peut être

assimilée à la boule euclidienne de R^A par l'isomorphisme $\Sigma a_i \varphi_i \to \Sigma a_i e_i$.
Donc (B.5) donne, puisque L^q est de type 2

$$\text{(B.11)} \qquad \log N_q(\Pi_A,t) \leqslant C\, T_2(L^q)\ \frac{\sum_1^A \|\varphi_i\|_q^2}{t^2} \qquad (\text{puisque } \|e_i\| = \|\varphi_i\|_q)$$

Enfin $\|\varphi_i\|_q \leqslant \|\varphi_i\|_\infty \leqslant M$, donc (B.11) entraîne (B.10) (avec $C'_q = M^2\, C\, T_2(L^q)$). <u>Signalons que (B.10) ne sera utilisé que pour</u> $t=1$.

<u>Remarque</u> :

L'estimation immédiate déduite de (B.10) (cf. (B.16)), à savoir

$$\text{(B.10)'} \quad N_q(\mathscr{P}_m,t) \leqslant \sum_{|A|\leqslant m} N_q(\Pi_A,t) \leqslant n^{m+1} \exp(C'_q \frac{m}{t^2}) \text{ , soit}$$

$\log N_q(\mathscr{P}_m,t) \leqslant (m+1) \log n + C'_q \frac{m}{t^2}$ ne peut s'intégrer sur R^+. L'estimation $\log N_q(\mathscr{P}_m,t) \leqslant \log N_q(\Pi_{\{1,\dots,n\}},t) \leqslant C_q \frac{n}{t^2}$ ne convient pas non plus, surtout parce que m a disparu.
On a besoin de l'ingrédient supplémentaire suivant

<u>Lemme 2</u> : soit $t \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{P}_m$. On peut écrire (troncature de f au niveau t)

$$\text{(B.12)} \qquad f = g + h \quad \text{avec} \quad \|g\|_q \leqslant C'_q t \quad \text{et} \quad h \in C'_q t \ \mathscr{P}_{\left[\frac{C'_q m}{t^2}\right]}$$

où [ ] désigne la partie entière.

La signification de (B.12) est la suivante : t étant donné, on cherche à approcher avec une erreur $\leqslant t$ un élément t de $\mathscr{P}_m$; quitte à faire une une erreur de l'ordre de t ($\|g\|_q \leqslant C'_q t$). On peut remplacer f, par h où le support de h est beaucoup plus petit que celui de f (et alors (B.10)' réussira) et où en contre-partie la norme ℓ^2 des coefficients de h a peut-être augmenté, mais pas plus que d'un facteur $C'_q t$).

Voici la preuve : soit $K \in \mathbb{N}^\star$ tel que $2^{\frac{K-1}{2}} \leqslant t < 2^{K/2}$ et soit $f = \sum_{i \in A} a_i \varphi_i \in \mathscr{P}_m$. Si (ε_i^1), $(\varepsilon_i^2), \ldots, (\varepsilon_i^K)$ sont K suites de Rademacher indépendantes, on a successivement

$$f = \sum_{i \in A} a_i \varepsilon_i^1 \varphi_i + \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\varphi_i = \sum_{i \in A} a_i \varepsilon_i^1 \varphi_i + \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\varepsilon_i^2 \varphi_i +$$

$$+ \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)(1-\varepsilon_i^2)\varphi_i = \ldots = g_\omega + h_\omega \quad \text{avec}$$

$$g_\omega = \sum_{\ell=1}^{K} \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^{\ell-1})\varepsilon_i^\ell \varphi_i \quad \text{et} \quad h_\omega = \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^K)\varphi_i$$

(ω étant le point générique de l'espace de probabilités Ω où habitent les K suites de Rademacher). L^q étant de type 2, on a pour $\varepsilon_i^1, \ldots, \varepsilon_i^{\ell-1}$ fixés, avec des notations évidentes :

$$\int \Big\| \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^{\ell-1})\varepsilon_i^\ell \varphi_i \Big\|_q \, d\varepsilon^\ell \leqslant C_q \Big(\sum_{i \in A} a_i^2 (1-\varepsilon_i^1)^2 \ldots (1-\varepsilon_i^{\ell-1})^2 \|\varphi_i\|_q^2 \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C'_q \Big(\sum_{i \in A} a_i^2 (1-\varepsilon_i^1)^2 \ldots (1-\varepsilon_i^{\ell-1})^2 \Big)^{1/2}$$. En intégrant par rapport à $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{\ell-1}$

$$\int \Big\| \sum_{i \in A} a_i (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^{\ell-1})\varepsilon_i^\ell \varphi_i \Big\|_q \, d\omega \leqslant C'_q \int \Big(\sum_{i \in A} a_i^2 (1-\varepsilon_i^2)^2 \ldots (1-\varepsilon_i^{\ell-1})^2 \Big)^{1/2} d\omega$$

$$\leqslant C'_q \Big(\int \sum_{i \in A} a_i^2 (1-\varepsilon_i^1)^2 \ldots (1-\varepsilon_i^{\ell-1})^2 \, d\omega \Big)^{1/2} = C'_q \Big(\sum_{i \in A} a_i^2 \, 2^{\ell-1} \Big)^{1/2}$$

(Vu l'indépendance et le fait que $\int (1-\varepsilon_i^j)^2 \, d\omega = 2) \leqslant C'_q \, 2^{\ell/2}$. D'après l'inégalité triangulaire dans L^q

(B.13) $$\int \|g_\omega\|_q \, d\omega \leqslant C'_q \sum_{\ell=1}^{K} 2^{\ell/2} \leqslant C'_q \, 2^{K/2} \leqslant C'_q \, t \quad .$$

D'autre part :

$$|\mathrm{supp}\, h\omega| \leqslant \sum_{i \in A} 2^{-K} (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^K) \quad (\text{puisque } (1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^K) = 0 \text{ ou } 2^K)$$

Donc

(B.14) $$E|\mathrm{supp}\, h\omega| \leqslant \sum_{i \in A} 2^{-K} E[(1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^K)] = \sum_{i \in A} 2^{-K} \leqslant m 2^{-K} \leqslant \frac{m}{t^2} \quad .$$

D'autre part $h_\omega = \sum_{i \in A} b_i(\omega)\varphi_i$ avec $b_i(\omega) = a_i(1-\varepsilon_i^1)\ldots(1-\varepsilon_i^K)$ donc

(B.15) $E|b_\omega| = E\left(\sum_{i \in A} a_i^2(1-\varepsilon_i^1)^2\ldots(1-\varepsilon_i^K)^2\right)^{1/2} \leqslant 2^{K/2} \leqslant C^t$.

(suivant un calcul déjà fait ; on a posé $b_\omega = (b_1(\omega),\ldots,b_n(\omega))$. En appliquant trois fois l'inégalité de Markov à partir de (B.13), (B.14), (B.15) on trouve un ω_o pour lequel, simultanément :

$$\|g\omega_o\|_q \leqslant C'_q\, t \quad ; \quad |\mathrm{supp}\; h\omega_o| \leqslant C'_q \frac{m}{t^2} \quad ; \quad |b\omega_o| \leqslant C'_q t \quad .$$

D'où (B.12) avec $g = g_{\omega_o}$,$h = h_{\omega_o}$. □

Avant de poursuivre, notons l'inégalité élémentaire, se prouvant par induction sur r

(B.16) $$\sum_{K \leqslant m} C_n^K \leqslant n^{m+1} \quad (n \geqslant 2)$$

(pour passer de $n-1$ à n, on écrit

$\sum_{K\leqslant m} C_n^K = 1 + \sum_{1\leqslant K\leqslant m} (C_{n-1}^K + C_{n-1}^{K-1}) = \sum_{K\leqslant m} C_{n-1}^K + \sum_{K\leqslant m-1} C_{n-1}^K$

$\leqslant (n-1)^{m+1} + (n-1)^m = (n-1)^m n \leqslant n^{m+1}$). Nous en déduisons exactement (B.10)',

soit aussi en remplaçant t par 1 et m par $\left[\frac{C'_q m}{t^2}\right]$;

(B.17) $$N_q\left(\mathscr{P}_{[C'_q \frac{m}{t^2}]} , 1\right) \leqslant n^{\left(C'_q \frac{m}{t^2} + 1\right)} \exp\left(C'_q \frac{m}{t^2}\right) \quad .$$

D'après (B.12)

$$\mathscr{P}_m \subset C'_q t\, B_q + C'_q t\, \mathscr{P}_{[C'_q \frac{m}{t^2}]} \quad . \text{ D'où}$$

(B.18) $$N_q(\mathscr{P}_m, 2\, C'_q t) \leqslant N_q\left(\mathscr{P}_{[C'_q \frac{m}{t^2}]}, 1\right) \overset{\text{def}}{=} N \; .$$

(En effet, il existe $f_1,\ldots,f_N$ avec $\mathscr{P}_{[C'_q \frac{m}{t^2}]} \subset \bigcup_{j=1}^N (f_j + B_q)$, d'où

$\mathscr{P}_m \subset \bigcup_{j=1}^N (C'_q t\, f_j + C'_q t\, B_q + C'_q t\, B_q) = \bigcup_{j=1}^N (C'_q t\, f_j + 2c'_q t\, B_q)$)

(B.18) et (B.17) entraînent :

$$\log N_q(\mathcal{P}_m,\ 2\ C'_q t) \leqslant \left(C'_q \frac{m}{t^2} + 1\right) \log n + C'_q \frac{m}{t^2} \quad \text{si} \quad t \geqslant 1\ .$$

Soit encore en remplaçant $2\ C'_q t$ par t :

$$\text{(B.19)} \quad \log N_q(\mathcal{P}_m, t) \leqslant \left(C'_q \frac{m}{t^2} + 1\right) \log n + C'_q \frac{m}{t^2} \quad \text{si} \quad t \geqslant t'_o = t'_o(q,M).$$

D'où

$$\text{(B.20)} \qquad \log N_q(\mathcal{P}_m, t) \leqslant C'_q \frac{m \log n}{t^2} \quad \text{si} \quad t \geqslant t'_o\ .$$

En effet, (B.20) découle de (B.19) si $t \leqslant M\sqrt{m}$ tandi que $\log N_q(\mathcal{P}_m, t) = 0$ si $t > M\sqrt{m}$. Car si $f = \sum_{i \in A} a_i\, \varphi_i$ avec $|a| \leqslant 1$ et $|A| \leqslant m$ $\|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty \leqslant |a| \left(\sum_{i \in A} \|\varphi_i\|_\infty^2\right)^{1/2} \leqslant M\sqrt{m}$, donc $\mathcal{P}_m \subset M\sqrt{m}\, B_q$. On passe de (B.20) à (B.2) par l'artifice suivant : soit $r = 2q$; interpolons L^q entre L^2 et L^r suivant le schéma usuel $\underset{2}{\vdash}\!\!-\!\!-\!\!\underset{q}{\star}\!\!-\!\!-\!\!\underset{r}{\dashv}$ $\quad q^{-1} = (1-\theta)2^{-1} + \theta r^{-1}$, $0 < \theta < 1$. Nous avons l'inégalité

$$\text{(B.21)} \qquad N_q(\mathcal{P}_m, t) \leqslant N_r\left(\mathcal{P}_m, \left(\frac{t}{2}\right)^{1/\theta}\right) \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Soit en effet $s > 0$ et $N = N_r(\mathcal{P}_m, s)$. On a une inclusion $\mathcal{P}_m \subset \bigcup_{j=1}^{N} (g_j + s\ B_r)$ et $(g_j + s\ B_r) \cap \mathcal{P}_m \neq \emptyset$ sinon on pourrait diminuer N, d'où une inclusion

$$\mathcal{P}_m \subset \bigcup_{j=1}^{N} (f_j + 2s\ B_r) \quad \text{avec cette fois} \quad f_j \in \mathcal{P}_m\ .$$

Soit $f \in \mathcal{P}_m$ et j tel que $\|f - f_j\|_r \leqslant 2s$. Par Hölder $\|f-f_j\|_q \leqslant \|f-f_j\|_2^{1-\theta}\ \|f-f_j\|_r^\theta \leqslant 2^{1-\theta}\,(2s)^\theta = 2s^\theta$ (puisque $\|f-f_j\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|f_j\|_2 \leqslant 2$). Autrement dit :

$$N_q(\mathcal{P}_m, 2s^\theta) \leqslant N_r(\mathcal{P}_m, s), \text{ ce qui prouve (B.21)}$$

(B.20) et (B.21) entraînent

$$\text{(B.22)} \qquad \log N_q(\mathcal{P}_m, t) \leqslant C'_q \frac{m \log n}{t^2} \quad \text{si} \quad t \geqslant t_o = 2t'^{\,\theta}_o$$

(B.22) prouve (B.2) avec $\nu = 2\theta^{-1}$. Pour (B.3) les choses sont heureusement plus simples (on n'a pas besoin du lemme 2).

