UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 80

Approximation polynômiale pondérée dans
un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$

Nessim Sibony

Approximation pondérée sur une
sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}^n$

J.-P. Ferrier et N. Sibony

Analyse Harmonique d'Orsay
1974

APPROXIMATION POLYNÔMIALE PONDEREE DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE DE $\mathbb{C}^n$

par Nessim Sibony

1. INTRODUCTION. Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$ et soit w une fonction s. c. i. définie dans Ω, à valeurs réelles strictement positives. $H^p(\Omega , w)$ désignera l'espace des fonctions f, holomorphes dans Ω, telles que $\int |f|^p(z)\, w(z)\, d\lambda(z) < +\infty$, λ étant la mesure de Lebesgue de Ω et $1 \leq p < \infty$. On munit cet espace de la norme $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p(z)\, w(z)\, d\lambda(z))^{1/p}$. $H^\infty(\Omega , w)$ désignera l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $\sup_{z\in\Omega} w(z)|f(z)|$ tend vers zéro quand z tend vers le bord de Ω, on le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} w(z)\,|f(z)|.$$

Nous noterons ces espaces $H^p(w)$, $1 \leq p \leq +\infty$, lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$. Ce sont des espaces de Banach.

On se pose le problème de l'approximation des fonctions de $H^p(\Omega , w)$, $1 \leq p \leq +\infty$, par des fonctions holomorphes dans des ouverts contenant strictement le domaine Ω ou bien par des fonctions holomorphes à croissance donnée, par exemple des polynômes.

Un tel problème a été étudié par B. Taylor dans [12] lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$. Il a donné une condition suffisante pour approcher les fonctions de $H^2(w)$, par des fonctions à croissance donnée, mais pour une topologie plus faible que celle de $H^2(w)$; c'est celle d'un espace $H^2(w_1)$, $w_1 < w$.

Le problème d'approximation pour des algèbres bornologiques de fonctions holomorphes a été étudié par J.-P. Ferrier [4], [5], qui utilise pour cela le calcul symbolique de Waelbroeck.

Nous avons besoin de quelques notations pour introduire ce problème.

Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, nous noterons $d_\Omega(z)$ la distance au complémentaire de Ω soit: $d_\Omega(z) = \inf\limits_{z' \notin \Omega} |z - z'|$. Posons $\delta_o(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$ où $|z|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2$ et $\delta_\Omega(z) = \min [d_\Omega(z) , \delta_o(z)]$.

Soit δ une fonction lipschitzienne positive dans $\mathbb{C}^n$; posons $\Omega = \{z / \delta(z) > 0\}$. On suppose $\delta \leq \delta_o$ et $-\log \delta$ plurisousharmonique (p. s. h.) dans Ω.

Notons $E(k, \delta)$ l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $\|f\|_k = \sup\limits_z |f(z)| \delta^k(z) < \infty$ où k est un entier positif et $\mathcal{O}(\delta) = \bigcup\limits_k E(k, \delta)$. L'espace $\mathcal{O}(\delta)$ a une structure naturelle d'algèbre bornologique [5]. Un sous-espace F est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ pour cette structure si on peut approcher les éléments de $E(k, \delta)$ par des éléments de F, pour la topologie de $E(k', \delta)$. J.-P. Ferrier [4] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{O}(\delta')$ soit dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, au sens précédent lorsque $\delta' \geq \delta$.

Nous généralisons la technique de B. Taylor pour étudier l'approximation dans un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, nous essayons de faire l'approximation pour la norme de l'espace de départ. Nous donnons également des conditions nécessaires d'approximation, ce qui nous permet de retrouver, sans avoir à utiliser le calcul symbolique de Waelbroeck, les résultats de [4] sur les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$. La technique utilisée permet en particulier de préciser l'entier k', de la définition de la densité, en fonction de k.

L'outil essentiel est la résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec les estimations de Hörmander [7].

Nous aurons besoin des notions suivantes. Etant donnée une fonction g à valeurs réelles définie dans Ω, on notera g^* la plus petite fonction s. c. s. qui majore g. On dira que $\exp(\varkappa)$ est un module de plurisousharmonicité pour Φ, défini dans Ω, si $\varkappa$ est une fonction continue dans Ω et si pour tout $(t_1, \dots t_n) \in \mathbb{C}^n$ la distribution $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k - \exp(\varkappa) \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2$ est une mesure positive. On pose

$H_\Phi(z,t) = \sum \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$. Dans toute la suite on supposera que w est de la forme $w = \exp(-\Phi)$. On dira que w est un poids si pour tout entier k on a :

$$\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi(z))\, \delta_\Omega^{-k}(z) < \infty.$$

Nous obtenons en particulier les résultats suivants.

THEOREME. Si $(\Phi - 2 \log \delta_\Omega)(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$, où chaque φ_i est p. s. h. dans un domaine d'holomorphie $\Omega_i \supset \Omega$, la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ restreinte à Ω étant supposée filtrante croissante et si de plus il existe une constante $C > 0$ telle que $C\,\delta_\Omega^{-2}$ soit un module de plurisousharmonicité pour Φ, alors $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$ est dense dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$. Lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ il suffit de supposer que $C\,\delta_o^2$ est un module de plurisousharmonicité pour Φ.

THEOREME. Soient Ω un ensemble convexe de $\mathbb{C}^n$ et Φ une fonction convexe dans Ω telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. Alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes sont denses dans $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Nous obtenons comme corollaire d'un théorème plus général le résultat suivant.

COROLLAIRE. Si Φ est p. s. h. homogène complexe d'ordre $\rho > 0$ dans $\mathbb{C}^n$, i. e. $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$ pour $u \in \mathbb{C}^n$ et $z \in \mathbb{C}^n$. Alors les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Pour étudier des conditions nécessaires d'approximation, nous montrons le résultat suivant sur les fonctions p. s. h., ce résultat admet d'autres applications. [11].

PROPOSITION. Soit Φ une fonction p. s. h. continue dans un domaine d'holomorphie Ω telle que $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$ et $\exp(-\Phi)$ lipschitzienne dans Ω ; alors $\Phi(z) = (\sup_\nu C_\nu \log |a_\nu|)^*(z)$ pour tout $z \in \Omega$, où $C_\nu > 0$ et où a_ν sont des fonctions holomorphes dans Ω.

On montre alors qu'une condition nécessaire pour que $H(\Omega')$, l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega' \supset \Omega$, soit dense dans $H^2(\Omega, \exp(-k\Phi))$ pour tout entier positif k, est que, $\exp(-\Phi)$ étant un poids, on ait $\Phi(z) = (\sup_i c_i \log |f_i|)^*(z)$, $z \in \Omega$, les c_i étant des constantes positives et f_i des fonctions holomorphes dans Ω'.

Les cas où cette condition est suffisante sont étudiés dans la suite.

2. APPROXIMATION DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE POUR LES ESPACES $H^p(\Omega, w)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises les deux théorèmes suivants dûs à L. Hörmander [7].

THEOREME 1. Soient Ω un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, Φ une fonction p.s.h. dans Ω et $\exp(\varkappa)$ un module de plurisousharmonicité pour Φ. Pour toute forme $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ $q > 0$ telle que $\bar\partial g = 0$ et $\int_\Omega |g|^2 \exp-(\Phi+\varkappa) d\lambda(z) < \infty$, il existe $u \in L^2_{(q,q-1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ telle que $\bar\partial u = g$ et

$$(1) \qquad q \int_\Omega |u|^2 \exp(-\Phi) d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 \exp-(\Phi+\varkappa)\, d\lambda .$$

Les notations sont celles de [7] et [8].

COROLLAIRE 2. Soient Ω un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, φ une fonction p.s.h. dans Ω, $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ $q > 0$ avec $\bar\partial g = 0$ et $\int |g|^2 \exp(-\varphi)\, d\lambda < \infty$. Alors il existe $u \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ vérifiant $\bar\partial u = g$ et

$$(2) \qquad q \int_\Omega |u|^2 \exp(-\varphi)\, \delta_o^4 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |g|^2 \exp(-\varphi)\, d\lambda .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $\Phi = \varphi + 2 \log(1 + |z|^2)$.

On a

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar z_k} t_j \bar t_k \geq 2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar z_k} \log(1 + |z|^2)\, t_j \bar t_k \geq 2 \frac{|t|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

d'où : $\qquad \exp(-\Phi) = \exp(-\varphi)\, \delta_o^4 \qquad$ et $\qquad \exp-(\Phi + \varkappa) = \frac{1}{2} \exp(-\varphi)$.

Donc (2) se déduit de (1).

PROPOSITION 3. Soit Φ une fonction positive dans un domaine d'holomorphie Ω. On suppose que $\Phi(z) - 2 \log \delta_\Omega(z) = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ où, pour chaque $i \in I$, φ_i est une fonction p.s.h. positive dans un domaine d'holomorphie $\Omega_i \supset \Omega$. La restriction de la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ à Ω est supposée filtrante croissante. Alors pour $f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$

il existe une suite de fonctions appartenant à $\bigcup_{i\in I} H^2(\Omega_i\,,\,\exp(-\varphi_i)\,\delta_o^4)$ qui converge vers f dans $H^2(\Omega\,,\,\exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^2\,\delta_o^4)$.

Démonstration. D'après un lemme de G. Choquet [9], il existe une suite $i(m)$ d'indices tels que la suite $\varphi_{i(m)}$ soit croissante et $(\sup_m \varphi_{i(m)})^* = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^*$ dans Ω.
Soit $(K_p)_{p\in N}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et (α_p) une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω, $0 \le \alpha_p \le 1$, α_p valant 1 sur un voisinage de K_p.
En convolant la fonction caractéristique de K_p avec $\varepsilon^{-n}\,\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ où ρ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact égale à 1 sur un voisinage de l'origine, on voit qu'en choisissant ε en fonction de K_p, on peut construire une suite α_p qui vérifie de plus la condition

(3) $$\sum_{1\le \ell\le n} \left|\frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar z}\right|^2 (z) \le C(1 + d_\Omega^{-1}(z))^2$$ où C est une constante indépendante de p.

Posons $g_p = \bar\partial(\alpha_p f) = f\,\bar\partial\alpha_p$; g_p est une forme différentielle de type $(0,1)$ à coefficients dans $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

Soit $$I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^2\,d\lambda = \int |f|^2\,|\bar\partial\,\alpha_n|^2 \exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^2\,d\lambda\,.$$

D'après (3) $$I(p) \le C \int_{\Omega\setminus K_p} |f|^2 \exp(-\Phi)(1 + \delta_\Omega^2)\,d\lambda\,.$$

Or
$$f \in H^2(\Omega\,,\,\exp(-\Phi)) \quad \text{et} \quad \delta_\Omega < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{p\to\infty} I(p) = 0.$$

Afin d'alléger les notations, désignons $\varphi_{i(m)}$ par φ_m, $\Omega_{i(m)}$ par Ω_m et posons :
$$I(p,m) = \int_{\Omega_m} |g_p|^2 \exp(-\varphi_m)\,d\lambda\,.$$

Rappelons que $(\sup_m \varphi_m) = (\sup \varphi_m)^*$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle [9]. Par suite, p étant fixé, en appliquant le théorème de convergence monotone on a :

$$\lim_{m\to\infty} I(p,m) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m))\, d\lambda = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)^*) d\lambda =$$

$$\int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2 = I(p), \quad \text{d'après l'hypothèse : } \Phi - 2 \log \delta_\Omega = (\sup_i \varphi_i)^* .$$

Donc pour tout p, il existe un entier $m(p)$ tel que $I(p,m(p)) \leq 2\, I(p)$.

Résolvons l'équation $\bar{\partial} u = g_p$ dans le domaine d'holomorphie $\Omega_{m(p)}$. D'après le corollaire 2, il existe une solution u_p vérifiant

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_o^4\, d\lambda \leq \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) d\lambda = I(p,m(p)) < 2I(p).$$ Posons

$v_p = f\alpha_p - u_p$ alors $\bar{\partial} v_p = 0$ dans $\Omega_{m(p)}$; par suite v_p est une fonction holomorphe dans $\Omega_{m(p)}$ et $\int_{\Omega_{m(p)}} |v_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_o^4\, d\lambda < \infty$ car il en est ainsi de u_p et $f\alpha_p$ est à support compact.

