PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

84-01

ANALYSE HARMONIQUE

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES

ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) :

10A25 - 42A03 - 42A08 - 42A32 - 42A55 - 42A61 -
42B30 - 43A17 - 43A46 - 46B10 - 46B20

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

84-01

ANALYSE HARMONIQUE
GROUPE DE TRAVAIL SUR LES
ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Table des matières

Myriam Déchamps, Françoise Piquard,
Hervé Queffelec

ESTIMATIONS LOCALES DE SOMMES D'EXPONENTIELLES

Résumé. Nous déterminons pour tout $a \in \left]-\pi, \pi\right]$ la valeur de

$$\alpha(a) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{S\subset Z \\ S \text{ fini}}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left|\sum_{n\in S} e^{inx}\right|^2 \frac{dx}{2\pi}}{|S|},$$

où $|S|$ désigne le cardinal de S.

Nous montrons que $\alpha^* = \inf_{-\pi<a<\pi} \alpha(a) = \sup_{x>0} \frac{\sin^2 x}{\pi x} = 0,23\ldots.$ et que $\alpha(a) = \alpha^*$ pour tout a tel que $\frac{a}{\pi}$ soit irrationnel ; nous étudions deux autres fonctions β et γ liées de façon naturelle à α.

I. Introduction et notations

B. Saffari nous a indiqué [5] l'inégalité suivante de J. M. Ash [1]. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I contenu dans $\left]-\pi, \pi\right]$, on ait :

$$(1) \qquad \sup_{\substack{S\subset Z \\ S \text{ fini}}} \frac{1}{|S|} \int_I \left|\sum_{n\in S} e^{inx}\right|^2 \frac{dx}{2\pi} \geq C.$$

L'existence de C est démontrée dans [1] d'abord en utilisant un théorème d'extension de multiplicateurs, ensuite par une méthode constructive mais qui en donne une minoration assez mauvaise. Dans [5], B. Saffari a montré qu'on a l'encadrement $0,23\ldots. = \sup_{x>0} \frac{\sin^2 x}{\pi x} \leq \alpha^* \leq \frac{1}{4} = 0,25$ et il a conjecturé que $\alpha^* = \frac{1}{4}$; nous montrerons d'une part que $\alpha^* = 0,2306\ldots.$ (théorème 4.1), d'autre part que l'étude de α est parallèle à celle de deux autres fonctions β et γ ayant $\frac{1}{4}$ pour minimum (proposition 2.1 et théorème 3.1). Nous aurons besoin des notations suivantes.

Soit T le cercle unité $\{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$, identifié à $R/2\pi Z$ via $t \to e^{it}$, muni de sa mesure de Haar normalisée $dm(t) = \frac{dt}{2\pi}$ (dt étant la mesure de Lebesgue de $]-\pi,\pi]$).

Soit $M(T)$ l'espace des mesures complexes régulières et bornées sur T. (Nos notations sont en général celles de [4]). Si $\mu\in M(T)$, soit $\hat{\mu} : n\in Z \longrightarrow \hat{\mu}(n) = \int_T e^{-int}\, d\mu(t)$.

Notons $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel complexe des polynômes trigonométriques sur T.

Si $a\in T$ et $\varepsilon>0$, on pose successivement

$$\alpha(a,\varepsilon) = \sup_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ \hat{P}^2=\hat{P}}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P(t)|^2\, dm(t)}{\int_T |P(t)|^2\, dm(t)} \;;\; \alpha(a) = \inf_{\varepsilon>0} \alpha(a,\varepsilon) \;;\; \alpha^* = \inf_{a\in T} \alpha(a)$$

$$\beta(a,\varepsilon) = \sup_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ \hat{P}\geq 0}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P(t)|^2\, dm(t)}{\int_T |P(t)|^2\, dm(t)} \;;\; \beta(a) = \inf_{\varepsilon>0} \beta(a,\varepsilon) \;;\; \beta^* = \inf_{a\in T} \beta(a)$$

$$\gamma(a,\varepsilon) = \sup_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\ Q\geq 0\\ \hat{Q}\geq 0}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} Q(t)\, dm(t)}{\int_T Q(t)\, dm(t)} \;;\; \gamma(a) = \inf_{\varepsilon>0} \gamma(a,\varepsilon) \;;\; \gamma^* = \inf_{a\in T} \gamma(a).$$

Nous montrons que $\beta^* = \gamma^* = \frac{1}{4}$, si bien que $\frac{1}{4}$ apparaît comme valeur critique pour les fonctions β et γ, mais pas pour la fonction α. On verra que les valeurs $\alpha(a)$, $\beta(a)$, $\gamma(a)$ dépendent de façon essentielle de $Gp[a]$, sous-groupe de T engendré par a.

Notons enfin

$$D_N(t) = \sum_{|n|\leq N} e^{int} \quad \text{(noyau de Dirichlet d'ordre } N)$$

$$F_N(t) = \sum_{|n|\leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{int} \quad \text{(noyau de Féjer d'ordre } N)$$

$\Delta_\delta(t) = \mathrm{Max}(1 - \frac{|t|}{\delta}, 0)$ si $-\pi < t \leq \pi$, $0 < \delta < \pi$ (Fonction triangle de support $[-\delta, \delta]$ dans T).

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{N\to\infty} \frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |D_N(t)|^2 \, dm(t)}{\int_T |D_N(t)|^2 dm(t)} = \lim_{N\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_N(t)\, dm(t) = 1)$.

$F_N \geq 0$; $\hat{F}_N \geq 0$; $\Delta_\delta \geq 0$; $\hat{\Delta}_\delta \geq 0$.

Si $b \in T$, δ_b désigne la masse de Dirac au point a.

Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

La remarque suivante nous sera utile.

Les fonctions α , β , γ sont paires, semi-continues supérieurement ( ) et $\alpha(a) \leq \beta(a) \leq \gamma(a)$ pour tout a de T.

(Soit $a \in T$ et $\delta > 0$; il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha(a,\varepsilon) \leq \alpha(a) + \delta$. Si $b \in T$ et $|b-a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $[b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}] \subset [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ et on a alors successivement $\alpha(b) \leq \alpha(b , \frac{\varepsilon}{2}) \leq \alpha(a,\varepsilon) \leq \alpha(a) + \delta$, ce qui prouve que α est s.-c. s. ; idem pour β et γ).

Dans toute la suite, nous poserons

(2) $E = \{ a \in T / a \in Gp\,[2a] \} \cup \{ \pi \} = \{ a = 2p\,\frac{\pi}{q}$ avec $(p,q) = 1$ et <u>q impair</u>$\} \cup \{\pi\}$

où (p,q) désigne comme d'habitude le p. g. c. d. des entiers p et q.

Nous rassemblons ci-dessous les principaux résultats obtenus sur les fonctions α , β , γ ; les démonstrations utilisent entre autres des raffinements des méthodes de B. Saffari ([5]) et de J.-P. Kahane ([3]).

i) Si $\frac{a}{\pi} \notin Q$, $\alpha(a) = \alpha^* = \sup_{x>0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 x}{x} = 0{,}2306 \ldots.$

ii) Si $a = 2p\,\frac{\pi}{q}$

$$\alpha(a) = \sup_{\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j} \frac{\left| \sum_{0}^{q-1} \varepsilon_j e^{2i\pi \frac{j}{q}} \right|^2}{q \sum_{0}^{q-1} \varepsilon_j} = \sup_{1 \leq r \leq q} \frac{\sin^2 r\,\pi/q}{r\,q\,\sin^2 \frac{\pi}{q}}$$

iii) $\lim\limits_{q\to\infty} \alpha(2\frac{\pi}{q}) = \alpha^*$.

Si $a \notin E$, on a : $\beta(a) = \gamma(a) = \beta^* = \gamma^* = \frac{1}{4}$.

iv) $\alpha(0) = 1$; $\alpha(\pi) = \frac{1}{2}$; $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \alpha(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$; $\alpha(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}+3}{24} = 0{,}24 \ldots$

$\alpha(2\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, $\alpha(\frac{2\pi}{5}) = \frac{3+\sqrt{5}}{20} = 0{,}26 \ldots.$

Nous étudions respectivement (par ordre de complexité croissante) les fonctions γ , β , α dans les paragraphes 2, 3, 4.

II. Etude de γ

Nous utiliserons le lemme suivant (cf. [5]).

LEMME 2.1. Soit $K \in L^1(T)$, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $\hat{K} \geq 0$ et $\hat{Q} \geq 0$. Alors pour tout $t_1 \in T$

$$\left|\int_T K(t+t_1)\, Q(t)\, dm(t)\right| \leq \int_T K(t)\, Q(t)\, dm(t).$$

Preuve.

$$\left|\int_T K(t+t_1) Q(t) dm(t)\right| = \left|\sum_{n\in Z} e^{-int_1} \hat{K}(-n)\hat{Q}(n)\right| \leq \sum_{n\in Z} \hat{K}(-n)\hat{Q}(n)$$

$$= \int_T K(t)\, Q(t)\, dm(t).$$

THEOREME 2.1. Soit E comme dans (2). Si $a \notin E$, alors $\gamma(a) \leq \frac{1}{4}$.

Preuve. Admettons provisoirement que pour tout $h > 0$ il existe $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ et $K \in L^1(T)$ ayant les propriétés suivantes :

i) $0 \leq K \leq 1$ et $\hat{K} \geq 0$

ii) $\operatorname{Supp} K \cap (I \cup -I) = \emptyset$ si $I = [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$

iii) $K(t-a) \geq 1 - h$ si $t \in I \cup -I$.

Posons alors $R = (I \cup -I)^c$. Si $Q \in \mathcal{P}$, $Q \geq 0$ et $\hat{Q} \geq 0$. On a, d'après les propriétés de K et le lemme 2.1 :

$$(1-h) \int_{I \cup -I} Q\, dm \leq \int_{I \cup -I} K(t-a)\, Q(t) dm(t) \leq \int_T K(t-a)\, Q(t)\, dm(t)$$

$$\leq \int_T K\, Q\, dm = \int_R K\, Q\, dm \leq \int_R Q\, dm.$$

Alors, vu la parité de Q

$$\int_T Q\, dm = \int_{I \cup -I} Q\, dm + \int_R Q\, dm \geq (2-h) \int_{I \cup -I} Q\, dm = (4-2h) \int_I Q\, dm.$$

D'où $\gamma(a,\varepsilon) \leq \frac{1}{4-2h}$ et donc $\gamma(a) \leq \frac{1}{4}$ puisque h est arbitraire.

Reste à prouver l'existence d'une fonction K vérifiant i), ii), iii) ; on prendra K sous la forme $\mu * \Delta_\delta$, où μ est une mesure positive, ainsi que $\hat{\mu}$, portée par $Gp\,[2a]$; si $a \in 2\pi Q \setminus E$, on posera $a = 2\frac{p\pi}{2q_1}$, avec $(p, 2q_1) = 1$. Et alors :

$$\begin{cases} \text{si } a = 2p\frac{\pi}{2q_1}, \text{ on prend } \mu = q_1 \text{ (mesure de Haar de } Gp\,[2a]) = \sum_{k=0}^{q_1-1} \delta_{2ka} \\ \text{si } \frac{a}{\pi} \notin Q, \text{ on prend } \mu = \sum_{|k| \leq N} F_N(k)\delta_{2ka}, \text{ où } N \text{ est un entier} \geq \frac{2}{h}. \end{cases}$$

Dans le premier cas $\hat{\mu}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin q_1 Z \\ q_1 & \text{si } n \in q_1 Z. \end{cases}$

Dans le deuxième cas $\hat{\mu}(n) = F_N(-2na)$. On a donc bien $\mu \geq 0$, $\hat{\mu} \geq 0$. Soit alors $\delta > 0$ tel que les intervalles $[ja-\delta\,, ja+\delta]$ soient deux à deux disjoints si j est tel que

$$ja \in \operatorname{supp} \mu \cup (a + \operatorname{supp} \mu).$$

Soit enfin $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \delta$ et $(1 - \frac{\varepsilon}{\delta})(1 - \frac{h}{2}) \geq 1-h$. En définitive, on a :

si $a = 2\frac{p\pi}{2q_1}$, $\quad K(t) = \sum_{k=0}^{q_1-1} \Delta_\delta(t - 2ka)$

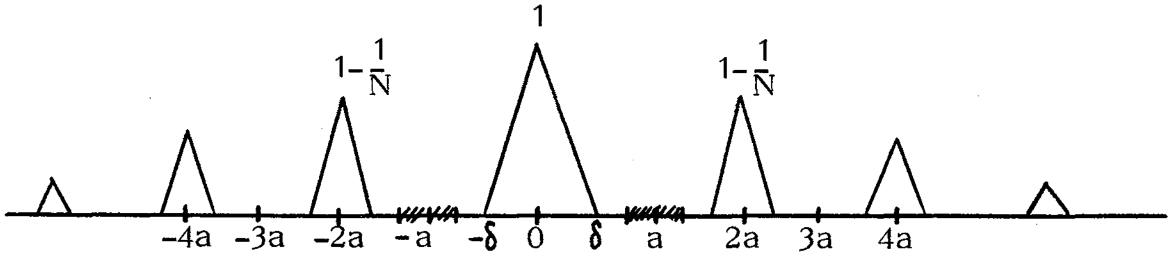
si $\frac{a}{\pi} \notin Q$ $\qquad K(t) = \sum_{|k|\leq N} \hat{F}_N(K)\, \Delta_\delta(t - 2ka).$

Les propriétés i) et ii) de K sont évidentes ; la propriété iii) découle des trois relations suivantes :

$$\Delta_\delta(t) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \text{si} \quad |t| \leq \varepsilon \quad ; \quad \hat{F}_N(-1) = 1 - \frac{1}{N} \geq 1 - \frac{h}{2}$$

$$(1 - \frac{\varepsilon}{\delta})(1 - \frac{h}{2}) \geq 1 - h.$$

Le graphe de K, par exemple dans le cas $\frac{a}{\pi} \notin Q$, a l'allure suivante :



Remarque. Si $a = \pi$, en prenant $K(t) = \Delta_{\frac{\pi}{2}}(t) + \Delta_{\frac{\pi}{2}}(t - \pi)$, on montre que $\gamma(\pi) \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_N(2t)\, dm(t)}{\int_T F_N(2t)\, dm(t)} = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \gamma(\pi) = \frac{1}{2}.$$

Si $a = 2\,\frac{\pi}{3}$, en prenant $K(t) = \Delta_{\frac{\pi}{3}}(t)$, on montre que $\gamma(2\,\frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{3}$ et en considérant comme ci-dessus $F_N(3t)$, on conclut que $\gamma(2\,\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$. Ceci montre bien que si $a \in E$, $\gamma(a)$ peut être supérieur à $\frac{1}{4}$.

La proposition suivante se déduit du théorème 3.1, mais on en donne une preuve directe.

PROPOSITION 2.1. $\gamma^* = \frac{1}{4}$ et, si $a \notin E$, $\gamma(a) = \frac{1}{4}$.

Preuve. $\gamma(a) = 1$ si $a = 0$ et $\frac{1}{2}$ si $a = \pi$. Si $0 < a < \pi$, montrons que $\gamma(a) \geq \frac{1}{4}$. Soit $\varepsilon < a$ et $I = [a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon]$; posons

$$Q_N(t) = F_N(t) + \frac{1}{2}\left[F_N(t+a) + F_N(t-a)\right] = \sum_{n\in Z} \hat{F}_N(n)(1 + \cos na)\, e^{int}$$

$Q_N \in \mathcal{P}$, $Q_N \geq 0$, $\hat{Q}_N \geq 0$ et

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\int_I Q_N\, dm}{\int_T Q_N\, dm} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_I Q_N\, dm = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4}\int_I F_N(t-a)\, dm(t) = \frac{1}{4}.$$

D'où le résultat.

III. Etude de β

D'après le théorème 2.1, si $a \notin E$, $\beta(a) \leq \gamma(a) \leq \frac{1}{4}$. On retrouvera cette majoration au paragraphe IV par une autre méthode ; pour la minoration de β, on utilisera le lemme suivant, analogue discret de [3], pour lequel on aura besoin de la notation suivante ; si $a \in T$ et $q' \in N^*$, posons

(*) $$F(a,q') \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\varepsilon_j \geq 0} \frac{\left|\sum_{j=0}^{q'-1} \varepsilon_j\, e^{2i\pi j/q'}\right|^2}{q' \sum_{0}^{q'-1} \varepsilon_j^2}.$$

Nous avons alors

LEMME 3.1.

i) Si $a = 2p\frac{\pi}{q}$, alors

(3) $$\beta(a) \geq F(2\frac{\pi}{q}, q) \geq \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} (\cos^+ 2j\frac{\pi}{q})^2.$$

ii) Pour tout $a \in T$, on a

(4) $$\beta(a) \geq \frac{1}{4}.$$

Preuve. i) Soient $\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_{q-1}$ donnés avec $\varepsilon_j \geq 0$, et cherchons $\mu = \sum_{k=0}^{q-1} c_k\, \delta_{ka}$, portée par $Gp[a]$, de façon à avoir $\hat{\mu}(j) = \varepsilon_j$ pour $0 \leq j \leq q-1$.

Cela s'écrit $\sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{-ijka} = \varepsilon_j$ et d'après la formule d'inversion de Fourier sur le groupe fini $\mathrm{Gp}\,[a]$

(5) $$c_k = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \varepsilon_j e^{ijka}, \qquad 0 \le k \le q-1.$$

On a alors $\hat{\mu}(n) \ge 0$ pour tout $n \in Z$, puisque $\hat{\mu}$ est q-périodique ; soit d'autre part N un entier ≥ 1 et posons

$$P_N = \mu * D_N \qquad (\text{Noter que } \hat{P}_N = \hat{\mu}.\hat{D}_N \ge 0).$$

Si $\varepsilon < \frac{\pi}{q}$, les intervalles $[ka-\varepsilon\ ,\ ka+\varepsilon]$ sont deux à deux disjoints pour $0 \le k \le q-1$ et on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P_N|^2\, dm}{\int_T |P_N|^2 dm} = \lim_{N\to\infty} \frac{|c_1|^2 \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |D_N(t-a)|^2 dm(t)}{\Sigma |c_k|^2 \int_{ka-\varepsilon}^{ka+\varepsilon} |D_N(t-ka)|^2 dm(t)} = \frac{|c_1|^2}{\Sigma |c_k|^2}.$$

D'après (5) et le théorème de Plancherel sur $\mathrm{Gp}\,[a]$, on a $\Sigma |c_k|^2 = \frac{1}{q}\Sigma\, \varepsilon_j^2$ et ceci prouve la première inégalité de (3), car $\mathrm{Gp}\,[a] = \mathrm{Gp}\,[2\frac{\pi}{q}]$; pour la deuxième inégalité, il suffit de minorer $|\Sigma\, \varepsilon_j e^{2i\pi j/q}|$ par $|\Sigma\, \varepsilon_j \cos 2\pi\frac{j}{q}|$ et de prendre $\varepsilon_j = \cos^+ 2\pi\frac{j}{q}$ où l'on pose comme d'habitude, pour $x \in R$: $x^+ = x$ si $x \ge 0$, $x^+ = 0$ si $x < 0$.

ii) Soit d'abord a tel que $\frac{a}{\pi} \notin Q$; il existe une suite $(\frac{p_n}{q_n})$ de rationnels telle que $2\pi\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow a$ et $q_n \longrightarrow \infty$; d'après le fait que β est s.-c.s. et d'après (3)

$$\beta(a) \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \beta(2\pi\, \frac{p_n}{q_n}) \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{q_n} \sum_{j=0}^{q_n-1} (\cos^+ 2j\, \frac{\pi}{q_n})^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos^+ t)^2\, dt = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\beta(a) \ge \frac{1}{4}$ si $\frac{a}{\pi} \notin Q$; puisque β est s.-c.s., on a $\beta(a) \ge \frac{1}{4}$ pour tout $a \in T$. On a alors le théorème suivant.

THEOREME 3.1.

i) <u>Si</u> $a = 2p\frac{\pi}{q}$, $\beta(a) = F(2\frac{\pi}{q},q)$

ii) <u>Si</u> $a \notin E$, $\beta(a) = \frac{1}{4}$

iii) <u>On a donc</u> $\beta^* = \frac{1}{4}$.

<u>Preuve</u>. i) D'après (3), on a déjà $\beta(a) \geq F(2\frac{\pi}{q},q)$. L'inégalité inverse sera démontrée au IV.

ii) et iii) résultent de (4) et du théorème 2.1 via l'inégalité $\beta(a) \leq \gamma(a)$. En particulier, on voit que si $a = 2p\frac{\pi}{q}$ avec q pair, on a

$$F(2\frac{\pi}{q}, q) = \frac{1}{4}.$$

IV. <u>Etude de</u> α

Si $a \in T$ et $q' \in N^*$, posons

$$(**) \qquad E(a,q') \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon_j^2=\varepsilon_j} \frac{\left|\sum_{j=0}^{q'-1} \varepsilon_j e^{ija}\right|^2}{q' \sum_{0}^{q'-1} \varepsilon_j}.$$

Le lemme technique suivant servira à donner une expression plus simple de $E(\frac{2\pi}{q}, q)$, qui sera utile pour la majoration de α.

LEMME 4.O. <u>Soit</u> q <u>un entier</u> ≥ 1, $a = e^{2i\pi/q}$, $A = \{a, a^2, \ldots, a^q\}$, r <u>entier</u> ≥ 1, <u>et</u> $F \subset A$ <u>avec</u> $|F| = r$, <u>posons</u> $S_F = \sum_{z \in A} z$; <u>alors</u>

i) $|S_F| \leq |a + a^2 + \ldots + a^r|$

ii) $E(2\frac{\pi}{q},q) = \frac{\pi}{(q \sin\frac{\pi}{q})^2} \sup_{1\leq r\leq q} \frac{\sin^2 r\pi/q}{r\pi/q}$.

<u>Preuve</u>. Faisons d'abord les deux remarques suivantes.

(R_1) On peut supposer $r \le \frac{q}{2}$

(R_2) $|a+a^2+\ldots+a^r|$ croît avec r quand $1 \le r \le \frac{q}{2}$.

En effet, si le cas $r \le \frac{q}{2}$ est traité et si $|F| = r$, $r > \frac{q}{2}$, étant donné que $q-r \le \frac{q}{2}$ et que $S_A = 0$

$$|S_F| = |S_{A\setminus F}| \le |a+\ldots+a^{q-r}| = |a^{r+1}+\ldots+a^q| = |a+a^2+\ldots+a^r|.$$

D'où (R_1).

D'autre part, $|a+\ldots+a^r| = \dfrac{|a^r-1|}{|a-1|} = \dfrac{\sin\frac{r}{q}\pi}{\sin \pi/q}$ et (R_2) découle alors du fait que $\sin x$ croît sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cela étant, on va raisonner par récurrence sur r, $1 \le r \le \frac{q}{2}$; supposons le résultat acquis pour $|F| \le r-1$ et soit $F \subset A$ avec $|F| = r$. On peut faire l'hypothèse suivante :

(6) $$G \subset F \Longrightarrow |S_G| \le |S_F|.$$

Car s'il existe $G \subset F$ tel que $|S_G| > |S_F|$ et $|G| = s \le r-1$, on a d'après l'hypothèse de récurrence et (R_2)

$$|S_F| < |S_G| \le |a+\ldots+a^s| \le |a+\ldots+a^r|.$$

Si (6) a lieu, $|S_F| \ge 1$, donc $S_F \ne 0$; soit D le diamètre du cercle unité perpendiculaire à S_F, et D^+ le demi-plan fermé limité par D qui contient S_F. $F \subset D^+$ car s'il existe $w \in F$, $w \notin D^+$, posons $G = F\setminus\{w\}$, alors :

$$|S_G| = |S_F - w| \ge (|S_F|^2+1)^{1/2} > |S_F| \quad (S_F \text{ et } -w \text{ faisant un angle aigu})$$

et ceci contredit (6). Si $F \subset D^+$, on a aussi $F \subset \Delta^+$, où Δ est un diamètre du cercle unité joignant b et $-b$, avec $b \in \mathrm{Gp}\,[a]$, et Δ^+ un des demi-plans fermés limités par Δ. Quitte à faire une rotation dans $\mathrm{Gp}\,[a]$, on peut alors supposer :

$$F = \{a^{k_1}, \ldots, a^{k_r}\} \text{ avec } 1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le \frac{q}{2}.$$

On a alors, vu la décroissance de $\cos x$ sur $[0,\pi]$ et l'inégalité $0 \leq (j-i)\,2\frac{\pi}{q} \leq (k_j-k_i)\,2\frac{\pi}{q} \leq \pi$ pour $1 \leq i < j \leq r$:

$$|S_F|^2 = r + 2 \sum_{1\leq i<j\leq r} \cos(k_j-k_i)2\frac{\pi}{q} \leq r + 2 \sum_{1\leq i<j\leq r} \cos(j-i)\,2\frac{\pi}{q} = |a+a^2+\ldots+a^r|^2.$$

D'où i). ii) découle immédiatement de i) et de la relation :

$$\left|e^{2i\frac{\pi}{q}} + e^{4i\frac{\pi}{q}} + \ldots + e^{2ri\frac{\pi}{q}}\right| = \frac{\sin r\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{q}}.$$

LEMME 4.1. i) <u>Si</u> $a = 2p\frac{\pi}{q}$, <u>on a</u> :

(7) $$\alpha(a) \geq E(2\frac{\pi}{q}, q).$$

ii) <u>Pour tout</u> $a \in T$, <u>on a</u> :

(8) $$\alpha(a) \geq \sup_{x>0} \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x}{x} = 0{,}2306\ldots$$

<u>Preuve</u>. i) A $\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_{q-1}$ donnés, avec $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j$, on associe comme dans le lemme 3.1 $\mu = \sum_o^{q-1} c_k\,\delta_{ka}$ où les c_k sont donnés par (5) ; $P_N = \mu * D_N$ vérifie $\hat{P}_N^2 = \hat{P}_N$ et le même calcul que précédemment donne :

$$\alpha(a) \geq \frac{\left|\sum_o^{q-1} \varepsilon_j e^{ija}\right|^2}{q\sum \varepsilon_j^2} = \frac{\left|\sum_o^{q-1} \varepsilon_j e^{ija}\right|^2}{q\sum \varepsilon_j}$$

(7) découle alors du fait que $\mathrm{Gp}\,[a] = \mathrm{Gp}\,[\frac{2\pi}{q}]$.

ii) Soit d'abord a tel que $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$; il existe une suite $(\frac{p_n}{q_n})$ de rationnels telle que $2\pi\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow a$ et $q_n \longrightarrow \infty$. D'après le fait que α est s.-c.s., d'après (7) et le lemme (4.0) :

$$\alpha(a) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \alpha(2\pi\frac{p_n}{q_n}) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{(q_n \sin\frac{\pi}{q_n})^2} \sup_{1\leq r\leq q_n} \frac{\sin^2\frac{r}{q_n}\pi}{\frac{r}{q_n}\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{0<x<\pi} \frac{\sin^2 x}{x} = \sup_{x>0} \frac{\sin^2 x}{\pi x} = 0,2306\ldots\ldots$$

Ainsi $\alpha(a) \geq 0,2306\ldots$ pour tout a tel que $\frac{a}{\pi} \notin Q$; puisque α est s.-c.s., $\alpha(a) \geq 0,2306\ldots$ pour tout $a \in T$.

Le lemme suivant est fondamental pour la détermination de α^* ; il joue pour la fonction α le rôle que jouait le lemme 2.1 pour la fonction γ ; il va également permettre de compléter la preuve du théorème 3.1.

LEMME 4.2. Soit $a \in T$ et q' un entier ≥ 1 ; alors

(9) $\beta(a) \leq F(a,q')$

(10) $\alpha(a) \leq E(a, q')$.

Preuve. Les deux expressions à droite dans (*) et (**) sont les mêmes, seuls les sup portent sur des ensembles différents ; il en est de même pour les expressions qui donnent $\alpha(a)$ et $\beta(a)$; il est donc clair qu'il suffit de prouver par exemple (10).

Soit $P \in \mathcal{P}$ avec $\hat{P}^2 = \hat{P}$; on peut écrire

$$P(t) = \sum_{0\leq j\leq q'-1} e^{ijt} P_j(q't) \quad \text{où} \quad P_j \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \hat{P}_j^2 = \hat{P}_j.$$

Posons

$$Q(t) = \sum_{0\leq j\leq q'-1} e^{ija} P_j(q't) = R(q't)$$

avec

$$R(t) = \sum_{0\leq j\leq q'-1} e^{ija} P_j(t).$$

Soit $\varepsilon < \frac{\pi}{q'}$, et $I = [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$. On a pour $t \in I$, par Cauchy-Schwarz

$$|P(t) - Q(t)|^2 \leq \Big(\sum_{0\leq j\leq q'-1} |e^{ijt} - e^{ija}|^2\Big)\Big(\sum_{0\leq j\leq q'-1} |P_j(q't)|^2\Big) \leq q'^3 \varepsilon^2 \sum_j |P_j(q't)|^2.$$

Donc

$$\int_I |P(t)-Q(t)|^2 dm(t) \leq q'^3 \varepsilon^2 \sum_j \int_{-\pi/q'}^{\pi/q'} |P_j(q't)|^2 \frac{dt}{2\pi} = q'^2 \varepsilon^2 \sum_j \int_{-\pi}^{\pi} |P_j(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= q'^2 \varepsilon^2 \sum_j \int_T |P_j|^2 \, dm.$$

De même, nous avons

$$\int_I |Q(t)|^2 dm(t) \leq \int_{a-\pi/q'}^{a+\pi/q'} |R(q't)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{q'} \int_{q'a-\pi}^{q'a+\pi} |R(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{q'} \int_T |R|^2 dm$$

$$= \frac{1}{q'} \sum_n |\hat{R}(n)|^2 = \frac{1}{q'} \sum_n \Big|\sum_j e^{ija} \hat{P}_j(n)\Big|^2 \leq \frac{1}{q'} \sum_n q' \, E(a,q') \sum_j \hat{P}_j(n) = E(a,q') \sum_j \int_T |P_j|^2$$

puisque $\hat{P}_j^2 = \hat{P}_j$. En remarquant que $\int |P|^2 \, dm = \sum_j \int_T |P_j|^2$, nous avons donc :

$$\left(\frac{\int_I |P|^2 dm}{\int_T |P|^2 dm}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{\int_I |P-Q|^2 dm}{\int_T |P|^2 dm}\right)^{1/2} + \left(\frac{\int_I |Q|^2 dm}{\int_T |P|^2 dm}\right)^{1/2} \leq \varepsilon q' + \sqrt{E(a, q')} \, ,$$

soit

(11) $$\sqrt{\alpha(a,\varepsilon)} \leq \varepsilon \, q' + \sqrt{E(a, q')} \quad \text{si} \quad \varepsilon < \frac{\pi}{q'} \, .$$

D'où (10) en faisant tendre ε vers 0 ; idem pour (9). Nous pouvons alors énoncer :

THEOREME 4.1.

i) <u>Si</u> $a = 2p\,\frac{\pi}{q}$, $\qquad \alpha(a) = \dfrac{\pi}{(q \sin \frac{\pi}{q})^2} \sup\limits_{1 \leq r \leq q} \dfrac{\sin^2 r \frac{\pi}{q}}{r \frac{\pi}{q}}$.

ii) <u>Si</u> $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $\qquad \alpha(a) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{\sin^2 x}{\pi x} = 0{,}2306 \ldots$

iii) <u>On a donc</u> $\alpha^* = \sup\limits_{x>0} \dfrac{\sin^2 x}{\pi x} = 0{,}2306 \ldots$

<u>Preuve</u>. i) découle immédiatement de (7) et (10). Si $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, d'après le théorème de Dirichlet [2], il existe une suite $(\frac{p_n}{q_n})$ de rationnels telle que $q_n \to \infty$ et $\left|a - 2\pi \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{2\pi}{q_n^2}$.