Soient t et A avec $t < t_0$ et $|A| \leq m$.

$$(B.10) \Rightarrow \Pi_A \subset \bigcup_{1 \leq j \leq \exp(C'_q m)} (f_{j,A} + B_q^A) .$$

$$(B.4)' \Rightarrow B_q^A \subset \bigcup_{1 \leq K \leq (1+\frac{2}{t})^m} (g_{K,A} + t\, B_q^A) \text{ . Donc}$$

$$\mathscr{P}_m \subset \bigcup_{\substack{|A| \leq m \\ 1 \leq j \leq \exp(C'_q m) \\ 1 \leq K \leq (1+\frac{2}{t})^m}} (f_{j,A} + g_{K,A} + t\, B_q) \text{ , puisque } B_q^A \subset B_q .$$

(B.16) implique alors

$$N_q(\mathscr{P}_m, t) \leq n^{m+1} \exp(C'_q\, m)(1 + \frac{2}{t})^m \text{ , d'où}$$

$\log N_q(\mathscr{P}_m, t) \leq (m+1)\log n + C'_q\, m + m \log (1 + \frac{2}{t})$ et chacun des trois termes du membre de droite admet une majoration de la forme $C'_q\, m \log n \log(1 + \frac{1}{t})$ (puisque $t < t_0$), d'où (B.3). □

Ⓒ INEGALITE DE DECOUPLAGE

L'inégalité qui suit (inégalité (C.1)) est improprement appelée inégalité de découplage ; en réalité, elle permettra ultérieurement de procéder à un découplage en faisant une erreur contrôlée.

Soit $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs 0 ou 1 avec $E(\eta_i) = 1/3$.

Soit $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs 0 ou 1 avec $E(\zeta_i) = 1/2$.

On suppose les suites (η_i) et (ζ_i) indépendantes et définies sur un espace de probabilités (T, dt). Si $x_1, \dots, x_n \in R$ on a

$$\Sigma x_i = \Sigma \eta_i x_i + \Sigma(1-\eta_i) x_i = \Sigma \eta_i x_i + \Sigma(1-\eta_i)\zeta_i x_i + \Sigma(1-\eta_i)(1-\zeta_i) x_i$$
$$= \Sigma \eta_i^1 x_i + \Sigma \eta_i^2 x_i + \Sigma \eta_i^3 x_i \text{ , avec } \eta_i^1 = \eta_i \text{ ; } \eta_i^2 = (1-\eta_i)\zeta_i \text{ ; } \eta_i^3 = (1-\eta_i)(1-\zeta_i).$$

Posons alors : $\begin{cases} a = \frac{1}{3}\,\Sigma x_i \;;\; b = \frac{1}{3}\,\Sigma y_i \;;\; c = \frac{1}{3}\,\Sigma z_i \\ a' = \Sigma h_i^1 x_i = a+\varepsilon_1 \;;\; b' = \Sigma h_i^2 y_i = b+\varepsilon_2 \;;\; c' = \Sigma h_i^3 z_i = c+\varepsilon_3 \,. \end{cases}$

Remarquons que, puisque $p-2 \leqslant 1$

(C.3) $\qquad |\rho(u) - \rho(v)| \leqslant |u-v|$.

Nous avons donc $\rho(c') = \rho(c) + \varepsilon'_3$ avec $|\varepsilon'_3| \leqslant |\varepsilon_3|$. Il vient alors

$a'b'\rho(c') - ab\rho(c) = (\varepsilon_1 b\rho(c) + \varepsilon_2 a\rho(c) + \varepsilon'_3 ab) + (\varepsilon_1\varepsilon_2\rho(c) + \varepsilon_1\varepsilon'_3 b + \varepsilon_2\varepsilon'_3 a)$
$+ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon'_3)$, d'où en intégrant :

$\left|\int a'b'\rho(c')dt - ab\rho(c)\right| = \left|\int (a'b'\rho(c')-ab\rho(c))dt\right| \leqslant$
$\|\varepsilon_1\|_1 |b\rho(c)| + \|\varepsilon_2\|_1 |a\rho(c)| + \|\varepsilon_3\|_1 |ab|) + (\|\varepsilon_1\varepsilon_2\|_1 |\rho(c)| + \|\varepsilon_1\varepsilon_3\|_1 |b| + \|\varepsilon_2\varepsilon_3\|_1 |a|) + (\|\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$

Les variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ont la forme $\sum_1^n a_i\, X_i$ du lemme précédent ; par exemple $\varepsilon_1 = \sum_1^n (h_i^1 - \frac{1}{3})x_i$ avec $|h_i - \frac{1}{3}| \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1$,$E(h_i^1 - \frac{1}{3}) = 0$ et $\Sigma x_i^2 \leqslant 1$.

On peut alors aisément majorer les sept termes précédents.

$\|\varepsilon_j\|_1 \leqslant \|\varepsilon_j\|_2 \leqslant 1 \quad (j = 1,2,3)$

$\|\varepsilon_i\varepsilon_j\|_1 \leqslant \|\varepsilon_i\|_2 \|\varepsilon_j\|_2 \leqslant 1$. Enfin par Hölder et (C.2) (qui ne sert qu'ici !)

$\|\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\|_1 \leqslant \|\varepsilon_1\|_3 \|\varepsilon_2\|_3 \|\varepsilon_3\|_3 \leqslant C_3^3$.

D'autre part

$\rho(x) \leqslant 1+|x|$ puisque $p-2 \leqslant 1$. Donc

$|b\rho(c)| \leqslant \frac{1}{2}\,(|b|^2+|\rho(c)|^2) \leqslant \frac{1}{2}\,(|b|^2+(1+|c|)^2)$. On a des majorations analogues pour $|a\rho(c)|$, $|ab|$, d'où une inégalité de la forme

$$\left|\int a'b'\rho(c')dt - ab\rho(c)\right| \leqslant C\Big[1+|a|+|b|+|c|\Big]^2 + C\Big[1+|a|+|b|+|c|\Big]$$
$$\leqslant 2C\Big[1+|a|+|b|+|c|\Big]^2 \quad \text{, d'où (C.1)} \qquad \square$$

(D) <u>REDUCTION DU PROBLEME</u>

Les notations sont celles des paragraphes précédents ; si $\varphi, \psi \in L^2(E,\Sigma,\nu)$ on posera $\langle\varphi,\psi\rangle = \int_E \varphi(u)\psi(u)d\nu(u)$ (Rappelons qu'on travaille avec des fonctions réelles). Si $S \subset \{1,\ldots,n\}$, on pose

$K_S = \sup_{|a|\leq 1} \| \sum_{i\in S} a_i \varphi_i \|_p \quad (a = (a_1,\ldots,a_n) \ ; \ |a| = (\Sigma a_i^2)^{1/2}).$

S sera un bon ensemble $\Lambda(p)$ si K_S est bien contrôlé ; on va d'abord réduire, de façon purement déterministe, le contrôle de K_S à celui d'une autre expression, qui sera elle-même mal contrôlée en général, mais le sera si S est choisi au hasard. Nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1 : soient $x, y \in R$. Alors

$$\text{(D.1)} \quad |x+y|^p \leq \underbrace{(x+y)^2|y|^{p-2} + (1+|x|)^p}_{\text{termes carrés}} + \underbrace{2xy(1+|x|)^{p-2} + y^2(1+|x|)^{p-2}}_{\text{termes rectangles}}$$

Preuve : $|x+y|^p = |x+y|^{p-2}(x+y)^2 \leq (|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(x+y)^2$ (car $p-2\leq 1$)

$\leq |y|^{p-2}\,(x+y)^2 + (1+|x|)^{p-2}\,(x+y)^2 = |y|^{p-2}\,(x+y)^2 + (1+|x|)^{p-2}x^2 + 2xy(1+|x|)^{p-2}$
$+ y^2(1+|x|)^{p-2}$

$\leq |y|^{p-2}\,(x+y)^2 + (1+|x|)^p + 2xy(1+|x|)^{p-2} + y^2(1+|x|)^{p-2}$. □

(Dans les applications, x et y joueront des rôles très dissymétriques ; x sera grand et y petit ; le remplacement de $|x|$ par $1+|x|$ est technique, destiné à privilégier les grandes valeurs de x).

Soit $\gamma \in]0,1[$ tel que

$$\text{(D.2)} \qquad (1-\gamma^2)^{\frac{p-2}{2}} + \gamma^p \overset{\text{def}}{=} \lambda < 1$$

(Un tel γ existe car quand $\gamma \overset{>}{\to} 0$ le premier membre de (D.2) est $1 - \frac{p-2}{2}\ \gamma^2 + o(\gamma^2)$ et $p>2$).

Lemme 2 : soit $a = (a_i) \in R^n$, avec $|a|\leq 1$. Il existe $I, J \subset \{1,\ldots,n\}$ disjoints avec

(a) $\{1,\ldots,n\}\setminus(I\cup J)$ a au plus un élément.

(b) $\min_I |a_i| \geq \max_J |a_i|$.

(c) $\sum_I a_i^2 \leq \gamma^2$ et $\sum_J a_i^2 \leq 1-\gamma^2$

(Avec la convention $\min_\phi |a_i| = 1$ et $\max_\phi |a_i| = 0$).

Preuve : On peut supposer $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$.

Si $a_1 \geqslant \gamma$, $\sum_2^n a_i^2 \leqslant 1-a_1^2 \leqslant 1-\gamma^2$; on prend $I = \phi$, $J = \{2,\dots,n\}$.

Si $a_1^2+\dots+a_n^2 < \gamma^2$, on prend $I = \{1,\dots,n\}$, $J = \phi$.

