PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-75

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ELEMENTAIRE

Cours de Troisième Cycle

(1975-76)

Jean GIRAUD

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-75

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ELEMENTAIRE

Cours de Troisième Cycle

(1975-76)

Jean GIRAUD

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

TABLE DES MATIERES

SECONDE PARTIE : Cours de Géométrie algébrique p. 59

Introduction

La première partie de ce volume est un cours professé à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud. Rédigé par J. L. Delcourt, il a servi de support à une partie d'un cours de troisième cycle professé en 1975-76 dont les notes forment la seconde partie. C'est pourquoi il n'y a pas de notes pour les deux premières leçons de celui-ci et les notes des leçons 3, 4, et 9 sont fort brèves. L'ensemble est publié tel qu'il a été distribué semaine après semaine aux étudiants, à part la correction de quelques erreurs de détail.

Le second cours a pour but de démontrer la résolution des singularités des surfaces par la méthode de Jung-Walker. Pour y parvenir, il faut aller un peu vite, ce qui exclut toute définition générale de la notion de variété. On s'en tient donc à un point de vue strictement ensembliste dans l'espace affine ou projectif. C'est en ce sens que ce cours est élémentaire, en ceci également qu'il ne nécessite aucune connaissance préliminaire d'algèbre commutative. Bien entendu, le manque d'un langage convenable est parfois gênant, mais beaucoup moins qu'on ne pourrait le croire et le pari est que le lecteur vraiment gêné est mûr pour assimiler le langage de la géométrie algébrique, celui des schémas de Grothendieck bien sûr, et les éléments d'algèbre commutative nécessaires pour cela. Pour celle-ci, je me suis astreint à ne jamais énoncer un résultat avec plus de généralité qu'il n'est nécéssaire pour résoudre le problème étudié. Pour résumer ce cours, on peut dire qu'il illustre ce que l'on peut dire des variétés algébriques en utilisant, comme nos anciens nous l'ont appris, une projection linéaire assez générale et en appelant l'algèbre au secours quand il le faut, voire même ce que l'on enseigne en maîtrise sur les fonctions holomorphes ou le groupe fondamental.

La méthode de JUNG ne fournit qu'un résultat local de désingularisation, obtenu à l'aide d'un modèle très simple pour une singularité de surface qui admet une projection dont le discriminant est un diviseur à croisements normaux. L'appendice est donc consacré à la globalisation. Ce n'est pas difficile, mais on a besoin des propriétés classiques de la normalisation et comme on utilise librement le passage de l'algébrique à l'analytique, il faut bien dire que cet appendice n'est pas "élémentaire" au sens ci-dessus.

Je crois que c'est un bien, car le lecteur ayant vu que l'on peut faire bien des choses de façon artisanale, il aurait été dommage de ne pas lui montrer que l'on est très vite heureux de disposer d'un arsenal plus sophistiqué. S'il est un peu ambitieux, il trouvera que la lecture de l'exposé XII du Séminaire de Géométrie de l'IHES, Lecture Note 305, Springer-Verlag, rédigé par Michèle Raynaud et consacré aux théorèmes de comparaison entre la Géométrie Algébrique et la Géométrie Analytique complexe est le prolongement naturel de notre appendice.

Le lecteur bénéficiera, comme les auditeurs, du conseil pressant de se référer souvent à Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, Springer Verlag 1974, ou à la version abrégée et très bon marché (Algebraische Geometrie, VEB Deutscher Verlag des Wissenschaften, Berlin, 1972) et surtout d'en faire les exercices. Pour un premier contact sérieux avec l'algèbre commutative, Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin, New-York, 1970, me semble très recommendable. Enfin, le cours de Géométrie Algébrique de Jean Dieudonné, PUF, Paris, 1974, me dispense de faire un apperçu historique, puisqu'il contient une étude très soignée, et de donner une bibliographis plus détaillée.

PREMIERE PARTIE

HYPERSURFACES - COURBES PLANES

Ce cours déborde le programme d'agrégation puisqu'on y démontre les théorèmes de Bezout et Luröth et que l'on fait proprement la théorie de l'équation tangentielle. Pourtant il reste très élémentaire même si l'on n'a pas hésité à traiter le b.a. ba de la localisation et la décomposition primaire des modules de longueur finie (!). L'on a beaucoup utilisé la théorie des branches en un point multiple d'une courbe plane qui en est sans conteste l'outil le plus puissant. Ceci nous donne la formule d'intersection dans le cas général d'où l'on tire très simplement les diverses formules dites de Plücker qui relient le degré, la classe et le "type" des points singuliers d'une courbe plane. On nous reprochera le manque d'exercices montrant comment calculer effectivement les divers invariants, la classe d'un point singulier. Souhaitons qu'un lecteur courageux en dresse une liste.

Dans la dernière partie, on prouve en six pages les diverses formes du théorème des zéros et le théorème principal de l'élimination. Ce n'est pas un exploit : pour y parvenir, il suffit de débarrasser les démonstrations usuelles des notions générales inutiles.

Il nous semble qu'il est bon d'enseigner aux agrégatifs un peu de Géométrie algébrique pourvu que l'on prouve à la fois quelques résultats très généraux (élimination, Nullstellensatz) et d'autres plus fins (équation tangentielle) en utilisant sans en faire le sorite quelques unes des idées les plus fondamentales de l'algèbre commutative (lemme de Nakayama, localisation, dépendance intégrale). Ajoutons que le matériel rassemblé ici n'a pas été enseigné en entier.

1. HYPERSURFACES

1.1. Définitions

E est un espace vectoriel complexe de dimension n.

Déf. 1.1.1.. Une partie X de E, est une hypersurface de E s'il existe un polynôme non constant f sur E tel que X soit l'ensemble des zéros de ce polynôme.

On note $X = V(f)$.

Rem. 1.1.2. Cette définition ne dépend pas du repère, en ce sens que si f est une équation de X, et que l'on fait le changement de repère affine $X_i = b_i + \Sigma\, b_{ij} Y_j$ alors $g(Y_1,\ldots,Y_n) = f(b_1 + \Sigma\, b_{1j} Y_j,\ldots,b_n + \Sigma\, b_{nj} Y_j)$ est une équation de X.

$X \neq E$, car un polynôme nul sur E est identiquement nul.

$X \neq \emptyset$: soit $x \neq y$ des points de E tels que $f(x) \neq f(y)$; alors sur la droite joignant x à y, f est un polynôme non constant, qui admet donc un zéro.

1.2. Décomposition en composantes irréductibles.

Si f est un polynôme de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, il existe une décomposition unique (à un coefficient scalaire près) : $f = \pi\, f_i^{e_i}$, où les f_i sont des polynômes irréductibles distincts. (cf. annexe).

Proposition 1.2.1. $X = V(f) = V(\pi f_i^{e_i}) = V(\pi f_i) = \cup\, V(f_i)$ (immédiat).

Les hypersurfaces du type $V(f_i)$, où f_i est irréductible, sont appelées hypersurfaces irréductibles réduites. Les $V(f_i)$ associés à X sont les composantes irréductibles de X. Elles sont uniques.

1.3. Equation réduite.

D'après (1.2), si $f = \Pi f_i^{e_i}$ est une équation de X, $\overline{f} = \Pi\, f_i$ est aussi une équation de X, appelée <u>équation réduite</u>.

<u>Théorème 1.3.1.</u> Soient X une hypersurface d'équation f et g un polynôme de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ nul sur X, alors g est un multiple de $\overline{f}$, équation réduite de X.

Démonstration : nous utiliserons une méthode de projection.

<u>Lemme 1.3.2.</u> Il existe au moins une direction de droite Δ telle que pour toute droite D de Δ, la restriction de f à D soit un polynôme en une variable, de degré le degré total de f.

La droite D admet une représentation paramétrique : $\begin{cases} X_1 = a_1 T + b_1 \\ X_n = a_n T + b_n \end{cases}$

où $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

Si f a une décomposition homogène : $f(X_1,\ldots,X_n) = f_d+\ldots+f_o$, avec $f_d \neq 0$ la restriction de f à D s'écrit :

$$f(a_1T + b_1,\ldots,a_nT+b_n) = T^d f_d(a_1,\ldots,a_n)+T^{d-1} f_{d-1}+\ldots+f_o$$

C'est un polynôme de degré d si : $\underline{f_d(a_1,\ldots,a_n) \neq 0}$.

<u>Conséquence</u> : à chaque solution en T de l'équation $f|D = 0$ correspond un point d'intersection de D avec X, donc :

Si D est une droite quelconque de E :

- soit $D \subset X$ (quand $f|D \equiv 0$)
- soit $0 < \mathrm{card}(D \cap X) \leq \deg f$.

<u>Lemme 1.3.3.</u> Soit $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille d'hypersurfaces. Il existe au moins une direction de droite Δ et un hyperplan supplémentaire H tels que chacune des X_i se projette, parallèlement à Δ, <u>sur H tout entier</u>. En particulier, une hypersurface est un ensemble infini.

dém. On choisit Δ telle que dans le lemme 1, pour l'hypersurface réunion des X_i alors, si $x \in H$, $p^{-1}(x) \in \Delta$; donc $p^{-1}(x)$ coupe chaque X_i (p = projection de E sur H parallèlement à Δ).

Lemme 1.3.4. Si f et g sont deux polynômes sans facteur commun, équations de X et Y respectivement, alors $X \cap Y$ ne contient aucune hypersurface.

Rappel algébrique : f et g polynômes à n variables.

Il existe un polynôme r en $X_1, \dots, X_{n-1}$, de la forme $r = Af+Bg$ avec : $\deg A < \deg g$ et $\deg B < \deg f$ et tel que :

$$r(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow (\exists x_n | f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = 0) .$$

Supposons que $X \cap Y$ contienne une hypersurface Z. Après un changement de repère, X, Y, et Z se projettent sur l'hyperplan $\{X_n = 0\}$, dans une certaine direction, et $p(X \cap Y) = V(r)$ dans cet hyperplan.

Le polynôme r n'est pas identiquement nul, sinon $Af + Bg = 0$, ce qui est impossible vu les conditions sur les degrés et le fait que f et g n'ont pas de facteur commun.

Donc $p(X \cap Y) \subset H$, strictement; or, par hypothèse $Z \subset X \cap Y$ et $p(Z) = H$.

Démonstration du théorème :

Soit g nul sur $X = V(f)$, X_i les composantes irréductibles de X. Pour tout i, on a $Z = V(g) \supset X_i = V(f_i)$ donc $X_i \cap Z$ est une hypersurface, donc f_i divise g.

1.4. Exemples.

dim 1. $f(x) = \Pi(x - a_i)^{e_i}$; $X = V(f)$ est un ensemble fini de points.

dim 2 : Les hypersurfaces sont appelées courbes algébriques planes.

L'intersection de deux courbes algébriques planes est un nombre fini de points si les équations n'ont pas de facteur commun. En effet, grâce au lemme 1.3.3., il existe une projection sur une droite $\pi : E \longrightarrow H$ telle que pour tout $x \in H$, $\pi^{-1}(x) \cap X_1$ et $\pi^{-1}(x) \cap X_2$ soient finies et $\pi(X_1 \cap X_2)$ est l'ensemble des zéros du résultant r des équations f_1 et f_2 de X_1 et X_2. Or r n'est pas identiquement nul.

1.5. Plongement dans l'espace projectif.

Soit $\mathbb{P}(E)$ la complétion projective de E, c'est à dire le quotient de l'ensemble des $(t,x) \in \mathbb{C} \times E$, $(t,x) \neq (0,0)$, par la relation $(at,ax) = (a,x)$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Alors E est plongé dans $\mathbb{P}(E)$ par $x \mapsto$ classe $(1,x)$; son complémentaire est l'hyperplan à l'infini, d'équation $t = 0$.

a) Hypersurface de $\mathbb{P}(E)$, associée à un polynôme homogène

Si $F(T,X_1,\ldots,X_n)$ est un polynôme homogène, on appelle "zéro projectif" de F un point de $\mathbb{P}(E)$ dont un représentant $(t,x_1,\ldots,x_n)$ annule F. Alors tout représentant annule F. L'ensemble des zéros projectifs de F est une hypersurface de $\mathbb{P}(E)$, notée $V(F)$.

b) Plongement projectif d'une hypersurface

Si X est une hypersurface de E, d'équation f, on associe à f le polynôme : $F(T,X_1,\ldots,X_n) = f_d(X_1,\ldots,X_n) + T f_{d-1} + \ldots + T^d f_o$, où les f_i sont les composantes homogènes de f et où d est le degré de f. F est homogène de degré d_1 et l'hypersurface associée est appelée fermeture projective de X. On la note $\overline{X}$. On a $\overline{X} \cap E = X$ car $F(1,x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$. En outre, les points à l'infini de $\overline{X}$ correspondent bijectivement aux directions de droites Δ de E telles que pour toute droite D de Δ, on ait $\deg(f|D) < \deg(f)$, cf. lemme 1.3.1. Réciproquement, si $\overline{X}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}(E)$ qui ne contient pas l'hyperplan à l'infini, alors $\overline{X}$ est la fermeture de $\overline{X} \cap E$.

Annexe. décomposition d'un polynôme à plusieurs variables en polynômes irréductibles : il suffit de montrer le théorème :

Si A est un anneau (commutatif, unitaire, intègre) factoriel, alors $A[X]$ est factoriel.

Si K est le corps des fractions de A, on sait décomposer un polynôme en polynômes irréductibles dans $K[X]$; on se ramène à $A[X]$ en utilisant les lemmes :

. si F est irréductible dans $A[X]$, il est irréductible dans $K[X]$

. F irréductible dans $A[X]$, F divise GH, alors F divise G ou divise H (Gauss) .

1.6. Ensembles algébriques plans.

Proposition 1.6.1. Les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[x,y]$ sont de la forme $(x-a,y-b)$. Les idéaux premiers non maximaux sont 0 et les idéaux principaux (f) avec f irréductible.

Un idéal premier non nul P contient un élément irréductible car si $f \in P$ et f non irréductible alors $f = gh$, donc g ou h est dans P, de degré < celui de f et il suffit de réitérer le procédé. Soit donc f irréductible dans P. Ou bien $P = (f)$, ou bien il existe $g \in P$ avec $f \nmid g$; dans ce cas le résultant $r(x) = cf + bg$ n'est pas nul et appartient à P. Comme $r(x) = \lambda \Pi (x - \alpha_i)$, l'un des $(x - \alpha_i)$ est dans P. Par symétrie, il existe $(y - \beta_j) \in P$ et comme l'idéal $(x-\alpha_i , y-\beta_j)$ est maximal et contenu dans P, il est égal à P, d'où la conclusion.

Notons que la dernière assertion de (1.6.1.) est le théorème des zéros à 2 variables (cf. § 5).

Proposition 1.6.2. Tout ensemble algébrique du plan est soit vide, soit le plan, soit réunion d'un nombre fini de courbes irréductibles et d'un nombre fini de points.

Note. Un idéal P d'un anneau commutatif A à élément unité est dit premier si $1 \notin P$ et si $fg \in P$ entaîne $f \in P$ ou $g \in P$, autrement dit, l'anneau quotient est intègre. On dit que P est maximal si l'anneau quotient est un corps.

Par définition, un ensemble algébrique X est l'ensemble des zéros communs d'un idéal I de $\mathbb{C}[x,y]$. On écrit $X = \underline{V}(I)$. On sait que I est engendré par un nombre fini d'éléments $f_1,\ldots,f_n$. Soit h le produit des facteurs irréductibles communs à tous les f_i. Alors $\underline{V}(h)$ est vide ou bien une courbe. Il reste à voir que $X - \underline{V}(h)$ est fini ce qui est clair par récurrence sur n, sachant que si f et g sont sans facteur commun, $\underline{V}(f,g)$ est fini.

§ 2. CYCLES

2.1. Définition.

Une hypersurface est un ensemble de points de E : on ne distingue donc pas l'hypersurface d'équation $F = 0$, de celle d'équation $F^2 = 0$, car l'ensemble des zéros est le même.

La notion plus fine est celle de cycle :

déf : On appelle cycle de E un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, à une constante multiplicative près.

Proposition. La donnée d'un cycle équivaut à la donnée d'une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs, d'hypersurfaces irréductibles.

On écrit le polynôme sous la forme $f = \Pi f_i^{e_i}$; chaque f_i étant irréductible correspond à une hypersurface irréductible C_i.

On écrit cela en notation additive : $\boxed{C = \Sigma\, e_i C_i}$, si C est le cycle de f.

Un cycle : $C = \Sigma\, C_i$ est donc une hypersurface réduite

$C = C_i$ est une hypersurface réduite et irréductible.

. La donnée d'un cycle équivaut également à celle de l'idéal principal engendré par f.

déf. On appelle support et l'on note $|C|$, l'hypersurface d'équation f.

2.2. Intersection avec une droite.

déf. 2.2.1. Si C est un cycle correspondant à f, D une droite de E, non incluse dans $|C|$, et x appartient à $|C| \cap D$, alors l'ordre du zéro en x de la restriction de f à D est appelé multiplicité d'intersection en x de C avec D.
On le note : $(C,D)_x$. Si $D \subset |C|$, on peut prendre $(C,D)_x = +\infty$.

Théorème 2.2.2.: Dans l'espace projectif, si F est le polynome homogène correspondant à un cycle C, D une droite non incluse dans $|C|$, alors

$$\sum_{x \in |C| \cap D} (C,D)_x = \deg F.$$

dém. F restreint à D est un polynôme homogène à deux variables, qui se décompose donc en facteurs linéaires : $F|_D = \Pi L_i^{e_i}$; il est non identiquement nul car D n'est pas incluse dans $|C|$. Si $x \in |C| \cap D$, $L_i(x) = 0$ pour un i et la multiplicité d'intersection en x est e_i. A chaque x correspond un seul facteur linéaire et l'on a bien : $\Sigma e_i = \deg F$.

2.3. Point simple. Cône des tangentes

déf. 2.3.1. Soit x dans $|C|$.
On appelle multiplicité de C en x la borne inférieure des multiplicités d'intersection en x des droites passant par x, avec C.

$$m(x) = \inf_{x \in D} (C,D)_x.$$

. Un point de $|C|$ de multiplicité 1 est dit simple. Sinon, il est dit singulier.

. Une droite D passant par x est dite tangente à C en x si :

$$m(x) < (C,D)_x.$$

L'ensemble des tangentes est le cône des tangentes.

Calcul pratique :

Supposons que x soit l'origine de E. Le polynôme correspondant à C s'écrit :

$$f(X_1,\dots,X_n) = f_e+\dots+f_d,$$

composantes homogènes rangées par ordre croissant : $f_e \not\equiv 0$ et $e \geqslant 1$.

Si $(a_1,\dots,a_n)$ est un système de coefficients directeurs de D :

$$f|D(t) = t^e\, f_e(a_1,\dots,a_n)+\dots+t^d\, f_d(a_1,\dots,a_n).$$

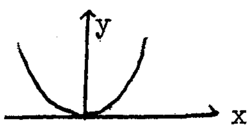
Pour une droite au moins, $f_e(a_1,\dots,a_n)$ est non nul, donc :

$$m(x) = e.$$

Les tangentes sont les droites passant par x telles que $f_e(a_1,\dots,a_n) = 0$. Elles sont en nombre fini. L'équation du cône des tangentes à l'origine s'obtient en annulant les termes de plus bas degré de l'équation de la courbe.

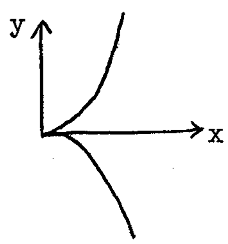
exemples :

origine simple : $y - x^2 = 0$

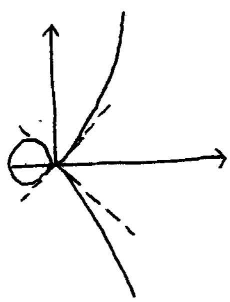


origine singulière :

$y^2-x^3 = 0$



$x^2-y^2+x^3 = 0$



Calcul de la multiplicité : (cas général).

On utilise la formule de Taylor pour se ramener à l'origine :

si x a pour coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$: $X_i = X_i' + x_i$

$$F(X_1,\dots,X_n) = F(x) + \Sigma \frac{\partial^{|A|}}{\partial X^A} F(x) . \frac{X_1'^{a_1} \dots X_n'^{a_n}}{A!}$$

avec $A = (a_1,\dots,a_n)$ multi-indice

$$\text{donc } m(x)=e \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^{|A|}F}{\partial X^A}(x) = 0 & \text{pour } |A| < e \\ \exists A, |A| = e, \dfrac{\partial^{|A|}F}{\partial X^A}(x) \neq 0 & \end{cases}$$

2.4. Ensemble des points singuliers.

Si un cycle n'est pas réduit, tous les points d'une composante multiple sont singuliers.

Théorème 2.4.1. Si X est une hypersurface réduite, l'ensemble des points singuliers ne contient aucune hypersurface.

Soit f l'équation réduite de X : alors f et f'_{X_1} n'ont pas de facteur commun; en effet, si p irréductible divise f,

$f = Ap$, $f'_{X_1} = A'_{X_1} p + A p'_{X_1}$; p ne divise pas p'_{X_1}, ni A, donc ne divise pas f'_{X_1}.

L'ensemble des points singuliers est contenu dans $V(f) \cap V(f'_{X_1})$, qui ne contient pas d'hypersurface.

Théorème de paramétrisation 2.4.2.

Si ξ est un point simple d'un cycle X d'équation f, il existe des fonctions développables en série entière, dans un voisinage V

de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, $\phi_i : V \longrightarrow \mathbb{C}\ (i = 1,n)$ telles que : $\xi = (\phi_1(0),\dots,\phi_n(0))$ et $F(\phi_1,\dots,\phi_n) = 0$, avec en outre :

Il existe un voisinage U de ξ dans E, tel que :

$X \cap U = \mathrm{Im}\,\phi \cap U$ et $V = \phi^{-1}(U)$, la restriction de ϕ à V est injective.

C'est le théorème des fonctions implicites.

§ 3. THEOREME DE BEZOUT

3.1. Localisation

3.1.1. Définition et premières propriétés.

A est un anneau commutatif unitaire, S une partie multiplicative (c.a.d stable par multiplication et contenant l'unité).

Considérons, dans le produit $A \times S$, la relation d'équivalence :

$$\mathbb{R} : (a,s)\mathbb{R}(a',s') \Longleftrightarrow \exists s'' \in S / s''(as' - a's) = 0$$

Le produit $A \times S$ est muni des lois $\begin{cases} (a,s)+(a',s') = (as'+a's,ss') \\ (a,s)\ (a',s') = (aa',ss') \end{cases}$

On vérifie que ces lois munissent le quotient $A_S = (A \times S)/\mathbb{R}$ d'une structure d'anneau commutatif unitaire. On a en outre un morphisme d'anneaux $i_A : A \longrightarrow A_S$, $i_A(a) = a/1$, où l'on a posé $a/s = cl(a,s)$ pour $(a,s) \in A \times S$. On dit que A_S (muni du morphisme i_A) est le localisé de A par rapport à S.

Théorème. Pour tout morphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ tel que $u(s)$ soit inversible pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme d'anneaux $v : A_S \longrightarrow B$ tel que $u = v \circ i_A$.

Il suffit de poser $v(a/s) = u(a)/u(s)$.

Exemple

. Soit S l'ensemble des éléments non diviseurs de 0 dans A; alors A_S est l'anneau total des fractions de A. En particulier, si A est intègre, $S = A\setminus\{0\}$ et A_S est le corps des fractions de A.

. A_S peut être nul : si S contient un élément nilpotent s, on a

$$\frac{a}{t} = \frac{s^n a}{s^n t} = \frac{0}{s^n t} = 0$$

. Si p est un idéal premier, $A\setminus p$ est une partie multiplicative. On écrit A_p au lieu de $A_{A\setminus p}$, c'est le localisé de A en p.
On peut définir le localisé d'un A-module M, soit comme $M_S = (M\times S)/\mathbb{R}$, soit $M_S = A_S \otimes_A M$. C'est un A_S-module.

Localisation et suites exactes de modules :

Th. Si $N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} P$ est une suite exacte de A-modules, alors $N_S \xrightarrow{u_s} M_S \xrightarrow{v_s} P_S$ est une suite exacte de A_S-modules.

dém : par exemple : $\operatorname{Ker} v_S \ni \frac{m}{s} \Leftrightarrow v_s(\frac{m}{s}) = 0 = \frac{v(m)}{s} \Leftrightarrow \exists t \in S, 0 = tv(m)$
$= v(tm)$

$\Leftrightarrow tm \in \ker V \Leftrightarrow tm = u(n)$, donc $\frac{m}{s} = \frac{u(n)}{ts} = u_s(\frac{n}{ts})$.q.e.d.

Application : si I est un idéal de A, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

donc

$$0 \longrightarrow I_S \longrightarrow A_S \longrightarrow (A/I)_S \longrightarrow 0,$$

comme $I_S = IA_S$, on obtient l'isomorphisme :

$$\boxed{A_S/IA_S = (A/I)_S}$$

3.1.2. Application aux modules de longueur finie

Rappelons qu'un A-module est simple s'il n'a pas d'autre sous-module que 0 et lui-même.

Un A-module est de longueur finie s'il existe une suite décroissante de sous-modules :

$$M = M_o \supset M_1 \supset \ldots . \supset M_k = 0 \quad \text{telle que les quotients}$$

M_i/M_{i+1} soient simples; une telle suite est une suite de composition de M.

Th. Si M est un module de longueur finie, l'ensemble des idéaux premiers p tel que $M_p \neq 0$ est fini, et l'application canonique

$$M \longrightarrow \bigoplus_{p \text{ premier}} M_p$$

est un isomorphisme. Les idéaux tels que $M_p \neq 0$ sont maximaux.

dém. par récurrence : si M est simple, M est monogène (sinon le module engendré par un élément non nul serait distinct de M), donc de la forme $M = A/m$ où m est un idéal maximal de A, noyau de la surjection $A \longrightarrow M$, $a \mapsto ax$, $x \in M$, $x \neq 0$.

Or $(A/m)_p = A_p/mA_p$ et si $m \neq p$, il existe $s \in m$, $s \notin p$.

Soit $\frac{a}{t} = \frac{as}{ts} \in m\, A_p$, donc $mA_p = A_p$ et $(A/m)_p = 0$.

Par ailleurs $(A/m)_m = A/m$, puisque A/m est un corps.

Le théorème est donc vérifié quand M est simple.

Supposons le théorème vrai pour tout module ayant une suite de composition de longueur inférieure ou égale à k-1, M a une suite de composition de longueur k, donc

$$M = M_o \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k = 0.$$

et la suite : (1) $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$ est exacte, M/M_1 étant simple et M_1 de longueur inférieure ou égale à k-1.

Les suites :

$$0 \longrightarrow (M_1)_p \longrightarrow M_p \longrightarrow (M/M_1)_p \longrightarrow 0$$

sont toutes exactes, donc aussi :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \bigoplus_p (M_1)_p \longrightarrow \bigoplus_p M_p \longrightarrow \bigoplus_p (M/M_1)_p \longrightarrow 0$$

Comparant les suites (1) et (2) : $M_1 \simeq \bigoplus_p (M_1)_p$ et $M/M_1 \simeq \bigoplus_p (M/M_1)_p$

donc : $\boxed{M \simeq \bigoplus_p M_p}$.

Les idéaux pour lesquels $M_p \neq 0$ sont maximaux, d'après l'hypothèse de récurrence.

3.2. Fonctions rationnelles.

définition : Soit X une partie de l'espace affine E (resp. de $\mathbb{P}(E)$). Une fonction rationnelle sur X est une application de X dans $\mathbb{C}$ induite par une fraction rationnelle de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$:

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, avec $q(x) \neq 0$ pour $x \in X$ (resp. induite par un quotient de polynômes homogènes de même degré).

On passe facilement d'une fonction rationnelle dans E à son prolongement dans $\mathbb{P}(E)$: $\frac{x^3+y^3+1}{x^6-y^6+14}$ et $\frac{T^3(X^3+Y^3+T^3)}{X^6-Y^6+14\,T^6}$

Le domaine de définition de $f = p/q$ est l'ensemble des points tels que $q(x) \neq 0$. On dit que f est définie en x.

Th. Deux fonctions rationnelles qui coïncident comme fonctions sur le complémentaire d'une hypersurface, coïncident dans l'intersection de leurs domaines de définition.

dém. Soient $f = \frac{P}{Q}$, $g = \frac{P'}{Q'}$. Si $h(x) \neq 0$, on a $f(x) = g(x)$, donc

$$P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = 0.$$

Sur tout l'espace : $h(x)[P(x)Q'(x) - P'(x)] \equiv 0$ donc $P(x)Q'(x) \equiv P'(x)Q(x)$ q.e.d.

Anneau des germes de fonctions rationnelles en un point x.

C'est l'anneau des fonctions rationnelles définies en x. On le note $\underline{O}_{E,x}$ (resp. $\underline{O}_{\mathbb{P},x}$).

C'est un anneau local ce qui veut dire qu'il n'a qu'un seul idéal maximal, celui des fonctions rationnelles nulles en x.

Les polynômes $q(x)$ tels que $q(x) \neq 0$ forment une partie multiplicative S, donc

$$\underline{O}_{E,x} = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]_S .$$

Il s'identifie à l'anneau des germes de fonctions rationnelles en x : l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions rationnelles définies au voisinage de x modulo la relation "$f \sim g$ si il existe un voisinage de x contenu dans les voisinages correspondant à f et g, tel que f et g coïncident comme fonctions sur ce voisinage"; on utilise le théorème précédent. On appelle ici voisinage du point x, le complémentaire d'une hypersurface qui ne contient pas x.

3.3. Théorème de Bezout.

On se place dans le plan projectif, et on considère deux courbes sans composante commune, donc définies par F (de degré p) et G (de degré q) premiers entre eux.

Soit ξ un point de $\mathbb{P}$ commun aux deux courbes, soit T une forme linéaire non nulle au point ξ. Alors F/T^p et G/T^q engendrent un idéal $(F/T^p, G/T^q)$ de $\underline{O}_{\mathbb{P},\xi}$ qui ne dépend pas de T et l'on a donc un anneau quotient $O_{\mathbb{P},\xi}/(F/T^p, G/T^q)$ qui est une $\mathbb{C}$-algèbre et donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Nous verrons plus bas qu'il est de dimension finie et l'on appelle multiplicité d'intersection des deux courbes au point ξ le nombre

(1) $$(F,G)_\xi = \dim_{\mathbb{C}}(\underline{O}_{\mathbb{P},\xi}/(F/T^p, G/T^q)).$$

Si E est le complément de l'hyperplan d'équation $T = 0$, on a $\underline{O}_{\mathbb{P},\xi} \simeq O_{E,\xi}$ car les fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}$ ou E définies au point ξ sont les mêmes et par suite, si $f = F/T^p$ et $g = G/T^q$ sont les équations des courbes, on a aussi

(2) $$(f,g)_\xi = (F,G)_\xi = \dim_{\mathbb{C}}(\underline{O}_{E,\xi}/(f,g)).$$

Théorème de Bezout. $\sum (F,G)_\xi = \deg F.\deg G$, où la somme est étendue aux points communs aux deux courbes.

On choisit une fois pour toute une forme linéaire T ne s'annulant en aucun des points communs aux deux courbes. L'on a donc $\sum (F,G)_\xi = \sum_{\xi \in E} \dim_{\mathbb{C}}(\underline{O}_{E,\xi}/(f,g))$.

Lemme 1. L'anneau $A = \mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

En effet, en éliminant y entre f et g on trouve un polynome résultant $r(x) \in (f,g)$ avec $r(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ où $\alpha_0 \neq 0$ et de même $s(y) \in (f,g)$, avec $s(y) = \beta_0 y^\mu + \ldots + \beta_\mu$, $\beta_0 \neq 0$. Il est immédiat que les $x^i y^j$, $1 \leqslant i < \nu$, $1 \leqslant j < \mu$, engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$.

Lemme 2. Soit $M = (x-a, y-b)$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[x,y]$. Pour que le localisé A_M soit non nul, il faut et il suffit que $f(a,b) = g(a,b) = 0$ autrement dit que $M \supset (f,g)$ ou encore que le point $\xi = (a,b)$ soit commun aux deux courbes. S'il en est ainsi, on a $$A_M \simeq \underline{O}_{E,\xi}/(f,g).$$

En effet, pour que A_M soit nul, il faut et il suffit qu'il existe $s \in \mathbb{C}[x,y]$, $s \notin M$, tel que l'homothétie de rapport s soit nulle dans A, c'est à dire $s \in (f,g)$, qui signifie $(f,g) \not\subset M$, donc $f \notin M$ ou $g \notin M$, donc $f(\xi) \neq 0$ ou $g(\xi) \neq 0$. D'où le premier point.

Puisque $A = \mathbb{C}[x,y]/(f,g)$, alors $A_M = \mathbb{C}[x,y]_M/(f,g)_M$. Or $\mathbb{C}[x,y]_M$ s'interprète comme l'anneau $\underline{O}_{E,\xi}$ des fractions rationnelles définies au point ξ et l'idéal $(f,g)_M$ est l'idéal de $\mathbb{C}[x,y]_M$ engendré par (f,g), d'où la conclusion.

Lemme 3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $\mathbb{C}[X,Y,T]_n$ l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré n et soit $(F,G)_n$ le sous-espace de ceux de la forme $AF + BG$. Pour $n \geqslant p + q$, on a $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X,Y,T]_n/(F,G)_n) = pq$.

Posons $S_n = \mathbb{C}[X,Y,T]_n$, alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow S_{n-p-q} \xrightarrow{u} S_{n-p} \oplus S_{n-q} \xrightarrow{v} S_n \longrightarrow S_n/(F,G)_n \longrightarrow 0$$

avec $u(H) = (HG,-HF)$, $v(A,B) = AF + BG$. En effet, u est le noyau de v car F et G sont premiers entre eux. On a donc

$r_n = s_n - s_{n-p} - s_{n-q} + s_{n-p-q}$ avec $s_n = \dim S_n$ et

$r_n = \dim(S_n/(F,G)_n)$. Comme $s_n = \binom{n+2}{2}$, on en tire $r_n = pq$ pour $n \geqslant p + q$, par exemple parce que $\sum s_n t^n = 1/(1-t)^3$, donc

$\sum r_n t^n = (1 - t^p - t^q + t^{p+q})(\sum s_n t^n) = (1+t+\dots+t^{p-1})(1+t+\dots+t^{q-1})(1+t+\dots)$

Lemme 4. Pour tout n, l'application linéaire $\mathbb{C}[X,Y,T]_n \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$, $F(X,Y,T) \longmapsto F(x,y,1)$ induit une application linéaire $\alpha_n : \mathbb{C}[X,Y,T]_n/(F,G)_n \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ qui est bijective pour n assez grand, si $F(X,Y,0) = G(X,Y,0) = 0$ n'a que la solution $X = Y = 0$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S_n/(F,G)_n \arrow[rr, "\beta_n"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & S_{n+1}/(F,G)_{n+1} \arrow[dl, "\alpha_{n+1}"] \\ & \mathbb{C}[x,y]/(f,g) & \end{tikzcd}$$

où $\beta_n(H) = TH$. Or β_n est injective, car $\beta_n(H) = 0$ signifie que $TH = AF + BG$. En réduisant modulo T, on en tire $0 = \overline{A}\,\overline{F} + \overline{B}\,\overline{G}$; or $\overline{F} = F(X,Y,0)$ et $\overline{G} = G(X,Y,0)$ sont sans facteur commun car on a pris soin de choisir T de façon que <u>les courbes n'aient pas de point commun à l'infini</u>. Il existe donc $\overline{K}(X,Y)$ tel que $\overline{A} = \overline{KG}$ et $\overline{B} = -\overline{KF}$, donc $A = \overline{K}G + TA'$ et $B = -\overline{K}F + TB'$ donc $TH = (A'F+B'G)T$ donc $H = 0$ dans $S_n/(F,G)_n$. Pour $n \geq p + q$, β_n est bijective car injective et linéaire entre espaces vectoriels de même dimension.

Notons que α_n est injective pour $n \geq p + q$, car si $H(X,Y,1) = af + bg$, alors $T^k H(X,Y,T) = AF + BG$ mais β_n est injective pour $n \geq p + q$. Enfin, α_n est surjective car $p(x,y) = P(X,Y,1)$ où P est de degré $N \geq p + q$, donc $p = \alpha_N(P)$ donc $p = \alpha_{p+q}(P')$ avec $P = T^{N-p-q}P'$ car β_n est surjective pour $n \geq p+q$.

Ces lemmes prouvent le théorème car $\dim(\mathbb{C}[x,y]/(f,g)) = \sum \dim(\underline{O}_{E,\xi}/(f,g))$ d'après le lemme 2 et cette dimension est pq d'après les lemmes 3 et 4.

<u>Remarque</u>. Soient n hypersurfaces de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, d'équations $F_i(X_0,X_1,\ldots,X_n)$, $1 \leq i \leq n$. Supposons que leur inter-

section soit un nombre fini de points. Alors

$$\sum_{\xi} \dim_{\mathbb{C}} (\underline{O}_{\mathbb{P},\xi}/(F_1/T^{d_1},\ldots,F_n/T^{d_n})) = d_1 d_2 \ldots d_n$$

où d_i est le degré de F_i et où T est une forme linéaire non nulle au point ξ. Toute la démonstration reste valable sans changement, sauf le lemme 3. Le lecteur savant le prouvera en remplaçant la suite exacte du lemme 3 par le complexe de Koszul relatif aux F_i et en prouvant que la cohomologie de celui-ci est formée de $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]$-modules de longueur finie.

3.4. Calcul de la multiplicité d'intersection en termes du résultant.

Proposition 3.4.1. Soient deux courbes planes sans composante commune, d'équations $f(x,y) = 0$ et $g(x,y) = 0$. Pour tout nombre complexe x_0, l'ordre de multiplicité de la racine x_0 du résultant $R(f,g)(x)$ obtenu en éliminant y est égal à la somme des $(f,g)_\xi$ étendue aux points ξ d'abscisse x_0, du moins si le point à l'infini de l'axe des y n'est pas commun aux deux courbes.

Par symétrie on peut supposer que le point à l'infini de oy n'appartient pas à la courbe d'équation $f = 0$, autrement dit que le monome y^p figure dans f avec $p = \deg(f)$.

Lemme 3.4.2. Soient A un anneau et soit $f \in A[y]$ un polynome unitaire de degré p. Alors $A[y]/(f)$ est un A-module libre de base $1, y, y^2, \ldots, y^{p-1}$ et, pour tout $g \in A[y]$, le déterminant de l'homothétie de rapport g dans $A[y]/(f)$ est le résultant $R(f,g)$.

La première assertion est évidente et pour la seconde, comme le résultant et le déterminant sont des polynomes à coefficients entiers par rapport aux coefficients de f et g, on peut supposer par le raisonnement habituel que f est un produit de facteurs linéaires distincts $f = (y - \alpha_1)\dots(y - \alpha_p)$ avec $\alpha_i \in A$. D'où un isomorphisme de A-algèbres

$$\theta : A[y]/(f) \longrightarrow A^p, \ \theta(h) = (h(\alpha_1),\dots,h(\alpha_p)).$$

Le transporté par θ de l'homothétie de rapport g est $\gamma : A^p \longrightarrow A^p$, $\gamma(u_1,\dots,u_p) = (u_1 g(\alpha_1),\dots,u_p g(\alpha_p))$ dont la matrice est diagonale et dont le déterminant vaut $g(\alpha_1)\dots g(\alpha_p)$ qui est précisément $\mathbb{R}(f,g)$. C.Q.F.D.

