PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78-12

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE
1977-1978

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique
Bât. 425
91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78-12

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE
1977-1978

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

WAVE PACKETS AND F.I.O.

A. Córdoba

Analyse Harmonique d'Orsay

Spring 1978

This is an account of a seminar given at the Université Paris XI (Orsay), April 1978, where I presented some results obtained in collaboration with C. Fefferman [2]. I have made no attempt to give the proofs contained in [2] and limited myself to show, in a heuristic way, some of the ideas and arguments behind those proofs.

On a neighborhood of 1970, two important results were obtained about Pseudo-differential Operators, namely:

<u>Theorem</u> 1. <u>(Calderón-Vaillancourt)</u>.

If $p(x,\xi)$ *is a symbol in the class* $S^0_{\rho,\rho}$, $0 < \rho < 1$, *then the associated Pseudodifferential Operator* $p(x, D)$ *is bounded on* $L^2(\mathbb{R}^n)$

<u>Theorem</u> 2. <u>(Egorov)</u>.

If $(x, \xi) \overset{\phi}{\to} (y, \eta)$ *is a homogeneous canonical change of coordinates (i.e. preserves the differential form* $x d\xi$*) then there exists an Operator* U, *bounded on* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *such that* $Q = U^{-1} P\, U +$ *"Operator of lower order", for every Pseudodifferential operator* P, *where*

$$Q = q(x, D),\ P = p(x, D),\ q(x, \xi) = p(\phi(x, \xi)).$$

Furthermore, if $S(y, \xi)$ *is the generating function of the canonical change of coordinates* (i.e. $\eta = S_y(y, \xi)$, $x = S_\xi(y, \xi)$) *then*

$$Uf(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(y,\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

If $p(x, \xi)$ is a symbol in the class $S^0_{1,0}$ then $p(x, D)$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^n)$ and the usual proof involves some kind of Garding inequality together with integration by parts techniques, because of the fact: $|D_x^\alpha D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$. But this is no longer true for symbols in the class $S^0_{1/2,1/2}$ and at that time, 1970, the theory was sophisticated enough to need these exotic symbols.

Now, for the constant coefficient case, $\hat{Tf}(\xi) = m(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$, more information is known, namely:

i) T is bounded on $L^2(\mathbb{R}^n)$ iff m is bounded.

ii) T is bounded on $L^1(\mathbb{R}^n)$ iff $\hat{m}$ is a measure of finite total variation.

It is a natural question in Fourier Analysis to ask whether or not T yields a bounded operator on $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. This is a rather difficult problem about which very little is known. However, the deepest multiplier theorems that I know have the following strategy: to decompose the multiplier $m(\xi)$, or the kernel $K = \hat{m}$, or both, intro pieces, in such a way that each one gives us a bounded operator, that the norms of these operators be uniformly bounded, and that the interaction between the different pieces be small, allowing us to glue together the individual estimates. In order to be able to do this decomposition, we have to use the smoothness properties of the multiplier, its geometric properties and the uncertainity principle, which tells us that we have to compromise between the type of localization that we want to make at the multiplier side or at the kernel side of the picture.

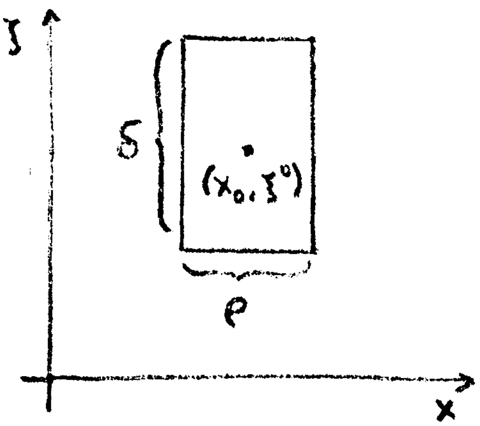
It is not a surprise that these ideas about the L^p boundedness properties of constant coefficient operators are useful to analyse the L^2-boundedness of the variable coefficients case. M. Cotlar proved a beautiful theorem in this direction: "If we can decompose an operator T

on a Hilbert space H, as a sum of trivial pieces $T = \Sigma T_i$, $\|T_i\| \leq C$, and if these pieces are almost perpendicular,

$$\|T_i^* T_j\|, \ \|T_i T_j^*\| \leq Cg^2(i-j), \quad \Sigma g(i) < \infty,$$

then T is a bounded operator".

Let us consider a symbol $p(x, \xi)$ $S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ and ask the following question: how to decompose $p = \Sigma p_j$ in such a way that Cotlar's lemma can be applied? Suppose that we want to localize p near the point (x_0, ξ^0), since $|\nabla_x p(x, \xi)| \leq C$, $|\nabla_\xi p(x, \xi)| \leq C|\xi^0|^{-1}$ near (x_0, ξ^0) it is clear that we shouldn't consider equally the x-localization and the ξ-localization.



The variation on the x-direction is dominated by $C\rho$ while in the ξ-direction is $c\delta|\xi^0|^{-1}$. Therefore $c\rho \simeq c\delta|\xi^0|^{-1}$ that is $\rho \simeq \delta|\xi^0|^{-1}$.

Finally we must consider the uncertainity principle; $\rho\delta = 1$, which implies that the rigth localization near the point (x^0, ξ^0) must be of the following order:

$$\|x - x_0\| \leq \|\xi^0\|^{-1/2}, \quad \|\xi - \xi^0\| \leq \|\xi^0\|^{1/2}$$

In their proof [1] Calderón and Vaillancourt complete this program and they are able to show that the family of operators $p_j(x, D)$ obtained by a smooth partition of $p(x, \xi)$ made in agreement with the preceding considerations, satisfies the hypothesis of Cotlar's lemma.

Heuristic Proofs.

Let us consider a partition of unity on phase space $1 = \sum_I \phi_I(x, \xi)$ in agreement with the previous discussion and suppose that

$$\phi_I(x, \xi) \sim \phi((x-x_I)\ |\xi^I|^{1/2})\ \hat{\phi}((\xi - \xi^I)\ |\xi^I|^{-1/2}).$$

Then

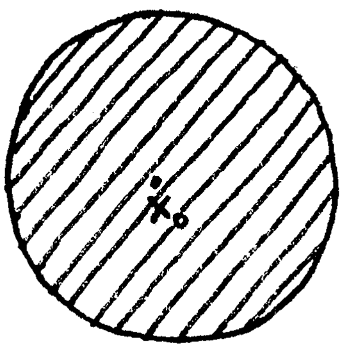
$$f \sim \sum_I \phi_I(x, D)\ f(x) \sim$$

$$\sim \sum_I \left(|\xi^I|^{n/4}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i(y-x_I)\cdot\xi^I}}\ \phi((y-x_I)\ |\xi^I|^{1/2}) \cdot f(y)dy\right) \cdot$$

$$|\xi^I|^{n/4}\ e^{i(x-x_I)\cdot\xi^I}\ \phi((x-x_I)\cdot|\xi^I|^{1/2})$$

which looks like a kind of Fourier series development of the function f.

This suggest the following definition: A wave packet centered at the point x_0, travelling in the direction given by ξ^0 and with shape $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ is given by $e^{i(x-x_0)\cdot\xi^0}\ \phi(x-x_0)$



As we have seen previously there are wave packets

$$\phi_{x_I,\xi^I} = |\xi^I|^{n/4} e^{i(x-x_I)\cdot\xi^I}\ \phi((x-x_I)\ |\xi^I|^{1/2})$$

which give us an "almost orthogonal" decomposition of $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f \sim \sum_I < f, \phi_{x_I,\xi^I} > \cdot\ \phi_{x_I,\xi^I}$$

The almost orthogonality character means, in particular, that we have the Plancherel Theorem:

$$\|f\|_2^2 \sim \sum_I |\langle f, \phi_{x_I,\xi^I}\rangle|^2$$

It is easy to observe that if p is a symbol of order cero then

$$P(x, D)\,\phi_{x_I,\xi^I} = p(x_I, \xi^I)\,\phi_{x_I,\xi^I} + \text{negligible error.}$$

Therefore the fact that $P(x, D)$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^n)$ is an inmediate consequence of the Plancherel Theorem:

$$\|P(x, D)f\|_2^2 \sim \sum_I |\langle f, \phi_{x_I, \xi^I}\rangle|^2\, |p(x_I, \xi^I)|^2 \leq$$

$$\leq C \sum_I |\langle f, \phi_{x_I, \xi^I}\rangle|^2 \leq C\, \|f\|_2^2$$

Finally if

$$Tf(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(y,\xi)}\, \hat{f}(\xi)d\xi$$

is the Egorov's operator associated to the transformation $(x,\xi) \overset{\phi}{\to} (y,\eta)$ (assuming that the hypothesis of homogeneity and non-degeneracy are satisfied), then it maps the wave-packet

$$e^{i(x-x_0)\cdot\xi^0}\phi(x-x_0) \quad \text{to} \quad e^{i(y-y_0)\cdot\eta^0}\,\tilde{\phi}(y-y_0)$$

$\phi(x_0, \xi^0) = (y_0, \eta^0)$, ϕ, $\tilde{\phi} \in S(\mathbb{R}^n)$. That is, except for the change of shape $\phi \to \tilde{\phi}$ that we must take into account, the effect of the Egorov's operator consists of just a rearrangement of the "Fourier" coefficients. Therefore we can invoque again the Plancherel Theorem to conclude the boundedness of T.

The machine.

In a local coordinate path a wave-packet is a function of the form

$$[\det g_I]^{1/4} \exp\{i\, \xi^0 \cdot (x-x_0) + \frac{i}{2}\, (x-x_0)^t\, g(x-x_0)\}$$

where $g \in H = \{x + iy \mid x, y$ real, symmetric matrices, y positive definite$\}$.

a) If we make a change of coordinates $x = \phi(y)$, $x_0 = \phi(y_0)$, then our wave-pachet transforms to

$$e^{i\{\xi^0 \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\xi^0 \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial y})^t g(\frac{\partial\phi}{\partial y})\}} + \text{higher order terms}.$$

So that $(x_0, \xi^0, g) \to (y_0, (\frac{\partial\phi}{\partial y})^t \cdot \xi^0, (\frac{\partial\phi}{\partial y})^t g(\frac{\partial\phi}{\partial y}) + \xi^0 \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})$

More generally, if $(x, \xi) \to (y, \eta)$ is a canonical transformation of local coordinates patches, then it maps

$$(x, \xi, g) \to (y, \eta, \begin{pmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial\xi}, & \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi}, & \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix} g)$$

where $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix} g = (Ag + B)\, C(g + D)^{-1}$ is the action of the symplectic group on the Siegel upper half plane H.

So we have a Wave-Packet bundle over a symplectic manifold.

b) The Wave-Packet transform is now defined by

$$Wf(x, \xi, g) = \langle f, \phi_{x,\xi,g}\rangle$$

Inversion Formula.

An admissible section $g(x, \xi) \in S^1$, is a section of the Wave--Packet bundle which yields an elliptic matrix valued symbol of order one. Then,

$$f(x) = \iint Wf(y, \eta, g(y, \eta))\, \phi_{y,\eta,g(y,\eta)}(x)dy\, d\eta + \text{error}.$$

This inversion formula is, of course, equivalent to the Plancherel Theorem.

c) Consistency Conditions.

Let us say that $F(x, \xi, g)$ is negligible if for each admissible section $g(x, \xi)$ we have $|F(x, \xi, g(x, \xi))| = 0(|\xi|^{-1/2})$. Then the Kernel

$$K(x, \xi, g; y, \eta, h) = \langle\phi_{x,\xi,g}, \phi_{y,\eta,h}\rangle$$

is invariant under canonical transformation modulo negligible functions. Therefore, the space of functions $F(x, \xi, g)$ which are reproduced by this kernel

$$F(x, \xi, g) = \iint F(y, \eta, h(y,\eta))\; K(x, \xi, g; y, \eta, h(y,\eta))dy\, d\eta + \text{negligible}$$

is invariant under canonical transformation and, of course, contains the Wave-Packet transforms of functions in L^2.

d) If $p(x, \xi) \in S^m_{1,0}$ then we have the following formula: $p(x, D)f = W_g^{-1}(p \cdot W_g f) + Q_g f$, where Q_g is a pseudodifferential operator of order $m - 1$ (g is an admissible section).

For the Egorov's Operator we have: If

$$Tf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x, \xi)}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$\phi(x, \xi) = (y, \eta), \quad \eta = S_x(x, \xi), \quad y = S_\xi(x, \xi)$$

Then

$W_{\tilde{g}}Tf(\phi(x, \xi)) = \mu(x, \xi, g) \ \ W_g f(x, \xi)$ + negligible where

$$g \in H, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot g$$

and

$$\mu(x, g) = \left\{ \frac{\det(\frac{\partial y}{\partial \xi} g + \frac{\partial y}{\partial x})}{\det(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \tilde{g} + \frac{\partial y}{\partial x})} \right\}^{1/4}$$

References.

[1] A.P. Calderón and R.Vaillancourt, "On the boundedness of Pseudodifferential Operators", J. Math. Soc. Japan, 23 (1971).

[2] A. Córdoba and C. Fefferman, "Wave packets and Fourier Integral Operators", To appear.

[3] Y. Egorov, "On canonical transformations of Pseudo-differential operators". Uspehi. Mat. Nauk, 25 (1969).

LES FONCTIONS RESURGENTES ET LEURS APPLICATIONS A L'ANALYSE HARMONIQUE SUR CERTAINS GROUPES

Jean ECALLE

I - INTRODUCTION

Soit $\mathbb{G}_o$ l'ensemble des transformations holomorphes

(1) $f : z \to f(z) = z(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n}) \qquad (a_n \in \mathbb{C} \; ; \; \lim\sup |a_n|^{1/n} < \infty)$

du voisinage de ∞ dans lui-même. $\mathbb{G}_o$ est un groupe pour la composition des applications : $f,g \to f\circ g$, mais il n'est localement compact pour aucune topologie raisonnable. $\mathbb{G}_o$ ne peut pas non plus être considéré comme un groupe de Lie de dimension infinie, car tout voisinage de l'élément neutre contient des f qui ne sont insérables dans aucun sous-groupe continu à un paramètre réel.

Toutefois, à propos de $\mathbb{G}_o$ et de maints groupes du même genre, on peut se poser les deux problèmes fondamentaux de l'analyse harmonique non commutative, à savoir :

Le problème de l'analyse harmonique : construire sur $\mathbb{G}_o$ des systèmes de fonctions centrales (i.e. invariantes par automorphismes internes) qui soient complets, c'est-à-dire qui suffisent à caractériser les classes de conjugaison de $\mathbb{G}_o$. (L'équivalent classique consiste à construire le semi-anneau des caractères sur un groupe de Lie localement compact).

Le problème de la synthèse harmonique : inversement, connaissant un tel système complet de fonctions centrales, reconstituer la classe d'équivalence de G_o qui lui correspond.

Pour résoudre ces deux problèmes, on est conduit à introduire certaines algèbres $\mathbb{A}$ de fonctions dites résurgentes. Ce sont des fonctions holomorphes, définies sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{P}$ (ou des surfaces de Riemann $\mathbb{R}$ équivalentes) et présentant, par rapport à l'action d'un certain groupe fuchsien $\mathbb{\Gamma}$, des propriétés d'invariance plus faibles que celles des fonctions automorphes classiques. Essentiellement, cette invariance affaiblie se traduit par l'existence, dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, d'une infinité d'éléments Δ_J , linéairement indépendants, et qui définissent autant de dérivations de l'algèbre $\mathbb{A}$.

Il s'avère alors qu'à toute f de la forme (1) on peut associer une fonction résurgente Φ , élément d'une algèbre $\mathbb{A}$, et que certains résidus attachés à Φ fournissent des systèmes complets de fonctions centrales $\mathbb{G}_Q(f)$ sur $\mathbb{G}_o$. Inversement, connaissant les scalaires $\mathbb{G}_Q(f)$, on peut reconstituer explicitement la classe de f en résolvant un système infini d'équations aux "dérivées partielles" sur $\mathbb{A}$, à savoir :

(2) $$\Delta_J\varphi = A_J \exp_*(\omega_J\varphi) \qquad (\forall J)$$

où $\exp_*$ désigne l'exponentielle de l'algèbre $\mathbb{A}$ et où les scalaires A_J et ω_J se déduisent des $\mathbb{G}_Q(f)$.

II - LES ALGEBRES DE FONCTIONS RESURGENTES

II.1 - L'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$ et les opérateurs autogènes.

Soit Ω un sous-groupe additif discret de $\mathbb{C}$. On se limitera ici aux sous-groupes de dimension 1. Prenons donc $\Omega = \omega_o\mathbb{Z}$ $\Omega^* = \omega_o\mathbb{Z}^*$. Soit $\mathbb{R}$ la surface de Riemann recouvrement universel de $\mathbb{C}\dot{-}\Omega$ et soit $\dot{P}$ la projection sur $\mathbb{C}\dot{-}\Omega$ du point courant P de $\mathbb{R}$. Soit enfin $\mathbb{\Gamma}$ le groupe des automorphismes $\Gamma : P \to \Gamma(P)$ de $\mathbb{R}$ qui se projettent en des automorphismes $\dot{\Gamma} : z \to \dot{\Gamma}(z) = z+\omega$ de $\mathbb{C}\dot{-}\Omega$. Alors $\omega \in \Omega$ et on assimile la translation $\dot{\Gamma}$ à son pas ω . $\mathbb{\Gamma}$ est un groupe fuchsien, sans éléments elliptiques. On peut trouver dans $\mathbb{\Gamma}$ trois éléments paraboliques R , S , T

(i) de projections $\dot{R} = 0$, $\dot{S} = \omega_o$, $\dot{T} = -\omega_o$

(ii) soumis à la seule relation $RST = 1_{\Gamma}$

(iii) engendrant, ensemble, le groupe Γ .

Le triplet (R,S,T) est unique à un automorphisme interne près dans Γ . Supposons-le fixé. Désignons par Q_o le point frontière de $\mathcal{R}$ invariant par R . ΓQ_o est situé au-dessus de l'ensemble Ω . Supposons Q_o situé au-dessus du point 0 (i.e. $\dot{Q}_o = 0$).

<u>Remarque</u> : Soit $\lambda(z)$ la fonction automorphe classique. Alors l'application :

$$z \to \frac{\omega_o}{2\pi i} \log(1-\lambda(z))^{-1} = \frac{4\omega_o}{\pi i} \sum_k \log \frac{(1+e^{k\pi iz})}{(1-e^{k\pi iz})} \quad (k \text{ impair} \geqslant 1)$$

est conforme du demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{z \,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ sur la surface $\mathcal{R}$ et elle transforme le groupe des homographies de $\mathcal{P} : z \to \frac{az+b}{cz+d}$ $(a,d \in 1+2\mathbb{Z}; c,b \in 2\mathbb{Z})$ en le groupe Γ d'automorphismes de $\mathcal{R}$.

Introduisons maintenant l'algèbre $\mathbb{D}(\Omega) = \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma]$ formée des combinaisons linéaires finies de la forme

$$(3) \qquad D = \gamma_o + \sum_i \gamma_i (1-R)\Gamma_i \qquad (\gamma_o, \gamma_i \in \mathbb{C} \,;\, \Gamma_i \in \Gamma)$$

et munie de la multiplication induite par la loi de Γ .

<u>Proposition</u> 1. <u>Soient</u> φ <u>et</u> ψ <u>deux germes de fonctions analytiques en</u> 0 (<u>supposés intégrables en</u> 0 <u>s'ils sont multiformes</u>) <u>et soit</u> $\varphi * \psi$ <u>le germe défini au voisinage de</u> 0 <u>par</u> :

$$(4) \qquad (\varphi * \psi)(z) = \int_0^z \varphi(z-\zeta)\psi(\zeta)d\zeta \;.$$

(a) <u>Alors, si</u> φ <u>et</u> ψ <u>se prolongent analytiquement le long de tout chemin de</u> $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$, <u>il en est de même de</u> $\varphi * \psi$.

(b) <u>Si en outre, pour tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>et tout chemin</u> $\mathfrak{J}$ <u>partant de</u> 0 , <u>évitant</u> Ω <u>et aboutissant en</u> ω , <u>les prolongements selon</u> $\mathfrak{J}$ <u>de</u> φ <u>et</u> ψ <u>sont intégrables en</u> ω , <u>il en est de même</u>

de $\varphi * \psi$.