De plus $\int_\Omega |f\alpha_p - v_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_o^4\, d\lambda = \int_\Omega |u_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_o^4\, d\lambda \leq$

$$\int_\Omega |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_o^4\, d\lambda \leq 2I(p),$$

or $f\alpha_p$ est arbitrairement proche de f dans $L^2(\Omega\,, \exp(\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_o^4\,)$.

Par suite v_p converge vers f dans $H^2(\Omega\,, \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_o^4)$. Cette proposition a été démontrée par B. Taylor [12] lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ sous des hypothèses plus fortes sur Φ. Remarquons qu'on peut remplacer dans l'énoncé la fonction δ_Ω par une fonction lipschitzienne strictement positive et tendant vers zéro sur le bord de Ω.

THEOREME 4. Soit Φ une fonction p.s.h. positive dans le domaine d'holomorphie Ω. On suppose que $\exp(-\Phi)$ est un poids vérifiant les conditions suivantes :

a) $\Phi(z) = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z\in\Omega$, φ_i p.s.h. dans Ω_i, domaine d'holomorphie contenant Ω et la restriction de la famille φ_i à Ω étant filtrante croissante.

b) Il existe une constante $C > 0$ telle que $C\,\delta_\Omega^{-2}$ soit un module de plurisousharmonicité pour Φ.

On suppose de plus que

c) $-\log \delta_\Omega(z) = (\sup_{i\in I} \psi_i)^*(z)$ pour $z\in\Omega$, ψ_i p.s.h. dans Ω_i et la restriction de la famille (ψ_i) à Ω est filtrante croissante.

Alors $\bigcup_{i\in I} H^2(\Omega_i\,,\,\exp(-\varphi_i))$ est dense dans $H^2(\Omega\,,\,\exp(-\Phi))$.

Si on suppose que (φ_i), (ψ_i) sont définies dans $\mathbb{C}^n$ et que $\exp(\varphi_i)$ et $\exp(\psi_i)$ sont à croissance polynomiale alors les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega,\exp(-\Phi))$.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 3 posons

$$I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^2\, d\lambda \quad , \quad I(p,r) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-r\Phi)\,\delta_\Omega^2\, d\lambda$$

où $0 < r < 1$ et $g_p = \bar\partial(\alpha_p f)$.

On voit facilement que $\lim_{r\to 1} I(p,r) = I(p)$; donc pour tout p il existe $\frac{1}{2} < r(p) < 1$ tel que $I(p,r(p)) \le 2I(p)$. D'après le théorème 1 et l'hypothèse b) faite sur Φ il existe une solution u_p de l'équation $\bar\partial u = g_p$ dans Ω vérifiant

$$\int_\Omega |u_p|^2 \exp(-r(p)\Phi)\, d\lambda \le \frac{2}{C}\int_\Omega |g_p|^2 \exp(-r(p)\Phi)\,\delta_\Omega^2\, d\lambda \le \frac{4}{C}\, I(p).$$

En effet $C/2\;\delta_\Omega^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour $r(p)\Phi$ puisque $r(p) > \frac{1}{2}$.

En posant $v_p = f\alpha_p - u_p$ alors $\bar\partial v_p = 0$ et on voit qu'on peut approcher f dans $H^2(\Omega\,,\,\exp(-\Phi))$ par des fonctions qui sont dans $\bigcup_{r<1} H^2(\Omega,\exp(-r\Phi))$.

Il nous suffit à présent d'approcher les fonctions de $H^2(\Omega\,,\,\exp(-r_o\Phi))$ $r_o < 1$.

Or $(r_o\Phi - 2\log\delta_\Omega)(z) = (\sup_i (r_o\varphi_i + 2\psi_i))^*(z)$ pour $z\in\Omega$, d'après les hypothèses a) et c). La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher une fonction

$h \in H^2(\Omega\ ,\ \exp(-r_o\Phi))$ par des fonctions de $\bigcup_{i\in I} H^2(\Omega_i, \exp(-r_o\varphi_i - 2\psi_i)\,\delta_o^4)$ et ceci pour la norme de l'espace $H^2(\Omega, \exp(-r_o\Phi)\,\delta_\Omega^2\,\delta_o^2)$. Or, puisque pour tout $k > 0$ $\sup_{z\in\Omega} \exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^{-k}(z) < \infty$, la convergence dans l'espace $H^2(\Omega\ ,\ \exp(-r_o\Phi)\,\delta_\Omega^2\,\delta_o^2$ implique la convergence dans $H^2(\Omega,\ \exp(-\Phi))$. Pour terminer la démonstration, il nous suffit de montrer que les fonctions de $H^2(\exp(-r_o\varphi_i - 2\psi_i)\,\delta_o^4)$ sont des polynômes si $\exp(\varphi_i)$ et $\exp(\psi_i)$ sont à croissance polynomiale. En effet, soit f appartenant à cet espace, par hypothèse il existe un entier $k > 0$ tel que $\int |f|^2\,(1+|z|^2)^{-k} d\lambda < \infty$. On a alors

$$|f(z)|^2 \leq C_n \int_{|u|\leq 1} |f(z+u)|^2 d\lambda(u) \leq C_n \int_{|u|\leq 1} |f(z+u)|^2 (1+|z+u|^2)^{-k}.(1+|z+u|^2)^k\, d\lambda(u) \leq$$

$$\sup_{|u|\leq 1} (1+|z+u|^2)^k\, C_n \int_{\mathbb{C}_n} |f(\zeta)|^2 (1+|\zeta|^2)^{-k} d\lambda(\zeta) \leq M(1+|z|^2)^k$$

donc f est un polynôme d'après le théorème de Liouville.

EXEMPLE 5. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement plurisousharmonique dans U. Posons $\Omega = \{z/z\in U,\ \ \rho(z) < 0\}$, on suppose $U \supset \bar{\Omega}$ alors Ω est strictement pseudoconvexe. Posons $\Phi = -\frac{1}{\rho}$, Φ vérifie les hypothèses de la proposition 4, car c'est la composée de ρ avec la fonction $h(x) = -x^{-1}$ qui est convexe croissante sur R_-. Donc $\Phi = \sup(\alpha_i\rho + \beta_i)$ α_i , β_i étant des constantes, $\alpha_i > 0$ et $\alpha_i\rho + \beta_i$ est p.s.h. dans U. De plus on a

$\partial\bar{\partial}\Phi \geq \rho^{-2}\,\partial\bar{\partial}\rho \geq c\,\rho^{-2} \geq c\,\delta_\Omega^{-2}$. Donc Φ vérifie l'hypothèse b) et il est clair que $\exp(-\Phi)$ est un poids. Par suite les fonctions holomorphes dans U sont denses dans $H^2(\Omega\ ,\ \exp(\rho^{-1}))$.

THEOREME 6. Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ et Φ une fonction convexe dans Ω telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids ; alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes sont denses dans $H^p(\Omega\ ,\ \exp(-\Phi))$.

Lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ ce résultat est démontré dans [12] en utilisant des fonctionnelles analytiques; notre démonstration est cependant différente même dans ce cas.

Démonstration. Nous allons faire d'abord la démonstration pour $p = 2$. On peut toujours supposer que $\Phi \geq 0$, $0 \in \Omega$ et $\Phi(0) = 0$.

Soit $t > 1$. La convexité de Φ permet d'écrire $\Phi(z) \leq t^{-1}\Phi(z) + (1-t^{-1})\Phi(0)$ ou encore

(4) $$\Phi(tz) \geq t\ \Phi(z).$$

En particulier $\Phi(z) \geq R^{-1}|z|\Phi(\frac{Rz}{|z|})$; par suite il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(z) \geq \varepsilon\ |z|$ pour $|z|$ assez grand, sinon Φ serait nulle dans une direction donnée et $\exp(-\Phi)$ ne serait pas un poids.

Posons pour $r < 1$ $f_r(z) = f(rz)$; la fonction f_r est définie dans $\Omega_r = r^{-1}\Omega \supset \Omega$. On a

$$\int_\Omega |f_r(z)|^2 \exp(-\Phi(z))d\lambda = r^{-2n}\int_{r\Omega} |f(z)|^2 \exp(-\Phi(r^{-1}z))d\lambda\ ;$$

or $$X_{r\Omega}(z)\exp(-\Phi(r^{-1}z)) \leq X_\Omega \exp(-\frac{1}{r}\Phi(z)) \leq X_\Omega \exp(-\Phi(z))$$ où

X_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω.

D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\|f_r\| \to \|f\|$ quand $r \to 1$; par ailleurs f_r converge vers f ponctuellement. La boule unité de l'espace $H^2(\Omega\ ,\ \exp(-\Phi))$ étant faiblement compacte, on voit que $\|f_r - f\|$ tend vers zéro quand r tend vers 1; de plus $f_r \in H^2(r^{-1}\Omega\ ,\ \exp(-\Phi_r))$.

Nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 7. Soient Ω un ouvert convexe et ψ une fonction convexe sur Ω telle que $\psi(z) \geq \varepsilon|z|$. Alors il existe une suite ψ_k de fonctions p. s. h. dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\exp(\psi_k)$ soit à croissance polynomiale et $\psi(z) = (\sup_k \psi_k(z))$ pour tout $z \in \Omega$.

Supposons le lemme démontré et achevons la démonstration du théorème.

Il est clair que $\Phi - 2\log \delta_\Omega = \sup((\Phi - 2\log d_\Omega), \quad \Phi + 2\log(1+|z|^2))$. Or

$\Phi - 2\log d_\Omega$ est convexe puisque Φ l'est et l'hypothèse Ω convexe équivaut à $-\log d_\Omega$ convexe. De plus $\Phi - 2\log d_\Omega \geq \varepsilon' |z|$ comme on l'a vu, puisque $-\log d_\Omega(z) \geq -\log|z-a|$. D'après le lemme 7, $\Phi - 2\log d_\Omega$ et Φ s'écrivent comme enveloppe supérieure de fonctions p. s. h. dont l'exponentielle est à croissance polynomiale, il en est donc de même de $\Phi - 2\log \delta_\Omega$ et de $\Phi_r - 2\log \delta_{r^{-1}\Omega}$, puisque $r^{-1}\Omega$ est convexe. D'où $\Phi_r - 2\log \delta_{r^{-1}\Omega} = (\sup \varphi_k)$ avec $\exp(\varphi_k)$ à croissance polynomiale.

La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher f_r dans l'espace $H^2(r^{-1}\Omega , \exp(-\Phi_r)\, \delta^2_{r^{-1}\Omega}\, \delta_o^4)$ par des fonctions de $\bigcup_i H^2(\exp(-\varphi_i)\, \delta_o^4)$ c'est-à-dire par des polynômes, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 4.

Il suffit de remarquer que la convergence dans $H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r)\, \delta^2_{r^{-1}\Omega}\, \delta_o^4)$ implique la convergence dans $H^2(\Omega , \exp(-\Phi))$.

Or

(5) $$d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega .$$

En effet, il existe une boule de centre 0 et de rayon β contenue dans Ω, donc si $z \in \Omega$

$$z + \zeta = r\,[r^{-1}z] + (1-r)((1-r)^{-1}\zeta) \in r^{-1}\Omega \quad \text{si} \quad |\zeta| \leq \beta(1-r)$$

d'où l'inégalité (5) . On a vu que pour $r < 1$, $\Phi(r) \geq r^{-1}\Phi(rz)$ (4) par suite

$$\exp(-\Phi(z)) \leq \exp(-r^{-1}\Phi_r(z)) = \exp(-\Phi_r(z)).\exp(1-r^{-1})\Phi_r(z) \leq C.\exp(-\Phi_r(z)).\,\delta^2_{r^{-1}\Omega}\, \delta_o^4$$

puisque $d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0$ et $\Phi(z) \geq \varepsilon|z|$.