Lors de la preuve du théorème de Bezout, on a vu que $\mathbb{C}[x,y]/(f,g) = \oplus\, (\mathbb{C}[x,y]/(f,g))_M$, où M parcourt les idéaux maximaux $M = (x-a, y-b)$, avec (a,b) point commun aux deux courbes. En outre, la dimension sur $\mathbb{C}$ du facteur correspondant au point ξ est $(f,g)_\xi$ par définition. Considérons $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ comme un $\mathbb{C}[x]$-module et la partie multiplicative S de $\mathbb{C}[x]$ formée des polynomes $s(x)$ avec $s(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{C}$. La localisation par rapport à S annule les facteurs où $M = (x-a, y-b)$, $a \neq x_0$, car $s(x) = (x-a)$ devient à la fois nul et inversible, et ne change pas les autres car $s(x) \notin (x-x_0, y-b)$. Donc $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y]/(f,g))_S = \sum (f,g)_\xi$, où ξ parcourt les points communs d'abcisse x_0. Or $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ est le conoyau de la multiplication par g dans l'anneau $\mathbb{C}[x,y]/(f)$; par localisation, $(\mathbb{C}[x,y]/(f,g))_S$ apparait donc comme le conoyau de la multiplication par g dans l'anneau $E = \mathbb{C}[x,y]_S/(f)$.

Bien sûr, E s'interprète comme $A[y]/(f)$ où $A = \mathbb{C}[x]_S$ et le déterminant de l'homothétie de rapport g est $R(f,g)$ d'après le lemme 3.4.2. Grâce au lemme ci-dessous la longueur de E/gE est l'ordre de multiplicité de la racine x_0 de $R(f,g)$ car

$\mathbb{C}[x]_S$ est un anneau local d'idéal maximal $(x - x_0)$, d'où la proposition.

Lemme 3.4.3. Soit h un endomorphisme d'un A-module libre E de rang fini où A est un anneau local dont l'idéal maximal M est principal. La longueur du quotient $E/h(E)$ est le plus grand entier ν tel que $\text{dét}(h) \in M^\nu$.

Preuve : appliquer le théorème des diviseurs élémentaires pour mettre la matrice de h sous forme diagonale.

Corollaire 3.4.4. $(f,gh)_\xi = (f,g)_\xi + (f,h)_\xi$.

Choisir les axes de façon que les points d'intersection soient à distance finie et que deux d'entre eux n'aient jamais même abscisse appliquer la proposition précédente et la formule $R(f,gh) = R(f,g)R(f,h)$ qui résulte du lemme 3.4.2.

Remarque 3.4.5. Les axes étant choisis comme pour prouver le corollaire le degré de $R(f,g)$ est $\deg(f)\deg(g)$ et ceci, joint à la Prop. 3.4.1. redémontre le théorème de Bezout.

3.5. Multiplicité d'intersection et représentation paramétrique.

Le théorème de Bezout ne peut être appliqué que si l'on connaît un moyen pratique de calculer la dimension sur $\mathbb{C}$ de l'anneau $\underline{O}_{E,\xi}/(f,g)$.

Proposition : Soient C une courbe d'équation f, régulière au point ξ et D une courbe d'équation g, passant par ξ, n'ayant pas de composante commune avec C.
Alors, si $(x(t),y(t))$ est une représentation paramétrique de classe C^∞ de C au voisinage de $\xi = (x(0),y(0))$ la multiplicité d'in-

tersection $(C,D)_\xi$, est l'ordre du zéro de $g(x(t),y(t))$ en $t = 0$.

Lorsque C est une droite, cette proposition montre que les deux notions introduites de multiplicité d'intersection coïncident.

<u>Démonstration</u>:

Il suffit de prouver que pour une représentation paramétrique de classe C^∞, la fonction $g(x(t),y(t))$ a un ordre et que celui-ci vaut $(C,D)_\xi$ pour que ceci reste vrai pour toute autre représentation paramétrique de classe C^∞. On choisit donc des axes centrés au point ξ de façon que la droite d'équation $y = 0$ soit la tangente à C, ce qui donne pour C une représentation paramétrique $y = \phi(x)$, où ϕ est une série entière avec $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Si f est l'équation de C, on a donc $f(x,\phi(x)) \equiv 0$ et $f(x) = y - \psi(x,y)$ où ψ a un zéro d'ordre ≥ 2 à l'origine. De plus, on a $g(x,\phi(x)) = \lambda x^r + \mu x^{r+1} + \dots$, $\lambda \neq 0$, et l'énoncé dit que $r = (C,D)_\xi$. Puisque $\underline{O}_{E,\xi}/(f,g)$ est le localisé de $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ en l'idéal maximal (x,y), l'application naturelle $\mathbb{C}[x,y]/(f,g) \longrightarrow \underline{O}_{E,\xi}/(f,g)$ est surjective, donc aussi $\mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \underline{O}_{E,\xi}/(f,g)$. Si K est le noyau de cette dernière, on a donc

$$(C,D)_\xi = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[x,y]/K).$$

Par définition du localisé, on a

$$K = \{h \in \mathbb{C}[x,y] \mid \exists s,a,b, \text{ avec } sh = af + bg \text{ et } s(0,0) \neq 0\}$$

Pour prouver le théorème, il suffira de montrer que les classes de $1, x, x^2, \dots, x^{r-1}$ dans $A = \mathbb{C}[x,y]/K$ forment une base de A sur $\mathbb{C}$. Nous utiliserons un procédé d'approximations successives.

Si $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, posons

$$h^{(1)}(x,y) = h(x,\psi(x,y)) = h(x, y - f(x,y))$$

donc $h \equiv h^{(1)}$ dans $A = \mathbb{C}[x,y]/K$. En outre, comme ψ a une zéro d'ordre $\geqslant 2$, on a $h^{(1)}(x,y) = p^{(1)}(x) + q^{(1)}(x,y)$ où $q^{(1)}$ a un zéro d'ordre $\geqslant 2$. En répétant la même opération, on obtient $h^{(n)}(x,y) = p^{(n)}(x) + q^{(n)}(x,y)$ où $q^{(n)}(x,y)$ a un zéro d'ordre $\geqslant n$ et bien sûr $h \equiv h^{(n)}$ mod. K. Comme A est de rang fini, K contient tous les polynomes ayant un zéro d'ordre assez élevé donc pour n assez grand, $h^{(n)}(x,y) \equiv p^{(n)}(x)$ mod.K et par suite, les classes des puissances de x engendrent A.

En outre, comme $y = \phi(x)$ est une représentation paramétrique de C, on a $0 \equiv f(x, \phi(x)) = \phi(x) - \psi(x,\phi(x))$ et donc $h(x,\phi(x)) = h^{(1)}(x,\phi(x)) = \ldots = h^{(n)}(x,\phi(x))$. Pour n assez grand, l'ordre du zéro de $p^{(n)}$ est donc constant et égal à celui de $h(x,\phi(x))$. Appliquons ceci pour $h(x,y) = g(x,y)$, on trouve que la classe de g dans A, qui est nulle par définition, est aussi celle de $p^{(n)} = x^r(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p)$ avec $\alpha_0 \neq 0$. Comme $s(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p$ est non nul à l'origine, de $x^r s(x) \in K$ on tire $x^r \in K$, donc les classes de $1, x, \ldots, x^{r-1}$ engendrent A. Montrons qu'elles sont libres. En effet, sinon on aurait

$$s(x,y)(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{r-1} x^{r-1}) = af + bg$$

avec $s(0,0) \neq 0$. En remplaçant y par $\phi(x)$, on trouve à gauche une fonction ayant un zéro d'ordre $< r$ et à droite un zéro d'ordre $\geqslant r$, ce qui est absurde, d'où la conclusion.

Corollaire : Sous les mêmes hypothèses, si en plus D n'est pas tangente en ξ à C, on a :

$$(C,D)_\xi = m_\xi(D)$$

dém. En effet, si $e = m_\xi(D)$, l'équation de D est :

$$g(x,y) = \prod_i (a_i x + b_i y)^{e_i} + g_{e+1}(x,y)$$

avec $e = \sum e_i$ et g_{e+1} à un zéro d'ordre $\geqslant e+1$.

En remplaçant y par $\phi(x)$ (de valuation $\geqslant 2$)

$$g(x,\phi(x)) = (\Pi\ a_i)x^e + \ldots.$$

et l'hypothèse implique : $a_i \neq 0$ pour tout i, donc : $\Pi\, a_i \neq 0$.

Formulaire. Soient C et D deux courbes, d'équation f et g, ξ un point d'intersection :

- $(C,D)_\xi = (D,C)_\xi$
- $(C,D)_\xi \geqslant m_\xi(C).m_\xi(D)$, avec égalité si et seulement si C et D n'ont pas de tangente commune.
- $(f,gh)_\xi = (f,g)_\xi + (f,h)_\xi$.

Dans le cas où ξ est point singulier de C voir (3.7).

3.6. Courbes unicursales planes.

Nous noterons $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ (resp. $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$) les espaces affines (resp. projectifs) de dimension 1 et 2 sur $\mathbb{C}$. La notion de fonction rationnelle déjà rencontrée peut se prolonger en notion d'application rationnelle.

déf. 1. $\phi : \underline{A}_1 \longrightarrow \underline{A}_2$ est une application rationnelle si elle est définie par

$$\phi(t) = \left(\frac{a(t)}{b(t)}, \frac{c(t)}{d(t)}\right)$$ où a,b,c,d sont des polynômes.

déf. 2. (cas projectif)

$\overline{\phi} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ est une application rationnelle si $\overline{\phi}$ est définie par :

$$\overline{\phi}(\tau,\tau') = (X(\tau,\tau'),Y(\tau,\tau'),Z(\tau,\tau'))$$

où X,Y,Z sont des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun.

Remarquons que, dans le cas affine, ϕ n'est pas partout définie.
On passe de ϕ à $\overline{\phi}$ en "homogénéisant" : si

$\phi(t) = (\frac{t^3}{t-1}, \frac{t^2}{t^2-1})$ alors $\overline{\phi}(\tau,\tau') = (\tau^3(\tau+\tau'), \tau^2\tau'^2, \tau'^2(\tau^2-\tau'^2))$

est le prolongement de ϕ à $\mathbb{P}_1$.

<u>Théorème , définition</u> :

L'image d'une application rationnelle $\overline{\phi} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ est une courbe <u>algébrique irréductible</u>.
Toute courbe de cette forme est appelée courbe unicursale.

dém. Cherchons les points (x,y,z) de $\mathbb{P}_2$ tels que $z \neq 0$ qui sont dans l'image de ϕ. Une condition nécessaire et suffisante est que :

$$\begin{cases} xZ(\tau,\tau') - zX(\tau,\tau') = 0 \\ yZ(\tau,\tau') - zY(\tau,\tau') = 0 \end{cases}$$

ce qui, par élimination de τ et τ' conduit à un résultant $F(x,y,z) = 0$, homogène.
Les points "à distance finie" de $\mathrm{Im}\overline{\phi}$ et de la courbe $F(x,y,z)$ sont donc les mêmes. Si $F(x,y,z) = z^{\nu}G(x,y,z)$ (G non divisible par une puissance de z), on obtient :

. $\mathrm{Im}\,\overline{\phi} \subset C$ (C courbe d'équation $G(x,y,z) = 0$)

. $C \setminus \mathrm{Im}\overline{\phi}$ est fini car C et $\mathrm{Im}\overline{\phi}$ n'ont qu'un nombre fini de points à l'infini. On conclut en cherchant de même les points où $x \neq 0$ et où $y \neq 0$ et en appliquant le lemme suivant :

Lemme . Soit X une partie de $\mathbb{P}_2$, soient (x_0,x_1,x_2) des coordonnées homogènes. Supposons que pour chaque $i \in \{0,1,2\}$, il existe une courbe C_i ne contenant pas la droite $x_i = 0$ et telle que $\{(x_0,x_1,x_2) \in X \mid x_i \neq 0\} = \{(x_0,x_1,x_2) \in C_i \mid x_i \neq 0\}$. Alors $C_0 = C_1 = C_2 = X$.

Preuve évidente.

Il reste à voir que $\mathrm{Im}(\overline{\phi})$est irréductible. Sinon, on a $\mathrm{Im}(\overline{\phi}) = V(G) \cup V(H)$, donc $\overline{\phi}^{-1}(V(G))$ et $\overline{\phi}^{-1}(V(H))$ sont deux ensembles algébriques de $\mathbb{P}_1$ qui ne sont pas tous deux finis. Donc $\overline{\phi}^{-1}(V(H))$ est infini donc égal à $\mathbb{P}_1$, donc $H\circ\overline{\phi} \equiv 0$ donc H est nul sur $\mathrm{Im}(\overline{\phi})$ ce qui contraire à l'hypothèse.

Représentation paramétrique propre :

Une représentation paramétrique $\phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$, où C est unicursale est dite propre, si elle est bijective, sauf pour un nombre fini de points de $\mathbb{P}^1$ et de C.

Proposition

Toute courbe unicursale admet une représentation paramétrique propre.

Nous aurons besoin de la notion de fonction rationnelle sur une courbe : c'est une application définie sur la courbe, sauf en un nombre fini de points, et induite par une fonction rationnelle du plan.

Si la courbe est irréductible, d'équation F, les fonctions rationnelles forment un corps : le corps des quotients de l'anneau $\mathbb{C}[x,y]/(F)$. (une fonction rationnelle sur C est en effet de la forme $\phi(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ avec F ne divisant pas Q).

Si la courbe est unicursale, le corps des fonctions rationnelles est un sous corps de $\mathbb{C}(t)$, corps des fractions rationnelles : en effet, $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \longmapsto \frac{P(x(t),y(t))}{Q(x(t),y(t))}$ est un homorphisme de corps, (si $x(t),y(t)$ est une représentation paramétrique de C.) Appelons L ce corps $\boxed{\mathbb{C} \subset L \subset \mathbb{C}(t)}$.

On utilise alors <u>le théorème de Luröth</u>.

Si L est un corps différent de K, avec : $K \subset L \subset K(t)$, alors il existe θ dans L tel que $L = K(\theta)$ (corps des fractions rationnelle).

<u>dém</u>. Soit z une variable indépendante.

. t est algébrique sur L. En effet, si $\alpha = \frac{p(t)}{q(t)}$ est un élément de L, $\alpha q(z) - p(z) \in L[z]$ est une équation de dépendance algébrique de t sur L.

. Soit $f(z,t) = b_o(t)z^n + b_1(t)z^{n-1}+\ldots+b_n(t)$ un polynome minimal de t sur L : les $b_i(t)$ sont des polynômes premiers entre eux et $b_i(t)/b_o(t)$ est dans L.

Soit i tel que $m = \deg(b_i(t)) \geqslant \deg(b_j(H))$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ et soit

$$\theta = \frac{b_i(t)}{b_o(t)} = \frac{h(t)}{g(t)} \text{ sous forme irréductible.}$$

. Alors $\theta g(z) - h(z) = 0$ est une équation de dépendance algébrique de t sur $K(\theta)$, d'où $[K(t) : K(\theta)] \leqslant m$.

. Posons: $F(z,t) = h(z)g(t) - h(t)g(z)$. Alors $f(z,t)$ divise $F(z,t)$ car $F(t,t) = 0$:

$$\underline{f(z,t)q(z,t) = h(z)g(t) - h(t)g(z)}.$$

Le degré en t du premier membre est $m + \deg_t(q)$, celui du second est inférieur où égal à m : donc

$$\deg_t(q) = 0, \text{ soit } \underline{q(z,t) = q(z)}$$

Donc $q(z)$ divise $F(z,t)$, donc par symétrie $q(t)$ divise $F(z,t)$ donc aussi $f(z,t)$; comme les $b_i(t)$ sont premiers entre eux, q est une constante. Donc $qf(z,t) = h(z)g(t) - h(t)g(z)$, donc $n = \deg_z(f) = \deg_t(f) = m$. Or on a les inclusions $K(\theta) \subset L \subset K(t)$ et $[K(t):K(\theta)] \leqslant m = n = [K(t):L]$. Donc $K(\theta) = L$, d'où la conclusion.

<u>Démonstration de la proposition</u>

D'après le théorème de Luröth, il existe une <u>fonction rationnelle θ sur C</u>, telle que le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$ de la courbe C soit $\mathbb{C}(\theta)$. Cela détermine une représentation paramétrique propre de C : les fonctions coordonnées x et y sont en effet des fonctions rationnelles sur C, d'où :

$$x = \frac{\alpha(\theta)}{\beta(\theta)} \quad \text{et} \quad y = \frac{\gamma(\theta)}{\delta(\theta)},$$ qui est une représentation paramétrique. Elle est propre, car $\mathbb{C}(\theta) = \mathbb{C}(x,y)$, donc $\theta = u(x,y)/v(x,y)$ et par suite, sauf aux points (en nombre fini) où $v(x,y) = 0$, le paramètre θ est déterminé par (x,y).

<u>Proposition</u> : Soit C une courbe unicursale : $(x(t),y(t))$ et $(x(\theta),y(\theta))$ deux représentations paramétriques <u>propres</u>. Alors t et θ sont liées par une homographie.

<u>dém</u>. Avec les notations précédentes, on doit avoir :

$L = \mathbb{C}(t) \simeq \mathbb{C}(\theta)$. Il suffit donc de montrer que les seuls automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}(t)$ sont les homographies. Soit donc $\sigma : \mathbb{C}(t) \longrightarrow \mathbb{C}(t)$ un automorphisme, alors $\sigma(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$ et $\sigma\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right) = t$ (avec P et Q premiers entre eux) donc $t = \frac{A(P/Q)}{B(P/Q)}$ ce qui s'écrit :

$$tQ^r(b_0P^s+\ldots+b_sQ^s) = Q^s(a_0P^r+\ldots+a_rQ^r) \qquad \text{avec} \quad s = \deg B,$$

$r = \deg A$. P divise $(tb_0 - a_r)Q^{r+s}$, P est premier à Q, donc <u>P est de degré 1</u>. Si $q = \deg Q$ est supérieur à 1, on doit avoir $1 + rq + sq = rq + sq$, qui est impossible. Donc $\sigma^{-1}(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ est une homographie, σ est une <u>homographie</u>.

<u>Exemple d'application</u> :

<u>Une courbe irréductible C de degré n ayant au moins $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles ordinaires est unicursale.</u>

Une courbe de degré n dépend de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres homogènes (c'est le nombre de monômes à deux variables de degré $\leqslant n$). Les courbes de degré n forment donc un espace projectif de dimension $\frac{n(n+3)}{2}$. Choisissons $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles distincts P_i de C. Les courbes de degré $n-2$ forment donc un espace projectif de dimension $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. Une courbe de degré $n-2$ passe par les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles de C si elle vérifie un système linéaire (en ses coefficients) de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations homogènes.

Les courbes de degré $n-2$ passant par les points doubles P_i de C forment donc un sous-espace projectif de dimension supérieure ou égale à :

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-2.$$

Fixons $n-3$ points de C, distincts des points doubles. Les courbes de degré $n-2$ passant par les $n-3$ points et par les points P_i. forment donc un sous-espace projectif de dimension supérieure ou égale à $n-2-(n-3) = 1$. Si l'on se fixe un autre point

A de C, on peut trouver une courbe F, de degré n-2, passant par A : il n'y a pas d'autre point d'intersection avec C. En effet, la somme des multiplicités d'intersection de C avec F est : $n(n-2)$ et, avec les points déjà connus, est supérieure ou égale à : $2.\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-3).1 + 1.1 = n(n-2)$. Considérons maintenant un autre point B de C, B différent de A, et G une courbe de degré n-2 passant par les points doubles, les (n-3) points et B. Les points d'intersection de C et d'une courbe du faisceau s'obtiennent en éliminant y entre $\lambda F(x,y) + \mu G(x,y)$ et $H(x,y)$, ce qui donne $R(x,y,\lambda,\mu) = (\Pi(x - \alpha_i)^{e_i}).f(x,\lambda,\mu)$, où le produit correspond aux points doubles et aux (n-3) autres points. Pour $\lambda = 0$ (resp. 1), on trouve le point B, (resp. A) donc $f(x,\lambda,\mu)$ dépend effectivement de x et comme on a au plus un point d'intersection différent des précédents, pour tous (λ,μ), alors f est du premier degré en x, donc $f = a(\lambda,\mu)x + b(\lambda,\mu)$, donc $x = a/b$ est une fraction rationnelle en λ et μ, d'où une représentation paramétrique rationnelle de C.

Exemple. Une cubique ayant un point double, une quartique en ayant trois sont unicursales.

3.7. Représentation paramétrique au voisinage d'un point singulier. Branches.

3.7.1. Comme on verra, le théorème 3.7.4. et ses corollaires rendent inutile le paragraphe 3.5. que nous avons pourtant conservé car dans le cas où l'une des courbes est régulière, il fournit un procédé de calcul explicite de la multiplicité d'intersection.

Par définition, un point singulier est un point où l'on ne peut appliquer le théorème les fonctions implicites. On peut pourtant paramétrer la courbe, mais pas à l'aide d'une des coordonnées, Par exemple, au voisinage de 0 la courbe y^2-x^3 se paramètre grâce à $x = t^2$, $y = t^3$. Mais il peut arriver que l'on ait besoin de plusieurs représentations paramétriques lorsque l'on a plusieurs "branches". Par exemple, la courbe $y^2 - x^2 + x^4$ sera, au voisinage de 0, la réunion des images de $y = \pm\, x(1-x^2)^{1/2}$. On trouvera dans Walker, Algebraic Curves, une démonstration purement algébrique de ce qui suit, fondée sur le polygone de Newton. Nous avons donc choisi de traiter la question en utilisant un peu de topologie, à savoir la classification des revêtements d'un disque épointé, conséquence immédiate du fait que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $z \mapsto \exp(2\Pi i z)$, est le revêtement universel du plan privé de l'origine.

<u>Lemme 3.7.2.</u> Soit ξ un point d'une courbe plane réduite C. On choisit les axes de façon que $\xi = (0,0)$, que le point à l'infini de l'axe Oy ne soit pas sur C. Il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que $C(\rho) = \{(x,y) \in C \mid 0 < |x| < \rho\}$ soit un revêtement de degré $n = \deg(f)$ de $\{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < \rho\}$.

En effet, l'hypothèse assure que l'équation de C est $f(x,y) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$, et comme f est sans facteur multiple, le discriminant $D(x) = R(f, f'_y)$ n'est pas identiquement nul, donc est non nul pour $0 < |x| < \rho$ et tout point η de $C(\rho)$ est donc régulier sur C, la projection $\Pi(x,y) = x$ étant un isomorphisme analytique au voisinage de η. En outre, si $0 < |x| < \rho$, $\Pi^{-1}(x) \cap C$ a n éléments car f n'a pas de racine multiple. C.Q.F.D.

Comme revêtement d'un disque pointé, $C(\rho)$ possède s composantes connexes $C(\rho,1), \ldots, C(\rho,s)$ et, pour chacune d'elles il existe un entier e_i et un homéomorphisme

$$\alpha_i : \dot{D}_i \xrightarrow{\sim} C(\rho,i), \quad \dot{D}_i = \{t_i \in \mathbb{C} \mid 0 < |t_i|^{e_i} < \rho\}$$

tel que le composé $\dot{D}_i \xrightarrow{\alpha_i} C(\rho,i) \xrightarrow{\Pi} \dot{D}$, soit $t \longmapsto t^{e_i}$,

où $\dot{D} = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < \rho\}$.

Bien entendu, α_i est donné par deux fonctions $\alpha_i(t) = (t^{e_i}, \phi_i(t))$ où ϕ_i est continue, et qui satisfont $f(t^{e_i},\phi_i(t)) = 0$ pour $0 < |t|^{e_i} < \rho$. En fait, $\phi_i(t)$ <u>est analytique</u>, car au voisinage de $\alpha_i(t_0) = (x_0,y_0)$, $t_0 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites donne y comme fonction analytique de $x = t^{e_i}$.

<u>Commentaire 3.7.3.</u> Pour chaque $x \in \dot{D}$, les points de C d'abscisse x sont donc donnés comme suit. Pour chaque $i \in [1,s]$, on a e_i valeurs de t telles que $x = t^{e_i}$, à savoir les ξt_i, où t_i est l'une d'elles et où ξ parcourt les racines e_i-èmes de 1, ce qui donne e_i points qui sont les $((\xi t_i)^{e_i}, \phi_i(\xi t_i)) = (x,\phi_i(\xi t_i))$, donc au total $e_1+\ldots+e_s$ points $(x,\phi_i(\xi t_i))$, $\xi^{e_i} = 1$, donc $n = e_1+\ldots+e_s$. Toujours pour x fixé, $x \neq 0$, les racines de l'équation $f(x,y) = 0$ sont donc connues et l'on a donc dans $\mathbb{C}[y]$

$$(1) \qquad f(x,y) = \prod_{1\leq i \leq s} \; \prod_{\xi^{e_i}=1} (y - \phi_i(\xi t_i))$$

où $t_i \in \dot{D}_i$ et $t_i^{e_i} = x$. Pour chaque i, montrons que $\phi_i(t)$ a une limite quand $t \to 0$. Comme ϕ_i est analytique pour $t \neq 0$, il suffit de prouver que $\phi_i(t)$ est borné. S'il n'en était pas ainsi, on aurait une suite $t_p \in \dot{D}_i$ avec $\lim|\phi_i(t_p)| = \infty$ or on a $f(t^e,\phi_i(t)) \equiv 0$, donc aussi, en divisant par $\phi_i(t)^n$, $0 = 1 + a_1(t^e)/\phi_i(t)+\ldots+a_n(t^e)/\phi_i(t)^n$, ce qui est absurde. Montrons que les nombres $\lim_{t \to 0} \phi_i(t)$ sont exactement les ordonnées des points d'abscisse nulle de la courbe. Dans la relation (1), on fait tendre x vers 0 par valeurs réelles positives et l'on prend $t_i = \sqrt[e_i]{x}$, les deux membres sont continus et l'on a en évidence les racines de $f(0,y)$. On voit ainsi que $\phi_i(0)$ est racine multiple d'ordre e_i de $f(0,y)$. (Ne pas oublier qu'il est possible que $\phi_i(0) = \phi_j(0)$ avec $i \neq j$). Quitte à changer l'ordre des indices, on peut supposer que $\phi_i(0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et que $\phi_i(0) \neq 0$ pour $r < i \leqslant s$. On en tire que $e_1+\ldots+e_r$ est la multiplicité de la racine 0 de $f(0,y)$, c'est à dire la multiplicité d'intersection de C avec l'axe Oy, c'est à dire <u>la multiplicité de</u> C <u>au point</u> $\xi = (0,0)$ si Oy n'est pas une tangente.

Le résultat de cette analyse est clair mais un peu désagréable à énoncer. Nous nous contenterons de mettre en forme ce qui concerne les r premiers ϕ_i, ou, comme nous dirons plus loin, les branches passant par l'origine.

<u>Théorème 3.7.4.</u> Sous les hypothèses de (3.7.2) supposons que l'axe Oy ne soit pas tangent à la courbe. Il existe des entiers $e_1,\ldots,e_r$, avec $e_1+e_2+\ldots+e_r = e =$ la multiplicité de la courbe à l'origine, des nombres réels ρ et ρ' et des fonctions analytiques $\phi_i(t)$ définies pour $|t|^{e_i} < \rho$, $1 \leqslant i \leqslant r$, tels que $V = \{(x,y) \in C |\ |x| < \rho,\ |y| < \rho'\}$ soit la réunion des ensembles $\{(t^{e_i}, \phi_i(t)),\ |t|^{e_i} < \rho\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. De plus, si $(t^{e_i}, \phi_i(t)) = (\tau^{e_j}, \phi_j(\tau))$, alors ou bien $i = j$ et $t = \tau$, ou bien $t = \tau = 0$.

Comme $i \leqslant r$ signifie $\phi_i(0) = 0$ et que les ϕ_i sont continues, quitte à diminuer ρ, on pourrait supposer que $|\phi_i(t)| < \rho'$.

pour $1 \leqslant r$ et $|\phi_i(t)| > \rho'$ pour $i > r$, ce qui donne le théorème. On a donc représenté le voisinage V de l'origine dans C comme la réunion des images de r disques, dont chacun s'applique injectivement dans C, les images de deux disques distincts ne se coupant qu'à l'origine.

Corollaire 3.7.5. Soit encore C' une courbe (non nécessairement réduite ni irréductible) d'équation $g(x,y) = 0$. On a

$$\sum (C,C')_\xi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} v(g(t^{e_i}, \phi_i(t)))$$

où v désigne l'ordre du zéro au point $t = 0$, et où ξ parcourt les points communs d'abscisse nulle.

D'après (3.4.1.), $\sum (C,C')_\xi$ est la multiplicité de la racine nulle du résultant $R(f,g)$. Pour calculer ce résultant, on peut considérer f et g comme des polynômes en y à coefficients dans l'anneau A des séries entières en x. Du coup f n'est plus irréductible. En effet, si on pose, pour $1 \leqslant i \leqslant s$:

$$f_i(t,y) = \prod_{\xi^{e_i} = 1} (y - \phi_i(\xi t))$$

on obtient un polynôme en y à coefficients des séries entières en t, disons $b_\alpha(t)$. Mais on a $b_\alpha(\xi t) = b_\alpha(t)$ pour $\xi^{e_i} = 1$, donc $b_\alpha(t)$ est en fait une série entière en $t^{e_i} = x$, d'où un polynome en y à coefficients dans A, encore noté $f_i(x,y)$. La formule (3.7.3(1)) nous dit que $f(x,y) = \Pi f_i(x,y)$, donc $R(f,g) = \Pi R(f_i,g)$ dans A donc $\sum (C,C')_\xi = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} v(R(f_i,g))$.

Pour calculer $v(R(f_i,g))$, on peut considérer le morphisme d'anneau $A = \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow B = \mathbb{C}\{t\}$, $\theta(x) \longmapsto \theta(t^{e_i})$. Alors $e_i v(R(f_i,g)) = w(R(f_i,g))$, où w désigne l'ordre du zéro pour $t = 0$

de $R(f_i,g)$. Mais dans $B[y]$, le polynome $f_i(t,y)$ est produit de facteurs linéaires et l'on a donc $R(f_i(t,y)) = \prod_{\xi^{e_i}=1} g(t^{e_i},\phi_i(\xi t))$.

Le facteur $g(t^{e_i},\phi_i(\xi t))$ se déduit de $g(t^{e_i},\phi_i(t))$ par le changement de variable $t \longmapsto \xi t$ et a donc même ordre à l'origine, d'où $w(R(f_i(t)y))) = e_i\ w(g(t^{e_i},\phi_i(t)))$, ce qui donne la conclusion.

Commentaire 3.7.6. On appelle branche paramétrée passant par un point ξ du plan E une application injective $\alpha: D \longrightarrow E$, $\alpha(t) = (x(t),y(t))$, avec x et y fonctions analytiques, $\alpha(0) = \xi$ et $D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < r\}$. On s'intéresse aux germes de branches paramétrées et on autorise les changements de paramètres, $t(\tau)$ avec $t(0) = 0$, $t'(0) \neq 0$, ce qui donne une relation d'équivalence dont les classes sont appelées branches passant par ξ. On peut traduire le théorème 3.7.4. en disant que le voisinage d'un point singulier ξ d'une courbe réduite est représenté par un nombre fini de branches paramétrées. Les classes d'équivalence de celles-ci sont bien définies car deux branches paramétrées ayant même image se déduisent évidemment l'une de l'autre par un changement de paramètres bijectif, continu et analytique en dehors de l'origine, donc partout. Par ailleurs, on définit la multiplicité d'intersection d'une branche paramétrée $(x(t),y(t))$ passant par ξ et d'une courbe d'équation $g(x,y) = 0$ comme l'ordre du zéro à l'origine de $g(x(t),y(t))$ et ce nombre ne dépend évidemment que de la classe d'équivalence de la branche. En choisissant bien les axes, on déduit donc de 3.7.5., que si f est réduite alors $(f,g)_\xi$ est la somme des multiplicités d'intersection de g avec les branches de f passant par le point ξ.

§ 4. EQUATION TANGENTIELLE D'UNE COURBE PLANE.

Introduction. On considère l'espace projectif P attaché à un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et l'espace projectif dual P' attaché au dual E' de E, qui est considéré comme l'espace des droites de P. L'ensemble C' des tangentes à une courbe algébrique C de P de degré n est une courbe de degré $n(n-1)-c$ de P', où c est un terme correctif dépendant des points singuliers de C que l'on explicitera en toute généralité. Il est facile de voir que C' est birationnellement équivalente à C. En outre, on a $C = (C')'$, ce qui, par la formule du degré ci-dessus, impose (sauf pour les coniques non dégénérées) la présence de nombreux points singuliers sur C' qui, comme on s'y attend, correspondent aux tangentes d'inflexion. Comme nous ferons usage des multiplicités d'intersection, il est commode d'admettre que les courbes peuvent avoir des composantes multiples et par suite d'appeler courbe algébrique C la classe modulo multiplication par une constante non nulle d'un polynome homogène non constant F sur E, de dire que C est réduite si la décomposition $F = \Pi F_i^{e_i}$ de F en produit de facteurs irréductibles est telle que tous les e_i valent 1, que C est irréductible si $F = G^e$, $e \geqslant 1$, G irréductible et bien sûr que C est réduite et irréductible si F est irréductible. Comme on l'a vu, une courbe réduite est définie par l'ensemble des solutions dans P de l'équation $F = 0$ que l'on appelle l'ensemble des points de C. Disons que l'on note $(C,D)_\xi$ la multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques C et D de P en un point ξ et $e_\xi(C)$ la multiplicité de C au point ξ. Enfin, si ξ est un point de P (resp. P'), on note D'_ξ (resp. D_ξ) la droite de P' (resp. P) correspondante.

Définition 4.1. Soit C une courbe réduite de P, on appelle courbe polaire et on note C' l'ensemble des $\xi \in P'$ tels qu'il existe $\eta \in C$ tel que $(C,D_\xi)_\eta > e_\eta(C)$.

Donc C' est l'ensemble des tangentes à C. Si l'on choisit une conique non dégénérée Γ de P, c'est à dire une forme quadratique sur E, on peut identifier P' à P, ce qui identifie C' à une courbe de P qui n'est autre que la polaire réciproque de C par rapport à la conique Γ, d'où le nom de polaire pour désigner C'. L'équation de C' s'appelle l'équation tangentielle de C. Si C est une droite, la notion est sans intérêt. Si C est une conique non dégénérée, si H est la matrice de la forme quadratique correspondante sur E, alors C' est aussi une conique non dégénérée dont la matrice dans les coordonnées duales est H^{-1}. Pour le voir, identifier P à P' grâce à H, alors C s'identifie à C' et en faisant le changement de variables, on voit que la matrice de la forme quadratique correspondante est à C' est ${}^tH^{-1}HH^{-1} = H^{-1}$. Pour étudier C', nous allons introduire une courbe C^o qui la contient, puis définir C^1 en débarassant C^o d'un certain nombre de droites et enfin voir que $C^1 = C'$.

Proposition 4.2. Soit C une courbe algébrique réduite de P de degré $\geqslant 2$. L'ensemble C^o des $\xi \in P'$ tels qu'il existe $\eta \in C$ tel que $(C,D_\xi)_\eta \geqslant 2$ est une courbe algébrique.

Notons que C^o est la réunion de C' et des droites passant par un point singulier de C.

Choisissons des coordonnées homogènes (X,Y,T) sur P et notons (u,v,h) les coordonnées duales sur P', c'est à dire celles telles que l'équation de la droite $D_{(u,v,h)}$ de P correspondant au point (u,v,h) de P' soit $uX+vY+hT = 0$. Pour voir que C° est une courbe algébrique, il suffit de vérifier que son intersection avec chacun des ouverts $u\neq0$, $v\neq0$, $h\neq0$ est soit vide, soit une courbe algébrique du plan affine (résultat général bien simple et bien utile). Par exemple, pour $v\neq0$, choisissons des coordonnées affines (a,b) telles que la droite $D_{(a,b)}$ de P ait pour équation $Y=aX+bT$ (donc $u=a$, $v=-1$, $h=b$). Soit $D(a,b)$ le discriminant du polynome homogène à deux variables $g(X,T) = F(X,aX+bT,T)$, où F est l'équation réduite de C. Comme g est homogène de degré $\geqslant 2$, il admet un discriminant $D(a,b)$ qui est un polynome en (a,b) dont la nullité pour une paire de nombres complexes (a,b) est la condition nécessaire et suffisante pour que g soit divisible par le carré d'une forme linéaire, ce qui signifie que le point de coordonnées (a,b) appartient à C°. Il faut encore prouver que $D(a,b)$ n'est pas identiquement nul (il peut être constant si C se compose de deux droites concourantes au point $(0,1,0)$). Si $D(a,b)$ est le polynome nul, a fortiori toutes les droites d'équation $y=b$ sont tangentes à C ou passent par un point singulier de C. On pouvait choisir les axes de façon que les sommets du triangle de coordonnées ne soient pas des points singuliers de C. Alors les droites comme ci-dessus s'obtiennent en éliminant x entre $f(x,y) = F(x,y,1)$ et $f'_x(x,y)$, ou en annulant le coefficient du terme de plus haut degré en x. Pour voir qu'elles sont en nombre fini, il suffit de noter que d'une part $f(x,y)$ est sans facteur multiple et d'autre part que le degré de f par rapport à x est $\geqslant \deg(F) - 1 > 0$.

La fin de l'argument suppose seulement que le point $\xi = (1,0,0)$ n'est pas singulier sur C et décrit l'intersection de C° avec D'_ξ.

Donc :

Corollaire 4.3. Si C est sans composante multiple et si $\xi \in P$ n'est pas un point singulier de C, alors D'_ξ coupe C^o en un nombre fini de points. Si ξ est singulier sur C, alors $D'_\xi \subset C^o$.

Soit C^1 la courbe réduite obtenue en ôtant à C^o les composantes D'_ξ, où ξ parcourt l'ensemble C_s des points singuliers de C.(1) Nous verrons plus loin que $C'=C^1$, mais il est déjà clair que ces deux ensembles ne diffèrent éventuellement que par des ensembles finis : leurs points situés sur une des D'_ξ, $\xi \in C_s$, et qu'aucune composante de C^1 n'est une droite.