Sinon, soit $K \geqslant 2$ tel que $a_1^2+\dots+a_{K-1}^2 < \gamma^2 \leqslant a_1^2+\dots+a_K^2$. On prend $I = \{1,\dots,K-1\}$, $J = \{K+1,\dots,n\}$ $\min_I |a_i| = a_{K-1} \geqslant \max_J |a_i| = a_{K+1}$. □

Dans les estimations qui suivent, on néglige l'indice éventuellement manqué par $I \cup J$, qui donnerait pour K_S une contribution au plus égale à $\sup \|\varphi_j\|_\infty = M$. Appliquant le lemme 2, avec $S \subset \{1,\dots,n\}$ au lieu de $\{1,\dots,n\}$ et avec $a = (a_i) \in R^S$ $(|a| \leqslant 1)$, écrivons $\sum_{i \in S} a_i\varphi_i(u) = x(u)+y(u)$ où $x(u) = \sum_I a_i\varphi_i(u)$, $y(u) = \sum_J a_i\varphi_i(u)$. D'après (D.1) :

$$\text{(D.3)} \quad \int |x(u)+y(u)|^p \, d\nu(u) \leqslant \int (x(u)+y(u))^2 |y(u)|^{p-2} d\nu(u) + \int (1+|x(u)|)^p d\nu(u)$$
$$+2|\langle y, x\rho(x)\rangle| + |\langle y, y\rho(x)\rangle| \leqslant \|x+y\|_p^2 \|y\|_p^{p-2} + \|1+|x|\|_p^p + 2|\langle y, x\rho(x)\rangle| + |\langle y, y\rho(x)\rangle|$$

(Hölder avec $r = p/2$, $r' = \frac{p}{p-2}$)

Par définition : $\|x+y\|_p^2 \leqslant K_S^2$; $\|y\|_p \leqslant (1-\gamma^2)^{1/2} K_S$,

$\|1+|x|\|_p^p \leqslant (1+\|x\|_p)^p = \|x\|_p^p + p(\|x\|_p + \theta)^{p-1}$ $(0 < \theta < 1)$

$\leqslant \|x\|_p^p + C_p K_S^{p-1} \leqslant \gamma^p K_S^p + C_p K_S^{p-1}$. En reportant dans (D.3)

$$\|x+y\|_p^p \leqslant K_S^2 K_S^{p-2} (1-\gamma^2)^{\frac{p-2}{2}} + \gamma^p K_S^p + C_p K_S^{p-1} + 2 \sup_{x,y} [|\langle y, x\rho(x)\rangle| + |\langle y, y\rho(x)\rangle|].$$

En prenant le sup du premier membre, on obtient donc :

$$K_S^p \leqslant K_S^p\left[(1-\gamma^2)^{\frac{p-2}{2}} + \gamma^p\right] + C_p K_S^{p-1} + 2 \sup_{x,y} [|\langle y, x\rho(x)\rangle| + |\langle y, y\rho(x)\rangle|].$$

Soit

$(1-\lambda) K_S^p \leqslant C_p K_S^{p-1} + 2 \sup_{x,y} [\dots]$. D'après (D.2) on en déduit une

inégalité de la forme :

Les variables η_i^j ont les 4 propriétés suivantes :

$\eta_i^j = 0$ ou 1 ; $E(\eta_i^j) = 1/3$; $\eta_i^j \eta_i^K = 0$ si $j \neq K$; $\eta_i^1 + \eta_i^2 + \eta_i^3 = 1$.

Si donc on pose, pour $t \in T$

$R_t^j = \{i \in [1,n] \ ;\ \eta_i^j(t) = 1\}$, $[1,n]$ est l'union disjointe de R_t^1, R_t^2, R_t^3 ;

$\int |R_t^j| dt = \frac{n}{3}$; et $\sum_1^n x_i = \sum_{i \in R_t^1} x_i + \sum_{i \in R_t^2} x_i + \sum_{i \in R_t^3} x_i$, ce qui est une façon équitable de couper au hasard une somme en trois.

Soit enfin $\rho(x) = (1+|x|)^{p-2}$ $(2 < p \leqslant 3)$.

Théorème C.

Soient $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $z = (z_i)$ trois éléments de R^n de norme euclidienne $\leqslant 1$

Alors :

$$(C.1) \qquad \left| \int \Big(\sum_{R_t^1} x_i\Big)\Big(\sum_{R_t^2} y_i\Big) \rho\Big(\sum_{R_t^3} z_i\Big) dt - \Big(\frac{1}{3} \sum x_i\Big)\Big(\frac{1}{3} \sum y_i\Big) \rho\Big(\frac{1}{3} \sum z_i\Big) \right|$$

$$\leqslant C \left[1 + \Big|\sum_1^n x_i\Big| + \Big|\sum_1^n y_i\Big| + \Big|\sum_1^n z_i\Big| \right]^2 .$$

Nous avons besoin du

Lemme (Paley-Zygmund) : soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes centrées telles que $|X_i| \leqslant 1$. Soit $q \geqslant 2$ et $a = (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $\Sigma a_i^2 \leqslant 1$.

Alors

$$(C.2) \qquad \Big\| \sum_1^n a_i X_i \Big\|_q \leqslant C_q .$$

Preuve : Soit $(\overline{X_i}) = (X_i - X_i')$ une symétrisation de (X_i) et (ε_i) une suite de Rademacher indépendante de (X_i). On a la chaîne d'inégalités

$\|\Sigma a_i X_i\|_q \leqslant \|\Sigma a_i \overline{X_i}\|_q = E_\omega \|\Sigma a_i \varepsilon_i(\omega) \overline{X_i}\|_q \leqslant C_q (\Sigma \|a_i \overline{X_i}\|_q^2)^{1/2}$ (car L^q est de type 2)

$$\leqslant C_q \, (\Sigma \|a_i \overline{X_i}\|_\infty^2)^{1/2} \leqslant 2\, C_q \quad . \quad \square$$

$$(D.4)\quad \begin{cases} K_S^p \leqslant C'_p \sup\limits_{x,y}[\,|\langle y,x\rho(x)\rangle| + |\langle y,y\rho(x)\rangle|\,] + C'_p \\ \text{où le sup porte sur les } x,y \text{ de la forme} \\ x = \sum\limits_{I\cap S} a_i\varphi_i \quad ; \quad y = \sum\limits_{S} b_i\varphi_i \\ |a| \leqslant 1 \quad ; \quad |b| \leqslant 1 \quad ; \quad \|b\|_\infty \leqslant |I|^{-1/2} \quad ; \quad I \subset S \end{cases}$$

(A priori, d'après le lemme 2, on avait $x = \sum\limits_{I} a_i\varphi_i$, $y = \sum\limits_{J} a_i\varphi_i$ avec $\min\limits_{I} |a_i| \geqslant \max\limits_{J} |a_i|$. Mais alors $\gamma^2 \geqslant \sum\limits_{I} |a_i|^2 \geqslant |I| \min\limits_{I} |a_i|^2$, donc $\max\limits_{J} |a_i| \leqslant \min\limits_{I} |a_i| \leqslant |I|^{-1/2}$; donc dans (D.4) on a remplacé le sup par un sup plus grand). Nous procédons maintenant à partir de (D.4) à une réduction supplémentaire, comme suit :

Pour u fixé, on obtient d'après (C.1) (x,y étant comme dans (D.4))

$$(D.5)\quad x(u)y(u)\rho\left(\frac{x(u)}{3}\right) = 9\int\Big(\sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i(u)\Big)\Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^2} a_i\varphi_i(u)\Big)\rho\Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i(u)\Big)dt + r($$

avec $|r(u)| \leqslant C[1+|x(u)|+|y(u)|]^2$.

Intégrons (D.5) par rapport à $d\nu(u)$, tenant compte du fait que $\|x\|_{L^2(\nu)} \leqslant 1$ et $\|y\|_{L^2(\nu)} \leqslant 1$ il vient d'après le théorème de Fubini

$$\langle y,x\rho(\tfrac{x}{3})\rangle = 9\int\Big\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^2} a_i\varphi_i\Big)\rho\Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\Big)\Big\rangle\, dt + O(1) \quad .$$

Donc

$$(D.6)\quad |\langle y,x\rho(\tfrac{x}{3})\rangle| \leqslant C\int \sup_{x,y} \Big|\Big\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^2} a_i\varphi_i\Big)\rho\Big(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\Big)\Big\rangle\Big|\, dt + C$$

(le sup étant comme dans (D.4)).

D'autre part

$$(D.7)\qquad \Big|\langle y,x\rho(\tfrac{x}{3})\rangle - \frac{1}{3^{p-2}}\langle y,x\rho(x)\rangle\Big| \leqslant C \quad .$$

En effet, $|\rho(\frac{x}{3}) - \frac{1}{3^{p-2}}\rho(x)| = \frac{1}{3^{p-2}}[(3+|x|)^{p-2} - (1+|x|)^{p-2}] \leqslant \frac{2}{3^{p-2}}$

donc $|\langle y,x\rho(\frac{x}{3})\rangle - \frac{1}{3^{p-2}}\langle y,x\rho(x)\rangle| \leqslant C\int |x(u)||y(u)|d\nu(u)$

$\leqslant C\|x\|_{L^2(\nu)}\|y\|_{L^2(\nu)} \leqslant 1$ (D.6) et (D.7) entraînent

$$\text{(D.8)}\quad \sup_{x,y} |\langle y, x\rho(x)\rangle| \leqslant C\int \sup_{x,y} \left|\left\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \left(\sum_{I\cap S\cap R_t^2} a_i\varphi_i\right)\rho\left(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\right)\right\rangle\right| dt + C$$

On obtient de même :

$$\text{(D.9)}\quad \sup_{x,y} |\langle y, y\rho(x)\rangle| \leqslant C\int \sup_{x,y} \left|\left\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \left(\sum_{S\cap R_t^2} b_i\varphi_i\right)\rho\left(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\right)\right\rangle\right| dt + C$$

(Tous les sup étant comme dans (D.4)).

En résumé, d'après (D.4), (D.8) et (D.9)

$$\text{(D.10)}\begin{cases} K_S^p \leqslant C'_p + C'_p(\star) + C'_p(\star\star) \quad \text{avec} \\ (\star) = \int \sup_{x,y} \left|\left\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \left(\sum_{I\cap S\cap R_t^2} a_i\varphi_i\right)\rho\left(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\right)\right\rangle\right| dt \\ (\star\star) = \int \sup_{x,y} \left|\left\langle \sum_{S\cap R_t^1} b_i\varphi_i , \left(\sum_{S\cap R_t^2} b_i\varphi_i\right)\rho\left(\sum_{I\cap S\cap R_t^3} a_i\varphi_i\right)\right\rangle\right| dt \\ \text{le sup portant sur les } x,\ y \text{ de la forme} \\ x = \sum_{I\cap S} a_i\varphi_i \quad ;\ y = \sum_S b_i\varphi_i \\ |a| \leqslant 1\ ,\ |b| \leqslant 1\ ;\ \|b\|_\infty \leqslant |I|^{-1/2} \quad ;\ I \subset S\ . \end{cases}$$

Malgré la présence des intégrales dans $(\star)$ et $(\star\star)$, (D.10) est encore déterministe dans la mesure où il est valable pour tout S ; bien entendu, il ne sera exploitable que si S est aléatoire ! En passant de (D.4) à (D.10) (ce qui s'est fait avec une erreur contrôlée grâce à (C.1)), on s'est mis en position de procéder au découplage qui va suivre.

Prenons $S = S_\omega$ (comme il est indiqué dans l'introduction) et posons $\boxed{K(\omega) = K_{S_\omega}}$. Nous avons tout d'abord besoin du lemme de Bernstein suivant (où $\delta n = n^{2/p}$).