Démonstration du lemme 7. ψ étant convexe, d'après le théorème de Hahn Banach, $\psi = \sup\limits_j (\mathrm{Re}\ \langle z,w_j\rangle - \alpha_j)$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $w_j \in \mathbb{C}^n$. Il nous suffit donc de montrer que dans $\mathbb{C}$ la fonction $\varphi = \sup(\varepsilon|z|,x)$, où $x = \mathrm{Re}\ z$, s'écrit comme $(\sup\limits_k \varphi_k)$ avec φ_k sous harmonique dans $\mathbb{C}$ et $\exp(\varphi_k)$ à croissance polynomiale.

En effet, $\psi = \sup\limits_j \left[\sup((\mathrm{Re}\langle z,w_j\rangle) - \alpha_j\ ,\ \varepsilon|z|\right]$ et en utilisant une rotation on se ramène au cas où $w_j = (w_j^o, 0, \ldots 0)$. Remarquons que

$$\varepsilon|z| = \sup_N\Big(\log \sum_{o}^{N} \frac{\varepsilon^n |z|^n}{n!}\Big) = \sup_N \varphi_N .$$

La fonction φ_N est sous harmonique et $\exp(\varphi_N)$ est à croissance polynomiale.

Soit θ une représentation conforme de l'angle $\varepsilon|z| < x$ sur le demi plan supérieur

(6) $$\theta(z) = e^{i\gamma}\, z^{\beta} .$$

Si $\mathrm{Im}\, z > 0$, posons $(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z) = \frac{y}{\pi}\int_R \frac{(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt$ où $z = x + iy$.

On voit que $(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t) \leq p \log^+|t| + C$ donc que l'intégrale est convergente. On voit facilement que $\log^+|t| = \inf\limits_{s<1}((es)^{-1}t^s)$, par suite

$$|(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z)| \leq A + \frac{py}{\pi} \frac{\log^+|t|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \leq A + \frac{py}{\pi}\int \frac{(es)^{-1}t^s}{(t-x)^2+y^2} = A + p\,\mathrm{Re}(z^s)(es)^{-1} .$$

D'où il résulte que

(7) $$|(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z)| \leq A + p \log^+|z| .$$

Posons $\widetilde{\varphi}_N(z) = \varphi_N(z)$ si $\varepsilon|z| > x$ et $\widetilde{\varphi}_N(z) = (\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}}) \circ \theta$ si $\varepsilon|z| \leq x$. On a $|\widetilde{\varphi}_N(z)| \leq A_1 + A_2 \log^+|z|$ d'après (6) et (7) et $|\varphi_N(z)| \leq \varphi(z)$.

Remarquons que $\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}}(z) \geq \varphi_N \circ \theta^{-1}(z)$ (8), par suite $\widetilde{\varphi}_N(z) \geq \varphi_N(z)$ voir lemme 8. Donc $\widetilde{\varphi}_N$ est sousharmonique dans $\mathbb{C}$ et à l'intérieur de l'angle

$x > \varepsilon|z|$ elle est égale à la solution du problème de Dirichlet avec donnée au bord φ_N. De plus $\varphi(z) = \sup_N \tilde{\varphi}_N(z)$, car en faisant tendre N vers l'infini on voit que la solution du problème de Dirichlet, dans la construction choisie, avec pour donnée au bord φ_N converge vers la solution du problème avec pour donnée au bord x et que cette solution est égale à x.

L'inégalité (7) et la relation (6) permettent de voir que $\exp(\varphi_N)$ est à croissance polynomiale.

Remarquons que la conclusion du lemme 7 reste vraie pour la fonction ψ^α, α étant un nombre strictement positif et ψ une fonction convexe vérifiant $\psi(z) \geq \varepsilon|z|$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.

Pour écrire l'inégalité (8) nous avons utilisé le résultat suivant.

Soit h une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$0 \leq h(z) \leq k \log(1 + |z|^2).$$

Notons Ph l'intégrale de Poisson de la fonction h, i. e. $Ph(z) = \frac{y}{\pi}\int_R \frac{h(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}$.

On a alors $h \leq Ph$.

Nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

LEMME 8. Soit u une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose que

$$\int_R \frac{|u(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty \quad \text{et que} \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_0^\pi u^+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

Alors $u \leq Pu$ où Pu désigne l'intégrale de Poisson de u.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{I}m\, z > 0$. Désignons par μ_z^R la mesure harmonique, relative au point z, du demi-disque centré en 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur.

On peut calculer explicitement μ_z^R. On a alors pour R assez grand :

$$u(z) \leq \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{(R^2-|z|^2)(R^2-t^2)}{|t-z|^2\,|r^2-tz|^2}\, u(t)dt + \frac{2y}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R^2-|z|^2)\, R \sin\varphi}{|Re^{i\varphi}-z|^2\,|Re^{i\varphi}-\bar{z}|^2}\, u(Re^{i\varphi})d\varphi .$$

Majorons la dernière intégrale en remplaçant u par u^+. Les hypothèses faites sur u permettent de passer à la limite en faisant tendre R vers l'infini ; d'où il résulte que $u \leq Pu$.

Ceci achève la démonstration du théorème pour $p = 2$.

Faisons la démonstration pour $p = +\infty$. Soit $r < 1$. On a

$|f_r(z)|\exp(-\Phi) \leq |f(rz)|\exp(-r^{-1}\Phi(rz))$ puisque $\Phi(rz) \leq r\Phi(z)$.

Donc $f_r \in H^\infty(\Omega\,,\exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f quand r tend vers 1.

Pour $r' > r$, $f_r \in H^2(r'^{-1}\Omega,\, 2\Phi_{r'})$. En effet $\Phi(r'z) \geq \frac{r'}{r}\Phi(rz)$, d'où

$|f_r(z)|^2 \exp(-2\alpha(r'z)) \leq |f(rz)|^2 \exp(-2\frac{r'}{r}\Phi(rz))$ qui est intégrable puisque $\Phi(z) \geq \varepsilon|z|$ et $r'/r > 1$.

Par suite, il existe une suite de polynômes p_j qui converge vers f_r dans

$H^2(r'^{-1}\Omega\,,\,2\Phi_{r'})$, c'est l'application du théorème pour $p = 2$. Or si $z\in\Omega$ on a vu que $z + \zeta \in r'^{-1}\Omega$ pour $|\zeta| \leq \beta(1-r') = r_1$. Il en résulte que

$$|f_r(z) - p_j(z)|^2 \leq C\, r_1^{-2n} \int_{|\zeta|<r_1} |f_r(z+\zeta) - p_j(z+\zeta)|^2\, d\lambda(\zeta)$$

$$\leq C\, r_1^{-2n} \sup_{|\zeta|\leq r_1} \exp(2\Phi_{r'}(z+\zeta)) \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp-(2\Phi_{r'}(\zeta))\, d\lambda(\zeta)$$

$$\leq C\, r_1^{-2n} \exp(2\Phi(z))\varepsilon_j, \quad \text{où} \quad \varepsilon_j = \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(\zeta))\, d\lambda(\zeta).$$

En effet, $\Phi_{r'}(z + \zeta) \leq \Phi(z) + A(r')$

car $\Phi(r'z + r'\zeta) \leq r'\Phi(z) + (1-r')\Phi(r'(1-r')^{-1}\zeta) \leq r'\,\Phi(z) + A(r')$. D'où il résulte que p_j converge vers f_r dans $H^\infty(\Omega\,,\,\exp(-\Phi))$ puisque $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$.

Pour démontrer le résultat, lorsque $1 \leq p < \infty$, on se ramène selon la même technique au cas $p = 2$.

3. APPROXIMATION POUR LES ALGEBRES $\mathcal{O}(\delta)$.

Nous avons défini l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ au paragraphe 1, δ étant une fonction lipschitzienne positive telle que $\delta \leq \delta_o$.

THEOREME 9. Si $-\log \delta(z) = (\sup\limits_{i\in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z\in\Omega$ avec φ_i p. s. h. dans un domaine d'holomorphie $\Omega_i \supset \Omega$ et la restriction de la famille φ_i à Ω étant filtrante croissante, alors on peut approcher les fonctions de $E(k,\delta)$ pour la norme de $E(k + 2n+4\,,\,\delta)$ par des fonctions de $\bigcup\limits_{i\in I} H^2(\Omega_i\,,\,\exp(-c\varphi_i)\,\delta_o^4)$, avec $c = 2k + 2n + 3$.

Démonstration. Soit $\Omega = \left\{z/z\in\mathbb{C}^n \quad \delta(z) > 0\right\}$. On a $\delta(z) \leq \delta_\Omega(z)$ pour tout z. Dans la démonstration de la proposition 3, on peut supposer

$$\sum_{\ell} \left|\frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_\ell}\right|^2 \leq c(1+\delta^{-1})^2 .$$

Par suite étant donné $f \in E(k,\delta)$ qui est inclus dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1})$ on peut l'approcher dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$ par des fonctions appartenant à $\bigcup_{i\in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i)\,\delta_o^4)$. Il suffit pour terminer la démonstration de voir que $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$ s'injecte continuement dans $E(k+2n+4\ ,\ \delta)$.

En effet, $|f(z)|^2\, \delta^{2k+2n+7}(z) \leq (\mathrm{vol}\, B_z)^{-1} \int_{B_z} |f(z+\zeta)|^2\, \delta^{2k+2n+7}(z)\, d\lambda(\zeta)$ (9) ; où B_z désigne la boule de centre z et de rayon $\frac{1}{2}\delta(z)$. B_z est contenue dans Ω, car $|\delta(z)-\delta(z+\zeta)| \leq \frac{1}{2}\delta(z)$ si $|\zeta| \leq \frac{1}{2}\delta(z)$; donc $\delta(z+\zeta)>0$ si $z+\zeta \in B_z$.

De (9) on déduit $|f(z)|^2 \delta(z)^{2k+2n+7} \leq c_n \delta(z)^{-2n} \int_\Omega |f(z')|\, \delta(z')^{2k+2n+7}\, d\lambda(z')$

i. e.
$$\|f\|_{k+2n+4} \leq c\left(\int |f(z')|^2\, \delta^{2n+2k+7}\, d\lambda(z')\right).$$

Introduisons une définition de la densité dans $\mathcal{O}(\delta)$ qui est plus fine que la notion de densité pour la structure bornologique.

DEFINITION 11. Un sous espace F est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout k, on peut approcher les fonctions de $E(k,\delta)$ par des éléments de F et cela pour la norme de l'espace $E(k+\gamma,\delta)$.

COROLLAIRE 12. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. On suppose $\Omega = \overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I}\Omega_i}}$ où chaque Ω_i est un domaine d'holomorphie. Alors $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

En particulier si $\overset{\circ}{\bar{\Omega}} = \Omega$ et $\bar{\Omega}$ est un compact polynômialement convexe les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

Démonstration. Puisque $\Omega = \overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I}\Omega_i}}$ $\quad \delta_\Omega(z) = \inf_i \delta_{\Omega_i}(z)$ pour $z \in \Omega$.

D'où $-\log \delta_{\Omega}(z) = \sup_{i\in I}(-\log \delta_{\Omega_i}(z)) \quad z\in\Omega$; or $-\log \delta_{\Omega_i}$ est p. s. h. dans Ω_i puisque Ω_i est un domaine d'holomorphie. Donc $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$ au sens de la définition 10, ceci d'après le théorème 9.

Si $\bar{\Omega}$ est un compact polynomialement convexe, on a $\bar{\Omega} = \bigcap_p \Omega_p$ où chaque Ω_p est un polyèdre analytique et $\Omega = \overset{o}{\bar{\Omega}} = \bigcap_p \Omega_p$. Le théorème d'approximation d'Oka permet d'approcher les fonctions de $\mathcal{O}(\delta_{\Omega_p})$ par des polynômes uniformément sur $\bar{\Omega}$.