Remarque 4.4. Soit Γ une branche de C centrée en un point ξ, (3.7.6.) et soit un représentant de cette branche, qui est rappelons-le une application analytique injective $\gamma : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \rho\}$. On peut définir la multiplicité d'intersection $(D,\Gamma)_\xi$, où D est une courbe d'équation $g(x,y) = 0$, comme l'ordre du zéro pour $t=0$ de $g(x(t),y(t))$, car ce nombre ne dépend pas du représentant γ de Γ. En particulier, on définit la multiplicité $e(\Gamma)$ comme le minimum des $(D,\Gamma)_\xi$ lorsque D parcourt les droites passant par ξ. En outre, on note $m(\Gamma)$ la multiplicité d'intersection de la branche avec sa tangente au point ξ, qui est un entier si Γ n'est pas tracée sur une droite et l'infini sinon. De toutes façons, l'un des axes, disons oy n'est pas tangent à Γ (disons que $\xi = (0,0)$), et l'on a donc $x=at^e+a_1t^{e+1}+\dots$, avec $a \neq 0$ donc $e=e(\Gamma)$. En remplaçant le paramètre t par $t.(x/t^e)^{1/e}$, on peut faire que $x=t^e$ et en changeant y de façon que ox soit la tangente, on a alors $y=b_m y^m+b_{m+1}y^{m+1}+\dots$, $b_m \neq 0$, et $m = m(\Gamma) > e(\Gamma)$.

(1) C'est à dire la réunion des composantes de C^o qui ne sont pas les D'_ξ , $\xi \in C_s$.

On peut démontrer que le fait que γ est injective signifie que le pgcd de e et des i tels que $b_i \neq 0$ vaut 1. Nous utiliserons une autre façon de dire ceci.

Lemme 4.5. Soit $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, une courbe paramétrée par des fonctions analytiques. S'il n'existe pas de voisinage de $t=0$ dans lequel γ soit injective, alors il existe un changement de paramètres $\tau = u(t)$ et une branche paramétrée analytique injective $\delta(\theta)$ telle que, au voisinage de $t = 0$, $\gamma(t) = \delta(u(t)^f)$, avec f entier $\geqslant 2$.

On prend un changement de paramètres tel que $x = \tau^e$, $y = \sum a_i\tau^i$. Si $\gamma(\tau) = \gamma(\tau')$, alors il existe z tel que $z^e=1$ et $\tau = z\tau'$. S'il existe une infinité de couples (τ,τ'), il en existe une infinité pour une certaine valeur de z. Prenons un tel z, d'ordre f, avec f maximum. Alors $y(\tau) - y(z\tau)$ est identiquement nul par le principe des zéros isolés, donc $a_i = 0$ si f ne divise pas i, donc y est fonction de τ^f. CQFD.

Lemme 4.6. Soit $\gamma(t)$ une branche paramétrée de C centrée en un point ξ. L'application qui, à t associe la tangente à la branche au point $\gamma(t)$ est une branche paramétrée γ' de C^1, du moins si γ n'est pas tracée sur une droite. En outre, l'application γ'', qui, à t associe la tangente à γ' au point $\gamma'(t)$ n'est autre que γ. Enfin, si Γ et Γ' désignent les classes de γ et γ' on a

(1) $\quad e(\Gamma)+e(\Gamma') = m(\Gamma) = m(\Gamma'')$.

Avant la démonstration, signalons que si $\gamma(0)$ est un point d'inflexion ordinaire $(e,m) = (1,3)$, alors $\gamma'(0)$ est un point de rebroussement ordinaire $(e',m') = (2,3)$. Si $(e,m) = (1,m)$, $m > 3$, alors $\gamma'(0)$ est un point de rebroussement plus compliqué $(m-1,m)$. Si $\gamma(0)$

est un point de rebroussement, alors $\gamma'(0)$ aussi sauf si $m = e+1$. Tout ceci résulte de (1).

On peut toujours supposer que γ est la projection d'une courbe $u(t)=(X(t),Y(t),T(t))$ de l'espace vectoriel E dont est issu l'espace projectif P. Il est facile de voir que $\gamma'(t)$ est la projection de la courbe $v(t) = (YT'-TY', TX'-XT', XY'-YX')$ de l'espace vectoriel dual E' dont est issu P'. Bien sûr, il se peut que $v(t)$ s'annule pour $t=0$ (si ξ est singulier) auquel cas on ne peut pas projeter $v(0)$; mais si γ n'est pas tracée sur une droite alors $v(t)$ n'est pas identiquement nul, donc a un zéro isolé et $\gamma'(t)$ est bien la projection de $v(t)$ pour t assez petit, $t\neq 0$. Soit $h(t)$ une fonction holomorphe ayant un zéro d'ordre le minimum des ordres des composantes de $v(t)$, alors $\gamma'(t)$ est bien analytique car c'est la projection de $v(t)/h(t)$. En itérant le calcul on trouve une courbe de E, à savoir $w(t) = E(t)(X(t),Y(t),T(t))$, où $E(t) = \text{dét}\begin{pmatrix} X & Y & T \\ X' & Y' & T' \\ X'' & Y'' & T'' \end{pmatrix}$. Comme $E(t)$ n'est pas identiquement nul car $u(t)$ n'est pas tracée sur un plan passant par l'origine, on en tire que $\gamma''(t) = \gamma(t)$ pour t assez petit, $t\neq 0$, donc aussi pour $t=0$ par continuité. Comme $w(t)$ n'est pas constant, γ' n'est pas tracée sur une droite et comme elle est tracée sur C^{o} elle est donc tracée sur C^1. Mais il faut encore voir que γ' est injective dans un voisinage de $t=0$. Comme $\gamma'(t)$ n'est pas constante, le lemme 4.5 nous dit que si γ' n'est pas injective, alors il existe un changement de paramètres $\tau = u(t)$ et une courbe $\gamma^1(\tau)$ telle que $\gamma'(t) = \gamma^1(\tau^f)$. En effectuant le même changement de paramètres dans γ et compte tenu du fait que $\gamma = \gamma''$, on en tire que γ n'est pas injective. Il reste à prouver la formule (1). Pour cela, on choisit un représentant de la branche Γ de la forme $(x=t^e,\ y = \sum_{i\geqslant m} b_i t^i)$,

$m > e$, ce qui donne pour γ' en coordonnées homogènes

$u(t) = \sum_{i \geq m} (i\, a_i/e) t^{i-e}$, $v(t) = 1$, $h(t) = \sum_{i \geq m} (1-i/e) a_i t^i$ et les formules (1) sont en évidence.

Proposition 4.7. Si C est réduite et sans composante linéaire, la polaire C' de C est une courbe sans composante linéaire et s'obtient en ôtant à C^o les droites D'_ξ, où ξ parcourt l'ensemble C_s des points singuliers de C.

Avec les notations précédentes, ceci signifie que $C' = C^1$ et que les composantes linéaires de C^o sont les D'_ξ, $\xi \in C_s$. Il est immédiat que $C' \subset C^1$. En effet, un point η de C' est la tangente en un point ξ de C, il est aisé de voir que c'est aussi la tangente à une branche Γ de C centrée en ξ, donc η est le centre de la branche Γ' de C^o qui n'est pas rectiligne, donc est tracée sur C^1, donc $\eta \in C^1$. Inversement, un point η de C^1 qui n'est pas sur l'une des D'_ξ, $\xi \in C_s$, est la tangente en un point régulier de C donc est dans C'. Il reste à examiner les points (en nombre fini) de C^1 sur l'une des D_ξ. Soit η l'un d'eux. C'est le centre d'une branche δ de C^1 et la branche δ' de P satisfait à $\delta'(t) \in C$ pour $t \neq 0$, donc aussi pour $t=0$. Comme $\delta'' = \delta$ (4.6), $\eta = \delta(0)$ est la tangente au point $\delta'(0)$ donc appartient à C'. Ce raisonnement suppose que la branche δ n'est pas rectiligne ce qui résulte de (4.3).

Corollaire 4.8. La polaire de C' est C.

Evident. En fait, on a mieux. En effet, si C_r désigne l'ensemble des points réguliers de C, on a une application $\theta : C_r \longrightarrow C'$, qui, à un point régulier, associe sa tangente et qui est donnée par des fonctions rationnelles, à savoir, en coordonnées homogènes

$\theta(X,Y,T) = (F'_X, F'_Y, F'_T)$. L'image de θ est C' privée des tangentes aux points singuliers de C. En outre, on a une application analogue $\theta' : C'_r \longrightarrow C$, qui est tout aussi rationnelle et ces deux applications induisent des bijections inverses l'une de l'autre entre $C - C_s - \theta^{-1}(C'_s)$ et $C' - C'_s - \theta'^{-1}(C_s)$ d'après le lemme 4.5. On exprime ceci comme suit.

<u>Corollaire 4.8.</u> Si C n'a pas de composante linéaire, elle est birationnellement équivalente à sa polaire.

<u>Corollaire 4.9.</u> Les branches (classes de branches paramétrées) de C et C' se correspondent bijectivement.

C'est évident. Pour mieux visualiser la correspondance entre C et C', il convient d'introduire son graphe, qui est l'ensemble G formé des $(\xi,\eta) \in P \times P'$, où ξ est un point de C et η une tangente à C en ce point. On a deux projections naturelles $p : G \longrightarrow C$ et $p' : G \longrightarrow C'$, qui sont bijectives à des ensembles finis près. Bien entendu, G est une courbe de $P \times P'$ et les branches de C (resp. C') correspondent bijectivement à celles de G.

<u>Remarque 4.10.</u> Un point ξ de P' est dans C' si D_ξ est tangente à C. Ce point est singulier sur C' si D_ξ est tangente en deux points distincts, ou tangente en un seul point à plusieurs branches, ou tangente en un seul point à une seule branche régulière mais ce point est d'inflexion ou enfin tangente en un seul point à une seule branche mais celle-ci est singulière avec $m > e+1$. Preuve : formule (4.6 (1)).

<u>Proposition 4.11.</u> Si n est le degré de C (supposée réduite et sans composante linéaire), alors le degré de C' est $n(n-1) - \sum_{\xi \in C} d(\xi)$, où

$d(\xi) = (f,f'_y)_\xi$, si les axes sont choisis de façon que ξ soit à distance finie et que la parallèle à oy passant par ξ ne soit pas tangente à C au point ξ.

On coupe C' par une droite D' ne passant par aucun des points singuliers de C^o et qui ne soit pas tangente à C'. On choisit les axes de P de façon que le point correspondant à D' soit $(0,1,0)$, et que la droite $T=0$ ne soit pas tangente à C. Les points de $C^o \cap D'$ correspondent donc aux droites $x=a$ qui sont tangentes à C ou passent par un point singulier de C. Ces deux circonstances ne peuvent se produire simultanément car le point correspondant de D' serait singulier sur C^o (intersection de C' et d'une droite D_ξ, $\xi \in C_s$). En outre, l'hypothèse assure que l'équation $f(x,y)$ de C est de degré n en y, donc que ces droites se trouvent en annulant simultanément $f(x,y)$ et $f'_y(x,y)$. En appliquant le théorème de Bezout, on a

$$n(n-1) = \sum_{\xi \in C_s} (f,f'_y)_\xi + \sum_{\xi \in C_r} (f,f'_y)_\xi$$

où C_s (resp. C_r) est l'ensemble des points singuliers (resp. réguliers) de C. Puisque D' coupe C' en $\deg(C')=n'$ points distincts qui correspondent bijectivement aux verticales tangentes à C, une telle verticale ne peut être tangente en deux points car le point correspondant de C' serait singulier et pour établir le théorème, il suffit de prouver que $(f,f'_y)_\xi = 1$ si ξ est régulier et si la verticale est la tangente. Comme le point correspondant de C' est régulier, on a $m(\xi) = 2$ pour la branche régulière de C passant par ξ (4.6 (1)), autrement dit, on a une représentation paramétrique de C au voisinage de $\xi = (a,b)$: $x-a = c(y-b)^2+\dots, c\neq 0$. Or $(f,f'_y)_\xi$ est l'ordre du zéro pour $y=b$ de $g(y)=f'_y(x(y),y)$. Comme $f(x(y),y)=0$, on a $g(y) = -x'(y)f'_x(x(y),y)$ qui a un zéro simple car $f'_x(a,b)\neq 0$, d'où la conclusion. Pour être tout à fait correct, il convient de montrer que, si ξ est singulier, $(f,f'_y)_\xi$ ne dépend pas du choix des axes pourvu qu'ils satisfassent à la condition de l'énoncé (c'est clair pour la somme de ces termes). Il nous faut donc étudier les divers invariants attachés à un point singulier.

Définition 4.12. Soit ξ un point de C, on note $e(\xi)$ la multiplicité de C au point ξ, $r(\xi)$ le nombre de branches passant au point ξ, et on pose $\mu(\xi) = (f'_x,f'_y)_\xi$ et $d(\xi) = \mu(\xi)+e(\xi)-1$.

Malgré les apparences $\mu(\xi)$ ne dépend pas du choix des axes.(1) En effet, c'est la longueur du quotient de l'anneau local $O_{P,\xi}$ par l'idéal engendré par f'_x et f'_y lequel ne dépend pas du choix des axes. Il reste à voir que $d(\xi)$ est bien le nombre qui figure dans (4.11). Notons déjà que si ξ est régulier $(e,r,\mu,d) = (1,1,0,0)$.

Proposition 4.13. Si les axes sont choisis de façon que le point ξ soit à distance finie, on a $(f,f'_y)_\xi = \mu(\xi) + (f,x-a)_\xi-1$, où a est l'abscisse de ξ, et donc $(f,f'_y)_\xi = d(\xi) + \sum(m(\Gamma)-e(\Gamma))$, où la somme porte sur les branches centrées en ξ dont la tangente est parallèle à oy.

On considère une branche $(\Gamma,\xi) = (x(t),y(t))$ de f'_y centrée en ξ. Alors $(f,\Gamma)_\xi = v(f(x(t),y(t)))$, d'où, par dérivation $(f,\Gamma)_\xi = 1+v(f'_x(x(t),y(t)))+v(x'(t))$ où v désigne l'ordre du zéro pour $t=0$, car $f'_y(x(t),y(t))=0$. Donc $(f,\Gamma)_\xi = (f'_x,\Gamma)_\xi + v(x(t)-x(0))$. D'où, en faisant la somme sur les branches de f'_y passant par ξ, $(f,f'_y)_\xi = (f'_x,f'_y)_\xi + (f'_y,x-a)_\xi$, où l'on suppose que l'abscisse de x est a. D'où la conclusion car $(f,x-a)_\xi = (f'_y,x-a)_\xi+1$ comme on voit en ordonnant f par rapport à y.

(1) Voir la 9ème leçon, car il faut aussi voir que μ ne dépend pas du choix de l'équation f.

Pour calculer effectivement dans un exemple numérique les invariants (d,μ,e) qui figurent dans (4.12), on n'a pas besoin de déterminer les branches passant par ξ. On translate les axes de façon que $\xi = (0,0)$ et l'on a en évidence $e(\xi)$ et $(f,x)_\xi$. Il suffit donc de connaître $(f,f'_y)_\xi$ ou $(f'_x,f'_y)_\xi$.

Voici un procédé pour calculer une multiplicité d'intersection.

<u>Remarque 4.13.</u> On considère sur l'ensemble $N \times N$ des paires d'entiers naturels l'ordre total $(a,b) \leqslant (a',b')$ si $a+b < a'+b'$ ou si $a+b=a'+b'$ et $a \geqslant a'$. Pour tout polynome (ou série formelle...) $f(x,y) = \sum f_{a,b}x^a y^b$, on pose $\mathrm{dom}(f) = f_{a,b}x^a y^b$ où (a,b) est le plus petit tel que $f_{a,b} \neq 0$ et $\exp(f) = (a,b)$ que l'on appelle respectivement terme dominant et exposant de f. On appelle exposant d'un idéal I l'ensemble des exposants de ses éléments non nuls. Comme $\mathrm{dom}(fg)=\mathrm{dom}(f)\mathrm{dom}(g)$, il est clair que l'exposant $\exp(I)$ est une réunion de quadrants (faire un dessin). Par ailleurs, étant donnés par exemple deux polynomes f et g, il n'est pas difficile en inspectant les couples (a,b) l'un après l'autre suivant l'ordre ci-dessus de déterminer lesquels appartiennent à l'exposant de l'idéal (f,g). En outre, si f et g sont premiers entre eux, on sait a priori que l'idéal (f,g) contient un polynome ne dépendant que de x et un autre ne dépendant que de y, donc l'exposant est contenu dans un rectangle, donc on sait a priori que l'on aura déterminé l'exposant au bout d'un temps fini (refaire un dessin). Ceci dit, il est facile de démontrer que les classes dans $O_{P,\xi}/(f,g)$ des monomes $x^a y^b$ où (a,b) n'appartient pas à l'exposant de (f,g) forment une base de cet espace vectoriel complexe, donc $(f,g)_\xi$ <u>est le cardinal du complémentaire de l'exposant de l'idéal</u> (f,g) <u>dans</u> $N \times N$. Par exemple,

si $f=y^4+x^5+x^4y^2$, et si $\xi = (0,0)$, on voit tout de suite que $e=(f,x)_\xi = 4$, que les "coins" de l'exposant de (f,f'_y) sont donnés par y^3 et x^5, donc $(f,f'_y)_\xi = d=15$ et que les "coins" de l'exposant de (f'_x,f'_y) sont donnés par y^3 et x^4, donc $\mu=(f'_x,f'_y)_\xi = 12$, de plus $r=1$. Donc le degré de la polaire est au plus $6.5-15=15$. Le seul autre point singulier est $(0,1,0)$ avec $(e,d,\mu,r)=(2,4,3,2)$, donc la polaire C' a pour degré 11. Par symétrie $\sum_{\xi\in C'_s} d(\xi) = 10.11-6 = 104$, donc C' a beaucoup de points singuliers ou sinon ils sont très "compliqués", i.e. $d(\xi)$ est grand.

Nous allons maintenant donner une formule reliant n et n' (le degré et la classe de C) et ne faisant intervenir les points singuliers de C que par le nombre de branches et la multiplicité, mais il faut alors prendre en compte les points singuliers de C', donc les tangentes multiples de C.

Proposition 4.14. Si C est sans composante multiple et sans composante linéaire, de degré n et de classe n', on a

(1) $$3(n'-n) = \sum_{\eta\in C'_s} (e_\eta(C')-r_\eta(C')) - \sum_{\xi\in C_s} (e_\xi(C)-r_\xi(C)),$$

où C'_s et C_s désignent respectivement les ensembles de points singuliers de C' et C. En outre, si $\eta\in C'$ et si D est la droite de P qui lui correspond, on a

(2) $$e_\eta(C')-r_\eta(C') = \sum (m_\xi(\Gamma)-e_\xi(\Gamma)-1) = n-N - \sum_{\xi\in C\cap D} e_\xi(C),$$

où la première somme est étendue aux branches (Γ,ξ) de C tangentes à D et où N est le nombre de branches de C tangentes à D.

Avant de prouver la première formule, notons que la première égalité de (2) résulte de (4.6(1)). Pour en déduire la seconde égalité, on remarque que $n = (D,C) = \sum (D,\Gamma)_\xi$, et que $(D,\Gamma)_\xi$ vaut $m(\Gamma)$ ou $e(\Gamma)$ selon que D est tangente ou non à Γ(avec $\xi \in D$ bien sûr). Donc, il suffit d'établir (1). Pour cela, il faut considérer des formes différentielles sur C.

Formes différentielles 4.15. Tout d'abord, si $R(x,y)$ est une fonction rationnelle sur la courbe C, alors sa restriction $R(x(t),y(t))$ à une branche paramétrée est une fonction méromorphe qui admet un développement $R(x(t),y(t))=ct^e+dt^{e+1}+\dots$, où e est un entier positif ou négatif et $c\neq 0$ qui ne dépend pas du paramétrage. On pose $v_{(\Gamma,\xi)}(R) = e$. Pour ne pas oublier les points à l'infini, on écrit $R = P(x,y,1)/Q(x,y,1)$ où $P(X,Y,T)$ et $Q(X,Y,T)$ sont deux polynomes homogènes de même degré sans facteur commun et Q premier à l'équation de C. Le théorème de Bezout et le calcul de la multiplicité en termes de branches nous disent alors que

$$(1) \qquad \sum v_{(\Gamma,\xi)}(R) = 0$$

où (Γ,ξ) parcourt les branches de C, (la somme est finie a priori). De même, une forme différentielle rationnelle $\omega=R(x,y)dx$ sur le plan induit pour chaque branche (Γ,ξ) de C une forme différentielle méromorphe $R(x(t),y(t))x'(t)dt = (ct^e+dt^{e+1}+\dots)dt$ et l'on pose $v_{(\Gamma,\xi)}(\omega) = e$. Comme deux telles formes différentielles se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une fonction rationnelle, la formule (1) prouve que la somme ci-dessous (étendue à toutes les branches, mais qui est finie) ne dépend pas de ω :

$$(2) \qquad \chi(C) = \sum_{(\Gamma,\xi)} v_{(\Gamma,\xi)}(\omega).$$

Ici se place une merveille : les branches de C et C' se correspondent bijectivement et se déduisent les unes des autres par des formules rationnelles donc

(3) $\chi(C) = \chi(C')$.

La formule (4.14(1)) résulte immédiatement de (3) et de

$$(4) \qquad \chi(C) = n'-2n + \sum_{\xi \in C_s} (e_\xi(C)-r_\xi(C)).$$

Pour établir (4), on prend tout simplement $\omega = dx$, après avoir choisi les coordonnées (X,Y,T) de façon que la droite $T=0$ coupe C en n points distincts (nécessairement réguliers) dont aucun n'est $(0,1,0)$ et qu'une parallèle à oy ne soit jamais tangente multiple ou d'inflexion à C ou encore tangente en un point singulier de C (bref : la droite $D_{(0,1,0)}$ de P' n'est pas tangente à C^o et ne passe pas par ses points singuliers). Pour une branche à distance finie $(\Gamma,\xi) = (x(t),y(t))$, on a $v_{(\Gamma,\xi)}(dx) = v_{(\Gamma,\xi)}(x'(t))$ et ceci vaut $m_\xi(\Gamma)-1$ ou $e_\xi(\Gamma)-1$ selon que la tangente à Γ est ou n'est pas parallèle à oy. Vu l'hypothèse, les points singuliers contribuent donc chacun par $e_\xi(C)-r_\xi(C)$. Comme les points à tangente parallèle à oy sont simples et ne sont pas points d'inflexion, chacun d'eux contribue pour $m_\xi(C)-1=2-1=1$ et ils sont au nombre de n'. Il reste à évaluer la contribution des points à l'infini. Puisque $(0,1,0)$ n'est pas sur la courbe, on peut prendre des coordonnées affines $u=1/x$, $v=y/x$, donc $dx = -du/u^2$. Comme il y a n points, $T = 0$ n'est jamais tangente à la courbe donc la contribution de chacun des points est -2, d'où la formule.

En mettant ensemble (4), et les formules de (4.11) et (4.13), on trouve

$$(5) \qquad \chi(C) = n(n-3) - \sum_{\xi \in C_s} (\mu(\xi)+r(\xi)-1).$$

Terminons en disant que $\chi(C)$ s'appelle <u>la caractéristique d'Euler-Poincaré</u> de C, que deux courbes birationnellement équivalentes ont même caractéristique (évident et utilisé pour C et sa polaire), que $\chi(C) = -2$ pour une courbe unicursale [ceci est clair, car C est birationnellement équivalente à la droite $y=0$, prendre $\omega=dx$ et ne pas oublier le point à l'infini; la réciproque est vraie!] et enfin que l'on a toujours $\chi(C) = 2g-2$, où g est un entier naturel appelé le genre de la courbe.

Il y aurait un chapitre à rajouter sur la manière de calculer les invariants locaux introduits en termes de transformations quadratiques ou de transformations de Crémona destinées à désingulariser C, mais nous finirons ici.

§ 5. THEOREME DES ZEROS. THEOREME PRINCIPAL DE L'ELIMINATION.

Lemme 5.1.

Soit k un corps infini et soit m un idéal maximal de $S = k[X_1,\dots,X_n]$. Il existe un changement de variables linéaire homogène $X_i \to Y_i$ tel que $m \cap k[Y_2,\dots,Y_n]$ soit maximal dans $R = k[Y_2,\dots,Y_n]$.

Démonstration

Soit $f \in m$. Ecrivons : $f = F + \dots$, où F est le polynôme formé des termes de plus haut degré de f, et soit ν = degré F. Comme F n'est pas constant, car m est maximal, et que k est infini, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tous nuls dans k, tels que $F(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq 0$. Supposons par exemple que $\alpha_1 \neq 0$, et effectuons le changement de variables

$$X_1 = \alpha_1 Y_1$$

$$X_i = \alpha_i Y_1 + Y_i \qquad i \geqslant 2$$

On a : $f(\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_1 + Y_2, \ldots, \alpha_n Y_1 + Y_n) = F(\underline{\alpha}) Y_1^{\nu} + \ldots$ Soit $p = m \cap R$. Montrons que p est maximal. Si $a \in R/p$, il admet un inverse a^{-1} dans S/m. La suite des sous-modules de S/m

$$R/p, R/p\,[a^{-1}],\ R/p\,[a^{-1}, a^{-2}], \ldots$$

est stationnaire car R/p est un anneau noethérien et S/m est de type fini et engendré sur R/p par $1, Y_1, Y_1^2, \ldots, Y_1^{\nu-1}$.
Dès lors, il existe m tel que

$$a^{-m} = b_1 a^{-(m-1)} + \ldots + b_{m-1} a^{-1} + b_m \quad \text{avec} \quad b_i \in R/p.$$

On en déduit $a^{-1} = b_1 + b_2 a + \ldots + b_m a^{m-1} \in R/p$, ce qui montre que R/p est un corps et que p est maximal.

Lemme 5.2.

Si k est algébriquement clos et si m est un idéal maximal de $S = k[X_1, \ldots, X_n]$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ tels que $m = (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n)$.

Démonstration

Démontrons la thèse par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est trivial. Reprenons les notations du lemme précédent. L'hypothèse de récurrence entraîne $p = \langle Y_2 - \beta_2, \ldots, Y_n - \beta_n \rangle$. Dès lors, $R/p \simeq k$ et, puisque S/m est une extension algébrique de R/p, on a $R/p = S/m$. Soit α_i la classe résiduelle de X_i dans $S/m = k$. On voit immédiatement que $m = \langle X_i - \alpha_i \rangle$.

Théorème (Nullstellensatz) 5.3.

Soit k un corps algébriquement clos. Si $f_1,\ldots,f_m \in k[X_1,\ldots,X_n]$ n'ont pas de zéro commun, alors il existe $g_1,\ldots,g_m \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tels que $1 = \sum_i g_i f_i$.

Démonstration.

Soit a l'idéal engendré par les f_i. Si $a \neq k[\underline{X}]$, prenons m maximal contenant a. Comme $m = \langle X_i - \alpha_i \rangle$ et $f_i \in m$, on a

$$f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0 \quad \text{pour tout } i$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Corollaire 5.4.

Soit a un idéal de $k[\underline{X}]$, où k est algébriquement clos. Notons $V(a) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in k^n \mid g(\underline{x}) = 0 \quad \forall g \in a\}$. Si $f \in k[\underline{X}]$ s'annule en tout point de $V(a)$, alors une puissance de f appartient à a.

Démonstration

On peut supposer a engendré par $f_1,\ldots,f_m$; notons b l'idéal de $k[X_1,\ldots,X_n,T]$ engendré par $f_1,\ldots,f_m, 1-fT$. Il est clair que $V(b) = \emptyset$, car si $(x_1,\ldots,x_n,t) \in V(b)$, alors $(x_1,\ldots,x_n) \in V(a)$ et donc $(1-fT)(x_1,\ldots,x_n,t) = 1$ ce qui est absurde. Le Nullstellensatz nous permet d'écrire

$$1 = \sum_i g_i(\underline{X},T) f_i(\underline{X}) + g(\underline{X},T)(1-fT).$$

En posant $T = \frac{1}{f}$, on trouve

$$f^N = \sum_i h_i(\underline{X}) f_i(\underline{X})$$

ce qu'il fallait démontrer.

Définition 5.5.

Soit $S = k[X_0,\ldots,X_n]$. Notons S_m l'ensemble des polynômes homogènes de degré m de S, et si a est un idéal de S, notons $a_m = a \cap S_m$. L'idéal a est dit <u>homogène</u> si les composantes homogènes de tout $f \in a$ appartiennent à a, ce qui signifie que $a = \oplus\, a_m$.

Corollaire 5.6.

Soit k un corps algébriquement clos. Soit a un idéal homogène de $S = k[X_0,\dots,X_n]$ différent de S. Si a n'a pas de zéro non trivial, alors

(i) il existe N tel que $X_i^N \in a$ pour tout i

(ii) il existe M tel que $a_m = S_m$ pour tout $m \geqslant M$.

Démonstration

L'énoncé (i) résulte immédiatement du corollaire (5.4). Pour démontrer (ii), prenons $M = (n+1)N$. Si $P = X_o^{\nu_o} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$ appartient à S_m, avec $m \geqslant M$, il existe i tel que $\nu_i \geqslant N$, donc X_i^N divise P. En appliquant (i),on déduit $P \in a$ et $a_m = S_m$.

Théorème principal de l'élimination 5.7.

Soit A un anneau et a l'idéal de $S = A[X_o,\dots,X_n]$ engendré par les polynômes homogènes F_α.

Posons : $R = \{g \in A \mid \text{il existe } N \text{ tel que } gX_i^N = \sum_\alpha \lambda_\alpha F_\alpha \text{ pour tout } i\}$

$= \{g \in A \mid \text{il existe } M \text{ tel que } gS_m \subset a_m \text{ pour tout } m \geqslant M\}$

Dans ces conditions, on a :

(i) R est un idéal de A (appelé "résultant" de a).

Soit $\rho : A \to k$ un morphisme d'anneaux, avec k intègre.

(ii) S'il existe $0 \neq x = (x_o,\dots,x_n) \in k^{n+1}$ tel que $\rho(F_\alpha)(x) = 0$ pour tout α, alors $\rho(R) = 0$.

(iii) Si k est un corps algébriquement clos et si $\rho(R) = 0$, il existe $x = (x_o,\dots,x_n) \neq 0$ (dans k^{n+1}) tel que $\rho(F_\alpha)(x) = 0$ pour tout α.

Démonstration

La démonstration des énoncés (i) et (ii) est facile et laissée au lecteur. Le morphisme ρ se décompose canoniquement en

$$A \to A/p \to Fr(A/p) \to k$$

où $p = \mathrm{Ker}\,\rho$.

Adoptons les notations suivantes :

$$S = A[\underline{X}],\ S' = (A/p)[\underline{X}]\ ,\ S'' = Fr(A/p)[\underline{X}],\ S''' = k[\underline{X}]\ .$$

Les images de F_α dans S', S'' et S''' sont notées F'_α, F''_α et F'''_α. Si nous supposons que les F'''_α n'admettent pas de zéro non trivial, par le corollaire (5.6), il existe N tel que pour tout i

$$X_i^N = \sum_\alpha \lambda_{i\alpha}(\underline{X})F'''_\alpha \qquad \text{dans } S'''$$

avec $\lambda_{i\alpha}(\underline{X}) = \sum_B \lambda_{i\alpha B}\,\underline{X}^B$, où $\lambda_{i\alpha B} \in k$ et où B est un multi-indice. Soit e_μ, $\mu \in I$, avec $e_{\mu_o} = 1$, une base de k en tant qu'espace vectoriel sur $Fr(A/p)$. On peut écrire

$$\lambda_{i\alpha B} = \sum_\mu \lambda_{i\alpha B\mu} e_\mu, \text{ avec } \lambda_{i\alpha\, B\mu} \in Fr(A/p).$$

Comme S''' est un espace vectoriel sur $Fr(A/p)$ de base $(e_\mu\,\underline{X}^B)$ et comme $X_i^N = X_i^N e_{\mu_o}$, il suit que

$$X_i^N = \sum_\alpha \sum_B \lambda_{i\alpha B\mu_o} \underline{X}^B F'' \qquad \text{dans } S''$$

$$= \sum_\alpha \lambda''_{i\alpha}(\underline{X})F''_\alpha(\underline{X}) \quad \text{avec} \quad \lambda''_{i\alpha}(\underline{X}) \in S''.$$

En réduisant au même dénominateur les coefficients des $\lambda''_{i\alpha}$ on trouve

$a \neq 0$ dans A/p tel que

$$aX_i^N = \sum_\alpha \lambda'_{i\alpha}(\underline{X})F'_\alpha \quad \text{avec cette fois} \quad \lambda'_{i\alpha}(\underline{X}) \in S'.$$

Si $M = (n+1)N$, il en résulte que $aS'_M \subset I'_M$, où I' désigne l'idéal de S' engendré par les images des F_α.

Posons $H_M = S_M/I_M$; c'est un A-module de type fini dont on choisit des générateurs $u_1,\ldots\ldots,u_t$. On voit facilement que $aH_M \subset pH_M$. Il existe donc des $p_{ij} \in p$ tels que

$$au_i = \sum_j p_{ij}u_j \quad \text{pour tout} \quad i,$$

c'est à dire, en posant $a_{ij} = a\delta_{ij} - p_{ij}$, $\sum_j a_{ij}u_j = 0$.

Notons A la matrice des a_{ij}. En se rappelant que $\tilde{A}A = \text{dét}(A)E_t$, on voit que $\text{dét}(A)u_k = 0$ pour tout k. Ainsi, $\text{dét}(A) \in R$. Mais puisque $\text{dét}(A) = a^t$ (modulo p) et que $a \neq 0$, on a $\text{dét}(A) \notin p$, donc $\rho(\text{dét}(A)) \neq 0$ donc $\rho(R) \neq 0$. C.Q.F.D.

Interprétation 5.8. Soient k un corps algébriquement clos, $\mathbb{P}^r$ l'espace projectif sur k de dimension r et A^s l'espace affine de dimension s . On appelle ensemble algébrique de $\mathbb{P}^r \times A^s$ une partie $X \subset \mathbb{P}^r \times A^s$ telle qu'il existe des polynomes $F_\alpha(X_0,X_1,\ldots,X_r, Y_1,\ldots,Y_s)$, homogènes par rapport à $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ et tels que X soit l'ensemble des zéros communs de ces polynomes, (penser aux cas particuliers $r = 0$ ou $s = 0$). Soit $p : \mathbb{P}^r \times A^s \to A^s$ la seconde projection. L'image par p d'un ensemble algébrique X est un ensemble algébrique. Pour le voir, on prend dans le théorème (5.7) $A = k[Y_1,\ldots,Y_s]$, on considère le résultant $\mathbb{R}$ de l'idéal a de $S = A[X_0,\ldots,X_r]$ engendré par les F_α. Pour tester si un point $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \in A^s$ appartient à $p(X)$, on considère le morphisme

$\rho : A \to k$, $\rho(f) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ et on applique (5.7) qui nous dit que $p(X)$ est l'ensemble des zéros communs des polynomes qui appartiennent à $\mathbb{R}$. L'énoncé est <u>faux</u> si on remplace $\mathbb{P}^r$ par A^r : projetter une hyperbole parallèlement à une asymptote.

3ème leçon

Calcul de multiplicité d'intersection

Fin du théorème de Bezout et calcul de la multiplicité d'intersection en termes du résultant, p. 18 à 23. En outre, le lemme 3 a donné l'occasion des considérations que voici qui seront utiles plus tard.

Série de Hilbert-Samuel.

Soit $S = k[X_1,\dots,X_r]$, l'algèbre des polynomes à r indéterminées sur un corps k. On a $S = \bigoplus S_n$, où S_n est le sous-espace vectoriel des polynomes homogènes de degré n. Un S-module gradué est un S-module E muni en outre d'une décomposition en somme directe de k-espaces vectoriels $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ satisfaisant à $S_pE_q \subset E_{p+q}$. Un morphisme de S-modules $f:E \to F$ est homogène de degré d si $f(E_n) \subset F_{n+d}$. Considérons le S-module gradué $E(d)$ défini par $E(d)_n = E_{n+d}$, alors le même morphisme $f:E(-d) \to F$ est homogène de degré 0. Si E est de type fini comme S-module, les E_n sont des K-espaces vectoriels de rang fini et l'on peut définir la série formelle $H(E) = \sum \mathrm{rg}\,(E_n)T^n$. On a

(1) Si $0 \to E \to F \to G \to 0$ est une suite exacte de morphismes de S-modules gradués, on a $H(E)+H(G) = H(F)$.

(2) $H(E(-d)) = T^dH(E)$

(3) $H(S) = 1/(1-T)^r$

(4) $H(E) = P(T)/(1-T)^d$, avec $0 \leq d \leq r$ et $P(1) > 0$ (si $E \neq 0$), où P est un polynome à coefficients entiers.

Preuve. (1) et (2) sont évidents. On prouve (3) par récurrence sur r en considérant la suite exacte $0 \to S(-1) \xrightarrow{u} S \to S' \to 0$, où $u(f) = X_rf$ et où $S' = k[X_1,\dots,X_{r-1}]$, qui donne $TH(S) - H(S)+H(S') = 0$, d'où $H(S)=H(S')/(1-T)$. Pour prouver (4), on considère le morphisme homogène de degré 0 $u:E(-1) \to E$, $u(f) = X_rf$, dont le noyau K et le conoyau Q sont des S'-modules. On a $(1-T)H(E) = H(Q)-H(K)$, d'où, par récurrence sur r, la formule $H(E) = G(T)/(1-T)^r$, où G est un polynome à coefficients entiers. En divisant G par $(1-T)$ autant de fois que possible, on trouve $H(E) = P(T)/(1-T)^d$, avec $0 \leq d \leq r$ et $P(1) \neq 0$. Il reste à voir que $P(1) > 0$ (sauf si $E=0$) . Pour cela on note que le coefficient de T^n dans $1/(1-T)^i$ est $\binom{n+i-1}{i-1}$ qui est équivalent à $n^{i-1}/(i-1)!$. Donc $\operatorname{rang}(E_n) \sim P(1)n^{d-1}/(d-1)!$, ce qui prouve que $P(1) > 0$ sauf peut-être si $E_n = 0$ pour n assez grand. Dans ce cas, $H(E)$ est évidemment un polynome et l'on a clairement $P(1) = \sum \operatorname{rg}(E_n) > 0$, sauf si $E = 0$.

Exposant d'un idéal (cf. P. 48)

Soit $S = k[X_1,\ldots,X_n]$. On range les monomes suivant l'ordre total suivant. $X^A < X^B$ si $|A| < |B|$, ou si $|A| = |B|$ et il existe $p \in [1,n]$ tel que $A_i = B_i$ pour $i < p$ et $A_p > B_p$. Par exemple, à deux variables, les premiers monomes sont $1,x,y,x^2,xy,y^2,x^3,x^2y,\ldots$, à trois variables ce sont $1,x,y,z,x^2,xy,xz,y^2,yz,z^2,x^3,\ldots$ Tout polynome non nul $f = \sum f_A X^A$ a donc un terme dominant, $\operatorname{dom}(f) = f_B X^B$, défini par $f_B \neq 0$ et $f_A = 0$ si $X^A < X^B$, et un exposant qui est le multi-indice $B = \exp(f)$.

EXERCICE :

Calculer le terme dominant de la i-ème fonction symétrique élémentaire $s_i(X_1,\ldots,X_n)$. Montrer que si f est un polynome symétrique et si $B=\exp(f)$, alors on a nécessairement $B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_n$. En déduire le théorème des fonctions symétriques. Est-il valable si k n'est pas un corps?

lemme 1 . Soit I un idéal de S et soit $I_o = \{h \in S$ il existe $s \in S$, $sh \in I$, $s(0) \neq 0\}$. Alors $\exp(I) = \exp(I_o)$, et $I_o = \operatorname{Ker}(S \to (S/I)_M)$, où M est l'idéal maximal $M = (X_1,\ldots,X_n)$. Ici, k est un corps.