Par suite, interprétés comme fonctions holomorphes uniformes sur $\mathcal{R}$ [1] et munis de la loi $*$, les germes qui vérifient (a) et (b) forment une algèbre commutative, qu'on notera provisoirement $\mathbb{A}(\Omega)$. Les éléments de $\mathbb{A}(\Omega)$ sont dits fonctions résurgentes.

Or on a une action naturelle $\Gamma : \varphi \to \Gamma\varphi = \varphi o \Gamma^{-1}$ de $\mathbb{\Gamma}$ dans $\mathbb{A}(\Omega)$, laquelle induit par linéarité une action de $\mathbb{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{A}(\Omega)$.

Proposition 2. Il existe une application linéaire unique de $\mathbb{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{D}(\Omega) \otimes \mathbb{D}(\Omega)$

$$D \to \sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D_i' \tag{5}$$

telle qu'on ait, pour tout $D \in \mathbb{D}(\Omega)$ et toute paire $\varphi, \psi \in \mathbb{A}(\Omega)$:

$$D(\varphi * \psi) = \sum_i (D_i \varphi) * (D_i' \psi) \ . \tag{6}$$

On dit que les $D \in \mathbb{D}(\Omega)$ définissent des opérateurs autogènes sur $\mathbb{A}(\Omega)$.

Exemple 1 : $\sigma(R) = R \otimes R$ (R définit donc un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$).

Exemple 2 : Soit $D = (1-R)S R^2 S$. On peut alors montrer que

$$\sigma(D) = \left\{ \begin{array}{l} - (1-R)S \otimes (1-R)S + 1 \otimes (1-R)SRS + (1-R)SRS \otimes 1 + R \otimes (1-R)SR^2S \\ + (1-R)SR^2S \otimes R - R \otimes (1-R)SRS - (1-R)SRS \otimes R - (1-R)SR \otimes (1-R)RS \\ - (1-R)RS \otimes (1-R)SR \end{array} \right.$$

Exemple 3 : Posons $D_o = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n\omega_o} = (1-R)S^n$, $D_{-n\omega_o} = (1-R)T^n$. Alors $\sigma(D_\omega) = \sum_{\omega_i + \omega_j = \omega} D_{\omega_i} \otimes D_{\omega_j}$ $(\omega, \omega_i, \omega_j \in \Omega \ ; \ \omega_i/\omega$ et $\omega_j/\omega \geqslant 0)$.

---

[1] Pour fixer sans ambiguité la correspondance : germes $\to$ fonctions, on convient que le voisinage du point Q_o relève le voisinage de 0 qui sert à définir la convolution $*$, et que le voisinage du point SQ_o soit contenu dans le relèvement du domaine $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ (domaine de détermination principale de $\log z$, $\sqrt{z}$ etc...)

<u>Exemple</u> 4 : Posons $\Delta_o = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega^*$ définissons Δ_ω au moyen des fonctions génératrices formelles suivantes :

$$(7) \qquad \sum_{n \geq 1} t^n \Delta_{n\omega_o} = \log\Big(\sum_{n \geq 0} t^n D_{n\omega_o}\Big) = \log\{(1-tRS)(1-tS)^{-1}\} \quad (^1)$$

$$(7\text{bis}) \qquad \sum_{n \geq 1} t^n \Delta_{-n\omega_o} = \log\Big(\sum_{n \geq 0} t^n D_{-n\omega_o}\Big) = \log\{(1-tRT)(1-tT)^{-1}\} \quad (^1)$$

On montre alors que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$(8) \quad \sigma(\Delta_\omega) = \Delta_\omega \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_\omega \quad \text{ou encore :} \quad (8\text{bis}) \quad \Delta_\omega(\varphi * \psi) \equiv (\Delta_\omega \varphi) * \psi + \varphi * (\Delta_\omega \psi).$$

Autrement dit, les Δ_ω, et par suite aussi les $\Delta_{\omega,n} = R^{-n}\Delta_\omega R^n$, définissent des <u>dérivations</u> de l'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$. Inversement, on montre que l'algèbre de Lie formée des $\Delta \in \mathbb{D}(\Omega)$ qui sont des dérivations de $\mathbb{A}(\Omega)$ est engendrée <u>librement</u> par les $\Delta_{\omega,n}$ $(\omega \in \Omega^*, n \in \mathbb{Z})$. Quant à la sous algèbre de $\mathbb{D}(\Omega)$ formée des dérivations d'ordre quelconque, on la note $\Delta(\Omega)$. Elle a pour base les $\Delta_{\tilde{\omega},\tilde{n}} = \Delta_{\omega_r,n_r} \cdots \Delta_{\omega_1,n_1}$ ($\tilde{\omega}$ et $\tilde{n}$ multiindices).

<u>Remarque</u> : Munis de leur multiplication et de la loi σ, les espaces $\mathbb{D}(\Omega)$ et $\Delta(\Omega)$ sont pourvus chacun d'une structure de bigèbre (au sens de Bourbaki, cf XXXVII, chap. II).

<u>Unitarisation de</u> $\mathbb{A}(\Omega)$. On est conduit à ajouter à $\mathbb{A}(\Omega)$ une <u>unité</u>, qu'on note δ et qu'il est naturel d'assimiler au Dirac de masse 1 concentrée au point-frontière Q_o. On ajoute également à $\mathbb{A}(\Omega)$ les φ qui admettent des pôles simples (^{2}) aux points frontières $Q \neq Q_o$. Autrement dit, pour $P \in \mathbb{R}$ voisin de $Q \in \{\Gamma Q_o\} - \{Q_o\}$ on a :

(^{1}) Compte tenu de la non-commutativité de R, S, T cela donne :

$\Delta_{\omega_o} = (1-R)S$; $\Delta_{2\omega_o} = (1-R)S(\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}T^{-1})$; $\Delta_{3\omega_o} = (1-R)S(\frac{1}{3}S^2 + \frac{1}{3}T^{-2} + \frac{1}{6}T^{-1}S + \frac{1}{6}ST^{-1})$

etc... $\Delta_{n\omega_o} = (1-R)S \sum \dfrac{(\Sigma p_i)!(\Sigma q_i)!}{(1+\Sigma p_i + \Sigma q_i)!} \prod_i S^{p_i} T^{-q_i}$ avec $\Sigma p_i + \Sigma q_i = n$ et $p_i, q_i \geq 1$ (sauf le premier p_i et le dernier q_i qui peuvent être nuls)

(^{2}) Plus proprement, ce sont les projections des φ sur $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$ qui admettent des pôles simples aux points $\dot{Q} = \omega \in \Omega$.

(9) $\varphi(P) = (\dot{P}-\dot{Q})^{-1}A_Q + \psi(P)$ $\qquad$ ($A_Q \in \mathbb{C}, \psi$ intégrable en Q)

où $\dot{P}$ (resp. $\dot{Q}$) désigne la projection de P (resp. Q) sur $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$ (resp. Ω).

<u>C'est l'algèbre ainsi élargie qu'on notera désormais</u> $\mathbb{A}(\Omega)$. Elle vérifie encore les propositions 1 et 2 à condition de poser :

(10) $(1-R)\Gamma\varphi = 2\pi i.A_Q.\delta + (1-R)\Gamma\psi$

pour tout φ de la forme (9) et tout $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$ vérifiant $\Gamma Q = Q_o$.

<u>Sous-algèbres</u> $A(p,\Omega)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les φ de $\mathbb{A}(\Omega)$ vérifiant

(11) $(1-R^p)\varphi = 0$ et $(1-R)(1-R^p)\Gamma\varphi = 0 \quad (\forall \Gamma \in \mathbb{\Gamma})$

forment une sous-algèbre de $\mathbb{A}(\Omega)$, notée $\mathbb{A}(p,\Omega)$ et dans laquelle agit la bigèbre d'opérateurs $\mathbb{D}(p,\Omega) = \mathbb{D}(\Omega)/(1-R^p)$ qui est égale (comme algèbre) au quotient de $\mathbb{D}(\Omega)$ par l'idéal bilatère engendré par $(1-R^p)$. On désigne de même par $\mathbb{\Delta}(p,\Omega) = \mathbb{\Delta}(\Omega)/(1-R^p)$ la bigèbre des dérivations d'ordre quelconque.

C'est l'algèbre $\mathbb{A}(1,\Omega)$ qui est la plus simple. En effet, au voisinage de tout point frontière $Q \neq Q_o$, les φ de $\mathbb{A}(1,\Omega)$ sont de la forme

(12) $\varphi(P) = \psi_1(\dot{P}-\dot{Q}) + (\dot{P}-\dot{Q})^{-1}.A_Q + \psi_2(\dot{P}-\dot{Q}).\log(\dot{P}-\dot{Q})$

où A_Q est scalaire et où les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont <u>holomorphes régulières</u> en 0 . De plus, si $\Gamma Q = Q_o$, on a :

(13) $((1-R)\Gamma\varphi)(P) = 2\pi i.A_Q.\delta + 2\pi i.\psi_2(\dot{P})$.

Enfin, $\mathbb{\Delta}(1,\Omega) = \mathbb{D}(1,\Omega)$, tandis que, pour $p \geqslant 2$, l'inclusion $\mathbb{\Delta}(p,\Omega) \subset \mathbb{D}(p,\Omega)$ est stricte.

<u>Algèbres</u> $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$. Introduisons, pour tout $u \in \mathbb{C}$, les fonctions multiformes ξ_u et τ_u :

$$\begin{cases} \text{Si } u \text{ non entier : } & \xi_u(z) = \dfrac{z^{u-1}}{\Gamma(u)(e^{2\pi i u}-1)} \quad ; \quad \tau_u(z) = \dfrac{z^{u-1}}{\Gamma(u)} \\ \text{Si } u \text{ entier } \geqslant 1 : & \xi_u(z) = \dfrac{z^{u-1}}{(u-1)!} \dfrac{\log z}{2\pi i} \quad ; \quad \tau_u(z) = \dfrac{z^{u-1}}{(u-1)!} \\ \text{Si } u \text{ entier } \leqslant 0 : & \xi_u(z) = \dfrac{(-1)^u(-u)!\, z^{u-1}}{2\pi i} \quad ; \quad \tau_u(z) = \delta^{(-u)} \end{cases}$$

où Γ désigne la fonction gamma classique et $\delta^{(-u)}$ la dérivée (d'ordre entier positif $-u$) au sens des distributions du dirac δ en 0.

Pour l'analyse harmonique (cf III) nous aurons à considérer les espaces $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$ de fonctions φ, holomorphes sur $\mathcal{R}$ et qui au voisinage de chaque point-frontière $Q \neq Q_o$ (resp. $= Q_o$) sont de la forme :

$$(14) \quad \varphi(P) = \sum_u \gamma_u(Q)\, \xi_u(\dot{P}-\dot{Q}) \qquad (\text{resp.} = \sum_u \gamma_u(Q_o)\, \tau_u(\dot{P}))$$

où les $\gamma_u(Q)$ sont des scalaires et où u parcourt l'ensemble $\{-\rho\dot{Q} + \frac{1}{p}\mathbb{N}\}$. L'espace $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$ est fermé pour la loi $*$, qui en fait une algèbre. Posons $\tau_u * \tau_v = \tau_{u+v}$ même lorsque $\operatorname{Re} u$ ou $\operatorname{Re} v < 0$ et, pour tout $D = (1-R)\Gamma$ (avec $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$ et $\dot{\Gamma} = \omega$) posons $D^{(\rho)} = \tau_{\omega\rho} * D$. Par linéarité, on définit $D^{(\rho)}$ pour tout $D \in \mathbb{D}(p,\Omega)$. Les $D^{(\rho)}$ opèrent dans l'algèbre $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$ et si $D(\varphi*\psi) = \sum_i (D_i\varphi)*(D_i'\psi)$ identiquement en $\varphi,\psi \in \mathbb{A}(p,\Omega)$, on aura $D^{(\rho)}(\varphi*\psi) = \sum_i (D_i^{(\rho)}\varphi) * (D_i'^{(\rho)}\psi)$ identiquement en $\varphi,\psi \in \mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$. Bien sûr, $\mathbb{A}(p,\Omega,0) = \mathbb{A}(p,\Omega)$. Lorsque $\rho \neq 0$, on désigne par $\mathbb{D}(p,\Omega,\rho)$ et $\mathbb{\Delta}(p,\Omega,\rho)$ les homologues des bigèbres $\mathbb{D}(p,\Omega)$ et $\mathbb{\Delta}(p,\Omega)$.

II.2 - Fonctions résurgentes et pseudo-variables.

En général, si $\mathfrak{a}$ désigne une algèbre de fonctions de n variables, le $\mathfrak{a}$-module à gauche des dérivations de $\mathfrak{a}$ est de dimension $\leqslant n$. Par exemple, si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$, toute dérivation de $\mathcal{G}$ est de la forme $\Sigma\, \varphi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varphi_i \in \mathcal{G}$. Il en va autrement pour l'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$: ses éléments (c'est-à-dire les fonctions résurgentes) sont des fonctions holomorphes d'une seule variable et pourtant le $\mathbb{A}(\Omega)$-module à gauche des dérivations de $\mathbb{A}(\Omega)$ est de dimension infinie. Ceci suggère l'existence, chez les fonctions résurgentes, d'une infinité de "pseudo-variables". En fait, on va voir que cette intuition peut être précisée : on peut construire une <u>algèbre de pseudo-variables</u> obéissant à des lois (de multiplication, de dérivation etc...) bien définies et il est même possible de "développer" les fonctions résurgentes en séries de pseudo-variables (à la manière des développements de Taylor).

<u>Algèbre</u> $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$ <u>de pseudo-variables</u>. Soit $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$ le dual algébrique de $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ considéré comme espace vectoriel. $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ possède une structure de coalgèbre :

$$\mathbb{\Delta}(\Omega) \to \mathbb{\Delta}(\Omega) \otimes \mathbb{\Delta}(\Omega) \ : \ D \to \sigma(D)$$

qui se transpose dans $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$ en une structure <u>d'algèbre commutative</u>. $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$ est dite algèbre des pseudo-variables de $\mathbb{A}(\Omega)$.

En outre, on définit une <u>action</u> de <u>l'algèbre</u> $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ dans l'algèbre $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$

$$D \ : \ Z \in \mathbb{\Delta}'(\Omega) \to DZ \in \mathbb{\Delta}'(\Omega)$$

par transposition de <u>l'antiaction à gauche</u> de <u>l'algèbre</u> $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ dans elle-même :

$$D \ : \ D_1 \in \mathbb{\Delta}(\Omega) \to D_1 D \in \mathbb{\Delta}(\Omega) \ .$$

Cette action de $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ dans $\mathbb{\Delta}'(\Omega)$ possède les mêmes propriétés d'autogénéité que l'action dans $\mathbb{A}(\Omega)$. Par exemple, si $Z^J, Z^K \in \mathbb{D}'(\Omega)$ et si $\sigma(D) = \Sigma\, D_i \otimes D_i'$, on aura

$D(Z^J.Z^K) = \sum_i (D_i Z^J).(D_i' Z^K).$

Forme développée et forme restreinte. Soit v l'unique homomorphisme de l'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$. A tout $\varphi \in \mathbb{A}(\Omega)$ v associe le scalaire $v(\varphi)$ égal à la masse du dirac que φ comporte en Q_o (cf. II-1). Soit d'autre part $\{D_J\}$ une base de l'espace vectoriel $\Delta(\Omega)$ et $\{Z^J\}$ la famille duale de $\Delta'(\Omega)$. Alors les applications :

$$A(\Omega) \to \Delta'(\Omega) \otimes A(\Omega) \quad : \quad \varphi \to [\varphi] = \sum Z^J.D_J\varphi$$

$$A(\Omega) \to \Delta'(\Omega) \quad : \quad \varphi \to \langle\varphi\rangle = \sum Z^J.v(D_J\varphi)$$

ne dépendent pas du choix de la base $\{D_J\}$. Ce sont des homomorphismes d'algèbres, appelés respectivement forme déployée et forme restreinte. Elles commutent chacune avec l'action de $\Delta(\Omega)$ (à condition de définir l'action de $\Delta(\Omega)$ dans $\Delta'(\Omega) \otimes A(\Omega)$ comme restreinte à la première composante de ce produit tensoriel).

$[\varphi]$ et $\langle\varphi\rangle$ équivalent formellement à des développements en série de Taylor. Dans $\langle\varphi\rangle$, les coefficients des pseudo-variables Z^J sont des combinaisons linéaires de résidus de φ aux points-frontière de $\mathbb{R}$. Quant à la permutabilité de $[\ ]$ et $\langle\ \rangle$ avec l'action de $\Delta(\Omega)$, elle permet de ramener les dérivations sur $\mathbb{A}(\Omega)$ à des dérivations sur les pseudo-variables. Enfin, on démontre que $\langle\ \rangle$ est surjective. Ceci revient à montrer que pour toute famille $\{A_Q; Q \in \partial\mathbb{R}\}$, il existe φ dans $A(\Omega)$ ayant A_Q pour résidu au point-frontière Q.

Bien entendu, les constructions précédentes s'appliquent aussi aux algèbres $\mathbb{A}(p,\Omega)$ et $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho)$ et fournissent notamment des algèbres de pseudovariables $\Delta'(p,\Omega)$ et $\Delta'(p,\Omega,\rho)$, dont les éléments seront notés Z^J et $Z^J_{(\rho)}$ respectivement.

II.3 - Représentations des algèbres de pseudo-variables dans les algèbres de résurgence. Applications.

Commençons par le cas $p=1$, $\rho=0$.

Posons $\Delta_{\phi}=1$ et, pour tout multiindice $\tilde{\omega} = \{\omega_1,\dots,\omega_r\}$ ($\omega_i \in \Omega^*$; r quelconque), posons $|\tilde{\omega}| = \omega_1 +\dots+ \omega_r$ et $\Delta_{\tilde{\omega}} = \Delta_{\omega_r} \Delta_{\omega_{r-1}} \dots \Delta_{\omega_1}$. Alors la famille $\{\Delta_{\tilde{\omega}}\}$ constitue une base de l'espace vectoriel $\Delta(1,\Omega)$. Soit $\{Z^{\tilde{\omega}}\}$ la famille duale de $\Delta'(1,\Omega)$. Ce n'est pas une base algébrique de $\Delta'(1,\Omega)$, mais tout élément de cet espace s'exprime comme série $\Sigma\, \gamma_{\tilde{\omega}} Z^{\tilde{\omega}}$ ($\gamma_{\tilde{\omega}} \in \mathbb{C}$). La "table de multiplication" des pseudo-variables $Z^{\tilde{\omega}}$ est donnée par :
$Z^{\omega_1}.Z^{\omega_2} = Z^{\omega_1,\omega_2} + Z^{\omega_2,\omega_1}$; $Z^{\omega_1}.Z^{\omega_2,\omega_3} = Z^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} + Z^{\omega_2,\omega_1,\omega_3} + Z^{\omega_2,\omega_3,\omega_1}$.
Etc... D'une façon générale :

$$Z^{\tilde{\omega}^1}.Z^{\tilde{\omega}^2} = \Sigma\, Z^{\tilde{\omega}} \tag{15}$$

où le Σ est étendu à tous les $\frac{(r_1+r_2)!}{r_1!r_2!}$ multiindices $\tilde{\omega}$ obtenus en imbriquant, sans modifier leur ordre interne, les r_1 composantes du multiindice $\tilde{\omega}^1$ et les r_2 composantes du multiindice $\tilde{\omega}^2$.

Quant à l'action de $\Delta(1,\Omega)$ dans $\Delta'(1,\Omega)$, elle est donnée par : $\Delta_{\omega} Z^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r} = Z^{\omega_2,\dots,\omega_r}$ (resp. $=0$) si $\omega=\omega_1$ (resp. $\omega\neq\omega_1$). Pour tout $\tilde{\omega} = \{\omega_1,\dots,\omega_r\}$, associons maintenant à la pseudo-variable $Z^{\tilde{\omega}}$ la fonction résurgente $U^{\tilde{\omega}} \in \mathbb{A}(1,\Omega)$ définie au voisinage de Q_o par :

$$U^{\tilde{\omega}}(P) = \frac{1}{(2\pi i)^r}\ \frac{1}{(\omega_1+\dots\omega_r+\dot{P})} \int_0^{\dot{P}} \frac{dz_{r-1}}{\omega_1+\dots\omega_{r-1}+z_{r-1}} \int_0^{z_{r-1}} \frac{dz_{r-2}}{\omega_1+\dots\omega_{r-2}+z_{r-2}} \cdots \int_0^{z_2} \frac{dz_1}{\omega_1+z_1} \tag{16}$$

où $\dot{P}$ désigne comme d'habitude la projection de P sur $\mathbb{C}\dot{-}\Omega$.