EXEMPLE 13. Dans $\mathbb{C}^2$ considérons le domaine d'holomorphie

$$\omega = \{(z_1,z_2) \mid (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad |z_1| < |z_2| < 1\}.$$

On montre que $\delta_{\omega}(z) = d_{\omega}(z) = \inf\left[(1 - |z_2|),\ |z_2| - |z_1|\right]$.

Or $$(1 - |z_2|)^{-1} = \sup_N \left[\sum_{0\leq p\leq N} |z_2|^p\right]$$

et $$(|z_2| - |z_1|)^{-1} = \sup_{N,\lambda_1,\lambda_2} |P_{N,\lambda_1,\lambda_2}(z_1, z_2)| ; \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

où $$P_{N,\lambda_1,\lambda_2}(z_1,z_2) = \sum_{0\leq p\leq N} (\lambda_1 z_1)^p (\lambda_2 z_2)^{-(p+1)} .$$

D'où il résulte que $$-\log \delta_{\omega}(z) = (\sup_j \log |f_j|)(z) \quad \text{pour} \quad z\in\omega$$

avec f_j holomorphe dans $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}\times\{0\} = \Omega$, donc $H(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_{\omega})$. On voit facilement que les polynômes ne sont pas denses dans $\mathcal{O}(\delta_{\omega})$.

4. APPROXIMATION DE FONCTIONS ENTIERES.

Dans ce paragraphe on suppose que Φ est une fonction positive p. s. h. dans $\mathbb{C}^n$, telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids, i. e. pour tout k, $\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \delta_o^{-k}(z)\exp(-\Phi(z)) < \infty$.

PROPOSITION 14. Supposons que Φ vérifie les conditions suivantes :

a) Il existe une constante $C > 0$ telle que $C\delta_o^2$ soit un module de plurisousharmonicité pour Φ.

b) $\Phi = (\sup_{j\in J} \Phi_j)^*$ Φ_j étant une famille de fonctions p. s. h. dans $\mathbb{C}^n$, avec $\exp(\Phi_j)$ à croissance polynômiale.

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. Soit α une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$, $0 \le \alpha \le 1$ égale à 1 pour $|z| \le 1$ et nulle pour $|z| \ge 2$. Posons $\alpha_p(z) = \alpha(p^{-1}z)$. On a

(10) $$\sum_j \left|\frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 \le C(1+|z|^2)^{-1}.$$

En posant $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f)$ où $f \in H^2(\exp(-\Phi))$, et $I(p) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi)(1+|z|^2) d\lambda(z)$ on voit comme dans la proposition 3 que $\lim_{p\to\infty} I(p) = 0$.

Soit $I(p,j) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi_j/2 - \Phi/2)(1+|z|^2) d\lambda$.

On peut supposer comme on l'a vu que Φ_j est une suite, et qu'elle est filtrante croissante, puisque cela ne modifie pas la croissance polynomiale de $\exp(\Phi_j)$ lorsque on prend la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions de ce type.

Pour p fixé on a : $\lim_{j\to\infty} I(p,j) = I(p)$. Donc pour tout p, il existe $j(p)$ avec $I(p,j(p)) \le 2I(p)$. Résolvons dans $\mathbb{C}^n$ l'équation

(11) $$\bar{\partial} u = g_p$$

pour la fonction $\varphi_p = \frac{\Phi_{j(p)}}{2} + \frac{\Phi}{2}$, φ_p admet comme module de plurisousharmonicité $\exp(\varkappa) = \frac{c}{2}(1+|z|^2)^{-1}$ d'après l'hypothèse a), d'après le théorème 1 il existe une solution de (11) vérifiant

$$\int |u_p|^2 \exp(-\varphi_p) d\lambda \le \frac{2}{c} \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_p)(1+|z|^2)\, d\lambda \le \frac{4}{c}\, I(p).$$

Soit $v_p = \alpha_p f - u_p$, on a $\bar{\partial} v_p = 0$. On voit comme dans la proposition 3 que v_p converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$. Les fonctions v_p appartiennent à

$\bigcup\limits_j H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_j}{2}))$. Il nous suffit donc d'approcher les fonctions $v \in H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2}))$ par des polynômes. Or l'hypothèse b) montre que $\frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi_{j_o}}{2} = (\sup\limits_j \frac{\Phi_j}{2} + \frac{\Phi_{j_o}}{2})^*$.

En reprenant le raisonnement de la proposition 3, mais avec $\alpha_p = \alpha(p^{-1}z)$, on voit que $\bigcup\limits_{j\in J} H^2(\exp(-\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2})\delta_o^2)$ est dense dans $H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2}))$ pour la norme de $H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2})\delta_o^2)$. Or la convergence dans cet espace implique la convergence dans $H^2(\exp(-\Phi))$; en effet $\exp(-\Phi) \leq c_{j_o} \exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2})\delta_o^2$ puisque $(1+|z|^2)\exp(\Phi_{j_o})$ étant à croissance polynomiale est majoré par $c_{j_o} \exp(-\frac{\Phi}{2})$.

Enfin les fonctions de $H^2(\exp(-\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_o}}{2})\delta_o^2)$ sont des polynômes.

REMARQUE 15. Si on ne conserve que l'hypothèse $\Phi = (\sup \Phi_j)^*$ où Φ_j est p.s.h. dans $\mathbb{C}^n$ la famille Φ_j étant filtrante croissante, on peut approcher les fonctions de $H^2(\exp(-\Phi))$ pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi)\delta_o^2)$ par des fonctions de $\bigcup\limits_{j\in J} H^2(\exp(-\Phi_j)\delta_o^2)$.

EXEMPLE 16. Si $\Phi(z) = |z|^{2\alpha} + \varphi(z)$ où $\alpha > 0$ et φ une fonction convexe avec $z) \geq \varepsilon|z|$, les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$. En effet $\partial\bar\partial\Phi \geq \partial\bar\partial|z|^{2\alpha}$ et

$$\sum_{k,j} \frac{\partial^2 |z|^{2\alpha}}{\partial z_k \partial \bar z_j} t_k \bar t_j = \alpha|z|^{2(\alpha-1)} + \alpha(\alpha-1)|z|^{2(\alpha-2)} \Big|\sum_{j=1}^n z_j \bar t_j\Big|^2 \geq c(1+|z|^2)^{-1} |t|^2.$$

Or $|z|^{2\alpha} = \sup\limits_N \log(\sum\limits_o^N \frac{|z|^{2\alpha p}}{p!})$, donc $\Phi = (\sup\limits_j \Phi_j)$; Φ_j vérifiant les conditions de la proposition 14, pour φ il faut utiliser le lemme 7.

COROLLAIRE 16. Soit Φ une fonction p.s.h. dans $\mathbb{C}^n$, telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. On suppose de plus les conditions suivantes.

a) $\Phi = (\sup\limits_{i\in I} \Phi_i)^*$ où chaque Φ_i est p.s.h. dans $\mathbb{C}^n$, $\exp(\Phi_i)$ étant à croissance polynomiale.

b) Il existe une constante B telle que pour tout $1 \leq \lambda \leq 2 : \Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) - B$.

c) Pour tout $1 \leq \lambda \leq 2$, il existe une constante $A(\lambda)$ telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + \log(1 + |z|^2) - A(\lambda).$$

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. Posons $f_r(z) = f(rz)$. On voit grâce à l'hypothèse b) que f_r converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$. (Même démonstration que pour le théorème 6). Il nous suffit d'approcher f_r par des polynômes ; on peut supposer la famille Φ_i filtrante croissante, d'après la remarque 15 on peut approcher f_r par des polynômes pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi_r)\,\delta_o^2)$. Or l'hypothèse c) montre que $\exp(-\Phi) \leq C_r \exp(-\Phi_r)\,\delta_o^2$ donc les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

PROPOSITION 17. On suppose que Φ vérifie les conditions a) et b) du corollaire 16 ainsi que les deux conditions suivantes.

c') Pour tout $1 \leq \lambda \leq 2$ il existe une constante $C(\lambda)$ telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + n \log(1 + |z|^2) - C(\lambda).$$

d) Pour tout $r < 1$, il existe une constante $B(r)$ telle que

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leq B(r) \quad \text{où} \quad \tilde{\Phi}(\zeta) = \sup_{|w| \leq 1} \Phi(\zeta + w).$$

Alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. L'hypothèse b) montre que $\|f_r\|_p \to \|f\|_p$ lorsque r tend vers 1 il est clair que f_r converge ponctuellement vers f ; par suite d'après [6] p. 208 f_r converge vers f dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p < \infty$.

Lorsque $p = +\infty$ $|f(rz)|\exp(-\Phi(z)) \leq \exp(B)|f(rz)|\exp(-\Phi(rz))$.

Donc $f_r \in H^\infty(\exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f dans cet espace.

Poursuivons la démonstration lorsque $p = +\infty$.

Nous allons approximer f_r, $r < 1$. Soit $r_o < r' < 1$

$$|f_r(z)| \leq \exp(B)\,\|f\|_\infty \exp(\Phi(rz))$$

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)| \leq \exp(B)\|f\|_\infty \exp(-2\Phi(r'z) - 2\Phi(rz))$$

or $\Phi(r'z) \geq \Phi(rz) + n\log(1 + |rz|^2) - A(\frac{r'}{r})$ d'après c').

Donc $|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq C_r\|f\|_\infty(1 + |rz|^2)^{-2n}$, d'où $f_r \in H^2(\exp(-\Phi_{r'}))$ et $\Phi_{r'}$ vérifie les hypothèses du corollaire 16. Par suite il existe une suite p_j de polynômes tels que

$$\int |f(rz) - p_j(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) = \varepsilon_j$$ tend vers zéro lorsque j tend vers l'infini. $|f_r - p_j|^2$ étant plurisousharmonique on a

$$|f_r(z) - p_j(z)|^2 \leq V_n^{-1} \int_{|u|\leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 \, d\lambda(u)$$

$$\leq V_n^{-1} \int_{|u|\leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(z+u))\exp(2\Phi_{r'}(r+u))d\lambda(u)$$

$$\leq V_n^{-1} \exp(2\tilde{\Phi}_{r'}(z))\varepsilon_j ,$$ V_n désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{C}^n$.

D'où $$\exp(-\Phi(z))|f_r(z) - p_j(z)| \leq V_n^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)\right]\varepsilon_j$$

l'hypothèse d) montre que p_j converge vers f_r lorsque j tend vers l'infini puisque $\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)$ est borné.

La démonstration pour $1 \leq p < \infty$ suit les mêmes étapes.

EXEMPLE 18. Si Φ est positivement homogène d'ordre $\rho > 0$, i. e. $\Phi(tz) = t^\rho\,\Phi(z)$ pour tout $t > 0$, les conditions b), c') et d) sont vérifiées. C'est clair pour les conditions b) et c'). Pour d) soit $r < 1$ et $|u| \leq 1$

$\Phi(rz+u) = |rz+u|^{\rho}\,\Phi(\frac{rz+u}{|rz+u|}) = |rz+u|^{\rho}\Phi(\alpha)$ où $|\alpha| = 1$ et

$\Phi(z) = |z|^{\rho}\,\Phi(\beta)$ avec $\beta = z|z|^{-1}$. D'où il résulte que

$\Phi(rz+u) - \Phi(z) = |rz+u|^{\rho}\,\Phi(\alpha) - |z|^{\rho}\,\Phi(\beta)$.