Bien entendu, l'exposant d'un idéal I est l'ensemble des exposants de ses éléments non nuls. Le lemme résulte de $\exp(sh) = \exp(s)+\exp(h)$, (car k est un corps), et $\exp(s) = 0$ signifie que $s(0) \neq 0$. La seconde assertion résulte de la définition du localisé $(S/I)_M$.

lemme 2. Soit I un idéal de $S = k\left[X_1,\ldots,X_n\right]$. On suppose que S/I est de longueur finie. Alors le complémentaire de $\exp(I)$ dans $\mathbb{N}^n$ est fini et les classes dans $(S/I)_M$ des X^A , $A \notin \exp(I)$, forment une base de cet espace vectoriel sur k .

Si S/I est de longueur finie, le morphisme $S \longrightarrow (S/I)_M$ est surjectif, donc en vertu du lemme précédent, on a $S/I_o \xrightarrow{\sim} (S/I)_M$. Si l'on a une relation linéaire $\sum_{A \notin \exp(I_o)} f_A X^A = 0$ dans S/I_o , cela signifie que le membre de gauche appartient à I_o , donc son exposant est dans $\exp(I_o)$, ce qui est impossible. Donc le complémentaire de $\exp(I_o)$ est fini puisque $(S/I)_M$ est de rang fini sur k .

Il reste à prouver que, pour tout $f \in S$, la classe de f modulo I_o est combinaison linéaire des X^A , $A \notin E = \exp(I)$. On procède par recurrence descendante sur $\mathrm{dom}(f)$ et l'on commence donc à prouver que tout X^A assez grand est dans I_o . Il suffit de le faire pour X^A de la forme X_i^k, $1 \leq i \leq n$. Or les X_i^k sont en nombre infini, donc on a une relation $X_i^a + u_1 X_i^{a+1} + \ldots + u_m X_i^{a+m} \in I_o$, ce qui s'écrit $X_i^a(1+u_1X_i+\ldots+u_mX_i^m) \in I_o$, donc $X_i^a \in I_o$ par définition de I_o . Soit alors $f \in S$, avec $\mathrm{dom}(f) = f_A X^A$. Si $A \notin E$ on applique l'hypothèse de récurrence à $f - f_A X^A$. Si $A \in E$, il existe $g \in I_o$ avec $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{dom}(f)$ et on applique l'hypothèse de recurrence à $f-g$.

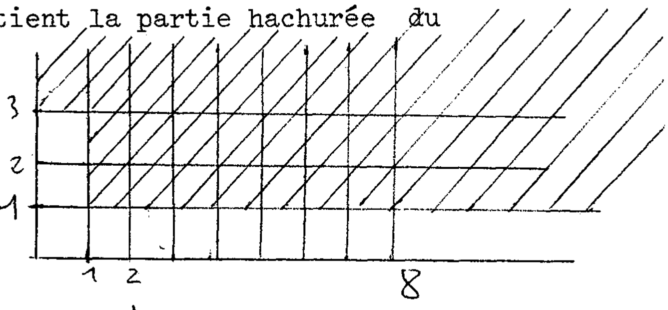
Remarque 3.

Soit $f \in S$ avec $\mathrm{dom}(f) = X^A$ et soit X^B un monome. Si $g \in S$, on peut en procédant de proche en proche normaliser g par rapport à f jusqu'à X^B , c'est-à-dire écrire $g = uf + f'$, où le développement de f' ne contient plus aucun monome qui soit multiple de X^A et $< X^B$. En procédant ainsi, on peut modifier les générateurs d'un idéal de manière à mettre en évidence son exposant. Nous nous contenterons d'un exemple. C'est un excellent exercice, au moins en dimension 2 , de chercher un algorithme permettant d'aboutir à coup sûr. Cette technique a été utilisée par

Hironaka, Grauert et d'autres dans des articles récents.

Exemple 4.

Soit à calculer la multiplicité d'intersection à l'origine des courbes $f = y^3+x^4y+x^7$ et $g = xy-(x^2+y^2)^2$. Il est clair que si $E = \exp(I)$ avec $I = (f,g)$, alors E contient la partie hachurée du dessin ci-contre. On peut donc, de proche en proche, débarrasser tout polynome de ses monomes qui sont dans la partie hachurée.



Ainsi, pour g , on pose

$g_1 = g +2xyg = xy-x^4-y^4-2xy(x^2+y^2)^2$, $g_2=g_1+yf=xy-x^4+2x^5y+\ldots$

$f_1 = f-x^3g_2 = y^3+2x^7-2x^8y+\ldots$

Pour déterminer E , il suffit de connaître les af_1+bg_2 dont le terme dominant n'est pas dans la partie hachurée. Pour cela, il faut déjà que $y^3\mathrm{dom}(a)+xy\mathrm{dom}(b)=0$, ce qui incite à considérer $h =xf_1-y^2g =-x^4y^2+2x^8+\ldots$ puis $h-x^3yg_2=2x^8+\ldots$, donc $(8,0)\in E$. Il reste à voir que E est la partie E' obtenue en ajoutant à la partie hachurée les $(n,0)$ avec $n\geqslant 8$. On a vu qu'il suffit d'examiner les combinaisons linéaires af_1+bg_2 avec $\exp(a)\geqslant(1,0)$ et $\exp(b)\geqslant(0,2)$. Or, pour une telle combinaison linéaire, <u>tous</u> les monomes de af_1 et tous ceux de bg_2 sont dans la partie E' , donc a fortiori leur exposant. La multiplicité d'intersection est donc 10 .

EXERCICE

Combien trouve-t'on si l'on remplace f par $y^3+x^4y-x^7$?

Proposition

Si f est régulière à l'origine et si l'on a une représentation paramétrique de la classe C^{∞}, $(x(t),y(t))$ de la courbe $f=0$ au voisinage de 0 , alors $(f,g)_0$ est l'ordre du zéro de $g(x(t),y(t))$.

Il suffit de prouver que, pour une représentation paramétrique de classe C^{∞} , $g(x(t),y(t))$ a un ordre à l'origine pour que cet ordre soit indépendant de la représentation choisie. On peut supposer que l'axe ox est tangent à $f=0$, ce qui donne $f = y + f'(x,y)$, où f' a un zéro d'ordre 2 , ce qui permet de trouver une représentation paramétrique analytique $y=u(x)$. En outre l'exposant de l'idéal (f,g) contient tous les monomes divisibles par y et donc $(f,g)_0 = m$ est le plus petit entier tel qu'il existe $h \in I$ avec $\mathrm{dom}(h) = ax^m$, $a \neq 0$. Comme $h=rf+sg$, on a $h(x,u(x))= a(x,u(x))f(x,u(x))+s(x,u(x))\, g(x,u(x))=s(x,u(x))\, g(x,u(x))$. Si l'on pose p = ordre du zéro de $g(x,u(x))$, on en tire que $m \geqslant p$, car l'ordre du zéro de $u(x)$ est au moins 2 , donc celui de $h(x,u(x))$ est m. Pour prouver que $m \leqslant p$, on considère l'application linéaire $S \longrightarrow S$ qui, à $h(x,y)$, associe $h^{(1)}=h(x,y-f(x,y))=h(x,f'(x,y))$. Elle possède les propriétés suivantes (1) $h-h^{(1)} \in I$, (2) $h(x,u(x))=h^{(1)}(x,u(x))$ (3) si $h \in k[x]+(x,y)^N$, alors $h^{(1)} \in k[x]+(x,y)^{N+1}$. En appliquant cette opération au moins $(p+1)$ fois à g , on trouve un $g' \in (f,g)$, avec $g'(x,y) = q(x)+(x,y)^{p+1}$ et $g'(x,u(x))=g(x,u(x))$, donc $\mathrm{dom}(g')=\mathrm{dom}(q)=ax^p$. Donc $p \geqslant m$.

4ème le.

Noeud défini par une branche de courbe plane

On a d'abord traité des branches d'une courbe plane, p.32 à 37, en traitant d'abord quelques exemples : (a) y^2-x^3 qui se paramètre par $x=t^2$, $y=t^3$ (b) $xy-(x^2+y^2)^2$ qui a deux branches régulières à tangentes distinctes passant par l'origine (c) $y^2+x^5y+x^4$ qui a deux branches régulières tangentes paramétrées par $y=-x^5/2 \pm ix^2(1-x^6/4)^{1/2}$.

Noeud défini par une branche de courbe plane.

Classiquement, pour étudier une singularité isolée d'hypersurface à l'origine, $C \subset \underline{\underline{C}}^n$, on coupe C par une petite sphère centrée à l'origine, ce qui donne une variété réelle de codimension 2 de S^{2n-1} . Si $n=2$, alors C est l'union des images d'un nombre fini de branches C_i et donc $C \cap S^3$ est l'union disjointe des $C_i \cap S^3$, que l'on désire décrire. Nous adopterons un point de vue légèrement différent mais équivalent, qui consiste à couper par $U_e \times \underline{\underline{C}}$ avec

$$U_e = \{ z \in \underline{\underline{C}} \ , |z| = e \} .$$

Nous ne ferons pas le passage entre ces deux points de vue, mais indiquons que si e est assez petit, alors $C \cap (U_e \times \underline{\underline{C}})$ tombe dans $U_e \times \underline{\underline{C}}'$, avec $\underline{\underline{C}}' = \{z \in \underline{\underline{C}} \ , \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Or on peut identifier $U_e \times \underline{\underline{C}}'$ avec $\underline{\underline{R}}^3$ privé de "l'axe vertical" grâce à $m : U_e \times \underline{\underline{C}}' \longrightarrow \underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{R}} = R^3$, $m(t,u+iv) = (t(1+u),v)$, c'est-à-dire les coordonnées cylindriques. Par ailleurs tout noeud de la sphère évite un point, ce qui permet de le considérer comme un noeud de $\underline{\underline{R}}^3$, lequel à son tour évite une droite, ce qui permet de le considérer comme un noeud de $\underline{\underline{U}} \times \underline{\underline{C}}'$ et de comparer les deux points de vue.

Définition

Un noeud d'une variété V est un plongement $\gamma : U_e \longrightarrow V$.

Par exemple, si l'on prend comme modèle du tore $U_r \times U_s$ plongé dans $U_r \times \underline{\underline{C}}$ de façon naturelle, donc dans $\underline{\underline{R}}^3$ grâce à m , si r est assez petit (c'est le plongement usuel !), on a un noeud torique

.../...

$$n_{p,q}:U_e \longrightarrow U_r\times U_s \quad , \quad n_{p,q}(t)=(t^p,t^q) \quad , \quad \text{si } (p,q)=1 \text{ et } r=e^p, s=e^q \ .$$

En effet, pour que $n_{p,q}(t)=n_{p,q}(t')$, il faut et il suffit que $t=at'$, avec $a^p=a^q=1$ ce qui équivaut à $a^{(p,q)}=1$.

Nous rencontrerons plutôt le noeud

(1) $$n:U_e \longrightarrow U_r\times\underline{\underline{C}} \quad , \quad n(t) = (t^p,u(t)) \ , \ r = e^p \ ,$$

où $u(t)$ est une série entière convergeant au voisinage de $t=0$ et telle que $u(t) = at^q+\ldots$, avec $a\neq 0$ et $(p,q)=1$. Nous allons voir qu'on peut déformer l'espace ambiant $U_r\times\underline{\underline{C}}$ sans toucher à $U_r\times\{0\}$, de façon à déformer n en le noeud $n_{p,q}$. Bien entendu, on suppose que e est très petit, ce qui fait que $u(t)$ est très voisin de at^q et que si l'on examine les points du noeud situés dans le plan complexe $\{x\}\times\underline{\underline{C}}$ avec x fixé dans U_r , on trouve p points très voisins des ab^qt^q , où t est une des valeurs avec $t^p=x$ et où b parcourt les racines p-ièmes de l'unité. D'où un polygone à p cotés pour chaque valeur de x . La déformation à appliquer consiste à amener ce polygone sur le cercle U_r par une déformation radiale de l'espace. Les vérifications sont élémentaires et fastidieuses. On peut aussi considérer l'intérieur de ce polygone; en prenant la réunion pour x variable dans U_e , on trouve un <u>voisinage tubulaire du noeud trivial</u> $U_e\times\{0\}$ <u>sur le bord duquel est tracé le noeud</u> n .

Considérons maintenant un autre noeud du même type

(2) $$m:U_r \longrightarrow U_p\times\underline{\underline{C}} \quad , \quad m(t) = (t^{p'},v(t)) \ , \ v(t)=bt^{q'}+\ldots \ , \ p=r^{p'} .$$

Bien entendu, l'application m se prolonge en

(3) $$\overline{m}:U_r\times\underline{\underline{C}} \longrightarrow U_p\times\underline{\underline{C}} \quad , \quad \overline{m}(t,z) = (t^{p'},v(t)+z) \ ,$$

dont il est aisé de voir que c'est un plongement au voisinage de $U_r\times\{0\}$, disons pour $|z| < |b|\ r^{q'}/2$; en particulier, l'image du voisinage tubulaire introduit plus haut est un voisinage tubulaire de l'image de m et le noeud obtenu en composant $\overline{m}$ et n

(4) $$m{*}n = \overline{m}\circ n \quad , \quad m{*}n(t) = (t^{pp'},v(t^p)+u(t))$$

est donc obtenu <u>en traçant le noeud</u> n <u>sur le bord d'un voisinage tubulaire du noeud</u> m .

On notera que dans cette opération de fabrication de $m*n$ à partir de m et n, on n'avait pas à supposer que m soit de la forme simple (1), c'est-à-dire $(p',q')=1$, mais simplement que c'est un noeud pour que le composé en soit un. En langage imagé, on peut dire que $m*n$ <u>s'obtient en enroulant le noeud torique</u> n <u>autour de</u> m.

<u>Théorème</u>

Soit $x=(t^h,u(t))$ une branche de courbe plane paramétrée. Il existe des noeuds $N_0 = (t,u_0(t))$, $N_1=(t^{p_1},u_1(t)),\ldots,N_g=(t^{p_g},u_g(t))$, avec $\mathrm{ord}(u_i(t)) = q_i$, $n = p_1p_2\ldots p_g$, et $(p_i,q_i) = 1$ pour $1\leq i\leq g$, tels que le noeud défini par la branche soit $N_0*N_1*\ldots*N_g$.

On observera que N_0 est un noeud trivial et que cela reste un noeud si $u_0 = 0$. La première remarque est que l'on peut écrire $u(t)=u_0(t^n)+v_1(t)$, où les termes non nuls de la série v_1 ont tous un exposant non multiple de n. On a d'ailleurs une formule explicite : $u_0(t^n)=\frac{1}{n}\sum_{a^n=1} u(at)$, comme le montrent les formules de Newton pour l'équation $a^n-1=0$. D'ailleurs, pour x fixé, on a n solutions de $x=t^n$ et la moyenne des valeurs des $u(t)$ est précisément $u_0(x)=u_0(t^n)$. Donc $v_1(t)$ décrit comment ces valeurs tournent autour de la moyenne. Mais oublions ce commentaire et posons $\beta_1 = \mathrm{ord}(v_1(t))$, $d_1=(n,\beta_1)$, ce qui permet de poser $n=p_1d_1$ et $\beta_1=q_1d_1$ avec évidemment $(p_1,q_1) = 1$. En répétant l'opération précédente avec $(t^{d_1},v_1(t))$, on trouve que $v_1(t)=u_1(t^{d_1})+v_2(t)$. De même, on pose $\beta_2 = \mathrm{ord}(v_2(t))$, $d_2=(d_1,\beta_2)$, $n=p_1p_2d_2$, $\beta_2=d_2q_2$. En procédant par récurrence, on sait que d_{i+1} divise d_i donc que le procédé s'arrête pour un certain d_g. Je dis que $d_g=1$. En effet, autrement, u serait une fonction de t^{d_g}, donc le noeud serait de la forme $(t^n,u(t^{d_g}))$ qui n'est pas une application injective car d_g divise n.

En conclusion, on a

(1) $$u(t) =u_0(t^n)+u_1(t^{d_1})+u_2(t^{d_2})+\ldots +u_g(t)$$

(2) $\quad \mathrm{ord}(u_i(t)) = q_i$, $\mathrm{ord}(u_i(t^{d_i})) = q_i d_i = \beta_i$, $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_g$

(3) $\quad d_i = p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g$ et $n = p_1 p_2 \cdots p_g$.

Il suffit de poser $N_i = (t^{p_i}, u_i(t))$, pour vérifier que

(4) $\quad (t^n, u(t)) = (t, u_0(t)) * (t^{p_1}, u_1(t)) * \ldots\ldots * (t^{p_g}, u_g(t))$

et prouver le théorème. Les paires d'entiers premiers entre eux s'appellent <u>les paires de Puiseux</u> de la branche courbe.

On remarquera que si l'on ne s'intéresse qu'à la suite ordonnée des paires (p_i, q_i) , on est sûr de la découvrir en un nombre fini de pas et elle se détermine à partir de la suite des β_i . On écrit $u = \sum u_k t^k$, on prend pour β_1 le premier k avec u_k non nul et $n \nmid k$, on pose $d_1 = (n, \beta_1)$, on prend pour β_2 le premier k avec $u_k \neq 0$ et $d_1 \nmid k$, on pose $d_2 = (d_1, \beta_2)$ et on recommence .

<u>Remarque</u>

Si Γ est une branche de courbe, quitte à permuter les coordonnées, on peut toujours supposer que $\mathrm{ord}(x(t)) \leqslant \mathrm{ord}(y(t))$, autrement dit que la tangente à la branche n'est pas l'axe oy . Ensuite, quitte à changer de paramètre, on peut toujours supposer que $x = t^n$, $y = v(t)$, avec $\mathrm{ord}(v(t)) \geqslant n$. Alors le procédé du théorème donne un noeud qui ne dépend pas des choix faits et qui est équivalent à celui qu'on obtient en coupant par une petite sphère centrée à l'origine. Nous ne prouverons pas ceci, mais donnons un exemple montrant que si l'on ne prend pas cette précaution on peut trouver deux noeuds différents. On considère la courbe $x = t^6$, $y = t^3 + t^4$. Le procédé du théorème donne $(p_1, q_1) = (2,1)$ et $(p_2, q_2) = (3,4)$ et l'on peut noter que le premier noeud est trivial. Bien entendu, la tangente est l'axe oy . En permutant les coordonnées et en prenant pour paramètre $t' = t(1+t)^{1/3}$, on trouve $x = t'^3$, $y = t'^6 - 2t'^7 + 5t'^8$, donc $(p_1, q_1) = (3,7)$.

5ème Leçon

Dimension des ensembles algébriques affines.

Comme toujours, k désigne un corps algébriquement clos.

Définition 1.

Un ensemble algébrique X est dit réductible s'il existe deux ensembles algébriques X_1 et X_2 avec $X = X_1 \cup X_2$ et $X \neq X_1$, $X \neq X_2$. Il est dit irréductible dans le cas contraire.

Proposition 1.

Pour que X soit irréductible, il faut et il suffit que l'idéal I des fonctions nulles sur X soit premier.

Si X est réductible, $X = X_1 \cup X_2$, puisque $X_i \neq X$, il existe un polynome f_i nul sur X_i et non nul sur X. Donc $f_i \notin I$, mais bien sûr $f_1 f_2 \in I$, donc I n'est pas premier. Inversement, si I n'est pas premier, on a deux polynomes f_1 et f_2 non dans I avec $f_1 f_2 \in I$, on prend $X_i = X \cap V(f_i)$.

Proposition 2.

Soit X un ensemble algébrique.

(i) Il existe une famille finie X_i, $i \in I$, de fermés irréductibles contenus dans X avec $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

(ii) Si on a une telle famille, tout fermé irréductible contenu dans X est contenu dans l'un des X_i.

(iii) Si la décomposition de (i) est irrédondante, c'est-à-dire si $X_i \subset X_j$ entraîne $i=j$, alors les X_i sont exactement les fermés irréductibles maximaux de X. On les appelle les composantes irréductibles de X.

(iv) il n'existe qu'une décomposition irrédondante.

Si X est irréductible, il n'y a rien à prouver, sinon $X = X_1 \cup X_2$, si X_1 et X_2 sont irréductibles, il n'y a rien à prouver, sinon, quitte à échanger les indices, on a $X_1 = X_1' \cup X_1''$ et ainsi de suite. Si le procédé

.../...

s'arrête, on a prouvé (i) , sinon on construit une suite infinie strictement décroissante de fermés, ce qui donne une suite strictement croissante d'idéaux, ce qui n'existe pas car l'anneau des polynomes est noethérien. Ceci prouve (i) . Pour prouver (ii) , on note que si $Y \subset X$, alors $Y = \bigcup (Y \cap X_i)$, donc si Y est irréductible, il est égal à l'un des $Y \cap X_i$. Preuve de (iii) . Les X_i sont maximaux car si $X_i \subset Y$ avec Y irréductible, alors il existe j avec $Y \subset X_j$, donc $i=j$ puisque la décomposition est irrédondante. Ce sont tous les fermés irréductibles maximaux en vertu de (ii) et enfin on ne trouve ceux-ci qu'une fois puisque $X_i = X_j$ entraîne $i=j$. Bien entendu, (iv) résulte immédiatement de (iii) et l'existence d'une décomposition irrédondante est évidente.

Corollaire.

Les idéaux premiers minimaux contenant un idéal I de l'anneau des polynomes sont en nombre fini.

Ce sont les mêmes que ceux qui contiennent la racine de I ils correspondent donc aux parties irréductibles maximales de $X=V(I)$.

Corolaire.

Les idéaux premiers minimaux d'une algèbre de type fini sur k sont en nombre fini.

C'est le même énoncé. Notons que si l'algèbre est intègre, il n'y en a qu'un, à savoir 0 .

Définition.

Soit X un ensemble algébrique de l'espace affine. On appelle dimension X la borne supérieure des entiers r tels qu'ils existe une suite

$$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots\cdots \subset X_{r-1} \subset X_r \subset X$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_r$ sont des fermés irréductibles, avec $\emptyset \neq X_0 \neq X_1 \neq \ldots \neq X_r$.

Proposition.

Si $X = \bigcup X_\alpha$ où les X_α sont fermés et en nombre fini, alors $\dim(X) = \sup(\dim(X_\alpha))$. En particulier, $\dim(X)$ est le sup des dimensions de ses composantes irréductibles.

.../...

Pour chaque α , une suite comme dans la définition relative à X_α en donne une pour X , donc $\dim(X) \geq \dim(X_\alpha)$. Inversement, une suite relative à X en donne une pour l'un des X_α , car $X_r = \bigcup (X_r \cap X_\alpha)$ donc est égal à l'un des $X_r \cap X_\alpha$ car X_r est irréductible.

Théorème.

Soit X un fermé irréductible, soit I l'idéal des polynomes nuls sur X et soit $A = k[x_1,\ldots,x_n]/I$ l'anneau des fonctions polynomes sur X . Il est intègre et son corps des fractions $k(X)=Fr(A)$ contient k . La dimension de X est égale au degré de transcendance de $k(X)/k$.

Corollaire.

La dimension au sens ci-dessus de l'espace affine de dimension n est n .

Rappel. (Voir par exemple Bourbaki, Algèbre, Chap. V).

Soit K un corps et k un sous-corps. On dit qu'une famille $(x_i, i\in I)$ d'éléments de K est algèbriquement libre sur k si le morphisme de k-algèbres $k[X_i, i\in I] \longrightarrow K$, $X_i \longmapsto x_i$, où les X_i sont des indéterminées, est injectif. S'il en est ainsi, il se prolonge en un morphisme du corps des fractions rationnelles $k(X_i, i\in I) \longrightarrow K$. Si en outre K est algèbrique sur l'image de ce dernier morphisme, alors on dit que les x_i forment une base de transcendance de K/k . S'il existe une base de transcendance finie, toutes les autres le sont aussi et ont le même nombre d'éléments. On note ce nombre $tr(K/k)$. Par définition, on a $tr(k(x_1,\ldots,x_k)/k)=n$, d'où le corollaire, et si $K' \supset K \supset k$, avec K' algèbrique sur K , alors $tr(K'/k)=tr(K/k)$. C'est tout ce que nous utiliserons.

On trouve la preuve de ce théorème dans tous les livres de géométrie algèbrique et elle repose sur la notion de dépendance intégrale et les théorèmes Cohen-Seidenberg. Pour changer un peu, nous nous appuyerons sur le lemme 1, qui sera prouvé plus tard grâce à la théorie de l'élimination. On rappelle (voir preuve du théorème des zéros) que si I est un idéal non nul, on peut toujours trouver $f\in I$, $f\neq 0$, et un changement de coordonnées linéaires homogène tel que l'on soit sous les hypothèses du lemme 1 .

.../...

Lemme 1.

Soit I un idéal de $k[x_1,\ldots,x_n]$ tel qu'il existe $f\in I$ avec $f = x_n^r + \sum_{1\leq i\leq r} a_i(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^{r-i}$. Soit $p:\underline{\underline{A}}^n \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{n-1}$,$p(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Soit $X = V(I)$. Alors $p(X)$ est un fermé à savoir $Y = V(J)$, où $J = I\cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}]$.

Lemme 2.

Sous les hypothèses du lemme 1 , si X est irréductible, il en est de même de $p(X)$. De plus, si on suppose que I est l'idéal premier des fonctions nulles sur X et que l'on pose $A=k[x_1,\ldots,x_n]/I$ et $B = k[x_1,\ldots,x_{n-1}]/J$ alors le morphisme naturel $B \longrightarrow A$ est injectif , A est un B-module de type fini, et en localisant A par rapport à $\Sigma = B-\{0\}$, on trouve que $A_\Sigma = Fr(A) =k(X)$ Donc $k(X)/k(Y)$ est une extension algèbrique finie, en particulier $tr(k(X)/k)= tr(k(Y)/k)$.

Si X est irréductible, on peut supposer que I est premier, donc aussi J , ce qui prouve que $p(X)=Y$ est irréductible. Par définition de J , dans le carré

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} k[x_1,\ldots,x_n] & \longrightarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow u \\ k[x_1,\ldots,x_{n-1}] & \longrightarrow & B \end{array}$$

le morphisme u est injectif.

et A est engendré comme B-module par les classes de 1 , $x_n,x_n^2,\ldots,x_n^{r-1}$, car on a $f=0$ dans A . Si on localise par rapport à Σ, on trouve $B_\Sigma = Fr(B)=k(Y)$ et un carré commutatif

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_\Sigma \\ u\uparrow & & \uparrow u_\Sigma \\ B & \longrightarrow & B_\Sigma = k(Y) \end{array}$$

Comme A est intègre et u injectif, alors A_Σ est intègre et comme A est un B-module de type fini, A_Σ est un module de type fini sur le corps B_Σ , donc c'est un corps, donc le morphisme naturel $A_\Sigma \longrightarrow Fr(A)$ est bijectif, donc $k(X)$ est de rang fini sur $k(Y)$, d'où la conclusion.

Lemme 3.

Sous les hypothèses du lemme 1 , si X est <u>irréductible</u> et si X' est un fermé avec $X'\subset X$. Alors $p(X') = p(X)$ implique $X' = X$ .Donc $\dim(X)\leq\dim(Y)$.

.../...

La seconde assertion résulte de la première. Pour prouver celle-ci, on peut supposer que X' est irréductible. En effet, sinon $X' = \bigcup X_i$, où les X_i sont irréductibles, le lemme 1 s'applique aux X_i car f appartient à l'idéal de chacun d'eux, donc $p(X_i)$ est fermé et $p(X) = \bigcup p(X_i)$. Comme $Y=p(X)$ est irréductible, il est égal à l'un des $p(X_i)$ donc $X_i=X$, donc $X'=X$. Si l'on note I' l'idéal de X' et $v:A \longrightarrow A' = k[x_1,\dots,x_n]/I'$ la surjection naturelle, la fonctorialité de la localisation par rapport à Σ donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] & A'_\Sigma \\
A \arrow[u, "v"] \arrow[r, "\alpha"] & A_\Sigma \arrow[u, "v_\Sigma"] \\
B \arrow[u, "u"] \arrow[r] & B_\Sigma \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 2 appliqué à X et X' , le morphisme $v_\Sigma : A_\Sigma \longrightarrow A'_\Sigma$ est un morphisme de corps, donc est injectif. Comme A est intègre et u injectif, alors $\alpha : A \longrightarrow A_\Sigma$ est injectif, donc aussi le composé $(v_\Sigma \circ u)$, donc aussi $v:A \longrightarrow A'$. Or par construction v est surjectif. Donc v est bijectif, donc $I' = I$, donc $X' = X$.

<u>Lemme 4.</u>

Sous les hypothèses du lemme 1, on a $\dim(X) = \dim(p(X))$.

Soit $Y' \subset Y$, avec Y' irréductible et $Y' \neq Y$. Alors $X' = X \cap p^{-1}(Y)$ est un fermé, donc $X' = \bigcup X'_i$, où les X'_i sont irréductibles. Bien sûr on a $Y' = p(p^{-1}(Y)) = \bigcup p(X'_i)$ donc Y' est l'un des $p(X'_i)$. En changeant de notations, on trouve donc un X' irréductible, $X' \subset X$ et $p(X') = Y'$. Bien entendu, le lemme en résulte grâce à la remarque déjà vue que le lemme 1 s'applique à tout fermé contenu dans X .

Pour prouver le théorème, on peut, tant que $X \neq \underline{\underline{A}}^n$, trouver une projection permettant d'appliquer le lemme 1, donc aussi les autres, ce qui ne change ni la dimension ni $tr(k(X)/k)$. Il reste à traiter le cas où $X = \underline{\underline{A}}^n$.

Une suite de n+1 sous-espaces affines emboités montre que $\dim(A^n) \geqslant n$.
Pour l'inégalité en sens inverse on raisonne par récurrence sur n et on considère une suite comme dans la définition
$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{r-1} \subset X_r \subset \underline{\underline{A}}^n$. Comme $\underline{\underline{A}}^n$ est irréductible, on peut supposer que $X_r = \underline{\underline{A}}^n$. En appliquant le lemme 1 à X_{r-1} , on voit que $\dim(X_{r-1}) = \dim(p(X_{r-1})) \leqslant \dim(\underline{\underline{A}}^{n-1}) = n-1$; on en tire $r-1 \leqslant n-1$ donc $\dim(\underline{\underline{A}}^n) \leqslant n$. C.Q.F.D.

Corollaire.

Si $X' \subset X$, si X est irréductible et si $\dim(X) = \dim X'$, alors $X = X'$

En fait, ce corollaire est trivial si on sait que dim X est fini.

Corollaire. Si X est fermé dans $\underline{\underline{A}}^n$ et si $\dim(X) = d$, il existe une projection linéaire $p : X \longrightarrow \underline{\underline{A}}^d$, qui est surjective, à fibres finies et telle que l'anneau des fontions régulières sur X soit un module de type fini sur celui des fonctions régulières sur $\underline{\underline{A}}^d$.

On raisonne par réccurence sur n-d . Si $n > d$, alors $X \neq \underline{\underline{A}}^n$ on peut appliquer le lemme 1 et le lemme 2 nous dit que l'anneau des fonctions régulières sur X est fini sur celui de p(X) , et on recommence tant que $n > d$.

Proposition.

Soit X (resp. Y) un fermé de $\underline{\underline{A}}^n$ (resp. $\underline{\underline{A}}^m$) . Alors $X \times Y$ est un fermé de $\underline{\underline{A}}^n \times \underline{\underline{A}}^m$. En outre, $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Choisissons des fonctions coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur $\underline{\underline{A}}^n$ et $(y_1, \dots, y_m)$ sur $\underline{\underline{A}}^m$, d'où des fonctions coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ sur $\underline{\underline{A}}^n \times \underline{\underline{A}}^m$.
Il est immédiat que $X \times Y$ est l'ensemble des zeros communs des polynomes $g(x)$ et $h(y)$, où g parcourt l'idéal de X et h celui de Y , donc $X \times Y$ est fermé. Pour la dimension, on raisonne par réccurence sur $n - \dim(X) + m - \dim(Y) = N$.
Si $N=0$, l'énoncé est trivial. Sinon, on a par exemple $X \neq \underline{\underline{A}}^n$, ce qui permet, quitte à changer de coordonnées sur $\underline{\underline{A}}^n$ de trouver un polynome f nul sur X , unitaire en x_n (cf. lemme 1) , et de considérer la projection $p : \underline{\underline{A}}^n \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{n-1}$.
On peut aussi appliquer le lemme 1 à la projection $q : \underline{\underline{A}}^n \times \underline{\underline{A}}^m \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{n-1} \times \underline{\underline{A}}^m$, $q(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = q(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m)$, à $X \times Y$ et à f considéré

.../...

comme fonction sur $\underline{\underline{A}}^n \times \underline{\underline{A}}^m$,nulle sur $X \times Y$. D'où la conclusion.

Corollaire.

Soit F un polynome non constant sur $\underline{\underline{A}}^n$. Alors $\dim(V(F))=n-1$.

En effet, on pose $X = V(F)$, on applique lemme 1 et on a nécessairement $p(X) = \underline{\underline{A}}^{n-1}$, car pour tout $y \in \underline{\underline{A}}^{n-1}$, l'ensemble des $x \in X \cap p^{-1}(y)$ s'identifie à l'ensemble des solutions du polynome unitaire non constant $x_n^r + \sum a_i(y) x_n^{r-i}$.

Exercice.

Montrer que les composantes irréductibles de $V(F)$ correspondent bijectivement aux facteurs irréductibles de F . Utiliser le fait qu'un polynome irréductible engendre un idéal premier.

Variétés projectives. Dimension

§ 1 Espace projectif.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k algèbriquement clos. L'ensemble P des sous-espaces vectoriels de V de dimension 1 est appelé l'espace projectif attaché à V et l'on a une projection naturelle $p:V^\wedge \longrightarrow P$, où $V^\wedge = V-\{0\}$, et $p(v)$ est la droite Ov. Si $V = \underline{\underline{A}}^{n+1}$, on écrira parfois $p(x_0,x_1,\dots,x_n) = [x_0,x_1,\dots,x_n]$.

Définition 1

La topologie de Zariski de P est la topologie quotient de celle de $V^\wedge$.

Par définition, un ouvert U de P est une partie telle que $p^{-1}(U)$ soit un ouvert de $V^\wedge$; bien entendu, $p^{-1}(U)$ est saturé, donc stable par homothéties de rapport non nul ; comme $V^\wedge$ est ouvert dans V, $p^{-1}(U)$ est ouvert dans V, et son complémentaire est donc un fermé de V stable par homothéties de rapport quelconque, on dir a que c'est un cône fermé de V Donc:

Lemme 2

Les fermés de P correspondent bijectivement aux cônes fermés de V.

Définition 3

Soit S l'algèbre des polynomes sur V et soit S_n le sous-espace vectoriel de ceux qui sont homogènes de degré n. Un idéal I de S est dit homogène s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(i) $I = \sum (I \cap S_n)$

(ii) si $f \in I$, ses composantes homogènes appartiennent à I

(iii) I admet un système de générateurs formé de polynomes homogènes.

Lemme 4

L'ensemble des zéros d'un idéal homogène est un cône fermé de V. L'ensemble des polynomes nuls sur un cône est un idéal homogène.

La première assertion est évidente. Pour la seconde, soit C le cône et f un polynome nul sur C. En notant f_i les composantes homogènes de C, pour tout $v \in C$, on pose $g(a) = f(av) = \sum a^i f_i(v)$. Ce polynôme en a est identiquement nul, donc ses coéfficients aussi, donc les $f_i(v)$ sont nuls sur C.

Exercice

Soit f un polynome tel que $f(av)=a^i f(v)$ pour tout $v \in V$ et tout $a \in k$. Montrer que f est homogène de degré i.

Théorème des zéros

Soit I un idéal homogène de S. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) le fermé de P défini par I est vide

(ibis) le cône fermé de V défini par I est réduit à $\{0\}$

(ii) Il existe un entier n tel que $I_n = S_n$ (donc $I_{n'} = S_{n'}$ pour $n' \geq n$)

(iii) Pour chaque $i \in [0,N]$, il existe un entier $n(i)$ tel que $X_i^{n(i)} \in I$, où $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ sont des coordonnées linéaires sur V.

On applique le théorème des zéros dans V. Pour passer de (iii) à (ii) on note que tout monome de degré $\geq (N+1)(\sup(n(i)))$ contient en facteur l'un des $X_i^{n(i)}$. On a encore une condition équivalente :

(iv) S/I est un espace vectoriel de rang fini.

Variétés linéaires projectives

Ce sont par définition les images des sous-espaces vectoriels de V, ce sont donc des fermés de P. Si $W \subset V$, alors l'image de $W\hat{}$ est, ensemblistement, l'espace projectif attaché à W. Montrer que la topologie dont il est ainsi muni est celle induite par la topologie de P.

§ 2 Points à l'infini d'un ensemble algébrique affine

Tout repose sur la remarque suivante qu'il faut garder présente à l'esprit. Soient comme plus haut V et $p: V\hat{} \longrightarrow P$. Soient encore T une forme linéaire (non nulle!) sur V et soient $E_0 = \mathrm{Ker}(T)$ et $E = \{v \in V \mid T(v)=1\}$. Bien entendu, E_0 opère sur E par translations et (E_0, E) est donc un espace affine.

Inversement, tout espace affine peut-être obtenu ainsi, avec unicité de la paire (V,T) à isomorphisme unique près. Ceci dit, posons $p(E_o) = H$ et $p(E) = U$. Bien entendu, H est un fermé (on dit que c'est un hyperplan) et U est l'ouvert complémentaire et l'application $q:E \longrightarrow U$,$q(v)=p(v)$ est bijective. En résumé :<u>une forme linéaire</u> T <u>sur</u> V <u>définit un hyperplan</u> H <u>de</u> P <u>et munit</u> $U=P-H$ <u>d'une structure d'espace affine</u> obtenue par transport de structure grâce à q .

<u>Proposition 1</u>

La topologie de Zariski naturelle de E est la topologie induite par celle de V . L'application $q:E \to U$ est un homéomorphisme si l'on munit U de la topologie induite par celle de P .

L'inclusion $i:E \longrightarrow V$ est une application affine, donc continue. Comme elle est injective, elle admet une rétraction, i. e. une application affine $r:V \longrightarrow E$ telle que $ri=id_E$, d'où le premier point. Donc $q:E \longrightarrow U$ est continue car $q=pi$. Pour voir que q est un homéomorphisme, il suffit de prouver

<u>Lemme 2</u>

Soit X un fermé de E et soit $\overline{q(X)}$ l'adhérence de $q(X)$ dans P . Alors $\overline{q(X)} \cap U = q(X)$.

Ceci résulte du lemme plus précis suivant.

<u>Lemme 3</u>

Soit I_E un idéal de l'anneau S_E des polynomes sur E . Soit, pour $n \geqslant 0$, l'ensemble I_n des polynomes homogènes de degré n sur V dont la restriction à E appartient à I_E . Alors $I = \sum I_n$ est un idéal homogène de l'anneau S des polynomes sur V . Soient X le fermé de E défini par I_E et CX le cône fermé de V défini par I . Alors

(i) $p(CX) = \overline{p(X)}$ et $\overline{p(X)} \cap U = p(X)$

(ii) $CX \cap E = X$

.../...