D'après l'inégalité évidente $\alpha(a) \leq \alpha(b\ ,\ 2|b-a|)$ pour tous $a,b \in T$ et d'après (i) et (11), nous avons successivement :

$$\sqrt{\alpha(a)} \leq \sqrt{\alpha(2\pi\,\frac{p_n}{q_n}\ ,\ \frac{4\pi}{q_n^2})} \leq \frac{4\pi}{q_n} + \sqrt{E(2\,\frac{\pi}{q_n},q_n)}.$$

Quand $n \to \infty$, $E(2\,\frac{\pi}{q_n},q_n) \longrightarrow \sup\limits_{x>0} \frac{\sin^2 x}{\pi x}$; on obtient donc à la limite, en élevant au carré :

$$\alpha(a) \leq \sup_{x>0} \frac{\sin^2 x}{\pi x}\ .$$

iii) découle immédiatement de ii) et de 8). Faisons pour terminer quelques remarques.

Remarque 1. L'expression obtenue au théorème 4.1 pour $\alpha(2\,p\,\frac{\pi}{q})$ justifie certaines valeurs annoncées dans l'introduction. Par exemple :

$\alpha(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$ correspond à $q = 6$, $r = 2$

$\alpha(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}+3}{24}$ correspond à $q = 8$, $r = 3$

$\alpha(2\,\frac{\pi}{5}) = \frac{3+\sqrt{5}}{20}$ correspond à $q = 5$, $r = 2$.

Remarque 2. On peut donner l'expression suivante de $\alpha(a,\varepsilon)$:

$$\alpha(a,\varepsilon) = \sup_{\substack{0\leq \hat{P}\leq 1 \\ P\in\mathcal{P}}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P|^2 dm}{P(0)}\ .$$

En effet, si $0 \leq \hat{P} \leq 1$, on peut écrire P comme combinaison convexe finie :

$$P = \Sigma\,\lambda_j\,P_j \qquad \text{avec} \qquad \hat{P}_j^2 = \hat{P}_j\ ,$$

d'où

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P|^2\,dm \leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \Sigma\,\lambda_j\,|P_j|^2 dm \leq \Sigma\,\lambda_j \alpha(a,\varepsilon)\,P_j(0) = \alpha(a,\varepsilon)\,P(0)\ ,$$

d'où l'expression annoncée pour $\alpha(a,\varepsilon)$.

Remarque 3. Pour minorer $\alpha(a)$ et $\beta(a)$, on a commencé par le cas $\frac{a}{\pi} \in Q$ et on est passé au cas général en utilisant la semi-continuité de α et β. On peut adopter le point de vue inverse et minorer d'abord $\alpha(a)$ et $\beta(a)$ quand $\frac{a}{\pi} \notin Q$; on procède comme dans le lemme (3.1) ; si $\varphi = \Sigma\, c_k e^{ikt} \in \mathcal{P}$, avec $0 \leq \varphi \leq 1$, on lui associe

$$\mu = \Sigma\, c_k\, \delta_{ka} \quad \text{et} \quad P = \mu * D_N \quad ; \quad 0 \leq \hat{P}_N \leq 1 \quad ;$$

on conclut par le même calcul que dans le lemme (3.1), en utilisant la remarque 2 pour α.

Remarque 4. Soit $s \in [2,\infty[$; posons, si $a \in T$ et $\varepsilon > 0$

$$\alpha_s(a,\varepsilon) = \sup_{\substack{P \in \hat{\mathcal{R}} \\ P^2 = P}} \frac{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |P|^s\, dm}{\int_T |P|^s dm} \quad ; \quad \alpha_s(a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_s(a,\varepsilon) \quad ; \quad \alpha_s^* = \inf_{a \in T} \alpha_s(a).$$

(Avec ces notations, $\alpha = \alpha_2$). Alors on vérifie que $\alpha_s^* > 0$. En effet, si $a = 2p\frac{\pi}{q}$, un calcul analogue à celui du lemme 3.1 montre que

$$\alpha_s(a) \geq \sup_{\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j} \frac{\left|\sum\limits_{j=0}^{q-1} \varepsilon_j e^{ij2\frac{\pi}{q}}\right|^s}{\sum\limits_{0 \leq \ell \leq q-1} \left|\sum\limits_{0 \leq j \leq q-1} \varepsilon_j e^{ij\ell 2\frac{\pi}{q}}\right|^s} .$$

Pour cela, posons

$$d_\ell = \sum_{j=0}^{q-1} \varepsilon_j e^{ij\ell\frac{2\pi}{q}} \quad , \quad 0 \leq \ell \leq q-1. \quad \text{Alors puisque} \quad s \geq 2$$

$$\sum_{\ell=0}^{q-1} |d_\ell|^s \leq \Big(\sum_{\ell=0}^{q-1} |d_\ell|^2\Big)^{s/2} \quad \text{d'où}$$

$$\alpha_s(a) \geq \sup_{\varepsilon_j^2=\varepsilon_j} \left(\frac{|d_1|^2}{\Sigma\, |d_\ell|^2}\right)^{s/2} \geq (0{,}2306\ldots.)^{s/2} \quad \text{d'après (8).}$$

Puisque α_s est s.-c.s., on a $\alpha_s^* \geq (0,2306\ldots)^{s/2}$.

Bibliographie

[1] ASH, J. M. Weak restricted and very restricted operators on L^2. A paraître.

[2] HARDY and WRIGHT Theory of numbers.

[3] KAHANE, J.-P. Lettre adressée à B. Saffari du 1.11.82

[4] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Inters. Publ. N. Y. 1962

[5] ASH, J. M., JONES, R., SAFFARI, B. Inégalités sur des sommes d'exponentielles. C. R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHEMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Exposé no. 2 Année 1982-83

Jean Bourgain

SUR LE MINIMUM DE CERTAINES SOMMES DE COSINUS

Résumé. Nous montrons qu'il existe $c > 0$ tel que si n et N sont des entiers positifs satisfaisant $n < N \leq n\, 2^{\sqrt{\log n}}$, alors pour tous entiers $1 \leq k_1 < k_2 < k_n \ldots < k_n \leq N$

$$\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} \cos k_j \theta \leq -2^{c\sqrt{\log n}}.$$

Le problème de la détermination du minimum d'une somme de cosinus trouve son origine dans les travaux de N. C. Ankeny et S. Chowla sur la fonction zeta de Dedekind [2].

S. K. Pichorides dans [5] donne les estimations connues sur ce minimum avant la résolution de la conjecture de Littlewood [4]. Comme conséquence directe de [4], il existe $C > 0$ tel que pour tous entiers $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ on a

$$\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} \cos k_j \theta \leq -C \log n.$$

Dans [1] nous améliorons ce résultat en montrant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$,

$$\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} \cos k_j \theta \leq -2^{(\log n)^{\varepsilon}}.$$

Nous montrons ici le résultat suivant.

THEOREME. Il existe $c > 0$ tel que si n et N sont des entiers positifs satisfaisant $n < N \leq n\, 2^{\sqrt{\log n}}$ alors pour tous entiers $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq N$ on a

$$\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} \cos k_j \theta \leq - 2^{c\sqrt{\log n}} .$$

L'intérêt de cet énoncé réside surtout dans la simplicité de sa démonstration, par rapport à celle correspondant au cas où la suite d'entiers $1 \leq k_1 < \ldots < k_n$ est quelconque.

La démonstration utilisera deux lemmes simples. Rappelons que T désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 identifié à $\mathbf{R}/2\pi Z$ ou $[-\pi, \pi[$, muni de la mesure de Haar normalisée $dm(t) = \frac{dt}{2\pi}$ (dt mesure de Lebesgue dans $[-\pi, \pi[$). Nous employons les notations usuelles concernant les espaces $L^p(T)$ et $H^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$ [3].

LEMME.1. Soient $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ dans $\mathbf{Z}$ et $F(\theta) = \sum_{j=1}^{n} e^{ik_j\theta}$. Alors

$$\int_E |F|\, dm > \frac{6}{5} \qquad \text{où} \qquad E = \left\{ |F| > 10^{-4} \|F\|_1^{-1}\, n \right\}.$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathcal{H}$ la transformée de Hilbert, définie pour tout polynôme trigonométrique P par

$$\mathcal{H}(P) = i \sum_{k<0} \hat{p}(k)\, e^{ik\theta} - i \sum_{k \geq 0} \hat{p}(k)\, e^{ik\theta} .$$

Posons

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{|F|}{n}$$

$$\psi = \alpha \exp(i\, \mathcal{H}(\log \alpha)).$$

Alors ψ est une fonction de $H^\infty(T)$ et $\|\psi\|_\infty \leq 1$ (si $h = \log \alpha + i\, \mathcal{H}(\log \alpha)$, $\hat{h}(n) = 0$ si $n < 0$ et $\psi = \exp(h)$ est dans H^∞, $|\psi| = \alpha \leq 1$; en fait ψ est une fonction extérieure [3]).

Soit $r \leq n$ un entier que nous préciserons par la suite. Posons

$$G = \sum_{j=1}^{r} e^{ik_j\theta}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\overline{F}}{n} + \frac{\overline{G}}{r}\psi .$$

Alors

$$|\varphi| \leq \frac{1}{2}\frac{|F|}{n} + |\psi| = \frac{1}{2}\frac{|F|}{n} + \alpha = 1$$

et puisque $sp(\psi) \subset Z_+$,

$$\int_T F\varphi\, dm = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\int_T F\overline{G}\psi\, dm = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\int |G|^2 \psi\, dm.$$

Maintenant

$$\left|\int_T |G|^2 \psi\, dm - r\right| \leq \int_T |G|^2 |1-\psi| dm \leq r\|G\|_2 \, \|1-\psi\|_2$$

et

$$|1-\psi| \leq |1-\alpha| + 2\left|\sin \frac{1}{2}\mathcal{H}(\log\alpha)\right|$$

d'où

$$\|1-\psi\|_2 \leq \|1-\alpha\|_2 + \|\mathcal{H}(\log\alpha)\|_2 \leq \frac{1}{2n}\|F\|_2 + \|\log\alpha\|_2 .$$

Puisque

$$|\log(1-x)| \leq 2x \qquad (0 \leq x \leq \tfrac{1}{2})$$

on a

$$\|\log\alpha\|_2 = \left\|\log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{|F|}{n}\right)\right\|_2 \leq \frac{1}{n}\|F\|_2$$

donc

$$\|1-\psi\|_2 \leq \frac{3}{2n}\|F\|_2 = \frac{3}{2\sqrt{n}} .$$

On déduit de ce qui précède

$$\left|\int_T F\varphi\, dm - \frac{3}{2}\right| \leq \|G\|_2 \, \|1-\psi\|_2 \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{r}{n}} = \frac{3}{20}$$

si on choisit $r = 10^{-2}n$. Dans ce cas

$$\|\varphi\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{r}} < \frac{11}{\sqrt{n}}$$

et on trouve

$$\frac{4}{3} \leq \left|\int_T F\,\varphi\,dm\right| \leq \int_E |F|\,dm + \|\varphi\|_2\left(\int_{E^c} |F|^2\,dm\right)^{1/2} \leq \int_E |F|\,dm + \frac{11}{100}$$

d'où le lemme.

Dans la suite, pour toute fonction $f \in L^1(T)$ nous noterons $f^{(r)} = f * \ldots * f$ (r fois).

LEMME 2. Soit F comme dans le lemme 1 et supposons aussi $sp(F) \subset [-N, N]$. Soit $\rho > 0$, posons $E = \{|F| > \rho n\}$ et $dE = E + \ldots + E$ (d fois, $d \geq 1$ entier). Alors

$$|d\,E| \leq \left(\frac{2d\|F\|_1}{\rho^2}\;\frac{N}{n}\right)^d \frac{1}{n}$$

(où $|dE|$ désigne la mesure de Haar de l'ensemble dE).

<u>Démonstration</u>. Posons $f = |F|$. Soient $t_1, \ldots, t_d$ dans E, et $t = t_1 + \ldots + t_d$. Alors pour tout $\delta > 0$,

$$f^{(d)}(t) \geq \int_{-\delta}^{\delta} \ldots \int_{-\delta}^{\delta} f(x_1+t_1)\ldots f(x_{d-1}+t_{d-1})\, f(t_d - x_1 - \ldots - x_{d-1})\, dx_1 \ldots dx_{d-1}.$$

D'après l'hypothèse sur le spectre de F,

$$|f(x+t') - f(t')| \leq |x|\,\|F'\|_\infty \leq n\,N\,|x| \qquad (x, t' \in T)$$

d'où

$$f(x_i + t_i) \geq f(t_i) - n\,N\,|x_i| \geq \rho n - n\,N\,\delta_1 \geq \frac{\rho}{2}\,n$$

si $|x_i| \leq \delta_1 = \rho/2N$, pour $1 \leq i \leq d-1$.

Posons $\delta = (d-1)^{-1}\,\delta_1$, alors on a aussi $f(t_d - x_1 - \ldots - x_{d-1}) \geq f(t_d) - nN\,\delta_1 \geq \frac{\rho}{2} n$ si $|x_i| \leq \delta$, $1 \leq i \leq d-1$, et on obtient :

$$f^{(d)}(\theta) \geq (\tfrac{\rho}{2} n)^d \, (2\delta)^{d-1} \geq \left(\frac{\rho^2 n}{2dN}\right)^d n.$$

Puisque

$$\|F\|_1^d \geq \int_{dE} f^{(d)}\,dm \geq |dE| \left(\frac{\rho^2 n}{2dN}\right)^d n$$

le lemme en découle.

<u>Démonstration du théorème</u>. Posons $g(\theta) = 2 \sum_{1 \leq j \leq n} \cos k_j\theta = \sum_{1 \leq j \leq n} (e^{ik_j\theta} + e^{-ik_j\theta})$.

Soient $g^+(\theta) = \sup(g(\theta), 0)$ et $g^-(\theta) = \sup(-g(\theta), 0)$ pour $\theta \in T$. Alors $|g| = g^+ + g^- = g + 2g^-$ et pour tout entier $d \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} |g|^{(d)} &= (2g^- * |g|^{(d-1)}) + (g * |g|^{(d-1)}) \\ &= (2g^- * |g|^{(d-1)}) + (2g^- * g * |g|^{(d-2)}) + (g^{(2)} * |g|^{d-2}) \\ &= \ldots = \sum_{0 \leq r \leq d-1} (2g^- * g^{(r)} * |g|^{d-r-1}) + g^{(d)} \end{aligned}$$

(on rappelle que pour $g \in L^1(T)$, et $d \geq 1$, $g^{(d)} = g * \ldots * g$ (d fois) et que $g^{(0)} = \delta$, mesure de Dirac en zéro).

Mais $g^{(r)} = g$ pour $r \geq 1$, d'où

$$|g|^{(d)} \leq 2d(g^- * |g|^{d-1}) + |g| \leq 2d\|g^-\|_\infty \|g\|_1^{d-1} + |g|.$$

Aussi, si χ_E désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $E \subset T$,

$$|g\chi_E|^{(d)} \leq |g|^{(d)} \chi_{dE}$$

ce qui donne, en intégrant et en utilisant lemme 1,

$$(\tfrac{6}{5})^d \leq \left(\int_T |g\,\chi_E|\,dm\right)^d = \int_T |g\,\chi_E|^{(d)}\,dm \leq \int_T |g|^{(d)}\,\chi_{dE}\,dm \leq$$

$$\leq 2d\|g^-\|_\infty \|g\|_1^{d-1}\,|dE| + \|g\|_1$$

si $E = \left\{|g| > 10^{-4}\,\|g\|_1^{-1}(2n)\right\}$. D'après le lemme 2 (où $\rho = 2.10^{-4}\|g\|_1^{-1}$),

$|dE| \leq (4.10^8\; d\|g\|_1^3\; \frac{N}{n})^d\,\frac{1}{n}$.

Puisque $\int_T g\,dm = 0$, on a $\|g\|_1 = 2\int_T g^-\,dm \leq 2\|g^-\|_\infty$. Finalement,

$$(\tfrac{6}{5})^d \leq (2^6.10^8.\|g^-\|_\infty^3\,\tfrac{N}{n})^d\,\frac{d^{d+1}}{n} + 2\|g^-\|_\infty .$$

Supposons $\|g^-\|_\infty < \frac{1}{4}\,(\frac{6}{5})^d$. Dans ce cas, puisque par hypothèse $N < n\,2^{\sqrt{\log n}}$,

$$(\tfrac{6}{5})^d < (10^8\,(\tfrac{6}{5})^{3d}\,2^{\sqrt{\log n}})^d\,\frac{d^{d+1}}{n} + \frac{1}{2}\,(\tfrac{6}{5})^d$$

soit,

$$n < 2.10^{8d}\,(\tfrac{6}{5})^{3d^2-d}\,2^{(d\sqrt{\log n} + (d+1)\frac{\log d}{\log 2})}$$

Soit $d = c\,\sqrt{\log n}$. Dans ce cas, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n < 2^{1+c\,C\,\log n}$$

et on aboutit à une contradiction pour c suffisamment petit et $n > 2$. Pour $n = 2$ on vérifie directement que le minimum est $\leq -9/8$, pour tous entiers $1 \leq k_1 < k_2$, ce qui conclut la preuve.

REMARQUE. On a la propriété analogue pour des "gros" sous-ensembles dans une quelconque progression arithmétique finie de $\mathbb{N}$.

Bibliographie

[1] BOURGAIN, J. Sur le minimum d'une somme de cosinus. A paraître.

[2] CHOWLA, S. Some applications of a method of A. Selberg. J. reine und angew. Math. 217 (1952), 287-305.

[3] HOFFMAN, K. Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall, 1965.

[4] McGEHEE, O. C., PIGNO, L. and SMITH, B. Hardy's inequality and L^1 norm of exponential sums. Annals of Math. 113 (1981).

[5] PICHORIDES, S. K. Norms of exponential sums. Publ. Math. Orsay, no. 77-73.

Exposé no. 3
Jean Bourgain

Année 1982-83

PROPRIETE D'ORLICZ ET ENSEMBLES DE SIDON

Résumé. Soient G un groupe abélien compact, Λ une partie de son dual et $C_\Lambda(G)$ l'espace des fonctions continues sur G à spectre dans Λ. Nous montrons que si $C_\Lambda(G)$ a la propriété d'Orlicz alors Λ est un ensemble de Sidon.

Dans toute la suite G désigne un groupe abélien compact (muni de sa mesure de Haar normalisée), Γ son dual et Λ une partie de Γ.

$C(G)$ désigne l'espace des fonctions continues sur G, muni de la norme uniforme. Pour toute fonction f intégrable sur G le spectre de f est l'ensemble $sp(f) = \{\gamma \in \Gamma , \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$; si $sp(f)$ est fini, f est un polynôme trigonométrique.

On note

$$C_\Lambda(G) = \{f \in C(G) , sp(f) \subset \Lambda\}.$$

DEFINITION 1. La partie Λ de Γ est un <u>ensemble de Sidon</u> s'il existe $C > 0$ telle que pour tout polynôme trigonométrique à spectre dans Λ, $P(x) = \sum_{\gamma \in \Lambda} a_\gamma (x, \gamma)$ on a

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} |a_\gamma| \leq C \|P\|_{C(G)}. \tag{1}$$

On note $S(\Lambda)$ la plus petite constante vérifiant (1).

De façon équivalente, Λ est un ensemble de Sidon si la transformation de Fourier $\mathfrak{F} : f \longrightarrow (\hat{f}(\gamma))_{\gamma \in \Lambda}$ est un isomorphisme de $C_\Lambda(G)$ dans $\ell^1(\Lambda)$.

DEFINITION 2. Notons $\Omega = \{-1,1\}^N$, $\varepsilon_n : \Omega \longrightarrow \{-1,1\}$ la $n^{\text{ième}}$ fonction coordonnée (ou $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher) et P la probabilité uniforme sur Ω. Un espace de Banach E <u>est de cotype</u> q s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1,\dots,x_r$ d'éléments de X, on a

$$\Big(\sum_{1\le i\le r} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \le C \Big(\int_\Omega \Big\|\sum_{1\le i\le r} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 dP\Big)^{1/2}.$$

L'espace ℓ^1 a cotype 2, donc si Λ est un ensemble de Sidon, $C_\Lambda(G)$ est de cotype 2 ; réciproquement, si $\Lambda \subset \Gamma$ et $C_\Lambda(G)$ est de cotype 2, alors Λ est un ensemble de Sidon [5].

DEFINITION 3. L'espace de Banach E a la <u>propriété d'Orlicz</u> s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1, \dots, x_r$ d'éléments de E,

$$\Big(\sum_{1\le i\le r} \|x_i\|^2\Big)^{1/2} \le C \max_{\omega\in\Omega} \Big\|\sum_{1\le i\le r} \varepsilon_i x_i\Big\|.$$

Un espace de Banach de cotype 2 a la propriété d'Orlicz et la réciproque n'est pas connue ([4], p. 70). Nous montrons que dans le cas particulier des espaces $C_\Lambda(G)$, la réciproque est vraie.

THEOREME. Si l'espace de Banach $C_\Lambda(G)$ a la propriété d'Orlicz alors Λ est un ensemble de Sidon.

Signalons que la question suivante est ouverte : si $C_\Lambda(G)$ a un cotype $q > 2$, Λ est-il un ensemble de Sidon ?

Néanmoins, s'il existe k tel que Λ soit contenu dans la somme de k ensembles dissociés [3], la réponse est positive (à paraître).

Rappelons d'abord quelques résultats qui seront utilisés dans la démonstration du théorème.

THEOREME 1 [7]. Soit $A \subset \Gamma$ une partie finie. Alors il existe $B \subset A$ tel que

$$|B| \geq k\,|A|^{-1}(\mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A} \varepsilon_\gamma\, \gamma\|_{C(G)})^2 \quad \text{et} \quad S(B) \leq C$$

où k et C sont des constantes numériques ($|B|$ désigne le cardinal de B).

Soit $A \subset \Gamma$ une partie finie. Définissons un écart sur G par

$$d(s,t) = (\sum_{\gamma\in A} |\gamma(s) - \gamma(t)|^2)^{1/2} \qquad (s,t \in G). \tag{2}$$

Pour $\rho > 0$ notons $N_d(\rho)$ le nombre minimal de d boules ouvertes de d-rayon ρ suffisant pour recouvrir G. On voit facilement que

$$N_d(2\rho) \leq \frac{1}{m(\{x\in G\ ,\ d(x,0)<\rho\})} \leq N_d(\rho). \tag{3}$$

THEOREME 2 [6]. Il existe deux constantes numériques α et β telles que pour toute partie finie $A \subset \Gamma$, $0 \notin A$, on a

$$\alpha\int_0^\infty \sqrt{\log N_\alpha(\rho)}\, d\rho \leq \mathbb{E}\,\|\sum_{\gamma\in A} \varepsilon_\gamma\, \gamma\|_{C(G)} \leq \beta \int_0^\infty \sqrt{\log N_d(\rho)}\, d\rho\,. \tag{4}$$

THEOREME 3 ([7] ou [1]). Soit $\Lambda \subset \Gamma$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est un ensemble de Sidon.

(ii) Il existe $C > 0$ telle que, pour toute partie finie A de Λ et tout $p \geq 2$ on a

$$\|\sum_{\gamma\in A} \gamma\|_p \leq C\sqrt{p}\ |A|^{1/2}.$$

(iii) Il existe $\delta > 0$ et C tels que pour toute partie finie A de Λ, on puisse trouver une sous-partie B de A avec $|B| \geq \delta\,|A|$ et $S(B) \leq C$.

<u>Démonstration du théorème</u>. Pour toute partie finie Λ' de Γ notons $n(\Lambda')$ le cardinal maximal d'une partie Λ'' de Λ' telle que $S(\Lambda'') \leq C$, où C est la constante donnée par le théorème 1.

Soit $\Lambda' \subset \Lambda$ une partie finie, nous allons montrer que la condition (iii) du théorème 3 est vérifiée, c'est-à-dire, que $n(\Lambda') \geq \delta|\Lambda'|$ (δ constante numérique).

Première étape. Remplacement de Λ' par une réunion finie d'ensembles de Sidon convenables.

Quitte à restreindre Λ', on peut supposer que pour toute partie $\Lambda'' \subset \Lambda'$ on a

(5)
$$\frac{n(\Lambda'')}{|\Lambda''|} \geq \frac{n(\Lambda')}{|\Lambda'|}.$$

On peut alors déterminer une suite $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_J$ de parties deux à deux disjointes de Λ' telles que pour $1 \leq j \leq J$,

(6)
$$S(\Lambda_j) \leq C \quad , \quad |\Lambda_j| = \left[\frac{n(\Lambda')}{2}\right] \quad , \quad \frac{|\Lambda'|}{n(\Lambda')} < J \leq \frac{|\Lambda'|}{n(\Lambda')} + 1$$

($[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x).

En effet, d'après la définition de $n(\Lambda')$ il existe $\Lambda_1 \subset \Lambda$, $|\Lambda_1| = \left[\frac{n(\Lambda')}{2}\right]$ et $S(\Lambda_1) \leq C$. Supposons construites k parties deux à deux disjointes de Λ' satisfaisant aux deux premières conditions de (6). Alors la condition (5) montre que

$$n(\Lambda' \setminus (\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k)) \geq \frac{n(\Lambda')}{|\Lambda'|} |\Lambda' \setminus (\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k)| \geq n(\Lambda')\left(1 - \frac{kn(\Lambda')}{2|\Lambda'|}\right)$$
$$\geq n(\Lambda')/2$$

si $kn(\Lambda') \leq |\Lambda'|$; on en déduit que l'on peut poursuivre la construction jusqu'à l'étape J, où J satisfait la dernière condition de (6).

Posons $A = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_J$ et $n(A) = n$. Alors

(7)
$$\left[\frac{n(\Lambda')}{2}\right] \leq n \leq n(\Lambda') \qquad \text{et} \qquad \frac{|A|}{n} < J \leq \frac{4|A|}{n}.$$

D'après ces inégalités, il suffit de montrer que $n \geq \delta|A|$ (δ constante numérique). Nous remplacerons donc Λ' par A dans la suite, et pour simplifier les notations nous supposerons $n = n(\Lambda')$ pair.

D'après le théorème 1 on a

(8) $$n \geq k\,|A|^{-1}(\mathbb{E}\|\sum_{\gamma\in A} \varepsilon_\gamma\,\gamma\|_{C(G)})^2.$$

Dans toute la suite, K désigne une constante numérique, qui change d'une expression à l'autre, mais que ne dépend pas de A et n.

Deuxième étape.

LEMME. Soit $A = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_J$, où $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_j$ sont des parties deux à deux disjointes de Γ satisfaisant

$$S(\Lambda_j) \leq C \quad , \quad |\Lambda_j| = \frac{n}{2} \quad , \quad 1 \leq j \leq J \quad , \quad \frac{|A|}{n} < J \leq \frac{4\,|A|}{n}$$

(où $n = n(A)$ pair). Alors on a

$$I = \int_{G^n} \max_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \Big\{ \sum_{\gamma\in A} \Big| \sum_{k=1}^{n} (x_k,\gamma)\,\varepsilon_k \Big|^2 \Big\}^{1/2} dx_1 \ldots dx_n \leq K\,n^{1/2}\,|A| \,.$$

Démonstration. On a

$$I \leq \Big(\int_{G^n} \max_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \Big(\sum_{1\leq j\leq J} \sum_{\gamma\in\Lambda_j} \Big| \sum_{1\leq k\leq n} (x_k,\gamma)\,\varepsilon_k \Big|^2 \Big) dx_1 \ldots dx_n \Big)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{J} \Big(\int_{G^n} \max_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \Big(\sum_{\gamma\in\Lambda_{j_o}} \Big| \sum_{1\leq k\leq n} (x_k,\gamma)\varepsilon_k \Big|^2 \Big) dx_1 \ldots dx_n \Big)^{1/2}$$

si on choisit j_o, $1 \leq j_o \leq J$, tel que l'intégrale soit maximum. Pour $\gamma\in\Gamma$, notons γ_k le caractère sur G^n défini par

$$\gamma_k(x_1,\ldots,x_n) = \gamma(x_k).$$

Il est clair que $\{\gamma_k \,,\, \gamma\in\Lambda_{j_o}\}$ est un ensemble de Sidon de Γ^n, de constante $\leq C$, montrons que $\Lambda^{(n)} = \bigcup_{1\leq k\leq n} \{\gamma_k \,,\, \gamma\in\Lambda_{j_o}\}$, qui est aussi un ensemble de Sidon, a une constante $\leq 4C$ (on suppose que $0 \notin \Lambda_{j_o}$). Soient $P_1, \ldots P_n$ des polynômes à spectre dans Λ_{j_o}, alors si $S \subset \{1, \dots, n\}$, $\{1,\dots,n\} \setminus S = \{i_1, \dots, i_{n-|S|}\}$

$$\Big\| \sum_{j\in S} P_j(x_j) \Big\|_\infty = \Big\| \int_{G^{n-|S|}} \sum_{1\le j\le n} P_j(x_j)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_{n-|S|}} \Big\|_\infty \le \Big\| \sum_{1\le j\le n} P_j(x_j) \Big\|_\infty .$$

On en déduit facilement que

$$\Big\| \sum_{1\le j\le n} |P_j(x_j)| \Big\|_\infty \le 4 \Big\| \sum_{1\le j\le n} P_j(x_j) \Big\| .$$

En choisissant x_j tel que $|P_j(x_j)| = \|P_j\|_\infty \ge C^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{P}_j(\gamma)|$, on conclut la preuve.