Or $|\alpha - \beta| = \dfrac{|(r|z| - (rz+u)|}{|rz+u|} \leq \dfrac{|u|}{|rz+u|}$

r étant fixé, on voit que $|\alpha - \beta|$ est arbitrairement petit pour $|z|$ assez grand, indépendamment de u, donc si $\varepsilon > 0$, $\Phi(\alpha) \leq (1+\varepsilon)\Phi(\beta)$ pour $|z|$ assez grand.

$$\tilde{\Phi}(rz) - \dot{\Phi}(z) \leq \Phi(\beta)\left[(1+\varepsilon)(|rz|+1)^{p} - |z|^{p}\right] \leq B(r) \quad \text{si} \quad r^{p}(1+\varepsilon) \leq 1.$$

COROLLAIRE 19. Si Φ est p. s. h. homogène complexe, d'ordre $\rho > 0$ i. e. si $\Phi(uz) = |u|^{\rho}\Phi(z)$ pour tout $u \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{n}$. Alors les polynômes sont denses dans $H^{p}(\exp(-\Phi))$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration. Comme on vient de le voir, il suffit de vérifier la condition a) de la proposition 17. Il est clair que Φ est positive et d'après [9], th. 2.5.1 $\log\Phi$ est p.s.h., or $\Phi = \sup\limits_{N} \log(\sum\limits_{o}^{N} \frac{\Phi^{p}}{p!})$. La fonction $\Phi_{N} = \log(\sum\limits_{o}^{N} \frac{\Phi^{p}}{p!})$ est p.s.h. car il en est ainsi de $\log(\frac{\Phi^{p}}{p!})$ pour tout p et $\exp(\Phi_{N})$ est à croissance polynomiale car

$\Phi(z) = |z|^{\rho}\,\Phi(\frac{z}{|z|}) \leq C|z|^{\rho}$ d'où

$\exp(\Phi_{N}) \leq \sum\limits_{p=0}^{N} C^{p}\,\frac{|z|^{\rho p}}{p!}$. La proposition 17 permet de conclure.

Supposons que Φ soit une fonction de la forme

α) $\Phi(z_1,\dots z_n) = v(|z_1|,\dots |z_n|)$ v étant une fonction sur $(\mathbb{R}_{+})^{n}$.

Nous ferons également les hypothèses suivantes sur v

β) v est une fonction convexe de $\log r$. i. e. $v(e^{r_1},\dots e^{r_n})$ est convexe dans $\mathbb{R}^{n}$.

PROPOSITION 20. Si Φ vérifie les conditions α), β). Les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p \leq \infty$ lorsque $\exp(-\Phi)$ est un poids.

Démonstration. Puisque $v(e^{r_1}, \dots e^{r_n})$ est une fonction convexe, on a, d'après le théorème de Hahn-Banach

$$v(e^{r_1}, \dots e^{r_n}) = \sup_j (\langle r, \alpha^j \rangle - \beta_j) \quad \text{avec} \quad \alpha^j = (\alpha_1^j, \dots \alpha_n^j)$$

et chaque $\alpha_k^j \geq 0$ car v est non décroissante en chaque variable, d'où

$$\Phi(z) = \sup_j \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \log |z_k| - \beta_j\right) = \sup_j \Phi_j$$

Φ_j est p.s.h. car $\alpha_k^j \geq 0$ et $\exp(\Phi_j)$ est à croissance polynomiale. On vérifie facilement les hypothèses de la proposition 17 grâce à α), β) et qu fait que $\exp(-\Phi)$ est un poids.

Signalons également cette extension du théorème 6.

Soit Φ une fonction convexe dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids.

Si $\alpha > 0$, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi^\alpha))$.

En effet, comme on l'a remarqué à la fin du lemme 7, la fonction Φ^α vérifie l'hypothèse a). De plus, si on suppose $\Phi(0) = 0$, on a $\Phi^\alpha(tz) \geq t^\alpha \Phi^\alpha(z)$ pour $t > 1$ car Φ est convexe. Cette inégalité permet de vérifier que les conditions b) et c') sont satisfaites.

On peut supposer $\alpha < 1$, car si $\alpha \geq 1$ la fonction Φ^α est convexe et le résultat est alors un cas particulier du théorème 6.

On a vu que $\tilde{\Phi}(rz) \leq \Phi(z) + A(r)$, puisque Φ est convexe. D'où l'on déduit lorsque $\alpha < 1$

$$\tilde{\Phi}^\alpha(rz) \leq \Phi^\alpha(z) + A^\alpha(r).$$

Donc la condition d) est satisfaite.

5. CONDITIONS NECESSAIRES D'APPROXIMATION.

Nous allons montrer que si Φ est une fonction p.s.h. continue, dans un domaine d'holomorphie Ω, qui croît assez vite vers le bord de Ω, elle s'écrit $\Phi(z) = (\sup_{\nu} c_{\nu} \log |a_{\nu}|)^{*}(z)$ pour $z \in \Omega$ où $c_{\nu} > 0$ et a_{ν} sont des fonctions holomorphes dans Ω. Les conditions nécessaires pour l'approximation en découleront. Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires.

Dans [2], I. Cnop a démontré le théorème suivant.

THEOREME 21. Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$, il existe des fonctions

$u_o, u_1, \ldots, u_n$ définies dans $\mathbb{C}^n \times \Omega$ telles que pour tout $s \in \mathbb{C}^n$ $u_i(s,\ )$ sont des fonctions holomorphes dans Ω et $(\zeta_1 - s_1)u_1(s,\zeta) + \ldots + (\zeta_n - s_n)u_n(s,\zeta) + \delta_\Omega(s)u_o(s,\zeta) \equiv 1$ (11)

pour tout $(s,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \Omega$. De plus, il existe un entier N et une constante $M > 0$, tels que

$$\delta_\Omega^N(\zeta)\ |u_i(s,\zeta)| \leq M \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Nous en déduisons le corollaire.

COROLLAIRE 22. Pour tout $\zeta^o \in \partial\Omega$, il existe une fonction $f \in E(N,\Omega)$, i.e. $\delta_\Omega^N |f| \leq 1$ telle que f soit non bornée au voisinage de ζ^o.

Démonstration. En effet, si chaque $u(\zeta^o,\ )$ était borné au voisinage de ζ^o on aurait, puisque $\delta_\Omega(\zeta^o) = 0$,

$$1 \leq \sum |u_i(\zeta^o,\zeta)|\ |\zeta_i - \zeta_i^o| \leq K \sum |\zeta_i - \zeta_i^o|$$

ce qui est impossible dans un voisinage de ζ^o.

PROPOSITION 23. Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$, il existe une fonction f holomorphe dans Ω et un entier N, tels que $\sup_{z\in\Omega} \delta_\Omega^N(z)\,|f(z)| < \infty$ et f n'est bornée au voisinage d'aucun point du bord de Ω.

Démonstration. Soit une suite de points dense sur la frontière de Ω et (B_j) la famille dénombrable de polydisques de rayons rationnels centrés en ces points. Désignons par E_j l'espace des fonctions f, holomorphes dans Ω, telles que $\sup_{z\in\Omega} \delta_\Omega^N(z)\,|f|(z) = \|f\|_N$ et $\|f\|_j = \sup_{z\in\Omega\cap B_j} |f(z)|$ soient bornées. L'entier N étant le même que dans le théorème 21.

On norme l'espace E_j, en posant $\|f\| = \sup(\|f\|_N, \|f\|_j)$, c'est un espace de Banach.

Considérons l'application de restriction $R_j : E_j \to E(N,\Omega)$. Cette application est continue et le corollaire précédent montre qu'elle n'est pas surjective, il en résulte d'après le théorème des homomorphismes que $R_j(E_j)$ est maigre dans $E(N,\Omega)$. Il en est de même de la réunion $\bigcup_j R_j(E_j)$. Soit f appartenant à $E(N,\Omega)$ et n'appartenant à aucun des $R_j(E_j)$, il est clair qu'une telle fonction n'est bornée sur aucun des $B_j \cap \Omega$, c'est-à-dire au voisinage d'aucun point du bord. En particulier Ω est son domaine d'holomorphie.

Remarquons que le théorème de I. Cnop permet d'associer à chaque domaine d'holomorphie Ω un entier $N \geq 1$ tel que Ω soit le domaine d'existence d'une fonction $f \in E(N , \Omega)$. Dans [11], nous étudions les domaines pour lesquels $N = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont domaine d'holomorphie d'une fonction bornée.

PROPOSITION 24. Soit Φ une fonction p.s.h. dans Ω, continue, telle que $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$ et $\exp(-\Phi)$ lipschitzienne de rapport 1. Alors il existe une suite a_ν de fonctions holomorphes dans Ω telle que

$$\Phi(z) = (\sup_\nu c_\nu \log |a_\nu|)^*(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega \quad \text{avec} \quad c_\nu > 0 .$$

Démonstration. Considérons l'ouvert $\tilde{\Omega} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in \Omega,\ w \in \mathbb{C},\ |w| < \exp(-\Phi(z))\}$

Il est clair que $d_{\tilde{\Omega}}(z,w) \leq \exp(-\Phi(z)) - |w|$ et que $d_{\tilde{\Omega}}(z,w) \geq d_{\tilde{\Omega}}(z,0) - |w|$.

Or $d_{\tilde{\Omega}}(z,0) \leq \exp(-\Phi(z))$ et si $(z',w') \notin \tilde{\Omega}$ on a

$$|z - z'| + |w'| \geq \exp(-\Phi(z))$$

car la fonction $\exp(-\Phi)$ est lipschitzienne et vaut 0 au bord de Ω.

Remarquons que l'hypothèse implique que $|z| \exp(-\Phi(z))$ est bornée sur Ω donc on peut supposer $\exp(-\Phi(z)) - |w| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z , w)$.

En appliquant la proposition 23, il existe $f \in E(k,\tilde{\Omega})$ dont $\tilde{\Omega}$ soit le domaine d'holomorphie. Considérons le développement de Hartogs de f [1],

$$f(z,w) = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu(z)\, w^\nu \quad \text{où} \quad a_\nu(z) = \frac{1}{\nu!} D^\nu f(z,0).$$

Posons $-\log R(z) = (\overline{\lim_\nu} \frac{1}{\nu}\log |a_\nu|)^*(z)$. D'après un théorème de Hartogs la série $\sum_\nu a_\nu(z) w^\nu$ est définie et holomorphe dans le domaine $\Omega_R = \{(z,w) \mid z\in\Omega \quad |w| < R(z)\}$.

On a $\tilde{\Omega} \subset \Omega_R$, et $\tilde{\Omega}$ étant le domaine d'existence de f d'où $\tilde{\Omega} = \Omega_R$ et $\exp(-\Phi(z)) = R(z)$. Il en résulte que

(12) $$\Phi(z) = -\log R(z) = (\overline{\lim_\nu} \frac{1}{\nu}\log |a_\nu|)^*(z) \quad \text{pour} \quad z\in\Omega.$$

Puisque $f\in E(k,\delta_{\tilde{\Omega}})$ on peut supposer $\sup_{(z,w)\in\tilde{\Omega}} \delta^k_{\tilde{\Omega}}(z,w)\,|f(z,w)| \leq 1$.

Or $a_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z, r\exp(-\Phi(z))e^{i\theta})\, r^{-\nu}\exp(\nu\Phi(z))e^{-i\nu\theta}\,d\theta$ avec $r < 1$; d'où

$$|a_\nu(z)| < (2\pi)^{-1}\, r^{-\nu}\exp(\nu\Phi(z)) \int_0^{2\pi} \delta^{-k}_{\tilde{\Omega}}(z, r\exp{-\Phi(z)}\, e^{i\theta})\,d\theta.$$

On a vu qu'on peut supposer $\exp(-\Phi(z)) - |w| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z,w)$, par suite

$$|a_\nu(z)| \leq r^{-\nu}\exp(\nu\Phi(z)).(2\pi)^{-1}.\int_0^{2\pi}(1-r)^{-k}\exp(+k\Phi(z))d\theta$$

d'où $$|a_\nu(z)| \leq r^{-\nu}(1-r)^{-k}\exp((\nu+k)\,\Phi(z)).$$

Pour ν fixé, posons $r = \nu(\nu+k)^{-1}$ on trouve alors

$$|a_\nu(z)| \leq (\nu+k)^{(\nu+k)}\ \nu^{-\nu}k^{-k}\exp\left[(\nu+k)\,\Phi(z)\right].$$

Donc

(13) $$\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu\,|a_\nu(z)| \leq \Phi(z) \quad \text{où} \quad K_\nu = \nu^\nu k^\nu(\nu+k)^{-(\nu+k)}.$$

Nous allons montrer que $\Phi(z) = (\sup_\nu \frac{1}{\nu+k}\log K_\nu\,|a_\nu|)^*(z)$.