<u>Lemme 3</u> : (D.11) $\quad P\left(\left|\sum_1^n \xi_i - \delta_n\right| \geqslant \frac{\delta n}{2}\right) \leqslant 2\, e^{-\frac{\delta n}{10}}$

Preuve : Soit $Y = \xi_1 - \delta$ et $D^2 = E(Y^2) = \delta(1-\delta)$. $|Y| \leqslant 1$ donc $E(Y^n) \leqslant D^2$ si $n \geqslant 2$ et donc pour $\lambda > 0$

$$E(e^{\lambda Y}) = 1 + \sum_{n\geqslant 2} \frac{\lambda^n}{n!} E(Y^n) \leqslant 1 + D^2 \sum_{n\geqslant 2} \frac{\lambda^n}{n!} = 1 + D^2 a_\lambda \text{ , avec } a_\lambda = e^\lambda - 1 - \lambda \text{ .}$$

Soit maintenant $X = \sum_1^n \xi_i - \delta n$

$$E(e^{\lambda X}) = (E(e^{\lambda Y}))^n \leqslant (1+D^2 a_\lambda)^n \leqslant \exp(n\, D^2\, a_\lambda). \text{ D'où}$$

$P(|X| \geqslant t) \leqslant 2 \exp(-\lambda t + n\, D^2\, a_\lambda)$, en particulier :

$P(|X| \geqslant \frac{\delta n}{2}) \leqslant 2 \exp\, [-\lambda \frac{\delta n}{2} + n\, D^2\, a_\lambda] = 2 \exp\, [-\frac{\delta n}{2} b_\lambda\,]$ avec

$b_\lambda = \lambda - 2(1-\delta)(e^\lambda - 1 - \lambda) \geqslant \lambda - 2(e^\lambda - 1 - \lambda) = 3\lambda - 2\, e^\lambda + 2 \overset{\text{def}}{=} c_\lambda$.

c_λ est minimum pour $\lambda_o = \text{Log } 3/2$ et $c_{\lambda_o} = 3 \log 3/2 - 1 > \frac{1}{5}$, d'où

$P(|X| \geqslant \frac{\delta n}{2}) \leqslant 2 \exp[-\frac{\delta n}{2} c_{\lambda_o}\,] \leqslant 2 \exp\, [-\frac{\delta n}{10}\,]$. $\square$

D'autre part $|a| \leqslant 1 \Rightarrow \|\sum_S a_i \varphi_i\|_p \leqslant \|\sum a_i \varphi_i\|_\infty \leqslant \left(\sum_1^n \|\varphi_i\|_\infty^2\right)^{1/2} \leqslant M\sqrt{n}$ donc d'après (D.11)

$$\int K^p(\omega)d\omega = \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + \int_{|S_\omega| > 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega$$

$$\leqslant \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + (M\sqrt{n})^p\, P(|S_\omega| > 2n^{2/p})$$

$$= \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + (M\sqrt{n})^p\, P\left(|\sum_1^n \xi_i| > 2\delta n\right)$$

$$\leqslant \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + (M\sqrt{n})^p\, P\left(|\sum_1^n \xi_i - \delta_n| \geqslant \frac{\delta n}{2}\right)$$

$$\leqslant \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + 2(M\sqrt{n})^p \exp(\frac{-n^{2/p}}{10}) \leqslant \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + C'_p \text{ .}$$

(Rappelons que $\delta n = n^{2/p}$). En résumé

$$\text{(D.12)} \qquad \int K^p(\omega)d\omega \leqslant \int_{|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega + C'_p \text{ .}$$

Retournons alors à (D.10) avec $S = S_\omega$, $|S_\omega| \leqslant 2n^{2/p}$

$$\sum_{S_\omega \cap R_t^1} b_i \varphi_i = \sum_{R_t^1} b_i \xi_i(\omega) \varphi_i \quad ; \quad \sum_{I \cap S_\omega \cap R_t^2} a_i \varphi_i = \sum_{I \cap R_t^2} a_i \xi_i(\omega) \varphi_i$$

$\sum_{I \cap S_\omega \cap R_t^3} a_i\varphi_i = \sum_{I \cap R_t^3} a_i\xi_i(a)\varphi_i$, etc... donc l'intégration de (D.10) par rapport à ω donne :

$$\text{(D.13)}\begin{cases} \displaystyle\iint_{|S_\omega| \leq 2n^{2/p}} K^p(\omega)d\omega \leq C'_p + C'_p(\star) + C'_p(\star\star) \quad \text{avec} \\ (\star) = \displaystyle\iint \sup_{x,y} |\langle \sum_{R_t^1} b_i\xi_i(\omega)\varphi_i \Big(\sum_{R_t^2} a_i\xi_i(\omega)\varphi_i\Big)\rho\Big(\sum_{R_t^3} a_i\xi_i(\omega)\varphi_i\Big)\rangle| dt\, d\omega \\ (\star\star) = \displaystyle\iint \sup_{x,y} |\langle \sum_{R_t^1} b_i\xi_i(\omega)\varphi_i \,,\, \Big(\sum_{R_t^2} b_i\xi_i(\omega)\varphi_i\Big)\rho\Big(\sum_{R_t^3} a_i\xi_i(\omega)\varphi_i\Big)\rangle| \; dt\, d\omega \\ \text{où au second membre de } (\star) \text{ et } (\star\star) \text{ l'intégration port sur toutes les} \\ \text{valeurs de } \omega \text{ , en prenant les sup sur un ensemble plus grand que dans} \\ \text{(D.10), à savoir} \\ x = \Sigma a_i\varphi_i \quad , \quad y = \Sigma b_i\varphi_i \quad , \quad |a| \leq 1 \quad , \quad |b| \leq 1 \\ |\text{supp } a| \leq 2n^{2/p} \quad ; \quad |\text{supp } b| \leq 2n^{2/p} \quad ; \quad \|b\|_\infty \leq |\text{supp } a|^{-1/2} \end{cases}$$

(On a ainsi tenu compte du fait que, dans (D.10) on a $I \subset S_\omega$ et du fait qu'on intègre $K^p(\omega)$ seulement sur les ω tels que $|S_\omega| \leq 2n^{2/p}$).

Si t est fixé, R_t^1 , R_t^2 , R_t^3 sont disjoints donc les $(\xi_i)_{i \in R_t^1}$, $(\xi_i)_{i \in R_t^1}$ $(\xi_i)_{i \in R_t^3}$ sont trois blocs indépendants, donc on peut aussi bien

si $i \in R_t^1$, remplacer $\xi_i(\omega)$ par $\xi_i(\omega_1)$

si $i \in R_t^2$, remplacer $\xi_i(\omega)$ par $\xi_i(\omega_2)$

si $i \in R_t^3$, remplacer $\xi_i(\omega)$ par $\xi_i(\omega_3)$

<u>(c'est là qu'on effectue un véritable découplage)</u>.

On va maintenant, dans $(\star)$ et $(\star\star)$, majorer les sup par des sup indépendants de t si bien que t va s'effacer des calculs puisque $\int dt = 1$. Auparavant, changeons de notations : dans $(\star)$

$$\begin{cases} \sum_{R_t^1} b_i\xi_i(\omega_1)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma a_i\xi_i(\xi_1)\varphi_i \\ \sum_{R_t^2} a_i\xi_i(\omega_2)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma b_i\xi_i(\xi_2)\varphi_i \\ \sum_{R_t^3} a_i\xi_i(\omega_3)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma c_i\xi_i(\xi_3)\varphi_i \end{cases}$$

dans (★★)

$$\begin{cases} \sum_{R_t^1} b_i\xi_i(\omega_1)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma a_i\xi_i(\omega_1)\varphi_i \\ \sum_{R_t^2} b_i\xi_i(\omega_2)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma b_i\xi_i(\omega_2)\varphi_i \\ \sum_{R_t^3} a_i\xi_i(\omega_3)\varphi_i & \text{devient} \quad \Sigma c_i\xi_i(\omega_3)\varphi_i \end{cases}$$

Avec ces nouvelles notations, et après découplage, (D.12) et (D.13) donnent

$$(\text{D.14}) \begin{cases} \int K^p(\omega)d\omega \leqslant C'_p + C'_p\, I_1 + C'_p\, I_2 \quad \text{avec} \\ I_1 = \int \sup\limits_{(\star)} |\langle \Sigma a_i\,\xi_i(\omega_i)\varphi_i, (\Sigma b_i\xi_i(\omega_2)\varphi_i)\rho(\Sigma c_i\xi_i(\omega_3)\varphi_i)\rangle|\, d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ \text{le sup portant sur les vecteurs a,b,c tels que :} \\ \quad (\star) \\ (|a|,|b|,|c|) \leqslant 1,\ \max(|\text{supp } a|,|\text{supp } b|,|\text{supp } c|) \leqslant 2n^{\frac{2}{p}} \\ \qquad \|a\|_\infty \leqslant (|\text{sup } b|+|\text{supp } c|)^{-1/2} \\ I_2 = \int \sup\limits_{(\star\star)} |\langle \Sigma a_i\xi_i(\omega_1)\varphi_i, (\Sigma b_i\,\xi_i(\omega_2)\varphi_i)\rho(\Sigma c_i\,\xi_i(\omega_3)\varphi_i\rangle|\, d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ \text{le sup portant cette fois sur les vecteurs a, b, c tels que :} \\ \quad (\star\star) \\ \max(|a|,|b|,|c|) \leqslant 1, \max(|\text{supp } a|,|\text{supp } b|,|\text{supp } c|) \leqslant 2n^{\frac{2}{p}} \quad ; \\ \qquad \max(\|a\|_\infty, \|b\|_\infty) \leqslant |\text{supp } c|^{-1/2} \end{cases}$$

La fin de la démonstration du théorème 2 va consister à estimer séparément I_1 et I_2 dans (D.14), en utilisant les parties techniques Ⓐ et Ⓑ. L'estimation de I_1 sera un peu plus facile que celle de I_2.

Ⓔ ESTIMATION DE I_1 ET I_2 ; FIN DE LA PREUVE.

Notations :

$$n_o = 2n^{2/p} \; ; \; q_o = \log n_o + \log 2n_o \; ; \; D = \{2^j \; ; \; j \text{ entier} \geq 0\} .$$

Si $a = (a_i) \in R^n$, on pose $f_{a,\omega} = \sum_1^n a_i \xi_i(\omega)\varphi_i$.

Si m_1, m_2, m_3 sont des entiers entre 1 et n_o, on pose :

$$K_{m_1,m_2,m_3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = m_1^{-1/2} \sup_{A,b,c} \sum_{i\in A} \xi_i(\omega_1) \, |\langle \varphi_i \, , \, f_{b,\omega_2}\rho(f_{c,\omega_3})\rangle|$$

où le sup porte sur les A, b, c tels que $|A| \leq m_1$; $b \in \mathscr{P}_{m_2}$; $c \in \mathscr{P}_{m_3}$ (cf Ⓑ pour la définition de $\mathscr{P}_m$). L'estimation fondamentale de ce paragraphe, qui exploite complètement les parties Ⓐ et Ⓑ (c'est d'ailleurs le seul endroit où elles sont utilisées !) est la suivante

Théorème E : pour ω_2 et ω_3 fixées on a l'inégalité (valable si $2 < p < 4$)

$$\text{(E.1)} \quad \|K_{m_1,m_2,m_3}\|_{L^{q_o}(d\omega_1)} \leq C'_p \left[\left(\delta m_1^{\frac{p-1}{2}}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_2+m_3}{m_1}\right)^{1/2}\right]\left[K(\omega_2) + K(\omega_3)\right]^{p/2}$$

Preuve : L'estimation de $\|K_{m_1,m_2,m_3}\|_{L^{q_o}(d\omega_1)}$ tombe sous le coup du théorème A où

$$\mathscr{E} = \{x = x(b,c) = (x_i(b,c))_{1\leq i\leq n} \text{ avec } x_i(b,c) = |\langle \varphi_i , f_{b,\omega_2}\rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \; ; \; b \in \mathscr{P}_{m_2} \; ; \; c \in \mathscr{P}_{m_3}\}$$

et où $m = m_1$; ω_2 et ω_3 étant fixés, on écrira en abrégé

$$f_{b,\omega_2} = f_b \; ; \; f_{c,\omega_3} = f_c \; ; \; K(\omega_2) = K_2 \; ; \; K(\omega_3) = K_3 .$$

Il nous faut majorer les quantités B et $\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathscr{E},t)}\, dt$ apparaissant au second membre de (A.1).