Proposition 3. On a (17) $U^{\widetilde{\omega}^1} * U^{\widetilde{\omega}^2} = \Sigma\, U^{\widetilde{\omega}}$, le Σ étant étendu aux mêmes $\widetilde{\omega}$ qu'en (15). Désignons par $\mathbb{P}\Delta'(1,\Omega)$ la sous-algèbre de $\Delta'(1,\Omega)$ formée des combinaisons linéaires finies des $Z^{\widetilde{\omega}}$, et par $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ la sous-algèbre de $\mathbb{A}(1,\Omega)$ formée des polynômes de résurgence, c'est-à-dire des φ tels que $\Delta_{\widetilde{\omega}}\varphi \equiv 0$ sauf pour un nombre fini de $\widetilde{\omega}$. La proposition 3 exprime que l'application $u : Z^{\widetilde{\omega}} \to U^{\widetilde{\omega}}$ induit par linéarité une représentation de l'algèbre $\mathbb{P}\Delta'(1,\Omega)$ dans l'algèbre $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$. La représentation u ne permute malheureusement pas avec l'action de $\Delta(1,\Omega)$ dans ces deux algèbres, mais on va voir qu'elle permet de construire une représentation v qui, elle, permute avec l'action de $\Delta(1,\Omega)$. Pour tout multiindice $\widetilde{\omega} = \{\omega_1,\dots,\omega_2\}$ $(\omega_i \in \Omega^*)$ posons :

$$(18) \quad U_{\widetilde{\omega}} = \sum_{Q} \varepsilon(Q)(1 * U^{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}})(Q) = \sum_{Q} \varepsilon(Q) \int_{Q_o}^{Q} U^{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}(P)\,dP$$

où dP est la forme différentielle sur $\mathcal{R}$ qui relève la forme dz sur $\mathbb{C}\smallsetminus\Omega$; où les Σ sont étendus aux points-frontières de $\mathcal{R}$ de la forme $Q = (\prod_i T^{q_i} S^{-p_i}) S^{-1} Q_o$ (avec $1 + \Sigma p_i + \Sigma q_i = n = |\widetilde{\omega}|/\omega_o$ et $\mathrm{sgn}(p_i) = \mathrm{sgn}(q_i) = \mathrm{sgn}(n)$) ; où le coefficient $\varepsilon(Q)$ vaut $\frac{1}{n}(\Sigma p_i)!\,(\Sigma q_i)!$

A partir des fonctions résurgentes $U^{\widetilde{\omega}}$ et des scalaires $U_{\widetilde{\omega}}$, définissons de nouvelles fonctions résurgentes $V^{\widetilde{\omega}}$ par récurrence sur la longueur r du multiindice $\widetilde{\omega}$:

$$U^{\omega_1} = V^{\omega_1}$$

$$U^{\omega_1,\omega_2} = V^{\omega_1,\omega_2} + U_{\omega_1,\omega_2} V^{\omega_1+\omega_2}$$

$$U^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} = V^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} + U_{\omega_1,\omega_2} V^{\omega_1+\omega_2,\omega_3} + U_{\omega_2,\omega_3} V^{\omega_1,\omega_2+\omega_3} + U_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} V^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} .$$

Soit d'une façon générale :

$$U^{\tilde{\omega}} = \Sigma\ U_{\tilde{\omega}^1} \dots U_{\tilde{\omega}^s}\ V^{|\tilde{\omega}^1|, \dots, |\tilde{\omega}^s|} \quad \text{où} \quad \tilde{\omega}^1 \dots \tilde{\omega}^s = \tilde{\omega}\ .$$

<u>Proposition</u> 4. <u>On a</u> :

(19) $V^{\tilde{\omega}^1} * V^{\tilde{\omega}^2} = \Sigma\ V^{\tilde{\omega}}$, le Σ étant étendu aux mêmes $\tilde{\omega}$ qu'en (15)

(20) $\Delta_\omega V^{\omega_1, \dots, \omega_r} = V^{\omega_2, \dots, \omega_r}$ si $\omega = \omega_1$ (resp. $= 0$ si $\omega \neq \omega_1$) .

L'application $v : Z^{\tilde{\omega}} \to V^{\tilde{\omega}}$ induit donc par linéarité une <u>représentation</u> de l'algèbre $\mathbb{P}\mathbb{\Delta}'(1,\Omega)$ dans l'algèbre $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ et v <u>commute avec l'action de</u> $\mathbb{\Delta}(1,\Omega)$; autrement dit :

$v(\Delta Z) = \Delta v(Z)$ pour tout $\Delta \in \mathbb{\Delta}(1,\Omega)$ et tout $Z \in \mathbb{P}\mathbb{\Delta}'(1,\Omega)$

<u>Cas</u> $p \geqslant 1$, $\rho = 0$.

Pour tous multiindices $\tilde{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ et $\tilde{n} = \{n_1, \dots, n_r\}$ ($\omega_i \in \Omega^*$; $n_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) posons

$$\Delta_{\tilde{\omega},\tilde{n}} = \Delta_{\omega_r, n_r} \dots \Delta_{\omega_1, n_1} = (R^{-n_r} \Delta_{\omega_r} R^{n_r}) \dots (R^{-n_1} \Delta_{\omega_1} R^{n_1})$$

$\{\Delta_{\tilde{\omega},\tilde{n}}\}$ est une base de $\mathbb{\Delta}(p,\Omega)$ et soit $\{Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}}\}$ la famille duale de pseudo-variables de $\mathbb{\Delta}'(p,\Omega)$.

Pour tout $\omega \in \Omega^*$, désignons par $H_p^{-\omega}$ l'élément de $\mathbb{A}(p,\Omega)$ qui relève (cf. note au bas de la page 4) la fonction $\dfrac{1}{p}\ \dfrac{(1-(z/\omega))}{(1-(z/\omega)^{1/p})}$. Soit $H^{\omega}_{p,n}$ l'opérateur $\mathbb{A}(p,\Omega) \to \mathbb{A}(p,\Omega)$ défini par $H^{\omega}_{p,n}\varphi = (R^{-n}H^{\omega}_{p}) * \varphi$ et soit L^{ω} l'opérateur défini par $(L^{\omega}\varphi)(P) = \dfrac{1}{2\pi i}\ \dfrac{1}{(\dot{P}+\omega)}\ \varphi(P)$ si φ n'a pas de pôle au-dessus de $-\omega$. δ désignant toujours l'unité de l'algèbre $\mathbb{A}(p,\Omega)$, posons :

(16bis) $$U^{\tilde{\omega},\tilde{n}} = L^{\omega_1 + \dots \omega_r} H^{\omega_r}_{p,n_r} \dots L^{\omega_1+\omega_2} H^{\omega_2}_{p,n_2} L^{\omega_1} H^{\omega_1}_{p,n_1} \delta\ .$$

Lorsque $p = 1$, cette définition coïncide avec la définition (16) et lorsque $p > 1$, on a $\sum_{\tilde{n}} U^{\tilde{\omega},\tilde{n}} = U^{\tilde{\omega}}$, où $\tilde{n}$ parcourt $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. Enfin, l'application $u : Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}} \to U^{\tilde{\omega},\tilde{n}}$ induit une représentation (non parfaite) de l'algèbre $\mathbb{P}\mathbb{\Delta}'(p,\Omega)$ dans l'algèbre $\mathbb{P}\mathbb{A}(p,\Omega)$ et, à partir de u , on obtient une représentation parfaite v en procédant comme dans le cas $p=1$.

<u>Cas général</u> : p <u>et</u> ρ <u>quelconques</u>.

On procède comme ci-avant, mais en changeant les $U^{\tilde{\omega},\tilde{n}}$ en $\tau_{-|\tilde{\omega}|\rho} * U^{\tilde{\omega},\tilde{n}}$.

<u>Cas</u> $p=\infty$, $\rho=0$ (cas de l'algèbre $\mathbb{A}(\Omega)$).

On procède comme dans le cas $p<\infty$, $\rho=0$, mais en remplaçant la fonction auxiliaire $H_p^{-\omega}$ relèvement de $\frac{1}{p}\,\frac{1-(z/\omega)}{1-(z/\omega)^{1/p}}$ par la fonction $H_\infty^{-\omega}$ relèvement de $\frac{1-(z/\omega)^2}{(z/\omega)\log^2(z/\omega)}$.

<u>Remarque</u> : On notera que $\sum\limits_{n=1}^{p} (R^n H_p^{\omega})(P) \equiv 1$ et que $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (R^n H_\infty^{\omega})(P) \equiv 1$ mais que $\lim\limits_{p\to\infty} H_p^{\omega} \neq H_\infty^{\omega}$.

II.4 - "<u>Calcul différentiel</u>" <u>sur les fonctions résurgentes</u>.

Indiquons, sur quelques exemples et en vue des applications à l'analyse harmonique (cf partie III) l'usage qu'on peut faire des notions précédentes. Traitons pour simplifier le cas $p=1$, $\rho=0$.

<u>Exemple</u> 1 : Soit à résoudre, dans l'algèbre $\mathbb{PA}(1,\Omega)$, le système suivant d'équations aux "dérivées partielles" :

(21) $\Delta_\omega \varphi = \psi_\omega$, où ω parcourt une partie finie Ω' de Ω .

La solution générale de (21) est donnée par la somme (finie en fait) :

$$(22)\quad \varphi = \psi + \sum_{\omega_i} V^{\omega_i} * \psi_{\omega_i} - \sum_{\omega_i,\omega_j} V^{\omega_i,\omega_j} * (\Delta_{\omega_i}\psi_{\omega_j}) + \sum_{\omega_i,\omega_j,\omega_k} V^{\omega_i,\omega_j,\omega_k} * (\Delta_{\omega_i}\Delta_{\omega_j}\psi_{\omega_k}) - \dots$$

où les $\omega_i,\omega_j,\omega_k\dots$ parcourent Ω' et où φ est telle que $\Delta_\omega \psi = 0$ pour tout $\omega\in\Omega'$. On peut en particulier prendre pour ψ une fonction de <u>type constant</u>, c'est-à-dire le relèvement sur $\mathcal{R}$ d'une fonction entière sur $\mathbb{C}$, car alors $\Delta_\omega \psi = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exemple 2 : On montre que tout polynôme de résurgence φ s'exprime d'une manière unique sous forme d'une somme (finie en fait) :

(23) $\varphi = \Sigma\, V^{\tilde{\omega}} * \varphi_{\tilde{\omega}}$

où les $\varphi_{\tilde{\omega}}$ sont des fonctions de type constant (voir exemple 1 ci-dessus) et où $\tilde{\omega}$ parcourt l'ensemble de tous les multiindices (y compris le multiindice vide $\emptyset$ pour lequel $V^{\emptyset} = \delta$).

Problème : exprimer les $\varphi_{\tilde{\omega}}$ en fonction de φ .

Solution : $\varphi_{\tilde{\omega}} = E_V(\Delta_\omega \varphi)$, où E_V est l'endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{PA}(1,\Omega)$ définie par :

(24) $E_V(\varphi) = \varphi + \Sigma(-1)^r V^{\omega_1,\ldots,\omega_r} * (\Delta_{\omega_r,\ldots,\omega_1} . \varphi) = \Sigma\, v(Z^J) * (\bar{D}_J \varphi)$.

Ici, $\{D_J\}$ désigne une base quelconque de l'espace $\mathbb{\Delta}(1,\Omega)$, $\{Z^J\}$ la famille duale de $\mathbb{\Delta}'(1,\Omega)$ et $D \to \bar{D}$ l'involution principale de la bigèbre $\mathbb{\Delta}(1,\Omega)$ (1).

On montre que E_V est en fait un homomorphisme de l'algèbre $\mathbb{PA}(1,\Omega)$ dans la sous-algèbre des fonctions de type constant : $\Delta_\omega . E_V = 0$, $\forall \omega$.

Exemple 3 : Construction de toutes les représentations parfaites de $\mathbb{P\Delta}'(1,\Omega)$ dans $\mathbb{PA}(1,\Omega)$. Soient a et b deux représentations quelconques de $\mathbb{P\Delta}'(1,\Omega)$ dans $\mathbb{PA}(1,\Omega)$. On vérifie immédiatement que l'application c définie par

$c(Z^{\omega_1}) = a(Z^{\omega_1}) + b(Z^{\omega_1})$

$c(Z^{\omega_1,\omega_2}) = a(Z^{\omega_1,\omega_2}) + a(Z^{\omega_1}) * b(Z^{\omega_2}) + b(Z^{\omega_1,\omega_2})$

---

(1) Pour cette involution : $\Delta_\omega \to -\Delta_\omega$, $\Delta_{\omega_1,\ldots,\omega_r} \to (-1)^r \Delta_{\omega_r,\ldots,\omega_1}$. L'involution se prolonge d'ailleurs à $\mathbb{D}(1,\Omega)$ et même à $\mathbb{D}(\Omega)$ tout entier : $(1-R)S^{m_1}R^{n_1}S^{m_2}R^{n_2}\ldots S^{m_x}R^{n_x} \to (1-R)R^{-n_x}T^{-m_x}\ldots R^{-n_2}T^{-m_2}R^{-n_1}T^{-n_1}$

$$c(Z^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) = a(Z^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) + a(Z^{\omega_1,\omega_2})*b(Z^{\omega_3}) + a(Z^{\omega_1})*b(Z^{\omega_2,\omega_3})$$
$$+ b(Z^{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$$

et d'une façon générale par :

$$(25) \quad c(Z^{\tilde{\omega}}) = \Sigma\ a(Z^{\tilde{\omega}^1})*b(Z^{\tilde{\omega}^2}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}$$

induit par linéarité une nouvelle représentation, notée $a\nabla b$, et que la loi ∇ munit l'ensemble des représentations de $\mathbb{P}\Delta'(1,\Omega)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ d'une structure de groupe non-commutatif. Les représentations parfaites n'en forment pas un sous-groupe, mais on note que la "différence" $a = w_1^{-1}\nabla w_2$ de deux représentations <u>parfaites</u> w_1 et w_2 est une représentation <u>coparfaite</u>, c'est-à-dire que pour tout $Z \in \mathbb{P}\Delta'(1,\Omega)$, $a(Z)$ est une fonction de type constant (cf définition à l'exemple 1).

Toutes les représentations parfaites w de $\mathbb{P}\Delta'(1,\Omega)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ s'obtiennent donc comme produit $w = v\nabla a$ de la représentation parfaite v construite en II-3 par une représentation coparfaite a quelconque. Or les représentations coparfaites sont très faciles à construire : il suffit de relever sur $\mathbb{R}$ une famille quelconque $\varphi_{\tilde{\omega}}$ de fonctions entières sur $\mathbb{C}$ vérifiant, par rapport à la convolution $*$, la table de multiplication (15).

<u>Exemple</u> 4 : <u>Construction du groupe des</u> "<u>translations</u>" <u>de</u> $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$. Dans les applications (cf III-4) on a besoin de connaître les "translations" de $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$, c'est-à-dire les isomorphismes T de $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ qui commutent avec les opérateurs "différentiels" $D \in \mathbb{A}(1,\Omega)$. Or, on vient de signaler (cf exemple 2) que tout $\varphi \in \mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ s'écrivait d'une manière unique comme somme finie :

$$(26) \quad \varphi = \sum_{\tilde{\omega}} V^{\tilde{\omega}}*\varphi_{\tilde{\omega}} = \sum_{\tilde{\omega}} v(Z^{\tilde{\omega}})*\varphi_{\tilde{\omega}} \quad \text{(avec } \varphi_{\tilde{\omega}} \text{ de type constant)} .$$

Pour toute <u>représentation coparfaite</u> a de $\mathbb{P}\mathbb{A}'(1,\Omega)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$, soit T_a l'endomorphisme de $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$ défini par :

(27) $T_a\varphi = \sum_{\tilde{\omega}} (v\nabla a)(Z^{\tilde{\omega}})*\varphi_{\tilde{\omega}}$ (avec les mêmes $\varphi_{\tilde{\omega}}$ qu'en (26)) .

On montre alors que T_a est bien une "translation" et que l'application $a \to T_a$ est un isomorphisme du groupe des représentations coparfaites dans le groupe des "translations" de $\mathbb{P}\mathbb{A}(1,\Omega)$. Autrement dit, pour toutes a,b coparfaites et tout $D \in \mathbb{A}(1,\Omega)$, on a :

(28) $T_a T_b = T_{a\nabla b}$ et $DT_a = T_a D$.

III - ANALYSE ET SYNTHESE HARMONIQUES DANS LES GROUPES $\mathbb{G}_t$ ET $\mathbb{G}_{t^-}$.

III.1 - <u>Position du problème</u>.

Soit $\mathbb{G}$ l'ensemble des séries formelles du type

(29) $f(z) = z(1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^{-n})$; $a_n \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{G}$ est un groupe pour la substitution des séries formelles : $f,g \to f\circ g = f(g)$. Considérons les sous-ensembles :

$\mathbb{G}_t$: $\limsup(|a_n|^{1/n} n^{-t}) < \infty$; $\mathbb{G}_{t^-}$: $\lim(|a_n|^{1/n} n^{-t}) = 0$

$\mathbb{G}_t$ (resp. $\mathbb{G}_{t^-}$) est un sous-groupe de $\mathbb{G}$ si et seulement si $t \geq 0$ (resp. $t > 0$). L'examen révèle que les groupes $\mathcal{G}$ ci-dessus sont de deux types, fort différents :

<u>Cas trivial</u> : $\mathbb{G}_1 \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}$.

On montre [1] que les classes de conjugaisons (pour les automorphismes internes) dans le groupe $\mathbb{G}$ et dans chacun des sous-groupes $\mathbb{G}_t$ (resp. $\mathbb{G}_{t^-}$) pour $t \geq 1$ (resp. $t > 1$) peuvent être caractérisées au moyen de trois paramètres, à savoir :

* l'entier $p = p(f)$, égal à l'indice du premier a_n non nul dans (29)
* le complexe $\alpha = \alpha(f)$, égal à l'inverse de a_p
* le complexe $\rho = \rho(f)$, égal à $\left\{\frac{1-p}{2} + \text{le coefficient de } z^{-1} \text{ dans } (f(z)-z)^{-1}\right\}$ [1]

On a donc, pour chacun de ces groupes $\mathcal{G}$, une partition immédiate en classes de conjugaisons $\mathcal{G}^{(p,\alpha,\rho)}$.

Cas intéressant : $\mathbb{G}_o \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}_{1-}$.

Au contraire, lorsque $t < 1$ (resp. $t \leqslant 1$) on montre [1] que chacun des ensembles $\mathbb{G}_t^{(p,\alpha,\rho)}$ (resp. $\mathbb{G}_{t-}^{(p,\alpha,\rho)}$) se scinde en une infinité de classes de conjugaisons qu'il est impossible de paramétrer au moyen de scalaires tels que p,α,ρ, fonctions chacun d'un nombre fini de coefficients a_n de f. D'où l'existence, sur chacun de ces groupes $\mathcal{G}$, de fonctions centrales [2] non triviales, qu'il s'agit de calculer.

Un système $\Theta = \{\Theta_i, i \in I\}$ de fonctions centrales sur $\mathcal{G}$ sera dit complet si : $\Theta_i(f) = \Theta_i(g)$ pour tout $i \Longrightarrow f$ et g conjugués dans $\mathcal{G}$.

De même, le système Θ sera dit libre si, pour tout i, il existe $f,g \in \mathcal{G}$ tels que $\Theta_i(f) \neq \Theta_i(g)$ et $\Theta_j(f) = \Theta_j(g)$ pour tout $j \neq i$.

Méthode : On peut bien doter ces groupes $\mathcal{G}$ d'une topologie naturelle, mais comme celle-ci n'est pas localement compacte et que les groupes $\mathcal{G}$ ne sont pas de Lie (cf Introduction), aucune des méthodes classiques (représentations unitaires, caractères, etc...) ne s'applique ici.

