UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

3.5
2.5

n° 160

Ensembles holomorphiquement convexes et problème de Dirichlet généralisé

Nessim Sibony

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

Ensembles holomorphiquement convexes et problème de Dirichlet généralisé.

par Nessim Sibony

INTRODUCTION et NOTATIONS. Etant donné un compact K contenu dans $\mathbb{C}^n$, notons $\hat{K}$ son enveloppe polynomialement convexe et $r(K)$ son enveloppe rationnellement convexe. Si on note $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans l'algèbre uniforme $\mathcal{C}(K)$ et $R(K)$ l'adhérence des fractions rationnelles régulières sur K, alors $\hat{K}$ et $r(K)$ s'identifient respectivement au spectre des algèbres $P(K)$ et $R(K)$.

Le problème de l'existence de disques analytiques dans $\hat{K} | K$ (resp. $r(K) | K$) a suscité de nombreux travaux, voir [1], [16], [17], [18], [19].

Dans cet article nous donnons une description de $r(K)$ lorsque K est un ensemble cerclé en une variable dans $\mathbb{C}^n$. L'outil essentiel est l'étude d'un problème de Dirichlet généralisé introduit par Bremerman [3]. On montre, en particulier, qu'étant donné un domaine D strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{C}(\partial D)$, alors il existe un prolongement $\tilde{u}$ de la fonction u, qui est continu dans $\bar{D}$ p. s. h. dans D et tel que pour toute φ p. s. h. dans $\bar{D}$ vérifiant $\varphi \leq u$ sur ∂D on ait $\varphi \leq \tilde{u}$ dans D. On obtient également le principe du maximum suivant : soient φ et ψ deux fonctions p. s. h. dans un domaine d'holomorphie borné Ω, on suppose que les fonctions φ et ψ sont continues dans $\bar{\Omega}$ et que $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et n'est strictement p. s. h. en aucun point de Ω. Si, de plus, $\varphi \leq \psi$ sur $\partial\Omega$, alors $\varphi \leq \psi$ sur Ω.

La généralisation de ce problème de Dirichlet à une algèbre uniforme sur un compact X fait intervenir la notion de mesure de Jensen. Rappelons qu'étant donné un homomorphisme m appartenant au spectre M_A de l'algèbre A, on appelle mesure de Jensen pour m toute mesure de probabilité μ portée par X telle que pour $f \in A$, on ait

$$\log |f(m)| \leq \int \log |f| d\mu .$$

L'ensemble J_m des mesures de Jensen pour m est un convexe compact. Etant donnée une fonction φ s. c. i. sur X, on peut lui associer une fonction $\tilde{\varphi}$ sur M_A définie par

$$\tilde{\varphi}(m) = \inf_{\mu_m \in J_m} \int \varphi d\mu_m .$$

La fonction $\tilde{\varphi}$ coïncide avec φ sur la frontière de Choquet associée au cône de fonctions $(c \log |f|)$, $c > 0$, $f \in A$. On peut interpréter $\tilde{\varphi}$ comme la solution d'un problème de Dirichlet associé à l'algèbre A. Lorsque A est égale à $R(X)$ où X est un compact de $\mathbb{C}$, on étudie les relations entre le problème précédent et le problème de Dirichlet usuel, respectivement le problème de Dirichlet fin. On interprète les résultats concernant le problème de Dirichlet introduit en termes d'enveloppe rationnellement convexe.

Dans une dernière partie, nous retrouvons, de manière extrêmement simple, les résultats de R. Basener [1], A. Debiard et B. Gaveau [3], concernant le calcul de certaines enveloppes rationnellement convexes et les résultats concernant les enveloppes sans structure analytique.

Nous renvoyons à [10] pour les résultats d'analyse complexe utilisés, à [17] pour la théorie des algèbres uniformes et au livre de Fugelde [7] pour la théorie des fonctions finement harmoniques.

Je remercie T. Gamelin de m'avoir posé la question à laquelle il est répondu au théorème 7.

I. a) Algèbres engendrées par des séries de Hartogs.

Soit A une algèbre uniforme sur un espace compact X et soit M_A son spectre Etant donnée une fonction φ s. c. i. définie sur X, nous noterons Y le compact de $X \times \mathbb{C}$ défini par

$$Y = \left\{(x,\zeta)/x\in X\ ,\ \zeta\in\mathbb{C}\ ,\ |\zeta| \leq \exp(-\varphi(x))\right\}.$$

Nous désignerons par B la sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(Y)$ engendrée par les polynômes de Hartogs, i. e. les polynômes de la forme

$$F(x,\zeta) = \sum_{j=0}^{N} f_j(x)\,\zeta^j, \quad N \geq 0, \quad f_o, \ldots f_N \in A.$$

T. Gamelin a déterminé le spectre de l'algèbre B. Nous donnons ici une démonstration très simple de son théorème.

THEOREME 1. (Gamelin [8]). Le spectre M_B de l'algèbre B est isomorphe à l'ensemble

$$\hat{Y} = \left\{(m,w)/m\in M_A, \quad w\in\mathbb{C}\ ,\ |w| \leq \exp(-\tilde{\varphi}(m))\right\},$$

où $\tilde{\varphi}$ est définie par l'une des relations suivantes.

i) $\tilde{\varphi}(m) = \sup\limits_i (c_i \log|f_i|(m))$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des fonctions $c \log|f|$, $c > 0$, $f\in A$, telles que $c \log|f| \leq \varphi$ sur X.

ii) $\tilde{\varphi}(m) = \inf_{\mu \in J_m} \left(\int \varphi \, d\mu \right)$

où J_m désigne l'ensemble des mesures de Jensen portées par X et représentant l'homomorphisme m.

Démonstration. Soit π l'application de M_B dans $M_A \times \mathbb{C}$ définie par $\pi(\chi) = (\chi|_A, \chi(\zeta))$. Montrons que pour tout χ dans M_B, $\pi(\chi)$ appartient à $\hat{Y}$.

En effet, si $\frac{1}{\nu} \log |f| \leq \varphi$ sur X, la fonction $\zeta^\nu f$ est en module inférieure à 1 sur Y, donc pour tout $\chi \in M_B$, on a

$$|\chi(\zeta)^\nu \chi(f)| \leq 1,$$

d'où

$$\log |\chi(\zeta)| + \frac{1}{\nu} \log |\chi(f)| \leq 0,$$

par suite

$$\log |\chi(\zeta)| + \tilde{\varphi}(\chi|_A) \leq 0.$$

On en déduit

$$|\chi(\zeta)| \leq \exp(-\tilde{\varphi}(\chi|_A)).$$

Il est clair que π est injective, il nous suffit donc de montrer que $\pi(M_B) = \hat{Y}$.

Soit $(m_o, w_o) \in \hat{Y}$. Soit g un polynôme de Hartogs, i. e.

$$g(x,\zeta) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\, \zeta^j, \qquad a_j \in A.$$

Posons

$$\chi(g) = \sum_{j=1}^{N} m_o(a_j)\, w_o^j.$$

Nous allons montrer que $|\chi(g)| \leq \|g\|$. Or

$$a_j(x)\, e^{-j\varphi(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x\,,\, e^{-\varphi(x)} e^{i\theta})\, e^{-ij\theta}\, d\theta,$$

d'où

$$|a_j(x)| \leq \|g\|\, e^{j\varphi(x)}.$$

On en déduit que

$$\frac{\log |a_j|}{j} \leq \tilde{\varphi} + \frac{\log \|g\|}{j}$$

et par suite

(1) $$|a_j(m_o)\, w_o^j| \leq \|g\|.$$

Posons $g_\lambda(x,w) = g(x,\lambda w)$ pour $\lambda < 1$. D'après la relation (1), pour tout polynôme de Hartogs, on a

$$|\chi(g_\lambda)| \leq (1-\lambda)^{-1}\|g\|.$$

En appliquant la relation précédente aux fonctions g^n et en prenant les racines $n^{\text{ièmes}}$, on en déduit

$$|\chi(g_\lambda)| \leq \|g\|.$$

Il suffit alors de faire tendre λ vers 1, pour voir que

$$|\chi(g)| \leq \|g\|.$$

Montrons que i) $\leq$ ii). En effet, si $c \log|f| \leq \varphi$ sur X, pour toute mesure de Jensen représentant m, on a

$$c \log|f|(m) \leq \int c \log|f|\, d\mu \leq \int_X \varphi\, d\mu\,,$$

donc

$$\tilde{\varphi}(m) \leq \inf_{\mu \in J_m} \int \varphi\, d\mu\,.$$

Pour démontrer que ii) $\leq$ i) nous reprenons une idée de T. Gamelin. Soit τ une mesure de Jensen portée par Y et représentant l'homomorphisme $\chi \in M_B$ tel que $\pi(\chi) = (m\,,\, e^{-\tilde{\varphi}(m)})$. Désignons par σ la mesure image de τ par π, alors σ est une mesure de Jensen portée par X représentant l'homomorphisme m. Or, on a

$$-\tilde{\varphi}(m) = \log|\chi(\zeta)| \leq \int \log|\zeta|\, d\tau(x,\zeta) \leq -\int \varphi(x)\, d\tau(x,\zeta) = -\int \varphi(x)\, d\sigma$$

donc

$$\int \varphi(x)\, d\sigma \leq \tilde{\varphi}(m)\,,$$

d'où le théorème.

b) <u>Algèbres engendrées par des séries de Hartogs Laurent</u>.