D'après le théorème 2.1 de [7] (en prenant $\varphi(t) = t^2$, la norme $\max_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n = \pm 1} \Big(\sum_{1\le i\le \frac{n}{2}} \Big| \sum_{1\le k\le n} c_{ik}\, \varepsilon_k \Big|^2 \Big)^{1/2}$ dans $\mathbb{C}^{n^2/2}$ et en remplaçant ensuite les fonctions de Rademacher par des gaussiennes)

$$I \le K\, C \sqrt{J} \Big(\int_\Omega \max_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n = \pm 1} \Big(\sum_{1\le i\le \frac{n}{2}} \Big| \sum_{1\le k\le n} g_{ik}\, \varepsilon_k \Big|^2 \Big) d\omega \Big)^{1/2}$$

où $(g_{ik})_{\substack{1\le i\le n/2 \\ 1\le k\le n}}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées normalisées et indépendantes. Alors

$$I \le K\, C \sqrt{J} \sqrt{n} \Big(\int_\Omega \max_{\sum_{1\le k\le n} \alpha_k^2 \le 1} \Big(\sum_{1\le i\le \frac{n}{2}} \Big| \sum_{1\le k\le n} g_{ik}\, \alpha_k \Big|^2 \Big) \Big)^{1/2}$$

$$\le K\, C \sqrt{J} \sqrt{n} \Big(\int_\Omega \Big\| \sum_{\substack{1\le i\le n/2 \\ 1\le k\le n}} g_{ik}\, e_i \otimes e_k \Big\|^2_{\ell^2_n \check{\otimes} \ell^2_n} d\omega \Big)^{1/2} \le K\, C \sqrt{J}\, n$$

grâce à une estimation de la dernière intégrale due à S. Chevet [2]. En utilisant (7) on obtient

$$I \le K\, |A|^{1/2}\, n^{1/2}$$

<u>Troisième étape</u>. Posons $f = \sum_{\gamma\in A} \gamma$. Soient $x_1, \dots, x_n$ dans G, on note

comme d'habitude f_{x_i} la translatée de f par $x_i (f_{x_i}(x) = f(x-x_i),\ x \in G)$, $1 \leq i \leq n$. Nous allons montrer qu'il existe p entier positif tel que

$$(9) \qquad \int_{G^n} \| \sum_{1 \leq k \leq n} |f_{x_k}| \|_{L^p(ds)} dx_1 \ldots dx_n \geq K \sqrt{n}\, |A|.$$

Soient $\omega \in \Omega$ et $t_\omega \in G$ tels que $\left| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega) f_{x_k}(t_\omega) \right| = \| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega) f_{x_k} \|_{C(G)}$. Pour $s,t \in G$, soit $d(s,t)$ l'écart sur G défini par (2), on a alors :

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega) f_{x_k}(s) \right| = \left| \sum_{\gamma \in A} \left[\sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega)(x_k, \gamma) \right] (s,\gamma) \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{\gamma \in A} \left[\sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega)(x_k,\gamma) \right] (t_\omega,\gamma) \right| - d(s,t_\omega) \max_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{\gamma \in A} \left| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega)(x_k,\gamma) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Rappelons que $N_d(\rho)$ désigne le plus petit nombre de d-boules de rayon ρ suffisant pour recouvrir G. Soit τ une constante positive que nous préciserons par la suite, posons $m = \log N_d(\tau |A|^{1/2})$. Soit $E = \left\{ s \in G\ ,\ d(s,t_\omega) \leq \frac{\tau}{2} |A|^{1/2} \right\}$, alors $m(E) \leq (N_d(\tau |A|^{1/2})^{-1} = e^{-m}$ d'après (3), et

$$\| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega) f_{x_k} \|_{L^m(ds)} \geq \left(\int_E \left| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega) f_{x_k}(s) \right|^m ds \right)^{\frac{1}{m}} \geq$$

$$\geq \left\{ \| \sum \varepsilon_k(\omega) f_{x_k} \|_{C(G)} - \frac{\tau}{2} |A|^{\frac{1}{2}} \max_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{\gamma \in A} \left| \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k(\omega)(x_k,\gamma) \right|^2 \right)^{1/2} \right\} (N_d(\tau |A|^{\frac{1}{2}}))^{-1/m}.$$

Prenons le supremum sur le choix des signes des deux membres et intégrons sur G^n : il existe une constante numérique K telle que

$$(10) \int_{G^n} \| \sum_{1 \leq k \leq n} |f_{x_k}| \|_{L^m(ds)} dx_1 \ldots dx_n \geq K \Big(\int_{G^n} \| \sum_{1 \leq k \leq n} |f_{x_k}| \|_{C(G)} dx_1 \ldots dx_n -$$

$$- \frac{\tau}{2} |A|^{1/2} \int_{G^n} \max(\ldots)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Puisque $C_\Lambda(G)$ a la propriété d'Orlicz (définition 3) il existe une constante C' telle que pour tous $x_1, \ldots x_n \in G$,

$$\|\Sigma |f_{x_k}|\|_{C(G)} \geq C'\Big(\sum_{1\leq k\leq n} \|f_{x_k}\|^2_{C(G)}\Big)^{1/2} = C' n^{1/2} |A| .$$

En utilisant cette minoration et le lemme précédent, (11) devient, pour un choix convenable de τ,

$$\text{(11)} \qquad \int_{G^n} \Big\| \sum_{1\leq k\leq n} |f_{x_k}| \Big\|_{L^m(ds)} dx_1 \ldots dx_n \geq K \sqrt{n}\, |A| .$$

Considérons l'inégalité (8) et le théorème 2 :

$$(n|A|)^{1/2} \geq k^{1/2}\, \mathbb{E} \Big\| \sum_{\gamma\in A} \varepsilon_\gamma \gamma \Big\|_{C(G)} \geq k^{1/2} \alpha \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log} N_d(\rho)}\, d\rho \geq$$

$$\geq k^{1/2} \alpha \; \tau |A|^{1/2} (\log N_d(\tau |A|^{1/2}))^{1/2} \geq K \; m^{1/2} \; |A|^{1/2} .$$

Ceci montre que $m \leq pn$, p entier positif (qui ne dépend que des différentes constantes numériques intervenant jusqu'ici). On a alors d'après (11)

$$\int_{G^n} \Big\| \sum_{1\leq h\leq n} |f_{x_k}| \Big\|_{L^{pn}(ds)} dx_1 \ldots dx_n \geq K \sqrt{n}\; |A|$$

c'est-à-dire, nous avons démontré (9).

Quatrième étape. Conclusion.

Notons $np = n'$. On a

$$I = \int_{G^n} \Big\| \sum_{1\leq k\leq n} |f_{x_k}| \Big\|_{L^{n'}(ds)} dx_1 \ldots dx_n \leq \Big(\int_{G^{n+1}} (|f_{x_1}| + \ldots + |f_{x_n}|)^{n'} dx_1 \ldots dx_n ds\Big)^{1/n'} .$$

En développant l'intégrant, on trouve

$$\text{(12)} \qquad I \leq \sum_{k_1+\ldots+k_n = n'} \frac{n'!}{k_1! \ldots k_n!} \Big(\int_G |f(x_1)|^{k_1} dx_1\Big) \ldots \Big(\int_G |f(x_n)|^{k_n} dx_n\Big).$$

Posons $M = \sup_{1\le k\le n} \frac{\|f\|_k}{k} = \frac{\|f\|_{k_o}}{k_o}$. Puisque $\left|\{(k_1\ldots k_n) \mid k_1+\ldots+k_n = n'\}\right|$ $\le 4^{n'}$, l'inégalité (12) donne $I \le n'M = pnM$. Compte-tenu de (10), on a

$$pnM \ge K\sqrt{n}\,|A|$$

soit

(13) $$|A| \le K\sqrt{n}\,M.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_G |f(s)|^k ds = \int_G |f(s)|\,|f(s)|^{k-1} ds \le |A|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{2k-2}^{k-1}$$

donc $M \le \frac{|A|^{\frac{1}{2k_o}}}{k_o} \|f\|_{2k-2}^{1-1/k_o} \le K\frac{|A|^{\frac{1}{2k_o}}}{\sqrt{k_o}} \left(\frac{\|f\|_{2k_o-2}}{\sqrt{2k_o-2}}\right)^{1-1/k_o}$.

Compte-tenu de (6), le théorème 3 (condition (ii)) montre que

$$\|f\|_{2k_o-2} \le \sum_{1\le j\le J} \Big\| \sum_{\gamma\in\Lambda_j} \gamma \Big\|_{2k_o-2} \le K\,J\,\sqrt{(2k_o-2)}\,\sqrt{\frac{n}{2}} \le K\sqrt{(2k_o-2)}\,|A|\,n^{-1/2},$$

et en revenant à (13) on obtient, en posant $\frac{1}{2k_o} = \theta$,

$$|A| \le K\,\theta^{1/2}\,|A|^{\theta}\left(\frac{|A|}{n}\right)^{1-2\theta}\sqrt{n}.$$

Soit

$$|A|^{\theta} \le K\,\theta^{1/2}\,n^{\theta}$$

c'est-à-dire $$n \ge K\,\theta^{-1/2\theta}\,|A| \ge \delta\,|A|$$

ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] BOURGAIN, J. Sidon sets and Riesz products. A paraître.

[2] CHEVET, S. Un résultat sur les mesures gaussiennes. C. R. Acad. Sc. Paris 284 (1977), 441-444.

[3] LOPEZ, J.-M. and ROSS, K. A. Sidon sets. Lecture Notes in P. and Applied Math. 13, M. Dekker (1975).

[4] MAUREY, B. et PISIER, G. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math. 58 (1976).

[5] PISIER, G. Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2. Sém. Géométrie des espaces de Banach, Ec. Polytechnique, exp. 14 (1977-78).

[6] PISIER, G. Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues. Sém. Géométrie des espaces de Banach, Ec. Polytechnique, exp. 17-18 (1977-78).

[7] PISIER, G. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. Math. Anal. and Appl., part B, Advances in Math., Suppl. studies, vol. 7B (1981).

[8] PISIER, G. Les inégalités de Khintchine-Borel d'après C. Borell. Sém. sur la Géométrie des espaces de Banach, Ecole Polytechnique, exp. 7 (1977-78).

Exposé no. 4 Année 1982-1983

Françoise Piquard

SUITES DE SIGNES ATTACHEES A UN ENSEMBLE DE SIDON, d'après J. Bourgain

Résumé. Soit G un groupe abélien compact et connexe. Soit $\Lambda = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ un ensemble de Sidon de son dual Γ. On suppose que $\Lambda \cap \Lambda^{-1} = \emptyset$. Alors la suite $(\text{signe Im } \gamma_n)_{n\geq 1}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 dans $L^\infty(G)$.

I. INTRODUCTION

La suite $(2^n)_{n\geq 1}$ est classiquement un ensemble de Sidon dans Z ([5]) ; si on pose $r_n(t) = \text{sign}[\sin 2^n t]$ (n-ième fonction de Rademacher sur $[0,2\pi[$), on a :

$$\sup_t \left| \sum_1^N a_n r_n(t) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_1^N |a_n| \quad \text{pour tous} \quad a_1,\ldots,a_N \in \mathbb{C} ,$$

autrement dit la suite (r_n) est équivalente à la base canonique de ℓ^1 ; ce fait se généralise pour un ensemble de Sidon quelconque du dual Γ d'un groupe abélien G compact et connexe ; avant d'énoncer le théorème fondamental, nous avons besoin des deux définitions suivantes (dans toute la suite, G sera un groupe abélien et connexe, Γ son dual ; les notations seront celles de [5] ; les opérations de G et Γ seront notées multiplicativement).

DEFINITION 1. Soit (f_n) une suite dans $L^\infty(G)$ telle que $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$; on dit que (f_n) est équivalente à la base canonique de ℓ^1 s'il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\left\| \sum_1^N a_n f_n \right\|_\infty \geq \rho \sum_1^N |a_n| \quad \text{pour toute suite finie} \quad a_1, \ldots, a_N \quad \text{de}$$

nombres complexes.

DEFINITION 2. Soit $\Lambda \subset \Gamma$; on appelle constante de sidonicité de Λ, et on note $S(\Lambda)$, la plus petite constante K (si elle existe) telle que $\Sigma |a_j| \leq K \|\Sigma a_\gamma \gamma\|_\infty$ pour toute suite finie de nombres complexes à support dans Λ. (Si $S(\Lambda) < \infty$, on dit que Λ est un ensemble de Sidon).

D'après le théorème de Drury [2], si Λ est un ensemble de Sidon, $\Lambda \cup \Lambda^{-1}$ l'est aussi. Nous pouvons alors énoncer le théorème fondamental de cet exposé.

THEOREME. *Soit* G *un groupe compact abélien connexe et* $\Lambda = (\gamma_n)$ *un ensemble de Sidon de son dual* Γ *tel que* $\Lambda \cap \Lambda^{-1} = \emptyset$. *Alors, la suite* sign Im $\gamma_n = f_n$ *est équivalente à la base canonique de* ℓ^1 *dans* $L^\infty(G)$.

(Im $\gamma = \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{2i}$ *et si* $x \in R$, sign $x = +1$ *si* $x \geq 0$, -1 sinon).

Remarque. L'hypothèse G connexe équivaut à l'hypothèse que Γ n'a pas d'éléments d'ordre fini, à part 1 [5]. Si $\gamma \in \Gamma$, on posera de façon générale : f_γ = sign Im γ.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME DANS UN CAS PARTICULIER.

La démonstration est simple lorsque $S(\Lambda \cup \Lambda^{-1}) < \frac{4}{\sqrt{3}}$; de plus, elle éclaire la démonstration générale qui sera donnée plus loin.

L'idée est d'approcher (dans la norme de $L^\infty(G)$) Im γ par une combinaison linéaire de f_γ, f_{γ^2}, ... ; pour cela, il suffit d'approcher $\sin\theta$ par une combinaison linéaire de $\sigma_k(\theta) = \text{sign}(\sin\theta)$. Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\left\|\sin\theta - \frac{1}{2}\sigma_1 + \alpha\sigma_3\right\|_\infty = \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left|\sin\theta - \frac{1}{2} + \alpha\sigma_3(\theta)\right|$$

$$= \mathrm{Max}\left(\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|, \left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\alpha\right|\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{si} \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Donc :

$\left\|\mathrm{Im}\,\gamma - \frac{1}{2} f_\gamma + \alpha f_{\gamma^3}\right\|_\infty = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Si (a_γ) est une suite à support fini dans Λ, on a donc en posant $S = S(\Lambda \cup \Lambda^{-1})$

$$\frac{1}{S}\,\Sigma\,|a_\gamma| \leq \left\|\Sigma\, a_\gamma\, \mathrm{Im}\,\gamma\right\| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Sigma\,|a_\gamma| + \frac{1}{2}\left\|\Sigma\, a_\gamma\, f_\gamma\right\|_\infty + \alpha\left\|\Sigma\, a_\gamma\, f_{\gamma^3}\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Sigma\,|a_\gamma| + \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left\|\Sigma\, a_\gamma\, f_\gamma\right\|_\infty \quad \text{car}$$

$$\sup_{t\in G}\left|\Sigma\, a_\gamma\, f_{\gamma^3}(t)\right| = \sup_t \left|\Sigma\, a_\gamma\, f_\gamma(t^3)\right| \leq \left\|\Sigma\, a_\gamma\, f_\gamma\right\|_\infty.$$

D'où $\left\|\Sigma\, a_\gamma\, f_\gamma\right\|_\infty \geq \dfrac{\frac{1}{S} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}}\,\Sigma\,|a_\gamma|$, ce qui démontre le théorème dans ce cas particulier.

Remarque. Le problème suivant est ouvert : est-ce que $\sin\theta$ est adhérent pour la norme de $L^\infty(T)$ au sous-espace engendré par les σ_k, $k \geq 1$? Le théorème serait démontré si on avait une réponse affirmative à ce problème.

III. DEMONSTRATION DU THEOREME DANS LE CAS GENERAL.

Elle sera basée sur les deux lemmes suivants ; introduisons d'abord quelques notations.

Soit p un nombre premier ≥ 3. Posons

$A_p = \{1\} \cup \{$entiers impairs sans facteurs carrés qui n'ont que des diviseurs premiers $\leq p\}$

$B_p = \{$entiers impairs > 1 qui n'ont que des diviseurs premiers $> p\}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ (-1)^k & \text{si} \quad n = p_1 \dots p_k \,, \quad p_i \quad \text{nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

μ est la fonction de Möbius ; elle est caractérisée par la propriété :

$$\sum_{d \mid \nu} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \nu = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \nu > 1. \end{cases}$$

LEMME 1. On a l'identité suivante :

$$\sum_{n \in A_p} \mu(n) \frac{\sigma(n\theta)}{n} = \frac{4}{\pi} \Big(\sin\theta + \sum_{n \in B_p} \frac{\sin n\theta}{n} \Big) . \tag{1}$$

Preuve. On part du développement en série de Fourier :

$\sigma(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \in I} \frac{\sin(k\theta)}{k}$, où I désigne l'ensemble des entiers impairs ≥ 1.

On a donc :

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n \in A_p} \mu(n) \frac{\sigma(n\theta)}{n} = \sum_{n \in A_p} \mu(n) \sum_{k \in I} \frac{\sin nk\theta}{nk}$$

$$= \sum_{\nu \in I} \frac{\sin \nu\theta}{\nu} \Big(\sum_{\substack{n \mid \nu \\ n \in A_p}} \mu(n) \Big) = \sum_{\nu \in I} \frac{\sin \nu\theta}{\nu} c_\nu .$$

Si $\nu \in B_p$ ou si $\nu = 1$, $n \mid \nu$ et $n \in A_p \Longrightarrow n = 1$, donc $c_\nu = 1$.

Si $\nu \notin B_p \cup \{1\}$, $\nu = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} m$ où $p_i \leq p$, $m \in B_p$. Soit $\nu' = p_1 \dots p_k$. Alors $n \in A_p$ et $n \mid \nu$ si bien que $c_\nu = \sum_{n \mid \nu'} \mu(n) = 0$. D'où le lemme 1.

Remarque. Dans la suite, on utilisera uniquement le fait que

$$A_p \subset [1 \,,\, p!] \qquad \text{et} \qquad B_p \subset]p \,,\, +\infty[.$$

De (1), on déduit pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\mathrm{Im}\,\gamma = -\sum_{n\in B_p} \frac{\mathrm{Im}\,\gamma^n}{n} + \frac{\pi}{4}\sum_{n\in A_p} \mu(n)\frac{f_{\gamma^n}}{n}\,.$$

Donc, pour toute suite finie (a_γ) et toute mesure $\lambda \in M(G)$:

$$\Big|\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \langle \lambda, \mathrm{Im}\,\gamma\rangle\Big| \le \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma| \sum_{n\in B_p} \frac{1}{n}\,|\langle \lambda, \mathrm{Im}\,\gamma^n\rangle| + \frac{\pi}{4}\sum_{n\in A_p} \frac{1}{n}\|\lambda\|\,\|\Sigma\, a_\gamma f_{\gamma^n}\|_\infty$$

et donc

$$(2)\qquad \Big|\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \langle \lambda, \mathrm{Im}\,\gamma\rangle\Big| \le \sum_{\gamma} |a_\gamma| \sum_{n>p} \frac{1}{n}\,|\langle \lambda, \mathrm{Im}\,\gamma^n\rangle| + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Log}\,p!\,\|\lambda\|\,\|\Sigma\, a_\gamma f_\gamma\|_\infty .$$

(De façon générale, on pose $\langle \lambda, f\rangle = \int f\,d\lambda$).

LEMME 2. Soit G comme précédemment, et $L = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\} \subset \Gamma$ avec $1 \notin L$ et $S(L) = K$. Alors :
pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et pour tout $t = (t_1, \ldots, t_N) \in T^N$, il existe $\lambda_t \in M(G)$ telle que :

i) $\|\lambda_t\| \le 16\,\dfrac{K^2}{\delta}$

ii) $\hat{\lambda}_t(\gamma_j) = t_j$ pour $1 \le j \le N$

iii) Pour tout $\gamma\in\Gamma$, $\gamma \ne 1$, pour tout p entier ≥ 3, on a :

$$\sum_{n>p} \frac{|\hat{\lambda}_t(\gamma^n)|}{n} \le M_o K^2\Big(\frac{\mathrm{Log}\,p}{p} + \delta\Big)$$

où M_o est une constante absolue.

Montrons d'abord comment les lemmes 1 et 2 permettent de démontrer le théorème : Soit $K = S(\Lambda \cup \Lambda^{-1})$ et

$$L = \{\gamma_j\}_{j=1}^q \cup \{\overline{\gamma}_j\}_{j=1}^q\ ,\quad \text{où } \{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\} \text{ est une partie finie de } \Lambda.$$

Si $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{C}$, le lemme 2 nous fournit une mesure $\lambda \in M(G)$ telle que

$$\langle \lambda, \overline{\gamma}_j\rangle = \hat{\lambda}(\gamma_j) = -\,i\,e^{-i\arg a_j}\ ,\quad \hat{\lambda}(\overline{\gamma}_j) = +\,i\,e^{-i\arg a_j} = \langle \lambda, \gamma_j\rangle$$

(c'est ici qu'intervient l'hypothèse $\Lambda \cap \Lambda^{-1} = \emptyset$), et qui vérifie i) et iii). (2) se lit alors via i) et iii)

(3) $$\sum_{j=1}^{q} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{q} |a_j| M_o K^2 \left(\frac{\text{Log } p}{p} + \delta\right) + \frac{\pi}{2} \text{Log } p! \; \frac{16K^2}{\delta} \left\| \sum_{1}^{q} a_j f_{\gamma_j} \right\|_\infty .$$

On choisit alors p tel que $M_o K^2 \frac{\text{Log } p}{p} \leq \frac{1}{4}$ et δ tel que $M_o K^2 \delta \leq \frac{1}{4}$.

(3) entraîne alors :

$$\sum_{j=1}^{q} |a_j| \leq \pi \text{ Log } p! \; \frac{8K^2}{\delta} \left\| \sum_{1}^{q} a_j f_{\gamma_j} \right\|_\infty , \quad \text{d'où le théorème.}$$

IV. DEMONSTRATION DU LEMME 2.

Elle utilise la technique de Drury [2], mais en travaillant comme Rider [4] sur le groupe auxiliaire T^N (Il faut interpoler des nombres complexes de module 1) et non comme Drury sur le groupe auxiliaire D^N $(D = \{-1, 1\}$. Nous aurons besoin de quelques notations.

Le dual de T^N est Z^N ; si $\nu = (\nu_j)_{j=1}^N \in Z^N$, on note $\langle \nu, t \rangle = \prod_j t_j^{\nu_j}$ l'action de ν sur $t = (t_1, \dots, t_n) \in Z^N$.

$\eta_j = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$ et $\langle \eta_j, t \rangle = t_j$. η_j joue le rôle de la j-ième fonction de Rademacher.

$E = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j=1}^N \in Z^N / \; \varepsilon_j \in \{0, 1, -1\} \right\}$. Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, E est le spectre du produit de Riesz :

$$R_\delta = \frac{1}{\delta} \prod_{j=1}^{N} \left[1 + \delta(\eta_j + \bar{\eta}_j)\right]$$

$$\hat{R}_\delta(\eta_j) = \hat{R}_\delta(\bar{\eta}_j) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{R}_\delta(\varepsilon) = \delta^{k-1} \quad \text{si}$$

$$|\varepsilon| = \sum_{1}^{N} |\varepsilon_j| = k. \qquad \|R_\delta\|_1 = \frac{1}{\delta} \quad ; \quad R_\delta(t) = \sum_{\varepsilon \in E} \delta^{|\varepsilon| - 1} \langle t, \varepsilon \rangle .$$

<u>Première étape</u> (sélection borélienne des mesures d'interpolation). Il existe $\nu_t \in M(G)$ telle que

i) $\|\nu_t\| \leq K \qquad \forall\, t \in T^N$

ii) $\hat{\nu}_t(\gamma_j) = t_j \qquad 1 \leq j \leq N.$

a) Quitte à remplacer K par $2K$, on peut supposer $t \longrightarrow \nu_t$ borélienne et $\nu_t \in L^1(G)$ pour tout t ; en effet, il existe $\varphi \in L^1(G)$ telle que :

$$\|\varphi\|_1 \leq 2 \quad , \quad \hat{\varphi}(\gamma_j) = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq N, \quad \operatorname{supp} \hat{\varphi} = F \quad \text{fini dans} \quad \Gamma.$$

Si on remplace ν_t par $\nu_t * \varphi$, on peut supposer pour tout $t \in T^N$ que $\nu_t \in L^1_F(G)$ (sous espace de $L^1(G)$ formé des fonctions à spectre dans F).

D'autre part, la boule $\mathcal{B}$ de centre 0, de rayon $2K$, de $L^1_F(G)$ est compacte en norme, munissons la de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$

$f \sim f'$ si $\hat{f} = \hat{f}'$ sur L. D'après [3], il existe une application borélienne s

$$\mathcal{B}/\mathcal{R} \xrightarrow{\ s\ } \mathcal{B} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{B}/\mathcal{R}$$

telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}$, où π est la surjection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}/\mathcal{R}$.
T^N s'identifie à une partie de $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ via :

$(t_j) \longrightarrow \pi(\mu)$ où $\hat{\mu}(\gamma_j) = t_j$ et $\|\mu\| \leq 2K$. En restreignant s à T^N, on obtient la mesure $\nu_t = s(t)$ voulue. Récapitulons :

$\forall\, t \ \|\nu_t\|_{L^1(G)} \leq 2K$; $\hat{\nu}_t(\gamma_j) = t_j$; la fonction $t \rightsquigarrow \nu_t$ est dans $L^\infty(T^N, L^1(G))$.

b) Soit alors $\mu_t = \int_{T^N} R_{\frac{1}{2}}(t\,\tau^{-1})\, \nu_\tau \, d\tau$, μ_t est dans $C(T^N, L^1(G))$ et vérifie

$$\begin{cases} \text{i)} & \forall\, t \ \|\mu_t\|_{L^1(G)} \leq 4K \\ \text{ii)} & \hat{\mu}_t(\gamma_j) = t_j \end{cases}$$

iii) $\mu_t = \sum_{\varepsilon \in E} \langle t, \varepsilon \rangle \mu_\varepsilon$ où $\mu_\varepsilon \in L^1(G)$.

Les vérifications sont immédiates à cause des propriétés de R_δ ; par exemple :

$$\hat{\mu}_t(\gamma_j) = \int R_{\frac{1}{2}}(\tau)\, \widehat{\nu_{t\tau^{-1}}}(\gamma_j)\, d\tau = \int t_j \tau_j^{-1} R_{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau = t_j \widehat{R_{\frac{1}{2}}}(\eta_j) = t_j.$$

Notons que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $t \rightsquigarrow \hat{\mu}_t(\gamma)$ est dans $L^2(T^N)$ avec norme $\leq 4K$, d'où

(4) $$\sum_{\varepsilon \in E, \gamma_\varepsilon = \gamma} |\alpha_\varepsilon|^2 \leq 16\, K^2.$$

<u>Deuxième étape</u> (astuce de Rider [4]). Pour $\varepsilon = (\varepsilon_j) \in E$, notons :

$$\gamma_\varepsilon = \prod_{j=1}^{N} \gamma_j^{\varepsilon_j}.$$

Nous allons remplacer les mesures μ_ε intervenant dans l'expression de μ_t par $\alpha_\varepsilon \gamma_\varepsilon$, où $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}$, en gardant les conditions i) et ii). (Ici, il est nécessaire de travailler sur T^N, non sur D^N).

Pour $t \in T^N$ et $g' \in G$ posons $t' = t'(t,g') = (t_j \gamma_j(g'))$ et

$$\mu_t' = \int_G (\mu_{t'} \underset{G}{*} \delta_{g'})\, dg' = \int_G \mu_{t'}(gg'^{-1})\, dg'$$

$$\mu_{t'} = \sum_{\varepsilon \in E} \langle t, \varepsilon \rangle\, \gamma_\varepsilon(g')\, \mu_\varepsilon(g).$$

L'application $t' \rightsquigarrow \mu_{t'}$ est dans $C(T^N \times G, L^1(G))$; l'application $t \rightsquigarrow \mu_t'$ est dans $C(T^N, L^1(G))$

$$\mu_t'(g) = \int_G \mu_{t'}(gg'^{-1})\, dg' = \int_G \sum_{\varepsilon \in E} \langle t, \varepsilon \rangle \gamma_\varepsilon(g')\, \mu_\varepsilon(gg'^{-1})\, dg'$$

$$= \sum_{\varepsilon \in E} \langle t, \varepsilon \rangle\, \gamma_\varepsilon(g)\, \alpha_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad \alpha_\varepsilon = \hat{\mu}_\varepsilon(\gamma_\varepsilon).$$

D'autre part :

$$\hat{\mu}_t'(\gamma_j) = \int \gamma_j(g'^{-1})\, \hat{\mu}_{t'}(\gamma_j)\, dg' = \int \gamma_j(g'^{-1})\, t_j\, \gamma_j(g')\, dg' = t_j.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} \text{i)} & \forall\, t \ \|\mu'_t\|_{L^1(G)} \leq 4K \\ \text{ii)} & \widehat{\mu'_t}(\gamma_j) = t_j \\ \text{iii)} & \mu'_t = \sum\limits_{\varepsilon \in E} \langle t,\varepsilon\rangle\, \alpha_\varepsilon\, \gamma_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Troisième étape (astuce de convolution de Drury [2]) : posons $m_t(g) = \overline{\mu'_{t^{-1}}(-g)}$, soit $m_t = \sum\limits_{\varepsilon\in E} \langle t,\varepsilon\rangle \bar{\alpha}_\varepsilon \gamma_\varepsilon$, et posons $\sigma_t = \int_{T^N} \mu_{t\tau^{-1}} \underset{G}{*} m_\tau d\tau$,

$$\sigma_t(g) = \iint_{G\times T^N} \mu_{t\tau^{-1}}(gg'^{-1})\, m_\tau(g')\, dg'\, d\tau .$$

L'application $t \rightsquigarrow \sigma_t$ est dans $C(T^N, L^1(G))$.