Majoration de B.

D'après l'identité de Parseval pour les φ_i , $x(b,c) \in \mathscr{E} \Rightarrow$

$$|x(b,c)| = \|f_b(1+|f_c|)^{p-2}\|_2 = \left(\int f_b^2(1+|f_c|)^{2(p-2)}\right)^{1/2} \leq \|f_b\|_p \|1+|f_c|\|_{2p}^{p-2} .$$

(Hölder avec $s = \frac{p}{2}$; $s' = \frac{p}{p-2}$)

$$\leqslant \|f_b\|_p \|1+|f_c|\|_p^{\frac{p}{2}-1} \|1+|f_c|\|_\infty^{p/2-1} \leqslant C'_p\, K_2\, K_3^{p/2-1}\, m_3^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)}$$

(car $c \in \mathscr{P}_{m_3} \Rightarrow \|f_c\|_\infty \leqslant M\sqrt{m_3}$) .

D'où

$$\text{(E.2)} \qquad B \leqslant C'_p\, K_2\, K_3^{\frac{p}{2}-1}\, m_3^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)} \qquad \square$$

<u>Majoration de</u> $\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathscr{E},t)}\, dt$

Faisons le calcul préliminaire suivant, où $x = x(b,c)$ et $x' = x(b',c') \in \mathscr{E}$

$$|x-x'| = \left(\sum_1^n \left| |\langle \varphi_i, f_b\rho(f_c)\rangle| - |\langle \varphi_i, f_{b'}\rho(f_{c'})\rangle| \right|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_1^n |\langle \varphi_i, f_b\rho(f_c) - f_{b'}\rho(f_{c'})\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|f_b\rho(f_c) - f_{b'}\rho(f_{c'})\|_2 = \|(f_b - f_{b'})\rho(f_c) + f_{b'}(\rho(f_c) - \rho(f_{c'}))\|_2$$

$\leqslant \|(f_b - f_{b'})(1+|f_c|)^{p-2}\|_2 + \|f_{b'}(f_c - f_{c'})\|_2$ (d'après (C.3)). Or :

$$\|(f_b - f_{b'})(1+|f_c|)^{p-2}\|_2 = \left(\int (f_b - f_{b'})^2 (1+|f_c|)^{2(p-2)}\right)^{1/2} \leqslant \|f_b - f_{b'}\|_q \|1+|f_c|\|_p^{p-2} \leqslant$$

$$\leqslant C'_p\, K_3^{p-2}\, \|f_b - f_{b'}\|_q$$

où l'on a posé

$$\text{(E.3)} \qquad q = \frac{2p}{4-p}$$

et appliqué Hölder avec $s = \frac{p}{2(p-2)}$, $s' = \frac{p}{4-p}$ ($s > 1$ car $p < 4$ et $q > 2$ car $p > 2$). De même :

$$\|f_{b'}(f_c - f_{c'})\|_2 = \left(\int f_{b'}^2 (f_c - f_{c'})^2\right)^{1/2} \leqslant \|f_{b'}\|_p \|f_c - f_{c'}\|_r \leqslant K_2 \|f_c - f_{c'}\|_r$$

où l'on a posé

$$\text{(E.4)} \qquad r = \frac{2p}{p-2}$$

et appliqué Hölder avec $s = \frac{p}{2}$, $s' = \frac{p}{p-2}$ (noter que $r > 2$).

En définitive

$$\text{(E.5)} \qquad |x-x'| \leqslant C'_p \left[K_3^{p-2} \|g_b - g_{b'}\|_q + K_2 \|g_c - g_{c'}\|_r\right]$$

je dis qu'alors

$$(E.6)\qquad N_2(\mathcal{E},t) \leq N_q\left(\mathscr{P}_{m_2}, \frac{t}{4\, C'_p\, K_3^{p-2}}\right)\ N_r\left(\mathscr{P}_{m_3}, \frac{t}{4\, C'_p\, K_2}\right) \overset{\text{def}}{=} N_q\, N_r$$

(où pour une fois la constante C'_p est la même dans (E.5) et (E.6)!).

Soit en effet $\mathscr{P}'_{m_2}$ (resp. $\mathscr{P}'_{m_3}$) l'ensemble des f_b , $b \in \mathscr{P}_{m_2}$ (resp. l'ensemble des f_c , $c \in \mathscr{P}_{m_3}$) $\mathscr{P}'_{m_j} \subset \mathscr{P}_{m_j}$ $(j=1,2)$ donc quitte à doubler les rayons des boules comme on l'a fait dans la preuve de (B.21) on a des inclusions

$$\mathscr{P}'_{m_2} \subset \bigcup_{1\leq j\leq N_q}\left(f_{b^j} + \frac{t}{2\, C'_p\, K_3^{p-2}}\, B_q\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}'_{m_3} \subset \bigcup_{1\leq j\leq N_r}\left(f_{c^K} + \frac{t}{2\, C'_p\, K_2}\, B_r\right)$$

(avec $b^j \in \mathscr{P}'_{m_2}$, $c^K \in \mathscr{P}'_{m_3}$)

Soit alors $x(b,c) \in \mathcal{E}$; il existe $(j,K) \in [1,N_q] \times [1,N_r]$ tel que

$$(E.7)\qquad \|f_b - f_{b^j}\|_q \leq \frac{t}{2\, C'_p\, K_3^{p-2}} \qquad \text{et} \quad \|f_c - f_{c^K}\|_r \leq \frac{t}{2\, C'_p\, K_2}$$

(E.5) et (E.7) entraînent

$$|x(b,c) - x(b^j,c^K)| \leq C'_p\left[K_3^{p-2}\|f_b - f_{b^j}\|_q + K_2\|g_c - g_{c^K}\|_r\right]$$

$$\leq C'_p\left[K_3^{p-2}\,\frac{t}{2\, C'_p\, K_3^{p-2}} + K_2\,\frac{t}{2\, C'_p\, K_2}\right] = t\ ,\ \text{donc}$$

$$\mathcal{E} \subset \bigcup_{\substack{1\leq j\leq N_q\\ 1\leq K\leq N_r}} (x(b^j,c^K) + t\, B_2)\ ,\ \text{ce qui prouve (E.6).}$$

Il en résulte :

$$\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)}\, dt \leq \int_0^\infty \sqrt{\log N_q\left(\mathscr{P}_{m_2}, \frac{t}{4\, C'_p\, K_3^{p-2}}\right)}\, dt + \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\mathscr{P}_{m_3}, \frac{t}{4\, C'_p\, K_2}\right)}\, dt$$

$$\leq C'_p\left[K_3^{p-2}\int_0^\infty \sqrt{\log N_q(\mathscr{P}_{m_2},t)}\,dt + K_2 \int_0^\infty \sqrt{\log N_r(\mathscr{P}_{m_3},t)}\,dt\right]$$

Soit d'après (B.1)

(E.8) $$\int_0^\infty \sqrt{\log N_2(\mathcal{E},t)dt} \leqslant C'_p \left[K_3^{p-2}\sqrt{m_2 \log n} + K_2\sqrt{m_3 \log n}\right] \qquad \square$$

L'application de (A.1) donne, via (E.2) et (E.8)

(E.9) $$\|K_{m_1,m_2,m_3}\|_{L^{q_o}(d\omega_1)} \leqslant C'_p\, m_1^{-1/2}\Big[\Big((\delta m_1)^{1/2} + \big(\frac{q_o}{\log 1/\delta}\big)^{1/2}\Big) K_2\, K_3^{\frac{p}{2}-1}\, m_3^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)} +$$

$$+ \left(\log \tfrac{1}{\delta}\right)^{-1/2} \sqrt{\log n}\, \left(K_3^{p-2}\sqrt{m_2} + K_2\sqrt{m_3}\right)\Big]$$

Or :

$$\frac{q_o}{\log \frac{1}{\delta}} \leqslant C_p \frac{\log n}{\log n} = C_p \quad ; \text{ de même } \quad \left(\log \tfrac{1}{\delta}\right)^{-1/2}\sqrt{\log n} \leqslant C_p \quad .$$

D'autre part

$$K_2\, K_3^{p/2-1} \leqslant (\max\,(K_2,K_3))^{p/2} \leqslant (K_2+K_3)^{p/2}$$

$$K_3^{p-2} \leqslant K_3^{p/2} \leqslant (K_2+K_3)^{p/2} \quad (\text{car } \ p-2 \leqslant \tfrac{p}{2} \ \text{ et } \ K_3 \geqslant 1)$$

$$K_2 \leqslant K_2^{p/2} \leqslant (K_2+K_3)^{p/2} \quad (\text{car } \ p \geqslant 2 \ \text{ et } \ K_2 \geqslant 1)\ .$$

Enfin

$$m_3^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)} \leqslant m_3^{1/2} \quad \text{car } \ \tfrac{p}{2} - 1 \leqslant 1.$$

Il résulte donc de (E.9) que

$$\|K_{m_1,m_2,m_3}\|_{L^{q_o}(d\omega_1)} \leqslant C'_p \left[\left(\delta\, m_3^{\frac{p}{2}-1}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^{1/2}\right]\left[K_2+K_3\right]^{p/2}$$

ce qui n'est autre que (E.1). $\square$

L'application de (E.1) passe par le

<u>Lemme</u> : soit $a = (a_1,\ldots,a_n)$ tel que $|a| \leqslant 1$; $|\text{supp } a| \leqslant n_o$; $\|a\|_\infty \leqslant m_1^{-1/2}$ avec $m_1 \leqslant n_o$. Alors a peut s'écrire

(E.10) $$a = \sum_{\substack{m_1 \leqslant m \leqslant 2n_o \\ m \in D}} \lambda_m\, a^m$$

avec les 4 propriétés suivantes :

i) $0 \leq \lambda_m \leq 1$ et $\Sigma \lambda_m^2 \leq 2$; ii) supp $a^m \cap$ supp $a^{m'} = \emptyset$ si $m \neq m'$;
iii) $|\text{supp } a^m| \leq m$; iv) $\| a^m \|_\infty \leq C\, m^{-1/2}$.

Preuve : Soit ℓ_1 l'entier tel que $m_1 \leq 2^{\ell_1} \leq 2m_1$. Ecrivons $\{1,\ldots,[n_o]\}$ sout forme de blocs dyadiques consécutifs, le dernier étant éventuellement tronqué

$B_{\ell_1} = (1,2,\ldots,2^{\ell_1})$; $|B_{\ell_1}| = 2^{\ell_1}$

B_{ℓ_1+1} = (les 2^{ℓ_1+1} entiers suivants B_{ℓ_1}) : $|B_{\ell_1+1}| = 2^{\ell_1+1}$

$\vdots$

B_ℓ = (les 2^ℓ entiers suivants $B_{\ell-1}$) ; $|B_\ell| = 2^\ell$

B_t = (les derniers entiers avant n_o) ; $|B_t| \leq 2^t$ et $2^{t-1} \leq n_o$, donc $2^t \leq 2n_o$.

Quitte à réarranger, on peut supposer $|a_j|$ décroissant et il y a au plus n_o indices j tels que $a_j \neq 0$, donc $a = \sum_{\ell_1 \leq \ell \leq t} \alpha^{2^\ell}$ avec $\alpha^{2^\ell} = a\, 1_{B_\ell}$.

Par construction, les α^{2^ℓ} ont des supports disjoints et $|\text{supp } \alpha^{2^\ell}| \leq 2^\ell$.

Si $\ell = \ell_1$, $\|\alpha^{2^\ell}\|_\infty \leq m_1^{-1/2} \leq C\, 2^{-\ell_1/2}$ par hypothèse .