Nous allons étudier une classe d'algèbres qui nous permettra de donner une description de certains ensembles rationnellement convexes de $\mathbb{C}^n$. Ces algèbres ont été également étudiées par T. Gamelin.

Soient φ et ψ deux fonctions s. c. i. définies sur X. Notons Y le compact de $X \times \mathbb{C}$ défini par

$$Y = \left\{(x,\zeta) \,\middle|\, x \in X \text{ , } e^{\psi(x)} \leq |\zeta| \leq e^{-\varphi(x)}\right\}.$$

Soit $\mathcal{B}$ la sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(Y)$ engendrée par les fonctions de la forme

$$F(x,\zeta) = \sum_{j=-N}^{+N} f_j(x)\, \zeta^j$$

où $f_j \in A$, $-N \leq j \leq N$.

THEOREME 2. <u>Le spectre</u> $M_{\mathcal{B}}$ <u>de l'algèbre</u> $\mathcal{B}$ <u>est isomorphe à l'ensemble</u>

$$\widetilde{Y} = \left\{(m,\zeta)/m \in M_A,\ \zeta \in \mathbb{C},\ \exp(\widetilde{\psi}(m)) \leq |\zeta| \leq \exp(-\widetilde{\varphi}(m))\right\}.$$

Démonstration. Soit π l'application de $M_{\mathcal{B}}$ dans $M_A \times \mathbb{C}$ définie par $\pi(\chi) = (\chi|_A \text{ , } \chi(\zeta))$.

Si $\qquad \widetilde{\varphi} = \sup \frac{1}{\nu_i} \log |f_i| \quad$ et $\quad \widetilde{\psi} = \sup \frac{1}{\mu_i} \log |g_i|$

avec f_i , $g_i \in A$ et μ_i , ν_i des entiers positifs, alors $|f_i\, w^{\nu_i}| \leq 1$ et $|g_i\, w^{\mu_i}| \leq 1$ sur Y ; on en déduit comme pour le théorème 1 que $\pi(\chi) \in \widetilde{Y}$.

Montrons que l'application π est surjective. Soit $(m,w_o) \in \widetilde{Y}$, et supposons de plus qu'on a

$$\exp(\widetilde{\psi}(m)) < |w_o| < \exp(-\widetilde{\varphi}(m)). \tag{1}$$

Posons
$$\chi(F) = \sum_{-N \leq j \leq N} f_j(m)\, w_o^j.$$

Alors
$$\chi(F) = \sum_{j \geq 0} f_j(m)\, w_1^j \left(\frac{w_o}{w_1}\right)^j + \sum_{j<0} f_j(m)\, w_2^j \left(\frac{w_o}{w_1}\right)^j$$

où on a posé $w_1 = \exp(-\widetilde{\varphi}(m))$ et $w_2 = \exp(\widetilde{\psi}(m))$.

On a $\left|\frac{w_o}{w_1}\right| = \lambda < 1$ et $\left|\frac{w_o}{w_2}\right| = \mu > 1$.

Or sur Y

$$|f_j e^{-j\varphi}| \leq \|F\|_Y \qquad \text{et} \qquad |f_j e^{i\psi}| \leq \|F\|_Y .$$

On en déduit que sur M_A, en supposant $\|F\|_Y \leq 1$, on a pour $j > 0$ (resp. pour $j < 0$)

$$\frac{\log |f_j|}{j} \leq \widetilde{\varphi} \qquad \left(\text{resp. } \frac{\log |f_j|}{(-j)} \leq \widetilde{\psi}\right).$$

Par suite, on a, pour tout F,

$$|\chi(F)| \leq \left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\mu^{-1}}\right)\|F\|.$$

Ce qui implique encore que

$$|\chi(F)| \leq \|F\|.$$

Nous devons à présent nous affranchir de l'hypothèse (1). Les fonctions φ et ψ étant données pour tout $\varepsilon > 0$, définissons le compact Y_ε par

$$Y_\varepsilon = \left\{(x,\zeta)/x \in X \ \exp(\psi-\varepsilon) \leq |\zeta| \leq \exp(-\varphi+\varepsilon)\right\}.$$

Il est clair que

$$(\widetilde{\psi-\varepsilon}) = \widetilde{\psi} - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad (\widetilde{\varphi-\varepsilon}) = \widetilde{\varphi} - \varepsilon.$$

Soit (m,w_o) tel que

$$\exp(\widetilde{\psi}(m)) \leq |w_o| \leq \exp(-\widetilde{\varphi}(m)).$$

Alors on a

$$\exp(\widetilde{\psi-\varepsilon}) < |w_o| < \exp(-(\widetilde{\varphi-\varepsilon})).$$

On en déduit, d'après ce qui précède, que

$$|F(m,w_o)| \leq \|F\|_{Y_\varepsilon}.$$

Le nombre ε étant arbitraire

$$|F(m,w_o)| \leq \|F\|_Y.$$

II. PROBLEME DE DIRICHLET GENERALISE.

Nous allons étudier à présent quelques propriétés de l'application qui à une fonction s. c. i. φ sur X fait correspondre la fonction s. c. i. $\tilde{\varphi}$ sur M_A. Lorsque Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{C}$ et que A désigne l'algèbre $R(\bar{\Omega})$, on trouve la solution du problème de Dirichlet au sens habituel, si on prend $X = \partial\Omega$.

Etant donné une algèbre uniforme sur un espace compact X, nous noterons J l'ensemble des points de X dont la seule mesure de Jensen représentant l'évaluation en ce point est la masse de Dirac, c'est la frontière de Choquet associée au cône de fonctions $c \log |f|$, $c > 0$, $f \in A$. Nous noterons $\tilde{J}$ l'ensemble des points de M_A qui admettent une mesure de Jensen unique portée par X. Nous dirons parfois que J est la frontière de Jensen de A.

PROPOSITION 3. <u>L'application qui à</u> φ <u>s. c. i. sur</u> X <u>associe</u> $\tilde{\varphi}$ <u>possède les propriétés suivantes</u>.

i) <u>Pour tout</u> $\lambda > 0$, $\widetilde{\lambda\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$.

ii) <u>Si</u> φ_1 <u>et</u> φ_2 <u>sont deux fonctions s. c. i. sur</u> X, $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 \leq \widetilde{\varphi_1 + \varphi_2}$.

iii) <u>Si</u> $(\varphi_i)_{i\in I}$ <u>est une famille filtrante croissante de fonctions s. c. i. sur</u> X,

$$\widetilde{(\sup_{i\in I} \varphi_i)} = \sup_{i\in I} \tilde{\varphi}_i .$$

iv) $\tilde{\varphi} = \varphi$ <u>sur</u> J.

v) <u>Si</u> φ <u>est continue sur</u> X <u>alors</u> $\tilde{\varphi}$ <u>est continue sur</u> $\tilde{J}$. <u>De plus, l'application qui à</u> φ <u>associe</u> $\tilde{\varphi}|_{\tilde{J}}$ <u>est linéaire de</u> $\mathcal{C}(X)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(\tilde{J})$.

Démonstration. Les propriétés i) et ii) sont immédiates.

Pour établir iii), on peut supposer que $\varphi = \sup\limits_{i\in I} \varphi_i$ est positive. Notons $C = \left\{ v/v\in\mathscr{C}^+(X) \quad v \le \varphi \right\}$. On a

(1) $$\tilde{\varphi} = \sup_{v\in C} \tilde{v}.$$

En effet, pour tout $m\in M_A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f\in A$, $c > 0$ tels que

$$\tilde{\varphi}(m) \le c \log|f|(m) + \varepsilon \quad \text{et} \quad c \log|f| \le \varphi \quad \text{sur} \quad X.$$

Donc $c \log^+|f| \le \varphi$ sur X. Si on pose $v = c \log^+|f|$, on voit que

$$\tilde{\varphi}(m) - \varepsilon \le \tilde{v}(m) \le \tilde{\varphi}(m),$$

d'où l'on déduit la relation (1).