Vu que $\widehat{m_t}(\gamma_j) = \overline{\widehat{\mu'_{t^{-1}}}(\gamma_j)} = t_j$, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{i)} & \forall\, t \ \ \|\sigma_t\|_{L^1(G)} \leq 16\, K^2 \\ \text{ii)} & \widehat{\sigma_t}(\gamma_j) = t_j \\ \text{iii)} & \sigma_t = \sum\limits_{\varepsilon\in E} \langle t,\varepsilon\rangle |\alpha_\varepsilon|^2\, \gamma_\varepsilon . \end{cases}$$

Quatrième étape (convolution avec un produit de Riesz) : posons enfin $\lambda_t = \int_{T^N} R_\delta(t\tau^{-1})\, \sigma_\tau\, d\tau$, nous allons voir que les mesures λ_t vérifient les conditions du lemme 2. En effet :

$$\forall\, t \ \|\lambda_t\| \leq (\sup_\tau \|\sigma_\tau\|)\, \|R_\delta\|_1 \leq \frac{16K^2}{\delta}$$

$$\widehat{\lambda_t}(\gamma_j) = \int \widehat{\sigma_{t\tau^{-1}}}(\gamma_j)\, R_\delta(\tau)\, d\tau = \int t_j\, \tau_j^{-1}\, R_\delta(\tau)\, d\tau = t_j\, \widehat{R_\delta}(\eta_j) = t_j .$$

En développant R_δ, on voit immédiatement que :

$$\lambda_t = \frac{1}{\delta}\, \alpha_o + \sum_{k=1}^{N} \delta^{k-1} \Big(\sum_{\substack{\varepsilon\in E \\ |\varepsilon|=k}} \langle t,\varepsilon\rangle |\alpha_\varepsilon|^2\, \gamma_\varepsilon \Big) .$$

Il reste à vérifier la condition iii) du lemme 2 ; nous aurons pour cela besoin du lemme suivant et des notations suivantes, si $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma \neq 1$:

$$u_{n,k} = \sum_{\substack{|\varepsilon|=k \\ \gamma_\varepsilon=\gamma^n}} |\alpha_\varepsilon|^2 \quad ; \quad S_{n,k} = u_{n,k} + \ldots + u_{n,k} = \sum_{\substack{|\varepsilon|=k \\ \gamma_\varepsilon=\gamma^q \\ 1\leq q\leq n}} |\alpha_\varepsilon|^2 .$$

LEMME 3. a) $S_{n,k} \leq \alpha K^2 \inf(n,(\mathrm{Log}\, n)^k)$ <u>où</u> α <u>est une constante numérique</u> $(n \geq 3)$

b) $A = \sum_{\substack{k\geq 1 \\ n\geq 3}} \frac{2^{-k}}{n^2} \inf(n\ ,\ (\mathrm{Log}\, n)^k) < \infty.$

b) est évident ; en effet $A = A_1 + A_2$ avec :

$$A_1 = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k\leq \frac{\log n}{\log\log n}} (\frac{\log n}{2}) \Big) \leq C \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2} (\frac{\log n}{2})^{\frac{\log n}{\log\log n}}$$

(C = constante absolue), soit, puisque $(\log n)^{\frac{\log n}{\log\log n}} = n$,

$$A_1 \leq C \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n} 2^{-\frac{\log n}{\log\log n}} < \infty$$

$$A_2 = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n} \sum_{k> \frac{\log n}{\log\log n}} 2^{-k} \leq C \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n} 2^{-\frac{\log n}{\log\log n}} < \infty.$$

Pour prouver a), remarquons tout d'abord que d'après (4) $S_{n,k} \leq 16K^2 n$, d'autre part, pour k, n, γ fixés, soit

$$f(t,g) = \sum_{\substack{|\varepsilon|=k \\ \gamma_\varepsilon=\gamma^q \\ 1\leq q\leq n}} \overline{\langle t,\varepsilon\rangle}\ \overline{\gamma_\varepsilon(g)}\ \overline{\alpha_\varepsilon}.$$

Pour tout $t \in T^N$, $S_{n,k} = \langle \mu'_t , f \rangle \leq 4K \, \|f(t)\|_{C(G)}$, donc

$$S_{n,k} \leq 4K \int_{T^N} \|f(t)\|_{C(G)} \, dt.$$

Soit $V_n \in L^1(G)$ un noyau de de la Vallée-Poussin vis à vis de $Gp\gamma \sim Z$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \hat{V}_n(\gamma^q) = 1 & \text{si} \quad |q| \leq n \\ \hat{V}_n(\gamma^q) = 2 - \dfrac{|q|}{n} & \text{si} \quad n \leq |q| \leq 2n \\ \hat{V}_n(\gamma^q) = 0 & \text{si} \quad |q| \geq 2n \\ \hat{V}_n(\gamma') = 0 & \text{si} \quad \gamma' \notin Gp\,\gamma \\ \|V_n\|_1 \leq 3 \quad \text{et} \quad \|V_n\|_\infty \leq 4n & \left(\text{d'où } \|V_n\|_{r'} \leq C\, n^{\frac{1}{r}} \text{ si } r \geq 1\right). \end{cases}$$

Pour $r \geq 1$, $r \in R$, et $t \in T^N$ on a :

$$\|f(t)\|_{C(G)} = \|f(t) * V_n\|_{C(G)} \leq \|f(t)\|_{L^r(G)} \|V_n\|_{L^{r'}(G)} \leq C\, n^{\frac{1}{r}} \|f(t)\|_{L^r(G)}.$$

D'où :

$$\int_{T^N} \|f(t)\|_{C(G)} \, dt \leq \left(\int_{T^N} \|f(t)\|^r_{C(G)} \, dt\right)^{1/r} \leq C\, n^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^r(T^N \times G)}$$

et donc

(5) $$S_{n,k} \leq C\, K\, n^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^r(T^N \times G)} \qquad (C = c^{te} \text{ numérique}).$$

D'après [1] $\{\varepsilon \in E / |\varepsilon| = k\} \subset Z^N$ est un ensemble $\Lambda(r)$ avec une constante $\leq r^{k/2}$ si bien que pour g fixé

$$\int |f(t,g)|^r \, dt \leq r^{kr/2} \Big(\sum_{\substack{|\varepsilon|=k \\ \gamma_\varepsilon = \gamma^q \\ 1 \leq q \leq n}} |\alpha_\varepsilon|^2 \Big)^{\frac{r}{2}} = r^{k\,r/2} (S_{n,k})^{r/2}.$$

On en déduit

$$\|f\|_{L^r(T^N \times G)} \leq r^{k/2} (S_{n,k})^{1/2}$$ et donc d'après (5) :

$S_{n,k} \leq C^2 K^2 n^{\frac{2}{r}} r^k$. D'où le lemme 3 en faisant $r = \mathrm{Log}\, n$ $(r \geq 1$ car $n \geq 3)$.

Cela étant, d'après le développement de λ_t, nous avons :

$$|\hat{\lambda}_t(\gamma^n)| \leq \sum_{k=1}^{N} \delta^{k-1} \Big(\sum_{\substack{|\varepsilon|=k \\ \gamma_\varepsilon = \gamma^n}} |\alpha_\varepsilon|^2 \Big) = \sum_{k=1}^{N} \delta^{k-1} u_{n,k}.$$

D'où :

$$\sum_{n>p} \frac{|\hat{\lambda}_t(\gamma^n)|}{n} \leq \sum_{k=1}^{N} \delta^{k-1} \sum_{n>p} \frac{u_{n,k}}{n} \leq \sum_{k=1}^{N} \delta^{k-1} \sum_{n>p} \frac{S_{n,k}}{n^2}$$

en faisant une transformation d'Abel et en utilisant le fait que pour tout K fixé, $S_{n,K} = o(n)$ d'après le lemme 3. Puisque $\delta \leq \frac{1}{2}$, on a donc via le lemme 3 une majoration du type :

$$\sum_{n>p} \frac{|\hat{\lambda}_t(\gamma^n)|}{n} \leq \sum_{n>p} \frac{S_{n,1}}{n^2} + C \delta K^2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ n \geq 3}} \frac{2^{-k}}{n^2} \inf(n \,,\, (\mathrm{Log}\, n)^k).$$

Il reste à remarquer que par le lemme 3 a) :

$$\sum_{n>p} \frac{S_{n,1}}{n^2} \leq \alpha K^2 \sum_{n>p} \frac{\mathrm{Log}\, n}{n^2} \leq \alpha K^2 \int_p^\infty \frac{\mathrm{Log}\, x}{x^2}\, dx$$

$$= \alpha K^2 \Big(\frac{\log p}{p} + \frac{1}{p} \Big) \leq 2 \alpha K^2 \frac{\mathrm{Log}\, p}{p}$$

et à utiliser le b) du lemme 3 pour conclure la démonstration du lemme 2 et du théorème.

Bibliographie

[1] BONAMI, A. Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. Ann. Inst. Fourier 20 (1970), 335-402.

[2] DRURY, S. Sur les ensembles de Sidon. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 162-163.

[3] PARTHASARATHY, K. R. Probability measures on metric spaces. Academic Press, Chap. I, § 3, 4.

[4] RIDER, D. Randomly continuous functions and Sidon sets. Duke Math. J. 42 (1975), 759-764.

[5] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Interscience Pub., New York 1962.

Exposé no. 5 Année 1982-83

Gilles Godefroy

ESPACES H^1 SUR DES DOMAINES GENERAUX

Résumé. On étudie dans une première partie les sous-espaces X de L^1 dont la boule unité est fermée dans L^o ; on montre en particulier que l'espace L^1/X est alors f. s. c. Ce résultat permet d'obtenir $L^1/H^1(U)$ f. s. c., où U est un domaine de $\mathbb{C}^n$ vérifiant des hypothèses assez générales. On donne également des applications à l'analyse de Fourier sur les groupes ordonnés.

Dans une première partie, on démontre le résultat général suivant : si X est un sous-espace fermé de $L^1(\mu)$ dont la boule unité est fermée dans $L^o(\mu)$, alors l'espace quotient $L^1(\mu)/X$ est faiblement séquentiellement complet (f. s. c.). Dans une seconde partie, on étudie quelques propriétés topologiques fines des sous-ensembles de $H^1(D)$ bornés en norme, et on voit comment ces propriétés peuvent s'étendre à des espaces $H^1(U)$, où U est un domaine de $\mathbb{C}^n$. On applique ensuite les résultats obtenus, pour montrer par exemple que les espaces suivants sont f. s. c. :

1. $L^1/_{H^1}(U)$, où U est un domaine de Cartan symétrique de $\mathbb{C}^n$, ou bien un domaine strictement pseudoconvexe à frontière $\mathcal{C}^2$. Rappelons qu'un domaine d'holomorphie borné Ω de $\mathbb{C}^n$ est dit "domaine de Cartan symétrique" si les transformations conformes de Ω agissent transitivement sur Ω et si pour tout $z \in \Omega$, il existe une transformation conforme f de Ω telle que $f(z) = z$, $f^2 = \mathrm{Id}$ et $f \neq \mathrm{Id}$ (voir par exemple [10]).

2. $\mathcal{C}_{\Gamma\setminus E}(G)^*$, où G est un groupe topologique compact, et $E \subset \Gamma = \hat{G}$ une "petite" partie du groupe dual Γ.

Les notations employées sont classiques ou seront précisées en cours d'article. Signalons simplement que si X est un espace de Banach, la boule unité fermée de X sera notée X_1, la topologie faible $(\sigma(X,X^*))$ sera simplement notée $\underline{\omega}$; la topologie préfaible $(\sigma(X^*,X))$, définie sur X^*, sera notée $\underline{\omega}^*$.

I. SOUS-ESPACES BIEN DISPOSES DE L^1.

Soit (Ω,Σ,μ) un espace de probabilité, et soit $L^1(\Omega,\Sigma,\mu) = L^1$ l'espace des fonctions μ-intégrables que l'on munit de sa norme usuelle. Commençons par le lemme suivant.

LEMME 1. <u>Soit</u> X <u>un sous-espace fermé de</u> $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

1. <u>La boule unité</u> X_1 <u>de</u> X <u>est fermée dans</u> $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$.
2. <u>Il existe</u> p, $0 \leq p < 1$, <u>tel que</u> X_1 <u>soit fermée dans</u> $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.
3. <u>Pour tout</u> p, $0 \leq p < 1$, X_1 <u>est fermée dans</u> $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.
4. <u>On a</u> $X^{\perp\perp} = X \oplus (L^1_s \cap X^{\perp\perp})$, <u>où</u> L^1_s <u>désigne la partie singulière de</u> L^{1**}.
5. <u>Il existe une projection</u> $\pi : X^{**} \longrightarrow X$ <u>telle que</u> $\|x\| = \|\pi x\| + \|x-\pi x\|$ <u>pour tout</u> $x \in X^{**}$.

<u>Démonstration</u>.

$1) \Longleftrightarrow 2) \Longleftrightarrow 3)$: provient du fait que les topologies induites par $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ et $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(p < 1)$ coïncident sur la boule unité de $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. En effet, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\forall f \in L^1, \ \forall \varepsilon > 0, \qquad \int_\Omega |f|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p + \mu\{|f| > \varepsilon\}^{1-p} . (\int |f| \, d\mu)^p .$$

Le résultat s'ensuit aisément.

1)$\Longleftrightarrow$4) : Ecrivons $L^{1**} = L^1 \oplus_1 L^1_s$, et soit $\pi : L^{1**} \longrightarrow L^1$ la projection parallèlement à L^1_s. D'après [2], on a pour tout convexe fermé borné C dans L^1, l'équivalence suivante :

$$C \text{ fermé dans } L^0(\Omega,\Sigma,\mu) \Longleftrightarrow C = \pi(\tilde{C})$$

où $\tilde{C}$ désigne l'adhérence de C dans (L^{1**}, ω^*). Il suffit alors d'appliquer ce résultat à $C = X_1$.

4) $\Longrightarrow$ 5) est évident : on identifie canoniquement X^{**} et $X^{\perp\perp}$, et on considère la projection π = restriction à $X^{\perp\perp}$ de la projection de L^{1**} sur L^1 parallèlement à L^1_s.

5) $\Longrightarrow$ 4) : le lemme suivant est facile à démontrer : soit $f,g \in L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$; alors $\|\alpha f + \beta g\|_1 = |\alpha|\,\|f\|_1 + |\beta|\,\|g\|_1$ si et seulement si $|f| \wedge |g| = 0$. Soit alors $\pi : X^{**} \longrightarrow X$ une projection telle que $\|x\| = \|\pi x\| + \|x-\pi x\|$ pour tout $x \in X^{**}$, et soit $x_0 \in \operatorname{Ker} \pi$. On a $|x_0| \wedge |y| = 0$ pour tout $y \in X$; en considérant éventuellement une projection de bande, on se ramène au cas où le réticulé engendré par X est L^1 tout entier ; on a alors $|x_0| \wedge |f| = 0$ pour tout $f \in L^1$, donc $x_0 \in L^1_s$, et $\operatorname{Ker} \pi \subseteq L^1_s \cap X^{\perp\perp}$. Comme $X^{\perp\perp} = X \oplus \operatorname{Ker} \pi$ et $X \cap (L^1_s \cap X^{\perp\perp}) = \{0\}$, on a $\operatorname{Ker} \pi = L^1_s \cap X^{\perp\perp}$, d'où $X^{\perp\perp} = X \oplus (L^1_s \cap X^{\perp\perp})$.

CQFD

REMARQUE. L'équivalence 1)$\Longleftrightarrow$5) montre que la propriété "X_1 est L^0-fermée" est indépendante du plongement isométrique de X dans L^1 ; en effet, 5) est une propriété intrinsèque de l'espace X.

Posons une définition.

DEFINITION 2. Soit X un sous-espace fermé de L^1. L'espace X sera dit bien disposé dans $L^1(\Omega,\mu)$ si la boule unité de X est fermée dans $L^0(\Omega,\mu)$.

EXEMPLES.

- Tout sous-espace réflexif de L^1 est bien disposé.
- Tout espace $L^1(\Omega, \Sigma', \mu)$ est bien disposé, où Σ' est une sous-tribu de Σ.
- Si μ est une mesure sans atomes, un sous-espace de $L^1(\mu)$ de codimension finie n'est jamais bien disposé.

Le résultat suivant est essentiel.

THEOREME 3. Soit X un sous-espace fermé bien disposé de L^1. Alors l'espace quotient $L^1/_X$ est f. s. c.

Démonstration.

D'après le lemme 1, on a $X^{\perp\perp} = X \oplus (L^1_s \cap X^{\perp\perp})$. On en déduit que

$$(L^1/_X)^{**} = L^{1**}/_{X^{\perp\perp}} = L^1/_X \oplus L^1_s/_{L^1_s \cap X^{\perp\perp}}$$

et il est facile dé vérifier que la somme ci-dessus est une ℓ^1-somme, c'est-à-dire que

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$$

si $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in L^1/_X$ et $x_2 \in L^1_s/_{L^1_s \cap X^{\perp\perp}}$.

Le théorème sera alors une conséquence de la

PROPOSITION 4 [4]. Soit Y un espace de Banach tel qu'il existe une projection $\pi : Y^{**} \longrightarrow Y$ telle que $\|x\| = \|\pi x\| + \|x - \pi x\|$ pour tout $x \in Y^{**}$, alors Y est f. s. c.

Démonstration.

Soit $y \in \operatorname{Ker} \pi$, de première classe de Baire sur (Y^*, ω^*). Il faut montrer que $y = 0$. Pour cela, considérons $u \in Y$ tel que $\|u\| = \|y\|$. Soit $\varepsilon = \pm 1$. On a pour tout $w \in Y$

$$\begin{aligned}\|w\| &\leq \|w - \varepsilon u\| + \|u\| \\ &\leq \|w - \varepsilon u\| + \|y\| = \|w - (y + \varepsilon u)\|.\end{aligned}$$

On sait que si $E \subseteq F$, le dual E^* de E est isométrique à $F^*/_{E^\perp}$. En appliquant cela à $F = Y^*$ et $E = \mathrm{Ker}(y + \varepsilon u)$, on a

$$\forall\, w \in Y, \quad \|w_{|\mathrm{Ker}(y+\varepsilon u)}\| = d(w\,, \mathbb{K}(y+\varepsilon u)).$$

On a donc ici

$$\forall\, w \in Y, \quad \|w_{|\mathrm{Ker}(y+\varepsilon u)}\| = \|w\|\,.$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(y + \varepsilon u) \cap Y_1'$ est ω^*-dense dans Y_1'. Comme y est de première classe $\mathrm{Ker}(y + \varepsilon u) \cap Y_1'$ est un $\mathcal{G}_\delta$-dense dans Y_1', donc par le théorème de Baire, $\mathrm{Ker}(y+u) \cap \mathrm{Ker}(y-u) \cap Y_1'$ est ω^*-dense dans Y_1' ; mais cet ensemble est contenu dans $\mathrm{Ker}\, u \cap Y_1'$, et donc $u = 0$ puisque u est ω^*-continu ; par conséquent $y = 0$.

CQFD

Le résultat suivant, qui nous donne une condition suffisante simple de bonne disposition, sera utile.

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> $0 \leq p < 1$, <u>et soit</u> Y <u>un sous-espace fermé de</u> $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. <u>Alors l'espace</u> $X = Y \cap L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ <u>est un sous-espace fermé bien disposé de</u> L^1.

<u>Démonstration</u>.

L'espace X est fermé en norme L^1, puisque la norme L^1 domine la pseudo-norme L^p $(p < 1)$. D'autre part, la boule unité X_1 de X s'écrit $X_1 = Y \cap B_1$, où B_1 est la boule unité de L^1, laquelle est fermée pour la topologie de L^o, donc X_1 est fermée dans $L^o(\Omega, \Sigma, \mu)$.

CQFD

Considérons à présent, lorsque X est bien disposé, l'espace $X_s = (X^{\perp\perp} \cap L_s^1)$. Il est naturel de se demander sous quelles conditions l'espace X_s est ω^*-fermé dans X^{**} ; ce n'est pas toujours vrai : citons l'exemple $X = L^1(\mu)$, où μ n'est pas purement atomique.

Nous allons voir que cette propriété est liée à l'existence de formes linéaires continues sur certains espaces non localement convexes.

PROPOSITION 6. Soit Y un sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 \leq p < 1)$, tel que le dual Y^* sépare les points de Y. Alors l'espace $X = L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \cap Y$ est un sous-espace bien disposé de L^1 tel que $X_s = (X^{\perp\perp} \cap L^1_s)$ soit ω^*-fermé.

Démonstration.

L'espace X est bien disposé par la proposition 5. D'autre part, soit $\varphi \in Y^*$, et soit $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à X. Il existe $\varphi_o \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ tel que $\varphi_o(x) = \tilde{\varphi}(x)$ pour tout x dans X, et φ_o est continue sur X muni de la pseudo-norme L^p $(p < 1)$. Soit $\nu \in X_s = (X^{\perp\perp} \cap L^1_s)$, qu'on suppose de norme 1. Il existe une suite (f_n) dans X_1, et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tels que

$$(1) \qquad \nu = \lim_{n \to \mathcal{U}} f_n \quad \text{dans} \quad (L^{1**}, \omega^*).$$

On a le

LEMME 7. Soit (f_n) une suite de L^1, $\|f_n\|_1 \leq 1$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre, tels que $\nu = \lim_{\mathcal{U}} f_n$ dans (L^{1**}, ω^*). Si $\nu \in L^1_s$, alors $\lim_{n \to \mathcal{U}} f_n = 0$ dans $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, pour tout $p < 1$.

Démonstration.

Il suffit de montrer que $\lim f_n = 0$ dans L^o, c'est-à-dire que

$$\forall\ \varepsilon > 0, \qquad \lim \mu\left\{\omega \in \Omega \mid |f_n(\omega)| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe $X \in \mathcal{U}$, $\eta > 0$ tels que

$$\mu\left\{|f_n(x)| > \varepsilon\right\} \geq \eta \qquad \forall\ n \in X.$$

Comme $\nu \in L^1_s$, il existe $A_o \in \Sigma$ tel que

$$\mu(A_o) < \eta/2 \qquad\qquad |\nu|(\chi_{A_o}) > 1 - \frac{\varepsilon\eta}{3}.$$

Il existe donc $X' \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall\, n \in X', \qquad \int_{A_o} |f_n|\, d\mu > 1 - \frac{\varepsilon\eta}{3}.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in X \cap X'$,

$$\|f_n\|_1 = \int_{A_o} |f_n|\, d\mu + \int_{\Omega\setminus A_o} |f_n|\, d\mu \geq 1 - \frac{\varepsilon\eta}{3} + \frac{\varepsilon\eta}{2} > 1.$$

ce qui est absurde.

CQFD

Soit $\nu \in X_s$, $\nu = \lim f_n$, où $f_n \in X$, $\|f_n\| = \|\nu\|$. Par le lemme 7, on a $\lim\limits_{\mathcal{U}} f_n = 0$ dans L^p, d'où $\lim\limits_{\mathcal{U}} \varphi(f_n) = 0$, donc $\lim\limits_{\mathcal{U}} \varphi_o(f_n) = 0$, donc $\varphi_o(\nu) = 0$. On a montré que $X_s \subseteq \left[\{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}\right]^{\perp}$. Comme Y^* sépare Y, donc X, on a $X \cap \left[\{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}\right]^{\perp} = \{0\}$; il est alors clair (algèbre linéaire) que $X^{\perp\perp} = X \oplus X_s$ implique

$$X_s = X^{\perp\perp} \cap L^1_s = X^{\perp\perp} \cap \left[\{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}\right]^{\perp}$$

et donc que X_s est ω^*-fermé.

CQFD

DEFINITION 8. <u>Un sous-espace</u> X <u>de</u> $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ <u>sera dit un H-espace si</u> X <u>s'écrit</u> $X = L^1 \cap Y$, <u>où</u> Y <u>est un sous-espace fermé de</u> $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(0 \leq p < 1)$ <u>tel que</u> Y^* <u>sépare les points de</u> Y.

REMARQUE. Cette définition est a priori plus restrictive que la définition (définition 5) des H-espaces donnée dans [11].

Avant de passer à des exemples concrets, donnons quelques propriétés des H-espaces.

PROPOSITION 9. <u>Soit</u> $X \subseteq L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ <u>un H-espace. Soit</u> $\mathcal{T}_{Y^*}$ <u>la topologie</u>,

<u>définie sur</u> X, <u>de la convergence simple sur</u> $\{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}$. <u>On a alors</u> :

1. <u>La boule unité</u> X_1 <u>de</u> X <u>est compacte pour</u> $\mathcal{T}_{Y^*}$.
2. <u>La topologie induite par</u> L^o <u>sur</u> X_1 <u>est plus fine que</u> $\mathcal{T}_{Y^*}$.
3. <u>Soit</u> C <u>un convexe de</u> X, <u>borné en norme</u> L^1. <u>Alors</u> C <u>est fermé dans</u> L^o <u>si et seulement si</u> C <u>est</u> $\mathcal{T}_{Y^*}$-<u>fermé</u>.

<u>Démonstration</u>.

1. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X_1, et $x = \lim(\mathcal{U})$ dans (X_1^{**}, ω^*) ; soit $x = x_o + x_1$, $x_o \in X$, $x_1 \in X_s$. Sachant que $X_s = \{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}^{\perp}$, il est trivial de vérifier que $x_o = \lim(\mathcal{U})$ dans $(X_1, \mathcal{T}_{Y^*})$; tout ultrafiltre est donc convergent dans $(X_1, \mathcal{T}_{Y^*})$.

2. est clair puisque les topologies L^o et L^p $(p < 1)$ coïncident sur X_1.

3. On se ramène immédiatement à $C \subseteq X_1$. Il est clair que si C est $\mathcal{T}_{Y^*}$-fermé, alors C est L^o-fermé, d'après 2). Inversement, si C est τ_{Y^*}-fermé, on a $C = \pi(\tilde{C})$, où $\tilde{C} = \bar{C}$ dans (X^{**}, ω^*), et $\pi : X^{**} \longrightarrow X$, $\operatorname{Ker} \pi = X_s$, d'après $X_s = \{\varphi|_X \mid \varphi \in Y^*\}^{\perp}$. Or, la propriété $C = \pi(\tilde{C})$ caractérise les convexes L^o-fermés d'après [2].

CQFD

REMARQUE.

1. L'exemple d'un sous-espace réflexif de L^1 – qui est H-espace d'après [6] – montre qu'en général, la topologie induite par L^o sur X_1 est strictement plus fine que la topologie $\mathcal{T}_{Y^*}$; néanmoins, les <u>convexes</u> fermés sont les mêmes pour les deux topologies.

2. On peut montrer diverses propriétés plus fines des H-espaces (voir [11]) ; à titre d'exemple, il existe une <u>unique</u> topologie de convexe compact sur X_1 moins fine que la topologie induite par L^o.

II. APPLICATIONS AUX ESPACES H^1.

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\mathbf{T} = \partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $0 < p \leq 1$. Notons $H^p(D)$ l'espace

$$H^p(D) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \,\middle|\, \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < \infty \right\}$$

où $\mathcal{H}(U)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans $\overset{\circ}{D} = U$. Dans ce qui suit, on identifiera, avec la notation classique f^* (valeurs au bord), $H^p(D)$ à un sous-espace de $L^p(\mathbf{T}, d\lambda)$, où λ désigne la mesure de Haar sur $\mathbf{T}$ (voir [8]). Les lemmes ci-dessous sont classiques.

LEMME 10. <u>Soit</u> $0 < p \leq 1$. <u>Soit</u> $\mathcal{T}_U$ <u>la topologie définie sur</u> $H^p(D)$ <u>de la convergence compacte sur</u> U. <u>Alors les parties bornées de</u> $H^p(D)$ <u>sont</u> $\mathcal{T}_U$-<u>relativement compactes</u>.

<u>Démonstration</u>

Soit $h \in H^p(D)$. La fonction $|h|^p$ est sous-harmonique sur U ; notons $|h_*|^p$ sa valeur au bord. On a

(1) $$\forall z \in U \;, \quad |h(z)|^{1/2} \leq P_z \left[|h^*|^{1/2} \right]$$

où P_z désigne le noyau de Poisson associé à z. Soit $B \subseteq H^p$ tel que

(2) $$\sup \left\{ \int_0^{2\pi} |h^*(e^{i\theta})|^{1/2} \, d\theta \;\middle|\; h \in B \right\} = M < \infty .$$

D'après (1), il existe, pour tout compact K de U, un nombre $M_K < \infty$ tel que

$$\forall z \in K, \; \forall h \in B \;, \quad |h(z)|^{1/2} \leq M_K$$

donc

$$\forall z \in K, \; \forall h \in B \;, \quad |h(z)| \leq M_K^2 .$$

La famille B constitue une famille normale de fonctions holomorphes, et est donc relativement compacte dans $(\mathcal{H}(U), \mathcal{T}_U)$; la majoration (2) montre aisément que B

est en fait relativement compacte dans $H^p(D)$.

CQFD

LEMME 11. Soit $0 < p \leq 1$. L'espace $H^p(D) \times H^p(D)$ est fermé dans l'espace $E = L^p(\mathbf{T}) \times H^p(D)$, où E est muni de la topologie produit $L^p \times \mathcal{T}_U$.

Démonstration.

Remarquons que le disque ouvert U étant une réunion dénombrable de compacts, la topologie $L^p \times \mathcal{T}_U$ est métrisable sur l'espace E. Soit donc (f_n) une suite de H^p telle que

$$f_n^* \longrightarrow \varphi \quad \text{dans} \quad L^p(\mathbf{T}, d\lambda)$$

$$f_n \longrightarrow \psi \quad \text{dans} \quad (H^p(D), \mathcal{T}_U)$$

il faut montrer que $\psi^* = \varphi$. Par différence, on se ramène à $\psi = 0$. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \quad \text{tel que} \quad \forall\, n,k \geq N, \quad \int_0^{2\pi} |f_n^*(e^{i\theta}) - f_k^*(e^{i\theta})|^{1/2}\, d\theta \leq \varepsilon\,.$$

Par sous-harmonicité, on a

$$\forall\, 0 < r < 1, \quad \forall\, n,k \geq N, \quad \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f_k(re^{i\theta})|^{1/2}\, d\theta \leq \varepsilon.$$

Comme $f_n \longrightarrow 0$ pour $\mathcal{T}_U$, on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$

$$\forall\, 0 < r < 1, \quad \forall\, k \geq N, \quad \int_0^{2\pi} |f_k(re^{i\theta})|^{1/2}\, d\theta \leq \varepsilon$$

d'où en faisant tendre r vers 1

$$\forall\, k \geq N \qquad \int_0^{2\pi} |f_k^*(e^{i\theta})|^{1/2}\, d\theta \leq \varepsilon$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/2}\, d\theta \leq \varepsilon$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\varphi = 0$.