Si $\ell > \ell_1$ et $j \in B_\ell$, j a sur sa gauche le bloc $B_{\ell-1}$ donc

$$|\alpha^{2^{\ell-1}}|^2 = \sum_{K \in B_{\ell-1}} |a_K|^2 \geq |B_{\ell-1}|\,|a_j|^2 = 2^{\ell-1}\,|a_j|^2 \text{ , d'où}$$

$$\text{(E.11)} \qquad \|\alpha^{2^\ell}\|_\infty \leq C\, 2^{-\ell/2}\, |\alpha^{2^{\ell-1}}| \text{ .}$$

Posons alors

$\lambda_{2^{\ell_1}} = 1$; $\lambda_{2^\ell} = |\alpha^{2^{\ell-1}}|$ si $\ell_1 < \ell \leq t$; $a^{2^\ell} = (\lambda_{2^\ell})^{-1}\, \alpha^{2^\ell}$ si bien que

$a = \sum_{\ell_1 \leq \ell \leq t} \lambda_{2^\ell}\, a^{2^\ell}$ et supp a^{2^ℓ} = supp α^{2^ℓ}

$$\sum_{\ell_1 \leqslant \ell \leqslant t} (\lambda_{2^\ell})^2 = 1 + \sum_{\ell_1 < \ell \leqslant t} |\alpha^{2^{\ell-1}}|^2 \leqslant 1+|a|^2 \leqslant 2, \text{ d'où i)}$$

i) et ii) ont trivialement lieu ; enfin

$$\|a^{2^\ell}\|_\infty = \frac{\|\alpha^{2^\ell}\|_\infty}{|\alpha^{2^{\ell-1}}|} \leqslant C\, 2^{-\ell/2} \quad \text{d'après (E.11)} \quad . \quad \square$$

<u>Estimation de I_1 dans (D.14)</u>

Il est clair que : ($m_1 = |\text{supp } b|+|\text{supp } c|$)

$$\sup_{a,b,c \in (\star)} |\langle \Sigma a_i \xi_i(\omega_1)\varphi_i \; , \; (\Sigma b_i \xi_i(\omega_2)\varphi_i)\rho(\Sigma c_i \xi_i(\omega_3)\varphi_i)\rangle|$$

$$\leqslant \sup_{m_1 \leqslant n_0} \; \sup_{\substack{b,c \in \mathscr{P}_{m_1} \\ \|a\|_\infty \leqslant m_1^{-1/2} \\ |a| \leqslant 1}} |\langle f_{a,\omega_1} \; , \; f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \quad .$$

Pour m_1 fixé, décomposons a comme dans (E.10) pour obtenir (ne retenant que $\lambda_m \leqslant 1$)

$$|\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \leqslant \sum_{\substack{m_1 \leqslant m \leqslant 2n_0 \\ m \in D}} |\langle f_{a^m,\omega_1} \; , \; f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \quad .$$

Pour m fixé

$$|\langle f_{a^m,\omega_1}, f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \leqslant \sum_{i \in \text{supp } a^m} |a_i^m| \; \xi_i(\omega_1) |\langle \varphi_i , \; f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{A \leqslant m \\ b,c \in \mathscr{P}_{m_1}}} C\, m^{-1/2} \sum_{i \in A} \xi_i(\omega_1) |\langle \varphi_i , \; f_{b,\omega_2} \; \rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \quad . \text{ D'où}$$

$$\sup_{a,b,c \in (\star)} |\langle \ldots \rangle| \leqslant \sup_{m_1 \leqslant n_0} \; \sup_{\substack{m_1 \leqslant m \leqslant 2n_0 \\ m \in D}} C m^{-1/2} \sup_{\substack{|A| \leqslant m \\ b,c \in \mathscr{P}_{m_1}}} \sum_{i \in A} \xi_i(\omega_1) |\langle \varphi_i , f_{b,\omega_2} \rho(f_{c,\omega_3}$$

Soit encore

$$\sup_{a,b,c \in (\star)} |\langle \ldots \rangle| \leqslant C \sum_{m_1 \leqslant n_0} \; \sum_{\substack{m_1 \leqslant m \leqslant 2n_0 \\ m \in D}} K_{m,m_1,m_1}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$$

Intégrons par rapport à ω_1 ; il vient d'après (A.7), l'inégalité triangulaire dans $L^{q_o}(d\omega_1)$ et (E.1) (noter que $\log n_o \leqslant q_o$)

$$\int \sup_{a,b,c\in(\star)} |\langle \dots\rangle| \, d\omega_1 \leqslant C \sup_{m_1\leqslant n_o} \Big\| \sum_{\substack{m_1\leqslant m\leqslant 2n_o \\ m\in D}} K_{m,m_1,m_1} \Big\|_{L^{q_o}(d\omega_1)}$$

(E.12)

$$\leqslant C'_p \sup_{m_1\leqslant n_o} \sum_{\substack{m_1\leqslant m\leqslant 2n_o \\ m\in D}} \left[\left(\delta\, m_1^{\frac{p}{2}-1}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_1}{m}\right)^{1/2}\right] \left[K(\omega_2)+K(\omega_3)\right]^{p/2} .$$

Or :

$$\sum_{\substack{m_1\leqslant m\leqslant 2n_o \\ m\in D}} \left(\frac{m_1}{m}\right)^{1/2} \leqslant m_1^{1/2} \sum_{\substack{m\geqslant m_1 \\ m\in D}} m^{-1/2} \leqslant m_1^{1/2}\, C\, m_1^{-1/2} = C \quad \text{et}$$

$$\sum_{\substack{m_1\leqslant m\leqslant 2n_o \\ m\in D}} \left(\delta\, m_1^{\frac{p}{2}-1}\right)^{1/2} \leqslant C \log \frac{2n_o}{m_1} \left(\delta\, m_1^{\frac{p}{2}-1}\right)^{1/2} = C_p \left(\frac{m_1}{2n_o}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)} \log \frac{2n_o}{m_1}$$

$$\leqslant C_p \sup_{0<x\leqslant 1} x^{\frac{1}{2}(\frac{p}{2}-1)} \log \frac{1}{x} \leqslant C_p$$ (On a utilisé le fait que $\delta = n^{\frac{2}{p}-1} = C_p\, n_o^{1-\frac{p}{2}}$).

(E.12) donne donc

$$\text{(E.13)} \qquad \int \sup_{a,b,c\in(\star)} |\langle \dots\rangle| \, d\omega_1 \leqslant C'_p \,[\, K(\omega_2)+K(\omega_3)]^{p/2}$$

<u>Estimation de</u> I_2 <u>dans (D.14)</u>

$$\sup_{a,b,c\in(\star\star)} |\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2}\,\rho(f_{c,\omega_3})\rangle| \leqslant \sup_{\substack{m_3\leqslant n_o \\ |a|,|b|,|c|\leqslant 1 \\ \max(|\mathrm{supp}\, a|,|\mathrm{supp}\, b|,|\mathrm{supp}\, c|)\leqslant n_o \\ \max(\|a\|_\infty,\|b\|_\infty)\leqslant m_3^{-1/2}}} |\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2}\,\rho(f_{c,\omega_3})\rangle|$$

($m_3 = |\mathrm{supp}\; c|$) m_3 <u>étant fixé</u>, décomposons a et b comme dans (E.10)

$$(E.14)\quad \begin{cases} a = \displaystyle\sum_{\substack{m_3 \leqslant m_1 \leqslant 2n_o \\ m_1 \in D}} \lambda_{m_1} a^{m_1} \\ b = \displaystyle\sum_{\substack{m_3 \leqslant m_2 \leqslant 2n_o \\ m_2 \in D}} \mu_{m_2} b^{m_2} \end{cases}$$

Soit, pour d entier $\geqslant 0$ et m_3 fixé

$$E(d) = \{(m_1,m_2) \in D^2 / \max(\frac{m_1}{m_2}, \frac{m_2}{m_1}) = 2^d \text{ et } m_3 \leqslant m_1, m_2 \leqslant 2n_o\} = E(m_3,d)$$

Sous les conditions ci-dessus :

$$\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2} \rho(f_{c,\omega_3})\rangle = \sum_{\substack{m_3 \leqslant m_1, m_2 \leqslant 2n_o \\ (m_1,m_2) \in D^2}} \lambda_{m_1} \mu_{m_2} \langle f_{a^{m_1},\omega_1}, f_{b^{m_2},\omega_2} \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle$$

$$= \sum_{0 \leqslant d \leqslant \log \frac{2n_o}{m_3}} \left(\sum_{\substack{(m_1,m_2) \in E(d) \\ m_1 \geqslant m_2}} \lambda_{m_1} \mu_{m_2} \langle f_{a^{m_1},\omega_1}, f_{b^{m_2},\omega_2} \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle \right)$$

$$+ \sum_{0 \leqslant d \leqslant \log \frac{2n_o}{m_3}} \left(\sum_{\substack{(m_1,m_2) \in E(d) \\ m_1 < m_2}} \lambda_{m_1} \mu_{m_2} \langle f_{a^{m_1},\omega_1}, f_{b^{m_2},\omega_2} \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle \right)$$

Par Cauchy-Schwarz, posant $\lambda = (\lambda_m)$ et $\mu = (\mu_m)$

$$\sum_{\substack{(m_1,m_2) \in E(d) \\ m_1 \geqslant m_2}} \lambda_{m_1} \mu_{m_2} = \sum_{m_2} \lambda_{2^d m_2} \mu_{m_2} \leqslant |\lambda|\,|\mu| \leqslant 1 .$$

De même

$$\sum_{\substack{(m_1,m_2) \in E(d) \\ m_1 < m_2}} \lambda_{m_1} \mu_{m_2} \leqslant 2$$

a^{m_1} et b^{m_2} jouant des rôles symétriques, on déduit de la décomposition précédente la majoration suivante (où on tient compte de la condition (iv) du lemme)

$$(E.15)\ \left|\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2}\ \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{0\leqslant d\leqslant \log \frac{2n_o}{m_3}} \left(\sum_{\substack{(m_1,m_2)\in E(d)\\ m_1\geqslant m_2}} \lambda_{m_1}\mu_{m_2}\right) \sup_{\substack{(m_1,m_2)\in E(d)\\ m_1\geqslant m_2}} \sup_{\substack{\alpha\in\mathscr{P}_{m_1}\\ \beta\in\mathscr{P}_{m_2}\\ \|\alpha\|_\infty\leqslant Cm_1^{-1/2}}} \left|\langle f_{\alpha,\omega_1}, f_{\beta,\omega_2}\ \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right|$$

Sous les conditions ci-dessus :

$$\left|\langle f_{\alpha,\omega_1}, f_{\beta,\omega_2}\rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right| \leqslant \sum_{i\in \operatorname{supp}\alpha} |\alpha_i|\ \xi_i(\omega_1)\left|\langle \varphi_i, f_{\beta,\omega_2}\ \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right|$$

$$\leqslant Cm_1^{-1/2} \sup_{\substack{|A|\leqslant m_1\\ \beta\in\mathscr{P}_{m_2}}} \sum_{i\in A} \xi_i(\omega_1)\left|\langle \varphi_i, f_{\beta,\omega_2}\ \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right|$$

$\leqslant C\ K_{m_1,m_2,m_3}\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. (E.15) donne alors

$$\left|\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2}\ \rho(f_{c,\omega_3})\rangle\right| \leqslant 4C \sum_{0\leqslant d\leqslant \log \frac{2n_o}{m_3}} \left[\sup_{\substack{(m_1,m_2)\in E(d)\\ m_1\geqslant m_2}} K_{m_1,m_2,m_3}\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3)\right]$$

En faisant maintenant varier m_3, on obtient finalement :

$$(E.16) \qquad \sup_{a,b,c\in(\bigstar\bigstar)} \left|\langle f_{a,\omega_1}, f_{b,\omega_2}\ \rho\left(f_{c,\omega_3}\right)\rangle\right|$$

$$\leqslant C \sup_{m_3\leqslant n_o} \sum_{0\leqslant d\leqslant \log \frac{2n_o}{m_3}} \left[\sup_{\substack{m_1=2^d m_2\\ m_1\leqslant 2n_o\\ m_2\geqslant m_3}} K_{m_1,m_2,m_3}\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3)\right]$$

Il ne reste plus, dans cette formule hallucinante du point de vue graphologique par son alternance de sup et de Σ , que des sup "doux", les sup "durs" ayant été absorbés par K_{m_1,m_2,m_3} .