Or si v est continue avec $v \le \varphi$ sur X, et si $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante de fonctions s. c. i. telle que $\varphi = \sup \varphi_i$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe i_o tel que

$$v < \varphi_{i_o} + \varepsilon \quad \text{sur} \quad X,$$

d'où $$\tilde{v} \le \tilde{\varphi}_{i_o} + \varepsilon,$$

et par suite $$\tilde{\varphi} \le \sup_{i\in I} \tilde{\varphi}_i.$$

L'inégalité dans l'autre sens est évidente.

L'assertion iv) est immédiate grâce au théorème 1.

Démonstration de v). Soit $m_o\in\tilde{J}$. Soit m_n une suite dans M_A convergeant vers m_o. Si μ_n est une mesure de Jensen représentant m_n, on voit que tout point adhérent à la suite μ_n est une mesure de Jensen représentant m_o. Si $m_o\in\tilde{J}$, il en résulte que μ_n converge vers μ_o la mesure de Jensen représentant m_o et qui est portée par X. D'où, si pour tout n on choisit μ_n telle que

$$\tilde{\varphi}(m_n) = \int \varphi \, d\mu_n ,$$

on a

$$\lim_n \widetilde{\varphi}(m_n) = \lim \int \varphi \, d\mu_n = \int \varphi \, d\mu_o = \widetilde{\varphi}(m_o).$$

Remarques. i) Si φ est une fonction s. c. s. sur X, on sait qu'il existe une suite φ_k décroissante telle que $\varphi = \inf_k \varphi_k$. On montre que $\widetilde{\varphi} = \lim \widetilde{\varphi}_k$ ne dépend pas de la suite φ_k choisie et que

$$\widetilde{\varphi}(m) = \inf_{\mu \in J_m} \int \varphi \, d\mu .$$

ii) Si tout point de M_A admet une mesure de Jensen unique portée par X, l'opérateur qui à φ associe $\widetilde{\varphi}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathscr{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(M_A)$. C'est le cas, par exemple, si A est une algèbre de Dirichlet sur X.

Nous allons montrer que les fonctions $\widetilde{\varphi}$ possèdent quelques propriétés des fonctions harmoniques.

THEOREME 4. *Soit* φ *une fonction s. c. i. sur* X *et soit* K *un ensemble A-convexe de* M_A. *Posons*

$$X_1 = \partial K \cup (K \cap X), \quad A_1 = \overline{A|_{X_1}}, \quad \varphi_1 = \widetilde{\varphi}|_{X_1}.$$

Alors, si $\widetilde{\varphi}_1 = \sup c \log |f|$, *le* sup *étant pris sur les fonctions* $c \log |f| \leq \varphi_1$ *sur* X_1 *avec* $f \in A_1$, *on a*

$$\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi} \quad \textit{sur} \quad K.$$

Démonstration. Remarquons que, d'après le principe local du maximum de Rossi [17], la frontière de Shilov de $A|_K$ est contenue dans X_1. Il est alors clair que le spectre de $\overline{A|_{X_1}}$ s'identifie à K puisque K est A-convexe.

Rappelons que B désigne la sous-algèbre de $\mathscr{C}(Y)$ engendrée par les polynômes de Hartogs. Nous cherchons à déterminer le spectre de l'algèbre B restreinte au compact Y_1 défini par

$$Y_1 = \left\{(m,w)\ m\in X_1 \quad |w| \leq \exp(-\varphi_1(m))\right\}.$$

Or $\widetilde{\varphi}_1 \geq \widetilde{\varphi}$, donc ce spectre est contenu dans l'ensemble

$$Z = \left\{(m,w) \quad m\in K \quad |w| \leq \exp(-\widetilde{\varphi}(m))\right\}.$$

Si on applique le principe local du maximum à l'ensemble Z considéré comme sous-ensemble de M_B, on voit que la frontière de Shilov de $B|_Z$ est contenue dans Y_1. Il en résulte que Z est contenu dans l'enveloppe B-convexe de Y_1, d'après le théorème 1, cette enveloppe est égale à $\hat{Y}_1$ défini par

$$\hat{Y}_1 = \left\{(m,w) \quad n\in K \quad |w| \leq \exp(-\widetilde{\varphi}_1(m))\right\}.$$

Donc $\widetilde{\varphi}_1 \leq \widetilde{\varphi}$.

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant qui raffine la définition de $\widetilde{\varphi}$.

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> ψ <u>une fonction continue sur</u> M_A. <u>Supposons que, pour tout</u> $m_o \in M_A$, <u>il existe un voisinage</u> V_o <u>de</u> m_o <u>sur lequel</u>

$$\psi = \sup_i c_i \log |f_i| \quad , \quad c_i > 0 \quad , \quad f_i \in A.$$

<u>Soit</u> φ <u>une fonction s. c. i. sur</u> X. <u>Si</u> $\psi \leq \widetilde{\varphi}$ <u>sur</u> X, <u>alors</u> $\psi \leq \widetilde{\varphi}$ <u>sur</u> M_A.

Démonstration. La fonction $\psi - \widetilde{\varphi}$ est s. c. s. sur M_A. Soit α son maximum. Supposons $\alpha > 0$ et posons

$$E = \left\{m/(\psi - \widetilde{\varphi})(m) = \alpha\right\}.$$

L'ensemble E est un compact disjoint de X. Soit m_o un point pic de E pour l'algèbre $A|_E$. Par hypothèse, il existe un voisinage V_o de m_o sur lequel

$$\psi(m) = \sup c_i \log |f_i|(m) \qquad m\in V_o.$$

Puisque m_o est un point pic, il existe une fonction $g\in A$ telle que

$$g(m_o) = 1 \quad \|g\|_{CV_o \cap E} < \exp(-1).$$

Posons

$$W = \left\{ m/m \in M_A \quad |g|(m) \leq \exp(-1) \right\}.$$

Il est clair que sur $\partial V_o \setminus W$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\psi - \tilde{\varphi} \leq M - \varepsilon.$$

Donc il existe un entier $k > 0$ tel que

$$k(\psi - \tilde{\varphi} - \alpha) + \log |g| \leq -1 \quad \text{sur} \quad \partial V_o$$

c'est-à-dire que sur ∂V_o on a

(1) $$k\psi + \log |g| \leq k(\tilde{\varphi} + \alpha) - 1.$$

Or on peut supposer que V_o est A-convexe, d'où en appliquant le théorème 4, on déduit que l'inégalité (1) est encore vérifiée pour $m \in V_o$, et en particulier pour m_o

$$k\psi(m_o) \leq k(\tilde{\varphi}(m_o) + \alpha) - 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse $m_o \in E$.

Le raisonnement précédent reprend une idée de Rickart dans [9].

III. PROBLEME DE DIRICHLET, GENERALISE, DANS LE CAS D'UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO CONVEXE.

Soit D un domaine strictement pseudoconvexe à frontière de classe $\mathcal{C}^2$, contenu dans $\mathbb{C}^n$. On peut supposer qu'il existe un domaine d'holomorphie U contenant $\bar{D}$ et une fonction ρ strictement plurisousharmonique dans U de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que

$$D = \left\{ z/z \in U, \quad \rho(z) < 0 \right\}.$$

Etant donné un compact $K \subset \mathbb{C}^n$, nous noterons $H(K)$ l'adhérence dans $\mathcal{C}(K)$ des fonctions holomorphes au voisinage de K. Lorsque Ω est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ on notera $A(\overline{\Omega})$ l'algèbre des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$ et holomorphes dans Ω.

Lorsque D est un domaine strictement pseudoconvexe à frontière de classe $\mathcal{C}^2$ il résulte des travaux de Henkin, Kerzman [11] que $A(\overline{D}) = H(\overline{D})$ et par suite le spectre de l'algèbre $A(\overline{D})$ s'identifie à $\overline{D}$. D'autre part, tout point de ∂D est un point pic pour $H(\overline{D})$ [13] et par suite la frontière J est dans ce cas égale à ∂D.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le théorème suivant dû à Bremermann [4], pour une démonstration voir [14].