Bien entendu, I est un idéal puisque $I_p I_q \subset I_{p+q}$, et il est homogène par construction. Soit C un cône fermé contenant X , alors tout polynome homogène f nul sur C est nul sur X , donc $(f \mid E)^k \in I_E$, donc $f^k \in I$, donc $CX \subset C$, donc CX est le plus petit cône fermé contenant X , ce qui se traduit par $\overline{p(X)} = p(CX)$. La deuxième égalité de (i) n'est qu'une traduction de (ii) et comme $CX \cap E \supset X$ par définition de I , il suffit de prouver l'autre inclusion, c'est-à-dire que tout $f \in I_E$ est nul sur $CX \cap E$, ou encore qu'il existe ${}^h f \in I$ avec ${}^h f \mid E = f$, ce qui résulte immédiatement du lemme suivant.

Lemme 4

Soient V un espace vectoriel , T une forme linéaire sur V , $E_o = \mathrm{Ker}(T)$ et $E = \{v \in V \mid T(v)=1\}$. Pour tout polynome f sur E de degré d , il existe un polynome ${}^h f$ sur V , homogène de degré d tel que ${}^h f \mid E = f$. Si F et G sont deux polynomes homogènes sur V dont les restrictions à E coïncident, leur rapport F/G est une puissance de T.

Prouvons la seconde assertion. Quitte à mulitiplier F ou G par une puissance de T , on peut supposer qu'ils ont même degré et alors F-G est nul sur E . On a F(v)=G(v) sur $V-E_o$, car si $T(v)\neq 0$, on a $F(v) = F(v/T(v))T(v)^d = G(v)$. Donc F-G est nul sur $V-E_o$ donc est nul.
pour prouver la première assertion, on note que ${}^h f$ est connu sur $V-E_o$:

(1) $\quad {}^h f\,(v) = T(v)^d f(v/T(v)) \quad , \quad v \in V \; , T(v)\neq 0$.

Il suffit de voir que ${}^h f$ est la restriction d'un polynome sur V , ce qui est immédiat. En prenant des coordonnées linéaires $(T, X_1,\dots,X_n)$ sur V , on a les formules usuelles

(2) $\quad {}^h f(T,X_1,\dots,X_n) = f(X_1/T,\dots,X_n/T)T^d \; , \; {}^h f(1,X_1,\dots,X_n) = f(X_1,\dots,X_n)$,

qui ont un sens évident, car les X_i/T sont des coordonnées linéaires de l'espace affine E .

Remarque 5

Avec les notations du lemme 3, si $f_1,\dots f_m$ sont des générateurs de l'idéal I_E , de degré $d(1),\dots,d(m)$, alors les ${}^h f_i = T^{d(i)} f(v/T(v))$ sont des polynomes homogènes qui appartiennent à I , mais ils ne l'engendrent pas nécessairement. Exemple $f = X^4 + XY$ et $g = X^4 + X^2+Y^2$ .Soit C le cône fermé défini par ${}^hf$ et ${}^hg$; son intersection avec E_o a pour idéal (T,X^4) , c'est donc une droite. Mais l'idéal I contient ${}^h(f-g) = XY-X^2-Y^2$, donc l'intersection de CX avec E_o est 0 . Donc $({}^hf,{}^hg)$ définit une cône fermé strictement plus grand que CX . En revanche, il estfacile de déduire de la proposition et de la seconde assertion du lemme 4 que l'on a

$I = \sum I_n$, où $I_n = \left\{ F \in S_n \mid \text{il existe } r \text{ avec } T^rF \in ({}^hf_1,\ldots,{}^hf_m) \right\}$.

Pour le voir, donner un sens à la formule $\sum {}^ha_i{}^hf_i = T^r.{}^h(\Sigma\, a_if_i)$.

Dans l'exemple, on a $T^2.{}^h(f-g) = {}^hf-{}^hg$. Si $m = 1$, c'est-à-dire <u>si X est l'hypersurface définie par une équation</u> f <u>alors</u> CX <u>est l'hypersurface définie par</u> ${}^hf$. Ceci résulte de ce qui précède, car T ne divise pas ${}^hf$, donc si $T^rF = a.{}^hf$, alors T^r divise a , donc F est multiple de ${}^hf$.

<u>Commentaire 6</u>.

Avec les notations de la proposition, on identifie généralement E et U grâce à q , donc X à un fermé de $U \subset P$, et on pose $\overline{X} = p(CX)$. On dit que $X_\infty = \overline{X} \cap H$ est l'ensemble des points à l'infini de X , C'est le fermé de l'espace projectif H attaché à E_o défini par le cône $CX \cap E_o$, on obtient ses équations en rendant homogènes celles de X , puis en y faisant $T=0$, non sans prendre garde à la trappe signalée dans la remarque précédente.

§ 3 <u>Dimension d'une variété projective</u>

<u>Définition 1</u>

Un fermé X de l'espace projectif P attaché à un espace vectoriel V est dit réductible s'il existe deux fermés distincts de X , soient X_1 et X_2 , tels que $X = X_1 \cup X_2$. Il est dit irréductible dans le cas contraire.

<u>Proposition 2</u>

Pour que X soit irréductible, il faut et il suffit que le cône fermé CX de V correspondant le soit. Pour qu'un idéal homogène I soit premier, il faut et il suffit que, pour tout couple de polynomes <u>homogènes</u> (f,g) ,

.../...

l'on ait $f \in I$ ou $g \in I$ dès que $fg \in I$.

Si I est premier, il possède la propriété de l'énoncé. Inversement, si f et g sont deux éléments de I avec $fg \in I$, montrons par réccurence sur $\deg(f)+\deg(g)$ que f ou g appartient à I . Il suffit de noter que si f' et g' sont les composantes homogènes de f et g de degré maximum, alors celle de fg est $f'g'$. Comme I est homogène, $f'g' \in I$ donc f' ou g' appartient à I et on applique l'hypothèse de réccurence à $(f-f',g)$ ou à $(f,g-g')$. Il en résulte que si un cône fermé C est réductible, il est union de deux cônes fermés distincts de lui-même, donc le fermé de P correspondant est réductible. La réciproque est évidente, d'où la conclusion.

Les considérations de la leçon précédente s'appliquent mot pour mot, d'où l'existence et l'unicité de la décomposition en composantes irréductibles et la définition que voici.

Définition 3

On appelle dimension d'un fermé X de P la borne supérieure des entiers r tels qu'il existe des fermés irréductibles deux à deux distincts $X_{-1}, X_0, X_1, \ldots, X_r$ tels que $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_r \subset X$.

Proposition 4

Soit C le cône projettant de X (cône fermé de V qui lui correspond) , on a $\dim(CX) \geqslant \dim(X)+1$.

Il suffit de noter que, d'après la proposition 2, les fermés irréductiblesde X correspondent bijectivement aux cônes fermés irréductibles contenus dans CX et différents de $\{0\}$. Notons que ceci prouve que $\dim(X)$ est fini, ce qui n'était pas clair a priori. En fait, on a $\dim CX = \dim X + 1$: raisonner par récurrence sur $\dim V$ et utiliser les Cor 10 et 16.

Séries de Hilbert-Samuel

On reprend ici des question traitées dans la troisième leçon à propos du théorème de Bezout. On note S_n l'ensemble des polynomes homogènes de degré n à $N+1$ variables; l'on a donc $S = \oplus S_n$, donc $H(S) = (1-\tau)^{-N-1}$.

Pour tout S-module gradué non nul E, par exemple un quotient de S par un idéal homogène, on a $H(E) = P(\tau)/(1-\tau)^{d(E)}$, où P est un polynome avec $P(1) > 0$, ce qui définit $d(E)$, et on pose $m(E) = P(1)$.

Théorème 5

Soit I un idéal homogène de S et soit X le fermé de P qu'il définit. On a $1+\dim(X) = d(S/I)$.

Notons que ceci prouve que $d(S/I)$ ne dépend de I que par l'intermédiaire du fermé qu'il définit. L'analogue n'est pas vrai pour $m(E)$, dont on verra plus loin qu'il s'interprète comme le degré de X ; en effet, si $I = FS$ où F est homogène de degré r, on a évidemment $H(S/FS) = (1-\tau^r)/(1-\tau)^{N+1}$, donc $d(S/FS) = N$ et $m(S/FS) = r$. Or F et F^k définissent le même fermé et n'ont pas même degré.

Lemme 6

Soit I un idéal homogène de S et soit $F \in S_r$. On a

(1) $H(S/I+FS) \geqslant (1-\tau^r).H(S/IS)$ et $d(S/I+FS) \geqslant d(S/I)-1$

avec égalité si F est non diviseur de zéro dans S/I, en particulier si I est premier.

On considère la suite exacte de S-modules gradués

(2) $0 \longrightarrow K \longrightarrow (S/I)(-r) \xrightarrow{u} (S/I) \longrightarrow S/(I+FS) \longrightarrow 0$

où $u(G) = FG$. On en tire $H(S/(I+FS)) = (1-\tau^r)H(S/I)+H(K)$, d'où l'on tire la première inégalité de (1) qui signifie que, pour tout n, on a la même inégalité entre les coéfficients de τ^n dans ces deux séries formelles. Pour en déduire la seconde inégalité, on utilise le fait que si $P(T)/(1-T)^d = \sum u_n\tau^n$, on a que u_n est équivalent à $P(1)n^{d-1}/(d-1)!$ si $P(1) \neq 0$. Pour que l'on ait égalité, il faut et il suffit que $H(K)=0$, c'est-à-dire $K=0$, c'est-à-dire que u est injective, ce qui, par définition, signifie que F est non diviseur de zéro dans S/I.

Lemme 7

Si S/I est intègre et si $I' \supset I$ avec $I' \neq I$, alors $d(S/I) > d(S/I')$.

En effet, il existe $F \in I'_r$, $F \notin I$, donc une surjection

.../...

$S/(I+FS) \longrightarrow S/I'$, donc $H(S/I') \leq H(S/(I+FS)) = (1-t^r)H(S/I)$, d'où $d(S/I') \leq d(S/(F+IS)) = d(S/I)-1$.

Lemme 8

Sous les hypothèses du théorème , on a $1+\dim(X) \leq d(S/I)$.

En effet, si on a une suite comme dans la définition de la dimension : $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \ldots . X_r \subset X$, si on note P_i l'idéal premier homogène de X_i , par application répétée du lemme précédent, joint au fait que $S/I \longrightarrow S/P_r$ est surjectif on a les inégalités $d(S/I) \geq d(S/P_r) \geq r+1+d(S/P_{-1})$ et $d(S/P_{-1}) = 0$, car $P_{-1} = S_+$ et $H(S/S_+) = 1$.

Lemme 9

Sous les hypothèses du théorème, il existe une forme linéaire non nulle $T \in S_1$ telle que l'hyperplan H d'équation $T = 0$ ne contienne aucune composante irréductible de X .

Soient $P(i)$ l'idéal premier homogène correspondant à la composante irréductible X_i de X . Alors $P(i) \cap S_1 = P(i)_1$ est différent de S_1 , car X_i est non vide . Il suffit donc de choisir T dans S_1 en dehors d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, ce qui est possible.

Nous pouvons achever la preuve du théorème en raisonnant sur le rang $N+1$ de V . En effet, l'hypothèse sur T assure que $\dim(X) > \dim(X \cap H) = d(S/(I+TS))-1 \geq d(S/I)-2$, donc $\dim(X) \geq d(S/I)-1$.

Corollaire 10

Soient X unfermé de l'espace projectif et F un polynome homogène. Soit Y l'hypersurface d'équation $F=0$. Si X est irréductible et $Y \not\supset X$, alors $\dim(X \cap Y) = \dim(X)-1$. Si Y ne contient aucune des composantes irréductibles de dimension maximum de X , alors $\dim(X \cap Y) = \dim(X)-1$.

Il suffit de prouver la première affirmation. On a évidemment $\dim(X) > \dim(X \cap Y)$ et l'inégalité en sens inverse résulte de lemme 7 .

Remarque 11

Il est grand temps de réparer un oubli : un fermé de dimension zéro est composé d'un nombre fini de points. En effet, un fermé irréductible

.../...

qui n'est pas réduit à un point est de dimension > 0 , car un point est un fermé irréductible. Par ailleurs, si $\{x\}$ est une composante irréductible de X , alors la réunion des autres composantes irréductibles est un fermé X' et $x \notin X'$, car sinon x ne serait pas un fermé irréductible maximal. Donc x est un point isolé de X . La réciproque est immédiate.

Lemme 12

Soient X_i des fermés de P en nombre fini et x un point de P . Alors il existe un hyperplan H de P passant par x et ne contenant aucun des X_i , sauf peut-être $\{x\}$ au cas où c'est l'un des X_i .

Il faut raffiner la preuve du lemme 9. L'hyperplan H est défini par un élément de S_1 auquel on impose d'appartenir à l'hyperplan S_1' de S_1 formé par les formes linéaires nulles au point x et de ne pas appartenir aux $P(i) \cap S_1$, où $P(i)$ est l'idéal des fonctions nulles sur X_i et où i est tel que $X_i \not\subset \{x\}$.

L'existence est assurée car S_1' n'est contenu dans aucun $P(i) \cap S_1$, ce qui entrainerait $X_i \subset \{x\}$, d'où la conclusion.

Corollaire 13

Soit X un fermé de dimension n de l'espace projectif P de dimension N . Pour toute sous-variété linéaire L de P de dimension r , on a $\dim(X \cap L) \geqslant n+r-N$. Par tout point x de P, il passe une sous-variété linéaire L de dimension $N-n$ qui coupe X en un nombre fini de points. Par tout point x de P il passe une sous-variété linéaire L de P de dimension $N-n-1$ avec $X \cap L = X \cap \{x\}$.

Si L est de dimension r , c'est l'intersection de $N-r$ hyperplans et par application répétée du lemme 6 (dans P puis dans le premier hyperplan...) on en tire $\dim(X \cap L) \geqslant n-(N-r)$. Soit $x \in P$, il existe un hyperplan H tel que $\dim(X \cap H) = \dim(X)-1$, à moins que $\dim(X) = 0$ et $x \in X$, ceci par le lemme 12 appliqué aux composantes irréductibles de X . En répétant n fois l'opération, on trouve une sous-variété linéaire L de dimension $N-n$ avec $\dim(X \cap L) = 0$. Enfin en appliquant le lemme 12 une fois de plus, on trouve une sous-variété linéaire L' de dimension $N-n-1$ qui ne rencontre X qu'au

.../...

point x .

Corollaire 14

Soit X un fermé de l'espace affine, soit $\overline{X}$ son adhérence dans l'espace projectif et $X_\infty = \overline{X} - X$. On a $\dim(X) = \dim(\overline{X}) = 1+\dim(X_\infty)$.

Il est clair que l'hyperplan à l'infini H ne contient aucune composante irréductible de $\overline{X}$ car les autres composantes suffiraient à remplir $\overline{X}$. Donc $\dim(\overline{X}) = \dim(X_\infty)+1$ d'après Cor. 10 . En outre, un raisonnement simple de topologie générale montre que l'adhérence d'un fermé irréductible l'est aussi. En effet si U est le complémentaire de H , on a vu que $X=\overline{X} \cap U$. On en déduit, en considérant une suite fermés irréductibles emboités dans X et en prenant leurs adhérences que $\dim(X) \leqslant \dim(\overline{X})$. Pour l'inégalité inverse, on procède par récurrence sur $\dim(\overline{X})$ et on coupe par un hyperplan H' ne contenant aucune des composantes irréductibles de $\overline{X}$ ou de X_∞ . On a $\dim(\overline{X}) = \dim(\overline{X} \cap H')+1$.

Soit Y une composante irréductible de $\overline{X} \cap H'$ de dimension $\dim(\overline{X})-1$. Alors $Y \not\subset H$ car ce serait une composante irréductible de $\overline{X} \cap H$; donc $Y \cap X = Y-Y \cap H$ est un ouvert non vide de Y donc est dense dans Y , d'où par l'hypothèse de récurence $\dim(Y) = \dim(Y \cap X)$. Mais $Y \cap X$ est contenu dans H' qui ne contient aucune composante irréductible de $\overline{X}$ donc de X , donc $\dim(X) > \dim(Y \cap X)$, d'où la conclusion.

Proposition 14

Soit X un fermé de l'espace affine (resp.projectif) de dimension N . On suppose que toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension $N-1$. Alors il existe un polynome f (resp. un polynome homogène F) tel que X soit l'ensemble des zéros de f (resp. F) .

On peut évidemment supposer X irréductible (faire le produit des f_i) . Supposons X affine et considérons un polynome f nul sur X . Comme X est irréductible, un des facteurs irréductibles de f est nul sur X . On peut donc supposer f irréductible, donc aussi $\underline{\underline{V}}(f)$ d'après le lemme de Gauss On a donc $\underline{\underline{A}}^n \supset \underline{\underline{V}}(f) \supset X$, donc $X = \underline{\underline{V}}(f)$ car ces trois espaces sont

.../...

irréductibles et $\dim(X) = n-1$.

Proposition 15

Soient X et Y deux fermés de l'espace projectif de dimension N , on a $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim(X)+\dim(Y)-N$.

D'après le lemme 12, il existe un hyperplan qui ne contienne aucune des composantes irréductibles de X ou de $X \cap Y$, en raisonnant par réccurence sur $\dim(X)$, on a donc $\dim(X \cap Y)=1+\dim((X \cap H) \cap Y)) \geqslant 1+\dim(X \cap H)+\dim(Y)-N = \dim(X)+\dim(Y)-N$.

L'énoncé analogue est faux dans le cas affine, prendre deux variétés affines de dimension complémentaire mais parallèles.

Corollaire 16

Soient X et Y deux fermés de l'espace affine de dimension N ayant un point commun. Alors $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim(X)+\dim(Y)-N$.

On considère les adhérences de X et Y et on raisonne comme précédemment en coupant par un hyperplan H passant par x et ne contenant aucune composante irréductible de X ou Y ou $X \cap Y$, ce qui assure que $\overline{X \cap H} = \overline{X} \cap \overline{H}$ etc...

8ème leçon

Grassmanniennes. Elimination

§ 1. Grassmanniennes.

On désire donner un sens à des expressions du genre " soit X un fermé de l'espace projectif P , pour toute sous-variété linéaire L de dimension r assez générale, on a $\dim(X \cap L)=\dim(X)+r-\dim(P)$ " . Pour cela, nous allons voir que les sous-espaces linéaires de P de dimension donnée sont les points d'une variété algèbrique : la Grassmannienne.

Définition 1. Soit V un espace vectoriel de rang $N+1$ et soit r un entier. On note $G_{r+1,N+1}$, ou plus simplement G , l'ensemble des sous-espaces vectoriels de rang $r+1$ de V .

Donc G est aussi l'ensemble des sous-variétés linéaires de dimension r de l'espace projectif P de dimension N attaché à V . Considérons l'espace vectoriel $E = \Lambda^{r+1}V$ de dimension $\binom{N+1}{r+1}$, et l'espace projectif M attaché à E . Pour toute base $u_0,u_1,\dots,u_r$ d'un $L \in G$, on a un élément $u_0 \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_r \in E$, qui, à une constante non nulle près (déterminant de la matrice de changement de base) ne dépend pas du choix de la base, donc un point $p(L) \in M$.

Proposition 2. L'application $p:G \longrightarrow M$ est injective. Son image est un fermé irréductible de M .

Choisissons une base $e_0,e_1,\dots,e_N$ de V , ce qui fournit une base e_H de E , où H parcourt les parties à $r+1$ éléments de $[0,N]$. Une base $u_0,\dots,u_r$ de L s'interprète comme une matrice $u \in \mathbf{M}_{N+1,r+1}$, ayant $r+1$ colonnes et $N+1$ lignes, la j-ème colonne étant formée des coordonnées de u_j dans la base e . Dans la base e_H de E , on a $u_0 \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_r = \sum u_H e_H$ et u_H n'est autre que le mineur de la matrice u obtenu en ne gardant que les lignes qui sont dans H . Si l'on préfère, on a une application

(1) $\pi : M_{N+1,r+1} \longrightarrow E$, $\pi(u) = \sum u_H e_H$,

qui est une fonction polynomiale homogène de degré $r+1$. Bien entendu, $\pi(u)=0$ signifie que la matrice est de rang $< r+1$ et si $\pi(u) \neq 0$, alors u définit

.../...

un sous-espace L de V de rang $r+1$ et une base de celui-ci, en outre $p(L)$ est l'image dans $M = \mathrm{proj}(E)$ de $\pi(u)$. Dans ce cas, on apprend dans les traités d'algèbre linéaireque l'on peut récupérer L à partir de $\pi(u)$, ce qui prouve que p est <u>injective</u>. Voici comment l'on fait. Pour tout $y \in E$, on considère

(2) $\qquad e(y) : V \longrightarrow \Lambda^{r+2}V \quad , \quad e(y)(x) = x\wedge y$,

qui est une application linéaireen x. Si $y = \pi(u)$, alors $L\subset \ker(e(y))$ et en fait on a égalité, d'où ce point. De manière générale, on montre que, si $y \neq 0$, $\dim(\ker(e(y))) \leqslant r+1$, c'est-à-dire que $\mathrm{rang}(e(y)) \geqslant N-r$. L'ensemble des points $y \in E$ où $\mathrm{rang}(e(y)) = N-r$ est donc défini par l'annulation des mineurs d'ordre $N-r+1$ de la matrice de $e(y)$, lesquels sont évidemment des polynomes homogènesde degré $N-r+1$ par rapport aux coordonnées y_H de y dans la base e_H, c'est donc <u>un cône fermé</u> C <u>de</u> E. Si $y \in C$ et si on pose $L = \mathrm{Ker}(e(y))$, alors $L \in G$ et le point de M défini par y n'est autre que $p(L)$, à condition bien sûr que $y \neq 0$. Donc $p(G)$ est bien un fermé de M dont le cône projettant est C. Pour voir que ce fermé est irréductible, il suffit de voir que C l'est, ce qui tient au fait que C est l'image de $M_{N+1,r+1}$ par l'application continue π et que l'espace des matrices est irréductible. Ce qui achève de prouver la proposition.

<u>Remarque 3</u>. On peut montrer que $p(G)$ peut-être défini par l'annulation d'un certain nombre de polynomes homogènes du second degré (équationsde Plücker), ceci nécessite d'utiliser le produit intérieur (cf. Dieudonné, cours de géométrie algèbrique, PUF). Si $r=1$ et $N=3$, droites de l'espace projectif de dimension 3, alors E a pour base les e_{ij}, $0 \leqslant i < j \leqslant 3$, et on peut montrer, soit avec les équations de Plücker, soit, en se fatiguant un peu plus, par le procédé ci-dessus que G est défini par une seule équation, à savoir

$$u_{01}u_{23}-u_{02}u_{13}+u_{03}u_{12} = 0 .$$

<u>Proposition 4</u>. Soit L' un sous-espace de dimension $N-r$ de V. Alors L' définit un hyperplan F de $E = \Lambda^{r+1}V$, donc un hyperplan F' de $M = \mathrm{Proj}(E)$. L'ensemble $p(G) \cap (M-F')$ n'est autre que l'ensemble des supplémentaires L de L',

.../...

il s'identifie à l'ensemble des sections de la projection $m: V \longrightarrow V/L'$, c'est-à-dire à un espace affine de dimension $(r+1)(N-r)$.

Soit $u'_{r+1}, u'_{r+2}, \dots, u'_N$ une base de L' et soit $y' = u'_{r+1} \wedge \dots \wedge u'_N$. Alors, le noyau de l'application $f: \Lambda^{r+1}V \longrightarrow \Lambda^{N+1}V$, $f(y) = y \wedge y'$, est un hyperplan F de E qui ne dépend que de L' et c'est celui que l'on considère. Soit $L \in G$, pour que $p(L) \in F'$, il faut et il suffit que $y \wedge y' = 0$, où $y = u_0 \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_r$, les u_i formant une base de L , ce qui signifie exactement que $L \cap L' \neq 0$, ce qui prouve la première assertion de l'énoncé. La seconde est évidente.

Cet énoncé est insuffisant car il identifie $p(G) \cap (M-F')$ avec un espace affine, mais ~~ne~~ nous dit pas si cette identification est un homéomorphisme. Ceci va devenir clair si l'on se met en état d'expliciter la chose.

On choisit donc une base $e_0, e_1, \dots, e_N$ de V et l'on prend pour L' l'espace engendré par les e_i , $i > r$. L'application f ci-dessus s'interprète alors comme une forme linéaire, à savoir

(1) $\quad f: \Lambda^{r+1}V \longrightarrow k \quad , \quad f(\sum u_H e_H) = u_K$, avec $K = [0,r]$.

Par ailleurs, une section de $m: V \longrightarrow V/L'$ s'interprète comme une matrice $u \in M_{N+1,r+1}$ telle que la matrice carrée obtenue en ne retenant que les $r+1$ premières lignes soit <u>la matrice unité</u> . Soit $U \subset M_{N+1,r+1}$ l'ensemble de ces matrices. La preuve de la proposition ci-dessus montre que l'application

(2) $\quad \pi': U \longrightarrow CG$

induite par $\pi: M_{N+1,r+1} \longrightarrow E$, est une bijection entre U et l'ensemble des $y = \sum u_H e_H$ dans CG avec $u_K = 1$, lequel s'identifie avec $p(G) \cap (M-F')$. D'où l'on déduit que π' est continue et même bicontinue car on a sans peine les formules donnant l'inverse, à savoir $u_{ji} = (-1)^{r+1-i} u_{H(i,j)}$, avec $H(i,j) = [0,r] \cup \{j\}) - \{i\}$, ceci pour $0 \leq i \leq r$ et $r+1 \leq j \leq N$, ce qui suffit à déterminer la matrice u .

Avec ces notations, notons enfin que l'on peut aisément obtenir un système de $N-r$ équations linéaires définissant le sous-espace L attaché à u , à savoir

.../...

(3) $$L_i = X_i + \sum_{0 \leq j \leq r} u_{i,j} X_j \quad , \quad i = r+1, \dots, N \ .$$

car L est le noyau de l'application $id-sm : V \longrightarrow V$, où s est la section définie par la matrice u . La seule chose à retenir est que les coefficients des équations $L_{r+1}, \dots, L_N$ de L sont des fonctions linéaires des coordonnées homogènes u_H du point $p(L)$ de $M = Proj(E)$, si $u_K = 1$.

Théorème 5. Soit X un fermé de l'espace projectif P . Soient r et s deux entiers. L'ensemble des sous-variétés linéaires L de P qui sont de dimension r et telles que $\dim(X \cap L) \geq s$ est un fermé de la Grassmannienne $G_{r+1,N+1}$. L'ensemble des sous-variétés linéaires L de P de dimension r telles que $\dim(X \cap L) = \dim(X) + r - \dim(P)$ est un ouvert dense de la Grassmannienne.

La seconde assertion résulte de la première en prenant $s = 1 + \dim(X) + r - \dim(P)$ et en notant qu'un ouvert non vide est toujours dense car G est irréductible, ce qui permet de conclure en appliquant $\dim(P)-r$ fois le lemme 12 de la 7ème leçon et en convenant que la dimension de l'ensemble vide est n'importe quel nombre < 0 .

Pour la première assertion, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 6 . Soit I un idéal homogène de l'anneau S des polynomes sur V et soit X le fermé de P qu'il définit. Pour que $\dim(X) \geq s$, il faut et il suffit que $H(S/I) \geq (1-\tau)^{-s-1}$.

La condition est évidemment suffisante. Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur $\dim(X)$, on choisit une composante irréductible Y de X avec $\dim(Y) = \dim(X)$, un hyperplan H ne contenant par Y et on considère les idéaux J et $J+TS$ de Y et $Y \cap H$. On a alors $H(S/I) \geq H(S/J) = (H/(J+TS))/(1-\tau)^{-s-1}$, où l'égalité a lieu parce que S/J est intègre.

Lemme 7. Sous les hypothèses du lemme 6, posons $(1-\tau)^{-s-1} = \sum s_k \tau^k$ et $H(S/I) = \sum H_k \tau^k$. Considérons des formes linéaires $L_{r+1}, \dots, L_N$ sur V , l'idéal I' engendré par I et les L_j et, pour chaque entier k , l'application linéaire

$$n(k) : ((S/I)_{k-1})^{N-r} \longrightarrow (S/I)_k \ , \ n(k)(a_{r+1}, \dots, a_N) = \sum a_i L_i \ .$$

Considérons enfin le fermé X' défini par l'idéal I' . Pour que $\dim(X') \geq s$, il faut et il suffit que, pour tout $k \geq 0$, on ait $\mathrm{rang}(n(k)) \leq H_k - s_k$.

.../...

En effet, le conoyau de $n(k)$ s'identifie à la composante homogène de degré k de S/I' et la condition de l'énoncé signifie donc que $H(S/I') \geqslant (1-\tau)^{-s-1}$.

La condition de l'énoncé s'exprime par la nullité des mineurs d'ordre $H_k - s_k + 1$ de la matrice de $n(k)$, laquelle a pour coefficients des fonctions linéaires par rapport aux coefficients des L_j . Si l'on revient au théorème et que l'on prenne pour les L_j ceux qui définissent la sous-variété linéaire L (formule(3) p. 4), on constate que la condition $\dim(X \cap L) \geqslant s$ s'exprime par la nullité d'un certain nombre (infini a priori) de polynomes en les coordonnées plückériennes de L , ce qui achève la démonstration.

§ 2 . Théorème principal de l'élimination.

L'énoncé purement algébrique du théorème et son interprétation gèomètrique dans un cas particulier se trouvent dans les notes de cours p. 55 à 58. Pour la fin du théorème, la version orale a utilisé explicitement le lemme de Nakayama que voici.

Lemme 1. Soient A un anneau, E un A-module de type fini et P un idéal de A . Si $E/PE = 0$ alors il existe $p \in P$ tel que $(1+p)E = 0$.

On choisit des générateurs $x_1,\dots,x_r$ de E . L'hypothèse signifie qu'il existe des $p_{ij} \in P$ tels que l'on ait $px = x$, où p est la matrice formée par les p_{ij} et x le vecteur colonne formé par les x_i . Soit I la matrice unité et $m = I-p$. On a donc $\tilde{m}m = \text{dét}(m) .I$, où $\tilde{m}$ est la matrice adjointe de m , donc aussi $0=\tilde{m}mx = \text{dét}(m)x$. Ceci donne la conclusion, car $\text{dét}(m) = 1 +p'$ avec $p' \in P$.

Exercice . Quel est le module auquel on applique le lemme de Nakayama dans la preuve du théorème de l'élimination ?

Preuve du lemme 1 de la 5ème leçon. On rappelle que l'on considère la projection linéaire $p:\underline{\underline{A}}^{n+1} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^n$, $p(x_1,\dots,x_n,y) = (x_1,\dots,x_n)$, et un fermé X de $\underline{\underline{A}}^{n+1}$ d'idéal I tel qu'il existe $f \in I$ qui soit unitaire en y , c'est-à-dire $f = y^r+a_1(x)y^{r-1}+\dots+a_r(x)$, avec $r\neq 0$. On désire montrer que $p(X)$ est le fermé Y de $\underline{\underline{A}}^n$ d'idéal $J = I \cap k[x_1,\dots,x_n]$. Il est clair que les $g \in J$ sont nuls sur X donc sur $p(X)$, donc $p(X) \subset Y$. Par ailleurs si $g \in k[x_1,\dots,x_n]$ est nulle sur $p(X)$, alors $g \circ p$ est nulle sur X , donc $g^k \in I$, donc $g^k \in J$, donc g est nulle sur Y . Il suffit donc de prouver que $p(X)$ est un fermé. Ceci résulte du théorème de l'élimination. En effet, on considère la seconde projection $p':\underline{\underline{P}}^1 \times \underline{\underline{A}}^n \longrightarrow \underline{\underline{A}}^n$ et le fermé X' de $\underline{\underline{P}}^1\times\underline{\underline{A}}^n$ défini par l'idéal homogène I' dont la composante homogène de degré d est formé des ${}^hg(x_1,\dots,x_n,y,t)$ obtenue en rendant homogène par rapport à (y,t) les $g \in I$ dont le degré par rapport à y est $\leqslant d$. On sait que $p'(X')$ est fermé et il suffit de voir que $X' = X$.

Or les équations de $X' \cap \left(\underline{\underline{A}}^1 \times \underline{\underline{A}}^n\right)$ s'obtiennent en faisant $t=0$ dans les éléments

.../...

de I' , ce qui redonne exactement les éléments de I , donc $X = X' \cap \underline{\underline{A}}^1 \times \underline{\underline{A}}^n$. Il reste à voir qu'il n'existe pas de point de X' où $t=0$. C'est ici qu'intervient l'équation unitaire f . Car on a ${}^hf=y^r+a_1(x)y^{r-1}t+\dots+a_r(x)t^r$, et si $(x_1,\dots,x_n,y,0)$ est un point de $\underline{\underline{P}}^1 \times \underline{\underline{A}}^n$, alors $y \neq 0$ ce qui est incompatible avec ${}^hf(x_1,\dots,x_n,y,0) = 0$.

La démonstration ci-dessus est fort éclairante mais après tout plus compliquée que celle que voici qui n'utilise que le lemme de Nakayama .

Soit $(a_1,\dots,a_n)$ un point de $\underline{\underline{A}}^n$ et soit P l'idéal de $k[x_1,\dots,x_n]$ engendré par les x_i-a_i . Bien entendu, $X \cap p^{-1}(a_1,\dots,a_n)$ a pour idéal $I+Pk[\underline{x},y]$, et si le fermé $X \cap p^{-1}(a_1,\dots,a_n)$ est vide, cela signifie que $k[\underline{x},y] = I+Pk[\underline{x},y]$, ou encore, en posant $E = k[\underline{x},y]/I$, que $E = PE$. L'existence de $f \in I$ montre que E est un $k[\underline{x},y]$-module de type fini, il existe donc $p \in P$ tel que $(1+p)E = 0$, ce qui signifie que $(1+p)k[\underline{x},y] \subset I$, ce qui signifie que $1+p \in I$, donc $1+p \in J$ par définition de J et comme $p(a_1,\dots,a_n) = 0$ car $p \in P$, ceci signifie que $(a_1,\dots,a_n)$ n'appartient pas au fermé d'idéal J . La réciproque est évidente car $J \subset I$, d'où la conclusion.

<u>Exercice.</u> Comparer avec Schafarewitsch, algebraische geometrie, p. 58 .

9 ème Leçon

Invariance de (f'_x,f'_y)

On a traité l'équation tangentielle, p. 38 à 52 des notes. L'invariant $\mu(\xi)$ introduit p. 47 n'est pas si clairement un invariant. Bien entendu, si l'on fait un changement de coordonnées dont le jacobien est non nul au point ξ, il est clair que l'idéal (f'_x,f'_y) de l'anneau local $O_{P,\xi}$ ne change pas, donc aussi la longueur de l'anneau quotient, qui est $\mu(\xi)$. Mais il est moins évident que $\mu(\xi)$ ne dépende pas du choix de l'équation f qui n'est connue qu'à multiplication près par une fonction non nulle au point ξ. Par exemple, si on prend un polynome homogène $F(X,Y,T)$ et que l'on prenne pour ξ un point à distance finie où $XT \neq 0$, alors on a deux choix de coordonnées affines (et même bien plus...) par exemple $x=X/T, y=Y/T$ avec équation $f(x,y)=F(x,y,1)$ et $u=Y/X, v=T/X$ avec équation $g(u,v) = F(1,u,v) = v^nF(1/v,u/v,1) = v^nf(1/v,u/v)$. Dans le plan projectif privé des droites $X=0$ et $T=0$, ouvert que l'on appelle U, on a donc deux systèmes de coordonnées, ce qui n'importe pas, mais surtout deux équations, à savoir, en employant les coordonnées (x,y), $g(x,y)$ et $f(x,y)=x^ng(x,y)$, où $n=\deg(F)$. On en tire $f'_y=x^ng'_y$ et $f'_x = nx^{n-1}g + x^ng'_x$. Bien entendu, la fonction x est inversible dans U, donc dans l'anneau A des fonctions sur U, on a $(f'_x,f'_y)\,A = (ng+xg'_x,g'_y)\,A$ et cet idéal est en général différent de $(g'_x,g'_y)\,A$. Malgré tout, il reste vrai qu'en un point où $f(\xi)=0$, c'est-à-dire un en point de la courbe, on a égalité des mulitiplicités d'intersection, c'est-à-dire $(f'_x,f'_y)_\xi = (g'_x,g'_y)_\xi$. Pour le voir, on choisit une branche Γ de f'_y, disons $(x(t),y(t))$ et l'on constate que $(f'_x,\Gamma)_\xi$ est l'ordre du zéro de $ng(x(t),y(t))+x(t)g'_x(x(t),y(t))$ et que l'ordre du zéro de $x(t)g'_x(x(t),y(t))$ est strictement inférieur à celui de $g(x(t),y(t))$, donc $(f'_x,\Gamma)_\xi = (g'_x,\Gamma)_\xi$, ce qui donne la conclusion.

Exemple. $F = Y^2T+X^3$, $g(u,v)=u^2v+1$, $(g'_u,g'_v) = (2uv,u^2)$, cependant que $f(x,y)= y^2-x^3$, $(f'_x,f'_y) = (y,x^2)$.

.../...

Moralité, les points communs aux courbes $f'_x=0$ et $f'_y=0$ ne dépendent pas du choix des coordonnées, mais dépendent du choix de l'équation, donc cette notion n'a pas de sens global pour une courbe de l'espace projectif. Il peut même arriver pour un choix assez stupide de la droite à l'infini que ces points ne soient pas isolés (cf. exemple). Cependant, si F n'a pas de facteur multiple, si la droite $T=0$ ne contient pas de points singuliers de la courbe $F=0$ et si l'on pose $f(x,y)=F(x,y,1)$, alors les points communs à $f'_x=0$ et $f'_y=0$ sont en **nombre fini**. En effet, sinon il existe un facteur commun p à f'_x et f'_y , donc une branche $\Gamma=(x(t),y(t))$ de p . Il est immédiat que $f(x(t),y(t))$ est constant sur la br anche, donc il existe une constante c telle que p divise $f(x,y)-c$, car les courbes d'équations $f-c=0$ et $p=0$ ont une infinité de points communs. Mais alors, comme p divise f'_x et f'_y , il est immédiat que p^2 divise $f-c$ ou encore, en rendant homogène, on a $F = P^2G+cT^n$,$n=\deg(F)$. D'où l'on conclut qu'un point où $P=T=0$ est un point multiple de la courbe $F=0$.

10ème leçon

Module des différentielles, espace cotangent

§ 1 . Module des différentielles.

Soit $u:A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, on rappelle que le produit tensoriel $B\otimes_A B$ est une A-algèbre munie de deux morphismes de A-algèbres $j_i:B \longrightarrow B\otimes_A B$, $i=1,2$, le tout étant caractérisé par la propriété universelle suivante :"pour toute paire a_1,a_2 de morphismes de A-algèbres $a_i:B \longrightarrow V$ (V pour variable) il existe un unique morphisme de A-algèbres $a:B\otimes_A B \longrightarrow V$ tel que $aj_i=a_i$ pour $i=1,2$ ". En outre, il est d'usage de poser $j_1(x) = x\otimes 1$ et $j_2(x) = 1\otimes x$, ce qui fait que a est caractérisé par la formule $a(x\otimes y) = a_1(x)a_2(y)$. En particulier, si on prend $a_1=a_2 = id_B$, on trouve un unique morphisme $p:B\otimes_A B \longrightarrow B$ caractérisé par $p(x\otimes y) = xy$.