L'intégration de (E.16) par rapport à ω_1 conduit dans un premier temps à (en utilisant (A.7))

$$\int \sup_{(a,b,c)\in(\star\star)} |\langle \dots \rangle| \, d\omega_1 \leq C \sup_{m_3 \leq n_o} \Big\| \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \sup_{m_1,m_2} K_{m_1,m_2,m_3} \Big\|_{L^{r_o}(d\omega_1)}$$

avec $r_o = \mathrm{Log}\, n_o$.

L'inégalité triangulaire dans $L^{r_o}(d\omega_1)$ donne ensuite :

$$\int \sup_{(a,b,c)\in(\star\star)} |\langle \dots \rangle| \, d\omega_1 \leq C \sup_{m_3 \leq n_o} \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \Big\| \sup_{m_1,m_2} K_{m_1,m_2,m_3} \Big\|_{L^{r_o}(d\omega_1)}$$

où le dernier sup ne porte en réalité que sur m_2 puisque $m_1 = 2^d m_2$. Une nouvelle application de (A.7) donne

$$\int \sup_{(a,b,c)\in(\star\star)} |\langle \dots \rangle| \, d\omega_1 \leq C \sup_{m_3 \leq n_o} \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \sup_{\substack{m_1,m_2 \\ m_1=2^d m_2 \\ m_2 \geq m_3}} \| K_{m_1,m_2,m_3} \|_{L^{q_o}(d\omega_1)}$$

(car m_2 prend au plus $2n_o$ valeurs). D'après (E.1) et le fait que $m_2 \geq m_3$, il vient alors :

$$\int \sup_{(a,b,c)\in(\star\star)} |\langle \dots \rangle| \, d\omega_1 \leq C'_p \sup_{m_3\leq n_o} \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \left\{ \sup_{m_1=2^d m_2} \left[\left(\delta m_3^{\frac{1}{2}-1}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2} \right] \left[K(\omega_2) + K(\omega_3) \right] \right.$$

Un calcul déjà fait dans l'estimation de I_1 donne

$$\sup_{m_3 \leq n_o} \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \left(\delta m_3^{\frac{p}{2}-1}\right)^{1/2} \leq C_p$$

tandis que

$$\sup_{m_3 \leq n_o} \sum_{0\leq d\leq \log \frac{2n_o}{m_3}} \left[\sup_{m_1=2^d m_2} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2} \right] \leq \sum_{d\geq 0} 2^{-d/2} \leq C \quad .$$

Finalement

$$\text{(E.17)} \qquad \int \sup_{a,b,c\in(\star\star)} |\langle \dots \rangle| \, d\omega_1 \leq C'_p \left[K(\omega_2) + K(\omega_3) \right]^{p/2}$$

Quand on intègre par rapport à ω_2 et ω_3, (D.14), (E.13) et (E.17) conduisent à

$$\int K^p(\omega)d\omega \leq C'_p + C'_p \iint [K(\omega_2) + K(\omega_3)]^{p/2} d\omega_2\, d\omega_3$$

$$\leq C'_p + C'_p\, 2^{\frac{p}{2}-1} \iint \{ [K(\omega_2)]^{p/2} + [K(\omega_3)]^{p/2} \} d\omega_2\, d\omega_3$$

$$\leq C'_p + C'_p \int (K(\omega))^{p/2} d\omega \leq C'_p + C'_p \left(\int K^p(\omega)d\omega\right)^{1/2}$$

L'inégalité a priori $\int K^p(\omega)d\omega \leq C'_p + C'_p \left(\int K^p(\omega)d\omega\right)^{1/2}$ conduit clairement à

(E.18) $\int K^p(\omega)d\omega \leq C'_p$

D'après (D.11) (par exemple) et l'inégalité de Markov appliquée à (E.18) on peut trouver un ω_o pour lequel on a à la fois :

$$\begin{cases} |S_{\omega_o}| = \sum_1^n \xi_i(\omega_o) \geq \frac{\delta n}{2} = \frac{1}{2} n^{2/p} \\ K^p(\omega_o) = K^p_{S_{\omega_o}} \leq 2\, C'_p\ . \end{cases}$$

$S = S_{\omega_o}$ remplit les conditions requises dans le théorème 2. □

F REMARQUES FINALES

Une démonstration différente du théorème A a été récemment obtenue par Ledoux et Talagrand ([Le-Ta]) ; leur preuve n'est sans doute pas plus simple ou plus courte du point de vue technique, mais peut-être est-elle plus claire du point de vue conceptuel, faisant notamment mieux ressortir les rôles des paramètres A et q_o. Les deux points essentiels de cette démonstration sont les suivants :

① Une inégalité sur les processus vérifiant une condition de Lipschitz dans un espace d'Orlicz, généralisant des travaux antérieurs de Dudley ([D]), Pisier ([P]) et Konô ([K]) et donnant des informations supplémentaires sur la fonction de queue du sup du processus.

(2) Un lemme nouveau, qui remplace le lemme 2 de la partie A.

Indiquons brièvement en quoi consistent les points 1 et 2 .

Théorème F : Soit T un borné de R^n euclidien tel que $\sup_{t\in T} |t| = 1$ et soit $D(s,t)$ une pseudo-distance aléatoire sur $T\times T$, c'est-à-dire un processus indexé par $T\times T$ tel que, pour tous $u, s, t\in T$ on ait presque sûrement : $D(s,t)\geqslant 0$; $D(s,s) = 0$; $D(s,t) = D(t,s)$; $D(s,t)\leqslant D(s,u) + D(u,t)$. Soit ψ une fonction d'Orlicz (ie positive, convexe croissante sur R^+ , $\psi(0) = 0$). On suppose que :

$$\text{(H)} \qquad \int_I D(s,t)dP\leqslant C\ P(I)\ |s-t| \left[\psi^{-1} \frac{1}{P(I)} + \lambda\right]$$

pour tout I mesurable, $P(I)>0$, pour tous s,t de T, où λ est un paramètre > 0 qui dépend du processus D.

Alors pour tout I mesurable avec $P(I)>0$

$$\text{(C)} \qquad \int_I \sup_{s,t} D(s,t)\ dP\leqslant C\ P\left[\int_0^1 \psi^{-1}\left(\frac{N_2(T,\varepsilon)}{P(I)}\right) d\varepsilon + \lambda\right]$$

(où $N_2(T,\varepsilon) = N(T,\varepsilon B_2)$ comme dans l'introduction) .

On n'utilisera (C) que pour la fonction d'Orlicz $\psi(x) = e^{x^2} - 1$ (ψ_2 pour les spécialistes) qui vérifie :

$$\text{(F.1)} \quad \psi^{-1}(xy)\leqslant C\ [\psi^{-1}(x) + \psi^{-1}(y)] \text{ pour tous } x,y\geqslant 1 .$$

Si on pose en abrégé

$$\text{(F.2)} \qquad E = \int_0^1 \psi^{-1}[N_2(T,\varepsilon)]d\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{\log N_2(T,\varepsilon)}d\varepsilon \qquad \text{(essentiellement !)}$$

la conclusion (C) prend la forme plus simple suivante

$$\text{(C)'} \qquad \int_I \sup_{s,t} D(s,t)dP\leqslant C\ P(I) \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{P(I)}\right) + E + \lambda\right]$$

d'où on déduit aisément pour tout $u > 0$.

(F.3) $P\left(\sup_{s,t} D(s,t) > C(u+E+\lambda)\right) \leqslant \left(\psi(u)\right)^{-1} \leqslant \exp(-u^2)$.

Cette inégalité de distribution permettra de contrôler tous les moments de $\sup_{s,t} D(s,t)$.

<u>Lemme</u> : Soit $t \in R_+^n$ tel que $\|t\|_{2,\infty} = \sup i^{1/\varepsilon} t_i^\star \leqslant 1$ ($(t_i^\star)$ étant le réarrangement décroissant de $(|t_i|)$) et soit $1 \leqslant m \leqslant n$. Alors :

(F.4) $P\left(\sup_{|A| \leqslant m} \sum_{i \in A} \xi_i\ t_i > u\right) \leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C} \operatorname{Log} \frac{1}{\delta}\right)$ si $u \geqslant C\sqrt{\delta m}$

(F.5) $P\left(\sup_{|A| \leqslant m} \sum_{i \in A} \xi_i\ t_i > u + C\sqrt{\delta m}\right) \leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C} \operatorname{Log} \frac{1}{\delta}\right)$ si $u > 0$

((F.5) étant une conséquence immédiate de (F.4) ; elle seule sera utilisée).

Ce lemme sera utilisé ici qu'avec $|t| \leqslant 1$, ce qui implique $\|t\|_{2,\infty} \leqslant 1$.

Voici comment on utilise le lemme et le théorème F pour prouver le théorème A (où T a remplacé $\mathcal{E}$)

Soit $\begin{cases} D(s,t) = (\operatorname{Log} \frac{1}{\delta})^{1/2} \sup_{|I| \leqslant m} \left|\sum_{i \in I} \xi_i (s_i - t_i)\right| \\ \lambda = (m\ \delta \operatorname{Log} \frac{1}{\delta})^{1/2} \end{cases}$

$$P\left(D(s,t) > \left(u + C(m\ \delta \operatorname{Log} \tfrac{1}{\delta})^{1/2}\right) |s-t|\right)$$

$$= P\left(\sup_{|A| \leqslant m} \left|\sum_{i \in A} \xi_i \frac{(s_i - t_i)}{|s-t|}\right| > \left(u \operatorname{Log} \frac{1}{\delta}\right)^{-1/2} + C\sqrt{\delta m}\right)$$

$\leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C}\right)$ d'après (F.5). On en déduit aisément

$$\int_I D(s,t)\,dP \leqslant C\ P(I)\ |s-t| \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{P(I)}\right) + \lambda\right] .$$

on est donc exactement en position d'appliquer le théorème F et il vient d'après (C)'

$$\int_I \sup_{s,t} D(s,t)\,dP \leqslant C\ P(I) \leqslant \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{P(I)}\right) + E + \lambda\right].$$

De nouveau, on en déduit aisément une inégalité de distribution

$$P\left(\sup_{s,t} D(s,t) > u + C(\lambda + E)\right) \leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C}\right) \text{ si } u > 0 .$$

D'autre part, le lemme entraîne (cet intermédiaire est inutile si $0 \in T$)

$$P(D(0,t) > u + C\lambda) \leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C}\right).$$

En divisant par $(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta})^{1/2}$ après avoir changé u en $u(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta})^{1/2}$, les deux inégalités ci-dessus donnant

$$\text{(F.6)}\quad P\left(\sup_{t\in T}\ \sup_{|A|\leqslant m}\ \sum_{i\in A} \xi_i t_i > u + C\left(\sqrt{\delta m} + (\mathrm{Log}\,\tfrac{1}{\delta})^{-1/2}E\right)\right) \leqslant C \exp\left(-\frac{u^2}{C}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta}\right).$$

Il suffit alors d'écrire, posant pour abrérer $Z = \sup_{t\in T}\ \sup_{|A|\leqslant m}\ \sum_{i\in A} \xi_i t_i$ et $\rho = C\left(\sqrt{\delta m} + (\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta})^{-1/2} E\right)$

$$\int Z^{q_0}\,dP = \int_0^\infty q_0\, u^{q_0-1} P(Z > u)\,du \leqslant \int_0^\rho q_0\, u^{q_0-1} du + \int_0^\infty q_0 (u+\rho)^{q_0-1} P(Z > u+\rho)\,du$$

$$\leqslant \rho^{q_0} + q_0\, 2^{q_0}\, C \int_0^\infty \left(u^{q_0-1} + \rho^{q_0-1}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{C}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta}\right) du \quad \text{(en utilisant (F.6))}$$

puis d'utiliser la formule de Stirling pour la fonction Γ pour arriver à $\|Z\|_{q_0} \leqslant C\left[\rho + \sqrt{q_0}\,(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\delta})^{-1/2}\right]$, ce qui n'est autre que le théorème A. □

D'autre part, l'existence de vrais $\Lambda(p)$ pour tout p donne les deux théorèmes suivants, qui n'étaient jusqu'ici connus que si $1 < p < \frac{4}{3}$ (L^p désignera l'espace $L^p(T)$).