THEOREME 6 (Bremermann). Soit V une fonction p.s.h. continue dans un domaine d'holomorphie Ω contenu dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe des fonctions f_i holomorphes dans Ω et des constantes $c_i > 0$ telles que pour tout $z \in K$

$$V(z) = \sup_i c_i \log |f_i|(z).$$

Nous pouvons énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

THEOREME 7. Si φ est une fonction continue sur $X = \partial D$ et si $A = A(\overline{D})$ alors $\widetilde{\varphi}$ est une fonction plurisousharmonique continue dans $\overline{D}$. De plus

$$\widetilde{\varphi}|_X = \varphi.$$

Démonstration. D'après la proposition 3, il nous suffit de montrer que $\widetilde{\varphi}$ est continue dans D, en effet $J = X = \partial D$. Soit $\widetilde{\varphi}^*$ la régularisée s. c. s. de la fonction $\widetilde{\varphi}$ on sait que $\widetilde{\varphi}^*$ est p. s. h. dans D et que sur ∂D

$$\widetilde{\varphi}^* = \widetilde{\varphi} = \varphi.$$

Soit α le maximum de la fonction s. c. s. $\widetilde{\varphi}^* - \widetilde{\varphi}$. Notons E l'ensemble défini par

$$E = \left\{ z/z \in \overline{D} \quad (\widetilde{\varphi}^* - \widetilde{\varphi})(z) = \alpha \right\}.$$

C'est un compact de D puisque $\widetilde{\varphi}^* = \widetilde{\varphi}$ sur ∂D. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon = \left\{ z/z \in D \quad \rho(z) < -\varepsilon \right\}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que D_ε soit strictement pseudoconvexe et $D_\varepsilon \supset E$. En utilisant le théorème 6, on voit que $\overline{D}_\varepsilon$ est holomorphiquement convexe dans U et par suite $\overline{D}_\varepsilon$ est $A(\overline{D})$ convexe. Si A_1 désigne l'adhérence dans $\mathscr{C}(\overline{D}_\varepsilon)$ des fonctions de $A(\overline{D})$, on voit en appliquant le théorème d'approximation d'Oka que $A_1 = H(\overline{D}_\varepsilon)$.

On sait qu'il existe une suite $(\psi_k)_k$ de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ plurisousharmoniques au voisinage de $\overline{D}_\varepsilon$ et telles que sur un voisinage de $\overline{D}_\varepsilon$ on ait

$$(1) \qquad \widetilde{\varphi}^* = \lim_k \downarrow \psi_k .$$

Soit φ_1 la restriction de $\widetilde{\varphi}$ à ∂D_ε. Le choix de ε implique l'existence d'un nombre $\alpha_1 < \alpha$ tel que sur ∂D_ε on ait

$$(2) \qquad \widetilde{\varphi}^* < \varphi_1 + \alpha_1 .$$

D'après (1), il existe k tel que sur ∂D_ε

$$(3) \qquad \psi_k < \varphi_1 + \alpha_1 .$$

Si $\widetilde{\varphi}_1$ désigne la solution du problème de Dirichlet pour φ_1 relativement à $H(\overline{D}_\varepsilon)$, on déduit de (3) que dans D_ε

$$\psi_k \leq \widetilde{\varphi}_1 + \alpha_1 .$$

Or, puisque $A_1 = H(\overline{D}_\varepsilon)$, d'après le théorème 4 $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}\,|_{\partial D_\varepsilon}$, d'où sur D_ε

$$\psi \leq \widetilde{\varphi} + \alpha_1$$

et par suite on a sur E

$$\widetilde{\varphi}^* \leq \widetilde{\varphi} + \alpha_1 ,$$

ce qui est impossible car $\alpha_1 < \alpha$.

Remarques. i) Soit D l'intersection d'un nombre fini de domaines strictement pseudoconvexes dans $\mathbb{C}^n$. On montre que tout point de ∂D est un point pic pour l'algèbre $H(\overline{D})$ et que pour toute fonction φ continue sur ∂D la solution du problème de Dirichlet relativement à l'algèbre $H(\overline{D})$ est une fonction continue égale à φ sur ∂D.

ii) Soient $D_1, \ldots, D_p$ des domaines strictement pseudoconvexes. Posons $D = \prod_{i=1}^{p} D_i$, et soit $X = \prod_{i=1}^{p} \partial D_i$ la frontière de Shilov de $H(\overline{D})$. On peut montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ alors $\widetilde{\varphi}$, relativement à $H(\overline{D})$, est continue dans $\overline{D}$. Esquissons le raisonnement pour le produit de deux domaines. Il suffit de montrer que $\widetilde{\varphi}$ est continue sur $\partial(D_1 \times D_2)$, on peut ensuite raisonner comme au théorème 7. On montre tout d'abord que la restriction de $\widetilde{\varphi}$ à $\partial(D_1 \times D_2)$ est continue ; pour cela, on utilise le fait que sur $\{\zeta_1\} \times \overline{D_2}$, avec $\zeta_1 \in \partial D_1$ la fonction $\widetilde{\varphi}(\zeta_1 , \zeta_2)$ est égale à la solution du problème de Dirichlet relativement à $H(\overline{D}_2)$ avec pour donnée sur ∂D_2 la fonction φ_{ζ_1} définie par

$$\varphi_{\zeta_1}(\zeta_2) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2).$$

On achève la démonstration grâce à l'inégalité suivante

$$\widetilde{\varphi}(z_1, z_2) \leq \widetilde{(\widetilde{\varphi})_{z_1}}(z_2)$$

où $\widetilde{(\widetilde{\varphi})_{z_1}}$ désigne la solution du problème de Dirichlet relativement à $H(\overline{D}_2)$ avec pour donnée sur ∂D_2 la fonction ψ définie par

$$\psi(\zeta_2) = \widetilde{\varphi}(z_1 , \zeta_2).$$

iii) Le théorème 7 montre que dans le cas de l'algèbre $H(\overline{D})$ avec D strictement pseudoconvexe le problème de Dirichlet étudié ici coïncide avec celui introduit par Bremermann dans [3].

PROPOSITION 8. Soit D un domaine strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$. Pour toute φ s. c. i. sur ∂D, notons

$$\mathscr{C}_\varphi = \left\{\psi/\psi \text{ p. s. h. dans } D, \text{ continue dans } \overline{D},\ \psi \leq \varphi \text{ sur } \partial D\right\}.$$

On a alors

$$\tilde{\varphi} = \sup_{\psi \in \mathscr{C}_\varphi} \psi .$$

Démonstration. Posons $\overline{\varphi} = \sup\limits_{\psi \in \mathscr{C}_\varphi} \psi$. Il est clair que $\tilde{\varphi} \leq \overline{\varphi}$. Mais, d'après la proposition 5, si $\psi \leq \tilde{\varphi} = \varphi$ sur ∂D, on en déduit que $\psi \leq \tilde{\varphi}$ sur D, à condition de montrer que ψ est localement un sup de $c_i \log |f_i|$, $f_i \in A(\overline{D})$. Pour les points de D cela résulte du théorème 6 et du théorème d'approximation d'Oka. Si $\zeta_0 \in \partial D$, soit $\vec{\nu}$ la normale extérieure à ∂D au point ζ. La fonction $\psi(z - \varepsilon\vec{\nu})$ est p. s. h. dans un domaine strictement pseudoconvexe contenant ζ. Il existe une constante $\delta(\varepsilon)$ telle que $\psi(z - \varepsilon\vec{\nu}) - \delta(\varepsilon) \leq \psi(z)$, il suffit alors d'écrire dans $\overline{D} \cap B(\zeta_0, r) = V(\zeta_0, r)$, pour r assez petit

$$\psi(z) = \sup_{\varepsilon} (\psi(z - \varepsilon\vec{\nu}) - \delta(\varepsilon)).$$

Or la fonction $\psi(z - \varepsilon\vec{\nu}) - \delta(\varepsilon)$ est p. s. h. dans un voisinage de $V(\zeta_0, r)$, on peut donc l'écrire comme un sup de $c \log |g|$ avec g holomorphe au voisinage de $V(\zeta_0, r)$. Le théorème d'Oka permet ensuite d'approcher ces fonctions g, par des fonctions de $H(\overline{D})$.

Nous allons étudier à présent la classe des fonctions plurisousharmoniques continues dans $\overline{D}$ qui sont solutions du problème de Dirichlet généralisé que nous avons considéré. Nous allons d'abord démontrer un principe du maximum pour les fonctions p. s. h. Nous aurons besoin au cours de la démonstration d'un théorème de H. Rossi [10]

Rappelons qu'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ est un S_δ si c'est une intersection de domaines d'holomorphie, et notons $\mathcal{H}(K)$ l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de K.

THEOREME 9 (Rossi [13]). Si K est un S_δ, les points pics de $\mathcal{H}(K)$ sont denses dans la frontière de Shilov de H(K). De plus, si dans un voisinage V de $\zeta_0 \in \partial K$, ∂K est une hypersurface , alors les points pics pour $\mathcal{H}(K)$ qui sont dans V sont adhérents aux points de stricte pseudoconvexité contenus dans V.