CQFD

LEMME 12. Soit $0 < p \leq 1$. L'espace $H^p(D)$ est un sous-espace fermé de

$L^p(T\ , d\lambda)$.

Démonstration.

Soit $\psi \in L^p(\mathbf{T}, d\lambda)$ telle qu'il existe une suite f_n de $H^p(D)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^* = \psi$ dans L^p. Par le lemme 10, on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite, que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \varphi \in H^p(D)$ dans $(H^p(D)\ , \mathcal{T}_U)$. On a $(f_n^*\ , f_n) \longrightarrow (\psi\ , \varphi)$ dans $(L^p \times H^p\ , L^p \times \mathcal{T}_U)$, donc $\psi = \varphi^*$ par le lemme 11.

CQFD

LEMME 13. Soit B_1 la boule unité fermée de $H^1(D)$. L'application $Id = (B_1\ , L^o) \longrightarrow (B_1\ , \mathcal{T}_U)$ est continue.

Démonstration.

D'après le lemme 10, la boule unité B_1 de H^1 est compacte pour $\mathcal{T}_U$ (c'est essentiellement le théorème de F. et M. Riesz). D'autre part, la topologie L^o coïncide avec la topologie L^p $(p<1)$ sur B_1 (voir lemme 1). Enfin, par le lemme 11, le graphe de Id est fermé dans $(B_1 \times B_1\ , L^o \times \mathcal{T}_U)$, et toute fonction d'un espace séparé à valeurs dans un espace compact, telle que le graphe soit fermé dans le produit est continue.

CQFD

LEMME 14. Soit $0 < p \leq 1$. La topologie L^p est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_U$ sur $H^p(D)$.

Démonstration.

En effet d'après le lemme 12, l'espace $H^p(D)$ est complet, le graphe de $Id = (H^p\ , L^p) \longrightarrow (H^p\ , \mathcal{T}_U)$ est fermé par le lemme 11, et le théorème du graphe fermé termine la démonstration.

Il faut noter ici l'analogie entre ces derniers résultats et les théorèmes de [13].

On déduit de ces quelques lemmes le théorème suivant - déjà connu à la notation près -.

THEOREME 15. <u>L'espace</u> $H^1(D)$ <u>est un H-sous-espace de l'espace</u> $L^1(\mathbf{T},d\lambda)$.

<u>Démonstration</u>.

Il est clair que $H^1(D) = L^1(\mathbf{T}) \cap H^{1/2}(D)$. Or, l'espace $H^{1/2}(D)$ est un sous-espace fermé de $L^{1/2}(\mathbf{T})$, donc l'espace $H^1(D)$ est bien disposé d'après le proposition 5. De plus, pour tout $z \in U$, l'application $\varepsilon_z : f \longrightarrow f(z)$ est continue sur $H^{1/2}$ d'après le lemme 14, et donc $H^{1/2*}$ sépare $H^{1/2}$, ce qui montre que $H^1(D)$ est un H-espace.

CQFD

On en déduit

COROLLAIRE 16. <u>L'espace</u> $H^1(D)$ <u>jouit des propriétés suivantes</u> :

1. <u>Sur la boule unité</u> B_1, <u>la topologie induite par</u> $L^0(T,d\lambda)$ <u>est plus fine que la topologie</u> $\mathcal{T}_U$.

2. <u>L'espace quotient</u> $L^1(T)/H^1(D)$ <u>est f.s.c.</u>

3. <u>Soit</u> C <u>un convexe borné de</u> $H^1(D)$. <u>Alors</u> C <u>est fermé pour</u> $\mathcal{T}_U$ <u>si et seulement si</u> C <u>est</u> L^0<u>-fermé</u>.

<u>Démonstration</u>.

Avec les notations de la proposition 9, la topologie $\mathcal{T}_{H^{1/2*}}$ coïncide avec la topologie $\mathcal{T}_U$ sur les bornés de $H^1(D)$, par compacité. Les assertions 1. et 3. sont alors des applications directes de la proposition 9. L'assertion 2. se déduit du théorème 3, puisque $H^1(D)$ est bien disposé.

CQFD

On a, plus concrètement, le

COROLLAIRE 17. <u>Soit</u> A <u>un sous-ensemble de</u> $H^1(D)$, <u>et soit</u> $f \in \overline{A}$ (<u>dans</u>

$(H^1(D), \mathcal{T}_U))$. Alors il existe une suite $g_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_n^i f_n^i$ de barycentres d'éléments de $A (\lambda_n^i \geq 0, \sum_i \lambda_n^i = 1)$ qui converge λ-presque partout vers f^* sur T.

Démonstration.

Toute suite convergente dans $L^o(\mathbf{T},\lambda)$ admet une sous-suite presque partout convergente. Si A est borné, le résultat est une conséquence directe du corollaire 16, 3. Si A est quelconque, soit C l'enveloppe convexe $\sigma(H^1,\mathcal{C})$-fermée de A ; on a $f \in C$, et $C = \pi(\tilde{C})$ puisque $H^{1''} \cap L_s^1 = \mathcal{C}^{\perp}$. Soit $C' = \bar{C}$ dans $L^1(\mathbf{T}, d\lambda)$ muni de la topologie L^o, et soit $C'' = C' \cap H^1$.

D'après [2], tout convexe B L^o-fermé de L^1 vérifie $\pi(\tilde{B}) = B$, donc on a $C' = \pi(\tilde{C}')$; de plus, on a $\tilde{C}'' \subset \tilde{C}' \cap H^{1\perp\perp}$, donc $\pi(\tilde{C}'') \subseteq \pi(\tilde{C}') = C'$, et $\pi(\tilde{C}'') \subseteq \pi(H^{1''}) = H^1$, donc $\pi(\tilde{C}'') \subset C''$, d'où $\pi(\tilde{C}'') = C''$; comme $H_s^1 = H^{1\perp\perp} \cap L_s^1 = H^{1\perp\perp} \cap \mathcal{C}(\mathbf{T})^{\perp}$, ceci montre que C'' est $\sigma(H^1, \mathcal{C}(\mathbf{T}))$-fermé, donc que $C'' = C$, et $f \in C''$, ce qui montre le résultat.

CQFD

REMARQUES.

1. Le corollaire 17 s'obtient également à l'aide du théorème de Khintchine-Ostrowski (voir [3]). Notons que la topologie L^o est strictement plus fine que la topologie $\mathcal{T}_U$ sur la boule unité de $H^1(D)$ - considérer la suite z^n - mais que cependant les convexes L^o-fermés de H^1 sont toujours $\mathcal{T}_U$-fermés et non l'inverse (s'ils ne sont pas bornés)!

2. Il convient de noter que le corollaire 17 ne peut s'étendre aux fonctions harmoniques sur U et continues sur D. En effet, à l'aide de la formule de Poisson, on construit facilement une suite de fonctions de $\mathcal{C}(D)$, harmoniques dans U, bornée dans $L^1(\mathbf{T})$, qui converge vers 0 sur les compacts de U et vers 1 λ-presque partout sur $\mathbf{T}$.

3. On montre facilement que le dual de $H^1(D)$ muni de la topologie $L^o(\mathbf{T}, \lambda)$ est $\{0\}$. On en déduit en particulier que la topologie L^o n'est pas plus fine que la topologie $\sigma(H^1,\mathcal{C}(\mathbf{T}))$ sur $H^1(D)$, bien que les convexes fermés bornés en norme soient

les mêmes pour les deux topologies. Cela n'est pas possible dans le cas d'une topologie localement convexe, comme le montre le théorème de Banach-Dieudonné.

Notons qu'on a montré ici certaines propriétés des espaces H^1 ou L^1/H^1 en employant très peu de propriétés fonctionnelles de $H^1(D)$; à titre d'exemple, L^1/H^1 f. s. c. s'obtient avec très peu de moyens - essentiellement le théorème 3 et le lemme 11 - et non avec une technique d'ensembles-pics ([12]). La méthode employée s'étend sans peine à des ouverts assez réguliers de $\mathbb{C}^n$ pour qu'on ait l'existence d'un noyau de type Cauchy et certaines majorations simples (du type "lemme 11"). Rappelons que si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on définit

$$H^1(U) = \{ f \text{ holomorphe dans } U \mid \exists\, \varphi \text{ harmonique t. q. } |f| \leq \varphi \text{ sur } U \}.$$

Le lecteur voudra bien admettre que la méthode employée permet de montrer le

THEOREME 18. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :

1. U est un domaine de Cartan symétrique (voir [10]).
2. U est strictement pseudo-convexe à frontière $\mathcal{C}^2$ (voir [12]).

Alors l'espace $H^1(U)$ est un H-sous-espace de $L^1(\partial U, \sigma)$.

Bien entendu, l'analogue des corollaires 16 et 17 est valide. On a par exemple le

COROLLAIRE 19. Soit $U = D^n$ ou $U = B_n$. Alors l'espace $L^1(\partial U, \sigma)/H^1(U)$ est f.s.c.

Ci-dessus, D^n - respectivement B_n - désigne le polydisque - resp. la boule euclidienne - de $\mathbb{C}^n$, ∂U la frontière distinguée, et σ la mesure de Haar sur $\partial D^n = \mathbf{T}^n$ - resp. la mesure de surface sur $\partial B_n = S_n$.

III. APPLICATION A L'ANALYSE DE FOURIER SUR LES GROUPES ORDONNES.

Soit G un groupe abélien compact connexe, et soit $\hat{G} = \Gamma$ son groupe dual. Le groupe G étant connexe, Γ n'a pas d'éléments d'ordre fini, et il existe donc un ordre total sur Γ compatible avec la structure de groupe (voir [9], chap. 8) ; ceci équivaut à la donnée de Γ^+ inclus dans Γ tel que

$$(*) \qquad \begin{cases} \Gamma^+ \cup -\Gamma^+ = \Gamma \\ \Gamma^+ \cap -\Gamma^+ = \{0\} \\ \Gamma^+ + \Gamma^+ \subseteq \Gamma^+ . \end{cases}$$

On a alors $\Gamma^+ = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geq 0\}$. Posons, pour $E \subseteq \Gamma$

$$L^1_E = \{f \in L^1(G,m) \mid \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \notin E\}$$

où $\underline{m}$ est la mesure de Haar de G. Un sous-ensemble Γ^+ de Γ vérifiant (*) sera appelé un demi-groupe.

DEFINITION 20. Un sous-ensemble C de Γ sera dit un <u>cône</u> si C est une intersection de demi-groupes. C sera dit un <u>cône saillant</u> si de plus C est totalement ordonné pour un certain ordre total compatible sur Γ.

EXEMPLES.

- $\mathbf{N}$ est un cône saillant de $\mathbf{Z}$!

- Si C est un cône convexe saillant de $\mathbf{R}^n$, alors $\mathbf{Z}^n \cap C$ est un cône saillant de $\mathbf{Z}^n = \hat{\mathbf{T}}^n$ (d'où la terminologie).

On a alors le résultat suivant.

THEOREME 21. <u>Soit</u> X <u>un sous-ensemble de</u> $\Gamma = \hat{G}$ <u>dont un translaté est contenu dans un cône saillant. Alors l'espace</u> $L^1_X(G)$ <u>est un H-sous-espace de</u> $L^1(G,m)$.

Nous renvoyons à [11] pour une démonstration, de principe assez proche de la démonstration faite ci-dessus dans le cas de $H^1(D)$. On déduit de ce résultat, comme dans [11] :

COROLLAIRE 22. <u>Si</u> X <u>est un sous-ensemble de</u> $\Gamma = \hat{G}$ <u>dont un translaté est contenu dans un cône saillant, alors l'espace</u> $\mathcal{C}_{\Gamma\setminus X}(G)^*$ <u>est f.s.c.</u>

où bien entendu

$$\mathcal{C}_{\Gamma\setminus E}(G) = \{f\in\mathcal{C}(G)\,|\,\hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall\, \gamma\in E\}.$$

On a par exemple

COROLLAIRE 23. <u>Soit</u> X <u>un sous-ensemble de</u> $\mathbf{Z}^n$ <u>qui est majoré - ou minoré - pour l'ordre produit. Alors l'espace</u> $\mathcal{C}_{\mathbf{Z}^n\setminus X}(\mathbf{T}^n)^*$ <u>est f.s.c.</u>

REMARQUES.

1. Les résultats du type "$L^1(G,m)/L^1_X$ f.s.c." peuvent être vus comme des théorèmes d'existence. En effet, on en déduit très facilement la chose suivante. Soit (f_n) une suite de $L^1(G,m)$ telle que

$$L(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \int_G f_n.\varphi \; dm$$

existe pour tout $\varphi\in L^\infty_{\Gamma\setminus X}(G)$. Il existe alors une fonction $f \in L^1(G)$ telle que

$$L(\varphi) = \int_G f.\varphi \; dm$$

pour tout $\varphi \in L^\infty_{\Gamma\setminus X}(G)$.

2. La condition $L^1_X(G)$ H-sous-espace est une condition de petitesse naturelle sur l'ensemble X. Il est clair que si $L^1_X(G)$ est un H-espace, alors X est un ensemble de Riesz $(L^1_X = \mathcal{M}_X)$. Il serait intéressant d'étudier la réciproque. Notons qu'on peut montrer, en employant une extension du théorème de Kolmogorov, que si X est contenu dans un cône saillant de $\mathbf{Z}^n$ et si Y est un ensemble $\Lambda(1)$ - voir [7],

p. 144 - alors $L^1_{X\cup Y}(G)$ est un H-espace.

3. Rappelons que si X est un ensemble de Riesz infini, alors $L^1_X(G)$ n'est pas complémenté dans $L^1(G)$ - ce qui rend les corollaires 22 et 23 non triviaux. En voici une démonstration simple. Supposons qu'il existe une projection continue $\pi : L^1(G) \longrightarrow L^1_X(G)$. Comme $L^1_X(G)$ a la propriété de Radon-Nikodym, la projection π serait représentable, et a fortiori $Id_{L^1_X}$ serait représentable. Il existerait donc une fonction $K(s,t) \in L^1(G \times G)$ telle que

$$\gamma(s) = \int_G K(s,t)\,\gamma(t)\,dt$$

s-presque sûrement, pour tout $\gamma \in X$. On aurait alors

$$\hat{K}(\gamma\ ,\ -\gamma) = \iint_{G\times G} K(s,t)\,\gamma(t-s)\,dt\,ds = 1$$

or les coefficients de Fourier de $K(s,t)$ tendent vers zéro à l'infini, ce qui est absurde.

4. La remarque qui suit le lemme 1 montre que si U est un sous-espace de L^1 isométrique à $H^1(D)$, alors L^1/U sera f.s.c. Ceci s'applique par exemple à l'espace $H^1(p^+)$ défini par (voir [9], chapitre 8) :

$$H^1(P^+) = \left\{ f \in \mathscr{H}(P^+) \ \Big|\ \sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|\,dy < \infty \right\}$$

où $P^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \ |\, \mathrm{Re}(z) > 0 \right\}$.

En effet ([ ], p. 130), l'application $\psi : H^1(D) \longrightarrow L^1(i\mathbb{R})$ définie par

$$\psi(f)(z) = \frac{1}{\pi(1+z)^2}\, f\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

est une isométrie de $H^1(D)$ sur $H^1(P^+)$.

Terminons par quelques questions naturelles dans l'esprit de ce travail.

1. Soit G un groupe compact abélien. Peut-on caractériser les parties E de Γ telles que $\mathcal{C}_E(G)^*$ soit f.s.c. ?

2. Soit E un sous-ensemble de Riesz de Γ. La boule unité de $L^1_E(G)$ est-elle fermée dans $L^o(G,m)$?

3. L'espace $L^1/_{H^1}(\mathbf{T}^n)$ est-il l'unique prédual de son dual (Nota : c'est vrai si $n = 1$ [1]) ?

Nota. S. V. Kisliakov m'a communiqué, après la rédaction de ce travail, une réponse négative à la question 2 ci-dessus.

Bibliographie

[1] ANDO, T. On the predual of H^∞. Commentationes Mathematicae Special, I, Warsaw (1978).

[2] BUCHVALOV, A. V. and LOVANOVSKI, G. On sets closed in measure. Trans. Moscow Math. Soc. (1978), Issue 2, en russe : Trudy Moskov Mat. Obsc. Tom 34 (1977).

[3] DUREN, P. Theory of H^p-spaces. Academic Press, New York and London (1970).

[4] GODEFROY, G. Parties admissibles d'un espace de Banach, applications. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 16 (1983).

[5] HOFFMAN, K. Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall series in Modern Analysis (1962).

[6] KADEC, M. I. and PELCZYNSKI, A. Bases, lacunary sequences, and complemented subspaces in the spaces L^p. Studia Math. 21 (1962), 161-176.

[7] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces. Lecture Notes 338, Springer-Verlag (1973).

[8] RUDIN, W. Real and complex analysis. McGraw Hill series in Higher Math., second ed. (1974).

[9] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Tracts in Math. 12, Interscience Publishers (1967).

[10] KORANYI, A. and WOLF, J. A. Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes. Ann. Math. 81 (1965), 265-288.

[11] GODEFROY, G. Sous-espaces bien disposés de L^1. Trans. Amer. Math. Soc. A paraître.

[12] PELCZYNSKI, A. Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators. Conf. board of Math. Sc. Reg. Conf. Ser. in Math. 30 (1976).

[13] SHAPIRO, J. H. Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters, $0<p<1$. Israël J. Math., vol. 29 (no. 2-3) (1978).

Exposé no. 6 Année 1982-1983
Hervé Queffelec

SUR UNE ESTIMATION PROBABILISTE LIEE A L'INEGALITE DE BOHR

Résumé.- Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et $U(x,\omega) = \sup_{t\in R} \left| \sum_{1\leq n\leq x} \varepsilon_n(\omega)\, n^{it} \right|$; d'après l'inégalité de Bohr, $E\left[U(x)\right] \geq \delta \frac{x}{\log x}$, où δ est une constante numérique ; on montre qu'on a aussi $E\left[U(x)\right] \leq C \frac{x}{\log x}$, et $U(x,\omega) = O(\frac{x}{\log x})$ presque sûrement ; d'autre part, on généralise l'inégalité de Bohr, et on donne une bonne minoration de la constante de sidonicité uniforme de $\Lambda_N = \left\{\mathrm{Log}\ 1, \ldots, \mathrm{Log}\ N\right\}$, ce qui permet de redémontrer très simplement un théorème de Bohnenblust et Hille sur l'abscisse de convergence uniforme d'une série de Dirichlet $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$.

1. INTRODUCTION, DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Dans [15], on a obtenu les résultats suivants :

$$\text{p.s.} \quad U(x,\omega) = O\left(x\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right) \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty$$

$$E\left[U(x)\right] = O\left(x\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right) \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty .$$

D'autre part, d'après une inégalité de Bohr ([3]), on a pour tout ω :

$$U(x,\omega) \geq \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

où $\pi(x)$ désigne comme d'habitude le nombre des nombres premiers $\leq x$. G. Halasz ([8]) a montré que, contrairement à la conjecture faite dans ([15]) on a :

$$\text{p. s.} \quad U(x,\omega) = O(\frac{x}{\log x}) \tag{2}$$

(3) $$E\left[U(x)\right] = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

D'après (1), ceci est clairement le meilleur résultat possible. La méthode de Halasz s'appuie sur une idée de crible ; en nous inspirant de cette méthode, nous avons trouvé une démonstration plus simple de (3), basée sur l'emploi du lemme de Slepian-Sudakov ([5] et [7]).

Pour la suite, nous aurons besoin des définitions et notations suivantes.

DEFINITION 1.1. Soit $\sum_{1}^{\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet quiconverge pour au moins un s $(s = \sigma + it)$. On pose :

σ_a = abscisse de convergence absolue = $\inf\left\{\sigma_o \mid \sum |a_n| n^{-\sigma} < \infty \text{ si } \sigma > \sigma_o\right\}$

σ_u = abscisse de convergence uniforme = $\inf\left\{\sigma_o \mid \sum a_n n^{-s}\right.$ converge uniformément dans le demi-plan $\left.\sigma > \sigma_o\right\}$.

DEFINITION 1.2. Soit G un groupe abélien compact, Γ son dual, et Λ une partie non vide de Γ ; on appelle constante de sidonicité de Λ (et on note $S(\Lambda)$) la plus petite constante S telle que :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \leq S \sup_{x \in G} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \langle x, \lambda \rangle \right|$$

où $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une suite de complexes à support fini.

DEFINITION 1.3. Soit $G = \overline{R}$ = compactifié de Bohr de R, $\Gamma = R_d = R$ discret, N un entier ≥ 1 et $\Lambda_N = \{\text{Log } 1, \text{Log } 2, \ldots, \text{Log } N\} \subset R_d$. On appelle constante de sidonicité uniforme de Λ_N, (et on note $S^*(\Lambda_N)$) la plus petite constante S telle que :

$$\sum_{1}^{N} |a_j| \leq S \sup_{1 \leq n \leq N} \sup_{t \in R} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j j^{it} \right|.$$

D'autre part, si k est un entier ≥ 1, on note T^k le groupe des k-uples $z = (z_1, \ldots, z_k)$ avec $|z_i| = 1$ pour $1 \leq i \leq k$; c'est un groupe abélien compact, de dual Z^k ; si $\nu = (n_1, \dots, n_k) \in Z^k$, l'action de ν sur z s'effectue par :

$$\langle \nu \, , \, z \rangle = \prod_{i=1}^{k} z_i^{n_i} .$$

On notera par F la base canonique $\{e_1, \dots, e_k\}$ du Z-module libre Z^k.

Si y est un réel tel que $2 \leq y \leq x$, nous poserons enfin :

$E(x,y)$ = ensemble des entiers $n \leq x$ qui n'ont que des facteurs premiers $\leq y$, soit $E(x,y) = \{n \leq x / p \mid n \Longrightarrow p \leq y\}$.

$\psi(x,y)$ = nombre d'éléments de $E(x,y)$

$$\nu(x,y,\omega) = \sup_{t \in R} \Big| \sum_{n \in E(x,y)} \varepsilon_n(\omega)\, n^{it} \Big| .$$

Une estimation de $E\,[U(x,y)]$ et de $\psi(x,y)$, pour $y = y(x)$ convenable, nous fournira la minoration pour tout $\varepsilon > 0$:

$$S^*(\Lambda_N) \geq \delta_\varepsilon \sqrt{N} \exp\left[-C_\varepsilon (\log N)^{5/8+\varepsilon}\right] \tag{4}$$

(où δ_ε et C_ε ne dépendent que de ε).

Cela permet de donner une démonstration très simplifiée d'un théorème de Hille et Bohnenblust ([2]) qui répondait à une question de H. Bohr : "l'inégalité (facile) $\sigma_a - \sigma_u \leq \frac{1}{2}$ est-elle la meilleure possible ?"

La réponse est oui :

(5) "Pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe une série de Dirichlet $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$ telle que $\sigma_a < \infty$ et $\sigma_a - \sigma_u \geq \alpha$".

Le but de ce travail est d'exposer la preuve de (2), (3), (4) et (5) et de généraliser l'inégalité de Bohr.

2. QUELQUES INGREDIENTS PLUS OU MOINS CLASSIQUES.

THEOREME 2.1 (Kronecker). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels indépendants sur Q ; alors

a) $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad \sup_{t\in R} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t} \right| = \sum_1^n |a_j|$.

b) Les points de la forme $(e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_n t})$, t parcourant R, sont denses dans T^n.

Ce théorème est ultra-classique, donnons en cependant une démonstration peu connue due à H. Bohr. Soit

$$f(t) = \sum_1^n a_j e^{i\lambda_j t}.$$

Si $1 \le p < \infty$, posons :

$\|f\|_p = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ = norme L^p de f par rapport à la mesure de Haar du compactifié de Bohr de R. Posons aussi :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in R} |f(t)|.$$

Il résulte de la presque-périodicité de f que l'on a :

$$\|f\|_\infty = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\in N}} \|f\|_{2m}.$$

On a évidemment

$$\|f\|_{2m}^{2m} = \sum_{\substack{1\le k_i,\, \ell_j \le n \\ \lambda_{k_1}+\dots+\lambda_{k_m} = \lambda_{\ell_1}+\dots+\lambda_{\ell_m}}} a_{k_1} \dots a_{k_m} \overline{a_{\ell_1}} \dots \overline{a_{\ell_m}}.$$

Considérons un 2m-uple (k_i, ℓ_j) fixé tel que $\sum \lambda_{k_i} = \sum \lambda_{\ell_j}$. Si α_1 des k_i valent $1, \dots, \alpha_n$ des k_i valent n (resp. β_1 des ℓ_j valent $1, \dots, \beta_n$ des ℓ_j valent n), l'indépendance de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur Q exige que : $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \le i \le n$. La contribution de (k_i, ℓ_j) à $\|f\|_{2m}^{2m}$ est donc :

$|a_1|^{2\alpha_1} \dots |\alpha_n|^{2\alpha_n}$.

On voit donc que $\|f\|_{2m}$, et par suite $\|f\|_\infty$, ne dépend que de $|a_k|$. Si donc $g(t) = \Sigma |a_j| e^{i\lambda_j t}$, on a $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = g(0) = \sum_1^n |a_j|$, d'où le a) du théorème 1. b) découle trivialement de a).

THEOREME 2.2 (Inégalité de H. Bohr [3] et sa généralisation). Soit $P(t) = \sum_1^N c_n n^{it}$. Alors $\sum_{p\leq N} |c_p| \leq \|P\|_\infty$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers $\leq N$. Plus généralement, on a l'inégalité suivante :

$$\Big(\sum_{\substack{n\in E_m\\ n\leq N}} |c_n|^{\frac{2m}{m+1}}\Big)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|P\|_\infty , \quad \text{où } m \geq 1 \text{ et où}$$

$$C_m = \Big(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big)^{m-1} \frac{m^{m/2}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m} (m!)^{-\frac{2}{m+1}} \qquad (C_1 = 1).$$

(La définition de E_m est donnée ci-dessous).

<u>Preuve</u>. 1. Soient $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k$ les nombres premiers $\leq N$ et supposons $\|P\|_\infty = 1$. Si $1 \leq n \leq N$, n s'écrit de façon unique : $n = p_1^{\alpha_1(n)} \dots p_k^{\alpha_k(n)}$ avec $\alpha_i(n) \geq 0$, et E_m désigne l'ensemble des entiers n ayant une décomposition de longueur m, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\alpha_1(n) + \dots + \alpha_k(n) = m$. Par hypothèse

$$\Big|\sum_1^N c_n (p_1^{it})^{\alpha_1(n)} \dots (p_k^{it})^{\alpha_k(n)}\Big| \leq 1 \quad \text{si } t\in R.$$

D'après le théorème 2.1 appliqué avec $\lambda_r = \log p_r$, nous obtenons

$$\Big|\sum_1^N c_n z_1^{\alpha_1(n)} \dots z_k^{\alpha_k(n)}\Big| \overset{\text{def}}{=} |f(z)| \leq 1 \quad \text{si } z = (z_1,\dots,z_k) \in T^k.$$

Soit encore, en écrivant f comme somme de polynômes homogènes :

$$|c_1 + \Sigma c_{p_i} z_i + \Sigma c_{p_i p_j} z_i z_j + \dots| = |f(z)| \leq 1 \quad \text{si } z\in T^k.$$

Changeons z_j en $z_j e^{i\theta}$ et posons, z étant fixé :

$$\psi(\theta) = c_1 + \Sigma\, c_{p_j} z_j e^{i\theta} + \Sigma\, c_{p_j p_k} z_j z_k e^{i\theta} + \left|\Sigma\, c_{p_j} z_j\right| \overset{\text{def}}{=} |g(z)| = |\hat{\psi}(1)| \leq \|\psi\|_\infty \leq 1.$$

D'où $\sum_{j=1}^{k} |c_{p_j}| = \sup |g(z)| \leq 1$.

2. La théorie des ensembles p-Sidon permet d'avoir d'autres informations ; pour simplifier les notations, nous nous contenterons de traiter en détail le cas $m = 2$; nous avons :

$\left|\Sigma\, c_{p_i p_j} z_i z_j\right| = |\hat{\psi}(2)| \leq 1$. La forme quadratique $\Sigma\, c_{p_i p_j} z_i z_j$ provient de la forme bilinéaire symétrique

$$\sum_{\substack{i \leq k \\ j \leq k}} a_{ij}\, z_i\, z'_j \qquad \text{avec} \qquad a_{ij} = \begin{cases} c_{p_i^2} & \text{si } i=j \\ \frac{1}{2} c_{p_i p_j} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

D'après l'inégalité de polarisation de Harris ([9]), nous avons :

$$\left|\Sigma\, a_{ij}\, z_i\, z'_j\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{si} \quad |z_i| \leq 1, \quad |z'_j| \leq 1.$$

Donc, $\sum_i \left|\sum_j a_{ij} z'_j\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ si $|z'_j| \leq 1$. En intégrant par rapport aux z'_j et en utilisant les inégalités de Khintchine (avec la constante up-to-date) pour le système de Steinhaus ([18]), nous obtenons :

$$\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}.$$

D'après une inégalité de Blei ([1]) :

$$\left(\Sigma\, |a_{ij}|^{4/3}\right)^{3/4} \leq \sqrt{\left[\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]\left[\sum_i \left(\sum_j |a_{ji}|^2\right)^{1/2}\right]} = \sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Soit encore

$$\left[\sum_i |c_{p_i^2}|^{4/3} + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{2^{4/3}} |c_{p_ip_j}|^{4/3}\right]^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} .$$

D'où

$$\left[2^{-1/3} \sum_{n\in E_2} |c_n|^{4/3}\right]^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}$$

et

$$\left[\sum_{n\in E_2} |c_n|^{4/3}\right]^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, 2^{1/4} = 1{,}74159 \ldots..$$

Le cas général se traite de la même façon : le produit de $m-1$ copies indépendantes du système de Steinhaus vérifie les inégalités de Khintchine avec une constante au plus $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$; quand on polarise $\sum_{n\in E_m} c_n z_1^{\alpha_1(n)} \ldots z_k^{\alpha_k(n)}$, on divise au plus par $m!$ quand on dépolarise, on multiplie au moins par $m! \dfrac{1}{(m!)^{\frac{2m}{m+1}}}$; enfin, la constante de l'inégalité de Harris est $\dfrac{m^{m/2}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m\ m!}$.