Ce qu'il faut, en fait, c'est recourir aux fonctions résurgentes. Le plus simple consiste à étudier séparément les fonctions

---

(1) $\rho(f)$ est un polynôme en $a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p}$.

(2) i.e. invariantes par rapport aux automorphismes internes : Θ centrale sur $\mathcal{G} \Longleftrightarrow \Theta(h^{-1} \circ f \circ h) = \Theta(f)$ pour tous $f,h \in \mathcal{G}$.

centrales sur chacun des ensembles $\mathcal{G}^{(p,\alpha,\rho)}$. C'est ainsi que nous procéderons, en nous limitant d'abord au groupe $\mathcal{G} = \mathbb{G}_{1-}$ (le plus grand) puis en indiquant brièvement comment étendre ces résultats aux $\mathcal{G}$ généraux, et notamment au groupe $\mathbb{G}_o$ (le plus petit), dont les éléments sont des séries convergentes.

III.2 - <u>Résurgence et autorésurgence</u>.

<u>Cas</u> $p = 1$, $\rho = 0$.

Soit f l'élément générique de $\mathbb{G}_{1-}^{(1,\alpha,0)}$

$$(30)\quad f(z) = z(1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n z^{-n}) \ ; \ \alpha(f) = a_1^{-1} \neq 0,\infty \ ; \ \rho(f) = -a_2\, a_1^{-2} = 0 \ .$$

Soit f^* l'unique série de la forme

$$(31)\quad f^*(z) = z + \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n z^{-n}$$

et solution de l'équation d'Abel :

$$(32)\quad f^* o f(z) = a_1 + f^*(z) \ .$$

Enfin, introduisons l'original formel de Laplace de la série $f(z)-z$:

$$(33)\quad \Phi(z) = \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \ .$$

<u>Proposition</u> 5. (a) <u>La série</u> f^* <u>est en général divergente, mais la série</u> Φ <u>qu'on en déduit a un rayon de convergence non nul. Elle définit au voisinage de</u> 0 <u>un germe analytique qui se prolonge selon tout chemin de</u> $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$, <u>où</u> $\Omega = 2\pi i \alpha \mathbb{Z}$. <u>Par suite, la série</u> Φ <u>détermine une fonction holomorphe (encore notée</u> Φ) <u>sur la surface de Riemann</u> $\mathcal{R}$, <u>recouvrement universel de</u> $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$.

(b) <u>Cette fonction</u> Φ <u>est en fait une fonction résurgente, élément de l'algèbre</u> $\mathbb{A}(1,\Omega)$.

(c) <u>En outre,</u> Φ <u>vérifie les équations d'autorésurgences suivantes</u> :

(34) $\Delta_\omega . \Phi = A_\omega . \exp_*(\omega\Phi) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$

<u>où les</u> Δ_ω <u>sont les dérivations de</u> $\mathbb{A}(1,\Omega)$ <u>introduites en</u> II.1 ; <u>où les</u> A_ω <u>sont des scalaires complexes fonctions de</u> f ; <u>et où</u> $\exp_*$ <u>désigne l'exponentielle de l'algèbre</u> $\mathbb{A}(1,\Omega)$:

$$\exp_*(\omega\Phi) = \delta + \omega\Phi + \frac{\omega^2}{2!}\, \Phi*\Phi + \frac{\omega^3}{3!}\, \Phi*\Phi*\Phi + \ldots$$

<u>Remarque</u> : Par itération de (34) on tire :

(35) $\Delta_{\tilde{\omega}}\Phi = \Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_1} \Phi = A_{\omega_1} \ldots A_{\omega_r} . \omega_1(\omega_1+\omega_2) \ldots (\omega_1 + \ldots \omega_{r-1})$
$\exp_*((\omega_1 + \ldots \omega_r)\Phi)$.

Mais puisque $\mathbb{A}(1,\Omega) = \mathbb{D}(1,\Omega)$, les $\Delta_{\tilde{\omega}}$ forment une base de l'espace $\mathbb{D}(1,\Omega)$ et tout opérateur autogène du type $D = (1-R)\Gamma$ (avec $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$) peut s'écrire :

(36) $D = \Sigma\, \gamma_{\tilde{\omega}} \Delta_{\tilde{\omega}}$

où la somme est finie et les scalaires $|\tilde{\omega}| = \omega_1 + \ldots \omega_2$ sont tous égaux. Par suite :

(37) $D\Phi = (1-R)\Gamma\Phi = B_\Gamma . \exp_*(\omega\Phi)$ avec $B_\Gamma \in \mathbb{C}$ et $\omega = \dot{\Gamma} \in \Omega$.

En rapprochant (37) de (12) et (13), on voit que le "facteur régulier" de la "partie singulière" de Φ au point $Q = \Gamma^{-1} Q_o$ est lié de manière simple à la fonction Φ elle-même. En d'autres termes, Φ "resurgit", légèrement modifiée, en ses "singularités" ([1]). D'où l'expression de fonction autorésurgente.

<u>Cas général</u> : (p,α,ρ) <u>quelconque dans</u> $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$.
Soit f l'élément générique de $\mathbb{G}_{1-}^{(p,\alpha,\rho)}$:

(38) $f(z) = z(1 + \sum_{n \geqslant p} a_n z^{-n})$; $\alpha(f) = a_p^{-1} \neq 0,\infty$; $\rho(f) = \frac{1-p}{2} + \frac{a_{2p}}{a_p^2} + (\ldots)$

([1]) $Q = \Gamma^{-1} Q_o$ est en fait un point frontière de $\mathcal{R}$. A strictement parler, il s'agit donc des singularités non pas de Φ , mais de la projection multiforme de Φ sur $\mathbb{C}$.

Par l'application d'un automorphisme interne $f \to h^{-1} o f o h$ bien choisi, on peut toujours se ramener au cas :

(38bis) $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots a_{2p-1} = 0$.

On se limitera donc aux f de la forme (38+38bis).

Soit un tel f et soit f^* l'unique série de la forme

$$(39) \qquad f^*(z) = z^p + p\, a_p\, \rho \log z + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^{-n}$$

et solution de l'équation d'Abel :

$$(40) \qquad f^* o f(z) = p\, a_p + f^*(z) \ .$$

Enfin, introduisons l'original formel de Laplace de la série $f^*(z^{1/p}) - z - a_p \rho \log z$:

$$(41) \qquad \Phi(z) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{z^{\frac{n}{p}-1}}{\Gamma(\frac{n}{p})} \qquad (\Gamma = \text{fonction gamma classique}).$$

<u>Proposition</u> 5bis. (a) <u>La série</u> f^* <u>est en général divergente</u>, <u>mais la série</u> Φ <u>qu'on en déduit converge pour</u> $z^{1/p}$ <u>petit</u>. <u>Elle définit au voisinage de</u> 0 <u>un germe analytique multiforme</u>, <u>qui se prolonge selon tout chemin de</u> $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$, <u>où</u> $\Omega = 2\pi i . \frac{\alpha}{p} . \mathbb{Z}$. <u>Par suite</u>, <u>la série</u> Φ <u>détermine</u> ([1]) <u>une fonction holomorphe</u> (<u>encore notée</u> Φ) <u>sur la surface de Riemann</u> $\mathcal{R}$, <u>recouvrement universel de</u> $\mathbb{C} \dot{-} \Omega$.

(b) <u>Cette fonction</u> Φ <u>est en fait une fonction résurgente</u>, <u>élément de l'algèbre</u> $\mathbb{A}(p, \Omega, \rho/p)$. <u>En particulier</u>, <u>quand</u> $\rho = 0$, Φ <u>appartient à</u> $\mathbb{A}(p, \Omega)$.

(c) <u>En outre</u>, Φ <u>vérifie les équations d'autorésurgence suivantes</u> :

$$(42) \qquad \Delta^{(\rho/p)}_{\omega, n} . \Phi = A_{\omega, n} . \exp_*(\omega \Phi) \qquad (\forall \omega \in \Omega \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

([1]) Pour la convention de relèvement, voir la note page 3.

<u>où les</u> $\Delta^{(\rho/p)}_{\omega,n} = (R^{-n}\Delta_{\omega}R^{n})^{(\rho/p)}$ <u>sont les dérivations de</u> $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho/p)$ <u>introduites en</u> II.1 ; <u>où les</u> $A_{\omega,n}$ <u>sont des scalaires complexes fonctions de</u> f ; <u>et où</u> $\exp_*$ <u>désigne l'exponentielle de l'algèbre</u> $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho/p)$.

Bien entendu, la remarque qui suit la proposition 5 a un équivalent ici, dans le cas général. Ainsi (35) devient :

$$(35\text{bis})\quad \Delta^{(\rho/p)}_{\omega,n} = A_{\omega_1,n_1}\ldots A_{\omega_r,n_r}.\omega_1(\omega_1+\omega_2)\ldots(\omega_1+\ldots\omega_{r-1})\,\exp_*((\omega_1+\ldots\omega_r)\Phi).$$

De même, du fait que $\Delta(p,\Omega,\rho/p) \subset \mathbb{D}(p,\Omega,\rho/p)$ strictement dès que $p > 1$, (37) devient :

$$(37\text{bis})\quad D^{(\rho/p)}\Phi = ((1-R)\Gamma)^{(\rho/p)}.\Phi = \Sigma\, B_{\Gamma,n}.\exp_*(\omega R^{n}\Phi) \quad \text{avec} \quad B_{\Gamma,n}\in\mathbb{C} \quad \text{et} \quad \omega=\dot{\Gamma}\in\Omega\,,$$

où la somme est étendue à un nombre fini d'entiers relatifs n , dépendant de Γ .

III.3 - <u>Analyse harmonique dans</u> $\mathbb{G}_{1-}$.

Soit f l'élément générique de $\mathbb{G}_{1-}$ (distinct de l'élément neutre) et soient p,α,ρ les trois fonctions centrales "triviales" associées à f . Posons $\Omega = 2\pi i.\frac{\alpha}{p}.\mathbb{Z}$ et désignons par $\mathcal{R}$ le recouvrement universel de $\mathbb{C}\dot{-}\Omega$. Les $\mathcal{R}$ relatifs aux différentes valeurs de α/p étant isomorphes deux à deux, on omet l'indice α/p . Enfin, soit Φ la fonction autorésurgente, élément de $A(\alpha,\Omega,\rho/p)$, associée à f .

<u>Proposition</u> 6. (a) <u>Pour tout point-frontière</u> Q <u>de</u> $\mathcal{R}$ <u>situé au-dessus de</u> 0 (i.e. $Q\in\partial\mathcal{R}$ <u>et</u> $\dot{Q}=0$) <u>on désigne par</u> θ_Q <u>l'application</u> :

$$\mathbb{G}_{1-} \to \mathbb{C} \ : \ f \to \vartheta_Q(f) = -4\pi^2.\frac{\alpha}{p}.\mathrm{Res}\{Q,\Phi\}$$

où $\mathrm{Res}\{Q,\Phi\}$ *désigne le résidu au point* Q *de la fonction* Φ . ([1])

Alors, chaque ϑ_Q *est une fonction centrale sur* $\mathbb{G}_{1-}$.

(b) *Désignons par* $\mathrm{Car}(\mathbb{G}_{1-})$ *l'ensemble des combinaisons linéaires finies des* ϑ_Q . *Alors* $\mathrm{Car}(\mathbb{G}_{1-})$ *est un anneau pour la multiplication ponctuelle. Plus précisément, pour tous* Q_1 , Q_2 *on a* :

$$(43) \quad \vartheta_{Q_1}(f)\ \vartheta_{Q_2}(f) \equiv \sum_Q H^Q_{Q_1,Q_2}\ \vartheta_Q(f) \qquad (Q_1,Q_2,Q \in \partial\mathcal{R} \ \text{ et } \ \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q} = 0)$$

où le Σ *est fini et où les scalaires* $H^Q_{Q_1,Q_2}$ *peuvent être choisis rationnels* (*voir la remarque* 1 *ci-dessous*).

(c) *Pour tout* $m \in \mathbb{Z}^*$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$, *posons* $\vartheta_{m,n}(f) = \omega.A_{\omega,n}$ *où* $\omega = 2\pi i.m.\frac{\alpha(f)}{p(f)}$ *et où* $A_{\omega,n}$ *est le scalaire intervenant dans* (42). *Alors, tout élément de* $\mathrm{Car}(\mathbb{G}_{1-})$ *est combinaison linéaire finie des fonctions* :

$$\vartheta_{\tilde{m},\tilde{n}}(f) = \vartheta_{m_1,n_1}(f)\ldots\vartheta_{m_r,n_r}(f) \quad \text{où} \quad |\tilde{m}| = m_1+\ldots m_r = 0 \ .$$

Remarque 1 : Pour Q_1 , Q_2 donnés, la décomposition (43) n'est pas unique, car il existe des combinaisons linéaires finies $\Sigma\, \gamma_Q\ \vartheta_Q(f)$ qui sont identiquement nulles en f .

Remarque 2 : Bien entendu, si $p(f) = p$, on a $\vartheta_{{}_R P_Q}(f) = \vartheta_Q(f)$ et $\vartheta_{m,n+p}(f) = \vartheta_{m,n}(f)$.

Remarque 3 : A la différence des $\vartheta_{\tilde{m},\tilde{n}}$ pour $|\tilde{m}| = 0$, les facteurs $\vartheta_{m,n}$ ne sont pas des fonctions centrales, mais seulement des *fonctions centrales généralisées*, en ce sens que l'on a :

$$\vartheta_{m,n}(h^{-1}ofoh)/\vartheta_{m,n}(f) \equiv (\mu(f,h))^m \qquad (f,h \in \mathbb{G}_{1-})$$

---

(1) ou, plus proprement, de sa projection sur $\mathbb{C}$.

où, contrairement à chacun des deux termes de gauche, le terme $\mu(f,h)$ n'est fonction que d'un nombre fini de coefficients a_i et b_i de f et h, à savoir les p premiers coefficients non nuls. Par exemple :

si $p(f)=1$, $\mu(f,h) = \exp 2\pi i\, a_1^{-1} b_1$,

si $p(f)=2$, $\mu(f,h) = \exp 2\pi i (a_2^{-1} b_2 + \frac{1}{2} a_2^{-1} b_1^2 - a_2^{-2} a_3 b_1)$, etc...

C'est également des fonctions centrales généralisées qu'on obtiendrait en étendant la définition des Θ_Q aux points frontières Q généraux, non situés au-dessus de 0 . Mais si $\Sigma\, \dot{Q}_i = 0$, alors le produit $\prod_i \Theta_{Q_i}$ appartient à $\mathrm{Car}(\mathbb{G}_{1-})$.

<u>Remarque</u> 4 : Pour $p=p(f)$ fixé, chaque $\Theta_Q(f)$ et chaque $\Theta_{m,n}(f)$ est une fonction analytique ([1]) entière de l'infinité de variables

$$\alpha^{1/p} = (a_p)^{-1/p} \quad , \quad a_{p+1}\, ,\, a_{p+2}\, ,\, a_{p+3}\, , \dots$$

et la croissance par rapport à a_{p+r} est majorable par $\exp(\mathrm{Cste}.|a_{p+r}|^{p/r})$.

<u>Proposition</u> 7. (a) <u>L'ensemble</u> $\{\alpha, p, \rho\}$, <u>joint à l'ensemble</u> $\{\Theta_Q \,;\, Q \in \partial\mathcal{R} \,,\, \dot{Q} = 0\}$, <u>constitue un système complet de fonctions centrales sur</u> $\mathbb{G}_{1-}$.

(b) <u>L'ensemble</u> $\{\alpha, p, \rho\}$, <u>joint à l'ensemble</u> $\{\Theta_{m,n} \,;\, m \in \mathbb{Z}^* \,,\, n \in \mathbb{Z}\}$ <u>constitue un système complet et libre</u> ([2]) <u>de fonctions centrales généralisées sur</u> $\mathbb{G}_{1-}$.

<u>Remarque</u> 5 : Les fonctions Θ_Q (resp. l'anneau $\mathrm{Car}(\mathbb{G}_{1-})$) équivalent en un certain sens aux <u>caractères</u> (resp. à l'<u>anneau des</u>

([1]) Pour toutes les définitions usuelles, et notamment par rapport à chaque sous-ensemble fini de variables.

([2]) Avec cette seule restriction que $\Theta_{m,n+p(f)}(f) \equiv \Theta_{m,n}(f)$.

<u>caractères</u>) définis sur les groupes de Lie de la théorie classique. En particulier, pour chaque fonction centrale Θ_Q , on peut construire une représentation $f \to T_Q(f)$ du groupe $\mathbb{G}_{1-}$ dans un hilbert, telle que le scalaire $\Theta_Q(f)$ (et aucun des scalaires $\Theta_{Q'}(f)$ si $Q' \neq Q$) s'interprète à partir de l'endomorphisme $T_Q(f)$ du hilbert en question. Mais $\Theta_Q(f)$ n'est certes pas la trace de $T_Q(f)$, en aucun sens du terme.

III.4 - <u>Synthèse harmonique dans</u> $\mathbb{G}_{1-}$.

On peut démontrer, par une construction effective mais non explicite, qu'à tout triplet $(\alpha,p,\rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ et à toute suite $\{\tau_{m,n} \,;\, m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ il correspond effectivement des f de $\mathbb{G}_{1-}$ tels que :

(44) $\alpha(f) = \boldsymbol{\alpha}$, $p(f) = p$, $\rho(f) = \rho$ et $\Theta_{m,n}(f) = \tau_{m,n}$ $(\forall m,n)$.

Ce paragraphe est consacré à la construction explicite des solutions de (44).

<u>Proposition</u> 8. <u>Posons comme d'habitude</u> $\Omega = 2\pi i.\frac{\alpha}{p}.\mathbb{Z}$. <u>Alors, si</u> φ <u>est un élément de l'algèbre</u> $\mathbb{A}(p,\Omega,\rho/p)$ <u>vérifiant l'infinité d'équations d'autorésurgence</u> :

(45) $\Delta^{(\rho/p)}_{\omega,n}.\varphi = A_{\omega,n}.\exp_*(\omega\varphi)$ $(\omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ A_{\omega,n} \in \mathbb{C})$

<u>il existe un élément</u> f , <u>nécessairement unique</u>, <u>de</u> $\mathbb{G}_{1-}^{(p,\alpha,\rho)}$, <u>tel que la fonction autorésurgente</u> Φ <u>associée à</u> f <u>soit précisément égale à</u> φ .

Or (cf III-2) il est aussi facile de passer de Φ à f que de f à Φ . On voit donc que la résolution du système (44) équivaut à la résolution du système (45) avec $\omega.A_{\omega,n} = \tau_{m,n}$ (pour $\omega = 2\pi i.m.\frac{\alpha}{p}$).

<u>Proposition</u> 9. (a) <u>Si</u> $\tilde{\omega} = \{\omega_1,\ldots,\omega_r\}$ <u>et</u> $\tilde{n} = \{n_1,\ldots,n_r\}$ <u>posons</u> :

$$\Gamma(\tilde{\omega}) = \omega_1(\omega_1+\omega_2)\ldots(\omega_1+\ldots\omega_{r-1}) \quad \text{et} \quad A_{\tilde{\omega},\tilde{n}} = A_{\omega_1,n_1}\ldots A_{\omega_r,n_r} .$$

<u>Alors, pour toute représentation parfaite</u> w <u>de l'algèbre</u> $\mathbb{P}\mathbb{A}(p,\Omega,\rho/p)$ <u>des pseudo-variables</u> $Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}}_{(\rho/p)}$ <u>dans</u> $\mathbb{P}\mathbb{A}(p,\Omega,\rho/p)$, <u>la série</u>

$$(46) \quad \varphi_w = \sum_{\tilde{\omega},\tilde{n}} \Gamma(\tilde{\omega})A_{\tilde{\omega},\tilde{n}}\, w(Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}}_{(\rho/p)})$$

<u>est solution formelle du système</u> (45) <u>et c'en est une solution effective pourvu qu'elle converge</u> (<u>uniformément sur tout compact de</u> $\mathcal{R}$).