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, nous noterons $\mathcal{P}_{n-1}(\Omega)$ le cône des fonctions ψ, plurisousharmoniques dans Ω qui appartiennent à l'espace $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et telles que la matrice $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)_{i,j}$ soit de rang inférieur ou égal à $n-1$ dans Ω. Lorsque $n = 1$, les fonctions de $\mathcal{P}_{n-1}(\Omega)$ sont simplement les fonctions harmoniques dans Ω continues dans $\bar{\Omega}$.

THEOREME 10.(1) Soit Ω un domaine d'holomorphie borné de $\mathbb{C}^n$. Soit φ une fonction p. s. h. dans Ω continue dans $\bar{\Omega}$ et soit ψ une fonction appartenant à $\mathcal{P}_{n-1}(\Omega)$. Si on a $\varphi \leq \psi$ sur $\partial\Omega$, on a alors $\varphi \leq \psi$ dans Ω.

Démonstration. Puisque Ω est réunion d'une suite croissante de domaines strictement pseudoconvexes, il suffit de montrer le théorème en supposant que Ω est strictement pseudo-convexe et que les fonctions φ et ψ sont définies au voisinage de $\bar{\Omega}$. Posons alors

---

(1) Je remercie T. Bloom de m'avoir signalé l'annonce par B. A. Taylor d'un résultat généralisant le théorème 10 ; voir comptes rendus de la conférence de Williamstown (1975).

$$K = \left\{(z,w)/z\in\bar{\Omega},\quad w\in\mathbb{C},\quad |w| \leq \exp(-\psi(z))\right\}.$$

La fonction ψ étant supposée p. s. h. au voisinage de $\bar{\Omega}$, il est facile de vérifier que K est un S_δ.

Considérons l'hypersurface Σ de $\Omega\times\mathbb{C}$ définie par $r(z,w) = 1$ où $r(z,w) = |w|^2\exp(2\psi(z))$. Nous allons montrer que Σ n'est strictement pseudoconvexe en aucun point. Soit $(a_1,\dots a_n,b)$ un vecteur complexe tangent à Σ en (z_o,w_o), ses coordonnées vérifient

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} 2w_o\, a_i \frac{\partial\psi}{\partial z_i}(z_o) + b = 0.$$

Si on calcule la forme de Lévi de r, en l'appliquant à un tel vecteur on trouve

$$(2) \qquad \left| \sum_i 2w_o\, a_i \frac{\partial\psi}{\partial z_i}(z_o) + b\right|^2 + 2|w_o|^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j} a_i\bar{a}_j.$$

La matrice $\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\right)_{i,j}$ étant de rang inférieur à $(n-1)$ il existe un vecteur non nul (a,b) vérifiant la relation (1) et tel que la relation (2) soit nulle, ce qui démontre notre assertion.

On déduit alors du théorème 9 que la frontière de Shilov de l'algèbre $H(K)$ est contenue dans l'ensemble Y défini par

$$Y = \left\{(z,w)/z\in\partial\Omega,\quad w\in\mathbb{C},\quad |w| \leq \exp(-\psi(z))\right\}.$$

La fonction φ étant supposée p. s. h. continue au voisinage de $\bar{\Omega}$, d'après le théorème 6, il existe des fonctions $f_i \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$ et des entiers ν_i tels que sur $\bar{\Omega}$

$$\varphi = \sup_i \frac{1}{\nu_i} \log |f_i|.$$

Si $\varphi \leq \psi$ sur $\partial\Omega$, il en résulte que pour tout i

$$|w^{\nu_i} f_i(z)| \leq 1$$

sur Y. Or Y est la frontière de Shilov de $H(K)$, donc on a la même inégalité sur

K et par suite pour tout $z \in \Omega$ et pour tout i

$$\exp(-\nu_i\ \psi(z))\,|f_i(z)| \leq 1$$

ou encore

$$\frac{1}{\nu_i} \log |f_i|(z) \leq \psi(z)$$

donc on a sur Ω, $\varphi \leq \psi$.

COROLLAIRE 11. <u>Soit</u> ψ <u>une fonction de</u> $\mathcal{P}_{n-1}(D)$ <u>où</u> D <u>est un domaine strictement pseudoconvexe. Posons</u> $\psi_1 = \psi\,|_{\partial D}$; <u>on a alors pour l'algèbre</u> $A(\bar{D})$, $\tilde{\psi}_1 = \psi$.

Démonstration. D'après le théorème 10, on a $\tilde{\psi}_1 \leq \psi$ dans D puisque $\tilde{\psi}_1$ est une fonction p. s. h. continue dans D, et que $\tilde{\psi}_1\,|_{\partial D} = \psi$. De plus, d'après la proposition 8, $\tilde{\psi}_1 \geq \psi$ puisque ψ est p. s. h. continue dans $\bar{D}$.

Remarques. i) On a vu que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$, la fonction $\tilde{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}(\bar{D})$ et que $\tilde{\varphi}$ est p. s. h. dans D ; si $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert U de D, il est clair que la matrice $\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\right)_{i,j}$ est alors de rang inférieur à $n-1$ dans U. Il serait intéressant de montrer que lorsque φ est dans $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ alors $\tilde{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}^2(D)$.

ii) Soit B la boule unité de $\mathbb{C}^n$, on peut alors montrer que lorsque $u \in \mathrm{Lip}(\partial B)$ alors $\tilde{u}$ est lipschitzienne sur tout compact de B. De plus, on peut voir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in B$ et $\zeta \in \partial B$ on ait

$$|\tilde{u}(z) - \tilde{u}(\zeta)| \leq C\,|\zeta - z|^{1/2}.$$

Cette dernière estimation ne peut être améliorée comme le montre l'exemple suivant : si $u(\zeta) = -\|\zeta - \zeta_o\|$, $\zeta \in \partial B$ et $\zeta_o \in \partial B$ fixé, alors

$$\tilde{u}(z) = -(\|z - \zeta_o\|^2 + 1 - |z|^2)^{1/2}$$

et cette dernière fonction est seulement dans $\mathrm{Lip}^{1/2}(B)$.

Nous allons donner quelques exemples de fonctions solutions du problème de Dirichlet généralisé.

Exemples. a) Soit D un domaine strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ et soit $f_1,\dots,f_{n-1}$ $(n-1)$ fonctions appartenant à $A(\bar{D})$. Désignons par Φ une fonction p.s.h. continue dans $\mathbb{C}^{n-1}$ et posons

$$u = \Phi(f_1,\dots,f_{n-1})|_{\partial D}.$$

On peut montrer en utilisant le principe du maximum sur les ensembles analytiques que la solution du problème de Dirichlet relativement à $A(\bar{D})$ avec pour donnée u, est donnée dans $\bar{D}$ par

$$\tilde{u} = \Phi(f_1,\dots,f_{n-1}).$$

b) Dans [3] Bremermann conjecture que lorsque $u = \log|f|\,|_{\partial D}$, où $f \in A(\bar{D})$, alors $\tilde{u}$ est finie dans D. La fonction $\tilde{u}$ que nous avons définie lorsque u est s. c. s. coïncide avec la solution du problème de Dirichlet définie par Bremermann ; cela résulte du théorème 7. La réponse à la question de Bremermann est négative. En effet, $\tilde{u}$ est p. s. h. dans D et s. c. s. dans $\bar{D}$, on a $\tilde{u} \le \log|f|$ sur ∂D. Soit

$$V_a = \{z / z \in \bar{D} \quad f(z) = f(a)\}.$$

La fonction $\tilde{u}$ est p. s. h. dans $V_a \cap D$ et on a $\tilde{u} \le \log|f|(a)$ sur $V_a \cap \partial D$. Il suffit alors d'appliquer le principe du maximum à chaque branche de V_a pour conclure que $\tilde{u}(a) \le \log|f|(a)$, donc dans $\bar{D}$ $\tilde{u} = \log|f|$.

c) Lorsque la fonction $u \in \mathcal{C}(\partial D)$ n'a pas de prolongement pluriharmonique dans D, la fonction $\tilde{u} + (\widetilde{-u})$ est p. s. h. dans D continue dans $\bar{D}$ et est identiquement nulle sur ∂D, il résulte alors d'un lemme classique de théorie du potentiel que dans D on a

$$\left|\tilde{u}(z) + (\widetilde{-u})(z)\right| \geq \gamma \; d(z \;, \partial D).$$

Une étude des propriétés locales des fonctions appartenant à $\mathcal{P}_{n-1}(D)$ semble assez difficile, il serait intéressant de montrer qu'étant donné une fonction $\varphi \in \mathcal{P}_{n-1}(D)$ et un point $x \in D$ il existe dans un voisinage de x un ensemble analytique V_x tel que φ restreinte à V_x soit pluriharmonique. On peut cependant démontrer l'assertion précédente pour un ouvert partout dense de D. Plus précisément, on a le résultat suivant. On trouve des calculs semblables dans [15].