Théorème 1. Soit $p \in]1,2[$; il existe un sous-espace X de L^p, de la forme L^p_E, tel que

a) X est isomorphe à ℓ^2

b) X n'est pas complémenté dans L^p.

Remarques : si $p>2$, un sous-espace fermé X de L^p qui est isomorphe à ℓ^2 est complémenté ([Ka-P]).

Le résultat du théorème 1 était connu si $1<p<\frac{4}{3}$, en utilisant l'existence prouvée par Rudin de vrais $\Lambda(4)$ [**R**] .

La preuve du théorème 1 utilise le théorème suivant, qui n'est pas difficile.

Théorème 1' [Ro 2] : Soit E une partie de Z, et $1<p<\infty$. Alors

a) L^p_E isomorphe à $\ell^2 \Leftrightarrow E\in\Lambda(r)$ avec $r=\max(p,2)$

b) L^p_E isomorphe à ℓ^2 et L^p_E complémenté dans $L^p \Leftrightarrow E\in\Lambda(r)$ avec $r=\max(p,q)$, $(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Preuve du théorème 1' : a) Si T est un isormorphisme entre L^p_E et ℓ^2 et $C_o=\|T\|\|T^{-1}\|$, les sous-espaces de L^p_E, en particulier ceux de la forme L^p_A avec $A\subset E$, sont C_o-complémentés ; quitte à remplacer la projection $Q: L^p_E\to L^p_A$ par $P=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} T_{-y}\,Q\,T_y\,dy$ on obtient l'inégalité

$$\Big\|\sum_{n\in A} a_n e^{int}\Big\|_p \leq C_o \Big\|\sum_{n\in E} a_n e^{int}\Big\|_p \text{ , d'où aisément}$$

$$\frac{1}{2C_o}\Big\|\sum_{n\in E} a_n\varepsilon_n e^{int}\Big\|_p \leq \Big\|\sum_{n\in E} a_n e^{int}\Big\|_p \leq 2\,C_o\Big\|\sum_{n\in E} a_n\varepsilon_n e^{int}\Big\|_p$$

(si $\varepsilon_n=\pm 1$ pour tout n).

Si $p>2$, l'inégalité de droite et le fait que L^p est de type 2 entraînent $E\in\Lambda(p)$.

Si $p\leq 2$, l'inégalité de gauche et le fait que L^p est de cotype 2 entraînent $E\in\Lambda(2)$.

L'implication réciproque est triviale.

b) $\Rightarrow$

Supposons $p<2$; vu le caractère complémenté de L^p_E, $(L^p_E)^\star$ est isomorphe à L^q_E et donc L^q_E est isomorphe à ℓ^2, il résulte de a) que $E\in\Lambda(q)$.

Si $p>2$, on utilise directement a).

$\Leftarrow$ est facile.

Preuve du théorème 1 : Soit $2 < s < q$ et soit E un vrai $\Lambda(s)$

L^p_E est isomorphe à ℓ^2 ((a) du théorème 1' et $E \in \Lambda(s)$)

L^p_E n'est pas complémenté dans L^p sinon le b) du théorème 1' entraînerait $E \in \Lambda(q)$, alors que E est un vrai $\Lambda(s)$. □

Le théorème 1 n'est nouveau que si $\frac{4}{3} \leqslant p < 2$, ce qui fait intervenir des $\Lambda(s)$ vrais pour $2 < s < 4$; c'est donc (pour ce théorème et pour le suivant) la plage de valeurs $]2,4[$ pour s qui est la plus intéressante.

Théorème 2 : soit $p \in]1,2[$; il existe un sous-espace X de L^p, de la forme L^p_E, tel que

a) X est isomorphe à L^p

b) X n'est pas complémenté dans L^p.

Rappelons que le cas $p = 1$ est ouvert dans le théorème 2 bien qu'on sache ([B2]) qu'il existe un sous-espace de L^1 isomorphe à L^1 et non complémenté. La preuve du théorème 2 utilise le résultat classique suivant (méthode de décomposition de Pelczynski).

Théorème 2' [LT2] : soient X, Y deux espaces de Banach tels que

a) X est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y

b) Y est isomorphe à un sous-espace complémenté de X

c) X est isomorphe à $\ell^p(X)$ $(1 \leqslant p < \infty$; p fixé)

($\ell^p(X)$ désignant l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs de X telles que

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_1^\infty \|x_n\|^p\right)^{1/p} < \infty)$$

Alors, X est isomorphe à Y.

Preuve du théorème 2 : soit $2 < s < q$; soit F un vrai $\Lambda(s)$ avec $F \subset \mathbb{N}^\star = \{1,2,\ldots\}$ et soit $E = \mathbb{Z}^- \cup F$ où $\mathbb{Z}^- = \{n \in \mathbb{Z} / n \leqslant 0\}$. Soit enfin $X = L^p$ et $Y = L^p_E$. Vérifions d'abord, sur les hypothèses a), b), c) du théorème 2', que X est isomorphe à Y.

c) est facile.

a) résulte du fait que $L^p_{Z^-}$ est complémenté dans L^p_E et isomorphe à L^p (théorème de M. Riesz et cas particulier (utilisant de nouveau le théorème de M. Riesz) du théorème 2').

D'après le théorème de M. Riesz et le fait que $F\in\Lambda(s)$

(★) $Y \sim L^p_{Z^-} \times \ell^2$ ($\sim$ signifiant isomorphe).

D'autre part, si S désigne l'ensemble de Sidon $(3^j)_{j\geqslant 0}$, on a pour les mêmes raisons

(★★) $Z = L^p_{Z^-\cup S} \sim L^p_{Z^-} \times \ell^2$

De plus

(★★★) Z est complémenté dans L^p.

(Cela résulte du théorème de M. Riesz et du b) du théorème 1', puisque cette fois $S\in\Lambda(q)$)

(★), (★★), (★★★) montrent que b) a lieu dans le théorème 2'.

Donc, L^p_E est isomorphe à L^p.

Supposons L^p_E complémenté dans L^p ; alors L^p_F est aussi complémenté dans L^p (théorème de M. Riesz une fois de plus) ; et comme dans la preuve du théorème 1, on arrive à la contradiction $F\in\Lambda(q)$. □

<u>Indications pour l'existence de vrais</u> $\Lambda(p)$ <u>quand</u> $p>3$.

<u>Cas $3<p<4$</u>. On utilise à la place de (D.1) l'inégalité élémentaire suivante :

(F.7) $$|x+y|^p \leqslant \underbrace{|x+y|^{p-2}\, x^2 + C_0[\,|x|+|y|\,]^{p-3}|y|^3}_{\text{termes carrés}} + \underbrace{2xy\,|x|^{p-2} + (2p-3)\,|x|^{p-2}y^2}_{\text{termes rectangles}}$$

où C_0 est une constante numérique.

<u>Preuve</u> : $|x+y|^p = |x+y|^{p-2}\, x^2 + |x+y|^{p-2}\,(2xy+y^2)$ et d'autre part

$$\big|\,|x+y|^{p-2} - |x|^{p-2} - (p-2)|x|^{p-4}\, xy\,\big| \leqslant C[\,|x|+|y|\,]^{p-4}\, y^2$$

d'où aisément (F.7).

Ensuite, on utilise à la place de (D.2) un $\gamma\in]0,1[$

(F.8) $$1-\gamma^2 + C_o\gamma^3 < 1 \qquad (C_o \text{ comme dans (F.7)}).$$

On utilise ensuite, avec ce nouveau γ , le lemme 2 de la partie D pour aboutir à, via (F.7) et une variante simple de (C.1) à savoir

(F.9) $$K_S^p \leqslant C'_p + C'_p(\star) + C'_p(\star\star)$$

où $(\star)$ et $(\star\star)$ ont la même signification que dans (D.10), à cela près que maintenant : $\rho(x) = |x|^{p-2}$.

Le reste est très heureusement inchangé. Comme on l'a vu précédemment, la plage de valeurs $]2,4[$ pour p est en un sens la plus intéressante.

<u>Cas $p \geqslant 4$</u> les modifications à faire dans ce cas sont nettement plus importantes; on renvoie à [B1] pour les détails.

REFERENCES

[B-E] G.F. BACHELIS, S.E. EBENSTEIN : On $\Lambda(p)$-sets, Pacific J. Math. 54 (1974), 35-38.

[Bo1] J. BOURGAIN : Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem. preprint (1988).

[Bo2] J. BOURGAIN : Complémentation de sous-espaces L^1 dans les espaces L^1 Séminaire Maurey-Schwartz 1979-1980 (exposé n°27).

[D] R.M. DUDLEY : The size of compact subsets of Hilbert spaces and continuity of gaussian processes, J. Funct. Anal. 1 (1967), 290-330.

[KaP] M.I. KADEC, A. PELCZYNSKI : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, Studia Math. 21 (1962), 161-176.

[K] N. KONO : Sample paths properties of stochastic processes, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 295-313.

[KoPa] O. KOUBA, A. PALLARES : Le théorème de Littlewood-Paley et celui de Hörmander dans les espaces $L^p(T;X)$, Mémoire de DEA (1987), exposé n°6, Université Paris VI

[Led-Ta] M. LEDOUX, M. TALAGRAND : Livre à paraître

[LT1] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI : Classical Banach spaces, Lecture Notes in Maths n°33

[LT2] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI : Classical Banach spaces tome 1. Springer-Verlag 1977.

[PT] A. PAJOR, N. TOMCZAK : Remarques sur les nombres d'entropie d'un opérateur et de son transposé, C.R. Acad. Sci. Paris 301 (1985), 743-746.

[Pi] G. PISIER : Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'analyse harmonique. Séminaire d'analyse fonctionnelle, exposé n°13-14. Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1979/80

[Re] A. RENYI : Calcul des probabilités, Dunod Paris 1966.

[Ro1] ROSENTHAL : On subspaces of L^p, Annals Math. 97 (1973), 344-373.

[Ro2] ROSENTHAL : Mémoirs AMS 63 (1966)

[R] W. RUDIN : Trigonometric series with gaps, J. Math. Mech. 9 (1960), 203-228.

[Ta] M. TALAGRAND : Regularity of Gaussian processes, Acta Math. 159 (1987), 99-149

No. d'impression 1044
2ème trimestre 1989