(b) <u>On a notamment convergence lorsque les</u> $A_{\omega,n}$ (<u>non pas les</u> $A_{\tilde{\omega},\tilde{n}}$) <u>sont tous nuls sauf pour un nombre fini de valeurs du couple</u> (ω,n) <u>et qu'on prend</u> w <u>égale à la représentation canonique</u> v (cf II.3).

<u>Exemple</u> : Soit $p=1$, $\alpha=1$, $\rho=0$ et $A_\omega = A$ (resp. $=0$) si $\omega = 2\pi i = \omega_0$ (resp. $\neq \omega_0$). La formule (46) fournit alors :

$$\varphi = \sum_{r\geq 1} \omega_0 . 2\omega_0 \ldots (r-1)\omega_0 . A^r . v(Z^{\omega_0,\ldots,\omega_0}) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r} (\omega_0 A)^r v((Z^{\omega_0})^r).$$

Compte tenu de $(v(Z^{\omega_0}))(P) = (2\pi i)^{-1}(\dot{P}+\omega_0)^{-1}$, on tire de là :

$$f^*(z) = z - \frac{1}{2\pi i} \log(1 - A \sum_{r\geq 1} (r-1)!(2\pi i\ z)^{-r}).$$

On vérifie que la série f^* est dans $\mathbb{G}$ et même dans $\mathbb{G}_1$, mais pas dans $\mathbb{G}_{1-}$, tandis que la solution f de l'équation $f^* o f = 1+f^*$ appartient à $\mathbb{G}_{1-}$ et même à $\mathbb{G}_0$.

<u>Proposition</u> 9 (suite). (c) <u>Quelle que soit la suite</u> $\{A_{\omega,n}\}$ <u>il existe toujours des représentations parfaites</u> w <u>telles que la série</u> φ_w <u>de</u> (46) <u>converge</u>. <u>Inversement, si</u> w_0 <u>est une telle représentation et</u> φ_{w_0} <u>la série convergente correspondante, toutes les solutions du système</u> (45) <u>se déduisent de</u> φ_{w_0} <u>par des "translations"</u> T_a (cf II.2, exemple 4). <u>On a d'ailleurs, d'une manière</u>

explicite :

$$(47)\quad \begin{cases} T_a\, \varphi_{w_o} = \psi + \sum_{\tilde{\omega},\tilde{n}} A_{\tilde{\omega},\tilde{n}}\, \Gamma(\tilde{\omega})\, w_o(Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}}_{(\rho/p)}) * \exp_*(|\tilde{\omega}|\psi) \\ \text{avec} \quad \psi = \sum_{\tilde{\omega},\tilde{n}} A_{\tilde{\omega},\tilde{n}}\, \Gamma(\tilde{\omega})\, a(Z^{\tilde{\omega},\tilde{n}}_{(\rho/p)}) \,. \end{cases}$$

Voilà qui résout le problème de la synthèse harmonique, du moins tel que nous l'avons posé.

III.5 - Groupes généraux : $\mathbb{G}_o \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}_{1-}$.

Les restrictions à $\mathcal{G}$ des fonctions Θ_Q (resp. $\Theta_{m,n}$) demeurent bien entendu des fonctions centrales (resp. centrales généralisées) sur $\mathcal{G}$, mais, a priori, le système $\{\Theta_Q\}$ (resp. $\{\Theta_{m,n}\}$) pourrait très bien ne plus être complet (resp. complet et libre). Mais en fait on montre qu'ici complétude et liberté se conservent par restriction à $\mathcal{G}$.

En outre, dans le cas très important où $\mathcal{G} = \mathbb{G}_o$ (groupe des germes de transformations holomorphes du voisinage de ∞) on peut donner des précisions supplémentaires sur la croissance, à f fixe, des $\Theta_Q(f)$ et des $\Theta_{m,n}(f)$ ou encore, ce qui revient au même, sur la croissance des scalaires $A_{\omega,n}$ et $B_{\omega,n}$ associés aux équations d'autorésurgence :

$$\Delta^{(\rho/p)}_{\omega,n}\, \Phi = A_{\omega,n} \exp_*(\omega\Phi) \quad \text{et} \quad D^{(\rho/p)}_{\omega,n}\, \Phi = B_{\omega,n} \exp_*(\omega\Phi) \,.$$

On montre en particulier que $\limsup_{|\omega|\to\infty} |B_{\omega,n}|^{1/|\omega|} < \infty$. On n'a pas de relation aussi simple pour les $A_{\omega,n}$, mais on peut établir certaines propriétés concernant leur oscillation etc...

IV - APERCU SUR D'AUTRES APPLICATIONS DES FONCTIONS RESURGENTES.

IV.1 - Itération et équations fonctionnelles.

De même que nous avons associé une fonction autorésurgente Φ à la solution de l'équation d'Abel, on peut associer d'autres fonctions autorésurgentes aux solutions des équations d'itération :

(48) $g \circ g = f$ ou (48bis) $g \circ g \circ g = f$ etc... (f donnée dans $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}_{1-}$; g inconnue dans $\mathbb{G}$)

ou d'équations fonctionnelles très générales, telles que

(49) $g \circ f_1 \circ g \circ f_2 \circ \ldots g \circ f_n(z) \equiv z$ (f_i donnée dans $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}_{1-}$; g inconnue dans $\mathbb{G}$)

et en tirer des renseignements très fins sur ces solutions.

IV-2 - Théorie de la transcendance.

Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie formelle du groupe $\mathcal{G}$. Le générateur infinitésimal f_* de $f \in \mathcal{G}$ est défini par la relation $f_* \circ f = f_* \frac{d}{dz} f$, jointe à une condition fixant le premier coefficient. Quant au crochet de Lie de $\mathcal{L}$, il est donné par $[f_*, g_*] = f_* \frac{d}{dz} g_* - g_* \frac{d}{dz} f_*$. Cela étant, lorsque $\mathbb{G}_o \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}_{1-}$, en utilisant des fonctions autorésurgentes Ψ associées aux éléments de $\mathcal{L}$, on montre que si $f_*, g_* \in \mathcal{L}$, alors ni f_*+g_* ni $[f_*, g_*]$ n'appartiennent jamais à $\mathcal{L}$, sauf dans deux cas triviaux :

(i) f_*/g_* = constante rationnelle

(ii) les coefficients des séries f_* et g_* satisfont aux mêmes propriétés de croissance que ceux des éléments de $\mathcal{G}$.

<u>Autre exemple</u> : On montre que, ces triviaux mis à part, si les solutions $g_1, g_2 \ldots g_r$ d'équations du type (48) ou (48bis) ne sont pas dans $\mathcal{G}$, alors le produit $g_1 \circ g_2 \circ \ldots g_r$ lui non plus n'est

jamais dans $\mathcal{G}$. Ceci permet de préciser la structure des extensions transcendantes des groupes $\mathcal{G}$, obtenues par adjonction des racines carrées, cubiques etc... d'itération.

IV.3 - Lien avec la théorie des graphes.

Soit $\varphi,\psi \in \mathbb{A}(\Omega)$. Comme conséquence de la proposition 2, la partie singulière du produit $\varphi*\psi$ en un point donné $Q \in \partial\mathcal{R}$ ne dépend que des parties singulières des facteurs φ et ψ en un nombre fini de points $Q_i \in \partial\mathcal{R}$, qui sont fonctions de Q seul. On déduit de là une relation d'ordre sur l'ensemble $\partial\mathcal{R}$, laquelle se ramène, moyennant une certaines notion d'homotopie symétrique, à des considérations de théorie des graphes. Voir à ce sujet [2].

IV.4 - Représentations des algèbres de Lie finie.

On montre que pour toute algèbre de Lie $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{C}$ de base finie $\{e_1,\dots,e_n\}$ et pour tout choix $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ de n éléments distincts de Ω , il existe une sous-algèbre $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}(\Omega)$ telle que l'application $e_i \to \Delta_{\omega_i}$ soit une représentation de rang n de l'algèbre de Lie $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{B})$.

REFERENCES.

[1] J. ECALLE. Théorie des Invariants Holomorphes. Publ. Math. d'Orsay n° 67 (74-09).

[2] J. ECALLE. Théorie des Fonctions résurgentes. A paraître (Orsay).

A CONSTRUCTIVE DECOMPOSITION OF BMO($\mathbb{R}$) INTO L^∞ PLUS HILBERT TRANSFORM OF L^∞.

Peter W. JONES

BMO($\mathbb{R}$) is the space of functions φ defined on $\mathbb{R}$ and satisfying

$$\|\varphi\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| dx < \infty,$$

where φ_I denotes the mean value of φ over an interval I, $\varphi_I = \frac{1}{|I|}\int_I \varphi\, dx$, and where the above supremum is taken over all intervals I. A theorem of C. Fefferman [10] states that if $\varphi \in \mathrm{BMO}$ then $\varphi = u + \tilde{v}$, where $u, v \in L^\infty$ and where $\tilde{v}$ denotes the Hilbert transform of v. Fefferman obtained this result nonconstructively by proving that BMO is the dual space of the Hardy space H^1. (See [11] for the proof and the definition of $H^1(\mathbb{R})$). The decomposition $\varphi = u+\tilde{v}$ can also be obtained by merging the results of Hunt, Muckenhoupt, and Wheeden [17] and Helson and Szegö [14]. The proof of the Helson-Szegö theorem is nonconstructive. The purpose of this note is to outline a constructive proof of the decomposition $\varphi = u + \tilde{v}$ for arbitrary $\varphi \in \mathrm{BMO}$. The same method solves the equivalent problem of estimating the distance from a function ψ to H^∞. More specifically, given $\psi \in L^\infty$ we will construct F so that $\psi - F \in H^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ and $\|F\|_\infty \leq C \operatorname{dist}(\psi, H^\infty)$. To solve the first problem $(\varphi = u + \tilde{v})$ we will present a constructive method of solving certain $\bar{\partial}$ problems with bounds. Then we will invoke a result of Varopoulos [23] which reduces our task to solving a $\bar{\partial}$ equation. The solution of the second problem will then follow by a well known argument. We assume the reader has a basic knowledge of H^∞, Carleson measures, and interpolating Blaschke products. (See [8] or [12] for such information.) We leave the proofs of several limiting arguments as exercises for the reader.

Suppose $\{z_j\}$ is an interpolating sequence in the upper half plane $\mathbb{R}^2_+$,

(1) $$\inf_j \prod_{k\neq j} \left|\frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k}\right| = \delta > 0$$

and suppose $\{c_j\}$ is a sequence of complex numbers satisfying $|c_j| \leq 1$, $j = 1, 2, ..$ Let $z_j = x_j + iy_j$. We consider the $\bar{\partial}$ problem

(2) $$\bar{\partial} F = \sum_{j=1}^{\infty} c_j y_j \delta_{z_j},$$

where δ_z denotes the point mass at z. Let $B_o(z)$ denote the interpolating Blaschke product with zeros $\{z_j\}$. Then $\bar{\partial}\left(\frac{1}{B_o(z)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j y_j \delta_{z_j}$ where $c_1 \leq |\varepsilon_j| \leq \frac{c_2}{\delta}$, $j = 1, 2, \ldots$ By a construction due to Earl [9] we can find an interpolating Blaschke Product $B_1(z)$ such that

(3) $$C(\delta)\, B_1(z_j) = \frac{c_j}{\varepsilon_j}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

and where $C(\delta)$ is some constant depending only on the value of δ in (1). The original proof that the interpolation problem (3) can be solved in H^∞ is due to Carleson [2] and uses H^1_o, L^∞/H^∞ duality. At one point in his proof of (3), Earl invokes an existance theorem, which may lead one to object that Earl's method is not constructive. The same idea however can be used to give a completely constructive proof of (3). See [18].

Taking $F(z) = C(\delta)\frac{B_1(z)}{B_o(z)}$ we see that F solves equation (2). Furthermore $\|F(x)\|_\infty = C(\delta)$. We now solve the $\bar{\partial}$ problem

(4) $$\bar{\partial} F = \mu$$

where μ is a Carleson measure, in the following sense. We find $F(x) \in L^\infty(R)$ such that $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, F(x)\, dx = \int_{R^2_+} H(z)\, d\mu(z)$ for all $H(x) \in L^1(R)$ with holomorphic Poisson extension to R^2_+.

For a measure μ on $\mathbb{R}^2_+$ let $\|\mu\|'$ denote the Carleson constant of μ,

$$\|\mu\|' = \sup_I \frac{1}{|I|} |\mu|\{I \times (0, |I|)\},$$

where the above supremum is taken over all intervals I of $\mathbb{R}$. Suppose that $\|\mu\|' = 1$; by taking a given complex measure and dividing it into four pieces we can assume that $\mu \geq 0$. For $N = 1, 2, \ldots$ we approximate μ weakly by measures of the form

$$\mu_N = \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{y_j}{N}\right) \delta_{z_j}$$

where $\|\mu_N\|' \leq 1$. A point z_j may have multiplicity greater than one in the above representation of μ_N. We must find F_N solving the equation $\bar{\partial} F_n = \mu_N$ and satisfying $\|F_N(x)\|_\infty \leq C$, where C is independent of N. We now invoke a variant of an argument used to prove theorem 5.2 in Hoffman's paper [15]. For $k \in \mathbb{Z}$, let S_k denote the strip $2^k \leq y < 2^{k+1}$, and let $\{z_{k,j}\}_{j=1}^{M'}$ denote those points in the support of μ_N that are in S_k, i. e. $2^k \leq y_{k,j} < 2^{k+1}$. We arrange the points $\{z_{k,j}\}$ by increasing real part,

$$\ldots \leq x_{k,j-1} \leq x_{k,j} \leq x_{k,j+1} \leq \ldots$$

Now let $A_p = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{z_{k,j} : j = p \bmod(N)\}$, $p = 1, 2, \ldots, N$, and let $\mu_{N,p} = \sum_{z_j \in A_p} y_j \delta_{z_j}$. We claim that $\|\mu_{N,p}\|' \leq 8$, $1 \leq p \leq N$. To see this let I be an interval of length 2^K, $K \in \mathbb{Z}$, and let $\tilde{I} = I \times (0, |I|)$. Also fix a number p, $1 \leq p \leq N$. For $k < K$, the way we ordered the $z_{k,j}$ in S_k immediately shows

$$\# \{z_{k,j} \in A_p \cap S_k \cap \tilde{I}\} \leq \# \{z_{k,j} \in A_r \cap S_k \cap \tilde{I}\} + 1,$$

whenever $1 \leq r \leq N$. This means that

$$\sum_{z_{k,j} \in A_p \cap S_k \cap \tilde{I}} y_{k,j} \leq 2 \sum_{z_{k,j} \in A_r \cap S_k \cap \tilde{I}} y_{k,j} + 2^{k+1},$$

whenever $1 \leq r \leq N$. Summing on k we get

$$\mu_{N,p}(\tilde{I}) \leq 2\mu_{N,r}(\tilde{I}) + 2|I|.$$

Since $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \mu_{N,r}$, we obtain

$$\mu_{N,p}(\tilde{I}) \le 2\,\mu_N(\tilde{I}) + 2\,|I|$$
$$\le 4\,|I|.$$

So clearly $\|\mu_{N,p}\|' \le 8$, $1 \le p \le N$. Splitting each $\mu_{N,p}$ into 16 measures we obtain measures $\mu_{N,k}$, $k = 1, 2, \ldots, 16\,N$, each satisfying $\|\mu_{N,k}\|' \le 8$ and

$$\inf_{z_j \in \operatorname{supp} \mu_{N,k}} \quad \prod_{\substack{z_\ell \in \operatorname{supp} \mu_{N,k} \\ z_\ell \ne z_j}} \left| \frac{z_j - z_\ell}{z_j - \bar{z}_\ell} \right| \ge e^{-32\pi}.$$

Now find as before functions $F_{N,k}$ satisfying $\bar{\partial} F_{N,k} = \mu_{N,k}$ and $\|F_{N,k}(x)\|_\infty \le C_o$, where C_o is independent of N and k. Since $\mu_N = \sum_{k=1}^{16N} \mu_{N,k}$, the function $F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{16N} F_{N,k}$ satisfies $\bar{\partial} F_N = \mu_N$ and $\|F_N(x)\|_\infty \le 16 C_o$. Letting F be a weak limit of the F_N, we have solved our $\bar{\partial}$ problem constructively and with bounds.

N. Th. Varopoulos [23] has proved the following theorem.

THEOREM (Varopoulos). <u>Let</u> $\varphi \in BMO(\mathbf{R})$. <u>Then there is</u> $G \in C^\infty(\mathbf{R}^2_+)$ <u>such that</u>

(i) $\lim_{y \to 0} |G(x,y) - \varphi(x)| \le C_1 \|\varphi\|_*$ a. e. dx

(ii) $|\nabla G|\,dx\,dy$ <u>is a Carleson measure</u>, $\|\,|\nabla G|\,dx\,dy\|' \le C_2 \|\varphi\|_*$.

Varopoulos [24] has also shown that G can be taken so as to satisfy (ii) and have the <u>same</u> boundary values as φ. We prefer to use the above form of his theorem because the Carleson measures that then arise are a little easier to visualize.

With $\varphi \in BMO$ and real valued, let $G(x,y)$ be as in the above theorem and let $G(x)$ denote the boundary values of G. Then in order to decompose φ into $u + \tilde{v}$ it is sufficient to decompose G into $u + \tilde{v}$.

Let $\mathfrak{a}$ denote the family of functions $H(x) \in L^1 \cap C^\infty$ such that $(1+x^2)\,|H(x)| \in L^\infty$ and such that the Poisson extension $H(z)$ of $H(x)$ to $\mathbf{R}^2_+$ is holomorphic. $\mathfrak{a}$ is a dense subspace of holomorphic H^1. An application of

Stokes' theorem shows there is a Carleson measure μ, $\|\mu\|' \leq C\|\varphi\|_*$, such that $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,G(x)\,dx = \int_{R_+^2} H(z)\,d\mu(z)$ whenever $H \in \mathfrak{A}$. By our previous argument, there is $F(x) \in L^\infty$, $\|F(x)\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*$, such that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\left\{G(x) - F(x)\right\}dx = \int_{\mathbf{R}_+^2} H(x)\left\{d\mu(z) - d\mu(z)\right\} = 0 ,$$

whenever $H \in \mathfrak{A}$. This means that $G(x) - F(x)$ is an eigenvector of the Hilbert transform, $\tilde{G}(x) - \tilde{F}(x) = -i(G(x) - F(x))$. Letting $F(x) = u(x) + iv(x)$ and taking real parts in our last equation, we obtain $G(x) = u(x) + \tilde{v}(x)$. Our proof is complete.

The fact that a constructive bounded solution of $\bar{\partial}F = \mu$ (for Carleson measure μ) gives a constructive proof of $BMO = L^\infty + L^\infty$ seems to be fairly well known. It is, for example, implicit in [23] and explicit in [1].

We now turn to our second problem. Let $\psi \in L^\infty(\mathbf{R})$ and let $\varepsilon = \operatorname{dist}(\psi, H^\infty) = \inf_{F \in H^\infty} \|\psi - F\|_\infty$. Then $\|\psi - i\tilde{\psi}\|_* \leq C\varepsilon$ so we can find $u, v \in L^\infty$, $\|u\|_\infty$, $\|v\|_\infty \leq C\varepsilon$, such that $\psi - i\tilde{\psi} = u + \tilde{v}$. So $\psi = \frac{1}{2}(u + iv) + \frac{1}{2}(-iv + \tilde{v} + \psi + i\psi)$. Then $\frac{1}{2}(-iv + \tilde{v} + \psi + i\tilde{\psi}) \in H^\infty$ and $\|\frac{1}{2}(u + iv)\|_\infty \leq C\varepsilon$.

REMARKS

The approach used here is fairly natural after one knows the fact that every unimodular function on $\mathbb{R}$ can be uniformly approximated by ratios of interpolating Blaschke Products. See [19] for a proof of this and further discussion.

We outline another proof of the decomposition $\varphi = u + \tilde{v}$. Though it is not stated in [5], a minor modification of Carleson's argument proves the following theorem. We denote by $P_b\mu$ the Poisson balyage of a measure μ.

THEOREM (Carleson). Let $\|\varphi\|_* = 1$ and let φ have compact support. Then there is an interpolating sequence $\{z_j\}$,

$$\inf_{z_j} \prod_{z_k \neq z_j} \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| \geq \frac{1}{A},$$

there is a sequence $\{a_j\} \in \ell^\infty$, $|a_j| \leq A$, and there is $u \in L^\infty$ such that if $\varphi_1 = P_b(\Sigma\, a_j\, y_j\, \delta_{z_j})$ then $\|\varphi - \varphi_1 - u\|_* < 1/2$.