PROPOSITION 12. Soit φ une fonction de $\mathcal{P}_{n-1}(D)$. Les champs de vecteurs qui sont dans le noyau de la forme de Lévi de φ forment une algèbre de Lie pour l'opération crochet.

Démonstration. Posons

$$X_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ qui soient dans le noyau de la forme de Lévi de φ. Si on pose

$$X = \sum_k g_k X_k \qquad , \qquad Y = \sum_\ell h_\ell X_\ell .$$

On a

$$(1) \qquad \sum_{\ell,k} (\bar{X}_\ell X_k \varphi)\, \bar{g}_\ell g_k = 0 \quad , \quad \sum_{\ell,k} (\bar{X}_\ell X_k \varphi)\, \bar{h}_\ell h_k = 0.$$

La matrice $(\bar{X}_\ell X_k \varphi)_{\ell,k}$ étant positive, on déduit de (1) que pour tout ℓ

$$\sum_k \bar{X}_\ell (X_k \varphi)\, h_k = 0.$$

On obtient alors que pour tout ℓ, $1 \leq \ell \leq n$,

$$(2) \qquad \sum_k \bar{X}_\ell ((X_k \varphi)\, h_k) = \sum_\ell (X_k \varphi).(\bar{X}_\ell h_k)$$

et une relation semblable en remplaçant h par g.

Nous allons montrer que $[X,\bar{Y}]$ est dans le noyau de la forme de Lévi de φ.

Or
$$[X,\bar{Y}] = \sum_{\ell,k} \bar{h}_\ell(\bar{X}_\ell g_k)X_k - \sum_{\ell,k} g_\ell X_k(\bar{h}_\ell)\bar{X}_\ell .$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout s, $1 \leq s \leq n$, on a

$$\sum_{k,\ell} \bar{X}_s(X_k\varphi)\,\bar{h}_\ell(X_\ell g_k) = 0.$$

Or
$$\sum_{\ell,k} \bar{X}_s(X_k\varphi)\,\bar{h}_\ell(\bar{X}_\ell g_k) = \sum_{\ell,k} \bar{h}_\ell\left[\bar{X}_s(X_k\varphi.\bar{X}\ \ g_k) - (X_k\varphi).(\bar{X}_s\bar{X}_\ell g_k)\right].$$

En utilisant à plusieurs reprises les relations (2), on voit que cette dernière expression est égale à :

$$\sum_{\ell,k} \bar{h}_\ell\left[\bar{X}_s\bar{X}_\ell((X_k\varphi)g_k) - (X_k\varphi)(\bar{X}_s\bar{X}_\ell g_k)\right]$$

$$= \sum_{\ell,k} \bar{h}_\ell\left[\bar{X}_\ell((X_k\varphi)\,\bar{X}_s g_k) - (X_k\varphi)(\bar{X}_s\bar{X}_\ell g_k)\right]$$

$$= \sum_{\ell,k} \bar{h}_\ell\left[(\bar{X}_\ell X_k\varphi).(\bar{X}_s g_k)\right]$$

$$= \sum_{k} (\bar{X}_s g_k).(\sum_\ell \bar{h}_\ell(\bar{X}_\ell(X_k\varphi))),$$

qui est nulle d'après (2).

COROLLAIRE B. Soit φ une fonction de $\mathcal{P}_{n-1}(D)$. Si le rang de la matrice $(\bar{X}_\ell X_k\varphi)_{\ell,k}$ est égal à p au voisinage d'un point $x_o \in D$, alors il existe un feuilletage d'un voisinage de x_o par des variétés analytiques de dimension $(n-p)$ tel que la restriction de φ à chaque feuille soit pluriharmonique.

Démonstration. Puisque le rang de la matrice $\mathcal{L}(\varphi) = (\bar{X}_\ell X_k\varphi)_{\ell,k}$ est égal à p au voisinage de x_o, on peut trouver $(n-p)$ champs de vecteurs $(Y^1,\ldots,Y^{n-p})$ qui engendrent en tout point d'un voisinage de x_o le noyau de $\mathcal{L}(\varphi)$. La proposition précédente montre que l'espace engendré par $(Y^1, \dots, Y^{n-p}, \bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{n-p})$ est une algèbre de Lie. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Frobenius et de remarquer que les variétés intégrales obtenues sont des variétés complexes puisque l'espace tangent est en tout point un sous-espace complexe. Le fait que φ restreinte à une feuille soit pluriharmonique est alors immédiat.

Remarque. L'ensemble des points au voisinage desquels le rang de $\mathscr{L}(\varphi)$ est constant est un ouvert partout dense de D.

IV. ENSEMBLES RATIONNELLEMENT CONVEXES CERCLES EN UNE VARIABLE.

a) Soit X un ensemble rationnellement convexe dans $\mathbb{C}^n$ et soit φ une fonction plurisousharmonique continue définie au voisinage de X. Notons Y le compact de $\mathbb{C}^{n+1}$ défini par

$$Y = \left\{(z,w)/z \in X, \quad w \in \mathbb{C}, \quad |w| = \exp(-\varphi(z))\right\}.$$

Nous voulons décrire, dans ce paragraphe, l'enveloppe rationnellement convexe de Y que nous noterons $r(Y)$.

Etant donné une fonction ψ définie sur X et $H \subset X$ nous noterons $\tilde{\psi}_H$ la borne supérieure des fonctions $c \log |f|$, $c > 0$, $f \in R(X)$ telles que $c \log |f| \leq \psi$ sur l'ensemble H.

THEOREME 14. <u>Soit</u> X <u>un compact rationnellement convexe de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et</u> φ <u>une fonction p. s. h. continue au voisinage de</u> X. <u>Si</u> K <u>désigne la frontière de Shilov de</u> $R(X)$ <u>alors</u>

$$r(Y) = \left\{(z,w)/z\in X, \ \ w\in\mathbb{C}, \ \exp((-\widetilde{\varphi}_K)(z)) \leq |w| \leq \exp(-\varphi(z))\right\}.$$

Démonstration. Désignons par $\mathcal{B}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(Y)$ engendrée par les fonctions du type

$$F(z,w) = \sum_{j=-N}^{+N} a_j(z)\, w^j, \quad a_j\in A = R(X), \ \ -N \leq j \leq +N.$$

On voit facilement que $R(Y) = \mathcal{B}$, en effet, il suffit de considérer le développement en série de Hartogs Laurent d'une fraction rationnelle régulière sur Y. En appliquant le théorème 2 on voit qu'il nous suffit de calculer les fonctions $\widetilde{\varphi}_X$ et $(-\widetilde{\varphi}_X)$. Or, d'après le théorème 6, il existe des fonctions $f_i\in R(X)$ et des constantes $c_i > 0$ telles que sur X

$$\varphi = \sup_i c_i \log|f_i|$$

d'où $\widetilde{\varphi}_X = \varphi$.

Montrons que $-\widetilde{\varphi}_X = (-\widetilde{\varphi}_K)$. Si $c \log|f| \leq -\varphi$ sur K $f\in R(X)$, $c \geq 0$, alors sur K

$$c \log|f| + \sup_i c_i \log|f_i| \leq 0. \tag{1}$$

L'ensemble K étant la frontière de Shilov de $R(X)$, l'inégalité (1) reste vraie sur X donc $(\widetilde{-\varphi_K}) \leq (\widetilde{-\varphi_X})$, l'autre inégalité étant évidente, le théorème est donc démontré.

Rappelons qu'on appelle disque analytique dans le spectre $\mathfrak{M}_A$ d'une algèbre uniforme A, toute application non constante Φ du disque unité Δ dans $\mathfrak{M}_A$ telle que, pour toute $f\in A$, $f\circ\Phi$ soit holomorphe dans Δ.

COROLLAIRE 15. <u>Si</u> φ <u>est plurisousharmonique au voisinage de</u> X, <u>alors</u> $r(Y) = Y$; <u>réciproquement si</u> Y <u>est rationnellement convexe alors</u> φ <u>est harmonique</u>

<u>sur tout disque analytique</u> . (<u>i.e.</u> $\varphi\circ\Phi$ <u>est harmonique dans</u> Δ).

Démonstration. Si φ est pluriharmonique au voisinage de X, on a vu qu'alors $-\varphi = \widetilde{-\varphi}_X$ donc $r(Y) = Y$.

Réciproquement si $\widetilde{-\varphi}_X = -\varphi$, alors pour tout $z_o \in X$ et pour toute mesure de Jensen μ_{z_o} représentant z_o on a

$$\varphi(z_o) = \int \varphi d\mu_{z_o},$$

on en déduit facilement que $\varphi \circ \Phi$ est harmonique si $\Phi : \Delta \to X$ est un disque analytique. En particulier φ est pluriharmonique dans l'intérieur de X.