REMARQUE. On peut interpréter les coefficients de Fourier de la fonction ψ ci-dessus de la façon suivante.

Soit $\Lambda_m = \left\{\nu = (n_1,\ldots,n_k) \in Z^k / \Sigma\, n_i = m\right\}$; $\Lambda_m = m\, e_1 + \Lambda_o$, où $\Lambda_o = \left\{\nu = (n_1,\ldots,n_k) \in Z^k/\Sigma\, n_i = 0\right\}$ = sous-groupe de Z^k, d'orthogonal $H = \left\{z = (z_1,\ldots,z_k)/z_1 = \ldots = z_k\right\}$. Λ_m est donc un coset de Z^k et on a canoniquement une mesure $\mu \in M(T^k)$ telle que :

$$\|\mu\| = 1 \quad , \quad \hat{\mu}(\nu) = 1 \quad \text{si} \quad \nu\in\Lambda_m \quad , \quad \hat{\mu}(\nu) = 0 \quad \text{si} \quad \nu \notin \Lambda_m .$$

(On prend $\mu = \langle z\,,\, me_1\rangle\, m_H$, où m_H est la mesure de Haar normalisée de H).

On a alors :

$$\sum_{n\in E_m} c_n z_1^{\alpha_1(n)} \ldots z_k^{\alpha_k(n)} = (f * \mu)(z) = g_m(z) = \hat{\psi}(m)$$

$$\|g_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\mu\| = \|f\|_\infty .$$

LEMME 2.1 ([14]). Soient x et y des réels tendant vers $+\infty$, avec $y < x$. Alors, p désignant un nombre premier, on a les estimations suivantes :

(6) $$\pi(x) = \frac{x}{\text{Log } x} + O\left(\frac{x}{\text{Log}^2 x}\right)$$

(7) $$\sum_{p\leq x} \log p = x + O\left(\frac{x}{\text{Log } x}\right)$$

(8) $$\sum_{p\leq x} \log \frac{x}{p} = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

(9) $$\sum_{p\leq x} \frac{1}{\sqrt{p}} = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\text{Log } x}\right)$$

(10) $$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \text{Log Log } x + a + O\left(\frac{1}{\text{Log } x}\right)$$ (a étant une constante)

(11) $$\sum_{y<p\leq x} \frac{1}{p} = \text{Log}\left(\frac{\text{Log } x}{\text{Log } y}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Log } y}\right) .$$

Preuve succinte. (6) est le théorème des nombres premiers avec reste ; pour estimer une expression de la forme $\sum_{p\leq x} f(p)$, on l'écrit comme intégrale de Stieltjes $\int_1^x f(t)\, d\pi(t)$, on fait une intégration par parties et on utilise (6), cela donne (7), (9), (10) ; (8) découle de (6) et (7) et (11) découle de (10).

3. L'ESTIMATION PRESQUE SÛRE DE G. HALÁSZ

Dans ce qui suit, C sera une constante numérique qui peut varier de ligne en ligne.

Posons $z_p = e^{it_p}$ si p est un nombre premier $\leq x$ et $w_n = \Pi(z_p)^{\alpha_p(n)}$ si $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)} \leq x$, $z = (z_p)_{p\leq x}$ et $f(z) = \sum_{n\leq x} \varepsilon_n w_n$.

Comme dans la preuve du théorème de Bohr : $U(x\ ,\ .) = \|f\|_\infty$. On pose alors

$$g(z) = \sum_{\substack{n\le x \\ p|n \Rightarrow p\le y}} \varepsilon_n w_n \qquad \text{et} \qquad h(z) = \sum_{\substack{n\le x \\ \mathrm{Max}.p>y \\ p|n}} \varepsilon_n w_n$$

où $y\in[2,x]$ est à ajuster.

$f(z) = g(z) + h(z)$. On va estimer séparément $\|g\|_\infty$ et $\|h\|_\infty$.

A. Majoration ps de $\|g\|_\infty$. Soit p un nombre premier tel que $p \le y$.

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial t_p}\right\|_\infty \le \sum_{n\le x} \alpha_p(n) \le \frac{x}{p} + \frac{2x}{p^2} + \frac{3x}{p^3} + \dots = \frac{x}{p}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{p})^2} \le 4\,\frac{x}{p}.$$

Plus p est grand, plus on a une bonne majoration de $\left\|\frac{\partial g}{\partial t_p}\right\|_\infty$. En fonction de cette remarque, on va estimer $\|g\|_\infty$ à l'aide d'un réseau de points de la forme :

$$z^* = \left(e^{2ik_p \frac{\pi}{N_p}}\right)_{p\le y}\ ,\quad N_p \text{ entier} \ge 1,\quad 1 \le k_p \le N_p$$

où N_p sera de plus en plus petit quand p sera grand. Pour tout z, il existe z^* tel que :

$$|z_p - z_p^*| \le \frac{2\pi}{N_p}$$

donc

$$|g(z) - g(z^*)| \le \sum_{p\le y} |z_p - z_p^*|\,\left\|\frac{\partial g}{\partial t_p}\right\|_\infty \le \sum_{p\le y} \frac{2\pi}{N_p}\,\frac{4x}{p}.$$

Prenons $N_p = \left[\frac{y}{p}\right] \ge \frac{1}{2}\,\frac{y}{p}$ nous avons

$$|g(z) - g(z^*)| \le \sum_{p\le y} 4\pi\,\frac{p}{y}\,\frac{4x}{p} \le C\,\frac{x}{y}\,\frac{y}{\mathrm{Log}\ y} = C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\ y}.$$

Donc

$$(12) \qquad \|g\|_\infty \le \sup_{z^*} |g(z^*)| + C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\ y}.$$

D'après une inégalité de S. Bernstein (cf. [13] lemme 7.1), si $\rho \ge 1$:

$$P(|g(z^*)| > \sqrt{2x \log \rho}) \le \frac{4}{\rho}$$

et donc

$$P(\sup_{z^*} |g(z^*)| > \sqrt{2x \log \rho}) \leq \frac{4}{\rho} \prod_{p \leq y} N_p \leq \frac{4}{\rho} \prod_{p \leq y} \frac{y}{p} .$$

$$P\left(\sup_{z^*} |g(z^*)| > \sqrt{2x \log \rho}\right) \leq \frac{4}{\rho} \prod_{p \leq y} N_p \leq \frac{4}{\rho} \prod_{p \leq y} \frac{y}{p} .$$

Soit par (8) :

$$P\left(\sup_{z^*} |g(z^*)| > \quad 2x \log \rho\right) \leq \frac{4}{\rho} \exp(C \frac{y}{\log y}).$$

Prenons alors $y = \frac{x}{\log x}$ et $\rho = \exp \frac{2\, Cx}{\log^2 x}$, nous obtenons :

$$(13) \qquad P\left(\sup_{z^*} |g(z^*)| > 2\sqrt{C}\, \frac{x}{\log x}\right) \leq 4 \exp\left(- C \frac{x}{\log^2 x}\right).$$

(12) et (13) donnent

$$(14) \qquad P\left(\|g\|_\infty > C' \frac{x}{\log x}\right) \leq 4 \exp\left(- C \frac{x}{\log^2 x}\right).$$

B. <u>Majoration ps de</u> $\|h\|_\infty$. Désormais, on prendra $y = \frac{x}{\log x}$.

Désignons par $p_1 < p_2 < \ldots < p_\ell$ les nombres premiers de $]y , x]$ et posons:

$$E_j = \left\{ n \leq x \,/\, p_1 \nmid n , \ldots\, p_{j-1} \nmid n ,\, p_j | n \right\}, \quad 1 \leq j \leq \ell .$$

Nous pouvons écrire :

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\ell} z_{p_j} \sum_{n \in E_j} \varepsilon_n\, w_{\frac{n}{p_j}} ,$$

d'où

$$|h(z)| \leq \sum_{j=1}^{\ell} X_j(z) \qquad \text{avec} \qquad X_j(z) = \left| \sum_{n \in E_j} \varepsilon_n\, w_{\frac{n}{p_j}} \right| .$$

Posons provisoirement $\lambda = \frac{1}{\log x}$ et remarquons que :

$$X_j \leq \frac{x}{y} = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad E(X_j) \leq \sqrt{\frac{x}{p_j}} \quad ; \quad e^w \leq 1 + ew \quad \text{si} \quad 0 \leq w \leq 1 .$$

Nous avons alors : $E\left(e^{\lambda|h(z)|}\right) \leq \prod_{j=1}^{\ell} E(e^{\lambda X_j}) \leq \prod_{j=1}^{\ell}\left(1+e\lambda\sqrt{\frac{x}{p_j}}\right)$

$$\leq \exp\left(e\,\lambda \sum_{j=1}^{\ell}\sqrt{\frac{x}{p_j}}\right) \leq \exp\left(\frac{Cx}{\log^2 x}\right) \quad \text{d'après (9).}$$

Donc $P(|h(z)|> M) \leq e^{-\lambda M}\, e^{C\frac{x}{\mathrm{Log}^2 x}}$, soit avec $M = 2\,C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}$:

$$P\left(|h(z)| > 2\,C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}\right) \leq \exp\left(-\,C\,\frac{x}{\mathrm{Log}^2 x}\right). \tag{15}$$

On estime X_j par la même méthode qu'en A, avec cette fois des nombres premiers $q \leq \frac{x}{y} = \log x \overset{\text{def}}{=} u$, en prenant

$$N_q = \left[\frac{u}{q}\right] \geq \frac{1}{2}\,\frac{u}{q}.$$

On a un réseau R de $\prod_{q\leq u} N_q = O\left(\exp\frac{u}{\mathrm{Log}\,u}\right)$ points et pour tout $z = (e^{it_q})_{q\leq u}$,

il existe $z^* \in R$ tel que : $|h(z)-h(z^*)| \leq \sum_{y<p\leq x}\sum_{q\leq u} \frac{x}{pq}\,\frac{2\pi}{N_q} \leq C \sum_{q\leq u}\frac{x}{u} \sum_{y<p\leq x}\frac{1}{p}$.

Soit encore d'après (11) (avec $y = \frac{x}{\mathrm{Log}\,x}$) :

$$|h(z)-h(z^*)| \leq C\,\frac{x}{u}\,\frac{u}{\mathrm{Log}\,u}\,\frac{\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x}{\mathrm{Log}\,x} = C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}.$$

Donc :

$$\|h\|_\infty \leq \sup_{z^*} |h(z^*)| + C\,\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}. \tag{16}$$

D'après (15) et (16), et vu que le nombre d'éléments de R est au plus $O\left(e^{\frac{u}{\mathrm{Log}\,u}}\right) = O(x)$, on a

$$P\left(\|h\|_\infty > C'\,\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}\right) \leq \exp\left(-\,C\,\frac{x}{\mathrm{Log}^2 x}\right). \tag{17}$$

De (14) et (17), via le lemme de Borel-Cantelli et le fait que $U(x,.) = \|f\|_\infty$, on tire clairement

$U(x\ ,\ .) = O\left(\frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\right)$ ps, ce qui démontre (2). (14) et (17) entraînent

$$P\left(\|f\|_\infty > C'' \frac{x}{\log x}\right) \leq 5 \exp\left(- C \frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Comme $\|f\|_\infty \leq x$, on en déduit :

$$E\|f\|_\infty \leq \frac{C''\,x}{\log x} + 5\,x \exp\left(- C \frac{x}{\log^2 x}\right) \leq C''' \frac{x}{\log x}\,,$$

mais nous allons donner une autre méthode pour estimer $E\|f\|_\infty$.

4. ESTIMATION DE $E\left[U(x,y)\right]$ ET DE $E\left[U(x)\right]$

Le lemme suivant nous sera utile au paragraphe 5.

LEMME 4.1. On a l'inégalité

(18) $$E\left[U(x,y)\right] \leq C\sqrt{x}\sqrt{\frac{y \log\log x}{\log y}} \qquad (C = \text{constante numérique}).$$

Preuve. Ce lemme découle immédiatement des calculs faits dans l'appendice de la première partie de [13] car si g est comme dans le paragraphe 3,

$U(x,y) = \|g\|_\infty$ et g est un polynôme dont le nombre de variables est $k = \pi(y) \sim \frac{y}{\mathrm{Log}\ y}$ et dont le degré est $d \leq \frac{\log x}{\log 2}$.

Pour majorer $E\left[U(x)\right]$, nous aurons besoin des deux lemmes probabilistes suivants.

LEMME 4.2. Soient $u_1, \ldots, u_N$ des vecteurs d'un espace de Banach complexe B, et $g_1, \ldots, g_N$ une suite gaussienne complexe standard. Alors

$$E\left\|\sum_1^N \varepsilon_i u_i\right\| \leq \frac{2}{E|g_1|} E\left\|\sum_1^N g_i u_i\right\| = \frac{4}{\sqrt{\pi}} E\left\|\sum_1^N g_i u_i\right\|.$$

Ce lemme est une conséquence bien connue du principe de contraction (cf. [11]).

LEMME 4.3. Soient X_t et Y_t deux processus gaussiens complexes centrés, dépendant linéairement d'un paramètre t qui décrit une partie symétrique d'un espace vectoriel ; on suppose que :

$$\|X_t - X_s\| \leq \|Y_t - Y_s\|_2 \quad \text{pour tous} \quad s,t. \quad \text{Alors :}$$

$$E\left[\sup |X_t|\right] \leq 2\sqrt{2}\, E\left[\sup |Y_t|\right].$$

Ce lemme est la version complexe du lemme de Slepian-Sudakov ; il est énoncé dans [5] pour des processus gaussiens réels, mais l'extension au cas complexe ne pose pas de problème, à condition de rajouter le facteur $2\sqrt{2}$; pour la démonstration, on renvoie à [7].

Nous pouvons alors passer à la majoration de $E[U(x)]$; avec les notations du paragraphe 3

$$U(x) = \|f\|_\infty \quad , \quad f = g + h \quad \text{et} \quad E\|g\|_\infty \text{ est estimé par (18).}$$

Puisque $h(z) = \sum_{j=1}^{\ell} z_{p_j} \sum_{n \in E_j} g_n w_{\frac{n}{p_j}}$

si on introduit le processus gaussien complexe

$$X_t = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \sum_{n \in E_j} g_n \beta_{\frac{n}{p_j}}$$

où $t = ((\alpha_j), (\beta_m))_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ 1 \leq m \leq \frac{x}{p_1}}}$, $|\alpha_j| \leq 1$, $|\beta_m| \leq 1$, (g_n) suite gaussienne

complexe standard, on a par le lemme 4.2

$$\text{(19)} \qquad E\|h\|_\infty \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} E(\sup_t |X_t|).$$

D'autre part si $s = ((\alpha'_j), (\beta'_m))$, nous avons :

$$\|X_t - X_s\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n \in E_j} \left|\alpha_j \beta_{\frac{n}{p_j}} - \alpha'_j \beta'_{\frac{n}{p_j}}\right|^2$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n\in E_j} \left[|\alpha_j - \alpha'_j|^2 + |\beta_{\frac{n}{p_j}} - \beta'_{\frac{n}{p_j}}|^2 \right]$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{\ell} \frac{x}{p_j} |\alpha_j - \alpha'_j|^2 + 2 \sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \lambda_m |\beta_m - \beta'_m|^2$$

où λ_m désigne le nombre de façons d'écrire $m \leq \frac{x}{p_1}$ comme $m = \frac{n}{p_j}$ avec $n\in E_j$ (on a utilisé le fait que $|E_j| \leq \frac{x}{p_j}$).

Or, il est clair que l'on a

$$\lambda_m = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{x}{p_2} < m \leq \frac{x}{p_1} \\ \vdots & \\ j & \text{si} \quad \frac{x}{p_{j+1}} < m \leq \frac{x}{p_j} \qquad 1 \leq j \leq \ell-1 \\ \ell & \text{si} \quad 1 \leq m \leq \frac{x}{p_\ell}. \end{cases}$$

Si on considère le processus gaussien

$$Y_t = \sqrt{2} \left[\sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{\frac{x}{p_j}}\, \alpha_j G_j + \sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m}\, \beta_m \Gamma_m \right]$$

où (G_j), (Γ_m) sont deux suites gaussiennes complexes standard indépendantes, on a d'après ce qui précède : $\|X_t - X_s\|_2 \leq \|Y_t - Y_s\|_2$ pour tous s,t et d'après le lemme 4.3

$$\text{(20)} \qquad E\left[\sup |X_t|\right] \leq 2\sqrt{2}\, E\left[\sup |Y_t|\right].$$

Or, si $Y = \sup |Y_t|$

$$Y \leq \sqrt{2} \left[\sum_{j=1}^{\ell} \frac{x}{p_j} |G_j| + \sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m}\, |\Gamma_m| \right],$$

d'où :

$$E(Y) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{\substack{p\leq x \\ p \text{ premier}}} \sqrt{\frac{x}{p}} + \sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m} \right].$$

$$\leq C\left(\frac{x}{\log x} + \sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m}\right)$$

par (9). D'autre part :

$$\sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m} \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \sqrt{j}\left(\frac{x}{p_j} - \frac{x}{p_{j+1}}\right) + \sqrt{\ell}\,\frac{x}{p_\ell}$$

(Il est clair qu'on peut se limiter à $\frac{x}{p_\ell}$ non entier). Soit encore

$$\sum_{m\leq \frac{x}{p_1}} \sqrt{\lambda_m} \leq x\left[\sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\sqrt{j}}{p_j} - \sum_{j=2}^{\ell} \frac{\sqrt{j-1}}{p_j} + \frac{\sqrt{\ell}}{p_\ell}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{p_1} + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{p_j}\right]$$

$$\leq \frac{x}{y}\left[1 + \sum_{j=2}^{\ell} (\sqrt{j}-\sqrt{j-1})\right] = \frac{x}{y}\sqrt{\ell} \leq \frac{C\,x^{3/2}}{y\sqrt{\log x}}$$

car il est clair que $\ell \leq \pi(x)$. Donc en définitive :

(21) $$E(Y) \leq C\left(\frac{x}{\log x} + \frac{x^{3/2}}{y\sqrt{\log x}}\right)$$

(19), (20), (21) entraînent une inégalité du type :

(22) $$E\|h\|_\infty \leq C\left(\frac{x}{\log x} + \frac{x^{3/2}}{y\sqrt{\log x}}\right).$$

Il n'y a plus qu'à prendre $y = \sqrt{x \log x}$ pour voir que (18) et (22) donnent l'estimation souhaitée :

$$E\left[U(x)\right] = E\|f\|_\infty \leq C\,\frac{x}{\log x}, \qquad \text{ce qui démontre (3).}$$

REMARQUE. G. Godefroy m'a signalé la conséquence suivante de (3), qui apparaît comme une généralisation faible du théorème des nombres premiers : soit $\Lambda \subset Z^{(N)}$ tel que si $\nu = ((\alpha_k))_{k\geq 1}$ on ait $\alpha_k \geq 0$ pour tout k. Posons

$\varphi(\nu) = \Pi\, p_k^{\alpha_k}$ et supposons que Λ soit de Sidon. Alors, pour tout entier N, on a

$$\left|\varphi(\Lambda) \cap \left\{1,\ldots,N\right\}\right| \leq S(\Lambda)\, C\, \frac{N}{\log N}$$

si C est une constante numérique telle que

$$E\left\| \sum_1^N \varepsilon_n(\omega)\, n^{it}\right\|_\infty \leq C\, \frac{N}{\log N}.$$

En effet, posons $P(t) = \sum_1^N \varepsilon_n(\omega)\, n^{it}$ et $Q(t) = \sum_{\substack{n\in\varphi(\Lambda)\\ n\leq N}} \varepsilon_n(\omega)\, n^{it}$. D'après le principe de symétrie, on a :

$$E\|P\|_\infty \geq E\|Q\|_\infty$$

et d'autre part, pour tout ω :

$$\|Q\|_\infty \geq \frac{1}{S(\Lambda)} \left|\varphi(\Lambda) \cap \left\{1,\ldots,N\right\}\right|$$

d'après la démonstration de l'inégalité de Bohr. En combinant ces deux inégalités et (3), on obtient le résultat annoncé.

V. MINORATION DE LA CONSTANTE DE SIDONICITE UNIFORME DE Λ_N ET APPLICATION AU THEOREME DE BOHNENBLUST ET HILLE.

Quand on considère l'ensemble $\Lambda'_N = \left\{1, 2, \ldots, N\right\}$ dans Z, pour minorer sa constante de Sidonicité uniforme $S^*(\Lambda'_N)$, on utilise un polynôme aléatoire $\sum_1^N \varepsilon_n\, e^{int}$; les méthodes probabilistes donnent alors $S^*(\Lambda'_N) \geq \delta \sqrt{\frac{N}{\log N}}$ et si on prend pour ε_n une suite de Rudin-Shapiro (cf. [8]), on obtient même : $S^*(\Lambda'_N) \geq \delta\sqrt{N}$, ce qui est clairement la meilleure minoration possible, abstraction faite de la constante δ $(S^*(\Lambda'_N) \leq \sqrt{N})$; quand on veut appliquer directement la même méthode pour minorer la constante de sidonicité uniforme $S^*(\Lambda_N)$ de

$\Lambda_N = \{\text{Log } 1, \ldots, \text{Log } N\}$, on rencontre une obstruction due à l'inégalité de Bohr : pour tout choix de signes ε_n, on a

$$\left\| \sum_1^N \varepsilon_n n^{it} \right\|_\infty \geq \pi(N) \sim \frac{N}{\log N} .$$

Le bon point de vue semble consister à prendre des polynômes aléatoires du type :

$\sum_{n \in E(N,y)} \varepsilon_n n^{it}$, où $E(N,y)$ est comme dans le paragraphe 1, avec y petit devant N de façon à limiter les effets de l'inégalité de Bohr, et avec néanmoins $\psi(N,y)$ grand ; nous utiliserons pour cela le lemme suivant, dû à De Bruijn ([3]) et Ramaswami ([14]) .

LEMME 5.1.

a) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé ; il existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que $\psi(x, x^\varepsilon) \sim \rho(\varepsilon) x$ quand $x \to \infty$.

b) Soit $u = \frac{\log x}{\log y}$ et supposons que $u \longrightarrow \infty$ de façon que $u \leq \log y$. Alors, il existe une fonction $\rho(u) \sim e^{-u \log u}$ telle que l'on ait :

$$\left| \frac{\psi(x,y)}{x\rho(u)} - 1 \right| \leq C \left(\frac{\log u}{u} + \frac{u^2}{\rho(u)} R(y) \right) \tag{23}$$

où $R(y)$ est n'importe quelle fonction telle que $R(y) \to 0$ quand $y \to \infty$, $R(y) \geq \frac{\log y}{y}$ et $\left| \pi(y) - \text{Li}(y) \right| \leq \frac{y}{\text{Log } y} R(y)$, C étant une constante ne dépendant que de R, et $\text{Li}(y)$ étant le logarithme intégral de y.

Le a) est dû à Ramaswami, le b) à De Bruijn ; b) n'est pas très exploitable sous cette forme, mais on peut en dégager le corollaire suivant.

COROLLAIRE. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $\delta_\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ telles que si on pose $y = \exp\left[(\log x)^{5/8+\varepsilon}\right]$, on ait :

$$\psi(x,y) \geq \delta_\varepsilon \, x \exp\left[- C_\varepsilon (\log x)^{3/8} \right] . \tag{24}$$

Preuve. D'après ([5]), on sait que dans le lemme 5.1 on peut prendre pour R une fonction de la forme

$$R(y) = \alpha \exp\left[-\beta \frac{(\log y)^{3/5}}{(\log \log y)^{1/5}}\right], \quad \alpha \ \text{ et } \ \beta > 0.$$

Si on prend y comme dans le corollaire, on a $u = (\log x)^{3/8-\varepsilon}$ tandis que $(\log y)^{3/5} = (\log x)^{\frac{3}{8}+3\frac{\varepsilon}{5}}$. On en déduit aisément que le second membre de (23) tend vers 0 quand $u \to \infty$ et donc on a :

$$\psi(x,y) \geq \delta'_\varepsilon x\rho(u) \geq \delta_\varepsilon x e^{-u \log u} \geq \delta_\varepsilon x \exp\left[- C_\varepsilon (\log x)^{\frac{3}{8}}\right].$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

THEOREME 5.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $\delta'_\varepsilon > 0$ et $c'_\varepsilon > 0$ telles que l'on ait :

$$\delta'_\varepsilon \sqrt{N} \exp\left[- c'_\varepsilon (\log N)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}\right] \leq S(\Lambda_N) \leq \sqrt{N}. \tag{25}$$

En particulier, on a une inégalité du type :

$$S^*(\Lambda_N) \geq \delta''_\varepsilon N^{1/2-\varepsilon} \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0. \tag{26}$$

Preuve. L'inégalité $S(\Lambda_N) \leq \sqrt{N}$ est évidente, car pour tout Sidon fini Λ dans le dual d'un groupe abélien compact G, on a $S(\Lambda) \leq \sqrt{|\Lambda|}$ à cause de l'orthogonalité des caractères dans $L^2(G)$. Pour prouver l'inégalité de gauche dans (25), prenons $x = N$ et y comme dans le corollaire ; posons $a_n = 1$ si $n \in E(N,y)$, 0 sinon. D'après le principe de symétrie de P. Lévy ([9]), nous avons :

$$E\left[\sup_{1\leq n\leq N} \left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j j^{it}\right\|_\infty\right] \leq 2E\left\|\sum_{1}^{N} \varepsilon_j a_j j^{it}\right\|_\infty$$

$$= 2E\left[U(x,y)\right] \leq C' \sqrt{N}\sqrt{\frac{y \log \log N}{\log y}} \quad \text{d'après (18).}$$

On a donc

$$S^*(\Lambda_N) \geq \frac{\psi(N,y)}{C'\sqrt{N}\sqrt{\frac{y \log\log N}{\log y}}} = \frac{\psi(N,y)\ \sqrt{\log y}}{C'\sqrt{N}\sqrt{y \log\log N}} \geq \delta''_\varepsilon \frac{\psi(N,y)}{\sqrt{N}\ \sqrt{y}} .$$

D'après (24), et puisque $\sqrt{y} = \exp\left[\frac{1}{2}(\log N)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}\right]$, on obtient (25) pour δ'_ε et C'_ε convenables ; (26) est clairement un cas particulier de (25), mais nous suffira pour la suite, et se déduit du résultat plus élémentaire de Ramaswami.

REMARQUE. Si Γ est le dual d'un groupe alélien compact G, si $\gamma_1,\dots,\gamma_s \in \Gamma$ et si h est un réel ≥ 1, appelons maille de hauteur h construite sur $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, et désignons par $M(\gamma_1,\dots,\gamma_s, h) = M$ l'ensemble des $\sum_1^s n_i \gamma_i$ avec $n_i \in Z$ et $\Sigma |n_i| \leq h$. Si Λ est un ensemble de Sidon de Γ, on a alors (cf. [8] et [10]) :

$$(27) \qquad |\Lambda \cap M| \leq \alpha(S(\Lambda))^2 s \log h$$

où α est une constante numérique ; en utilisant (24) avec $\Lambda = \Lambda_N$ $h = \frac{\log N}{\log 2}$, $\gamma_i = \log p_i$, $s = \pi(y)$ et en remarquant que $\Lambda_N \cap M$ contient tous les éléments de $E(N,y)$, puis en utilisant (27), on retrouve une partie de (26), à savoir :

$$S(\Lambda_N) \geq \delta'_\varepsilon \sqrt{N} \exp\left[- C'_\varepsilon(\log N)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}\right].$$

Il serait intéressant de savoir s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$S^*(\Lambda_N) \geq \delta \sqrt{N} \quad \text{ou} \quad S(\Lambda_N) \geq \delta \sqrt{N}.$$

Nous pouvons maintenant démontrer simplement le théorème de Bohnenblust et Hille.

THEOREME 5.2. Pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe une série de Dirichlet $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$ telle que $\sigma_a < \infty$ et $\sigma_a - \sigma_u \geq \alpha$.

Preuve. Faisons tout d'abord les deux observations simples suivantes :

(28) $$\sigma_u = \inf\left\{\sigma / \sup_{n,t} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\, j^{-\sigma - it}\right| < \infty\right\}.$$

(Cela découle immédiatement d'une transformation d'Abel). On a toujours

(29) $$\sigma_a - \sigma_u \leq \frac{1}{2}.$$

(Cela découle immédiatement de $S(\Lambda_N) \leq \sqrt{N}$, de (28) et de l'inégalité de Schwarz). Cela étant, supposons que le théorème 5.2 soit faux ; il existe alors $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que pour toute série de Dirichlet telle que $\sigma_u \leq 0$, on ait $\sigma_a < \alpha$. En particulier, d'après (28) $\sup_{n,t} \left|\sum_1^n a_j\, j^{it}\right| < \infty \Longrightarrow \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{n^\alpha} < \infty$ et d'après le théorème du graphe fermé il existe une constante C telle que, pour toute suite finie $a_1, \dots, a_N$ de nombres complexes, on ait :

$$\sum_1^N \frac{|a_n|}{n^\alpha} \leq C \sup_{\substack{1\leq n\leq N \\ t\in R}} \left|\sum_1^n a_j\, j^{it}\right|$$

et donc

$$\sum_1^N |a_n| \leq N^\alpha \sum_1^N \frac{|a_n|}{n^\alpha} \leq C\, N^\alpha \sup_{\substack{1\leq n\leq N \\ t\in R}} \left|\sum_1^n a_j\, j^{it}\right|,$$

d'où $S^*(\Lambda_N) \leq C\, N^\alpha$. Or, cela contredit manifestement (26) et prouve par l'absurde le théorème 5.2.

REMARQUE. Bohnenblust et Hille montrent même qu'il existe $\sum a_n n^{-s}$ avec $\sigma_a < \infty$, $\sigma_a - \sigma_u = \frac{1}{2}$. Il est clair qu'en utilisant par exemple une estimation

$$S^*(\Lambda_N) \geq \delta \sqrt{N} \exp\left[-C(\log N)^{3/4}\right]$$

et un argument de série, on retrouve aisément ce résultat.

Références

[1] BLEI, R. C. Fractional cartesian products of sets. Ann. Inst. Fourier Grenoble 29 (79), 79-105.

[2] BOHNENBLUST, H. F. and HILLE, E. On the absolute convergence of Dirichlet series. Ann. Math. 2 (32) (1931), 600-622.