On a donc des morphismes de A-algèbres

(1) $$B \underset{j_2}{\overset{j_1}{\rightrightarrows}} B\otimes_A B \xrightarrow{p} B$$

On désigne par $I_{B/A}$, (ou par I s'il n'y a pas d'ambiguité) le noyau de p , on pose

(2) $$\Omega_{B/A} = I/I^2 \quad .$$

et on l'appelle <u>module des différentielles de Kähler</u> de B/A . Il est clair que c'est un module sur $B\otimes_A B$ annulé par I , donc, canoniquement, un module sur B . En outre, pour tout $x \in B$, on a $j_2(x)-j_1(x) \in I$, ce qui permet de définir une application qui est forcément A-linéaire et nulle sur A

(3) $$d_{B/A}:B \longrightarrow \Omega_{B/A} \qquad \text{(aussi notée } d \text{) .}$$

Soit I' l'idéal de $B\otimes_A B$ engendré par les éléments de la forme $j_2(x)-j_1(x)$. La propriété universelle du quotient $B\otimes_A B/I'$ montre immédiatement que ce quotient est $p : B\otimes_A B \longrightarrow B$, donc $I' = I$ donc les $d(x)$, $x \in B$ engendrent $\Omega_{B/A}$.

.../...

Comme $j_2(x) = j_1(x)+d(x)$ et que j_2 et j_1 sont des morphismes d'algèbres, on a $j_2(xy) = (j_1(x)+d(x))(j_1(y)+d(y)) = j_1(xy) + j_1(x)d(y)+j_2(y)d(x) \bmod. I^2$, donc, dans Ω , on a

(3) $$d(xy) = xd(y)+yd(x) .$$

Si on a un carré commutatif de morphismes d'anneaux

(4)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \\ A' \arrow[u, "a"] \arrow[r] & B' \arrow[u, "b"'] \end{tikzcd}$$

On peut le compléter en un diagramme commutatif

(5)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r, "d"] & \Omega_{B/A} \\ A' \arrow[u, "a"] \arrow[r] & B' \arrow[u, "b"] \arrow[r, "d"] & \Omega_{B'/A'} \arrow[u, "\omega"] \end{tikzcd}$$

où ω est une application B-linéaire .

<u>Exemple 1</u> . Soient X_i , $i \in I$, des indéterminées et soit $B = A[X_i, i \in I]$, ce qu'on écrit en abrégé $B = A[X]$. Alors le diagramme (1) s'explicite grâce à la propriété universelle d'une algèbre de polynomes : il suffit d'introduire des indéterminées X_i' , $i \in I$, et l'on a

(1) $$A[X] \rightrightarrows A[X,X'] \xrightarrow{p} A[X] \ , \ j_1(X_i) = X_i, j_2(X_i) = X_i', p(X_i)=p(X_i')=X_i$$

Comme le noyau de p est engendré par les $\xi_i = X_i'-X_i$, on en tire immédiatement que $\Omega_{A[X]/A}$ est le module libre sur $A[X]$ engendré par les dX_i . En outre, il est clair qu'en prenant dans $A[X,X']$ les variables (X,ξ) , alors (1) s'explicite comme

(1 bis) $$A[X] \rightrightarrows A[X,\xi] \longrightarrow A[X] \ , \ j_1f = f \ , \ j_2f = f(X_i+\xi_i) \ , \ pf=f(X,0).$$

D'où l'on déduit par la formule du binome dans $A[X,\xi]$ que

.../...

(2) $$df = \sum \frac{\partial}{\partial X_i} f \cdot dX_i \quad ,$$

où les dérivées partielles sont calculées par la formule habituelle.

Proposition 2 . Soit B une A-algèbre, soit $f(X_1,\dots,X_n)$ un polynome à coefficients dans A et soient $x_1,\dots,x_n$ des éléments de B . Dans $\Omega_{B/A}$ on a

(1) $$d(f(x)) = \sum \left(\frac{\partial}{\partial X_i} f(x)\right) dx_i \quad .$$

En outre, si une famille $x_i, i \in I$, d'éléments de B engendre B comme A-algèbre, alors les dx_i engendrent le B-module $\Omega_{B/A}$.

Il suffit de considérer un carré commutatif comme celui de (4), avec $A=A'$, $B' = A[X]$ et $b:B' \longrightarrow B$ défini par $b(X_i) = X_i$, pour déduire de la commutativité du diagramme (5) la formule (1) . La seconde affirmation en résulte puisque les $d(b), b \in B$, (qui ne forment pas nécessairement un sous-module de Ω) , engendrent $\Omega_{B/A}$.

Pour pouvoir calculer commodément les modules des différentielles , nous aurons besoin de deux autres propriétés. La façon la plus économique de les établir est la propriété universelle du module des différentielles que nous allons énoncer.

Proposition 3. Soit B/A une algèbre et soit E un B-module. Pour toute application A-linéaire $D:B \longrightarrow E$ satisfaisant à

(1) $D(xy)=xDy+yDx$ pour $x,y \in B$,

il existe une unique application B-linéaire $u:\Omega_{B/A} \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in B$, on ait $D(x) = ud(x)$.

On introduit la B-algèbre V obtenue en munissant le module $B \oplus E$ de la multiplication $(b,e)(b',e')=(bb',be'+b'e)$, en sorte que E est un idéal de carré nul de V . On pose $a_1:B \longrightarrow V$, $a_1(b)=(b,0)$ et $a_2(b)=(b,D(b))$, qui sont des morphismes de A-algèbres d'où un morphisme de A-algèbres $a:B \otimes_A B \longrightarrow V$ qui applique $I_{B/A}$ dans

.../...

l'idéal E , car $a(1\otimes x - x\otimes 1) = (b,D(b))-(b,0)=(0,D(b))$ d'ou une application $u:I/I^2 \longrightarrow E = E/E^2$, qui convient évidemment. L'unicité de u résulte du fait que $d(B)$ engendre $\Omega_{B/A}$.

Une application $D:B \longrightarrow E$ comme dans l'énoncé s'appelle une A-<u>dérivation</u> de B <u>dans le</u> B-<u>module</u> E et la dérivation $d:B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ ramène l'étude des A-dérivations à celle des applications B-linéaires de Ω dans E .

<u>Exercice.</u> Retrouver ainsi l'application linéaire ω du diagramme (5) .

<u>Proposition 4</u>. Soit B/A une algèbre et soit H un idéal de B . Posons $C=B/H$. On a une application B-linéaire $\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}$. Elle est surjective et son noyau est $H\Omega_{B/A}+ Bd(H)$, c'est-à-dire le sous-module engendré par les dh , $h \in H$, et par les $h.\omega$,$h \in H$, $\omega \in \Omega_{B/A}$.

<u>Preuve</u> : utiliser la propriété universelle.

<u>Exemple 5</u> . Soient $X_1,\dots,X_n$ des indéterminées, soit $B = A[X]$, soit H l'idéal engendré par des polynomes $f_1,\dots,f_m$, et soit $C = B/H$. On a une suite exacte de C-modules

$$(1) \qquad C^m \xrightarrow{J} C^n \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

où J est défini par la matrice $J_{i,j} = \frac{\partial}{\partial X_i} f_j$ et où v applique le i-ème vecteur de base sur dx_i , étant entendu que x_i désigne l'image de X_i dans C . Comme $\Omega_{B/A}$ est le B-module libre de base les dX_i , il est clair que $\Omega_{B/A}/H\Omega_{B/A}$ est un C-module libre de rang n et que l'application v n'est autre que l'application canonique $\Omega_{B/A}/H\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}$. D'après la proposition 4, son noyau est l'image du sous-module engendré par les $dh, h \in H$, qui est aussi engendré par les df_j , $i \leqslant j \leqslant m$, ce qui signifie que ce module est l'image de J , en vertu de la formule (2) de l'exemple 1 . D'où la conclusion.

<u>Proposition 6</u> . Soient B/A une algèbre , S une partie multiplicativement stable de A et T une partie multiplicativement stable de B contenant

.../...

l'image de S . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[r] & B_T \arrow[r] & \Omega_{B_T/A_S} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \arrow[r] & \Omega_{B/A} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d'où un morphisme naturel $(\Omega_{B/A})_T \longrightarrow \Omega_{B_T/A_S}$. Celui-ci est un isomorphisme.

Autrement dit, <u>le module des différentielles d'un localisé est le localisé du module des différentielles</u>. Il suffit de vérifier que, pour tout B-module E dans lequel les homothéties de rapport $t \in T$ sont inversibles (c'est-à-dire un B_T-module), toute A-dérivation $D:B \longrightarrow E$ se prolonge en une A_T-dérivation $D':B_T \longrightarrow E$. Cela est facile : il suffit de poser $D'(a/t)=D(a)/t-(a/t^2)D(t)$, ce qui a un sens et convient comme on voit aisément.

<u>Proposition 7</u>. Soit B/A une algèbre et $A \longrightarrow A'$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme naturel $B'\otimes_A\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{B'/A'}$, où l'on a posé $B' = A'\otimes_A B$ est un isomorphisme.

<u>Corollaire 8</u>. Si H est un idéal de A , on a $\Omega_{(B/HB)/(A/H)}=\Omega_{B/A}/H\Omega_{B/A}$.

Le corollaire résulte de la proposition en posant $A' = A/H$ et la proposition résulte de la propriété universelle de Ω . D'ailleurs, si l'on y tient, le corollaire résulte également de la Proposition 4.

§ 2. <u>Espace cotangent.</u>

Fixons un corps algébriquement clos k et considérons un fermé algébrique X de l'espace affine $\underline{\underline{A}}^n$. Il lui correspond l'idéal H des fonctions polynomes nulles sur X et l'algèbre quotient $A=k[X_1,\ldots,X_n]/H$ des fonctions régulières sur X . Le A-module

$$(1) \qquad \Omega_X = \Omega_{A/k}$$

s'appelle <u>le module des différentielles sur</u> X . Il se calcule grâce à la suite exacte (1) de l'exemple 5 , § 1 . Si x est un point de X , il lui correspond un idéal maximal M de A et l'on rappelle que l'on identifie le quotient A/M à k grâce à l'application $A \longrightarrow k$, $f \longmapsto f(x)$. Le quotient

$$(2) \qquad \Omega_X(x) = \Omega_X/M\Omega_X$$

est donc un k-espace vectoriel (de rang fini), qui ne dépend que de l'algèbre A , on l'appelle <u>espace cotangent de</u> X <u>au point</u> x . Il est aisé de calculer son rang : si on choisit des polynomes $f_1,\dots,f_m$ qui engendrent H , et si l'on considère la matrice jacobienne $J = \left(\frac{\partial}{\partial X_i} f_j\right)$, en tout point x , on a

$$(3) \qquad \mathrm{rg}\Omega_X(x) + \mathrm{rg}\, J(x) = n ,$$

où $J(x)$ s'obtient en substituant les coordonnées de x dans les coefficients de J . En effet, d'après l'exemple 5, $\Omega_X(x)$ est le conoyau de l'application linéaire de matrice $J(x)$.

<u>Proposition 1</u>. Pour tout entier k , l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathrm{rg}(\Omega_X(x)) \geq k$ est un fermé de X .

En effet, c'est l'ensemble des points où s'annulent tous les mineurs d'ordre $> n-k$ de la matrice J , lesquels sont des polynomes .

<u>Théorème 4.</u> Si X est irréductible de dimension d , l'ensemble des points où $\mathrm{rg}(\Omega_X(x)) = d$ est un ouvert non vide de X .

Soit K le corps des fractions de A , alors on sait par la proposition 6 du § 1 que $\Omega_{K/k}$ s'obtient en localisant $\Omega_{A/k}$. En outre, on sait que le degré de transcendance de K/k est égal à $d=\dim(X)$. On sait donc que le rang de l'espace vectoriel $\Omega_{K/k}$ est égal à d (Bourbaki, Algèbre ch. V , § 9, n° 3, Th. 2) car K/k est séparable puisque k est algèbriquement clos.
Il en résulte qu'il existe $s \in A$, $s \neq 0$, tel que si A_s désigne le localisé de A par rapport à la partie multiplicativement stable formée des multiples de s , alors $\Omega_{A_s/k}$ est libre de rang s . En effet, puisque les dx_i engendrent $\Omega_{A/k}$, leurs images engendrent $\Omega_{K/k}$ comme K-espace vectoriel et l'on peut donc supposer que $dx_1,\dots,dx_d$ forment une base de $\Omega_{K/k}$. On a donc des

.../...

$a_{ij} \in K$ tels que $dx_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} a_{ij} dx_i$. En prenant pour s le produit des "dénominateurs" des a_{ij} , on a la même formule dans $(\Omega_{A/k})_s$ qui n'est autre que $\Omega_{A_s/k}$, ce qui prouve que des $dx_i, 1 \leqslant i \leqslant d$,engendrent $\Omega_{A_s/k}$. Bien entendu ils sont libres dans ce module, car une relation à coefficients non tous nuls en donnerait une autre dans $\Omega_{K/k}$ (car $A_s \subset K$ puisque A est intègre). Nous avons donc prouvé ceci.

Lemme 5. Sous les hypothèses du théorème, il existe $s \in A$, $s \neq 0$, tel que $\Omega_{A_s/k}$ soit libre de rang d .

Il va de soi que le théorème en résulte, car

$\Omega_{A/k}/M\Omega_{A/k} = \Omega_{A_s/k}/M\Omega_{A_s/k}$ pour tout idéal maximal M ne contenant pas s , c'est-à-dire pour tout point x de X où $s(x) \neq 0$.

Corollaire 6. Si X est un fermé algèbrique de $\underline{\underline{A}}^n$, en tout point x de X , le rang de l'espace cotangent $\Omega_X(x)$ est $\geqslant \dim_x(X)$, ce dernier étant défini comme la borne supérieure des dimensions des composantes irréductibles de X passant par le point x .

En effet, soit X' une composante irréductible de dimension maximum parmi celles qui passent par x . Alors l'anneau de fonctions sur X' est un quotient de celui de X d'où il résulte que $\Omega_{X'}(x)$ est un quotient de $\Omega_X(x)$ et on peut supposer X irréductible. Mais alors, l'ensemble des $x \in X$ tels que le $\mathrm{rg}\Omega_X(x) \geqslant d$ est un fermé comme on l'a vu, qui contient un ouvert dense, donc c'est tout.

Théorème 7. On suppose que k est le corps des nombres complexes . Soit X un fermé algèbrique, soit $x \in X$ tel que $\mathrm{rg}\Omega_X(x) = \dim_x(X) = d$. Alors il passe une seule composante irréductible de X par le point x . En outre, il existe un voisinage euclidien U de x dans X (c'est-à-dire un voisinage pour la topologie usuelle de $\underline{\underline{C}}^n$), un voisinage V de l'origine dans $\underline{\underline{C}}^d$ et une application analytique injective $r: V \longrightarrow \underline{\underline{C}}^n$, dont l'image est U .

.../...

Si l'on choisit des équations $f_1,\dots,f_m$ qui engendrent l'idéal des fonctions nulles sur X , l'hypothèse signifie que le rang de la matrice jacobienne $J(f,X)$ calculée au point x est $n-d$. Quitte à changer l'ordre des f_i , on peut donc supposer que la matrice jacobienne $J(f_1,\dots,f_{n-d};X_1,\dots,X_n)$ est de rang $n-d$ au point x . Considérons alors l'ensemble algèbrique X' défini par l'annulation de $f_1,\dots,f_{n-d}$. On peut lui appliquer la version analytique complexe du théorème des fonctions implicites qui nous dit qu'il est paramétré, au voisinage de x , par un ouvert de $\underline{\underline{C}}^d$. Il reste donc à voir que, dans un voisinage ouvert euclidien de x , on a $X' = X$ sachant que, évidemment, on a $X' \supset X$. Ceci résulte du théorème plus précis que voici qui sera prouvé dans la prochaine leçon.

<u>Théorème 9</u> . Soit X un fermé algébrique de l'espace affine $\underline{\underline{A}}^n$ sur un corps algébriquement clos k . Soit $x \in X$ tel que rang $\Omega_X(x) = \dim_x(X)$. Soient $f_1,\dots,f_{n-d}$ des polynomes nuls sur X tels que le jacobien $J(f_1,\dots,f_{n-d};X_1,\dots,X_n)$ soit de rang $n-d$ au point x. Alors, dans un voisinage de Zariski du point x , les f_i engendrent l'idéal H de toutes les fonctions nulles sur X , autrement dit il existe un polynome s , avec $s(x) \neq 0$ tel que les f_i engendrent l'idéal $Hk[X_1,\dots,X_n]_s$, où l'indice s indique la localisation. En outre, une seule des composantes irréductibles de X passe par le point x .

<u>Remarque 10. Espace tangent</u>. Reprenons les notations en vigueur depuis le début du paragraphe. On appelle <u>espace tangent de</u> X <u>au point</u> x <u>le dual</u> $T_x(X)$ <u>de l'espace cotangent</u> $\Omega_X(x)$. Comme ce dernier s'interprète comme le conoyau de l'application linéaire $J:k^m \longrightarrow k^n$, de matrice $J_{i,j} = \frac{\partial}{\partial X_i} f_j(x)$, où $f_1,\dots,f_m$ sont supposés engendrer l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X , il est clair que l'espace tangent s'interprète comme le noyau de l'application transposée ${}^tJ:k^n \longrightarrow k^m$, c'est-à-dire comme l'ensemble des éléments $(a_1,\dots,a_n) \in k^n$ qui satisfont aux m relations linéaires $F_j(a_1,\dots,a_n) = \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} f_j(x).a_i = 0$, $1 \leq j \leq m$.

.../...

En choisissant des coordonnées $X_1,\ldots,X_n$ centrées au point X, la forme linéaire $F_j(X_1,\ldots,X_n)$ s'interprète comme la composante homogène de degré 1 du polynome f_j. En résumé, <u>si les</u> $f_1,\ldots,f_m$ <u>engendrent l'idéal des fonctions nulles sur</u> X, <u>si on choisit des coordonnées centrées au point</u> x, <u>alors l'espace tangent</u> $T_x(X)$ <u>est l'intersection des noyaux des composantes homogènes de degré</u> 1 <u>des</u> f_j. Ce plongement de $T_x(X)$ dans l'espace ambiant $\underline{\underline{A}}^n$ ne dépend pas du choix des f_i. En effet, pour tout polynome f nul sur X, la composante homogène de degré 1 est évidemment combinaison linéaire des F_j donc est nulle sur $T_x(X)$. Bien entendu ce plongement ne dépend pas non plus du choix des coordonnées pourvu qu'elles soient centrées au point x.

<u>Exercice</u> : retrouver ceci en identifiant canoniquement $T_x(\underline{\underline{A}}^n)$ et $\underline{\underline{A}}^n$ et en remarquant que nous venons d'expliciter l'application transposée de l'application canonique $\Omega_{\underline{\underline{A}}^n} \longrightarrow \Omega_X$. Autrement dit, $T_x(X)$ est l'intersection des noyaux des différentielles au point x des fonctions définies sur $\underline{\underline{A}}^n$ et nulles sur X.

11ème leçon

Idéal initial, cône des tangentes, critère Jacobien

Nous développons ici, dans le cas particulier qui nous est utile les préliminaires algèbriques nécessaires pour prouver le théorème 7 de la précédente leçon. Pour le cas général, voir la partie consacrée aux graduations, filtrations et topologies de n'importe quel traité d'algèbre commutative ; pour un premier contact, le livre de Matsumura est recommandé.

§ 1. Idéal initial.

Définition 1. Soit x un point de $\underline{\underline{A}}^n$. Soit M l'idéal maximal de $k[X] = k[X_1,\ldots,X_n]$ correspondant à x .

Pour tout $f \in k[X]$, on note $v_x(f)$ l'ordre du zéro au point x de f , c'est-à-dire le plus grand entier n tel que $f \in M^n$. On appelle forme initiale de f et l'on note $in_x(f)$ la composante homogène de degré $v_x(f)$ de f dans les coordonnées centrées au point x .

Soit I un idéal de $k[X]$, on appelle idéal initial de I et l'on note $in_x(I)$, l'idéal engendré par les formes initiales des $f \in I$.

Il est clair que $in_x(I)$ est un idéal homogène (ou gradué si l'on préfère) de l'anneau des polynomes. Par ailleurs, si l'on pose $A = k[X]/I$, il est immédiat que

(1) $$rg(in_x(I)_1)+rg(\Omega_A(x)) = n \quad , \quad \text{cf leçon 10}$$

Proposition 2. Soient I et J deux idéaux de $k[X]$ avec $I \subset J$. On a $in_x(I) \subset in_x(J)$ et si cette inclusion est une égalité, alors il existe un polynome s , avec $s(x)\neq 0$, tels que les idéaux I_s et J_s du localisé $k[X]_s$ engendrés par I et J soient égaux.

Dans le langage des manuels cités plus haut, on dirait que l'anneau local $k[X]_M$ est séparé pour la topologie M-adique. Nous allons déduire ceci d'une construction géométrique qui a son intérêt propre et fournit d'ailleurs aussi, convenablement adaptée, la preuve de l'assertion la plus générale.

.../...

Lemme 3. Sous les hypothèses de la proposition et si les coordonnées sont centrées au point x, considérons l'idéal $I(x)$ de $k[X_1,\dots,X_n,T]$ engendré par les $f(TX_1,\dots,TX_n)$, avec $f \in I$. Soit encore $I'(x)$ l'idéal des $f \in k[X,T]$ tels qu'il existe un entier k avec $T^k f \in I(x)$. Alors l'image de $I'(x)$

(i) par l'application $k[X,T] \longrightarrow k[X]$, $f \longmapsto f(X,0)$, est $in_x(I)$

(ii) par l'application $k[X,T] \longrightarrow k[X]$, $f \longmapsto f(X,1)$, est I

(iii) par l'application $k[X,T] \longrightarrow k[X]$, $f \longmapsto f(X,a)$, $a \in k, a\neq 0$, est l'image de I par l'isomorphisme $k[X] \longrightarrow k[X]$, $f \longmapsto f(aX)$.

Bien entendu, seul (i) n'est pas complètement trivial. Par ailleurs, notons que, si $f \in k[X]$, alors $f(TX_1,\dots,TX_n) = T^m in_x(f) + T^{m+1} f_{m+1} + \dots$; où $m=v_x(f)$. Par conséquent, dire que $f \in I'(x)$ signifie que l'on a une équation

$$T^k f = T^m in_x(g) + T^{m+1} g_{m+1} + \dots \quad , m=v_x(g) \ , g \in I .$$

Il en résulte que nécessairement $k \leqslant m$, que $f(X,0)$ est nul si $k < m$, et enfin que $f(X,0) = in_x(g)$ si $k=m$, d'où la conclusion.

Lemme 4. Si $I \subset J$ et si $in_x(I) = in_x(J)$, il existe $p \in k[X,T]$ tel que $(1+Tp(X,T))J'(x) = I'(x)$.

Bien entendu, on a $I'(x) \subset J'(x)$, et le lemme s'obtient en appliquant le lemme de Nakayama au module $J'(x)/I'(x)$ sur l'anneau $k[X,T]$ pour l'idéal $Tk[X,T]$. La proposition en résulte en prenant $s = 1+p(X,1)$ en vertu de (ii) du lemme 3. Mais il y a une difficulté si $s(x) = 1+p(x,1) = 0$. Dans ce cas, on applique le (iii), ce qui permet de conclure dans tous les cas, car si $1+Tp(x,T)$ est nul pour toute valeur non nulle de T, alors c'est le polynome nul, ce qui n'est pas.

Corollaire 5. Soient $f_1,\dots,f_m$ des éléments de I dont les formes initiales au point x engendrent l'idéal initial $in_x(I)$, alors il existe un polynome s, avec $s(x)\neq 0$, tel que les f_i engendrent l'idéal localisé I_s de $k[X]_s$.

Appliquer la proposition à l'idéal engendré par les f_i et à I.

La réciproque est fausse : prendre deux polynomes irréductibles ayant

.../...

même forme initiale mais non proportionnels. Elle est pourtant correcte lorsque I est engendré par un seul élément, cf. leçon 6, §2, Remarque 5.

Remarque 6. La réciproque de la proposition 2 est évidente : si s est un polynome non nul au point x et si $I_s = J_s$, on a un entier k tel que $s^k I \subset J$ car I est un $k[X]$-module de type fini, et comme la forme initiale de s^k est une constante non nulle, on a $in_x(I) = in_x(s^k I) \subset in_x(J)$, d'où égalité par symétrie. En fait, on a mieux; introduisons le localisé $k[X]_M$ obtenu en inversant tous les polynomes $s \notin M$, c'est-à-dire tels que $s(x) \neq 0$. On dit que c'est l'anneau local de $\underline{\underline{A}}^n$ au point x. Comme I et J sont de type fini, $I_M = J_M$ signifie que $I_s = J_s$ pour un s convenable, autrement dit $in_x(I)$ ne dépend que de I_M et, réciproquement, si $I_M \subset J_M$ et $in_x(I)=in_x(J)$, alors $I_M=J_M$. On traduira la condition $I_M = J_M$ en disant que I et J coïncident au voisinage de x. Il est immédiat que cette condition entraîne que les fermés X et Y définis par I et J coïncident dans un voisinage de x. La réciproque est exacte si I (resp. J) est l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X (resp. Y), la démonstration est laissée au lecteur.

On peut également introduire l'anneau $A = k[X]/I$ et son localisé A_M qui n'est autre que $k[X]_M/I_M$. Il n'est pas difficile, mais fastidieux, de décrire en termes de A_M seulement l'algèbre (graduée !) quotient $k[X]/in_x(I)$. Les détails sont laissés au lecteur, mais voici comment on procède : on note encore M l'idéal maximal de $k[X]_M$ et N celui de A_M. On munit $\bigoplus_{n \geqslant 0} M^n/M^{n+1}$ et $\bigoplus_{n \geqslant 0} N^n/N^{n+1}$ de stuctures d'algèbres graduées et on déduit de la surjection naturelle $k[X]_M \longrightarrow A_M$ un morphisme surjectif d'algèbres graduées $u: \bigoplus_{n \geqslant 0} M^n/M^{n+1} \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant 0} N^n/N^{n+1}$. Il est facile de voir que si les coordonnées (X_i) sont centrées au point x, la première algèbre s'identifie à $k[X_1,\dots,X_n]$ munie de sa graduation naturelle et que le noyau de l'application u est précisément l'idéal initial, d'où la conclusion.

On pose $gr_N(A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} N^n/N^{n+1}$ et on l'appelle gradué de A pour la filtration N-adique.

§ 2. Cône des tangentes.

C'est l'objet géométrique déduit de l'idéal initial.

Définition 1. Soit I un idéal de $k[X]$, soit $x \in \underline{\underline{A}}^n$. Soit X l'ensemble des zéros communs des éléments de I . On appelle cône des tangentes de X au point x et l'on note $C_x(X)$, le cône défini par l'idéal homogène $in_x(I)$.

Cette définition est cohérente ; en effet, I et sa racine définissent le même cône car on a évidemment $in_x(I) \subset in_x(\sqrt{I}) \subset \sqrt{in_x(I)}$. Ne pas croire que l'inclusion de droite soit une égalité : prendre pour I l'idéal engendré par Y^2-X^3 . Remarquons aussi que le cône des tangentes est contenu dans l'espace tangent, mais que cette inclusion n'est pas une égalité : prendre pour I un idéal engendré par un élément ayant un zéro d'ordre $\geqslant 2$. Il peut aussi arriver que le cône des tangentes soit un espace vectoriel : par exemple $Y^2+X^3+Z^3$ à l'origine. Enfin, il est immédiat que

(1) $$C_x(X \cap Y) \subset C_x(X) \cap C_x(Y)$$

mais il peut fort bien arriver que l'on n'ait pas égalité, par exemple si X et Y sont deux courbes ayant une tangente commune. A ce propos, le lecteur aura deviné que si X est une hypersurface d'équation f , son cône des tangentes est l'hypersurface d'équation $in_x(f)$, cf § 1 .

Remarque 2. Donc si $x \in X \subset \underline{\underline{A}}^n$, on a des inclusions $C_x(X) \subset T_x(X) \subset T_x(\underline{\underline{A}}^n)$ ce dernier étant un espace vectoriel de dimension n . Considérons maintenant une application polynomiale $p:\underline{\underline{A}}^n \longrightarrow \underline{\underline{A}}^m$, il lui correspond, par composition avec p , une application en sens inverse $p':k[Y_1,\dots,Y_m] \longrightarrow k[X_1,\dots,X_n]$, qui est connue quand on connait les polynomes $p'(Y_i) = g_i(X_1,\dots,X_n)$. Soit $x \in \underline{\underline{A}}^n$ et soit $y = p(x)=(g_1(x),\dots,g_m(x))$. On appelle application linéaire tangente au point x l'application linéaire $T_x(p):T_x(\underline{\underline{A}}^n) \longrightarrow T_y(\underline{\underline{A}}^m)$ qui

.../...

correspond [dans des coordonnées centrées en x et $y=p(x)$] au morphisme d'algèbres graduées $Tp':k[Y] \longrightarrow k[X]$, $Tp'(Y_i) = (G_i(X_1,\ldots,X_n))$, où G_i est la composante homogène de degré 1 de g_i . Soient maintenant X et Y des fermés algébriques de $\underline{\underline{A}}^n$ et $\underline{\underline{A}}^m$ et soient I et J les idéaux des fonctions nulles sur X et Y . La condition $p(X) \subset Y$ signifie que $p'(J) \subset I$ (théorème des zéros) ; si elle est satisfaite , je dis que <u>l'application tangente</u> $T_x(p)$ <u>applique</u> $C_x(X)$ <u>dans</u> $C_y(Y)$. En effet, il suffit de prouver que Tp' applique $in_y(J)$ dans $in_x(I)$. Si $f \in J$, et si $k = v_y(f)$, alors la composante homogène de degré k de $p'(f)=f(g_1(X),\ldots,g_m(X))$ est évidemment $in_x(f)(G_1(X),\ldots,G_m(X))$. Comme $v_x(p'(f)) \geqslant k$, cette composante homogène ne peut être que nulle (si on a égalité stricte) ou égale à $in_x(p'(f))$ (si on a égalité) et dans les deux cas, elle appartient à $in_x(I)$.

<u>Remarque 3</u>. Pour prouver le théorème qui suit, il sera utile de donner l'analogue géométrique de la construction du lemme 3 § 1 . Soit x l'origine de $\underline{\underline{A}}^n$, soit X un fermé algèbrique, soit I l'idéal des fonctions nulles sur X . Considérons les applications

$$(1) \qquad \underline{\underline{A}}^{n+1} \xrightarrow{q} \underline{\underline{A}}^{n+1} \xrightarrow{p} \underline{\underline{A}}^n \ , \ \begin{cases} q(X_1,\ldots,X_n,T) = (TX_1,\ldots,TX_n,T) \\ p(X_1,\ldots,X_n,T) = (X_1,\ldots,X_n) \ . \end{cases}$$

Il est évident que

(i) $p^{-1}(X) = X \times \underline{\underline{A}}^1$ et l'idéal $I(x)$ décrit le fermé $(pq)^{-1}(X)$.

(ii) $E = q^{-1}(0)$ est le fermé d'équation $T=0$ et q induit un homéomorphisme $\underline{\underline{A}}^{n+1} - E \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{A}}^{n+1} - E$

Je dis maintenant que

(iii) l'idéal $I'(x)$ décrit l'adhérence X' dans $\underline{\underline{A}}^{n+1}$ de $X'_o = (pq)^{-1}(X) - E$.

En effet, si $h \in I'(x)$, on a $T^k h \in I(x)$, donc $T^k h$ est nul sur X'_o et comme T est partout non nul sur X'_o , alors h est nul sur X'_o donc sur son adhérence X' . Inversement, si h est nul sur X' , alors h est

.../...

nul sur X'_o , donc Th est nul sur $X'_o \cup E \supset (pq)^{-1}(X)$, donc $(Th)^r \in I(x)$, donc $h^r \in I'(x)$, d'où la conclusion.

(iv) En coupant X' par l'hypersurface d'équation $T=1$ (resp. $T=0$) , on retrouve X (resp. $C_x(X)$) .

En effet, c'est ce que dit le lemme 3 § 1 .

Lemme 4. Avec les notations de la remarque, on a $\dim(X) = \dim(X')-1$. En outre, soit Y une composante irréductible de X . Si Y ne passe pas par x , on a $Y \cap E = \emptyset$. Si Y passe par x , on a $\dim(Y \cap E) = \dim(Y)$.

Je dis que l'on a

(1) $$1+\dim(X) = \dim(p^{-1}(X)) = \dim(p^{-1}(X)- E) = \dim(X'_o) = \dim(X') .$$

En effet, la première égalité résulte de $p^{-1}(X) = X \times \underline{\underline{A}}^1$, le seconde du fait que $(p^{-1}(X) - E)$ est un ouvert dense de $p^{-1}(X)$, la troisième du (ii) de la remarque 3 et la dernière du fait que X' est l'adhérence de X'_o .

Par ailleurs, si Y ne passe pas par x , il existe s nul sur Y avec $s(0) \neq 0$, donc $s(TX_1,\dots,TX_n)$ appartient à $I(x) \subset I'(x)$ et est non nul modulo T , donc $Y' \cap E = \emptyset$. On peut aussi dire que $Y'_o = (pq)^{-1}(Y)$ est fermé et ne rencontre pas E . En revanche, si Y passe par x , alors $E \cap Y' = C_x(Y)$ est non vide, mais aussi $E \cap Y'$ est le complémentaire de l'ouvert dense Y'_o de Y' , donc $\dim(E \cap Y') < \dim(Y') = \dim(Y)+1$. Par ailleurs, comme $E \cap Y' \neq \emptyset$ et que E est de codimension 1 , on a $\dim(E \cap Y') \geqslant \dim(Y') - 1$, d'où $\dim(E \cap Y') = \dim(Y)$.

Théorème 5. Soit x un point d'un fermé algèbrique X de $\underline{\underline{A}}^n$, alors la dimension du cône des tangentes $C_x(X)$ est égale à la borne supérieure $\dim_x(X)$ des dimensions des composantes irréductibles de X passant par le point x .

On utilise le lemme précédent en notant Y_i les composantes irréductibles de X . On a $X' = \cup Y'_i$, donc $C_x(X) = X' \cap E = \cup (Y'_i \cap E)$, donc $\dim(C_x(X)) = \dim(X' \cap E) = \sup(\dim(Y'_i \cap E)) = \sup\{\dim(Y_i) , x \in Y_i\}$.

.../...

Corollaire 6. Soit I un idéal de $k[X_1,\dots,X_n]$, soit X le fermé correspondant et soit x un point de X tel que le rang de $\Omega_A(x)$ soit égal à $\dim_x(X)$, où $A = k[X]/I$. Alors, au voisinage du point x , l'idéal I est l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X , et une seule composante irréductible de X passe par x , en outre $C_x(X)=T_x(X)$.

Notons déjà que ce corollaire est exactement ce qui manquait pour le théorème laissé en suspens la dernière fois.

Pour le prouver, introduisons l'idéal J de toutes les fonctions nulles sur X , la composante homogène de degré 1 de $in_x(I)$ notée $in_x(I)_1$ et l'idéal I' qu'elle engendre. On a des inclusions $I' \subset in_x(I) \subset in_x(J)$ d'où des inclusions en sens inverse pour les fermés correspondants $V \supset C' \supset C_x(X)$. Mais comme on sait que $rg(in_x(I)_1)+rg\,\Omega_A(x) = n$, on en déduit que V est un espace vectoriel (ceci est clair) de dimension $rg\,\Omega_A(x) = \dim_x(X) = \dim(C_x(X))$. ceci n'est possible que si $V = C_x(X)$, ce qui entraîne que $I' = in_x(I) = in_x(J)$. La seconde égalité prouve que $I = J$ au voisinage de x . La seule chose qui reste à prouver est qu'une seule composante irréductible de X passe par x . Soit Y une composante irréductible de dimension maximum passant par X et soit K son idéal. On a comme plus haut $I' \subset in_x(I) \subset in_x(J) \subset in_x(K)$, d'où une inclusion $V \supset C_x(Y)$, mais comme $\dim(V)=\dim(C_x(Y))$, on a forcément $I'=in_x(K)$, donc $I=K$ au voisinage de x , d'où la conclusion.

Théorème 7. Soit x un point d'un fermé algèbrique X de $\underline{\underline{A}}^n$. Soit I l'idéal des fonctions nulles sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $rg\Omega_X(x) \leq \dim_x(X)$

(ii) $rg\Omega_X(x) = \dim_x(X)$

(iii) $\dim T_x(X) = \dim_x(X)$

(iv) $T_x(X) = C_x(X)$

(v) l'idéal initial $in_x(I)$ est engendré par sa composante homogène de degré 1 .

(vi) il existe des fonctions $f_1,\dots,f_m$ nulles sur X telles que la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial}{\partial X_i} f_j\right)$, calculée au point x , soit de rang $\geq n-\dim_x(X)$.

/

Il suffit de traduire ce qui vient d'être démontré : ce jeu est laissé au lecteur, qui utilisera en outre que $\dim_x(X) \leqslant \dim(X)$!

Corollaire 8. Soit x un point de l'ensemble X des zéros communs de m polynomes $f_1,\dots,f_m$. Si le jacobien des f_i au point x est de rang m, alors x est un point lisse de X et $\dim_x(X) = n-m$.

Il suffit de noter (par récurrence sur m), que $\dim_x(X) \geqslant n-m$, ce qui résulte de l'inégalité

(1) $$\dim_x(X \cap Y) \geqslant \dim_x(X) + \dim_x(Y) - n$$

que nous n'avons pas démontrée. Mais que l'on peut obtenir comme suit, à partir du fait que $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim(X)+\dim(Y)-n$ si X et Y ont un point commun. On peut considérer le voisinage ouvert de x complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de $X \cap Y$ qui ne passent pas par x, puis un voisinage ouvert U de la forme $\{Y \in \underline{\underline{A}}^n \mid s(y) \neq 0\}$, contenu dans le précédent. Alors $X \cap U$ et $Y \cap U$ s'identifient à des fermés de $\underline{\underline{A}}^{n+1}$ (homéomorphisme) grâce à l'application $p:U \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{n+1}$, $p(y) = (y,s(y)^{-1})$, et on applique le théorème à ces fermés.

Définition 9. On dit qu'un fermé algébrique X est lisse en un point x si les conditions du théorème 7 sont satisfaites.

Théorème 10. L'ensemble des points où un fermé algébrique X est lisse est un ouvert dense. Son complémentaire, appelé lieu singulier de X, est la réunion des lieux singuliers de ses composantes irréductibles et des intersections deux à deux de celles-ci.

On sait déjà que si X est lissse en un point, il ne passe par ce point qu'une seule composante irréductible X'. En outre, sous sa forme (iv), la condition que X est lisse en ce point équivaut à celle que X' l'est, ce qui donne la seconde affirmation du théorème. Pour la première, on peut donc supposer que X est irréductible, auquel cas $\dim_x(X) = \dim(X)$ pour tout $x \in X$, et la condition (i) nous dit que le lieu singulier est l'ensemble des points où $rg\Omega_X(x) \geqslant \dim(X)$ dont on a vu la dernière fois que c'est un fermé strict, d'où la conclusion.