Let φ, φ_1 and u be as in the above theorem and find interpolating Blaschke Products B_1 and B_2 such that

$$\int \frac{AB_1(x)}{B_2(x)} F(x)\, dx = \Sigma\, a_j\, y_j\, F(z_j)$$

for all F in holomorphic H^1. Then $\varphi_1 - \frac{AB_1}{B_2}$ is in holomorphic H^1 so $\varphi_1 = \mathrm{Re}\, \frac{AB_1}{B_2} + \mathrm{Im}\, \widetilde{\frac{AB_1}{B_2}}$. An iteration argument now finishes the proof.

Varopoulos' construction of the function G for φ is very explicit. One can actually draw a picture for the construction of G and for the proof of Earl's theorem and then "see" the decomposition $\varphi = u + \tilde{v}$. For an alternative proof of Varopoulos' theorem see [19].

The proof of the corona theorem [3], [4] and the proof of H^1, BMO duality are very closely related. Varopoulos' theorem was used by him in an attempt to prove a corona theorem for the ball in $\mathbb{C}^n$. By using the method presented in this paper of solving $\bar{\partial}$ problems and an argument due to Hörmander (see [4] and [16]) one can now give a constructive proof of the corona theorem for the unit disk. This method may be useful in the study of other problems related to the corona theorem.

References

[1] AMAR, E. Representation des fonctions de BMO et solutions de l'équation $\bar{\partial}_b$. Preprint, Orsay.

[2] CARLESON, L. An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958), 921-930.

[3] CARLESON, L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. Ann. Math. 76 (1962), 547-559.

[4] ______________ The corona theorem. Proc. 15th Scandanavian Congress, Oslo, 1968, Lecture Notes in Math. 118, Springer-Verlag.

[5] ______________ Two remarks on H^1 and BMO. Advances in Math. 22 (1976), 269-277.

[6] CARLESON, L. and GARNETT, J. Interpolating sequences and separation properties. J. Anal. Math. 28 (1975), 273-299.

[7] CHANG, S. Y. A characterization of Douglas subalgebras. Acta Math. 137 (1976), 81-89.

[8] DUREN, P. Theory of H^p spaces. Acad. Press, New York and London, 1970.

[9] EARL, J.-P. On the interpolation of bounded sequences by bounded functions. J. London Math. Soc. 2 (1970), 544-548.

[10] FEFFERMAN, C. Characterizations of bounded mean oscillation. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 587-588.

[11] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. M. H^p spaces of several real variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[12] GARNETT, J. Bounded analytic functions. To appear.

[13] GARNETT, J. and JONES, P. W. The distance in BMO to L^∞. To appear in Ann. Math.

[14] HELSON, H. and SZEGÖ, G. A problem in prediction theory. Ann. Math. Pure Appl. 51 (1960), 107-138.

[15] HOFFMAN, K. Bounded analytic functions and Gleason parts. Ann. Math. 86 (1967), 74-111.

[16] HÖRMANDER, L. Generators for some rings of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 943-949.

[17] HUNT, R. A., MUCKENHOUPT, B. and WHEEDEN, R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.

[18] JONES, P. W. A construction for interpolation in H^∞. To appear.

[19] ______________ Thesis, U.C.L.A.

[20] MARSHALL D. E. Subalgebras of L^∞ containing H^∞. Acta Math. 137 (1976), 91-98.

[21] ______________ Thesis, U.C.L.A.

[22] SARASON, D. Functions of vanishing mean oscillation. Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391-405.

[23] VAROPOULOS, N. Th. BMO functions and the $\bar{\partial}$ equation. Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.

[24] ____________________ A remark on BMO and bounded harmonic functions. Pacific J. Math. 73 (1977), 257-259.

ESTIMATIONS L^2 POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

Yves Meyer

1. LE LEMME DE PRESQUE-ORTHOGONALITE.

LEMME 1. _Soient_ $n \geq 1$ _un entier_, $s > \frac{n}{2}$ _un nombre réel et_ H^s _l'espace de Sobolev des fonctions_ $f \in L^2(\mathbf{R})$ _telles que_ $\|f\|^2_{H^s} = \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, d\xi < +\infty$. _Alors il existe une constante_ $C = C(s,n)$ _ayant la propriété suivante : pour toute somme finie_

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(x)\, e^{ik.x} \tag{1}$$

où, pour fixer les idées, $f_k(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, _on a_

$$\|f\|_2 \leq C\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f_k\|^2_{H^s}\Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Le lemme signifie que si les fonctions $f_k(x)$ sont assez "plates", les morceaux composant la somme (1) sont "presque-orthogonaux".

La preuve du lemme 1 est immédiate.

On remarque d'abord que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$

$$\omega(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (1+|\xi-k|^2)^{-s} \leq C_1 < +\infty \quad \text{si} \quad s > \frac{n}{2}.$$

Or on a
$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} |\Sigma\, \hat{f}_k(x-k)|^2 \, d\xi \leq$$

$$(2\pi)^{-n} C_1 \int_{\mathbf{R}^n} \Sigma \, |\hat{f}_k(\xi - k)|^2 (1+|\xi - k|^2)^s \, d\xi$$

$$= C \, \Sigma \, \|f_k\|^2_{H^s}.$$

Enfin il est facile de voir que le lemme 1 est faux si $s = \frac{n}{2}$.

2. L'ESTIMATION TRIVIALE.

LEMME 2. <u>Soient</u> $n \geq 1$ <u>un entier et</u> $s > \frac{n}{2}$ <u>un nombre réel. Il existe une constante</u> $C = C(s,n)$ <u>ayant la propriété suivante : pour toute fonction</u> $\sigma(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ <u>telle que</u>

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \|\sigma(x,\xi)\|_{H^s(d\xi)} \leq 1, \tag{3}$$

<u>l'opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x,D)$ <u>associé au symbole</u> $\sigma(x,\xi)$ <u>est borné sur</u> L^p <u>pour</u> $2 \leq p \leq +\infty$ <u>et</u>

$$\|\sigma(x,D)\|_{p,p} \leq C(s,n). \tag{4}$$

Rappelons que

$$g(x) = \sigma(x,D)f = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \sigma(x,\xi) \, e^{ix.\xi} \, \hat{f}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} K(x \, , \, x-y) \, f(y) \, dy$$

en appelant $K(x \, , \, x-z)$ le noyau associé au symbole $\sigma(x \, , \, \xi)$.

L'hypothèse signifie que $\int_{\mathbf{R}^n} |K(x,z)|^2 (1+|z|^2)^s \, dz \leq C_1$.

On a
$$|g(x)|^2 \leq C_1 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{(1+|x-y|)^s} \, dy$$

et donc, si $2 \leq p \leq +\infty$, $\|g\|_p \leq C\|f\|_p$.

3. LE CAS DES SYMBOLES $\sigma(x,\xi) \in S^o_{o,o}$.

Il est commode (et amusant) d'introduire une définition.

DEFINITION 1. <u>Un opérateur linéaire</u> $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ <u>est dit "élémentaire" s'il existe une constante</u> C <u>et une suite</u> T_k, $k \in \mathbf{Z}^n$, <u>d'opérateurs continus de</u> $L^2 \longrightarrow H^s$ $(s > \frac{n}{2})$ <u>telles que</u>

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|T_k(f)\|^2_{H^s} \leq C \|f\|_2^2 \tag{5}$$

<u>et</u>

$$T(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} e^{ik.x}\, T_k(f)(x). \tag{6}$$

THEOREME 1.

(a) <u>Tout opérateur élémentaire est borné sur</u> $L^2(\mathbf{R})$.

(b) <u>Si</u> $\sigma(x,\xi) \in S^o_{o,o}$, <u>alors</u> $\sigma(x\;,\;D)$ <u>est un opérateur élémentaire</u>.

La partie (a) du théorème 1 résulte immédiatement du lemme 1.

Pour prouver (b), on écrit

$$g(x) = \sigma(x,D)\, f = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi =$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi) \varphi^2(\xi - k)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi =$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (2\pi)^{-n} e^{ix.k} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x\;,\;\xi+k)\, \varphi^2(\xi)\, \hat{f}(\xi+k)\, d\xi$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} e^{ix.k}\, T_k(f)(x).$$

Ceci ci $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \varphi^2(\xi - k) = 1$.

Posons $\sigma_k(x,\xi) = \varphi(\xi)\, \sigma(x,\xi+k)$ et définissons f_k par $\hat{f}_k(\xi) = \varphi(\xi)\, \hat{f}(\xi+k)$; il est clair que $\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f_k\|_2^2 \leq C\, \|f\|_2^2$. Par ailleurs $T_k(f) = \sigma_k(x\;,\;D)\, f_k$. Il reste donc à vérifier que pour tout $s > 0$, la norme de l'opérateur $\sigma_k(x,D) : L^2 \to H^s$ est bornée par une constante C_s ne dépendant ni de x, ni de k. Pour cela il suffit d'appliquer le lemme 2 au symbole $\sigma_k(x,\xi)$ et aux symboles des opérateurs $\partial_x^\alpha \sigma_k(x,D)$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

REMARQUES. <u>Soit</u> N <u>le plus petit entier vérifiant</u> $N > \frac{n}{2}$. <u>Alors les conditions</u> $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq 1$, $|\alpha| \leq N$, $|\beta| \leq N$, <u>suffisent dans la démonstration ci-dessus et impliquent que</u> $\sigma(x,D)$ <u>est borné sur</u> L^2. <u>On ne peut remplacer</u> $N > \frac{n}{2}$ <u>par</u> $N = \frac{n}{2}$. Voici un contre exemple quand $n = 2$ et $N = 1$. On appelle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ une fonction égale à 1 au voisinage de 0 et dont le support est contenu dans $|\xi| \leq \frac{1}{2}$. On pose $\sigma(x,\xi) = \Sigma' \frac{e^{-ik.x}}{|k|} \varphi(\xi - k)$; la somme porte sur les $k \in \mathbf{Z}^2$, $k \neq 0$. Pour $R \geq 1$, on pose $\hat{f}(\xi) = \sum'_{|k| \leq R} c_k \varphi(\xi - k)$ avec $c_k = [|k| \log(1+|k|)]^{-1}$ et, puisque les supports des fonctions $\varphi(\xi - k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, sont deux à deux disjoints, on a

$$g(x) = \sigma(x,D)f(x) = \sum'_{|k| \leq R} \frac{c_k}{|k|} \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\xi-k).x} \varphi^2(\xi-k)\, d\xi = \lambda(R)\, \psi(x)$$

où $\psi(x) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\xi.x} \varphi^2(\xi)\, d\xi$ et $\lambda(R) = \sum'_{|k| \leq R} \frac{c_k}{|k|}$.

On a alors $\|f\|_2 = O(1)$ tandis que $\|g\|_2 \geq c \log(\log R)$, $c > 0$. Donc l'opérateur $\sigma(x,D)$ n'est pas borné sur L^2 bien que $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_\beta$ si $|\alpha| \leq 1 = \frac{n}{2}$ et $\beta \in \mathbf{N}$.

4. LE CAS DES SYMBOLES $\sigma(x,\xi) \in S^0_{\delta,\delta}$, $0 \leq \delta < 1$.

Nous allons montrer que les estimations relatives à ces symboles découlent très simplement du théorème 1.

On aura besoin de la remarque suivante.

LEMME 3. <u>Pour toute suite</u> $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ <u>de constantes positives, il existe une</u>

<u>autre suite</u> $(C'_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ <u>ayant la propriété suivante : pour tout entier</u> $j \in \mathbf{N}$ <u>et toute fonction</u> $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ <u>telle que</u>

$$(7) \qquad |\partial_x^\alpha \varphi(x)| \le C_\alpha 2^{j\delta|\alpha|}, \qquad 0 \le \delta < 1,$$

<u>il existe deux fonctions</u> $g(x)$ <u>et</u> $b(x)$ <u>telles que</u>

$$(8) \qquad \varphi(x) = g(x) + b(x) \quad , \quad \text{support } \hat{g} \subset \left\{ |\xi| \le \frac{1}{10} 2^j \right\}$$

$$|\partial^\alpha g(x)| \le C'_\alpha 2^{j\delta|\alpha|} \quad , \quad |\partial^\alpha b(x)| \le C'_\alpha 2^{-(1-\delta)j} 2^{j\delta|\alpha|}.$$

La preuve du lemme 3 est immédiate. On appelle $K(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{K}(\xi) = 1$ si $|\xi| \le \frac{1}{20}$ et $\hat{K}(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge \frac{1}{10}$. On pose $K_j(x) = 2^{nj} K(2^j x)$ et $g = \varphi * K_j$, $b = \varphi - \varphi * K_j$. Les propriétés de g sont alors immédiates. En ce qui concerne b, il suffit d'écrire

$$b(x) = \int [\varphi(x) - \varphi(x-t)] K_j(t)\, dt =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} [\varphi(x) - \varphi(x - 2^{-j}t)] K(t)\, dt.$$

Alors les estimations relatives à $b(x)$ et à toutes ses dérivées découlent de (7).

THEOREME 2. <u>Pour tout symbole</u> $\sigma(x,\xi) \in S^0_{\delta,\delta}$, $0 \le \delta < 1$, <u>l'opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x, D)$ <u>est borné sur</u> L^2.

On peut, par une première partition de l'unité $1 = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi)$ où $\varphi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty$, écrire $\sigma(x,\xi) = \varphi_0\sigma + \varphi_1\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ et supposer que $\sigma_1(x,\xi) = 0$ si $|\xi| \le 10$. Le terme $\sigma_0(x,D)$ étant trivial grâce au lemme 2. On écrira ci-dessous σ au lieu de σ_1. Supposons que $\theta(\xi)$ soit supportée par $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 4$ et que $\sum_{j\ge 0} \theta(2^{-j}\xi) = 1$ si $|\xi| \ge 1$. On pose $\sigma_j(x,\xi) = \theta(2^{-j}\xi)\sigma(x,\xi)$.

On a

$$(9) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_j(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(2^{\delta j})^{|\alpha|-|\beta|}$$

et il résulte du lemme 4 ci-dessous que $\|\sigma_j(x,D)\|_{2,2} \le C$, constante ne dépendant pas de j.

LEMME 4 (transformations canoniques). <u>Pour tout</u> $T > 0$ <u>les symboles</u> $\sigma(x,\xi)$ <u>et</u> $\sigma(Tx, \frac{\xi}{T})$ <u>définissent deux opérateurs de</u> L^2 <u>ayant la même norme</u>.

C'est trivial et laissé au lecteur. En prenant $T = 2^{\delta j}$, on retrouve la remarque précédant le lemme 4.

On applique alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, la décomposition du lemme 3 à la fonction $x \longrightarrow \sigma_j(x,\xi)$. On obtient $\sigma_j(x,\xi) = \tau_j(x,\xi) + \rho_j(x,\xi)$ où $\tau_j(x,\xi) = \int_{|\alpha| \le 2^j/10} e^{i\alpha.x}\, T_j(\alpha,\xi)\, d\alpha$, les symboles $\tau_j(x,\xi)$ vérifiant les estimations (9) et les symboles $\rho_j(x,\xi)$ vérifiant des estimations améliorée par le facteur $2^{-(1-\delta)j}$. On a donc, grâce au lemme 4, $\sum_{j\ge 0} \|\rho_j(x,D)\|_{2,2} < +\infty$. D'autre part,

$$g_j(x) = \tau_j(x,D)\, f(x) = \iint_{\{2^{j-1}\le |\xi| \le 2^{j+2}\}\ \{|\alpha| \le \frac{1}{10} 2^j\}} e^{i(\alpha+\xi).x}\, T_j(\alpha,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\alpha\, d\xi .$$

Si donc l'on regroupe dans la somme $\sum_{j\ge 0} g_j(x)$ les termes de quatre en quatre, ils deviennent orthogonaux (le support de $\hat{g}_j$ est contenu dans $(\frac{1}{2} - \frac{1}{10})2^j \le |\xi| \le (4+\frac{1}{10})2^j$).

Enfin on définit f_j par $\hat{f}_j(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \chi_{\{2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+2}\}}$ et l'on a

$g_j(x) = \tau_j(x,D)\, f = \tau_j(x,D)\, f_j$. Ces deux remarques permettent d'écrire

$\|\sum_{j\ge 0} g_j\|_2 \le C(\sum_{j\ge 0} \|g_j\|_2^2)^{1/2}$ et $(\sum_{j\ge 0} \|f_j\|_2^2)^{1/2} \le C\|f\|_2$. Grâce au lemme 4, on a $\|g_j\|_2 \le C\|f_j\|_2$ et le théorème 2 en résulte.

REMARQUES. Comme ce fut le cas pour le théorème 1, on peut améliorer le théorème 2 en appelant N le plus petit entier vérifiant $N > \frac{n}{2}$. Pour obtenir la conclusion que $\sigma(x\,,\,D)$ est borné sur L^2, il suffit de supposer que $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{\delta(|\alpha|-|\beta|)}$ pour $|\alpha| \leq N+1$ et $|\beta| \leq N$.

Le fait que l'on consomme une dérivée de plus en x qu'en ξ provient de l'utilisation du lemme 3 pour estimer le terme d'erreur $\|\rho_j(x,D)\|_{2,2}$.

La preuve originale de Calderón et Vaillancourt nécessitait un nombre de dérivées tendant vers l'infini quand $\delta \longrightarrow 1$.

Enfin la démonstration donnée ce-dessus s'applique à la classe plus générale des symboles $\sigma(x,\xi)$ tels que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \left[\omega(|\xi|)\right]^{(|\alpha|-|\beta|)}$$

quand $\omega : [0\,,+\infty[\longrightarrow [1\,,+\infty[$ est une fonction croissante, telle que $\omega(2t) \leq C\omega(t)$ et que $\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty$. Cette dernière condition implique dans la démonstration ci-dessus que $\sum_{j\geq 0} \|\rho_j(x,D)\|_{2,2} < +\infty$. Elle empêche de choisir $\omega(t) = t$ (ce qui correspondrait à la mauvaise classe $S^0_{1,1}$ qui n'est pas bornée sur L^2) mais on voit que le choix $\omega(t) = t^\delta$ $0 \leq \delta < 1$ est très particulier.

INEGALITES L^2 A POIDS POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS

Yves Meyer

Les inégalités L^2 de l'analyse mathématique peuvent s'obtenir par trois procédés différents

(a) les méthodes spectrales

(b) les méthodes de variable complexe

(c) les méthodes de variable réelle.

Par méthode spectrale, nous entendons celles où l'on utilise systématiquement l'algèbre des opérateurs sur un espace de Hilbert : les démonstrations abstraites du théorème de Plancherel pour les groupes abéliens localement compacts appartiennent à cette catégorie. Un autre exemple est le lemme de Cotlar.

Les méthodes de variable complexe permettent d'obtenir certaines inégalités L^2 que l'on ne peut à l'heure actuelle atteindre par aucune autre méthode. Un exemple en est l'opérateur de Calderón défini par $Tf(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y+i\left[\varphi(x)-\varphi(y)\right]}\, dy$ où $\|\varphi'\|_\infty \le \delta$ est la seule condition portant sur φ. Cet opérateur est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ quand δ est assez petit ([2] et [3]).

Enfin les méthodes de variable réelle ont été mises au point par A. Calderón, A. Zygmund et leur école. Elles permettent le plus souvent de déduire les inégalités L^2 à partir d'autres inégalités (p. ex. L^4) pour lesquelles il faut utiliser les méthodes a) ou b).

Nous allons illustrer ces considérations par un exemple où les trois méthodes s'appliquent.

L'auteur a bénéficié de discussions avec E. Stein à qui est due la démonstration par variables réelles.

THEOREME 1. Soient $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme, $P = P_m + \ldots + P_o$ sa décomposition en composantes homogènes et $\gamma_P = \sup_{\|x\| \leq 1} |P_m(x)|$ la borne supérieure de $|P_m|$ sur la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ($\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$). Alors, pour toute fonction $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a

$$(1) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} |\varphi(x)|^2 e^{\|x\|^2} dx \leq \frac{2^{-m}}{\gamma_P^2} \int_{\mathbf{R}^n} |P(D)\varphi|^2 e^{\|x\|^2} dx.$$

Nous allons laisser de côté la démonstration originale par F. Trèves de ce théorème ; elle est extrêmement ingénieuse et utilise des relations de commutation entre opérateurs d'un espace de Hilbert. A partir de ces relations et de méthodes combinatoires F. Trèves obtient (1). Il s'agit donc du point de vue (a).