[3] BOHR, H. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\Sigma\, a_n n^{-s}$. Nachrichten Königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen Math-Physik Kl. (1913), 441-488.

[4] BRUIJN, N. G. de On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. Indagationes Math. 13 (1951), 50-60.

[5] CHEVET, S. Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$; application aux produits d'espaces de Wiener abstraits. Exposé no. 19, sém. sur la géométrie des espaces de Banach 1977-1978, Ecole Polytechnique.

[6] ELLISON, W. J. et MENDES-FRANCE, M. Les nombres premiers. Publ. Inst. Math. Univ. Nancago IX, Paris, Hermann (1975).

[7] FERNIQUE, X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Lecture Notes in Math. 480 (1975), 1-96.

[8] HALASZ, G. Communication orale.

[9] HARRIS, L. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro (72) (Ed. L. Nachbin). Paris, Hermann. Actualités Sc. Indust. 1367 (75), 145-163.

[10] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. D. C. Heath (1968).

[11] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (1970).

[12] LOPEZ, J. and ROSS, K. Sidon sets. Lecture notes in Pure and Appl. Math. Marcel Dekker, New York 13 (1975).

[13] MARCUS, M. B. and PISIER, G. Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Ann. Math. Studies 101, Princeton Univ. Press (1981).

[14] PRACHAR, K. Primzahlverteilung. Die Grandlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg, Göttingen, Springer-Verlag (1957).

[15] QUEFFELEC, H. Thèse d'Etat, Univ. Paris-Sud, Centre d'Orsay (1983).

[16] RAMASWAMI, V. The number of positive integers $\leq x$ and free of prime divisors $> x^c$ and a problem of S. S. Pillai. Duke Math. J. 16 (1949) 99-109.

[17] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. New York, Interscience (1962).

[18] SAWA, J. Master thesis. Warsaw Univ. (1983).

Exposé no. 7
Myriam Déchamps

SUR LES COMPACTS ASSOCIES AUX ENSEMBLES LACUNAIRES LES ENSEMBLES DE SIDON ET QUELQUES PROBLEMES OUVERTS.

Résumé. Exposé historique sur l'évolution de l'étude des compacts associés et des ensembles de Sidon de 1957 à 1983.

Plan de l'exposé :

1. INTRODUCTION

Depuis fort longtemps le passage des propriétés locales des fonctions aux propriétés globales a été une des préoccupations des analystes. Pour l'analyse harmonique les travaux de S. Mandelbrojt sur les classes quasi-analytiques [10] et de J.-P. Kahane sur les fonctions moyenne-périodiques en témoignent [13].

L'étude des compacts associés à un ensemble de fréquences s'insère d'une part dans ce contexte, d'autre part elle est étroitement liée à celle des ensembles lacunaires qui a été au centre des préoccupations de l'équipe d'Analyse Harmonique d'Orsay pendant la décade 1960-1970.

Le cadre pouvant le mieux décrire les sujets abordés ici est le suivant. Soit Λ une suite de nombres réels. Notons $C_\Lambda(\mathbb{R})$ l'adhérence, pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, des sommes trigonométriques finies

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$$

à coefficients complexes et à fréquences dans Λ. Quelles relations y a-t-il entre les propriétés fonctionnelles de l'espace de Banach $C_\Lambda(\mathbb{R})$, les propriétés arithmétiques de Λ et le comportement des fonctions de $C_\Lambda(\mathbb{R})$?

Plus on impose de propriétés fonctionnelles à $C_\Lambda(\mathbb{R})$ ou de lacunarité à Λ, plus sera frappant le comportement des fonctions de $C_\Lambda(\mathbb{R})$. Lorsque Λ est un ensemble de Sidon, les fonctions de $C_\Lambda(\mathbb{R})$ ont des séries de Fourier absolument convergentes et elles sont "déterminées" par leur comportement sur n'importe quel intervalle non vide de R [50]. Dans le cas extrême des ensembles de Sidon, les problèmes liés à leurs caractérisations arithmétiques sont toujours d'actualité [138].

L'étude des compacts associés à une suite de fréquences (définition 1) se trouve souvent imbriquée à celle des ensembles de Sidon (définitions 3 et 4), c'est pourquoi nous n'avons pas voulu les disjoindre dans cet essai historique. Nous pouvons distinguer trois périodes. La première concerne essentiellement le comportement des fonctions à spectre dans une suite réelle, les livres de A. Zygmund [16], et de J.-P. Kahane et R. Salem [24] et les travaux de J.-P. Kahane [13], [20], [23], [28] en constituent quelques étapes marquantes. La deuxième période suit la publication du livre d'Analyse de Fourier sur les groupes de W. Rudin [21], et les résultats se situent dans le cadre des groupes abéliens localement compacts, comme en témoignent les articles de J.-F. Méla [37], A. Bonami [52], S. W. Drury [48] et M. Déchamps-Gondim [65]. La troisième période débute par les travaux de G. Pisier [110] [112] sur les séries de Fourier aléatoires presque-sûrement continues et les questions nouvelles apportées par la géométrie des espaces de Banach [109].

Nous avons choisi de nous placer le plus souvent dans le cadre des groupes $\mathbb{R}$ des nombres réels ou T des nombres complexes de module 1 ainsi que de $\mathbb{R}^n$ ou T^n pour $n \geq 1$. D'une part, c'est dans ce cadre que se posent encore bien des problèmes cruciaux, d'autre part ceci permet d'alléger la rédaction et facilite la lecture pour les non spécialistes.

Le mot lacunaire peut être interprété dans beaucoup de sens. Pour nous, un critère suffisant de lacunarité d'une suite d'entiers est, par exemple, de ne pas contenir des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Nous nous intéressons essentiellement au cas des ensembles compacts d'intérieur non vide. La théorie dans le cas d'un compact quelconque laisse en suspens de nombreux problèmes [20].

Dans la mesure du possible, nous rappelons les différentes terminologies utilisées pour chaque notion. Nous avons adopté une présentation chronologique de la bibliographie.

Pour la période allant jusqu'en 1975, le livre de J. M. Lopez et K. A. Ross [98] constitue probablement la référence la plus complète sur le sujet, dans le cadre des groupes abéliens compacts. Les paragraphes 7, 8 et 9 ci-dessous rendent compte des résultats obtenus dans la dernière décade.

Nous souhaitons que cet exposé puisse fournir un aperçu assez complet de l'évolution d'une branche mathématique et la liste de questions qui le conclut témoigner de sa vitalité.

2. PSEUDO-PERIODICITE ET COMPACTS ASSOCIES

La notion de compact associé à un ensemble de fréquences commence à prendre corps dans le cadre de la "théorie L^2" de la pseudo-périodicité introduite par Paley et Wiener ([8]).

On dit que la suite Λ de nombres réels est un spectre pseudo-périodique s'il existe un intervalle I de longueur finie et une constante $C > 0$ tels que pour toute somme trigonométrique finie $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$, à coefficients complexes et à fréquences dans Λ, on ait

$$(1) \qquad (\sum |a_\lambda|^2)^{1/2} \leq C(\int_I |P(x)|^2 \, dx)^{1/2}.$$

On appelle L^2-pseudo période attachée à Λ, et on note $\ell_2(\Lambda)$, la borne inférieure des longueurs des intervalles I pour lesquels (1) est vérifiée.

Les résultats de [8] et [11] sur la pseudo-périodicité sont repris et complétés par J.-P. Kahane [13] (où la condition (1) est notée $Q_2(\Lambda, I)$).

La suite Λ de nombres réels est un spectre pseudo-périodique si et seulement si Λ est régulière, c'est-à-dire, $\inf\limits_{\lambda,\lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'} |\lambda - \lambda'|$ [10]. Le résultat fondamental sur $\ell_2(\Lambda)$ est alors le suivant ([8], [11], [13]) : si Λ est régulière, $\ell_2(\Lambda) = 2\pi\,\Delta(\Lambda)$, où $\Delta(\Lambda)$ est la densité supérieure de répartition de Λ, définie par

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{t \to \infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \frac{n(r, r+t)}{t}$$

$n(r, r+t)$ désignant le nombre de points de Λ qui sont dans l'intervalle $[r, r+t]$.

J.-P. Kahane aborde ensuite l'étude de la pseudo-périodicité dans $\mathbb{R}^n$ ([17]).

C'est alors qu'apparaît l'expression "ouvert associé à une suite de $\mathbb{R}^n$" pour désigner l'équivalent de la condition (1), lorsque l'intervalle I est remplacé par un ouvert O de $\mathbb{R}^n$.

Dans [20], où sont développés les résultats de [17], l'ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un domaine K, le mot domaine désignant la fermeture d'un ouvert borné. On établit dans [20] des estimations analogues au cas unidimensionnel sur l'épaisseur, suivant une direction, des domaines associés à une suite régulière Λ. Pour la démonstration on est amené à montrer que si Λ_1 et Λ_2 sont deux suites régulières de R^n, si K_1 et K_2 sont des domaines qui leur sont respectivement associés et si $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ est régulière, alors tout domaine contenant $K_1 + K_2$ dans son intérieur est associé à $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ([20], p. 111). On montre également la propriété de stabilité suivante : un domaine associé à une suite Λ de R^n est encore associé à toute suite assez voisine de Λ ([20], p. 109).

Plusieurs problèmes relatifs aux compacts associés à une suite de $\mathbb{R}^n$ pour la norme L^2, et des problèmes à une variable lorsqu'on remplace l'intervalle I par un compact quelconque, restent en suspens ([20], p. 95 et p. 117). Mais on peut considérer que la théorie L^2 des compacts associés est assez bien élucidée : la propriété (1) est stable et se comporte bien par rapport à la réunion ; la L^2-pseudo-période d'une suite réelle se calcule explicitement.

Il en va tout autrement pour la "théorie L^∞" des compacts associés, liée à l'étude de la pseudo-périodicité en norme uniforme. La notion suivante (notée condition $Q(\Lambda,I)$) apparaît dans [13].

La suite Λ de nombres réels est un spectre C-pseudo-périodique s'il existe un intervalle I de longueur finie et une constante $C > 0$ tels que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ on ait

$$(2) \qquad \|P\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |P(x)| \leq C \sup_{x\in I} |P(x)| = C\|P\|_{\infty,I} .$$

On appelle C-pseudo période attachée à Λ, et on note $\ell_c(\Lambda)$ la borne inférieure des longueurs des intervalles I de $\mathbb{R}$ vérifiant (2).

La théorie L^∞ est reliée à la théorie L^2 par l'inégalité ([13], p. 306)

$$\ell_c(\Lambda) \geq 2\pi\Delta(\Lambda) = \ell_2(\Lambda).$$

Mais la régularité de Λ n'entraîne pas que Λ soit un spectre C-pseudo-périodique ([13], p. 298 et [47]) et il est impossible de caractériser les spectres C-pseudo-périodiques en termes de densité ([43], [53]). D'autre part la propriété (2) est loin d'être stable [47] et l'on ignore si la réunion de deux spectres C-pseudo-périodiques, lorsqu'elle est régulière, est un spectre C-pseudo-périodique.

La C-pseudo-période d'une suite réelle Λ s'appellera plus tard [79] [101] densité harmonique de Λ et sera notée $d_h(\Lambda)$. La condition (2) se traduira par "I est associé à Λ".

Le cadre le plus général où nous considérons la notion de compact associé est le suivant.

DEFINITION 1. Soit G un groupe abélien localement compact, Γ son dual et $\Lambda \subset \Gamma$. On dit que le compact K de G est associé à Λ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma\, \gamma(x)$ on ait

$$\|P\|_\infty \leq \sup_{x\in G} |P(x)| \leq C \sup_{x\in K} |P(x)| = C\|P\|_{\infty,K}. \tag{3}$$

Dans les paragraphes suivants nous verrons les progrès liés à cette notion pendant un quart de siècle. Le plus souvent nous aurons $G = T$ ou $\mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, respectivement.

Nous traduisons en termes de compact associé la question évoquée précédemment.

QUESTION 1. Si les suites réelles Λ_1 et Λ_2 possèdent des compacts associés et $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ est régulière, est-ce que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ possède un compact associé ? Si oui, a-t-on $d_h(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \leq d_h(\Lambda_1) + d_h(\Lambda_2)$?

3. ENSEMBLES DE SIDON DISCRETS ET TOPOLOGIQUES

L'étude des fonctions moyenne-périodiques conduit J.-P. Kahane [13] à introduire les notions suivantes.

Une suite Λ de nombres réels est une suite de Sidon de deuxième espèce s'il existe un intervalle I et une constante A_I tels que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ on ait

$$\sum |a_\lambda| \leq A_I \sup_{x \in I} |P(x)| . \tag{4}$$

Si la condition (4) est satisfaite pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que Λ est une suite de Sidon de première espèce.

Il est clair que (4) entraîne (2) et que sur l'espace vectoriel des polynômes $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ les normes $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|$ et $\|P\|_\infty$ sont équivalentes.

Le premier exemple de suite de Sidon de 1ère espèce est fourni par les suites lacunaires de Hadamard ([7]) :

DEFINITION 2. Une suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de nombres réels positifs est une suite lacunaire de Hadamard s'il existe $q > 1$ tel que pour $j \geq 1$ on ait

$$\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq q. \tag{5}$$

Une suite de Sidon de deuxième espèce s'appellera plus tard suite de Sidon topologique ([34] [38] [50]) et on montrera que toute suite de Sidon topologique est de 1ère espèce [50].

Nous allons donner notre terminologie sur les ensembles de Sidon dans leur cadre général, car nous serons forcés d'y faire allusion pour certains problèmes, par exemple ceux liés aux conditions arithmétiques (§ 6).

L'expression "ensemble de Sidon" est employée pour les suites d'entiers ou plus généralement pour les parties d'un groupe discret définies de la façon suivante.

DEFINITION 3. Soient G un groupe abélien compact et Γ son dual. Une partie Λ de Γ est un ensemble de Sidon s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum\limits_{\gamma \in \Lambda} a_\gamma \, \gamma(x)$ on ait

$$\Sigma \, |a_\gamma| \leq C \|P\|_\infty . \tag{6}$$

Lorsque (6) est vérifiée on dira que Λ est un ensemble de Sidon de constante C.

L'expression "ensemble de Sidon topologique" correspond au cas des groupes Γ abéliens localement compacts ([65], définition 1.2) et lorsque Γ est métrisable nous retrouvons la définition donnée pour $\mathbb{R}$ ([34], [38], [65]) :

DEFINITION 4. Soient Γ un groupe abélien localement compact et métrisable et G son dual. Une partie Λ de Γ est un ensemble de Sidon topologique s'il existe un sous-ensemble compact K de G et une constante $C_k > 0$ tels que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum\limits_{\gamma \in \Lambda} a_\gamma \, \gamma(x)$ on ait

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} |a_\gamma| \leq C_k \sup_{x \in K} |P(x)| . \tag{7}$$

Autrement dit, un ensemble de Sidon topologique de Γ est un ensemble de Sidon de Γ_d, le groupe Γ muni de la topologie discrète, et possède un compact associé.

L'expression "ensemble de Sidon de 1ère espèce" est réservée au cas (discret ou topologique) où il y a une "constante uniforme d'association" au sens suivant ([38], [49], [illegible]).

DEFINITION 5. Soient G un groupe abélien localement compact, Γ son dual et Λ une partie de Γ. On dit que Λ est un ensemble de Sidon de 1ère espèce s'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Λ telle que pour tout compact K de G d'intérieur non vide, il existe une partie finie Λ_k de Λ ayant la propriété suivante : pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Lambda_k} a_\gamma \gamma(x)$ on a

$$\sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Lambda_k} |a_\gamma| \leq C \sup_{x \in K} |P(x)| .$$

Les suites lacunaires de Hadamard (définition 2) sont des ensembles de Sidon de première espèce ([14]).

Tout ce qui est connu vers 1960 sur les ensembles de Sidon se trouve dans [18] pour les suites d'entiers et dans [21] pour le cas discret quelconque. On connaît alors : les différentes conditions fonctionnelles définissant les ensembles de Sidon ([21], 5.7.3 et § 4) ; une propriété d'interpolation approchée ([21], 5.7.4) ; les conditions arithmétiques suffisantes de Steckin ([21], 5.7.5 et § 6) et des conditions arithmétiques nécessaires ([18], 3.6 et [13], p. 312) pour qu'un ensemble soit de Sidon ; la relation des ensembles de Sidon avec une autre classe d'ensembles lacunaires, les ensembles $\Lambda(p)$ ([21], 5.7.7).

A l'origine l'intérêt autour des ensembles de Sidon se développe grâce aux nombreux problèmes d'analyse qu'ils permettent d'éclairer : propriétés de prolongement analytique des séries de Taylor [2], propriétés des fonctions moyenne-périodiques [13], etc. Cet aspect sera abordé au paragraphe suivant.

Dans la décade de 1960, les ensembles de Sidon deviennent peu à peu un sujet d'intérêt propre, et on voit se dessiner deux genres de problèmes : ceux liés aux mesures d'interpolation et ceux liés aux conditions arithmétiques. Nous les traitons aux § 5 et § 6, respectivement.

4. COMPORTEMENT DES FONCTIONS A SPECTRE DANS UN ENSEMBLE DE SIDON

Dans toutes les définitions données jusqu'ici nous n'avons considéré que des sommes trigonométriques finies. Nous avons ainsi éludé un aspect fondamental de la théorie : le comportement exceptionnel des fonctions à spectre dans l'ensemble considéré.

Pour ce paragraphe et les suivants, nous avons besoin de quelques notations. Soit $G = T$ ou $\mathbb{R}$, notons $\Gamma = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, respectivement, le groupe dual.

$M(G)$ désigne l'espace de Banach des mesures complexes régulières et bornées sur G. Pour $\mu \in M(G)$, sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est définie sur Γ par

$$\hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\mu(x) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{resp.} \quad \hat{\mu}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\, d\mu(x) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

On note $B(\Gamma)$ l'espace $\mathcal{F}M(G)$ des transformées de Fourier des mesures de $M(G)$. On appelle spectre de μ l'ensemble $sp(\mu) = \left\{\gamma \in \Gamma,\ \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\right\}$; si $sp(\mu)$ est fini, μ est un polynôme trigonométrique. On note $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques sur G.

$L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, désigne l'espace de Banach des classes d'équivalence des fonctions mesurables sur G de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (resp. essentiellement bornées si $p = +\infty$) muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } G = T, \quad \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } G = \mathbb{R}$$

lorsque $1 \leq p < \infty$; si $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in G} \text{ess}\, |f(x)|$.

Si Λ est une partie de Γ, et B est un des espaces $M(G)$ ou $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, B_Λ désigne l'adhérence, pour la norme de B, de l'espace vectoriel engendré par $\left\{e^{ix\gamma},\ \gamma \in \Lambda\right\}$.

$C_\Lambda(G)$ (resp. $L^\infty_\Lambda(G)$) désigne l'adhérence pour la norme de la convergence uniforme sur G (resp. pour la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$) de $\left\{e^{ix\gamma},\ \gamma \in \Lambda\right\}$.

Le comportement frappant des fonctions à spectre dans un ensemble de Sidon ou des coefficients de Fourier sur un ensemble de Sidon se traduit par l'équivalence des conditions suivantes.

(a) Λ est un ensemble de Sidon d'entiers (définition 3).

(b) Toute fonction de $C_\Lambda(T)$ a une série de Fourier absolument convergente.

(c) Toute fonction de $L^\infty_\Lambda(T)$ a une série de Fourier absolument convergente.

(d) Pour toute suite bornée $(b(\gamma))_{\gamma\in\Lambda}$ il existe $\mu\in M(T)$ telle que $\hat{\mu}(\gamma) = b(\gamma)$ pour $\gamma\in\Lambda$.

(e) Pour toute suite $(c(\gamma))_{\gamma\in\Lambda}$ telle que $\lim\limits_{\gamma\in\Lambda,\ |\gamma|\to\infty} c_\gamma = 0$, il existe $f\in L^1(T)$ telle que $\hat{f}(\gamma) = c(\gamma)$ pour $\gamma\in\Lambda$.

Ces conditions sont présentées sous cette forme dans [18], mais elles n'étaient pas nouvelles. Lorsque Λ est une suite de Hadamard, la condition (c) a été démontrée par S. Sidon [4] et la condition (e) par S. Banach [5]. L'équivalence de ces conditions apparaît, dans le cadre des systèmes orthogonaux, dans le chapitre VII du livre de S. Kaczmarz et H. Steinhaus [9]. J.-P. Kahane [13] démontre les conditions équivalentes analogues pour les suites de Sidon topologiques de nombres réels. Le terme de suite de Sidon pour désigner une suite satisfaisant à une de ces conditions a été choisi d'un commun accord par J.-P. Kahane et W. Rudin (J.-P. Kahane, communication orale).

La quantité d'informations fournie dans différents domaines par les fonctions à spectre dans un ensemble de Sidon, ou plus particulièrement dans une suite de Hadamard, est étonnante. On en trouve une synthèse dans [27], qui débute par les exemples fameux de Weierstrass concernant les fonctions continues nulle part dérivables [1] et de J. Hadamard sur les fonctions analytiques pour lesquelles T est une frontière naturelle [2].

Dans la décade de 1960 cet aspect de la théorie des ensembles de Sidon et des compacts associés est illustrié par les travaux suivants.

Soient $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite de Hadamard satisfaisant (5) et $S(x) = \sum\limits_{j\geq 1} c_j e^{i\lambda_j x}$ une série absolument convergente. On montre dans [14] qu'il existe des constantes α, β, et γ ne dépendant que de q, telles que si pour $k\geq 1$, $|c_k| \leq \alpha \sum\limits_{j\geq k+1} |c_j|$, alors si x parcourt un intervalle de longueur au moins $\beta\lambda_1^{-1}$, $S(x)$ parcourt une boule de rayon $\leq \gamma \sum\limits_{j\geq 1} |c_j|$. C'est dire que $S(x)$ fournit un exemple de courbe de Peano.

La preuve de ce résultat dépend de l'énoncé précis suivant (Théorème I de [14] et [23]), qui montre que $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est un ensemble de Sidon de 1ère espèce : il existe une constante C ne dépendant que de q telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur $\geq C\,\lambda_1^{-1}$ et tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{j\geq 1} a_j\, e^{i\lambda_j x}$ on ait

$$\sum_{j\geq 1} |a_j| \leq C \sup_{x\in I} \operatorname{Re}(P(x)).$$

La démonstration de cette inégalité présentée dans [23] est à l'origine de [65].

Dans [28] on introduit le terme de "compact propre" : un compact K de $\mathbb{R}$ est propre pour la suite $\Lambda = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ de nombres réels s'il existe un entier $k \geq 1$ et une constante $C > 0$ telles que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{j\geq k} a_j e^{i\lambda_j x}$ on ait

$$\sum_{j\geq k} |a_j| \leq C \sup_{x\in K} |P(x)|.$$

Notons $E(\Lambda,M)$ l'ensemble de nombres réels u tels que $(e^{2\pi i\lambda_j u})_{j\geq 1}$ ait une limite par le procédé de sommation régulier de Toeplitz M [28]. Si le compact K est propre pour Λ, alors pour tout procédé régulier de sommation M, $K \cap \complement E(\Lambda,M)$ est non dénombrable [28]. L'étude des points exceptionnels pour la répartition modulo 1 est reprise et étendue dans [25] et [38].

Il y a deux raisons à l'introduction des compacts propres. D'une part pour les problèmes que nous venons d'évoquer, les premiers termes de la suite ne sont pas déterminants. D'autre part on ignore si lorsque K est associé à Λ, et F est un ensemble fini, K est encore associé à $\Lambda\cup F$. C'est dans [50] que l'on obtiendra une réponse affirmative dans le cas réel ou des groupes connexes, quitte à "élargir" K (lemme 3). K. A. Ross ([66] et [98], Chapitre 8) donnera une condition nécessaire et suffisante sur Λ, dans le cas général, pour que tout compact propre pour Λ soit associé à Λ.

Le terme "compact propre" est utilisé dans [25] et [38], remplacé par "compact associé au sens large" dans [65] et par "compact associé" dans [49] et [98] (où l'on utilise l'expression "compact strictement associé" dans la définition 1).

Dans [23] et [28] on s'intéresse à des compacts "minces" associés à une suite réelle satisfaisant à des conditions de lacunarité du type de Hadamard (5).

Soit K l'ensemble de type de Cantor construit de la façon suivante : on fixe un intervalle I de longueur ℓ et une constante ξ $(0<\xi<\frac{1}{2})$; on retire de $K_0 = I$ le sous-intervalle de même centre et longueur $(1-2\xi)\ell$; on obtient deux intervalles de longueur $\xi\ell$, on note K_1 leur union, et on leur applique le même procédé, et ainsi successivement ; on note K_j les 2^j intervalles de la $j^{\text{ième}}$ étape et on pose $K = \bigcap_{j\geq 0} K_j$.

Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite de Hadamard satisfaisant (5). Si q et ξ sont sufisamment grands (dépendant de $\xi > \frac{1}{3}$ ou de q, respectivement), alors K est propre pour Λ ([23], [24]). Ces résultats, ainsi que d'autres que nous verrons au § 7, sont liés à la nature arithmétique de ξ (comme le problème de l'unicité du développement trigonométrique ([24], Chapitres V et VI)).

DEFINITION 6. On appelle nombre de Pisot un nombre entier algébrique dont tous les conjugués sont de module < 1. On désigne par S la classe des nombres de Pisot.

Si $1/\varepsilon$ n'appartient pas à S, alors il existe une suite $(q_j)_{j\geq 1}$ tendant vers l'infini telle que K est propre pour Λ si $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq q_j$ pour $j \geq 1$ ([28], p. 256). Si $1/\xi$ est dans S, alors il existe des suites lacunaires pour lesquelles K n'est pas propre ([24]).

Dans [20] et [24] on aborde la théorie L^∞ et L^2 des compacts "minces" associés à des suites satisfaisant à différentes conditions de lacunarité. Malgré les éléments de réponse connus, le but du dernier chapitre de [20] est toujours d'actualité, et nous le rappelons : "définir des compacts K de mesure nulle mais néanmoins assez épais, et des suites Λ assez rares, pour que la comportement sur K d'une fonction continue dont le spectre est contenu dans Λ permette de déterminer son comportement global".

5. ENSEMBLES DE SIDON ET MESURES D'INTERPOLATION

Rappelons que l'ensemble Λ de nombres entiers ou réels est un ensemble de Sidon si et seulement si toute fonction bornée sur Λ peut être prolongée sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ en une transformée de Fourier d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$ (condition (d) du § 4). Une telle mesure sera dite mesure d'interpolation.

Les problèmes qui se posent sur les mesure d'interpolation μ relatives à un ensemble de Sidon Λ sont les suivants.

1. Peut-on prendre μ discrète ?

2. Peut-on prendre μ continue ?

3. Peut-on prendre μ telle que $\hat{\mu}$ soit arbitrairement petite sur $Z \setminus \Lambda$ (resp. sur $\mathbb{R} \setminus (\Lambda + [-\delta, \delta])$, $\delta>0$) ?

4. Peut-on prendre μ positive si $0 \notin \Lambda$ et si la fonction bornée $(b(\gamma))_{\gamma \in \Lambda}$ satisfait $b(-\gamma) = \overline{b(\gamma)}$ pour $\gamma \in \Lambda$?

5. Peut-on prendre μ à support dans un intervalle arbitraire ?

Les deux premiers problèmes sont à l'origine, entre autres, des travaux de C. Ryll-Nardzewski, S. Hartman, J.-P. Kahane ([26], [29], [31], [71]), J. F. Méla ([37], [38], [44]), B. B. Wells [84] (pour une bibliographie plus complète voir [98], 10.10).

C. Ryll-Nardzewski et S. Hartman développent la théorie des ensembles d'interpolation (ou ensembles I_o).

DEFINITION 7. $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est un ensemble d'interpolation si toute fonction bornée sur Λ peut être prolongée sur $\mathbb{R}$ en une fonction presque périodique (c'est-à-dire limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques).

J.-P. Kahane [31] montre que si $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est un ensemble d'interpolation, toute fonction bornée sur R peut être interpolée par une fonction presque-périodique à série absolument convergente. Les ensembles d'interpolation sont donc des ensembles de Sidon, et leurs mesures d'interpolation sont discrètes. La réciproque est inexacte [31], et la réponse à la question 1 est négative. Les ensembles d'interpolation ont des propriétés de répartition remarquables, précisées dans [37] et [38], qui constituent les références les plus complètes sur le sujet. Dans ces articles se dessinent plusieurs des résultats développés ensuite dans [65] pour les ensembles de Sidon.

D'autre part, si $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est un ensemble d'interpolation, son adhérence $\bar{\Lambda}$ dans le compactifié de Bohr $\bar{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ est un ensemble de Helson ([31] et [21], 5.6, pour les propriétés des ensembles de Helson). En particulier, $\bar{\Lambda}$ a mesure nulle dans $\bar{\mathbb{R}}$ ([26], [31]). Ces deux dernières questions sont toujours ouvertes dans le cas général.

QUESTION 2. Si Λ est un ensemble de Sidon de $\mathbb{R}$, quelles sont les propriétés de l'adhérence $\bar{\Lambda}$ de Λ dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$? $\bar{\Lambda}$ a-t-elle mesure nulle ? Peut-on avoir $\bar{\Lambda} = \bar{\mathbb{R}}$?

Dans cette direction, Y Katznelson [72] a montré l'existence d'ensembles $\Lambda(p)$ pour tout $p > 0$ qui sont denses dans $\bar{\mathbb{Z}}$ (voir définition 19).

Un autre problème concernant les mesures d'interpolation a été posé par C. C. Graham [85] en 1973 : soit $E \subset Z$ tel que pour toute mesure $\mu \in M(T)$, il existe une mesure discrète ν sur T telle que $\hat{\mu}(n) = \hat{\nu}(n)$ pour $n \in E$; E est-il un ensemble de Sidon ?

La réponse est positive, elle a été trouvée dans certains cas particuliers par L. T. Ramsey et B. B. Wells [133], et dans le cas général par J. Bourgain [139], grâce aux éléments nouveaux apportés dans [133] et [134].

Le problème 2 a été résolu indépendamment par S. Hartman [71] et B. B. Wells [84] : si Λ est un ensemble de Sidon, pour toute fonction bornée $(b(\gamma))_{\gamma \in \Lambda}$ il existe une mesure continue μ telle que $\hat{\mu}(\gamma) = b(\gamma)$ pour $\gamma \in \Lambda$. Les deux démonstrations utilisent la réponse de S. Drury au problème 3, et S. Hartman traite aussi le cas topologique.