Exercice 11 . Si I est l'idéal des fonctions nulles sur X et si $in_x(I)$ est un idéal premier, alors il ne passe par x qu'une seule composante irréductible. La réciproque est fausse (courbe ayant un point double ordinaire). Montrer par un exemple où $in_x(I)$ n'est pas égal à sa racine, que $C_x(X)$ peut être irréductible bien qu'il passe par x deux composantes irréductibles de X .

Proposition 12. Soit x un point commun, à deux fermés algèbriques X et Y de $\underline{\underline{A}}^n$. Si X et Y sont lisses au point x et si leurs espaces tangents sont en position générale, c'est-à-dire $\dim(T_x(X) \cap T_x(Y)) = \dim(T_x(X))+\dim(T_x(Y))-n$, alors $X \cap Y$ est lisse au point x et l'on a $T_x(X \cap Y) = T_x(X) \cap T_x(Y)$. En particulier, $\dim_x(X \cap Y) = \dim_x(X)+\dim_x(Y) - n$ et l'idéal K des fonctions nulles sur $X \cap Y$ est, au voisinage de point x , engendré par les idéaux I et J de fonctions nulles sur X et Y .

De toutes façons, on a $C_x(X \cap Y) \subset T_x(X \cap Y) \subset T_x(X) \cap T_x(Y)$. Comme

(1) $\dim(C_x(X \cap Y)) = \dim_x(X \cap Y) \geqslant \dim_x(X)+\dim_x(Y)-n = \dim(T_x(X) \cap T_x(Y))$

on a forcément $C_x(X \cap Y) = T_x(X \cap Y) = T_x(X) \cap T_x(Y)$, ce qui prouve que $X \cap Y$ est lisse au point x , détermine son cône tangent et sa dimension. Il reste l'assertion concernant l'idéal K . Bien entendu, on sait de toutes façons que K est la racine de $I+J$. Soient $f_1,\dots f_r$ (resp. $g_1,\dots,g_s$) des fonctions nulles sur X (resp. Y) et dont le jacobien au point x est de rang $r = n-\dim_x(X)$ (resp. $s=n-\dim_x(Y)$) , alors le jacobien de $(f_1,\dots f_r,g_1,\dots,g_s)$ est de rang $r+s = n-\dim_x(X \cap Y)$ en vertu de l'hypothèse de position générale puisque le noyau de la transposée de la première (resp. seconde) matrice jacobienne est $T_x(X)$ (resp. $T_x(Y)$) , d'où la conclusion, grâce au Cor. 6.

Cet énoncé admet une réciproque dont nous laissons la preuve au lecteur qui montrera par des exemples qu'on ne peut ommettre aucune des hypothèses.

Proposition 13. Soit x un point commun à deux fermés algèbriques X et Y de $\underline{\underline{A}}^n$. Supposons que $\dim_x(X \cap Y) = \dim_x(X)+\dim_x(Y)-n$, que $X \cap Y$ soit lisse au point x et enfin que, au voisinage du point x, l'idéal des fonctions nulles sur X soit engendré par ceux des fonctions nulles sur X et nulles sur Y. Alors X et Y sont lisses au point x et en position générale.

12ème leçon

Projection, discriminant. Topologie euclidienne

§ 1. Projection, discriminant.

Pour faire la théorie de la dimension des ensembles algèbriques affines, nous avons utilisé des projections linéaires. Le même procédé va nous servir pour aborder l'étude des points singuliers d'un ensemble algébrique affine X.

Convention 1. Soit $p:E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective et soit K son noyau. Plongeons E dans un espace projectif de même dimension $\overline{E}$ et soit E_∞ l'hyperplan à l'infini. Pour tout fermé algébrique X de E, on note de même $\overline{X}$ son adhérence dans $\overline{E}$ et X_∞ l'ensemble de ses points à l'infini. En particulier, K_∞ s'appelle le centre de projection ; c'est une sous-variété linéaire de dimension dimE-dimF-1 de l'espace projectif E_∞. Bien entendu, pour tout $y \in F$, $p^{-1}(y)$ est une variété linéaire affine parallèle à K et de même dimension, autrement dit, son adhérence est une sous-variété linéaire de $\overline{E}$ de dimension dim(E)-dim(F) contenant K_∞, ce qui permet d'identifier F à l'ensemble de ces sous-variétés de E. Si en outre, on identifie F à un supplémentaire de K dans E, on peut alors décrire p sans sortir de $\overline{E}$: à un point $x \in E$, avec $x \notin K_\infty$, on associe d'abord la sous-variété linéaire projective engendrée par K_∞ et x, puis son intersection avec F. En fait, en ces termes, il est immédiat que, si l'on note $\overline{F}$ l'adhérence de F dans $\overline{E}$, elle s'interprète comme une complétion projective de F et l'application p se prolonge en une application $p : \overline{E} - K_\infty \longrightarrow \overline{F}$, l'image de E étant F et celle de $E_\infty - K_\infty$ étant F_∞.

Proposition 2. Soit $p:E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective, soit I un idéal de l'anneau $O(E)$ des fonctions polynomes sur E, soit X le fermé correspondant et soit $O(X)$ l'algèbre des fonctions polynomes sur X. C'est une $O(F)$-algèbre grâce à l'application qui, à une fonction polynome g sur F, associe la restriction à X de $g \circ p$.

Si $X_\infty \cap K_\infty$ est vide, alors $O(X)$ est un $O(F)$-module de type fini.

On prend des coordonnées homogènes $(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_d,T)$ sur $\overline{E}$, telles que K soit défini par les équations $Y_1=\dots=Y_d=0$ et E_∞ par $T=0$. Moyennant quoi, on a des coordonnées linéaires $(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_d)$ sur E et $(Y_1,\dots Y_d)$ sur F , avec $p(X,Y) = Y$. Enfin, on a vu dans la 7ème leçon que X_∞ est l'ensemble des zéros communs des polynomes homogènes $F(X,Y)$ qui sont les composantes homogènes de degré maximum des $f \in I$. Si $X_\infty \cap K_\infty$ est vide, alors le théorème des zéros dans l'espace projectif K_∞ dit que, pour N assez grand, on a $X_i^N = F_i(X,0)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, où F_i est comme plus haut, d'où un $f_i \in I$ dont le terme de plus haut degré par rapport à l'ensemble des X_j est X_i^N. Dans l'anneau quotient $O(X) = k[X,Y]/I$, considéré comme $k[Y]$-module, X_i^N s'exprime donc linéairement en fonction des monomes X^A, $|A| < N$, ce qui montre que ceux-ci forment un système de générateurs de $O(X)$ comme $O(F)$-module.

Corollaire 3. Soit X un fermé algèbrique de dimension $\leqslant d$ d'un espace affine E de dimension n . Une projection linéaire assez générale sur un espace affine de dimension d satisfait à la condition de la proposition.

Puisque p est déterminée par son centre, qui est une sous-variété linéaire de dimension $n-d-1$ de E_∞ , lui-même de dimension $n-1$, on peut identifier les dites projections aux points de la Grassmanienne $G_{n-d,n}$ de la 8ème leçon . Comme X_∞ est de dimension $\leqslant d-1$, on sait donc que les centres qui ne rencontrent pas X_∞ forment un ouvert dense de la Grassmannienne, ce qui, à la fois, prouve le corollaire et lui donne un sens précis.

Proposition 4. Avec les notations de 1 , posons $n=\dim(E)$, $d=\dim(F)$ et supposons que $X_\infty \cap K_\infty$ soit vide donc $\dim(X) \leqslant d$. Alors, $p(X)$ est un fermé Y de F et les fibres de l'application induite $q:X \longrightarrow Y$ sont finies. Si I est un idéal définissant X , alors $J = I \cap O(F)$ est un idéal définissant Y . En outre, $\dim(X) = \dim(Y)$.De plus, si X est irréductible, il en est de même de Y ,le corps des fonctions $k(X)$ de X est un extension de degré fini du corps des fonctions $k(Y)$ de Y. Enfin, si en outre k est de caractéristique nulle, ou si la projection est assez générale, il existe un ouvert dense U de Y tel que, pour $y \in U$, le cardinal de $p^{-1}(y) \cap X$ soit égal à $(k(X):k(Y))$.

On sait que $\dim(X_\infty \cap K_\infty) \geqslant \dim(X_\infty)+\dim(K_\infty)-n+1 = \dim(X)-1+n-d-1-n+1= \dim(X)-d-1$, car il s'agit de fermés de l'espace projectif E_∞. Si $\dim(X) > d$, cette intersection est de dimension $\geqslant 0$, donc non vide, d'où la première assertion de l'énoncé : $\dim(X) \leqslant d$.

Le fait que $p(X)$ soit le fermé d'idéal J résulte de la démonstration donnée à la fin de la 8ème leçon (lemme de Nakayama). Pour $y \in Y$, la fibre $X \cap p^{-1}(Y)$ est le fermé de E d'idéal $I+MO(E)$, où M est l'idéal maximal de $O(F)$ défini par le point y. L'algèbre quotient $O(E)/(I+MO(E))$ étant aussi $O(X)/MO(X)$, c'est un k-module fini, ce qui assure que la dite fibre est de dimension zéro, donc un ensemble fini. Si X est irréductible, en prenant pour I l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X, alors I est premier, donc aussi J, donc Y est irréductible. Comme $O(X)$ est un module de type fini sur $O(F)$, a fortiori $O(X)$ est un module de type fini sur $O(Y)$, d'où il résulte comme on l'a vu lors de la 5ème leçon que, en localisant $O(X)$ par rapport aux éléments non nuls de $O(Y)$, on trouve $k(X)$, donc $k(X)$ est un $k(Y)$-espace vectoriel de type fini, donc ces deux corps ont même degré de transcendance, donc $\dim(X) = \dim(Y)$, d'où la même égalité sans supposer que X et Y sont irréductibles. Il reste à calculer le cardinal d'une fibre "assez générale", ce qui repose sur un argument de calcul différentiel.

<u>Lemme 5</u>. Soit $p:E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective, soit X un fermé irréductible de E tel que X_∞ ne rencontre pas le centre de projection (cf. 1). Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un point $x \in X$ tel que, si on pose $y = p(x)$, l'application tangente $T_x(X) \longrightarrow T_y(F)$ soit <u>injective</u>.

(ii) Soit $Y = p(X)$. L'extension de corps $k(X)/k(Y)$ est séparable.

(iii) Il existe un ouvert dense U de X tel que, pour tout $x \in U$, l'espace vectoriel $\Omega_{O(X)/O(F)}(x)$ soit nul.

Remarquons pour commencer que l'on a des morphismes de k-algèbres $O(F) \longrightarrow O(Y) \longrightarrow O(X)$ et comme le premier est surjectif, il est immédiat que l'application naturelle ci-dessous est bijective

(1) $$\Omega_{O(X)/O(F)} \xrightarrow{\sim} \Omega_{O(X)/O(Y)} \quad .$$

Notons pour simplifier $\Omega_{X/Y}$ ce $O(X)$-module et convenons que, pour $x \in X$, on pose $\Omega_{X/Y}(x) = \Omega_{X/Y}/M\Omega_{X/Y}$ où M est l'idéal maximal correspondant au point x. En localisant $O(X)$, $O(Y)$ et $\Omega_{X/Y}$ par rapport à $O(Y)-\{0\}$, on trouve $k(X)$, $k(Y)$ et $\Omega_{k(X)/k(Y)}$, car $O(X)$ est fini sur $O(Y)$, cf. 5ème leçon. La condition (ii) signifie que $\Omega_{k(X)/k(Y)} = 0$, ou encore, d'après ce qu'on vient de voir, qu'il existe $s \in O(Y)$, $s \neq 0$, tel que $s\Omega_{X/Y} = 0$. Si on prend pour U l'ouvert de X où s est non nul, on en tire tout de suite que (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par ailleurs, on a une suite exacte de $O(X)$-modules

(2) $$O(X) \otimes_{O(F)} \Omega_{O(F)/k} \longrightarrow \Omega_{O(X)/k} \longrightarrow \Omega_{O(X)/O(Y)} \longrightarrow 0$$

Soit M l'idéal maximal correspondant à un point x de X, en réduisant (2) modulo M et en passant au dual, on trouve une suite exacte

(3) $$T_y(F) \longleftarrow T_x(X) \longleftarrow \Omega_{X/Y}(x)' \longleftarrow 0$$

où le ' signifie le passage au dual. Dire que la condition (i) est satisfaite au point x signifie donc que $\Omega_{X/Y}(x) = 0$. Donc (iii) $\Longrightarrow$ (i). Enfin, (i) $\Longrightarrow$ (ii), car si $\Omega_{X/Y}(x) = 0$, alors par le lemme de Nakayama il existe un polynome s sur E, non nul au point x et tel que $s\Omega_{X/Y} = 0$, qui s'écrit $s\Omega_{O(X)/O(Y)} = 0$ et implique $\Omega_{k(X)/k(Y)} = 0$.

<u>Lemme 6</u>. Soit X est un fermé irréductible de dimension d de E, une projection linéaire assez générale $p: E \longrightarrow F$ avec $\dim(F) \geqslant d$ satisfait à la condition (i) du lemme précédent.

Il existe au point x de X où X est lisse, donc $\dim(T_x(X)) = d$. Il est immédiat que la condition (i) au point x signifie que le noyau de $T_x(E) \longrightarrow T_y(F)$, qui est de dimension $\leqslant n-d$, ne rencontre $T_x(X)$ qu'en zéro, ce qui est vrai pour une projection assez générale.

Lemme 7. Soit I un idéal de $O(E)$ tel que la k-algèbre $O(E)/I$ soit un k-espace vectoriel de rang fini r et que $\Omega_{(O(E)/I)/k} = 0$. Alors le fermé défini par I se compose de r points.

Soit X le fermé défini par I . Soit $x \in X$ et soit M l'idéal maximal correspondant. Le Corollaire 6 du § 2 de la 11ème leçon nous dit que I et M coïncident au voisinage du point x . Autrement dit, le localisé de $O(E)/I$ est égal à celui de $O(E)/M$ qui est évidemment le corps k . Comme $O(E)/I$ est un $O(E)$-module de longueur finie, c'est la somme directe de ses localisés (page 15 du polycopié), donc c'est la somme directe d'autant de copies de k qu'il y a de points dans X , donc il y a r points.

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition 4 . Si la caractéristique de k est zéro, alors on a (ii) du lemme 5 et si la projection est assez générale, on a (i) du lemme 5. Dans les deux cas, on est assuré que $k(X)\otimes_{O(X)}\Omega_{X/Y} = 0$. On a déjà dit que, pour obtenir ce localisé, il suffit de localiser par rapport aux éléments non nuls de $O(Y)$, d'où l'existence d'un $s \in O(Y)$, $s\neq 0$, tel que $s\Omega_{X/Y} = 0$. Par ailleurs, puisque $O(X)$ est un module de type fini sur l'anneau intègre $O(Y)$, il existe un $t \in O(Y)$, $t\neq 0$, tel que le localisé $O(X)_t$ soit libre sur $O(Y)_t$ de rang celui de $k(Y)\otimes_{O(Y)}O(X) = k(X)$ sur $k(Y)$. Considérons l'ouvert dense U de Y où st est non nul. Soit $y \in U$ et soit M l'idéal maximal de $O(F)$ correspondant. L'idéal qui décrit la fibre $X \cap p^{-1}(Y)$ est $K=I+MO(E)$ et l'algèbre $A=O(E)/K = O(X)/MO(X)$ satisfait aux conditions du lemme 7 , l'entier r qui y figure étant $(k(X):k(Y))$, donc $r=\mathrm{card}(X \cap p^{-1}(Y))$.

Bien entendu, si l'on prend F de dimension $d = \dim(X)$, alors $Y = F$ et l'on obtiendra une meilleure information géométrique sur X .

Théorème 8. Soit X un fermé algébrique irréductible de dimension d d'un espace affine E . Pour toute projection linéaire assez générale $p:E \longrightarrow F$, avec $\dim(F)=d$, on a $p(X) = F$ et en outre, il existe un fermé strict Δ de F tel que, si on pose $D = X \cap p^{-1}(\Delta)$ et $U = F-\Delta$, on ait

(i) en tout point $x \in X$ se projettant dans U , X est lisse et l'application linéaire tangente $T_x(X) \longrightarrow T_y(F)$ est bijective, où $y=p(x)$;

(ii) pour tout $y \in U$, $\mathrm{card}(X \cap p^{-1}(y)) = (k(X):k(F))$.

Il suffit d'appliquer ce qui précède, pour trouver un polynome s sur F tel que, en localisant par rapport à s , on ait que $O(X)_s$ est libre sur $O(F)_s$ de rang $(k(X):k(Y))$ et $(\Omega_{O(X)/O(F)})_s = 0$. On prend pour Δ le fermé défini par $s=0$ et l'on a évidemment (ii) . En se reportant aux suites exactes (2) et (3) de la preuve du lemme 5 ,on voit que $\Omega_{X/F}(x)=0$ signifie que l'application tangente au point x est injective, donc bijective car $\dim(T_x(X)) \geqslant \dim_x(X) = \dim(F)$; en outre, on a alors $\dim(X)=\dim(T_x(X))$ donc X est lisse au point x . Comme $\Omega_{X/F}(x) = 0$ si $p(x) \in U$, on en tire (i) , d'où la conclusion.

Corollaire 9. Si k est le corps des nombres complexes, en posant $X' = X \cap p^{-1}(U)$, on a que la projection p induit un revêtement (au sens de la topologie ordinaire) $q:X' \longrightarrow U$.

Pour voir que q est un revêtement, il suffit de vérifier que c'est un homéomorphisme local, ce qu'assure le théorème des fonctions implicites, et que toutes les fibres ont le même nombre de points, ce qui est aussi vrai.

Remarque 10. Supposons que X soit une hypersurface d'équation $f=Z^r+a_1(X)Z^{r-1}+\ldots+a_r(X)Z$, où X est mis pour $X_1,\ldots,X_d$, et que f soit irréductible. On considère la projection $p(X,Z) = X$. Alors on trouve Δ en annulant le discriminant $\delta(X)$ de f , c'est-à-dire le résultant de f et f'_Z . En effet, avec les notations employées jusqu'ici, il n'y a pas besoin de localiser pour que $O(X)$ soit libre sur $O(F) = k[X_1,\ldots,X_d]$ de base $1,Z,\ldots,Z^{r-1}$. En outre $\Omega_{X/Y}$ est le $O(X)$-module quotient du module libre de base dZ par le sous-module engendré par $f'_Z dZ$. Il en résulte que $\Omega_{X/Y}(x) \neq 0$ signifie $f'_Z(x) = 0$ et comme $x \in X$ signifie que $f(x)=0$, il en résulte que l'ensemble des zéros Δ de δ (X) est la projection de l'ensemble D des $x \in X$ tels que l'application linéaire tangente $T_x(X) \longrightarrow T_{p(x)}(F)$ ne soit pas injective. On a coutume de dire que D est <u>le lieu critique</u> de $p:X \longrightarrow F$ et que Δ est <u>le lieu discriminant</u> . On prendra garde que, dans le cas général du Th. 8, nous avons seulement prouvé que Δ contient la projection du lieu critique, qui pourrait fort bien être strictement plus petit. C'est pourtant un théorème non trivial de Zariski que, même si X n'est pas une hypersurface,

toutes les composantes irréductibles de la projection de l'ensemble des points où l'application tangente n'est pas injective sont de codimension 1 (purity of the branch locus) .

<u>Remarque 11.</u> On peut étendre sans difficulté les considérations qui précèdent au cas d'un fermé irréductible X de l'espace projectif P . Il suffit de considérer une variété linéaire K de dimension dim(P)-dim(X)-1 qui ne rencontre pas X , ce qui définit une application $p:P-K \longrightarrow P'$, où P' est un espace projectif de dimension dim(X) , d'où une application $q:X \longrightarrow P'$. Pour étendre le théorème 8 , on étudie ce qui se passe dans le complémentaire E d'un hyperplan H contenant K , ce qui permet d'appliquer le théorème 8 à $X \cap E$. En effet, $X \cap E$ n'est pas vide, car H ne contient pas X , sinon on aurait $X \cap K \neq \emptyset$, et par suite $\dim(X \cap E) = \dim(X)$. En outre, l'adhérence de $X \cap E$ est égale à X , donc ne rencontre pas le centre de projection K .

§ 2 . Topologie enclidienne et topologie de Zariski.

On suppose ici que k est le corps des nombres complexes. Il en résulte que tout fermé algèbrique de l'espace affine (ou projectif) est muni d'une topologie plus fine que la topologie de Zariski et appelée topologie euclidienne (ou usuelle, ou transcendante, ou ce que l'on veut). Comme on l'a vu dans le Corollaire 9 du § 1, si X est un fermé irréductible de dimension d d'un espace affine E , alors on a une projection $q:X \longrightarrow F$, où $F=\underline{\underline{C}}^d$, et une hypersurface Δ de F telle que, si l'on pose $U = F-\Delta$ et $X' = q^{-1}(U)$, alors la restriction $q':X'\longrightarrow U$ de q soit un revêtement (au sens de la topologie euclidienne) de degré $(k(X):k(F))$. Faute de temps, nous ne ferons que les démonstrations les plus faciles, les autres se trouvant exposées à la perfection dans Shafarevich:Basic algebraic geometry, Springer-Verlag, p. 319 .

Lemme 1. U est connexe et dense dans F pour la topologie euclidienne.

En effet, soit $x \in U$. Pour tout $y \in F$, soit $L(y)$ la droite joignant x et y . Puisque $L(y) \cap \Delta$ est un fermé algébrique Z de $L(y)$ qui n'est pas égal à $L(y)$, c'est un ensemble fini et comme $L(y)$ est homéomorphe au plan complexe , il est clair que le complémentaire de Z dans $L(y)$ est un ouvert dense, d'où la conclusion en prenant $y \in U$ puis $y \in \Delta$.

Lemme 2. Soit Z un fermé algèbrique strict d'un fermé algèbrique irréductible X d'un espace affine E . Alors $X-Z$ est dense dans X pour la topologie euclidienne.

Il suffit de montrer que tout point x de Z est limite de points de $X-Z$. En coupant par une variété linéaire générale L passant par x et de codimension $\dim(X)-1$, et en remplaçant X par une composante irréductible de dimension maximum passant par x , on est réduit au cas où X est une courbe (i. e. $\dim(X)=1$) et Z un point. Il suffit alors de prouver qu'il passe par X une branche paramétrée, ce qui peut se faire de deux façons, soit en introduisant la normalisée de X , ce que nous ne savons pas faire, soit en considérant une projection linéaire assez générale sur une droite et en raisonnant comme pour les courbes planes(cf. p. 35 du polycopié), mais dans le cas présent c'est un peu plus délicat.

Lemme 3. Avec les notations du début , X' est connexe.

Ce point est le plus délicat, voir Shafarevich. Nous l'utiliserons de façon essentielle dans la prochaine leçon.

Proposition 4. Un fermé algébrique irréductible est connexe pour la topologie euclidienne.

On choisit une projection assez générale comme plus haut, on sait que X' est dense dans X (lemme 2) , et l'on a admis le résultat pour X'. Le résultat est évidemment valable pour un fermé de l'espace projectif car il en est ainsi du lemme 2 .

13ème leçon

Eclatements linéaires. Modèle de Jung

§ 1 . Eclatements linéaires.

1.1. Soient V et W deux espaces vectoriels et soient P et Q les espaces projectifs correspondants. Une application linéaire $u:V \longrightarrow W$ définit une application $p:P-K \longrightarrow Q$, où K est la sous-variété linéaire de P correspondant au noyau U de $u:V \longrightarrow W$. En effet, l'image par u d'une droite L de V est un droite de W , sauf si $L \subset U$. Si u est injective , $K=\emptyset$, autrement dit p est partout définie, le cas délicat est donc celui où u est surjective mais non bijective, autrement dit, le cas d'une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow U \longrightarrow V \xrightarrow{u} W \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisqu'un point de Q est une droite D de W (passant par 0) , il est clair que "c'est aussi" une sous-espace vectoriel de V contenant U et de dimension $\dim(U)+1$, à savoir $u^{-1}(D)$, ou encore une sous-variété linéaire L de P de dimension $\dim(K)+1$ et contenant K , moyennant quoi l'application p s'interprète comme celle qui, à un point $x \in P-K$ associe la sous-variété linéaire engendrée par x et K . Relire à ce propos le 1 de la 12ème leçon .

<u>Définition 1.2</u>. Soit une suite exacte d'espaces vectoriels (1.1(1)) et soient K,P,Q les espaces projectifs attachés à U,V,W . Soit P' l'ensemble des (x,L) où $x \in P$ et où L est une sous-variété linéaire de P de dimension $\dim(K)+1$ contenant x et K .Considérons les applications

$$(1) \qquad P \xleftarrow{r} P' \xrightarrow{p'} Q \quad , \; r(x,L)=x \; , \; p(x,L)= L \quad ,$$

où l'on identifie L à un point de Q comme on a dit plus haut. On dit que P' est <u>l'éclaté de</u> P <u>de centre</u> K . On dit $r^{-1}(K)$ est <u>le diviseur exceptionnel de</u> P' .

La terminologie est justifiée, car $K \subset P$ détermine la suite exacte de (1.1(1)) . Si K est un hyperplan, $r:P' \longrightarrow P$ est un isomorphisme . Si $K = P$, alors $P' = \emptyset$.

Lemme 1.2.1. On a une bijection naturelle $r^{-1}(K) \longrightarrow K \times Q$. L'application r induit une bijection $P'-r^{-1}(K) \xrightarrow{a} P-K$. L'application $p'a^{-1}:P-K \longrightarrow Q$ n'est autre que l'application p de (1.1) , autrement dit, p' prolonge $p:P-K \longrightarrow Q$.

La démonstration est très facile. Tout d'abord , $r^{-1}(K)$ est

(1) $\quad r^{-1}(K) = \{ (x,L) \, , \, x \in L \, , \, \dim(L)=1+\dim(K), L \supset K, x \in K \}$,

la condition $x \in L$ est donc superflue et comme on a identifié Q à l'ensemble des $L \supset K$ avec $\dim(L)=1+\dim(K)$, on a $r^{-1}(K)=K \times Q$. Si $x \in P-K$, alors la seule paire (x,L) qui convient est celle où L est le sous-espace linéaire engendré par K et x , donc a est bijectif, quant à $p'(x,L)$, c'est le point de Q correspondant à la droite $u(L')$ de W , où L' est le sous-espace vectoriel de V de dimension $\dim(U)+1$ correspondant à L , d'où la conclusion.

Notons que le couple d'applications (r',p') définit une application injective

(2) $\quad (r,p'):P' \longrightarrow P \times Q$

dont nous allons décrire l'image.

Proposition 1.3. Soit P un espace projectif muni de coordonnées homogènes $(X_0,X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s)$. Soit K le sous-espace linéaire d'équations $Y_1=Y_2=\dots=Y_s=0$. Soit Q l'espace projectif de coordonnées homogènes $(V_1,\dots,V_s)$ Alors l'éclaté P' de P de centre K est la partie de $P \times Q$ formée des paires de points de coordonnées $((X,Y),(V))$ satisfaisant aux relations

(1) $\quad Y_iV_k-Y_kV_i \qquad 1 \leqslant i < k \leqslant s$.

Reprenons la suite exacte de (1.1) . Puisque les Y_i sont les équations de K , l'application linéaire u n'est autre que $u(X_0,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s) = (Y_1,\dots,Y_s)$. La condition que le point de coordonnées $((X,Y),(V))$ appartienne à P' est que la droite de V engendrée par le vecteur de coordonnées (X,Y) appartienne à $u^{-1}(D)$, où D est la droite de W engendrée par le vecteur de coordonnées (V) , où encore que $u(X,Y)$ soit proportionnel à (V) , ce qu'expriment exactement les conditions (1) puisque $u(X,Y) = (Y)$.

On remarquera que, dans les équations (1) les variables (X) ne figurent pas. Nous allons expliciter des cartes décrivant P' .

Tout d'abord, soit $P(j)$,$1 \leq j \leq s$, l'ouvert de P où $Y_j \neq 0$. Il ne rencontre pas K , donc, au-dessus de $P(j)$, l'application $r:P' \longrightarrow P$ est bijective, cela se retrouve immédiatement en observant que les équations (1) se résolvent immédiatement.

Soit P_0 l'ouvert de P où $X_0 \neq 0$. On a des coordonnées affines $(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s)$ de P_0 (on fait $X_0=1$) et on sait bien que Q est recouvert par s ouverts de coordonnées Q_j ,$1 \leq j \leq s$, où Q_j est muni de coordonnées affines $(v_1,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_s)$ où le $\hat{}$ désigne l'oubli de la variable correspondante. Si on pose $P'_{0j}=P' \cap (P_0 \times Q_j)$, alors les équations (1), où l'on fait $i = j$ (ici j est fixé) et où l'on remplace V_j par 1 et V_k par v_k pour $k \neq j$ donnent en particulier

(2) $$y_j v_k - y_k = 0 \qquad 1 \leq k \leq s \quad , k \neq j \quad .$$

Les autres équations de (1) sont trivialement conséquence de celles-ci. Bien entendu, ceci montre que $(x_1,\dots,x_r,v_1,\dots,y_j,\dots,v_s)$ est un système de coordonnées affines de P'_{0j} l'application $r:P'_{0j} \longrightarrow P_0$ étant $r(x_1,\dots,x_r,v_1,\dots,y_j,\dots,v_s) = (x_1,\dots,x_r,v_1y_j,\dots,y_j,\dots,v_sy_j)$ en vertu de (2), car r est induit par la première injection du produit $P \times Q$. Le calcul est analogue pour l'ouvert où $X_i \neq 0$ et ce qui précède peut se formuler dans la proposition suivante.

<u>Proposition 1.4.</u> Soit $(X_o,X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s)$ un système de coordonnées homogènes sur P telles que $Y_1=\dots=Y_s = 0$ soient les équations de K .

(i) Soit $P(j)$, $1 \leq j \leq s$, l'ouvert de P où $Y_j \neq 0$. Alors $r:P' \longrightarrow P$ induit un isomorphisme $r^{-1}(P(j)) \xrightarrow{\sim} P(j)$ et bien entendu $(x_o,\dots,x_r,y_1,\dots,\hat{y}_j,\dots,y_s)$ est un système de coordonnées affines sur $P(j)$, où le $\hat{}$ indique l'oubli du symbole correspondant.

(ii) soit P_i , $0 \leq i \leq r$, l'ouvert où $X_i \neq 0$. Alors on a un système de coordonnées affines $(x_0,\dots \hat{x}_i,\dots x_r, y_0,\dots y_s)$ de P_i . En outre, $r^{-1}(P_i)$ est recouvert par des ouverts P'_{ij}, $0 \leq j \leq s$, et, dans P'_{ij} , on a des coordonnées $(u_0,\dots \hat{u}_i,\dots,u_r,v_0,v_1,\dots,v_s)$ et en outre, $r(P'_{ij})$ est contenu dans P_i , l'application étant définie par la formule :

(1) $\quad r(u,v)=(u,v_0v_j,v_1v_j,\dots,v_j,\dots,v_sv_j)$, c'est à dire $x_e = u_e$, $y_k = v_jv_k$ pour $k \neq j$ et $y_j = v_j$.

Dans ces coordonnées, l'équation $P_{ij} \cap r^{-1}(K)$ est $v_j = 0$.

Exemple 1.5. (Eclater un point dans le plan). Nous supposons que $\dim(P)=2$ et $\dim(K) = 0$. En outre, nous choisissons des coordonnées homogènes (X,Y,T) et supposons que K est défini par $X=Y=0$. En vertu de (i) ,il suffit de regarder ce qui se passe au-dessus du complémentaire de l'hyperplan $T=0$, c'est l'espace affine $\underline{\underline{A}}^2$ avec coordonnées (x,y) . Alors P' est recouvert par deux ouverts : P'_1 de coordonnées (x',y') , avec changement de variables $x=x',y=x'y'$, l'équation du diviseur exceptionnel étant $x'= 0$ l'autre ouvert P'_2 , avec coordonnées (x'',y'') , formules $x=x''y'',y=y''$, l'équation diviseur exceptionnel étant $y''=0$. Bien sûr, $r^{-1}(0)$ est une droite projective.

Exemple 1.6. (Eclater une droite dans l'espace). On prend des coordonnées homogènes (X,Y,Z,T) sur l'espace projectif P de dimension 3 et on éclate K d'équations $X=Y=0$, c'est-à-dire une droite. Cette fois-ci, K rencontre les deux ouverts de coordonnées $Z\neq 0$ et $T\neq 0$ et les formules sont analogues pour les deux. Nous ne traitons que le cas où $T \neq 0$, en prenant les coordonnées affines (x,y,z) . Alors l'image réciproque est recouverte par deux ouverts affines l'un des coordonnées (x',y',z') avec $x=x',y=x'y',z=z'$, l'équation du diviseur exceptionnel étant $x'=0$, l'autre ouvert a pour coordonnées (x'',y'',z'') , avec $x=x''y'',y=y'',z=z''$, l'équation du diviseur exceptionnel étant $y'' = 0$.

Exemple 1.7. (Eclater un point dans l'espace). Cette fois-ci, on éclate l'origine de coordonnées $(0,0,0,1)$ dans P . Il suffit de considérer ce qui se passe au-dessus de l'ouvert où $T \neq 0$, dans celui-ci, on a des coordonnées affines (x,y,z) et son image inverse est recouverte par trois ouverts : P_1 de coordonnées (x',y',z') , avec $x=x', y=x'y', z=x'z'$, l'équation du diviseur exceptionnel étant $x'=0$; P_2 de coordonnées (x'',y'',z''), $x=x''y'', y=y'', z=z''y''$, le diviseur exceptionnel étant $z''=0$ et enfin P_3 de coordonnées (x''',y''',z'''), avec $x=x'''z''', y=y'''z''', z=z'''$ l'équation du diviseur exceptionnel étant $z'''=0$.

Remarque 1.8. Eclatement dans l'espace affine. Si on a un sous-espace affine K_o d'un espace affine P_o , on peut plonger P_o dans sa complétion projective P et prendre l'adhérence K de K_o puis former l'éclaté $r:P' \longrightarrow P$ de P de centre K . Si on pose $P'_o=r^{-1}(P_o)$, on a donc une application $r:P'_o \longrightarrow P_o$ que l'on appelle éclaté de P_o de centre K_o . En prenant des coordonnées affines $(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s)$ de P_o telles que $y_1=\ldots=y_s=0$ soient des équations de K_o , on a aisément une description de P'_o en appliquant (1.4(ii)): il suffit de considérer des coordonnées homogènes $(X_o,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_s)$ de P , et de considérer ce qui se passe au-dessus de l'ouvert P_o où $X_o \neq 0$. Donc P'_o est recouvert par les ouverts P'_{oj} , $1 \leq j \leq s$, dans ce dernier les coordonnées sont $(x_1,\ldots,x_r,v_1,\ldots,v_s)$, avec $y_k=v_kv_j$ si $k\neq j$ et $y_j=v_j$, le diviseur exceptionnel ayant pour équation $v_j=0$.

Définition 1.9. Soit K une sous-variété linéaire de l'espace projectif P et soit X un fermé algèbrique de P . Soit $r:P' \longrightarrow P$ l'éclaté de P de centre K . On appelle transformé strict de X l'adhérence pour la topologie de Zariski de P' de $r^{-1}(X-X\cap K) = r^{-1}(X) - r^{-1}(K)$.

Puisque r induit un isomorphisme $P'-r^{-1}(K) \longrightarrow P-K$, il est clair que cet isomorphisme identifie $X-X\cap K$ à un fermé de $P'-r^{-1}(K)$, donc la définition a un sens. Il est très facile, au moins en théorie, de déterminer le transformé strict X' de X . Pour cela , il suffit évidemment de déterminer son intersection avec chacun des ouverts décrits dans (1.4) . Dans le cas de (1.4(i)), il n'y a rien à dire, dans l'autre cas, on utilise le lemme suivant qui a déjà été utilisé (en le redémontrant à chaque fois) pour l'étude des points à l'infini d'un fermé affine et pour celle du cône des tangentes en un point.

Lemme 1.9.1. Soit E un espace affine et soit H une hypersurface d'équation $T=0$. Soit $O(E)$ l'anneau des fonctions polynomes sur E, soit I un idéal de $O(E)$ et soit X le fermé de E défini par I. Alors le fermé défini par l'idéal $I' = \{f \in O(E) \mid \exists\, r, T^r f \in I\}$ est l'adhérence dans E de $X-X \cap H$. Soit X' cette adhérence. Si I est l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X, alors I' est l'idéal de toutes les fonctions nulles sur X'. En outre, si I est engendré par un seul élément g, si T^r divise g et si T^{r+1} ne divise pas g, alors I' est engendré par g/T^r.

Il suffit de noter que l'anneau des fonctions régulières sur $E-H$ est le localisé $O(E)_T$. Pour la dernière affirmation, il faut en outre utiliser le fait que l'anneau de polynomes $O(E)$ est factoriel.

D'après la proposition 1.4, pour connaître le transformé strict de X, il suffit de le connaître au-dessus de chaque ouvert affine de P, autrement dit, dans le cas traité en (1.8). C'est d'ailleurs ainsi que l'on travaille "dans la pratique".

Proposition 1.10. Soit X un fermé de l'espace affine P_o. Soit $r:P'_o \longrightarrow P_o$ l'éclaté de P_o de centre K_o et soit X' le transformé strict de X, c'est-à-dire l'adhérence de $r^{-1}(X)-r^{-1}(K_o)$. Soient $f_a(x,y)$ des fonctions sur P_o qui engendrent l'idéal des fonctions nulles sur X, avec les notations de (1.8). Soit I l'idéal engendré par les polynomes sur P'_{oj}, $1 \leqslant j \leqslant s$,

(1) $$g_a(x,v)=f_a(x_1,\dots,x_r,v_1v_j,\dots,v_j,\dots,v_rv_j) .$$

Alors l'idéal I'_j de $X' \cap P'_{0j}$ dans P'_{oj} est $I'_j=\{f \in O(P'_{0j}) \mid \exists\, r, v_j{}^r f \in I\}$. En particulier, si $f_a \in (y_1,\dots,y_r)^n$, alors g_a est divisible par $v_j{}^r$, donc $g'_a = g_a/v_j{}^r$ appartient à I'_j. Si l'idéal de X est engendré par un seul élément $f(x,y)$ et si $f \in (y)^n$, mais $f \notin (y)^{n+1}$, alors l'idéal I'_j est engendré par $f(x,v_1v_j,\dots,v_j,\dots,v_sv_j)/v_j{}^n$.

Il n'y a rien à démontrer, sauf le fait évident que si $f \in \mathcal{O}(P_o)$, alors pour que le composé $f o r \in \mathcal{O}(P_{oj})$ soit divisible par v_j^n, il faut et il suffit que $f \in (y)^n$: examiner le changement de variable !