Or $\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu\,|a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu+k}\log K_\nu + \frac{1}{\nu+k}\log\,|a_\nu(z)|$;

et on voit facilement que $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu = 0$,

donc $\overline{\lim\limits_{\nu}}\,\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu\,|a_\nu|(z) = \overline{\lim\limits_{\nu}}\,\frac{1}{\nu+k}\log|a_\nu(z)| = \overline{\lim\limits_{\nu}}\,\frac{1}{\nu}\log\,|a_\nu|(z)$

d'où le résultat, d'après les relations (12) et (13).

THEOREME 25. Soit δ une fonction positive définie dans $\mathbb{C}^n$, lipschitzienne avec $\delta \leq \delta_o$ et $-\log\delta$ p.s.h. dans $\Omega = \{z/\delta(z) > 0\}$.

$H(\Omega')$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, au sens de la définition 11, si et seulement si $-\log\delta = (\sup\limits_{j\in J} c_j\log|f_j|)^*$ avec $c_i > 0$ et $f_i\in H(\Omega)$.

Démonstration. Le fait que la condition soit suffisante résulte du théorème 9, puisque $c_j\log|f_j|$ est p.s.h. dans Ω' et qu'on prend tous les Ω_i égaux à Ω.

Montrons que la condition est nécessaire.

La fonction $-\log\delta$ vérifie les hypothèses de la proposition 24, par suite

$$-\log\delta(z) = (\sup_{\nu}\frac{1}{\nu}\log|a_\nu|)^*(z) \quad \text{pour} \quad z\in\Omega. \tag{14}$$

On peut supposer aussi que $\overline{\lim\limits_{\nu}}\,(\nu^{-1}\log|a_\nu|) = \sup\limits_{\nu}(\nu^{-1}\log|a_\nu|)$.

D'après (14), $\delta^\nu(z)\,|a_\nu(z)| \leq 1$ pour $z\in\Omega$, i.e. $a_\nu \in E(\nu, \delta)$; puisque $H(\Omega')$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ il existe un entier $\gamma > 0$ et une suite de fonctions $a_{\nu,p} \in H(\Omega')$ tels que :

$$\delta^{\nu+\gamma}(z)\,|a_\nu(z) - a_{\nu,p}(z)| \leq p^{-1} \quad \text{pour tout} \quad z\in\Omega.$$

Donc $\delta^{\nu+\gamma}(z)\,|a_{\nu,p}|(z) \leq (1+p^{-1})$ si $z\in\Omega$.

Par suite

$$\frac{1}{\nu+\gamma}\log(1+p^{-1})|a_{\nu,p}| \leq -\log\delta.$$

Or $$\frac{1}{\nu+\gamma}\log|a_\nu(z)| \leq \sup_p \log(1+p^{-1})|a_{\nu,p}|(z).$$

Donc $$\overline{\lim_\nu}\,\frac{1}{\nu}\log|a_\nu| = \overline{\lim_\nu}\,\frac{1}{\nu+\gamma}\log|a_\nu| \leq \sup_{p,\nu}\frac{1}{\nu+\gamma}\log(1+p^{-1})\,|a_{\nu,p}|(z),$$

et $$-\log\delta(z) = (\sup_{\nu,p}\frac{1}{\nu+\gamma}\log(1+p^{-1})|a_{\nu,p}|)^*(z) \quad \text{pour tout} \quad z\in\Omega.$$

La démonstration montre que les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta)$ si et seulement si

$-\log\delta(z) = (\sup c_i\log|p_j|)^*(z)$, les p_j étant des polynômes.

COROLLAIRE 26. Soit δ vérifiant les hypothèses du théorème 25.

Si $c\,\delta_\Omega^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour $-\log\delta$ alors les conditions suivantes sont équivalentes.

i) $H(\Omega')\cap H^2(\Omega,\delta^k)$ est dense dans $H^2(\Omega,\delta^k)$ pour tout entier $k>0$.

ii) $-\log\delta(z) = (\sup_i c_i\log|f_i|)^*(z)$ pour $z\in\Omega$ $f_i\in H(\Omega')$ $c_i>0$.

Démonstration. Si i) est vérifiée, $H(\Omega')$ est alors dense dans $\mathcal{O}(\delta)$. En effet

$$E(k,\delta)\hookrightarrow H^2(\Omega,\delta^{2k+2n+1})\hookrightarrow E(k+2n+4,\delta)$$

les injections étant continues, il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Lorsque la condition ii) est vérifiée on peut appliquer la proposition 4 pour en déduire i).

Je voudrais terminer, en remerciant J.-P. Ferrier avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé.

(1) J. BREMERMANN Math. Annalen 136 (1958), 173-186.

(2) I. CNOP Spectral study of holomorphic functions with bounded growth. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 293-310.

(3) De BRANGES Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall 1968.

(4) J.-P. FERRIER Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 67-87.

(5) J.-P. FERRIER Spectral theory and complex analysis. North Holland Publishing Cny, 1973.

(6) E. HEWITT and K. STROMBERG Real and abstract analysis. Springer Verlag 1965.

(7) L. HÖRMANDER L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 13 (1965), 89-152.

(8) L. HÖRMANDER An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand Cny 1966.

(9) P. LELONG Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal Presses de l'Université 1968.

(10) N. SIBONY Approximation polynomiale pondérée sur un domaine d'holomorphie de C^n. C. R. Acad. sc. Paris, t. 276 (1973), 249-252.

(11) N. SIBONY Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (1973), 973-976.

(12) B. A. TAYLOR On weighted polynomial approximation of entire functions. Pacific J. Math. 36 (1971), 523-539.

Approximation pondérée sur une
sous-variété totalement réelle de $\mathbf{C}^n$.

par J.-P. Ferrier et N. Sibony

1.- Introduction et position du problème.

On considère une sous-variété réelle fermée Σ de dimension k et de classe $\mathcal{E}^r$ de $\mathbf{C}^n$. On suppose dans toute la suite que Σ est totalement réelle, c'est à dire qu'en tout point x de Σ l'espace tangent T_x à Σ en x ne contient pas de sous-espace complexe autre que $\{0\}$; cela implique en particulier $k \leq n$.

L. Hörmander et J. Wermer ont démontré dans [6] le résultat suivant

Théorème.- On suppose $r > k/2 + 1$; si K est un compact de Σ, toute fonction continue sur K est uniformément approchable sur K par des fonctions holomorphes au voisinage de K.

Ce résultat a été étendu par E. Cirka [1] d'une part et F.R. Harvey et J.O.Wells [3] d'autre part, au cas d'une variété Σ de classe $\mathcal{E}^1$.

On se propose ici, en utilisant les techniques de [1] et [6], d'étudier le problème de l'approximation, au sens d'un poids sur Σ, des fonctions continues sur Σ vérifiant des hypothèses de croissance à l'infini par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, puis par des polynômes.

Plus précisément, soit w une fonction continue strictement positive sur Σ ; on désigne par $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques complexes continues f sur Σ telles que $w|f|$ tende vers zéro à l'infini sur Σ, muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_w = \sup_{x \in \Sigma} w(x)|f(x)| ,$$

pour laquelle $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ est un espace de Banach. On suppose que w est un poids, c'est à dire que $\|p\|_w < +\infty$ pour tout polynôme p; dans ce cas $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ contient les polynômes et on se propose d'étudier dans ce cadre le problème de Bernstein, c'est à dire de chercher des conditions sous lesquelles les polynômes sont denses dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Nous commençons par approcher les fonctions de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, sous une condition d'uniforme H-convexité introduite par E. Cirka [1]. Une hypothèse géométrique sur Σ permet ensuite de faire l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage tubulaire fixe. Le passage à l'approximation par des polynômes se fait à l'aide des techniques de [8].

Fixons quelques notations; de façon générale, lorsque Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et ψ une fonction numérique continue strictement positive sur Ω, on notera $H^2(\Omega, \psi)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur Ω, qui sont de carré intégrable pour la mesure de densité ψ. On posera encore

$$\delta_o(z) = (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$H_f(z, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j}(z) \, t_i \bar{t}_j$$

si f est une fonction de classe $\mathcal{E}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et pour $z \in \Omega$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{C}^n$.

2.- Ensembles uniformément H-convexes.

Nous posons suivant [1] la

Définition 1.- Un ensemble fermé F de $\mathbf{C}^n$ est dit uniformément H-convexe s'il existe une constante $\theta > 0$ et une suite Ω_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, de domaines d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$ pour lesquels

$$\frac{\theta}{\nu} \leq \inf_{\nu \in \partial\Omega_\nu} d(\zeta, F) \leq \sup_{\nu \in \partial\Omega_\nu} d(\zeta, F) \leq \frac{1}{\nu}. \tag{1}$$

On donne deux exemples de variétés totalement réelles Σ qui sont uniformément H-convexes.

Exemple a. On considère le graphe Σ d'une application $F = (f_1, \ldots, f_m)$ de classe $\mathcal{E}^2$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^m$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) Le rang de la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j}\right)_{i,j}$ est égal à n en tout point de $\mathbf{C}^n$.

(ii) La différentielle de F est bornée en norme sur $\mathbf{C}^n$.

(iii) Il existe une constante positive C_1 telle que

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{m} |H_{\bar{f}_k}(z,t)|^2 \leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z)\, t_l \right|^2 \right)^2$$

pour $t \in \mathbf{C}^n$ et $z \in \mathbf{C}^n$.

Alors Σ est une sous-variété totalement réelle qui est uniformément H-convexe.

Le fait que Σ est totalement réelle résulte de la condition (i). Pour voir que Σ est uniformément H-convexe, introduisons la fonction ϕ définie dans $\mathbf{C}^{n+m}$ par

$$\phi(z,w) = \sum_{k=1}^{m} |w_k - f_k(z)|^2$$

où $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{C}^m$, et désignons, pour tout entier $\nu > 0$, par Ω_ν l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbf{C}^{n+m}$ tels que $\phi(z,w) < \nu^{-2}$. Clairement $\Sigma = \phi^{-1}(0)$; de plus si $(z,w) \in \partial\Omega_\nu$ et si on considère sur $\mathbf{C}^{n+m}$ la norme $(z,w) \longmapsto |z| + |w|$, en désignant par M une constante ≥ 1 majorant la norme de F' sur $\mathbf{C}^n$, il vient

$$(M\nu)^{-1} \leq d((z,w), \Sigma) \leq \nu^{-1}.$$

La première inégalité résulte de ce que si $z_0 \in \mathbf{C}^n$, la boule ouverte de centre $(z_0, F(z_0))$ et de rayon $(M\nu)^{-1}$ est contenue dans Ω_ν ; en effet, si $(\zeta, \zeta') \in \mathbf{C}^{n+m}$ vérifie $|\zeta| + |\zeta'| < (M\nu)^{-1}$, le théorème des accroissements finis et l'hypothèse (ii) assurent que

$$\phi(z_0 + \zeta, F(z_0) + \zeta') = \sum_{k=1}^{n} |f_k(z_0) + \zeta'_k - f_k(z_0 + \zeta)|^2$$

est majoré par $M^2|\zeta^2| + |\zeta'|^2$ et donc par ν^{-2}. La seconde inégalité vient de

$$d((z,w), \Sigma) \leq |(z,w) - (z, F(z))| \leq \phi(z,w)^{\frac{1}{2}} \leq \nu^{-1}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que Ω_ν est un domaine d'holomorphie pour ν assez grand; or pour $(t,t') \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, il vient

(3) $\quad H_\phi((z,w),(t,t')) =$

$$\sum_{k=1}^{m}\Big|\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_l}(z)\,t_l\Big|^2 + \sum_{k=1}^{m}\Big|t'_k - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial z_l}(z)\,t_l\Big|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}(w_k - f_k(z))\,H_{\bar f_k}(z,t).$$

Cette expression est elle-même minorée par

$$\sum_{k=1}^{m}\Big|\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_l}(z)\,t_l\Big|^2 - 2\nu^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{m}\big|H_{\bar f_k}(z,t)\big|^2\Big)^{\frac12},$$

de sorte que l'hypothèse (iii) assure pour $\nu > 2C_1$ que $H_\phi((z,w),(t,t')) \geqslant 0$ lorsque (z,w) reste dans un voisinage convenable de $\overline{\Omega_\nu}$. Ainsi Ω_ν vérifie la condition de Levi et la démonstration est achevée.