Remarques. i) Si X est l'adhérence d'un domaine strictement pseudoconvexe, alors Y est rationnellement convexe si et seulement si φ est pluriharmonique dans $\overset{o}{X}$. Cela résulte du corollaire 11 et du corollaire précédent.

ii) Supposons que la frontière de Jensen de $R(X)$ soit égale à X. Soit ψ une fonction s. c. i. définie sur X ; notons Y l'ensemble défini par

$$Y = \left\{(z,w)/z\in X,\ \ w\in\mathbb{C},\ \ |w| = \exp(-\psi(z))\right\}.$$

D'après le théorème 2 et le fait que $\mathfrak{B} = R(Y)$, on en déduit que Y est rationnellement convexe.

b) Problème de Dirichlet associé à $R(X)$ lorsque X est un compact de $\mathbb{C}$.

Nous allons étudier le cas où X est un compact de $\mathbb{C}$. Lorsque le bord de X est régulier pour toute fonction s. c. i. u définie sur ∂X, $\tilde{u}$ est le prolongement harmonique de u dans $\overset{o}{X}$. Si X est un compact quelconque de $\mathbb{C}$ les notions de topologie fine s'introduisent naturellement. Nous renvoyons à [2] et [7] pour les résultats concernant les fonctions finement harmoniques. Rappelons cependant que la topologie fine sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est la topologie la moins fine qui rende continues les fonctions sousharmoniques dans U. Pour tout compact $X \subset \mathbb{C}$, nous noterons $\overset{o}{X}_f$ l'intérieur fin de X et $\partial_f X$ sa frontière fine. Lorsque u est une fonction définie sur X, nous noterons $\tilde{u}$ la solution du problème de Dirichlet généralisé relativement à l'algèbre $R(X)$.

PROPOSITION 16. <u>Soit</u> X <u>un compact de</u> $\mathbb{C}$ <u>et</u> ψ <u>une fonction surharmonique continue au voisinage de</u> X. <u>La fonction</u> $\tilde{\psi}$ <u>coïncide alors, avec la solution du problème de Dirichlet fin avec pour donnée sur</u> $\partial_f X$ <u>la restriction de la fonction</u> ψ.

Nous aurons besoin au cours de la démonstration du lemme suivant qui est dû à M. Brelot [2], p. 88.

LEMME 17. <u>La frontière de Jensen de</u> $R(X)$ <u>est égale à la frontière fine de</u> X.

Démonstration. Dans [2] p. 88, M. Brelot démontre que la frontière de Choquet associée à l'espace $\mathcal{H}(X)$ des fonctions harmoniques au voisinage de X est égale à $\partial_f X$. Or, si μ est une mesure de Jensen représentant z pour $R(X)$, μ représente z pour $\mathcal{H}(X)$, en effet, on peut approcher uniformément sur X les fonctions de $\mathcal{H}(X)$ par des fonctions du type $c \log |f|$, $c > 0$, $f \in R(X)$; on peut également déduire cela du théorème 6. Il en résulte que $\partial_f X \subset J$, si J désigne la frontière de Jensen pour $R(X)$. Réciproquement, si z n'appartient pas à $\partial_f X$, il existe un ouvert fin V contenant x, soit ε^{CV} la balayée de la masse de Dirac en z relativement au complémentaire de V. La mesure ε^{CV} est une mesure de Jensen pour $R(X)$ puisque les fonctions $c \log |f|$ sont finement sous harmoniques, donc z n'appartient pas à J.

Démonstration de la proposition 16. Il existe une suite décroissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts à bord régulier tels que $X = \bigcap_n X_n$. On peut supposer que ψ est définie sur X_1. Posons $\psi_n = \psi|_{\partial X_n}$. Soit $\widetilde{\psi}_n$ la solution du problème de Dirichlet dans X_n avec pour donnée sur ∂X_n la fonction ψ_n. Il est clair que la suite $\widetilde{\psi}_n$ est croissante sur X. Posons

$$\psi_o = \lim_n \uparrow \widetilde{\psi}_n.$$

Montrons que $\psi_o = \widetilde{\psi}$. Si $c \log|f| \leq \psi$ sur X avec f holomorphe au voisinage de X, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_o tel que pour $n \geq n_o$ on a sur ∂X_n

$$c \log|f| \leq \psi_n + \varepsilon.$$

Donc $c \log|f| \leq \psi_n + \varepsilon$ sur X_n et par suite $\widetilde{\psi} \leq \psi_o$. L'inégalité $\psi_o \leq \widetilde{\psi}$ résulte du fait que sur X, $\widetilde{\psi}_n$ s'écrit comme la borne supérieure de fonctions $c_i \log|f_i|$, $f_i \in R(X)$, or $\widetilde{\psi}_n \leq \psi$ donc $\widetilde{\psi}_n \leq \widetilde{\psi}$, d'où le résultat. La proposition en découle puisque la fonction ψ_o est finement harmonique sur $\overset{o}{X}_f$ car c'est la limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques majorées. D'autre part, le théorème 1 et le lemme 17 permettent de voir que $\widetilde{\psi} = \psi$ sur $\partial_f X$.

COROLLAIRE 18. <u>Soit</u> φ <u>une fonction sousharmonique continue définie au voisinage d'un compact</u> X <u>de</u> $\mathbb{C}$. <u>Si</u>

$$Y = \{(z,w)/z\in X,\quad w\in\mathbb{C},\quad |w| = \exp(-\varphi(z))\}$$

<u>alors</u>

$$r(Y) = \{(z,w)/z\in X,\quad w\in\mathbb{C},\quad \exp((\widetilde{-\varphi})(z)) \leq |w| \leq \exp(-\varphi(z))\}.$$

<u>La fonction</u> $(\widetilde{-\varphi})$ <u>étant finement harmonique sur</u> $\overset{o}{X}_f$ <u>et valant</u> $-\varphi$ <u>sur</u> $\partial_f X$.

Le corollaire précédent a été démontré sous des hypothèses un peu plus restrictives par A. Debiard et B. Gaveau [6], ils utilisent le semi-groupe associé à l'équation de la chaleur construite à l'aide du Laplacien de Kohn.

V. ETUDE DE COMPACTS DONT L'ENVELOPPE RATIONNELLEMENT CONVEXE EST SANS STRUCTURE ANALYTIQUE.

Nous allons à présent calculer l'enveloppe rationnellement convexe de certains compacts introduits par J. Wermer [18] et étudiés par R. Basener [1] puis par A. Debiard et B. Gaveau [6]. Nous retrouvons en particulier leurs résultats avec des méthodes entièrement différentes et peut être plus simples. L'étude de ces compacts a pour but la construction d'ensembles K tels que $r(K) \neq K$ et tels que cependant $r(K)/K$ ne contienne aucun disque analytique, c'est-à-dire toute application holomorphe du disque unité de $\mathbb{C}$ dans $r(K)$ est constante. Nous utiliserons au cours de cette étude la proposition suivante.

PROPOSITION 19. <u>Soit</u> Ω <u>un domaine borné de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et soit</u> Φ <u>une fonction continue dans</u> $\bar{\Omega}$ <u>et plurisurharmonique dans</u> Ω. <u>Posons</u>

$$X = \left\{ z / z \in \partial\Omega, \quad \Phi(z) \leq 1 \right\}.$$

<u>Alors</u> $r(X)$ <u>contient l'adhérence de l'ensemble</u> V <u>défini par</u>

$$V = \left\{ z / z \in \Omega, \quad \Phi(z) < 1 \right\}.$$

Démonstration. Il est clair que la frontière de V est contenue dans l'ensemble

$$X \cup \left[z / z \in \Omega, \quad \Phi(z) = 1 \right].$$

Soit p un polynôme s'annulant en un point $z_o \in V$. Posons

$$\Sigma = \left\{ z / z \in \mathbb{C}^n, \quad p(z) = 0 \right\}.$$

Le théorème de Hartogs implique que Σ rencontre ∂V ; si Σ ne rencontrait pas X on aurait, pour tout $z \in \partial V \cap \Sigma$, $\Phi(z) = 1$. La fonction Φ qui est plurisurharmonique atteindrait son minimum, relativement à $\Sigma \cap \bar{V}$, en un point de $\Sigma \cap V$, ce qui contredirait le principe du minimum pour les fonctions plurisurharmoniques sur des ensembles analytiques ; on peut démontrer un tel principe en utilisant une désingularisation locale de l'ensemble Σ.