Commentaire 1.11. En étant un peu plus savant, on aurait pu définir avec une généralité bien plus grande, et surtout de façon intrinsèque, l'éclaté de X de centre $X \cap K$, qui se révèlerait être ce que nous avons appelé transformé strict. Pour la définition générale, voir les Eléments de Géométrie Algèbrique de Dieudonné et Grothendieck, Ch. III. Contentons nous d'observer que si R est une sous-variété linéaire de l'espace projectif P, l'éclaté de R de centre $R \cap K$ s'identifie au transformé strict de R de centre K. En effet le premier est l'ensemble des paires $(x,M), x \in R$, M étant une sous-variété linéaire de R de dimension $\dim(K \cap R)+1$ contenant $K \cap R$ et x. A une telle paire, on associe (x,L), où L est la sous-variété linéaire de P de dimension $\dim(K)+1$ contenant M et K, qui est parfaitement définie par L, et ceci définit déjà une application $R' \longrightarrow P'$, il reste à voir que son image est bien le transformé strict de R, ce qui est aisé. Cette remarque est importante. En effet, ayant éclaté K dans P, on trouve un P' qui se trouve plongé grâce à Segre dans un espace projectif P'' de dimension très grande, à savoir $\dim(V \otimes W)-1 = (\dim(P)+1)(\dim(P)-\dim(K))-1$, (cf. les manuels) et on saura donc définir le transformé strict de P' dans un éclatement linéaire de P'' etc. Ce sont des opérations de ce type qui interviendront dans l'étude des modèles de Jung et plus spécialement dans leur désingularisation. Bien entendu, cette obligation qui nous est faite, faute de généralité suffisante, de tout ramener à des éclatements linéaires est une maladresse qui devrait inciter le lecteur à assimiler au plus vite la notion d'éclatement en général. On en trouvera un exposé succint dans mon cours de 1971-72, Etude locale des singularités.
Pour une première approche, il suffit de savoir décrire localement l'éclaté grâce à (1.8) et le transformé strict grâce à (1.10) et de savoir qu'un objet global existe.

§ 2 . Modèles de Jung.

Nous exposons ici la partie élémentaire, mais qui est aussi la partie décisive, de la méthode de Jung pour prouver la désingularisation des surfaces (cf. appendice). L'idée originale est dûe à Jung (1908), la première preuve rigoureuse et complète l'utilisant est de Walker (1935), l'idée d'introduire une fraction continue décrivant la situation est de Hirzebruch (1953) et enfin la présentation que voici est une mise en forme élémentaire de considérations que l'on trouve dans J. Lipman, Introduction to resolution of singularities, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 29, 1975, que l'on consultera avec fruit pour avoir une vue d'ensemble de la question. On trouvera une autre présentation de la même démonstration dans Laufer, Topology of normal singularities of Surfaces. Bien entendu $k = \underline{\underline{C}}$.

Théorème 2.1. Soit X un fermé irréductible de dimension 2 d'un espace affine E . Supposons qu'il existe une projection linéaire $p:E \longrightarrow \underline{\underline{A}}^2$ telle que, si l'on note Δ la réunion des axes de coordonnées de $\underline{\underline{A}}^2$ (donc $\Delta = V(xy)$) , alors la restriction de p

(1) $q':X' \longrightarrow U$, $U = \underline{\underline{A}}^2 - \Delta$, $X' = X \cap p^{-1}(U)$,

soit un revêtement. Alors

(i) Il existe deux fonctions analytiques u et v sur X' qui identifient X' au complémentaire des axes dans $\underline{\underline{C}}^2$ et telles que, dans ces coordonnées, l'application $q':X' \longrightarrow U$ s'écrive

$q'(u,v) = (v^{-pr}u^{nr}, v^d)$, où d,n,p,r sont des entiers naturels, avec $(n,p)=1$ et $nrd \neq 0$. En outre nrd est le degré du revêtement.

(ii) Considérons la surface M de $\underline{\underline{A}}^3$ d'équation $Z^n - XY^p = 0$ et l'ouvert M' de M où Z est non nul. Alors l'application $g:\underline{\underline{A}}^3 \longrightarrow \underline{\underline{A}}^2$, $g(X,Y,Z) = (X^r, Y^d)$, induit une application $\mu : M \longrightarrow \underline{\underline{A}}^2$ qui est telle que $O(M)$ est un module de type fini sur $O(\underline{\underline{A}}^2)$ et en outre elle induit un revêtement $\mu' : M' \longrightarrow U$. Enfin, l'application $h:M' \longrightarrow \underline{\underline{C}}^{*2}$, $h(X,Y,Z)=(Z,Y)$ est un isomorphisme entre revêtements de U . (Voir diagramme p. 10).

L'hypothèse faite sur $q':X' \longrightarrow U$ signifie que le lieu discriminant de $q:X \longrightarrow \underline{\underline{A}}^2$ est contenu dans la réunion des axes de coordonnées, ce qui assure bien d'après la leçon précédente que $q':X' \longrightarrow U$ est un revêtement fini connexe de U . Comme on les connait tous, on en déduit (i) . Quant à (ii), c'est une constation élémentaire. Passons aux détails. Le revêtement universel de $U=\underline{\underline{C}}^{*2}$ est

(1) $\varepsilon:\underline{\underline{C}}^2 \longrightarrow \underline{\underline{C}}^{*2}$, $\varepsilon(x,y) =(e^{2\pi ix},e^{2\pi iy})$,

le groupe fondamental étant le noyau de ce morphisme de groupes, c'est-à-dire $\mathbb{Z}^2$. Un revêtement fini correspond donc à un quotient fini de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire à un sous-groupe G de $\mathbb{Z}^2$ qui soit libre de rang 2 , c'est-à-dire à une matrice $m =\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul, modulo multiplication à droite par $n \in GL(2,\mathbb{Z})$. Quitte à échanger les colonnes, on peut supposer que $\text{dét}(m) > 0$. En introduisant le pgcd e de c et d et et en prenant $n = \begin{pmatrix} d/e & f \\ -c/e & g \end{pmatrix}$, on peut faire que $c=0$ et $d > 0$, donc $a > 0$, donc $m =\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. En divisant b par a , ce qui revient à faire $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut faire que $0 \leqslant -b < a$, et enfin, en faisant apparaître le pgcd r de a et b , on a finalement $m = \begin{pmatrix} nr & -pr \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec $n > 0$,$d > 0$,$0 \leqslant p < n$.

L'application linéaire $\tilde{\alpha}:\underline{\underline{C}}^2 \longrightarrow \underline{\underline{C}}^2$ de matrice m applique $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ donc détermine $\alpha: \underline{\underline{C}}^{*2} \longrightarrow \underline{\underline{C}}^{*2}$, $\alpha(u,v) = (u^{nr}v^{-pr},v^d)$, qui est le revêtement cherché, car $\tilde{\alpha}$ induit sur les groupes fondamentaux l'application linéaire de matrice m . On a donc déjà un homéomorphisme $\beta : X' \longrightarrow \underline{\underline{C}}^{*2}$ qui satisfait à $\alpha\beta = q'$. Comme α et q' sont des isomorphismes analytiques locaux, il est de même de β et comme celui-ci est un homéomorphisme, c'est un isomorphisme analytique donné par deux fonctions analytiques partout non nulles u et v, ce qui prouve (i).

Avant de prouver (ii), cherchons le lieu singulier de M.

Lemme 2.2. Soit M la surface d'équation $f=Z^n-XY^p$. Le lieu singulier de M est (a) vide si $n=1$ ou $p=0$, (b) l'origine si $n \geqslant 2$ et $p=1$ (c) la droite $Z=Y=0$ si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$. Dans tous les cas, si M' est l'ensemble des points où $Z \neq 0$, on a un isommorphisme analytique $h:M' \longrightarrow \mathbb{C}^{*2}$, $h(X,Y,Z) = (Z,Y)$, et le composé $\alpha h:M' \longrightarrow \mathbb{C}^{*2}$ est induit par l'application $g:\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $g(X,Y,Z) = (X^r,Y^d)$.

Le lieu singulier se détermine en résolvant le système $f'_X=f'_Y=f'_Z=0$. La seconde affirmation est conséquence évidente du théorème des fonctions implicites et du fait que, sur M' , on a $X=Z^n/Y^p$ et la troisième est un calcul trivial.

Nous avons grâce à M',X' et α trois descriptions du même revêtement de U et ceci prouve (ii) , mais il reste à vérifier que $O(M)$ est fini sur $O(A^2)$, c'est-à-dire $A=k[X,Y,Z]/(Z^n-XY^p)$ fini sur $k[u,v]$, avec $u = X^r$, $v = Y^d$. Il est immédiat que la sous-algèbre $k[X,Y]$ de A est finie sur $k[u,v]$ et il est clair que A est finie sur $k[X,Y]$, puisque Z satisfait à une équation unitaire.

Rappelons les notations par un diagramme commutatif où les flèches sans nom sont les inclusions naturelles et où μ est induit par g

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\mu"'] & M' \arrow[l] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\mu'"] & \mathbb{C}^{*2} \arrow[d, "\alpha"] & X' \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r] \arrow[dl, "q'"] & X \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{C}^2 & & \mathbb{C}^{*2} \arrow[ll] \arrow[rr] & & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$

Le point essentiel est que l'on a prolongé le revêtement $\alpha:\mathbb{C}^{*2} \longrightarrow \mathbb{C}^{*2}$ en un morphisme fini $\mu:M \longrightarrow \mathbb{C}^2$, où M est un surface algèbrique simple. Le lieu singulier de M est une variété linéaire (2.2) , on peut donc l'éclater, d'où $r(1):M(1) \longrightarrow M$, nous allons voir que le lieu singulier de $M(1)$ est aussi une variété linéaire, ce qui permet de l'éclater, d'où $r(2):M(2) \longrightarrow M(1)$ et ainsi de suite. Nous verrons également qu'au bout d'un nombre fini de fois, on trouve un $M(k)$ lisse. Traitons d'abord le cas (b) du lemme 2.2 où le lieu singulier est un point.

Lemme 2.3. Soit M la surface d'équation $f = Z^n - XY$, $n \geq 2$. Soit $M(1)$ qui s'en déduit en éclatant le lieu singulier, c'est-à-dire l'origine. Alors, le lieu singulier de $M(1)$ est au plus un point, contenu dans un ouvert de coordonnées Z',X',Y' , avec équation $Z'^{n-2}-X'Y'$, changement de variable $X = X'Z', Y = Y'Z', Z=Z'$ diviseur exceptionnel $Z' = 0$.

L'éclaté $M(1)$ est recouvert par trois ouvert (cf.1.10). Dans le premier on a des coordonnées X',Y',Z' , avec $X=X'$, $Y=X'Y'$ et $Z=X'Z'$, d'où $g(X',Y',Z') = f(X,Y,Z) = Z'^n X'^n - X'^2 Y'$. D'après (1.10) , pour trouver l'équation de $M(1)$ dans cet ouvert on divise autant que possible par X' qui est le diviseur exceptionnel et l'on trouve $h=Z'^n X'^{n-2}-Y'$ qui est lisse car $h'_{Y'}=1$ ne s'annule pas. Même chose dans l'ouvert obtenu en échangeant les rôles de X et Y . Il reste l'ouvert de coordonnées X',Y',Z' avec $X=Z'X', Y=Z'Y'$ et $Z=Z'$, d'où $f(X,Y,Z) = Z'^n - Z'^2 X'Y'$ et cette fois, il faut diviser autant que possible par Z' , ce qui donne $Z'^{n-2}-X'Y'$ comme annoncé, donc $M(1)$ est lisse si $n \leq 3$, et sinon il y a un seul point singulier.

Lemme 2.4. Soit M la surface d'équation $Z^n - XY^p$ avec $2 \leq n \leq p$. Le lieu singulier est la droite d'équation $Z=Y=0$. Soit $M(1)$ obtenu en l'éclatant, son lieu singulier est contenu dans un ouvert de coordonnées X',Y',Z' , avec $X=X', Y=Y', Z=Z'Y'$, diviseur exceptionnel $Y' = 0$ et équation $Z'^n - X'Y'^{p-n}$.

$M(1)$ est recouvert par deux ouverts : dans celui de l'énoncé, le diviseur exceptionnel a pour équation $Y'=0$ et $f(X,Y,Z)=Z'^n Y'^n - X'Y'^p$ que l'on peut diviser par Y'^n . Dans l'autre, le changement de coordonnées est $X=X', Z=Z', Y=Z'Y'$, avec diviseur exceptionnel $Z'=0$ et $f(X,Y,Z) = Z'^n - X'Y'^p Z'^p$ que l'on peut diviser par Z'^n , ce qui donne $h=1-X'Y'^p Z'^{p-n}$ qui est non singulière, d'où la conclusion.

Lemme 2.5. Soit M la surface d'équation $Z^n - XY^p$ avec $2 \leq p \leq n$. Le lieu singulier est la droite d'équation $Z=Y=0$ et en l'éclatant on trouve $M(1)$ dont le lieu singulier est contenu dans un ouvert de coordonnées X',Y',Z' , avec $X=X', Y=Z'Y', Z=Z'$, diviseur exceptionnel $Z'=0$ et équation $Z'^{n-p}-X'Y'^p$.

$M(1)$ est recouvert par deux ouvert : celui de l'énoncé, où $f(X,Y,Z) = Z'^n - X'Y'^p Z'^p$ que l'on peut diviser par Z'^p, d'où l'équation annoncée et celui où le changement de variables est $X=X', Y=Y', Z=Z'Y'$, avec diviseur exceptionnel $Y'=0, f(X,Y,Z) = Z'^n Y'^n - X'Y'^p$ que l'on peut diviser par Y'^p, ce qui donne $h = Z'^n Y'^{n-p} - X'$ qui est lisse car $h'_{X'} = 1$.

Proposition 2.6. Soit M la surface d'équation

(1) $\qquad Z^n - XY^p = 0 \qquad , n \geqslant 2 , (n,p) = 1$

On a une suite de surfaces quasi-projectives et de morphismes

(2) $\qquad M = M(0) \xleftarrow{r(1)} M(1) \xleftarrow{r(2)} M(2) \ldots\ldots M(N-1) \xleftarrow{r(N)} M(N) = \underline{M}$

telles que

(i) $\underline{M}$ est lisse

(ii) pour $0 \leqslant i < N$, le lieu singulier de $M(i)$ est lisse et contenu dans un ouvert de coordonnées $U(i)$ et $r(i+1):M(i+1) \longrightarrow M(i)$ s'obtient en éclatant ce lieu singulier . De plus , $r(i+1)$ applique $U(i+1)$ dans $U(i)$ et enfin le composé $r:\underline{M} \longrightarrow M$ induit une bijection entre $\underline{M}-r^{-1}(0)$ et $M-\{0\}$.

Grâce aux lemmes précédents, on obtient (ii) pour $i=0$. On sait en outre que le lieu singulier de $M(1)$ est lisse et contenu dans un ouvert de coordonnées avec une équation du même type que (1) , où (n,p) est remplacé par $(n-2,p)$ si $p=1$, par $(n-p,p)$ si $n \geqslant p$ et par $(n,p-n)$ si $n < p$. On peut donc éclater à nouveau le lieu singulier et pour étudier $M(2)$, il suffit de regarder ce qui se passe au-dessus de l'ouvert affine $U(1)$, puisque le lieu singulier y est contenu. On peut à nouveau appliquer l'un des trois lemmes et puisque n ou p décroit strictement, on finit par avoir $n=1$ ou $p=0$, c'est-à-dire une surface lisse.

Il reste à prouver que, à chaque pas, $r(i+1):M(i+1) \longrightarrow M(i)$ est une bijection au-dessus de $M(i) - \{0\}$, où 0 est l'origine de l'ouvert de coordonnées $U(i)$. Il en résultera bien que $r:\underline{M} \longrightarrow M$ est bijectif au-dessus de $M-\{0\}$. A chaque pas, il suffit de regarder ce qui se passe au-dessus de

$U(i)-\{0\}$, c'est-à-dire que l'on est dans la situation de l'un des trois lemmes. Pour le premier, c'est évident car on éclate $\{0\}$. Pour chacun des deux autres, on a deux ouverts, ce qui fait quatre cas à considérer et c'est bien facile. Les détails sont laissés au lecteur. Voici une autre méthode de calcul qui donne tout de suite une description globale du diviseur exceptionnel.

Lemme 2.7. Soit P un espace affine (ou projectif) , soit K la sous-variété linéaire d'équation $y_1=\dots=y_s=0$, où les y_i sont une partie d'un système de coordonnées et soit X une surface d'équation $f(x,y)=0$. Définissons un entier naturel m par la condition que $f\in(y_1,\dots,y_s)^m$ et $f\notin(y_1,\dots,y_s)^{m+1}$.
Alors, on a un développement

(1) $$f(x,y) = \sum f_A(x,y)y^A$$

où A parcourt les multi-indices de poids m et les f_A sont des polynomes.
En outre, soit Q l'espace projectif de coordonnées homogènes $(V_1,\dots,V_s)$, alors l'éclaté X' de X est le fermé de $P\times Q$ d'équations

(2) $$y_iV_j-y_jV_i = 0 \qquad , 1\leqslant i<j\leqslant s \quad ,$$

(3) $$\sum f_A(x,y)V^A \qquad .$$

On notera que le développement (1) n'est pas forcément unique mais que, si on le change, le système (2)+(3) ne change pas. Par ailleurs, il résulte de (1.3) que l'éclaté P' de P est le fermé de $P\times Q$ dont les équations sont (2) . Il reste à voir que l'équation (3) , qui est homogène en les V_i , donne dans les différents ouverts qui recouvrent P' les équations prévues par (1.10) , ce qui est facile.

2.8. Appliquons ceci au cas où P est l'espace affine de dimension 3 de coordonnées (x,y,z) , où $f=z^n-xy^p$. Bien entendu, on éclate le lieu singulier K d'équations $y=z=0$, donc on introduit des coordonnées homogènes (U,V) sur Q et les équations deviennent

(1) $$yV-zU=0 \qquad , \qquad z^{n-m}U^m-xy^{p-m}V^m \quad ,$$

où l'entier m de l'énoncé est ici $m=\inf(n,p)$. Pour trouver le diviseur exceptionnel $r^{-1}(K)$, on fait donc $z=y=0$ et on trouve la partie de $\underline{\underline{A}}^1 \times \underline{\underline{P}}^1$ d'équation $z^{n-m}U^m - xy^{p-m}V^m$. Si $p < n$, alors $m=p$ et l'on trouve $xV^m=0$. Donc $r^{-1}(K)$ est la réunion de $\underline{\underline{A}}^1 \times \{(1,0)\}$ et de $\{0\}\times\underline{\underline{P}}^1$. La première est une droite affine (c'est le lieu singulier de $M(1)$) si $1 < n-p$) se projettant bijectivement sur le lieu singulier K et la seconde une droite projective se projettant toute entière sur l'origine, ce qui prouve bien que $M(1) \longrightarrow M$ est bijectif au-dessus de $M-\{0\}$. Si $p \geqslant n$, alors $m=n$ et il faut distinguer deux cas : ou bien $p > n$, alors l'équation devient $U^m=0$, donc $r^{-1}(K) = \underline{\underline{A}}^1\times\{(0,1)\}$ qui est une droite affine se projettant isomorphiquement sur K , donc $M(1) \longrightarrow M$ est <u>bijectif</u>. Enfin, si $p=n=m$, alors l'équation de $r^{-1}(K)$ devient U^m-xV^m , donc pour $x\neq 0$ la fibre de x est formée des m points $(x,(u,1))$, avec $u^m=x$ et pour $x=0$, sa fibre est l'unique point $(0,(0,1))$. Dans ce cas, $M(1) \longrightarrow M$ n'est pas bijectif en dehors de l'origine. Heureusement, le cas $p=n$ ne se présente pas sous les hypothèses de l'énoncé. En effet, l'hypothèse que n et p sont premiers entre eux, qui n'a pas servi jusqu'ici, est conservée quand on remplace (n,p) par $(n-p,p)$ ou $(n,p-n)$.

APPENDICE

Désingularisation des surfaces

Le corps de base est celui des nombres complexes. Nous allons donner la démonstration de Jung-Walker dont il est parlé dans la 13ème leçon. La seule difficulté est de globaliser les calculs locaux faits dans cette leçon sur les modèles de Jung, ce sera fait au § 2, sans plus hésiter sur l'emploi de moyens un peu puissants de géométrie algébrique ou analytique. L'idée géométrique consiste à choisir une projection linéaire assez générale et à utiliser les résultats du § 1 pour faire que le lieu discriminant de cette projection soit un diviseur à croisements normaux. On notera que nous faisons quelques emprunts à l'exposé de Mme Michèle Raynaud (SGA 1 XII, Lecture Note 305, Springer Verlag). Il faut dire que le prolongement naturel de cet appendice est la lecture dudit exposé, où l'on verra par exemple comment prouver à l'aide de la désingularisation le théorème de Grauert-Remmert.

Quant au § 1, il est rédigé de façon que la démonstration n'effarouche pas trop un lecteur qui ne connaitrait que le cours qui précède.

§ 1. Simplification d'un fermé algébrique d'une surface lisse.

Définition 1.1. Soit Y un fermé algébrique d'une surface algébrique lisse S. On dit que Y est un diviseur à croisements normaux en un point x de Y s'il existe un voisinage de Zariski U de x dans S et deux courbes lisses et irréductibles C et C' de U passant par x et à tangentes distinctes telles que $Y \cap U = C \cup C'$.

Si Y est de dimension ≤ 1, alors Y est réunion d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de courbes irréductibles. L'ensemble des points où Y n'est pas un diviseur à croisements normaux est donc fini : c'est la réunion des points isolés de Y et de ses points singuliers qui ne sont pas du type précisé dans la définition.

Théorème 1.2. Soit S une surface lisse et soit Y un fermé algébrique de dimension $\leqslant 1$. Il existe un morphisme projectif et birationnel $r:S' \to S$ où S' est une surface lisse et où $Y' = r^{-1}(Y)$ est un diviseur à croisements normaux.

On va définir $Y_n \subset S_n$ par récurrence, en posant $Y = Y_o$, $S = S_o$, en obtenant $r_n:S_n \longrightarrow S_{n-1}$ par éclatement, dans S_{n-1}, des points où Y_{n-1} n'est pas un diviseur à croisements normaux et en posant $Y_n = r_n^{-1}(Y_{n-1})$. Le problème est de prouver que le processus s'arrête pour n assez grand. Il est déjà clair que, si on éclate un point isolé de Y, son image réciproque est une droite projective qui ne rencontre pas les autres composantes irréductibles de Y_1 et par suite on est débarrasé du premier coup des points isolés de Y.

Pour un théorème plus général démontré de façon très voisine, voir I. R. Shafarevitch, Lectures on Minimal Models and Birationnal transformations of Two-dimensional schemes, Tata Institue, Bombay, 1966.

Nous nous limiterons au cas où S est le plan complexe, ce qui permet de n'utiliser que les préliminaires exposés dans le cours et suffit pour la suite. En effet, les éclatés successifs sont recouverts par des ouverts isomorphes au plan $\underline{\underline{A}}^2$ et tous les raisonnements faits sont de nature locale et n'utilisent que la théorie des branches et la description de l'éclatement d'un point dans le plan. Le lecteur curieux verra sans peine que la démonstration reste valable dans le cas général.

Lemme 1.3. Soit ξ un point du plan $S = \underline{\underline{A}}^2$ et soit $r:S' \to S$ l'éclatement de S de centre ξ.

(i) $E = r^{-1}(\xi)$ s'identifie à l'ensemble des droites de S passant par ξ.

(ii) Soit Γ une branche de courbe paramétrée centrée au point ξ. Il existe une unique branche paramétrée Γ' de S' telle que $r\Gamma' = \Gamma$. Le centre ξ' de Γ' est le point de E correspondant à la tangente à Γ au point ξ.

On rappelle que S' est l'ensemble des paires (x,D), où D est une droite de S passant par ξ et x un point de D, avec $r(x,D) = x$. D'où (i). Pour expliciter cette identification, on choisit des coordonnées linéaires (x,y) sur S centrées au point ξ et on utilise les deux ouverts qui recouvrent S', à savoir S_1' de coordonnées (x',y'), où l'équation de E est $x' = 0$, avec $r(x',y') = (x',x'y')$ et S_2' de coordonnées (x'',y''), où l'équation de E est $y'' = 0$ avec $r(x'',y'') = (x''y'',y'')$. Le point (ξ,D) de E, où D est la droite d'équation $ax+by=0$, est donc le point $(0,-a/b)$ de S_1' si $b\neq 0$ et le point $(-b/a,0)$ de S_2' si $a\neq 0$.

Par définition, Γ est une application analytique injective $\Gamma:U \to S$, où $U = \{t \in \underline{\underline{C}}, |t| < \varepsilon\}$ avec $\Gamma(0) = \xi$. Comme r est bijective en dehors de $E = r^{-1}(\xi)$, on connait Γ' pour $t \neq 0$ et si la tangente à Γ au point ξ a pour équation $ax+by=0$, avec $b\neq 0$ par exemple, alors $\Gamma':U \to S_1'$, $\Gamma'(t) = (x(t),y(t)/x(t))$, convient, c'est à dire est analytique, injective et vérifie $\Gamma'(0) = \lim y(t)/x(t) = -b/a$. Ceci prouve (ii), car le cas où $b=0$ se traite symétriquement avec l'ouvert S_2'.

Lemme 1.4. Soit Y une courbe algébrique de S, soit $\xi \in Y$, soit $r:S' \to S$ l'éclaté de S de centre ξ et soit $Y' = r^{-1}(Y)$. Les branches de Y' centrées en un point $\xi' \in E=r^{-1}(\xi)$, sont la branche de E centrée au point ξ' et les branches Γ' de S' qui relèvent les branches

Γ de Y centrées au point ξ dont la tangente au point ξ est la droite qui correspond au point ξ' de E.

C'est évident, car r est bijectif en dehors de E et $\{\xi\}$.

Lemme 1.5. Soit Γ une branche singulière de S centrée au point ξ. Il existe des coordonnées linéaires (x,y) de S centrées au point ξ, et une représentation paramétrique de Γ, $x = t^e$, $y = u(t^e) + \sum_{i \geq m} a_i t^i$, où u est un polynome, où $e < m$ et e ne divise pas m et enfin $a_m \neq 0$. Si x,y et t sont ainsi choisis, alors e est la multiplicité $e_\xi(\Gamma)$ de la branche et m est le nombre $m_\xi(\Gamma)$ défini comme la borne supérieure des $(C,\Gamma)_\xi$, où C parcourt les courbes analytiques passant par ξ et lisses au point ξ.

On choisit d'abord des coordonnées (x,y) telles que la tangente au point ξ ne soit pas la droite $x = 0$, puis le paramètre t tel que $x = t^e$. On peut alors toujours écrire y sous la forme de l'énoncé, car $y = \sum_{i \geq e} a_i t^i$ et on prend pour m le premier entier non divisible par e tel que $a_m \neq 0$. L'entier m existe car $e \neq 1$ puisque la branche est singulière et si m est infini, alors $y = u(t^e)$, donc l'application n'est pas injective, ce qui est contraire à la définition d'une branche. Inversement, si les coordonnées sont comme dans l'énoncé, alors la tangente n'est pas $x=0$ car l'ordre du zéro de $y(t)$ est $\geq e$ et il est trivial que e est la multiplicité. Par ailleurs, soit C la courbe d'équation $f(x,y) = y-u(x)$. La multiplicité d'intersection $(C,\Gamma)_\xi$ est l'ordre du zéro de $f(x(t),y(t)) = \sum a_i t^i$, donc c'est m. Inversement, si C est une courbe analytique d'équation $f(x,y) = 0$, on a

$f(x,y) = ax + by + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j$ et il est clair que le coefficient de t^m dans $f(x(t),y(t))$ est ba_m, à cause des conditions $e \nmid m$ et $i+j \geq 2$. Donc, si $b \neq 0$, on a $(C,\Gamma)_\xi \leq m$. Si $b=0$, alors $a \neq 0$ car C

est lisse et on a évidemment $(C,\Gamma)_\xi = e$.

Lemme 1.6. Sous les hypothèses de (1.3 (ii)), si la branche Γ est singulière, alors $e_{\xi'}(\Gamma') \leqslant e_\xi(\Gamma)$ et si $e_{\xi'}(\Gamma') = e_\xi(\Gamma)$, alors $m_{\xi'}(\Gamma') = m_\xi(\Gamma) - e_\xi(\Gamma)$.

Il suffit de choisir des coordonnées et un paramètre comme dans le lemme précédent et d'observer que $x'(t) = t^e$, $y'(t) = u(t^e)/t^e + \sum_{i \geqslant m} a_i t^{i-e}$.

Proposition 1.7. Soit Y_o une courbe algébrique du plan complexe S_o. Définissons par récurrence $r_n : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ comme l'éclaté de S_{n-1} de centre un ensemble fini contenant l'ensemble des points de Y_{n-1} où est centrée une branche singulière de Y_{n-1} et $Y_n = r_n^{-1}(Y_{n-1})$. Alors, pour n assez grand, Y_n n'a que des branches régulières.

Chaque éclatement n'ajoute à Y que des composantes lisses (le diviseur exceptionnel est une droite projective) et le transformé d'une branche régulière est évidemment régulière, donc le nombre total de branches singulières n'augmente pas et il finit par diminuer d'après le lemme précédent.

Ceci prouve la proposition, mais ces branches peuvent être tangentes, il faut donc un argument supplémentaire pour prouver le théorème. On note pour cela que si Γ et Γ' sont deux branches régulières centrées en ξ, alors, si Γ et Γ' ne sont pas tangentes, on a $(\Gamma,\Gamma')_\xi = 1$ et leurs relèvements ne se coupent pas : si elles sont tangentes, leurs relèvements Γ_1 et Γ'_1 se coupent en un seul point ξ' avec $(\Gamma_1,\Gamma'_1)_{\xi'} = (\Gamma,\Gamma')_\xi - 1$ et enfin $(\Gamma_1,E)_{\xi'} = 1$. Le nombre $s = \sup(\Gamma,\Gamma')_\xi$ diminue donc strictement s'il est $\geqslant 2$. Quant il est $\leqslant 1$, cela signifie que par chaque point il passe n branches qui ne sont pas tangentes deux à deux. L'éclatement de ce point fournit n points doubles ordinaires (ne pas oublier le diviseur exceptionnel), d'où la conclusion.

§ 2. Désingularisation des surfaces.

Théorème 2.1. Soit X une surface algébrique projective. Il existe un morphisme projectif et birationnel $r:X' \longrightarrow X$ tel que X' soit non singulière.

On choisit une variété linéaire L assez générale de dimension $N-3$ de l'espace projectif, ce qui, par projection linéaire de centre L, donne un morphisme fini et surjectif $p:X \longrightarrow S$, où S est le plan projectif (12ème leçon, Remarque 11).

On sait qu'il existe un fermé Y de dimension ≤ 1 de S tel que p induise un revêtement étale $p':X-p^{-1}(Y) \longrightarrow S-Y$. On considère un morphisme propre et birationnel $r:S' \longrightarrow S$ (éclatements de points) tel que $Y'=r^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux et le produit fibré $X'=X\times_S S'$, d'où un diagramme

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "r'"'] \arrow[d, "p'"] \\ S \arrow[from=u, "p"'] & S' \arrow[l, "r"] \end{tikzcd}$$

Il est clair que r est projectif et que r' est un isomorphisme au dessus de $X-p^{-1}(Y)$. Quitte à remplacer X' par l'adhérence de $r'^{-1}(X-p^{-1}(Y))$, on peut supposer que r' est en outre birationnel et bien entendu $p':X' \longrightarrow S'$ est fini et c'est un revêtement étale au dessus de $S'-Y'$.

Il nous faut maintenant un petit complément sur la désingularisation des modèles de JUNG que nous n'avons pas énoncé dans la 13ème leçon car il nécessite la notion de normalisation.

Lemme 2.2. Soit M la surface d'équation $Z^n-XY^p = 0$, $n \geq 2$, $(n,p)=1$. On a un diagramme commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd} \underline{M} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "r"'] & & M' \arrow[dl, "a"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

où $a:M' \longrightarrow M$ est la normalisée de M et où $r:\underline{M} \longrightarrow M$ est le composé (2.6(2)) de la leçon 13. En outre, m est un isomorphisme au dessus de $M-\{0\}$ et enfin $m:\underline{M} \longrightarrow M'$ se déduit de M par éclatement d'un idéal dont le support est fini et se projette sur l'origine de M.

Puisque M' est la normalisée de M et que le morphisme r est birationnel, il est clair que r se factorise par M' car $\underline{M}$ est lisse, donc normale. Puisque r est bijectif au dessus de $M - \{0\}$, il est clair que m est injectif au dessus de $M - \{0\}$ et comme M' est normale, il en résulte que que m est un isomorphisme au dessus de $M - \{0\}$.

Il reste à prouver que $\underline{M}$ se déduit de M' par éclatement d'un idéal à support fini se projettant sur l'origine de M .Disons d'abord que l'on peut décrire explicitement un tel idéal,voir l'exposé cité de Lipman p. 212 ou encore (Toroïdal embedding,Kempf,Knudsen,Mumford,Saint Donat,Lecture Note 339,Springer Verlag) p. 35 .En citant ces références,on rend inutile la proposition 2.6 de la leçon 13 ,voyons donc comment conclure dans la ligne de ce qui précède (voir aussi 2.4).On montre d'abord que $\underline{M}$ se déduit de M' par éclatement d'un idéal I à support contenu dans le fermé d'équation $xy=0$, lequel est noté D .Soit K l'idéal définissant le premier éclatement dans la proposition 2.6, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(1) & \xleftarrow{a(1)} & M'(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xleftarrow{a} & M' \end{array}$$

, où $M(1)$ s'obtient en éclatant K dans M et $M'(1)$ en éclatant $KO_{M'}$ dans M' et il est clair que $a(1)$ est fini et birationnel car il en est ainsi de $a:M' \longrightarrow M$. De proche en proche, on arrive ainsi à $\underline{M} = M(r) \xleftarrow{a(r)} M'(r)$ qui est un morphisme fini et birationnel, donc un isomorphisme car $\underline{M}$ est lisse donc normale. Ceci montre déjà que $\underline{M}$ se déduit de M par une suite d'éclatements. Or, il est classique que le composé de deux éclatements $M(2) \xrightarrow{u} M(1) \xrightarrow{v} M$, où v s'obtient en éclatant I et u en éclatant un idéal J de $M(1)$

peut s'obtenir comme l'éclatement de $v_*(JO_{M(2)}(IO_{M(1)})^n)$ pour n assez grand, d'où ce premier point. On note ensuite que x (resp. y) définit l'une des composantes irréductibles D_1 (resp. D_2) de D. Soit $M'' = a^{-1}(M-\{0\})$. Comme M'' est non singulière, on a des entiers naturels n, a et b tels que $(I|M'')^n = x^a y^b O_{M''}$ et comme M' est normale et que M'-M'' est fini, on sait que toute fonction régulière sur M'' se prolonge uniquement à M', d'où un idéal I' de $O_{M'}$ tel que $I^n = x^a y^b I'$ dont le support est porté par M'-M'' et dont l'éclatement est le même que celui de I, d'où la conclusion.

2.3. Reprenons la démonstration où nous l'avons laissée et remplaçons $p:X \longrightarrow S$ par $p':X' \longrightarrow S'$ puis X' par sa normalisée, d'où finalement un morphisme fini

(1) $\quad p:X \longrightarrow S$

où S est une surface algébrique lisse, X une surface algébrique normale et $p:X \longrightarrow S$ un morphisme fini. Nous disposons bien entendu d'un diviseur à croisements normaux Y de S tel que, si on pose

(2) $\quad S_o = S-Y \quad$ et $\quad X_o = p^{-1}(S_o)$

alors le morphisme $p_o:X_o \longrightarrow S_o$ induit par p est étale. Puisque X est normale, son lieu singulier est fini et l'on peut donc choisir un recouvrement de X par des ouverts affines X_i ne contenant chacun qu'un seul point singulier de X. Il suffit de trouver dans chacun de ces ouverts un idéal de support ce point dont l'éclaté désingularise X_i. En effet, que l'on éclate ces idéaux simultanément ou les uns après les autres, le résultat sera le même, c'est à dire la surface algébrique lisse recherchée. Si l'on connait un voisinage euclidien X_i' de x_i dans X_i et un idéal cohérent du faisceau des fonctions holomorphes sur X_i' à support concentré au point x_i dont l'éclatement désingularise la variété analytique X_i', on aura gagné, car d'une part cet idéal sera trivialement "algébrique", puisque son support est fini, et d'autre part l'éclatement commute au passage de l'algébrique à l'analytique.

Soit donc x un point singulier de X et soit s sa projection sur S. Quitte à rajouter une composante à Y, on peut supposer que s est un point de croisements de Y [<u>exercice</u> : montrer que ceci est inutile car si $s=p(x)$ n'est pas un point de croisement de Y, alors X est lisse au point x]. On a donc un voisinage ouvert euclidien U de s dans S et un isomorphisme analytique entre U et un polydisque de $\mathbb{C}^2$ qui identifie $Y \cap U$ à la réunion des axes de coordonnées. Le groupe fondamental de $U_o = U-(U\cap Y)$ est donc $\mathbb{Z}^2$ et le revêtement de U_o induit par $p:X \longrightarrow S$ est décrit comme dans la 13ème leçon, d'où un modèle de JUNG $u:M \longrightarrow \mathbb{C}^2$ et un diagramme comme dans le lemme (2.2(1))

(3)
$$\begin{tikzcd}
\underline{M} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "r"'] & & M' \arrow[dl, "a"] \\
& M \arrow[d, "u"] & \\
& \mathbb{C}^2 &
\end{tikzcd}$$

Par le changement de base $U \longrightarrow \mathbb{C}^2$, on en déduit un diagramme de variétés analytiques complexes

(4)
$$\begin{tikzcd}
\underline{N} \arrow[rr, dash, "n"] \arrow[dr, "s"'] & & N' \arrow[dl, "b"] \\
& N \arrow[d, "v"] & \\
& U &
\end{tikzcd}$$

et un U_o-isomorphisme analytique $f_o : X|U_o \longrightarrow N|U_o$. Puisque b est un isomorphisme au dessus de U_o et que N' et $X|U$ sont tous deux finis sur U et normaux, on en tire un isomorphisme analytique $f : X|U \longrightarrow N'$ qui prolonge f_o, d'où par transport de structure de M' à N' puis de N' à $X|U$, un idéal cohérent du faisceau des fonctions holomorphes sur $X|U$ à support fini, dont l'éclatement désingularise $X|U$, d'où la conclusion.

Remarque 2.4. Si l'on veut économiser le lemme 2.2., on obtient par recollement des modèles locaux $\underline{N}$ une surface analytique complexe lisse X' munie d'un morphisme propre $c : X' \longrightarrow X$, mais on ne sait pas que X' est algébrique. Par ailleurs, on peut éviter le détour par la géométrie analytique en reprenant de façon purement algébrique l'étude locale du morphisme $p : X \longrightarrow S$. Ce n'est guère plus difficile, mais on y perd l'intuition géométrique. Cependant, cette démonstration purement algébrique est importante car elle peut être généralisée en géométrie algébrique sur un corps de caractéristique positive. Cela ne va pas sans des difficultés considérables comparées à celles rencontrées ici. C'est le mérite d'Abhyankar de les avoir surmontées, voir son livre : Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, New York and London, 1966.

N° d'impression 248
2è trimestre 1977