Exemple b. On considère une sous-variété totalement réelle Σ de $\mathbf{C}^n$ de classe $\mathcal{E}^2$ pour laquelle on suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $C_2 \geqslant 0$ telles que tout point z de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $d(z,\Sigma) < \alpha$ possède une projection unique $p_\Sigma(z)$ sur Σ et que sur l'ensemble Σ^α des points z de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $d(z,\Sigma) < \alpha$, on ait

$$|p_\Sigma(z) - p_\Sigma(z')| \leqslant C_2\,|z - z'| .$$

Si X, Y sont des vecteurs tangents non nuls en un point x de Σ, on note $A(X, iY)$ l'angle, dans l'espace hilbertien $\mathbf{C}^n$, de X et de iY. On pose

$$\beta(x) = \inf A(X, iY),$$

lorsque X, Y parcourent les vecteurs non nuls de T_x ; dire que Σ est totalement réelle revient à dire que $\beta(x) > 0$ pour tout point x de Σ. On fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\beta = \inf_{x\in\Sigma}\beta(x) > 0.$$

Dans ces conditions Σ est uniformément H-convexe. Cela résulte aussitôt du

Lemme 2.- Sous les hypothèses qui précèdent et pour $C_2^2(1+\cos\beta) < 2$, la fonction $\phi : z \longmapsto d^2(z,\Sigma)$ est plurisousharmonique dans Σ^α.

Démonstration. Soient $p_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \dots, p_n = \varphi_n + i\psi_n$, les composantes de p_Σ qui est différentiable dans Σ^α puisque la projection sur Σ est unique. Le fait que $p_\Sigma(z)$ minimise la distance du point z de coordonnées $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ à Σ se traduit par

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(z) - x_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) + (\psi_j(z) - \varphi_j(z)) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_k}(z) = 0$$

pour $k = 1, \dots, n$. Il en résulte

$$H_\phi(z, t) = |t|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial p_l}{\partial z_k}(z)\, \bar{t}_k\, t_l ,$$

soit encore $\langle (I - A(z))\, t, t \rangle$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit hermitien dans $\mathbf{C}^n$ et $A(z)$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ de matrice

$$\left(\frac{\partial p_l}{\partial z_k}(z)\right)_{k,l} .$$

On a évidemment

$$A(z) \,.\, t = \tfrac{1}{2} \left[p'_\Sigma(z) \,.\, t + i\, p'_\Sigma(z) \,.\, (-it) \right]$$

et

$$|A(z) \,.\, t|^2 = \frac{1}{4} \left[|p'_\Sigma(z) \,.\, t|^2 + |p'_\Sigma(z) \,.\, (-it)|^2 + 2\,\mathrm{Re} \langle p'_\Sigma(z) \,.\, t,\ p'_\Sigma(z)(-it) \rangle \right] .$$

Or $p'_\Sigma(z) \,.\, t$ et $p'_\Sigma(z) \,.\, (-it)$ sont des vecteurs tangents à Σ en $p_\Sigma(z)$ de sorte que l'expression précédente est majorée par $\frac{1}{2} |t|^2 C_2^2 (1 + \cos \beta)$. L'hypothèse assure alors que $H_\phi(z, t) \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

Si alors Ω_ν désigne l'ensemble des points z de $\mathbf{C}^n$ tels que $d(z, \Sigma) < \nu^{-1}$ pour un entier $\nu > 0$, la suite (Ω_ν) est une suite de domaines d'holomorphie qui vérifient les conditions de la définition 1.

3. Approximation par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ.

Nous établissons ici le

Théorème 3.- Soit Σ une sous-variété fermée totalement réelle de classe $\mathscr{E}^r$, avec $r > \frac{n}{2} + 1$, de $\mathbf{C}^n$; on suppose Σ uniformément H-convexe et on considère une suite (Ω_ν), $\nu = 1, 2, \dots$ de domaines d'holomorphie vérifiant (1). Dans ces conditions les restrictions à Σ des fonctions de $\bigcup_{\nu} H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ sont denses dans $\mathcal{E}_{\delta_o^2}(\Sigma)$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes à commencer par le

Lemme 4.- Les restrictions à Σ des fonctions de classe $\mathcal{E}^\infty$ à support compact de $\mathbf{C}^n$ sont denses dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Soit en effet $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Σ, vérifiant $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ pour tout j et soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur Σ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que φ_j soit égale à 1 au voisinage de K_j et à support dans K_{j+1}.

Pour toute fonction f de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$, la fonction $w\,|\varphi_j f - f| = w|f|\,(\varphi_j - 1)$ est nulle sur K_j et majorée par $2\,w|f|$; elle tend donc uniformément vers zéro lorsque j tend vers l'infini. Par suite f est approchée par des fonctions continues à support compact sur Σ ; en prolongeant ces dernières en des fonctions continues, à support compact sur $\mathbf{C}^n$, puis en les régularisant on achève la démonstration du lemme. On peut même se limiter à des fonctions de classe $\mathcal{E}^\infty$ à support dans un voisinage ouvert arbitraire de Σ, soit par exemple Ω_1.

Rappelons d'autre part un lemme dû à L. Hörmander et J. Wermer [6].

Lemme 5.- Soit g une fonction de classe $\mathcal{E}^\infty$ à support compact dans Ω_1; il existe une fonction G de classe $\mathcal{E}^1$ à support compact dans Ω, qui coïncide avec g sur Σ et vérifie pour une constante C_3 l'inégalité

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z)\right| \leqslant C_3\, d(z, \Sigma)^{r-1} ,$$

où $j = 1, \ldots, n$.

Nous utiliserons enfin comme dans [6] un lemme classique de la théorie des équations aux dérivées partielles:

Lemme 6.- Soient z_o un point de $\mathbf{C}^n$ et r un nombre réel strictement positif; désignons par B la boule ouverte de centre z_o et de rayon r. Il existe une constante C_3 telle que pour toute fonction u de $L^2(B)$ pour laquelle $\bar{\partial}u$ soit une fonction continue sur B, on ait

$$|u(z_o)| \leqslant C_3 \left\{ r^{-n}\, \|u\|_{L^2(B)} + r \sup_{z\in B} |\bar{\partial} u(z)| \right\} .$$

Démonstration du théorème.- Nous sommes ramenés par le lemme 4 à approcher une fonction g de classe $\mathcal{E}^\infty$ et à support compact K dans Ω_1. Pour chaque entier $\nu > 0$, la restriction ω_ν de $\bar\partial G$ à Ω_ν est une forme fermée de type (0, 1) de sorte qu'il existe d'après [4] une fonction G_ν dans Ω_ν vérifiant $\bar\partial G_\nu = \bar\partial G$ et

$$\int_{\Omega_\nu} |G_\nu|^2 \, \delta_o^4 \, d\lambda \leq \int_{\Omega_\nu} |\bar\partial G|^2 \, d\lambda \,, \tag{4}$$

où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^n$. Clairement $G - G_\nu$ est holomorphe et donc dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ et $G - (G - G_\nu) = G_\nu$. Il nous suffit alors de montrer que $\delta_o^4 G_\nu$ tend uniformément vers zéro sur Σ lorsque ν tend vers l'infini. Appliquons pour cela le lemme 6 à la fonction G_ν restreinte à une boule ouverte B de centre $x \in \Sigma$ et de rayon $\theta \nu^{-1}$; il vient

$$|G_\nu(x)| \leq C_3 \left\{ \nu^n \theta^{-n} \left(\int_B |G_\nu|^2 \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} + \theta \nu^{-1} \sup_{z \in B} |\bar\partial G_\nu(z)| \right\}.$$

On vérifie facilement qu'il existe une constante C_4 telle que $\delta_o(x) \leq C_4 \, \delta_o(z)$ pour $|x - z| \leq 1$ de sorte que

$$\delta_o^2(x) \, |G_\nu(x)| \leq$$

$$C_3 \left\{ C_4^2 \, \nu^n \theta^{-n} \left(\int_B \delta_o^4(z) |G_\nu(z)|^2 \, d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{2}} + \theta \nu^{-1} \delta_o^2(x) \sup_{z \in B} |\bar\partial G_\nu(z)| \right\},$$

le membre de droite étant lui-même majoré d'après (4) par

$$C_3 \left\{ C_4^{-2} \, \nu^n \theta^{-n} \left(\int_{\Omega_\nu} |\bar\partial G|^2 \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} + \theta \nu^{-1} \sup_{z \in K} |\bar\partial G| \right\}.$$

En utilisant alors l'inégalité (3) et le fait que le volume de $\Omega_\nu \cap K$ est un $O(\nu^{-(2n-k)})$, il est clair que l'expression considérée tend uniformément vers zéro pour $x \in \Sigma$ lorsque $r > \frac{k}{2} + 1$.

<u>Remarque</u>. Si on remplace la condition (1) de la définition 1 par la condition

$$\bigcup_{x \in \Sigma} B(x, \theta(x) \nu^{-1}) \subset \Omega_\nu \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B(x, \nu^{-1}), \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

dans laquelle θ est une fonction continue sur Σ à valeurs dans $]0, 1]$ et $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, on obtient alors en conclusion que $\bigcup_\nu H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ est dense dans $\mathcal{C}_{\theta^n \delta_o^2}(\Sigma)$.

La nouvelle condition a d'autant plus de chance d'être vérifiée que θ tend plus vite vers zéro à l'infini.

On utilise les mêmes majorations que précédemment mais en prenant pour B la boule ouverte de centre x et de rayon $\theta(x)\,\nu^{-1}$.

Nous allons maintenant dans des cas particuliers passer de l'approximation par des fonctions holomorphes avec un voisinage variable de Σ à l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage fixe à l'aide du résultat suivant de [8] :

Théorème 7.- Soient k un entier naturel, Ω un domaine d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$ et δ une fonction lipschitzienne strictement positive dans Ω tendant vers zéro au bord de Ω ; on suppose que $-\log\delta$ est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions plurisousharmoniques positives dans un domaine d'holomorphie Ω' contenant Ω . On peut alors approcher toute fonction de $H^2(\Omega, \delta_o^k)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta^2\delta_o^{k+4})$ par des fonctions de $\bigcup_i H^2(\Omega', \exp(-\varphi_i)\,\delta_o^{k+4})$.

Notons que si $\Omega' = \mathbf{C}^n$ et si chaque fonction $\exp\varphi_i$ est à croissance polynômiale, alors l'approximation se fait par des polynômes.

Nous obtenons d'abord la

Proposition 8.- On se place dans le cas de l'exemple b) dont on conserve les notations; alors $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_o^8)$ est dense dans $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$.

Démonstration.- Puisque Σ est uniformément H-convexe, on est ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ par des fonctions de $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_o^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$d_\nu(z) = (\nu^{-2} - d^2(z,\Sigma))^+ .$$

Clairement d_ν est lipschitzienne sur $\mathbf{C}^n$ et l'ensemble des points où d_ν est strictement positive est l'ouvert Ω_ν des points z tels que $d(z,\Sigma) < \nu^{-1}$.