Dans [18] J. Wermer considère les compacts X_S définis comme suit : soit $\partial\Delta$ le bord du disque unité de $\mathbb{C}$ et soit S un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans Δ et tel que $\partial\Delta \subset \partial S$. On note X_S le compact de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$X_S = (S \times \partial\Delta) \cup (\partial\Delta \times S).$$

Le problème est de calculer $r(X_S)$. Dans un premier temps nous supposerons que S est un compact à bord de classe $\mathscr{C}^2$ nous noterons u_S la solution du problème de Dirichlet avec pour valeur au bord de S, 0 sur $\partial\Delta$ et 1 sur $\partial S/\partial\Delta$.

THEOREME 20. <u>Si</u> S <u>est à bord régulier, notons</u> $\widetilde{X}_S$ <u>l'ensemble</u>

$$\widetilde{X}_S = \left\{(z,w)/z \in S,\ w \in S,\ u_S(z) + u_S(w) \leq 1\right\}.$$

<u>Alors</u> $r(X_S) = \widetilde{X}_S$.

Démonstration. La fonction Φ définie par $\Phi(z,w) = u_S(z) + u_S(w)$ est pluriharmonique dans $\overset{\circ}{\widehat{S \times S}}$ et continue dans $S \times S$. Or on vérifie que

$$X_S = \left\{(z,w)/(z,w) \in \partial(S \times S),\ \Phi(z,w) \leq 1\right\}.$$

La proposition 19 implique alors que l'intérieur de $\widetilde{X}_S$ est contenu dans $r(X_S)$, on vérifie facilement que $\overline{\overset{\circ}{\widetilde{X}_S}} = \widetilde{X}_S$.

Par ailleurs, on a $u_S = \sup_i c_i \log|f_i|$, $c_i > 0$, $f_i \in R(S)$, donc l'ensemble

X_S est rationnellement convexe puisqu'il en est ainsi de $S \times S$ et qu'il est défini dans $S \times S$ par des inégalités portant sur le module de fractions rationnelles.

Considérons à présent le cas où S est un compact quelconque de $\mathbb{C}$ contenu dans Δ et tel que $\partial\Delta \subset \partial S$. Il existe une suite (S_n) décroissante de compacts à bord de classe $\mathscr{C}^2$ et tels que $\bigcap\limits_n S_n \subset S$, on peut supposer que pour tout n on a $\partial\Delta \subset \partial S_n$. Soit u_n la fonction harmonique dans l'intérieur de S_n et qui vaut 0 sur $\partial\Delta$ et 1 sur $\partial S_n/\partial\Delta$. Posons $u_S(z) = \lim\limits_n \uparrow u_n(z)$ pour tout $z \in S$.

THEOREME 21. On a $X_S = \bigcap X_{S_n}$ et $r(X_S) = \widetilde{X}_S$ où $\widetilde{X}_S$ est défini par

$$\widetilde{X}_S = \left\{(z,w)/z \in S, \quad w \in S, \quad u_S(z) + u_S(w) \leq 1\right\}.$$

De plus u_S est finement harmonique dans $\overset{\circ}{S}_f$ et pour tout $z \in S$

$$u_S(z) = \inf_{\mu \in J_z} \mu(\partial S/\partial\Delta).$$

Démonstration. Puisque $X_S = \bigcap\limits_n X_{S_n}$, on a $r(X_S) = \bigcap\limits_n r(X_{S_n})$. Or, le théorème 20 donne une description de $r(X_{S_n})$ i. e.

$$r(X_{S_n}) = \left\{(z,w)/z \in \;_n, \quad w \in \;_n, \quad u_n(z) + u_n(w) \leq 1\right\}.$$

La suite u_n restreinte à S étant croissante, on en déduit que $r(X_S) = \widetilde{X}_S$.

La fonction u_S est finement harmonique dans $\overset{\circ}{S}_f$ puisque c'est la limite d'une suite majorée de fonctions harmoniques, voir [7]. Nous allons montrer que $u_S = \widetilde{u}$ où u désigne la fonction caractéristique de $\partial S/\partial\Delta$ et $\widetilde{u}$ la solution du problème de Dirichlet relativement à $R(S)$.

Soit μ une mesure de Jensen portée par ∂S représentant l'évaluation en z. La mesure μ représente également l'évaluation en z pour les fonctions continues dans S_n et harmoniques dans $\overset{o}{S}_n$, cela résulte du fait qu'on peut approcher ces fonctions par des fonctions du type $c \log |f|$, $f \in R(S)$, $c > 0$, voir [17]. On a

$$u_S(z) = \lim \uparrow u_n(z) = \lim \uparrow \int u_n \, d\mu = \int u_S \, d\mu \leq \int u \, d\mu .$$

Donc $u_S \leq \tilde{u}$. On voit par ailleurs que lorsque f est holomorphe au voisinage de S et que sur ∂S

$$c \log |f| \leq u$$

alors on a

$$c \log |f| \leq u_S .$$

Il en résulte que $\tilde{u} = u_S$ et que $u_S(z) = \inf\limits_{\mu \in J_z} \mu(\partial S / \partial \Delta)$.

COROLLAIRE 22. L'ensemble X_S est rationnellement convexe si et seulement si l'intérieur fin de S est vide.

En particulier, si $\overset{o}{S}_f \neq \emptyset$ et $\overset{o}{S} = \emptyset$ on a $r(X_S) \neq X_S$, cependant il n'y a pas de disque analytique dans $r(X_S)$ car $r(X_S) \subset S \times S$ et donc chaque projection de $r(X_S)$ est d'intérieur vide, si on avait un disque analytique dans $r(X_S)$ l'une des projection serait d'intérieur non vide.

Le corollaire résulte du théorème 21 et du lemme 17.

Remarque. Soit B la boule unité de $\mathbb{C}^n$ et soit φ une fonction continue sur ∂B. Notons $\tilde{\varphi}$ la solution du problème de Dirichlet relativement à l'algèbre $H(\overline{B})$ avec pour donnée sur ∂B la fonction φ. Il serait intéressant de montrer que en tout point $z \in B$ il existe un ensemble analytique contenant z et sur lequel la fonction $\tilde{\varphi}$ est harmonique. Cela impliquerait que l'enveloppe polynomialement convexe $\hat{K}$ d'un compact contenu dans le bord d'un domaine D strictement pseudoconvexe et polynomialement convexe contient des disques analytiques ; en effet $\hat{K}/K$ serait réunion d'espaces analytiques. Plus généralement on pose la question suivante : si tout point d'un compact X est un point pic pour $P(X)$ alors soit $\hat{X}/X$ est réunion de disques analytiques soit $X = \hat{X}$.

Bibliographie

[1] BASENER, R. On some rationnally convex hulls. Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 353-381.

[2] BRELOT, M. On topologies and boundaries in potential theory. Lecture Notes in Mathematics 175 (1971). Springer-Verlag.

[3] BREMERMANN, H. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276.

[4] ——————— Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen. Math. Ann. 136 (1958), 173-186.

[5] BROWDER, A. Introduction to function algebras. New-York, Benjamin Inc. 1969.

[6] DEBIARD, A. et GAVEAU B. Potentiel fin et enveloppes d'holomorphie III. A paraître.

[7] FUGELDE, B. Finely harmonic functions. Lecture Notes in Mathematics 289 (1972). Springer-Verlag, Berlin.

[8] GAMELIN, T. W. Uniform algebras spanned by Hartogs series. A paraître.

[9] GAMELIN, T. W. and ROSSI, H. Jensen measures and algebras of analytic functions in function algebras. Proc. confefrence, Tulane 1965. Scott Foresman (1966), 13-35.

[10] HÖRMANDER, L. An introduction to complex analysis in several variables. New York, Van Nostrand Co., 1966.

[11] KERZMAN, N. Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ in strongly pseudoconvex domains. Comm. Pure and Appl. Math. 24 (1971), 301-379.

[12] RICKART, C. E. Plurisubharmonic functions and convexity properties for general function algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 169 (1972), 1-24.

[13] ROSSI, H. Holomorphically convex sets in several complex variables. Ann. Math. 74 (1961), 470-493.

[14] SIBONY, N. Prolongement des fonctions holomorphes bornées et métrique de Carathéodory. Invent. Math. 29 (1975), 205-230.

[15] SOMMER, F. Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen im C^n. Math. Ann. 137 (1959), 392-411.

[16] STOLZENBERG, . A hull with no analytic structure. J. Math. Mech. 12 (1963), 103-111.

[17] STOUT, E. L. The theory of uniform algebras. New York, Bogden and Quigley Inc. Publ. 1971.

[18] WERMER, J. On an example of Stolzenberg . Symp. Several Complex Variables (Park City, Utah, 1970). Lecture Notes in Math. 184. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[19] WERMER, J. Banach algebras and several complex variables. Markham Publ. Co. Chicago, 1971.