Notre exposé est divisé en deux parties.

Dans un premier temps nous montrerons que (1) découle très simplement de l'inégalité élémentaire

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'|^2 e^{x^2} dx, \qquad \varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}).$$

Naturellement (2) est un cas extrêmement particulier de (1) mais l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est facile.

Ensuite nous donnerons trois preuves différentes de (2) illustrant les méthodes appelées (a), (b) et (c).

1. L'IMPLICATION (2) $\Longrightarrow$ (1).

Nous admettons (2) et en déduisons une série de lemmes.

LEMME 1. Pour tout nombre complexe α, on a

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi' - \alpha\varphi|^2 e^{x^2} dx.$$

On pose $\alpha = a + ib$ et $\varphi(x) = f(x)\, e^{\alpha x}$, $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$. Alors (3) se réduit à

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 e^{x^2+2ax} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 e^{x^2+2ax} dx.$$

Le changement de variables $t = x + a$ conduit à poser $f(t-a) = g(t)$ et l'on retrouve (2) écrite avec g à la place de φ.

LEMME 2. Soit $P(X) = X^m + a_1 X^{m-1} + \ldots + a_m \in C|X|$. Alors, si $\varphi \in C_o^\infty(R)$, on a

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2^m} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(D)\,\varphi|^2 e^{x^2} dx.$$

Cette inégalité se réduit au lemme 1 si $m = 1$ et se démontre par récurrence sur m.

Si $Q(X) = X^{m+1} + \ldots + c_m$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^m + \ldots + a_m$ tels que $Q(X) = (X-\alpha)\, P(X)$.

On pose alors $\psi = P(D)\,\varphi$, $f = Q(D)$ et l'on a $f = \frac{d}{dx}\psi - \alpha\psi$.

L'inégalité (3) donne

(6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 e^{x^2} dx$$

et l'hypothèse de récurrence fournit

(7) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2^m} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 e^{x^2} dx.$$

En combinant (6) et (7), on obtient (5) pour le degré $m+1$.

LEMME 3. Soient $Q_1, \ldots, Q_m$ m polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]$ et $P(u,X) = u^m + u^{m-1} Q_1(X) + \ldots + Q_m(X) \in \mathbb{C}[u, X_1, \ldots, X_m]$.

Posons $dx = dx_1 \ldots dx_n$ et $P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) = P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m})$.

Alors, si $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, on a

(8) $$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\varphi(u,x)|^2 e^{u^2} du\, dx \leq \frac{1}{2^m} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) \varphi|^2 e^{u^2} du\, dx.$$

Pour démontrer (8), posons $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ et
$A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) = (\frac{\partial}{\partial u})^m + Q_1(i\xi_1, \ldots, i\xi_n)(\frac{\partial}{\partial u})^{m-1} + \ldots + Q_m(i\xi)$.

La transformée de Fourier partielle (en x) de $\varphi(u, x)$ est définie par

$$f(u, \xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi.x} \varphi(u,x)\, dx$$

de sorte que $\varphi(u,x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi.x} f(u,\xi)\, d\xi$ et que
$P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) \varphi(u,x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi.x} A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) f(u, \xi)\, d\xi$.

Les dérivations en x sous le signe somme ont donné des multiplications par des polynômes en $i\xi$ tandis que les dérivations en u restent, sous le signe somme, des dérivations en u.

L'identité de Parseval donne, pour toute valeur fixée de u,

(9) $$\int_{\mathbf{R}^n} |P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) \varphi|^2 dx = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} |A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) f|^2 d\xi.$$

Multiplions (9) par e^{u^2} et intégrons en u. Il vient

(10) $$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |P(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) \varphi|^2 e^{u^2} du\, dx =$$
$$(2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) f|^2 e^{u^2} du \right\} d\xi.$$

Or pour tout ξ fixé, on peut appliquer le lemme 2 à $u \longrightarrow A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) f$.
Cela donne $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\xi, \frac{\partial}{\partial u}) f|^2 e^{u^2} du \geq 2^m \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 e^{u^2} du$.

On remplace dans (10), on échange de nouveau l'ordre des intégrations et l'on applique de nouveau l'identité de Parseval (en ξ). Le lemme 3 est alors démontré.

LEMME 4. Les notations sont celles du lemme 3. On a

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\varphi(u,x)|^2 e^{u^2+\|x\|^2} du\, dx \leq$$
$$2^{-m} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |P(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{dx})\varphi|^2 e^{u^2+\|x\|^2} du\, dx.$$

Posons $\chi(x) = \exp(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)$; $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. On a, de façon évidente,

$$P(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})(\chi\varphi) = \chi\, \widetilde{P}(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})\varphi \tag{11}$$

où $\widetilde{P}(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}) = (\frac{\partial}{\partial u})^m + \widetilde{Q}_1(\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial u})^{m-1} + \ldots + \widetilde{Q}_m(\frac{\partial}{\partial x})$; les coefficients des polynômes $\widetilde{Q}_j(X)$ dépendant de $t_1, \ldots, t_n$.

Appliquons le lemme 3 à $\widetilde{P}$. Il vient

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\varphi(u,x)|^2 e^{u^2} du\, dx \leq 2^{-m} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\widetilde{P}(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})\varphi|^2 e^{u^2} du\, dx. \tag{12}$$

Si nous posons $\psi = \chi\varphi$, on a

$$\widetilde{P}(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})\varphi = \chi^{-1} P(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})\chi$$

et (12) devient, pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$,

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\psi(u,x)|^2 \chi^{-2} e^{u^2} du\, dx \leq 2^{-m} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |P(\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial x})\psi|^2 e^{u^2} du\, dx. \tag{13}$$

Or $\chi^{-2} = e^{-2(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}$ et $\int_{\mathbf{R}^n} \chi^{-2} e^{-(t_1^2+\ldots+t_n^2)} dt_1\ldots dt_n = (2\pi)^{n/2} e^{\|x\|^2}$.

Dans (13) on fixe $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$; c'est-à-dire que ψ ne dépend pas de $t_1, \ldots, t_n$; on multiplie les deux membres par $e^{-\|t\|^2}$ et l'on intégre en $dt_1\ldots dt_n$. On obtient le lemme 4.

Pour passer du lemme 4 au théorème 1, on appelle $\nu \in \mathbf{R}^n$ un vecteur de longueur 1 tel que $|P_m(\nu)| = \gamma_P$ et l'on prend, pour nouvelle base orthonormée, une base dont le dernier vecteur est ν. On est alors ramené au lemme 4.

2. LA PREUVE DE (2) PAR DES METHODES SPECTRALES.

La démonstration qui suit est une adaptation de celle de F. Trèves dans [1].

LEMME 5. Pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\int |\varphi|^2 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \int |\varphi'|^2 e^{x^2} dx . \tag{14}$$

On peut évidemment supposer que φ est à valeurs réelles. On pose alors $\psi(x) = \varphi(x) e^{x^2/2}$ et (14) devient

$$\int \psi^2(x)\, dx \leq \frac{1}{2} \int (\psi' - x\psi)^2 dx \tag{15}$$

et (15) est elle même conséquence de l'identité triviale

$$\frac{1}{2}\int (\psi' - x\psi)^2 dx - \frac{1}{2}\int (\psi' + x\psi)^2 dx = \int \psi^2 dx. \tag{16}$$

La preuve de (16) est évidente car le membre de gauche vaut
$- 2 \int x\, \psi\psi' dx = \left[-x\psi^2\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int \psi^2 dx.$

3. LA PREUVE DE (2) PAR LES METHODES DE "VARIABLE REELLE".

On part des inégalités de Hardy données dans le lemme suivant.

LEMME 6. Pour toute fonction $y \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ à valeurs réelles et pour tout $\alpha \geq 0$, on a

$$\int_0^\infty y^2 x^{2\alpha} dx \leq \frac{4}{(2\alpha+1)^2} \int_0^\infty y'^2 x^{2\Phi+2} dx. \tag{17}$$

L'exemple très simple où l'on part de $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ fixée et où l'on pose $y = \varphi(\frac{x}{N})$, $N \geq 1$, montre que l'on ne peut avoir dans (17) le même poids dans les deux membres. La dérivée doit être pénalisée pour compenser le fait que

$y'^2 = \frac{1}{N^2}\left[\varphi'(\frac{x}{N})\right]^2$. On voit ainsi que $2\alpha+2$ est l'exposant correct si exposant il y a.

Pour démontrer les inégalités de Hardy, on pose $x = e^t$ et $\varphi(t) = y(e^t)$. Alors $y'(e^t) = e^{-t}\varphi'(t)$ et (17) s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(t)\, e^{(2\alpha+1)t}\, dt \leq \frac{4}{(2\alpha+1)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi'(t)]^2\, e^{(2\alpha+1)\,t}\, dt$.

On pose enfin $\psi(t) = \varphi'(t)\, e^{\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; d'où $\varphi(t) = -\int_t^{\infty} \psi(s)\, e^{-(\alpha+\frac{1}{2})\,s}\, ds$ et $\varphi(t)\, e^{(\alpha+\frac{1}{2})t} = -(\psi * K_\alpha)(t)$ où $K_\alpha(t) = e^{(\alpha+\frac{1}{2})t}$ si $t < 0$, 0 si $t \geq 0$. Finalement (17) devient

$$\|K_\alpha * \psi\|_2^2 \leq \|K_\alpha\|_1^2\, \|\psi\|_2^2 . \tag{18}$$

Pour passer de (17) au lemme 5, on prend $\alpha \in \mathbb{N}$ dans (17) et on ajoute toutes les inégalités relatives aux poids $\frac{x^{2n}}{n!}$. On obtient

$$\int_0^{\infty} y^2\, e^{x^2}\, dx \leq 4\int_0^{\infty} y'^2\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+2}}{n!\,(2n+1)^2}\Big)\, dx.$$

On remarque alors que $\frac{1}{n!\,(2n+1)^2} \leq \frac{2}{(n+2)!}$ et l'on a donc

$$\int_0^{\infty} y^2\, e^{x^2} dx \leq 8\int_0^{\infty} y'^2\, \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\, dx. \tag{19}$$

L'inégalité (19) est, en un sens plus précise que le lemme 5 (le poids est meilleur). Mais le coefficient numérique est moins bon.

4. LA PREUVE DE (2) PAR LA VARIABLE COMPLEXE.

Une preuve très simple de l'inégalité $\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^2 e^{x^2} dx \leq C\int_{-\infty}^{+\infty} |y'|^2\, e^{x^2} dx$ peut être obtenue en remarquant que, malgré les apparences, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 e^{x^2} dx$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, peut se calculer par la formule de Plancherel.

En effet, on a

(20) $$2\pi^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi|^2 e^{x^2}\,dx = \iint |\hat{\varphi}(u+iv)|^2\, e^{-v^2}\,du\,dv.$$

Commençons par prouver (20).

Pour tout v fixé, $u \longrightarrow \hat{\varphi}(u+iv) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(u+iv)}\varphi(x)\,dx$ est la transformée de Fourier de $e^{xv}\varphi(x)$. On a donc

(21) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(u+iv)|^2\,du = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xv}\,|\varphi(x)|^2\,dx .$$

On multiplie (21) par e^{-v^2} et l'on intègre en v. Il suffit de remarquer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2+2xv}\,dv = e^{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v-x)^2}\,dv = \sqrt{\pi}\,e^{x^2}$.

La preuve de (2) sera complète si nous montrons que, pour toute fonction entière $F(z) = \hat{\varphi}(z)$, on a

(22) $$\iint |F(u+iv)|^2 e^{-v^2}du\,dv \le C\iint |F(u+iv)|^2(u^2+v^2)\,e^{-v^2}du\,dv.$$

On décompose les deux intégrales (22) en $\iint_{u^2+v^2\le 1}$ et $\iint_{u^2+v^2\ge 1}$. Pour la seconde partie l'inégalité est triviale avec $C = 1$.

Pour traiter la première partie, il suffit de vérifier que

(23) $$\iint_{|z|\le 1}|F(z)|^2\,dx\,dy \le \frac{1}{3}\iint_{1\le|z|\le 2}|F(z)|^2\,dx\,dy.$$

Pour montrer (23), on écrit $F(z) = a_o + a_1 z + \ldots$ et on intègre en coordonnées polaires. Les deux membres de (23) valent respectivement $s = 2\pi\sum_o^\infty \frac{|a_n|^2}{2n+2}$ et $2\pi\sum_o^\infty \frac{(4^{n+1}-1)|a_n|^2}{2n+2} \ge 3s$.

D'où $$\iint_{|z|\le 1}|F(z)|^2 e^{-y^2}dx\,dy \le \iint_{|z|\le 1}|F(z)|^2\,dx\,dy$$

$$\le \frac{1}{3}\iint_{1\le|z|\le 2}|F(z)|^2\,dx\,dy \le \frac{e^4}{3}\iint_{1\le|z|\le 2}|F(z)|^2 e^{-y^2}dx\,dy \le$$

$$\frac{e^4}{3}\iint_{1\le|z|\le 2}|F(z)|^2\,|z|^2\,e^{-y^2}\,dx\,dy.$$

C'est la fin de la démonstration.

Bibliographie

[1] TREVES, F. Relations de domination entre opérateurs différentiels. Acta Math. 101 (1959).

[2] CALDERÓN, A. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. 74 (1977), 1324-1327.

[3] CALDERÓN, A. Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications. ICM Helsinki (1978).

NORMS OF EXPONENTIAL SUMS (supplement)

S. K. Pichorides

PREFACE

This article is an appendix to Chapter III of [2]. In § 1 it is proved that "the L^1 norm of the exponential sum $\exp(in_1x)+\ldots+\exp(in_Nx)$, $n_1,\ldots,n_N$ distinct integers, exceeds a fixed positive multiple of $(\log N)^{1/2}$. This result, which is taken from [3], improves theorem (3.5) of [2]. The method of proof of theorem (3.5) of [2] has been extended by P. G. Dixon to some special sequences $\{n_1,\ldots,n_N\}$ for which he obtained bounds better than $(\log N)^{1/2}$. Dixon's results will be examined in § 2.

The author would like to thank P. G. Dixon for his permission to include in these notes his, still unpublished, results.

September 1977

N. R. C. Democritos
Theoretical Physics
Aghia Paraskeri Attikis
ATHENES (Grèce)

I. L^1 NORM OF EXPONENTIAL SUMS (THE GENERAL CASE).

1. Introduction. Our objective will be to show that the L^1 norm of an exponential sum with N terms (i. e. a sum of N distinct integral powers of $\exp(ix)$) exceeds $C(\log N)^{1/2}$, where C is an absolute positive constant.

That this lower bound can be taken $C(\log N)$ is known as "Littlewood's conjecture". The best estimate known up to now ([2], th.3.5) is $C(\log N/\log\log N)^{1/2}$. The proof of this result was based on a device introduced by P. Cohen and further improved by H. Davenport and the present author.

The method we use here is completely different from that based on Cohen's device. It is also interesting to observe that any improvement on our lemma 3 will yield better estimates (see remark b).

Minor changes in the proof lead to the same estimate for the L^1 norm of any trigonometric polynomial with N non zero coefficients of absolute value 1. To make the presentation simpler we consider the case of exponential sums only (see remark c).

Section 2 contains an outline of the proof. In section 3 we prove some preliminary lemmas on which the proof of our main result, given in section 4, is based. In the last section we offer some comments.

It will be convenient to use the following notation.

(i) The letter C will denote a positive absolute constant not necessarily always the same. The same letter C with a subscript will mean a positive absolute constant which remains fixed throughout this paper.

(ii) All integrals will be understood with respect to the normalized Lebesgue measure $(1/2\pi)\,dx$ and any integral without limits of integration will be understood to be taken over $(0,2\pi)$.

(iii) For any 2π-periodic measurable function g, $\|g\|$ will denote its L^1 norm $\int |g|$.

2. Outline of the proof. Roughly speaking the proof proceeds as follows. We assume, as we may, that there are more even, say N_e, than odd, say N_o, frequencies. We prove that the norm we want to estimate, say $\|F\|$, exceeds the average of the norms corresponding to the exponential sums of the odd and even frequencies by at least $C(\log N)^{-1/2}$. This implies the desired result if $N_o \geq (1/2)N_e$. If $N_o < (1/2)N_e$ then $\|F\|$ exceeds the norm corresponding to the odd frequencies by a fixed positive quantity. This again concludes the proof except in the case of very small N_o $(< N/(\log N)^2)$. In this case we repeat the argument with the exponential sum corresponding to the even frequencies. Continuing this way either we get the desired result or we obtein a long enough sequence of frequencies consisting of odd mumtiples of distinct

powers of 2. This case can be settled with the help of standard methods of the theory of lacunary Fourier series.

3. Preliminary lemmas. If E is a measurable subset of $(0, 2\pi)$ then E' will denote its complement and $|E|$ its measure (with respect to the normalized Lebesgue measure).

LEMMA 1. *Let* E *be a measurable subset of* $(0,2\pi)$ *such that* $0 < |E| < 1$ *and* $G(x) = 1 + a_1\exp(ix) + \ldots + a_k\exp(ikx)$. *Then*

$$\left\{(1/|E|)\int_E |G|\right\}^{|E|}\left\{(1/|E'|)\int_{E'} |G|\right\}^{|E'|} \geq 1. \tag{3.1}$$

If in particular $|E| = 1/2$, *then*

$$\int_E |G| \geq 1/(4\|G\|) . \tag{3.2}$$

Proof. We write χ_E and $\chi_{E'}$ for the characteristic functions of E and E' respectively.

On applying Jensen's formula ([4], VII, 7.8) we obtain

$$0 \leq \int \log|G| = |E|\int(\chi_E/|E|)\log|G| + |E'|\int(\chi_{E'}/|E'|)\log|G| .$$

Jensen's convexity inequality ([4], I, 10.8) applied to the last two integrals yields

$$0 \leq |E|\log\left\{(1/|E|)\int_E |G|\right\} + |E'|\log\left\{(1/|E'|)\int_{E'} |G|\right\}$$

from which (3.1) follows.

(3.2) is an immediate consequence of (3.1).

LEMMA 2. *Let* $G(x) = a_o + a_1\exp(ix) + \ldots + a_n\exp(inx) = g(x) + i\tilde{g}(x)$ *and write* $\exp(imx)\,G(x) = g_m(x) + i\tilde{g}_m(x)$. *Then*

$$\lim_{m\to\infty} \|g_m\| = (2/\pi)\|G\|. \tag{3.3}$$

Proof. Let $I_k = (a_k, b_k) = (k(2\pi/m), (k+1)(2\pi/m))$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ We take m so big that the variation of g and $\tilde{g}$ in I_k is less than ε (> 0). It follows that $g_m(x) = g(x)\cos mx - \tilde{g}(x)\sin mx$ differs from

$$g(a_k)\cos mx - \tilde{g}(a_k)\sin mx = |G(a_k)|\cos(mx+t_k), \quad \tan t_k = \tilde{g}(a_k)/g(a_k)$$

by less than 2ε. Hence

$$\int_{I_k} |g_m| = |G(a_k)| \int_{I_k} |\cos(mx + t_k)|\,dx + |I_k|\,0(\varepsilon)$$

$$= (2/\pi)\,|G(a_k)|\,|I_k| + |I_k|\,0(\varepsilon).$$

Adding for $k = 0, \ , \ldots, m-1$ we obtain

$$\|g_m\| = (2/\pi)\Big(\sum_{k=0}^{m-1} G(a_k)\,|I_k|\Big) + 0(\varepsilon)$$

for which the desired result follows by letting $\varepsilon \to 0$.