La fonction $x \longmapsto -\log((\nu^{-1} - x)^+)$ est convexe sur $[0, +\infty[$; on peut l'écrire sur cet intervalle comme enveloppe supérieure d'une suite croissante $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes finies(en la remplaçant par exemple par une fonction affine pour $x > \nu^{-1} - 1/j$). Par suite on a

$$-\log d_\nu = \sup_{j.} \varphi_j ,$$

où $\varphi_j(z) = f_j(d^2(z,\Sigma))$. Chaque fonction φ_j est évidemment plurisousharmonique dans Σ^α. Pour $\nu \geqslant 1/\alpha$ on a $\Omega_\nu \subset \Sigma^\alpha$; en appliquant le théorème 7, on approche les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ pour la norme de $H^2(\Omega_\nu, d_\nu^2 \delta_o^8)$ par des fonctions de

$$\bigcup_j H^2(\Sigma^\alpha, \exp(-\varphi_j)\ \delta_o^8).$$

La démonstration s'achève alors car d'une part $d_\nu^2(x) \geqslant \nu^{-2}$ pour $x \in \Sigma$ et la restriction $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^8) \to \mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$ est continue d'après le lemme 6, et d'autre part $\exp(-\varphi_j)$ est minorée sur Σ^α.

Nous obtenons d'autre part la

Proposition 9.- <u>On se place dans le cas de l'exemple</u> a) <u>dont on conserve les notations</u>; <u>si</u> Ω <u>désigne l'ensemble ouvert des points</u> (z, w) <u>tels que</u> $\phi(z, w) < 2C_1$, <u>alors</u> $H^2(\Omega, \delta_o^8)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$.

Si les fonctions f_k sont de plus pluriharmoniques, toute fonction de $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$ peut être approchée par des fonctions entières.

<u>Démonstration</u>.- Comme on l'a vu au paragraphe 2, la fonction ϕ est plurisousharmonique dans Ω. On est ramené, comme pour la proposition précédente, à approcher dans $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ par des fonctions de $H^2(\Omega, \delta_o^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$\phi_\nu(z, w) = (\nu^{-2} - \phi(z, w))^+ .$$

La fonction ϕ_ν est lipschitzienne dans Ω à cause de l'hypothèse (ii). Si on considère les fonctions f_j introduites pour démontrer la proposition précédente et si l'on pose $\psi_j = f_j \circ \phi$, alors

$$-\log \phi_\nu = \sup_j \psi_j$$

sur Ω, où ψ_j est plurisousharmonique et bornée dans Ω. Il en résulte alors que $\bigcup_j H^2(\Omega, \exp(-\psi_j)\ \delta_o^8)$ est dense dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta^2\ \delta_o^8)$, ce qui permet d'achever la démonstration.

Si les fonctions f_j sont plurisousharmoniques, alors ϕ est plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et l'approximation se fait par des fonctions de $H^2(\mathbf{C}^{n+m}, \exp(-\psi_j)\ \delta_o^8)$ et par conséquent des fonctions entières.

4. Régularisation des fonctions plurisousharmoniques.

Pour traiter le problème de l'approximation des fonctions de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ par des polynômes, nous avons besoin d'introduire un procédé de régularisation des fonctions plurisousharmoniques. Si f est une fonction numérique réelle, semi-continue inférieurement, sur un espace métrique E, nous posons pour chaque entier $k > 0$ et chaque point x de l'espace

$$f_k(x) = \inf_{\xi \in E} (k\, d(\xi, x) + f(\xi)) .$$

La fonction f_k est lipschitzienne dans le rapport k et majorée par f ; c'est précisément la plus grande fonction ayant ces propriétés. On vérifie facilement que la suite (f_k) est croissante et qu'elle converge simplement vers f lorsque f est minorée.

Soient maintenant Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et f une fonction positive semi-continue sur Ω. Nous prolongeons f par zéro hors de Ω, obtenant ainsi une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathbf{C}^n$, et considérons la suite (f_k) de fonctions sur $\mathbf{C}^n$ qui est associée à f par le procédé mentionné ci-dessus. Nous allons interpréter f_k d'une manière différente.

Désignons pour cela par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des points (z, w) de $\Omega \times \mathbf{C}$ tels que $|w| < f(z)$ et considérons sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ la norme $(z, w) \longmapsto k|z| + |w|$ et la distance d_k associée à cette norme.

Lemme 10.- <u>Pour tout</u> $z \in \mathbf{C}^n$, <u>on a</u> $f_k(z) = d_k\left[(z, 0), \complement \Omega\right]$; <u>si de plus</u> Ω <u>est un domaine d'holomorphie et si</u> $-\log f$ <u>est plurisousharmonique</u> <u>dans</u> Ω , <u>alors</u> $-\log f_k$ <u>est plurisousharmonique dans</u> Ω .

<u>Démonstration</u>.- On a en effet successivement

$$\begin{aligned} d_k \left[(z, 0), \complement \tilde{\Omega}\right] &= \inf_{(\zeta, z) \notin \tilde{\Omega}} \left[k\,|\zeta - z| + w\right] \\ &= \inf_{\zeta \in \mathbf{C}^n} \left[k\,|\zeta - z| + f(\zeta)\right] \\ &= f_k(z) . \end{aligned}$$

De plus, si Ω est un domaine d'holomorphie et si $-\log f$ est plurisousharmonique dans Ω, alors $\tilde{\Omega}$ est un domaine d'holomorphie d'après le théorème d'Oka. Par suite la fonction $(z, w) \longmapsto -\log d_k \left[(z, w), \complement \tilde{\Omega}\right]$ est plurisousharmonique dans $\tilde{\Omega}$. Sa trace sur Ω l'est encore; or c'est précisément f_k.

Signalons au passage une conséquence de ce lemme qui n'est pas directement utile pour la suite, mais présente un intérêt propre.

Proposition 11.- Pour toute fonction plurisousharmonique dans ce domaine d'holomorphie Ω de $\mathbf{C}^n$, il existe une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques localement lipschitziennes qui converge simplement vers φ ; si φ est continue, la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration.- On applique ce qui précède à la fonction $\exp(-\varphi)$, prolongée par zéro hors de Ω . Il suffit simplement de poser

$$\varphi_k = \{-\log [\exp(-\varphi)]\}_k ,$$

pour obtenir une suite ayant les propriétés souhaitées.

Nous nous limiterons maintenant au cas de fonctions lipschitziennes dans le rapport 1. Pour toute fonction polynomiale p sur $\mathbf{C}^n$, nous définissons une fonction p^* sur $\mathbf{C}^n$ par

$$\frac{1}{p^*(z)} = \inf_{\zeta \in \mathbf{C}^n} \left[|\zeta - z| + \frac{1}{p(z)} \right] .$$

Clairement $1/p^*$ est lipschitzienne dans le rapport 1 et p^* majore $|p|$; en fait p^* est la plus petite fonction ayant ces propriétés. De plus,

Lemme 12.- La fonction p^* est à croissance polynomiale et $\log p^*$ est plurisousharmonique.

Démonstration.- La première assertion résulte de ce que pour tout polynôme p, il existe une constante C et un nombre entier naturel r tels que

$$|p(z)| \leq C\ (1+|z|)^r .$$

On peut choisir C assez grande pour que la fonction $z \longmapsto C^{-1}(1+|z|)^{-r}$ soit lipschitzienne dans le rapport 1, de sorte que cette fonction minore encore $1/p^*$. Quant à la seconde assertion, elle résulte seulement du lemme 10 et du faut que la fonction $\log|p|$ est plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^n$.

5. Approximation polynomiale.

Etant donnés un poids w sur Σ et un nombre $\varepsilon > 0$, on désigne de façon générale par $B_{\varepsilon, w}$ l'ensemble des fonctions polynomiales p sur $\mathbf{C}^n$ pour lesquelles $|p(x+z)|\ w(x) \leq 1$ pour tout point x de Σ et tout point $z \in \mathbf{C}^n$ tel que $|z| \leq \varepsilon$. Nous désignons d'autre part par Σ^ε l'ensemble des points z de $\mathbf{C}^n$ tels que $d(z, \Sigma) < \varepsilon$.

Théorème 13.- Nous reprenons les notations et hypothèses du paragraphe 1. <u>S'il existe un nombre</u> $\theta \in]0, 1[$ <u>tel que pour tout entier</u> $\nu > 1$ <u>on ait</u>

$$\sup_{p \in B_{\theta \nu^{-1}, \delta_o^{-4} w}} p^*(z) = +\infty$$

<u>en tout point</u> z <u>du bord de</u> $\Sigma^{\nu^{-1}}$, <u>les polynômes sont denses dans</u> $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

<u>Démonstration</u>.- Posons

$$\delta_\nu = \inf_{p \in B_{\theta \nu^{-1}, \delta_o^{-4} w}} 1/p^* ,$$

et désignons par Ω_ν l'ensemble des points où δ_ν est strictement positive. Il est facile de vérifier que δ est lipschitzienne dans le rapport 1 et que Ω_ν est un domaine de Runge compris entre $\Sigma^{\theta\nu^{-1}}$ et $\Sigma^{\nu^{-1}}$. Cela montre en particulier que Σ est uniformément H-convexe. On est donc ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ par des polynômes. Compte tenu du lemme 12, le théorème 7 montre que l'approximation peut être faite pour la norme de $H^2(\Omega_\nu, \delta^2 \delta_o^8)$; il ne reste plus qu'à montrer que cette norme est plus fine que celle de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Or si $f \in H^2(\Omega_\nu, \delta^2 \delta_o^8)$, en utilisant la sous-harmonicité de la fonction $|f|^2$ dans Ω_ν il vient pour une constante C convenable

$$|f(x)|^2 w^2(x) \leq C \nu^{-2n} w^2(x) \int_{B(x, \frac{\theta}{2\nu})} |f(z)|^2 \, d\lambda(z) .$$

La démonstration sera donc achevée si l'on sait que $w(x) \leq C' \delta_o^4(z)\, \delta_\nu(z)$ pour $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$, où C' est une constante. Or si un polynôme p appartient à $B_{\theta \nu^{-1}, \delta_o^{-4} w}$, il vérifie pour $\zeta \in B(x, \theta \nu^{-1})$ la majoration

$$p(\zeta)\, \delta_o^{-4}(x)\, w(x) \leq 1 .$$

Il en résulte que si $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$ et $\zeta \in \mathbf{C}^n$, alors

$$|\zeta - z| + \frac{1}{|p(\zeta)|} \geq \operatorname{Min}\left[\frac{\theta}{2\nu}, w(x)\, \delta_o^{-4}(x)\right] ,$$

comme on le voit en distinguant les cas $|\zeta - z| \leq \frac{\theta}{2\nu}$ et $|\zeta - z| \geq \frac{\theta}{2\nu}$. Par suite, pour $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$, il vient

$$\frac{1}{p^*(z)} \geqslant \mathrm{Min}\left[\frac{\theta}{2\nu},\ w(x)\,\delta_o^{-4}(x)\right]$$

soit $p^*(z) = O(\delta_o^4(x)\, w^{-1}(x))$. Sachant que par ailleurs $\delta_o^{-4}(x) = O(\delta_o^{-4}(z))$, et passant à la borne supérieure sur p, on obtient l'inégalité cherchée.

On obtient de façon analogue dans un cas particulier le

Théorème 14.- Nous nous plaçons sous les hypothèses de l'exemple b). _S'il existe_ $\varepsilon \in]0, \alpha[$ _tel que_

$$\sup_{p \in B_{\varepsilon, \delta_o^{-6} w}} p^*(z) = +\infty$$

en tout point z _du bord de_ Σ^α, _les polynômes sont denses dans_ $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

La démonstration se conduit comme pour le théorème précédent.

Bibliographie

[1] Cirka (E.M.).- Math Sbornik, 78 (1969), p. 95-114.

[2] Ferrier (J.-P.).et Sibony (N.).- C. R. A. S., t. 276, p. 175-177, (1973).

[3] Harvey (F. R.) et Wells (R. O.).- Bull. Amer. Math. Soc. 77(1971), p. 824-828.

[4] Hörmander (L.).- Acta Math., Uppsala, 113 (1965), p. 89-152.

[5] Hörmander (L.).- An introduction to complex analysis in several variables, New-York, D. Van Nostrand Company, 1966.

[6] Hörmander (L.) et Wermer (J.).- Math. Scand., 23 (1968), p. 5-21.

[7] Niremberg (R.) et Wells Jr. (R. O.).- Trans. Amer. Math. S oc., 142 (1969), p. 5-35.

[8] Sibony (N.).- Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$, à paraître.