LEMMA 3. Let $F(x) = f(x) + i\tilde{f}(x) = \exp(in_1x) + \ldots + \exp(in_Nx)$, where $n_1 < \ldots < n_N$ are N distinct positive integers, and write $F_e(x) = f_e(x) + i\tilde{f}_e(x)$, $F_o(x) = f_o(x) + i\tilde{f}_o(x)$ for the exponential sums corresponding to the even and odd frequencies respectively. Then

$$\|F\| \geq (1/2)(\|F_e\| + \|F_o\|) + \pi/(32\|F\|). \tag{3.4}$$

Proof. Using lemma 2 and the obvious fact $\|f\| \leq \|F\|$ we see that it suffices to prove

$$\|f\| \geq (1/2)(\|f_e\| + \|f_o\| + 1/(16\|f\|). \tag{3.5}$$

Let $E = \{x : f_o(x)\, f_e(x) \geq 0\}$ and E' its complement. We have

$$\int |f| = \int_E |f_o + f_e| + \int_{E'} |f|$$

$$= \int_E |f_o| + \int_E |f_e| + (1/2)\int_{E'} |2\exp(in_Nx)\, f(x)|.$$

Applying lemma 1 with $G(x) = 2\exp(in_N x)\, f(x)$. (Note that $E + \pi = E'$ and hence $|E'| = 1/2$) we see that the last term exceeds

$$(1/2)(1/(4.2.\|f\|)) = 1/16\|f\|).$$

We observe now that

$$\int_E |f_o| = (1/2\pi)\int_{E-\pi} |f_o(\pi+x)|\,dx = \int_{E'} |f_o|$$
$$= (1/2)\Big(\int_E |f_o| + \int_{E'} |f_o|\Big) = (1/2)\|f_o\|.$$

Similarly we have

$$\int_E |f_e| = (1/2)\|f_e\|.$$

Collecting results we obtain (3.5).

LEMMA 4. *(Using the same notation as in lemma* 3). *If*

(3.6) $$\int |F_e|^2 - \int |F_o|^2 \geq CN$$

then

(3.7) $$\|F\| \geq \|F_o\| + (C/4).$$

Proof. Since $F(x+\pi) = F_e(x+\pi) + F_o(x+\pi) = F_e(x) - F_o(x)$ we have

(3.8) $$\int |F| = \int |F_e+F_o| = \int |F_e-F_o| = (1/2)\int (|F_e+F_o| + |F_e-F_o|).$$

Hence

$$\int |F| - \int |F_o| = (1/2)\int (|F_e+F_o| + |F_e-F_o| - 2|F_o|)$$
$$\geq (1/8N)\int \{(|F_e+F_o| + |F_e-F_o|)^2 - 4|F_o|^2\}$$
$$= (1/8N).2\int (|F_e|^2 - |F_o|^2) + 2\int |F_e^2 - F_o^2|$$
$$\geq (1/8N).2.CN = C/4.$$

LEMMA 5. *Suppose that* $m_1, m_2, \ldots$ *is a sequence of positive integers such that any integer can be written in at most one way in the form* $b_1 m_1 + \ldots + b_n m_n$ *for some* *integer* n, *where* $b_i \in \{1,-1,0\}$, $i = 1, 2, \ldots$ *Then for any* g *of the form* $g(x) = a_o + a_1\exp(ix) + \ldots + a_n\exp(inx) + \ldots$ *we have*

$$(3.9) \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m_n}|^2\right)^{1/2} \leq C \int |g|(\log^+|g|)^{1/2} + C$$

where $\log^+ a = \log a$ *if* $a > 1$ *and* $\log^+ a = 0$ if $0 < a \leq 1$.

Proof. In the case of a lacunary sequence m_i, $(m_{i+1}/m_i) \geq a > 1$, this result, due to Zygmund, is known. The proof given in [4] (XII, 7.6) works word for word in the more general case we need here.

4. *Proof of the main result*. We continue to use the notation of lemma 3.

THEOREM.

$$(3.10) \qquad \|F\| \geq C(\log N)^{1/2}.$$

Proof. We observe that F remains unchanged if the sequence $S^1 = \{n_1, \ldots n_N\}$ is replaced by one of its translates (i. e. $\{n_1+a, \ldots, n_N+a\}$, for some integer a). We define first a suitable such translate of S^1.

We write the elements of S^1 in the diadic system and subtract their common tail, if any. Let $\bar{S}^1$ be the resulting sequence and let 2^{k_1} be the smallest power of 2 which divides some but not all the elements of $\bar{S}^1$.

We write N_1 for the number of odd multiples of 2^{k_1} and N_1' for the number of even ones. On adding, if necessary, 2^{k_1} to all the elements of $\bar{S}^1$ we may assume that $N_1 \leq N_1'$. Let S^2 be the set of even multiples of 2^{k_1} in $\bar{S}^1$.

We subtract from the elements of $\bar{S}^1$ the common tail, if any, of the elements of S^2 and write $\bar{\bar{S}}^1$ for the resulting sequence and $\bar{S}^2$ for the corresponding translate of S^2.

Let 2^{k_2} be the smallest power of 2 which divides some but not all the elements of $\bar{S}^2$. On adding, if necessary, 2^{k_2} to all the elements of $\bar{S}^1$ we may assume that the number N_2' of even multiples of 2^{k_2} in $\bar{S}^2$ is not less than the number N_2 of the odd ones.

We continue this way as far as possible (i. e. untill we reach a set of exactly one multiple of a suitable power of 2).

If the resulting sequence, say S', contains non positive numbers then we add to all its members a power of 2 which is greater than the maximum of the absolute values of the elements of S' and we call S the new sequence. S is obviously a translate of S^1 such that :

(i) There are positive integers $k_1 < k_2 < \ldots < k_t$ such that every element of S is an odd multiple of 2^{k_r} for some r, $1 \leq r \leq t$, and

(ii) the number N_r' of the even multiples of 2^{k_r} is not less than the number N_r of the odd ones.

We shall use the same symbols $n_1, \ldots, n_N$ for the elements of the new sequence S.

We proceed now by induction. We assume that for all exponential sums G with $M < N$ terms we have

$$\|G\| \geq C_o (\log M)^{1/2} \tag{3.11}$$

where the absolute constant C_o will be specified in the course of the proof.

To avoid trivialities we shall assume that N is large.

<u>Case a.</u> We assume that for all $r < 2(\log N)^2 \rightarrow N_r$ is less than $N/(2\log N)^2$.

We pick, for each even $2r < 2(\log N)^2$, an odd multiple m_r of 2^{k_r} in $\{n_1, \ldots, n_N\}$. It is very easy to see that the sequence $m_1, \ldots, m_d$, $d \geq (\log N)^2 - 1$, satisfies the hypotheses of lemma 5. Applying (3.9), with $g = F$, and using the obvious estimate $|F| \leq N$ we obtain

$$\log N \leq C \int |F| (\log N)^{1/2} + C \leq C(\log N)^{1/2} \|F\|$$

if we assume, as we may, that N is large enough.

It follows that $\|F\| \geq C(\log N)^{1/2}$. This proves (3.10) if we take C_o small enough (which obviously does not affect the validity of (3.10)).

Case b. We assume that there is an $r < 2(\log N)^2$ such that N_r is greater or equal to $N/(2 \log N)^2$.

Let s be the smallest such r. Since the sum $\sum_{r=1}^{s-1} N_r$ is less than $N/2$ we must have $N_s' + N_s \geq (N/2)$.

We observe that $\|F\|$ exceeds the L^1 norm of the exponential sum F_s corresponding to the multiples of 2^{k_s}. Indeed if $s = 1$ then (see the proof of lemma 4)

$$\|F\| = (1/2)\left\{\|F_o + F_e\| + \|F_e - F_o\|\right\} \geq (1/2)\|2F_e\| = \|F_e\|$$

and the general case follows by a trivial induction.

Thus it suffices to prove that

$$\|F_s\| \geq C_o(\log N)^{1/2}.$$

We write F_1, F_2 for the exponential sums corresponding to the odd and the even multiples of 2^{k_s} respectively. We distinguish two subcases.

Case b_1. $N_s > (N/8)$.

If $\|F_s\| \geq C_o(\log N)^{1/2}$ there is nothing to prove. So we suppose that $\|F_s\| \leq C_o(\log N)^{1/2}$. By the induction hypothesis $\|F_1\|$ and $\|F_2\|$ exceed $C_o(\log(N/8))^{1/2}$. Applying lemma 3 we obtain

$$\|F_s\| \geq C_o(\log(N/8))^{1/2} + \pi/\{32C_o(\log N)^{1/2}\}$$

$$= C_o(\log N)^{1/2}\{1 - (\log 8)/(\log N)\}^{1/2} + \pi/\{32C_o(\log N)^{1/2}\}.$$

We observe that

$$\{1 - (\log 8)/(\log N)\}^{1/2} > 1 - (\log 8)/(\log N).$$

It follows

$$\|F_s\| > C_o(\log N)^{1/2} + \{(\pi/(32C_o) - C_o\log 8\}(\log N)^{-1/2}.$$

To conclude this case it suffices to take C_o less than

$$\{\pi/(32\log 8)\}^{1/2}.$$

Case b_2. $N_s \leq (N/8)$.

Since $N_s' + N_s \geq (N/2)$ we have

$$\int |F_2|^2 - \int |F_1|^2 = N_s' - N_s > N/4.$$

Applying now lemme 4 (after a trivial change of variables) and using the induction hypothesis we obtain

$$\|F_s\| \geq \|F_1\| + (1/16)$$

$$\geq C_o\{\log[N/(2\log N)^2]\}^{1/2} + (1/16)$$

$$= C_o(\log N)^{1/2}\{1 - (2/\log N)\log(2\log N)\}^{1/2} + (1/16).$$

If C_o is taken small enough and N large enough we conclude, as in case b_1, that

$$\|F_s\| \geq C_o(\log N)^{1/2}.$$

The proof is complete.

5. Remarks. (a) Lemma 1 remains valid for any $G \in H^1$ with $G(0) = 1$ (same proof).

(b) Our proof is based on inequalities (3.2), (3.7) and (3.9). (3.7) and (3.9) have not been used to their full capacity (e. g. N_r in section 4 could be taken as small as $N/\exp\{(\log N)\}^{1/2}$. It is (3.2), or rather its consequence (3.4), which does not permit an estimate better than $(\log N)^{1/2}$. Were we able to replace the second member of (3.2) by a positive constant, then without any additional effort we could obtain bounds much closer to $\log N$.

We observe that this stronger version of (3.2) is true for the two extreme cases of lacunary sequences and arithmetic progressions. Moreover (3.2) depends only on the analyticity of F and the fact that its first coefficient only is 1. So it is not inconceivable that in the case of exponential sums (3.2) can be improved.

(c) Trivial modifications are needed in order to prove (3.10) for trigonometric polynomials with N non zero coefficients of absolute value 1.

The same argument applies also to polynomials with coefficients c_i satisfying the inequalities

$$c_1 \leq |c_i| \leq C_2.$$

However in its present formulation the proof does not apply unrestrictedly to polynomials with coefficients not less than 1 in absolute value (as it was the case in [2], th. (3.5)).

II. L^1 NORM OF SOME SPECIAL EXPONENTIAL SUMS.

1. Introduction. Let $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$ be N positive integers and write

$$f(n) = \exp(in_1x) + \ldots + \exp(in_Nx).$$

P. G. Dixon applied the method of proof of theorem (3.5) in [2] to some special sequences. In particular he modified suitably lemma (3.1) and replaced the construction of the subsequence $\{m_r\}$ in [ ], ch. III, 4 by a more flexible one which could be successfully applied to the special cases he considered. His main results are contained in the following

THEOREM. (i) If $n_t \leq H\, t(\log t)^a$ $(t = 2, 3, \ldots)$, for some H, $a > 0$, then

$$\|f\|_1 > C \frac{\log N}{\log \log N} \qquad (N \geq 3)$$

where C depends only on H and a.

(ii) If $n_t \leq H\, t \exp((\log t)^b)$ $(t = 1, 2, \ldots)$ for some H, $b > 0$, then

$$\|f\|_1 > C(\log N)^{1-b}(\log \log N)^{-b(1-b)} \qquad (n \geq 3)$$

where C depends only on H and b.

(iii) If the sequence $n_{t+1} - n_t$ is monotone non-decreasing, then

$$\|f\| > \frac{1}{16} \; \frac{\log N}{\log \log N}$$

for all sufficiently large N.

The proof of the three parts of this theorem depends on two lemmas which will be proved in the next section. We shall give the complete proof of (iii) and indicate how (i) and (ii) can be obtained. Our exposition follows closely that of Dixon ([1]).

2. Proof of part (iii) of the theorem.

LEMMA 1. Let P, Q, r be real numbers with $r \geq 1$, $P \geq -\frac{1}{2}r$, $P^2+Q^2 \leq \frac{1}{4}r^4$ and let

$$q(z) = \tfrac{1}{2}(1 + \exp(\tfrac{1}{2}\, r^{-1/2} - z)) \qquad (z \in C).$$

Then

$$(2.1) \qquad \left|q(r^{-3/2}(P + iQ) - \tfrac{1}{4}\, r^{-1/2})\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\, r^{-1}(r + 2P)^{1/2} \leq 1.$$

Proof. We observe that

$$|q(r^{-3/2}(P+iQ) - \tfrac{1}{4} r^{-1/2})| \leq$$

$$\leq \left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} r^{-1/2}\right| + \tfrac{1}{2}\left|\exp(-\tfrac{1}{2} r^{-1/2} - r^{-3/2} P - ir^{-3/2} Q)\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + \exp(-\tfrac{1}{2} r^{-3/2}(r + 2P)) - \tfrac{1}{4} r^{-1/2}$$

since $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} r^{-1/2}$.

If $P \leq \frac{r}{2}$ then $\frac{1}{4\sqrt{2}} r^{-1}(r + 2P)^{1/2} \leq \frac{1}{4} r^{-1/2}$

and (2.1) follows immediately.

If $P > \frac{r}{2}$ then we write $\xi = \frac{1}{2} r^{-3/2} (r+2P)$ and, taking into account our hypotheses, one see that it suffices to show

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} r^{-1/2} + \tfrac{1}{2} e^{-\xi} + \tfrac{1}{4} r^{-1/4} \xi^{1/2} \leq 1 \tag{2.2}$$

with ξ satisfying the inequalities

$$r^{-1/2} \leq \xi \leq \tfrac{1}{2} r^{-3/2} (r + r^2). \tag{2.3}$$

On observing that $e^{-\xi} \leq \max\left\{1 - \frac{1}{2}\xi , \frac{1}{2}\right\}$, $\xi \geq 0$, we see that (2.2) reduces to the inequalities

$$1 - \tfrac{1}{4}\xi \leq 1 - \tfrac{1}{4} \xi^{1/2} r^{-1/4} \quad , \quad \tfrac{3}{4} \leq 1 - \tfrac{1}{4} \xi^{1/2} r^{-1/4}$$

which are trivial under the hypotheses (2.3).

LEMMA 2. Suppose that, for some positive integer k, there exist integers $m(i,j) \in \{n_1, \ldots, n_N\}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k^2$, such that :

(i) $m(s,n) < m(s,v)$, $1 \leq s \leq k$, $1 \leq n < v \leq k^2$; and

(ii) $m(s,k^2) + m(s+1,n) - m(s+1,n+1) < n_1$, $1 \leq s < k$, $1 \leq n < k^2$.

Then $$\|f\|_1 > \tfrac{1}{8} k.$$

Proof. If we replace n_k by $1+n_N-n_k$ the norm $\|f\|_1$ does not change. Now the numbers $1+n_N-n_k$ satisfy the inequalities opposite to (i) and (ii), so we may suppose that $n_1 > n_2 > \ldots > n_N > 0$ and prove the theorem assuming the inequalities opposite to (i) and (ii).

The proof is similar to the one used in [2], III 4 and so we shall be brief.

We construct recursively a sequence of functions g_j $(0 \leq j \leq k)$ such that $|g_j| \leq 1$ for all j and

$$I_j \geq I_{j-1}(1 - \tfrac{1}{2} r^{-1/2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}, \qquad j = 1, 2, \ldots k \tag{2.4}$$

where

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, g_j(x)\, dx.$$

Using (2.4) we complete the proof as in [2], III 4.

We achieve the construction of the g_j's by constructing simultaneously by recurrence a sequence of sets of positive integers P_j, $0 \leq j \leq k$.

We put $P_o = \{n_1\}$, and define

$$P_j = P_{j-1} \cup \{m(j,t) : 1 \leq t \leq k^2\} \cup R_j$$

where R_j is the set of all integers of the form

$$p + \sum_{i=1}^{M} (m(j,s_i) - m(j,t_i))$$

with $p \in P_{j-1}$, $s_i < t_i$ for all i, s_i , t_i being positive integers $\leq k^2$ and M being any positive integer.

Using induction and our hypotheses (i) and (ii) we see that $\min P_j = m(j,k^2)$, $1 \leq j \leq k$, which in turn implies that all the elements of R_j are greater than n_1 and hence $R_j \cap \{n_1, \ldots, n_N\} = \emptyset$.

We now define $g_o(x) = \exp(in_1 x)$ and writing

$$h_j(x) = \sum_{s=1}^{k^2} \exp(i\, m(j,s)\, x)$$

$$P + iQ = \sum_{s<t} \exp(i\left[m(j,s) - m(j,t)\right] x)$$

we set

$$g_{j+1} = g_j(x)\left\{q(r^{-3/2}(P+iQ)) - \frac{1}{4} r^{-1/2}\right\} + \frac{1}{4\sqrt{2}} r^{-1} h_j(x)$$

where q is the function defined in Lemma 1.

Since q has a Taylor expansion valid everywhere, and the integer M in the construction of P_j is arbitrary, the argument used in [2], III 4 shows that

$$\begin{aligned} I_j &= I_{j-1}(q(0) - \frac{1}{4} r^{-1/2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} r^{-1} r \\ &= I_{j-1}(\frac{1}{2}\left[1 + \exp(-\frac{1}{2} r^{-1/2})\right] - \frac{1}{4} r^{-1/2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ &\geq I_{j-1}(1 - \frac{1}{2} r^{-1/2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

i. e. (2.4) is satisfied.

That $|g_j(x)| \leq 1$ is an immediate consequence of Lemma 1, and this completes the proof of lemma 2.

We return now to the proof of part (iii) of the theorem. It is enough to prove the existence of $\left\{m(i,j)\right\}$ with $k > \frac{1}{2} \frac{\log N}{\log \log N}$. We set $m(s,n) = n_{q(s,n)}$, where

$$q(s,n) = n\, k^{2(s-1)}, \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq n \leq k^2$$

and observe that (i) of lemma 2 is trivially satisfied. In order to verify (ii) we argue as follows :

As the sequence $n_{t+1} - n_t$ is monotone non-decreasing, we have $n_t - n_s \geq n_{t-s+1} - n_1$ for all $s \leq t$. Hence, for $1 \leq s < k$, $1 \leq n < k^2$,

$$m(s+1\ ,\ n+1) - m(s+1\ ,\ n) \geq n_{q(s,k^2)+s} - n_1$$

$$> m(s,k^2) - n_1$$

which is condition (ii) of lemma 2.

We observe now that k can be chosen to be the greatest integer satisfying the inequality $q(k,k^2) \leq N$, i. e.

$$k^2\, k^{2(k-1)} = k^{2k} < N$$

which, as can easily be seen, exceeds $\frac{1}{2}\,\frac{\log N}{\log \log N}$.

Parts (i) and (ii) of the theorem can be proved similarly by choosing respectively

$$q(s,n) = n(H\, k^2)^{s-1} \left[(s-1)!\right]^{2a} (A \log k)^a$$

and

$$q(s,n) = n(H\, k^2)^{s-1} \exp\left[(A \log k)^b\, (s-1)^{1/(1-b)}\right]$$

with sufficiently large A. (See [1] for the details).

3. <u>Remarks</u>. (i) The argument of [2], III 4 shows that the present theorem holds good for polynomials with coefficients not less than 1 in absolute value.

(ii) Part (ii) of the theorem gives new results only for $b < \frac{1}{2}$ (otherwise the bounds are less than $(\log N)^{1/2}$).

REFERENCES

[1] DIXON, P. G. A lower bound for the L^1-norm of certain exponential sums. Mathematika (to appear).

[2] PICHORIDES, S. K. Norms of exponential sums. Publ. Math. Orsay, n° 77-73.

[3] PICHORIDES, S. K. On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums. Bull. Greek Math. Soc. (to appear).

[4] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Vol. I, II. Cambridge University Press, 1968.

No. d'impression 338
4ème trimestre 1978

DATE DE FIN DE PRÊT