L'intérêt suscité par les ensembles de Sidon s'accroît lorsque S. W. Drury montre que la réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon [48]. Pour cela il répond affirmativement au problème 3 : si Λ est un ensemble de Sidon d'un groupe discret Γ, sa fonction caractéristique est uniformément approchable par des éléments de $B(\Gamma)$. Le cas topologique est résolu dans [65].

La remarquable "astuce de convolution" des mesures d'interpolation aléatoires qui est au centre de la méthode de S. W. Drury est détaillée dans un cadre plus général dans [63]. Elle est immédiatement utilisée dans un grand nombre de travaux : [49], [50], [51], [56], [57], [58], [64], [65], [71], [84]. Plus tard S. W. Drury [86] adapte sa méthode pour répondre affirmativement à la question 4.

Le procédé de convolution est encore employé par S. W. Drury [93] pour montrer que certaines relations arithmétiques, que nous analyserons au paragraphe suivant, caractérisent les ensembles de Sidon.

Finalement, D. Rider [94] donne une nouvelle version de la méthode de S. W. Drury, en termes de séries de Fourier aléatoires, qui déclenchera la théorie moderne des ensembles de Sidon, avec les travaux de G. Pisier que nous analyserons au § 8, et, plus récemment, ceux de J. Bourgain ([136], [144]).

Le problème 5 a été résolu affirmativement par M. Déchamps-Gondim ([49], [50], [65]). Dans ces travaux on montre que si le groupe G est localement compact et connexe et son dual Γ métrisable, tout ensemble de Sidon de Λ est associé à tout ensemble compact K de G d'intérieur non vide. Le cas des groupes G compacts et non connexes a été traité ensuite par K. A. Ross [66] et [98], chapitre 8), ainsi que la possibilité de prendre les mesures d'interpolation à la fois positives et à support dans un compact ([83] et [98]).

Dans [65], M. Déchamps-Gondim montre en particulier que tout ensemble de Sidon dénombrable est réunion finie d'ensembles de Sidon dont le pas tend vers l'infini. Ce dernier résultat s'étend au cas des ensembles de Sidon non dénombrables d'après le travail récent de J. Bourgain [136] (ce qui répond par l'affirmative à la question 6 de [98], p. 171).

Pour décrire un dernier problème sur les compacts d'intérieur non vide associés aux ensembles de Sidon nous avons besoin de la notion suivante.

DEFINITION 8. Soit Γ un groupe métrisable, d une distance invariante sur Γ et $|\gamma-\gamma'| = d(0,\gamma-\gamma')$ pour tous γ et γ' dans Γ. Pour tout sous-ensemble Λ de Γ, le pas de Λ est le nombre

$$p(\Lambda) = \inf\left\{ |\gamma-\gamma'|,\ \gamma\in\Lambda,\ \gamma'\in\Lambda,\ \gamma\neq\gamma' \right\}.$$

On dit que le pas de Λ tend vers l'infini si

$$\lim |\gamma-\gamma'| = \infty \qquad (\gamma,\gamma'\in\Lambda\ ,\ \gamma\neq\gamma'\ ,\ \gamma,\gamma'\to\infty).$$

Soit p un nombre premier, $Z(p)$ le groupe fini des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $G = (Z(p))^{\mathbb{N}}$. On montre [65] que tout ensemble de Sidon du dual Γ de G dont le pas tend vers l'infini est réunion finie d'ensembles de Sidon de première espèce (définition 5). La preuve donnée dans [65] utilise les résultats de [32] et [49]. J. Bourgain [144] vient de démontrer, dans le cas général, que tout ensemble de Sidon est réunion finie d'ensembles de Sidon de première espèce. Les arguments développés dans [144] permettent en outre de montrer que la condition (15) ci-dessous caractérise les ensembles de Sidon dans le cas des groupes d'ordre borné, indépendamment de [123].

Dans la réponse au problème 5 il est essentiel de considérer des ensembles d'intérieur non vide. En effet, si Λ est une suite de Sidon d'entiers, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver des compacts de T de mesure supérieure à $1-\varepsilon$ qui ne sont pas associés à Λ. Par contre, tout compact de T de mesure positive est associé, pour la norme L^2, à toute suite de Sidon de Z ([98], Corollaire 9.13, dû à A. Bonami). Dans ce dernier résultat, Λ peut être remplacé par d'autres ensembles moins lacunaires ([46], [52] et [98], Ch. 9). Le résultat était connu depuis longtemps pour les suites de Hadamard [6].

Les ensembles de Sidon topologiques ont encore deux propriétés remarquables liées aux mesures d'interpolation. La première est une propriété d'élargissement, dont voici une version simplifiée : soient Λ une suite de Sidon de nombres réels, δ une constante vérifiant $0 < \delta < p(\Lambda)/2$ et $(b(\gamma))_{\gamma\in\Lambda}$ une suite bornée ; il existe alors $\mu\in M(\mathbb{R})$

vérifiant, pour tout $\gamma \in \Lambda$, $\hat{\mu}(x) = b(\gamma)$ pour x dans l'intervalle $[\gamma-\delta, \gamma+\delta]$. Cette propriété a été étudiée successivement dans [38], [34], [65], [77] et [80] (où se trouve la version la plus générale).

La deuxième propriété (liée à la première) concerne la stabilité. Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite de nombres réels qui est stable par rapport à la propriété d'avoir un compact associé, c'est-à-dire : il existe $\alpha > 0$ tel que toute suite $(\lambda'_j)_{j\geq 1}$ satisfaisant $|\lambda_j - \lambda'_j| \leq \alpha$ pour $j \geq 1$ a un compact associé ; alors Λ est un ensemble de Sidon topologique [65].

Ces deux propriétés montrent que, parmi les suites réelles qui ont un compact associé, les ensembles de Sidon topologiques se distinguent par leur stabilité.

6. ENSEMBLES DE SIDON ET CONDITIONS ARITHMETIQUES

Les ensembles de Sidon sont des sous-ensembles Λ d'un groupe défini par des conditions fonctionnelles. Il est naturel de chercher à les caractériser par des conditions arithmétiques, c'est-à-dire, portant sur les relations algébriques entre les éléments de Λ.

Par ailleurs, nous n'avons jusqu'ici qu'un exemple d'ensemble de Sidon : les suites lacunaires de Hadamard (définition 2). La théorie des ensembles de Sidon avait besoin, pour se développer, de conditions permettant d'affirmer "l'abondance" de tels ensembles dans un groupe quelconque. La première de ces conditions est donnée par S. B. Stečkin [12]. La condition de Stečkin (8), après les simplifications apportées par [18], [29] et [134], est la condition arithmétique suffisante la plus générale permettant de construire des ensembles de Sidon.

Nous traiterons d'abord tous les problèmes liés aux conditions arithmétiques suffisantes, ensuite ceux liés aux conditions nécessaires. La longueur du paragraphe est en rapport avec la difficulté du sujet, l'importance accordée aux questions 3 et 4 ci-dessous et les développements récents du sujet. Comme les problèmes sur les conditions arithmétiques se comportent très différemment suivant le groupe considéré, dans ce paragraphe nous nous plaçons dans un cadre général.

DEFINITION 9. Soit Γ un groupe abélien discret et Λ une partie de Γ. Pour tout $\lambda \in \Gamma$ on note $R_s(\Lambda,\lambda)$ le nombre de "mots" de longueur s d'éléments de Λ égaux à λ, c'est-à-dire,

$$R_s(\Lambda,\lambda) = \left|\left\{(\varepsilon(\gamma))_{\gamma\in\Lambda} \in \{-1,0,1\}^{\Lambda} \;\middle|\; \sum_{\gamma\in\Lambda} \varepsilon(\gamma)\,\gamma = \delta \;,\; \sum_{\gamma\in\Lambda} |\varepsilon(\gamma)| = s\right\}\right|$$

(où pour tout ensemble A, $|A|$ est le cardinal de A).

Autrement dit, si $\Lambda = (\gamma_j)_{j\geq 1}$, $R_s(\Lambda,\lambda)$ est le nombre de représentations de λ sous la forme

$$\lambda = \pm \gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \pm \ldots + \gamma_{j_s} \quad , \quad j_1 > j_2 > \ldots > j_s .$$

W. Rudin [18], [21] donne la version suivante (un peu plus générale) du résultat de S. B. Stečkin [12]. Soit $\Lambda = (\gamma_j)_{j\geq 1}$ une suite d'un groupe abélien discret satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Si $\gamma\in\Lambda$ et $2\gamma \neq 0$ alors $-\gamma \notin \Lambda$;

(ii) Il existe $B > 0$ et une décomposition de Λ en n ensembles disjoints $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ tels que pour tout λ dans $\Lambda \cup \{0\}$,

$$(8) \qquad R_s(\Lambda_i \,,\, \lambda) \leq B^s \qquad (i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad s \geq 1)$$

alors Λ est un ensemble de Sidon. Une conséquence immédiate est que tout sous-ensemble infini d'un groupe discret contient un ensemble de Sidon infini.

D. Rider [29] fournit les simplifications suivantes :

- la condition (i) est superflue (voir aussi [54] et [18]) ;
- il suffit, dans (ii), de satisfaire (8) pour $\gamma = 0$;
- Λ peut être remplacé par $\Lambda \cup (-\Lambda)$ dans la conclusion.

Dès lors on appellera ensemble de Rider un sous-ensemble Λ d'un groupe abélien discret pour lequel il existe $B > 0$ tel que

(9) $$R_s(\Lambda , 0) \leq B^s \quad , \quad s \geq 1$$

et la condition suffisante précédente devient : toute réunion finie d'ensembles de Rider est un ensemble de Sidon [29].

Un ensemble de Rider d'entiers n'est pas toujours une réunion finie de suites lacunaires de Hadamard. L'exemple le plus simple a été donné par E. Hewitt et H. S. Zuckerman [15].

L'outil central lié aux conditions arithmétiques suffisantes est la construction de mesures d'interpolation que l'on appelle produits de Riesz ([98], chapitre 2). Etant donnés un ensemble Λ, une fonction $(b(\gamma))_{\gamma\in\Lambda}$ telle que $|b(\gamma)| \leq 1$ pour tout $\gamma\in\Lambda$ et $\varepsilon > 0$, la condition (9) permet de construire un produit de Riesz R, qui est une mesure bornée sur le groupe G dual de Γ, dont la norme ne dépend que de B et de ε, et telle que

(10) $$|\hat{R}(\gamma) - b(\gamma)| < \varepsilon \quad (\gamma\in\Lambda) \quad , \quad |\hat{R}(\gamma)| < \varepsilon \quad (\gamma\notin\Lambda\cup(-\Lambda)\cup\{0\}).$$

Il s'ensuit que Λ est un ensemble de Sidon, d'après la condition d'interpolation approchée suivante, équivalente à la condition (d) du § 4 ([21]) :

(d') Il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $(b(\gamma))_{\gamma\in\Lambda} \in \{-1 , 1\}^{\Lambda}$ il existe $\mu \in M(G)$ telle que, pour tout $\gamma\in\Lambda$, $|\hat{\mu}(\gamma) - b(\gamma)| \leq 1 - \delta$.

Les produits de Riesz ont été introduits dans [3], pour l'étude de l'ordre de décroissance des coefficients de Fourier des fonctions continues à variation bornée.

La dernière inégalité de (10) permet aussi de montrer que si Λ' est un ensemble de Sidon quelconque, $\Lambda \cup \Lambda'$ est un ensemble de Sidon, sans faire appel au résultat de S. Drury ([29], [48]). De la même manière, la plupart des résultats sur les ensembles de Sidon ont des démonstrations directes et explicites dans le cas d'un ensemble de Rider, grâce aux produits de Riesz. Ceci montre l'intérêt de ces ensembles, et de la question suivante : tout ensemble de Sidon est-il réunion finie d'ensembles de Rider ? (question 1 de [98], p. 171).

Cette question est toujours ouverte, mais peut être posée différemment, grâce à des progrès récents. Voyons d'abord quelques définitions concernant l'indépendance arithmétique.

DEFINITION 10. Soit Λ un sous-ensemble d'un groupe abélien discret. On dit que Λ est <u>quasi-indépendant</u> si $R_s(\Lambda,0)=0$ pour $s \geq 1$.

On dit que Λ est <u>dissocié</u> si pour toute partie finie A de Λ et toute suite $(n(\gamma))_{\gamma \in A} \in \{-2,-1,0,1,2\}^A$ on a

$$(11) \qquad \sum_{\gamma \in A} n(\gamma)\gamma = 0 \implies n(\gamma)\gamma = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \in A.$$

On dit que Λ est <u>indépendant</u> si pour toute partie finie A de Λ et toute suite $(n(\gamma))_{\gamma \in A} \in \mathbb{Z}^A$ on a (11).

Les ensembles dissociés correspondent aux suites de Hadamard satisfaisant (5) avec $q > 3$: les produits de Riesz construits sur Λ sont des mesures d'interpolation exactes ([98], chapitre 2). Les ensembles indépendants ont un intérêt pour d'autres groupes que $\mathbb{Z}$, ils sont en particulier dissociés.

Les ensembles quasi-indépendants se révèlent être l'exemple fondamental d'ensemble de Sidon, d'après le résultat suivant de G. Pisier ([134], Proposition 2.13) : tout ensemble de Rider est réunion finie d'ensembles quasi-indépendants. La question ouverte précédente devient alors :

QUESTION 3. Tout ensemble de Sidon est-il réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ?

Dans cette direction, J. Bourgain [136] démontre qu'étant donné un entier k, un ensemble de Sidon Λ se décompose en $K = K(\Lambda,k)$ parties $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ n'ayant pas de relations de longueur $\leq k$, c'est-à-dire, telles que

$$R_s(\Lambda_i\ ,\ 0) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq K \quad \text{et} \quad 1 \leq s \leq k.$$

En fait, on sait qu'un ensemble de Sidon peut être caractérisé par l'ensemble de relations qu'il vérifie. Plus précisément, soit $\Lambda = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments d'un groupe abélien discret Γ, notons

$$R_\Lambda = \left\{ (\varepsilon_j)_{j\geq 1} \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j\geq 1} |\varepsilon_j| < \infty, \ \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \gamma_j = 0 \right\}.$$

S. Drury [93] montre que si Λ' est une suite d'un groupe discret Γ' telle que $R_\Lambda = R_{\Lambda'}$, alors Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si Λ' l'est aussi. Mais sa démonstration ne donne pas de caractérisation explicite ne dépendant que de R_Λ.

Une caractérisation des ensembles de Sidon en termes de $R_s(\Lambda,0)$ est fournie par G. Pisier ([134], théorème 2.6) : soit Λ une partie du groupe discret Γ telle que $0 \notin \Gamma$; Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si il existe un nombre $\theta < 1$ tel que pour toute partie finie A de Λ on a

$$\sum_{s=0}^{|A|} \frac{1}{2^s} R_s(A,0) \leq 2^{\theta|A|}.$$

Dans [134] on trouve d'autres variantes de ce résultat (en particulier le théorème 2.10).

Si la question 3 a une réponse positive, toute partie finie d'un ensemble de Sidon Λ contient un sous-ensemble quasi-indépendant de densité $\geq n_\Lambda^{-1} > 0$ (Λ étant réunion de n_Λ ensembles quasi-indépendants). Cette forme affaiblie de la question 4 est résolue dans [134] : le sous-ensemble Λ du groupe abélien discret Γ est un ensemble de Sidon si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que toute partie finie A de Λ contienne une sous-partie quasi-indépendante B telle que $|B| \geq \delta |A|$.

Compte-tenu de ce résultat, la question 3 semble devenir purement combinatoire. Néanmoins des outils combinatoires ou de la théorie des graphes n'ont pas permis jusqu'ici d'aborder le problème.

Les deux dernier résultats s'insérent dans les travaux fondamentaux de G. Pisier concernant l'espace de séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues ([112], [123], [134]). Nous analyserons ces travaux au paragraphe 8.

Nous n'avons pas encore signalé les cas où l'on sait répondre à la question 3.

Soit p un nombre entier positif, notons $Z(p)$ le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Le groupe compact $G = (Z(p))^{\mathbb{N}}$ a pour dual le groupe discret $\Gamma = (Z/pZ)^{(\mathbb{N})}$ (si I est un ensemble et H un groupe, $H^{(I)}$ désigne l'ensemble des éléments de H^I dont les coordonnées, à l'exception d'un nombre fini, sont nulles). Lorsque p est premier, Γ est un espace vectoriel sur le corps Z/pZ. Un lemme combinatoire d'algèbre linéaire dû à Rado-Horn [22] permet alors de montrer que tout ensemble de Sidon de Γ est réunion finie d'ensembles indépendants [32].

Plus récemment, J. Bourgain [136] montre que l'étude des ensembles de Sidon du dual de $G = \prod_{j\geq 1} Z(p_j)$, où $(p_j)_{j\geq 1}$ est une suite bornée d'entiers, se ramène au au cas où $G = (Z(p^r))^{\mathbb{N}}$, p^r étant une puissance du nombre premier p. Dans le cas où les p_j sont tous égaux à un produit de nombres premiers distincts, tout ensemble de Sidon du dual de G est réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ([42], [136]). Ceci répond partiellement à la question 4 de [98], p. 171.

Passons aux conditions arithmétiques nécessaires. Comme pour les conditions suffisantes, il y a essentiellement une condition nécessaire, la "condition des mailles", pour qu'un ensemble soit un ensemble de Sidon. Cette condition est due à J.-P. Kahane, qui l'a énoncée pour les suites de Sidon de nombres réels et l'a démontrée à l'aide d'estimations de polynômes aléatoires [13] ; elle s'écrit de façon analogue dans d'autres cas ([40], [54]). Une autre présentation de la condition des mailles pour les ensembles de Sidon et les ensembles $\Lambda(p)$, due à G. Benke ([59], [74]), ainsi que quelques variantes, se trouve dans [98], Chapitre 6.

DEFINITION 11. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, n éléments d'un groupe abélien Γ et s un entier ≥ 1. On appelle <u>s-maille</u> construite sur $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ l'ensemble

$$M(\gamma_1,\ldots,\gamma_n\,;\,s) = \left\{ \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i\gamma_i \;\middle|\; (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^s \,,\; \sum_{1\leq i\leq n} |\alpha_i| \leq 2^s \right\}.$$

On dit que le sous-ensemble Λ de Γ <u>satisfait la condition des mailles</u> s'il existe une constante K telle que pour toute partie finie $\{\gamma_1, \ldots \gamma_n\}$ de Γ et sout entier

$s \geq 1$ on a

(12) $$|\Lambda \cap M(\gamma_1, \ldots, \gamma_n ; s)| \leq K n s .$$

Si Λ est un ensemble de Sidon de constante C d'un groupe abélien localement compact, Λ vérifie la condition des mailles (12) avec $K \leq (16\, C)^2$ ([54]).

Si on remplace les mailles par des sous-groupes finis A de Γ ou par des progressions arithmétiques finies A lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$, $|A| \geq 2$, on montre que tout ensemble de Sidon de Γ vérifie la condition

(13) $$|\Lambda \cap A| \leq K \log |A| .$$

Ce résultat se trouve dans un grand nombre de travaux. Dans [98], chapitre 6, on en donne une version unifiée au moyen des "ensembles test" (définition 6.9 de [98]).

Considérons le groupe $G = (Z(p))^{\mathbb{N}}$, où p est premier. Si A est un sous-groupe fini du dual Γ de G, $|A| = p^m$ où m est la dimension de A comme espace vectoriel sur Z/pZ. Si Λ est un ensemble de Sidon de Γ, il existe donc K' tel que pour tout sous-espace vectoriel A de Γ

(14) $$|\Lambda \cap A| \leq K' \dim(A).$$

Réciproquement, si le sous-ensemble Λ de Γ satisfait (14), le lemme de Rado-Horn permet de montrer que Λ est un ensemble de Sidon [32]. Autrement dit, la condition arithmétique (14) caractérise les ensembles de Sidon du groupe $\Gamma = (Z/pZ)^{(N)}$, p premier.

Ce dernier résultat a pu être généralisé par G. Pisier [123], dans le cas des groupes $G = \prod_{j \geq 1} Z(p_j)$, où $(p_j)_{j \geq 1}$ est une suite bornée d'entiers : un sous-ensemble Λ du dual Γ de G est un ensemble de Sidon si et seulement s'il existe une constante K telle que pour tout sous-groupe fini H de Γ on a

(15) $$|\Lambda \cap H| \leq K \ \mathrm{rang}\ (H)$$

où le rang de H est défini comme le plus petit nombre de générateurs de H.

La démonstration de ce résultat (corollaire 3.3 de [123]) n'utilise pas le lemme de Rado-Horn mais ne permet apparemment pas de retrouver que tout ensemble de Sidon de $(Z/pZ)^{(N)}$, p premier, est une réunion finie d'ensembles indépendants.

En dehors des deux cas qui viennent d'être signalés, on ignore si la condition des mailles est suffisante, en particulier si $G = T$.

QUESTION 4. Un ensemble d'entiers satisfaisant à la condition des mailles est-il un ensemble de Sidon ?

Le résultat qui se rapproche le plus de ce problème est le suivant ([123], théorème 3.1) : soit Λ une partie du groupe abélien discret Γ tel qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute partie quasi-indépendante finie B de Λ on a

$$(16) \qquad |\Lambda \cap [B]| \leq K|B|$$

où $[B] = \left\{ \sum_{\gamma \in B} \varepsilon_\gamma \gamma \, , \, (\varepsilon_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \in \{-1,0,1\}^B \right\}$; alors Λ est un ensemble de Sidon.

La condition (16) est plus forte que la condition des mailles correspondante :

$$(17) \qquad |\Lambda \cap [B]| \leq K|B|(1 + \log|B|).$$

On montre dans [123] (proposition 7.3) que la condition (16) n'est pas nécessaire en général. J. Bourgain [129] retrouve ce résultat en utilisant une construction par récurrence d'un ensemble dissocié contenant des "grosses mailles". C'est dire que dans (17) le facteur $\log|B|$ n'est pas superflu.

Malgré tous les progrès récents, on peut dire que les conditions arithmétiques liées aux ensembles de Sidon ne sont pas encore bien comprises. Les deux questions suivantes donnent la mesure de la difficulté du problème (la première a été posée par J. Bourgain).

QUESTION 5. Si $(n_j)_{j \geq 1}$ est une suite de Sidon d'entiers, $(n_j^2)_{j \geq 1}$ est-elle une suite de Sidon ?

QUESTION 6. Si Λ est un ensemble quasi-indépendant d'entiers, Λ est-il réunion finie d'ensembles dissociés ?

7. LES COMPACTS ASSOCIES A PARTIR DE 1972

Les compacts associés seront en rapport avec des classes d'ensembles qui, à l'exception des modèles, contiennent les ensembles de Sidon. Le rôle des conditions arithmétiques deviendra moins clair. L'étude des conditions fonctionnelles fera un appel croissant aux outils de la géométrie des espaces de Banach.

R. C. Blei [82] montre que tout ensemble d'entiers Λ qui n'est pas de Sidon contient un sous-ensemble E qui n'est pas de Sidon mais qui est de première espèce ; plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact K de T d'intérieur non vide il existe une partie finie F de E telle que pour tout polynôme trigonométrique à spectre dans $E \setminus F$ on ait

$$\sup_{x \in K} |P(x)| \geq (1 - \varepsilon) \|P\|_\infty .$$

Ce résultat utilise les outils de [70], où l'on s'intéresse à "l'abondance" d'ensembles admettant une partition pour la norme uniforme et aux ensembles de Rosenthal.

DEFINITION 12. Un ensemble E d'entiers admet une partition pour la norme uniforme s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) Il existe une suite $(E_j)_{j \geq 1}$ de parties finies deux à deux disjointes de E telle que $E = \bigcup_{j \geq 1} E_j$.

(ii) Il existe $K > 0$ telle que pour tout polynôme P à spectre dans E on a

$$\sum_{j \geq 1} \|P_j\|_\infty \leq K \|P\|_\infty$$

où $P_j(x) = \sum_{n \in E_j} \hat{P}(n) e^{int}$ pour $j \geq 1$.

DEFINITION 13. Un ensemble $E \subset Z$ est un ensemble de Rosenthal si $L^\infty_E(T) = C_E(T)$.

Un ensemble de Sidon admet trivialement une partition pour la norme uniforme et est un ensemble de Rosenthal (condition (c) du § 4). H. P. Rosenthal [35] a fourni le premier un exemple d'une suite Λ d'entiers satisfaisant $L^\infty_\Lambda(T) = C_\Lambda(T)$ et n'étant pas une suite de Sidon.

Un ensemble E admettant une partition pour la norme uniforme est un ensemble de Rosenthal [70] et la réciproque est fausse [107]. Ron C. Blei [70] montre que tout ensemble d'entiers qui n'est pas de Sidon contient un sous-ensemble E qui n'est pas de Sidon mais qui admet une partition pour la norme uniforme. Les résultats [70] et [82] sont établis pour un sous-ensemble d'un groupe discret quelconque ; dans [70] on réduit le problème à celui des groupes compacts, que l'on étudie d'abord.

Le résultat précédent entraîne en particulier "l'abondance" d'ensembles de Rosenthal qui ne sont pas de Sidon. Ce dernier résultat sera retrouvé autrement dans [95], à l'aide d'une condition diophantienne déjà centrale dans [70] et [82]. En voici un exemple : si $E = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ est une suite d'entiers telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{2\pi}$ irrationnel, pour lequel $(e^{i\lambda_j a})_{j\geq 1}$ est une suite convergente, alors E est un ensemble de Rosenthal.

Abdalian [81] fait une étude des ensembles d'entiers ou réels qui admettent une partition pour la norme uniforme, appelés "ensembles de type (S)". Cette étude est centrée sur les différentes conditions fonctionnelles et arithmétiques permettant d'affirmer qu'un ensemble est de type (S). Sous des conditions du type de Hadamard (5) concernant les blocs de la partition d'un ensemble E de type (S), A. Abdalian montre que E a densité harmonique nulle. Mais des problèmes, résolus pour les ensembles de Sidon, restent ouverts dans ce cas.

QUESTION 7. La réunion de deux ensembles d'entiers admettant des partitions pour la norme uniforme admet-elle une partition pour la norme uniforme ?

QUESTION 8. Quelle est la densité harmonique d'un ensemble d'entiers admettant une partition pour la norme uniforme ?

Aux antipodes des ensembles lacunaires se trouvent les modèles introduits par Y. Meyer [53]. Les modèles sont des sortes de progressions arithmétiques à plusieurs pas. Si Λ est un modèle régulier de nombres réels, la densité harmonique de Λ est $2\pi\Delta(\Lambda)$, où $\Delta(\Lambda)$ est la densité supérieure de répartition de Λ ([78], Théorème 2). L'ensemble des nombres premiers et l'ensemble des carrés parfaits sont des modèles réguliers et leur densité harmonique est nulle [78]. Le dernier résultat peut être démontré élémentairement, mais le cas suivant est plus délicat.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel et Λ_θ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geq 1} \epsilon_k \theta^k$, où $\epsilon_k = 0$ ou 1. Lorsque θ n'est pas un nombre de Pisot (définition 6), Λ_θ n'est associé à aucun intervalle de $\mathbb{R}$ ([43], [78]). Si θ est un nombre de Pisot, Λ_θ est un modèle régulier et sa densité harmonique est nulle [78]. Ce résultat montre, en particulier, qu'il est impossible de calculer la densité harmonique en termes de densité.

Ensuite Y. Meyer détermine la densité harmonique de Λ_θ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ ([79], Théorème 8). Dans ce travail, on introduit la notion suivante.

DEFINITION 14. Soit Λ un ensemble d'entiers. La densité presque périodique de Λ, notée $d_p(\Lambda)$, est la mesure de Haar μ de la fermeture de $J(\Lambda)$ dans le compactifié de Bohr $\overline{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}$, où J est l'injection canonique de Λ dans $\overline{\mathbf{Z}}$ (μ est normalisée par $\mu(\overline{\mathbf{Z}}) = 1$).

On montre que pour toute suite Λ d'entiers rationnels

$$2\pi\Delta(\Lambda) \leq d_h(\Lambda) \leq 2\pi d_p(\Lambda) \quad (\S 1 \text{ et } [79], \text{ Proposition } 7) .$$

Une classe de sous-ensembles de $\mathbf{Z}$ pour lesquels $d_h(\Lambda) = 2\pi d_p(\Lambda)$ est fournie par le théorème 6 de [74]. Soit $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout entier $m \geq 1$, il existe une sente $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Λ telle que : (i) $\lambda_k \equiv \lambda \pmod m$ pour tout $k \geq 1$; (ii) la suite $(\alpha\lambda_k)_{k\geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 pour tout α irrationnel. Pour tout entier $m \geq 1$, soit q_m le nombre de résidus distincts, modulo m, d'entiers de Λ. Alors : $\quad d_h(\Lambda) = d_p(\Lambda) = \liminf_{m\to\infty} q_m/m$.

On détermine aussi dans [79] la densité harmonique d'un modèle assez régulier (Théorème 9) et on montre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble Λ d'entiers qui est dense dans le compactifié de Bohr de Z et dont la densité harmonique ne dépasse pas ϵ (Théorème 10).

Un autre exemple de calcul de la densité harmonique se trouve dans [78] (Théorème IV) : la densité harmonique de l'ensemble Λ des entiers rationnels sans diviseurs carrés (quadratfiée) est $6/\pi^2$.

Y. Meyer introduit dans [76] la notion d'espace de Sidon : un espace de Banach B est un espace de Sidon si, de toute suite bornée d'éléments de B, on peut extraire soit une suite convergente en norme, soit une suite équivalente à la base canonique de ℓ^1.

DEFINITION 15. Une suite bornée $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments d'un espace de Banach est équivalente à la base canonique de ℓ^1 (ou une suite de Sidon, suivant [76]) s'il existe une constante C telle que pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in C^{(N)}$ de scalaires

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \leq C \| \sum_{n\geq 1} a_n x_n \| .$$

Par exemple, si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, la suite $(e^{inx})_{n\in\Lambda}$ d'éléments de $C(T)$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 si et seulement si Λ est un ensemble de Sidon.

Dans [76], on trouve des exemples de suites et d'espaces de Sidon. En particulier, ℓ^1 et le produit tensoriel injectif $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \ell^1$ (k fois) sont des espaces de Sidon. On en déduit que si $E = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ est une suite dissociée de Z, k un entier positif et

$$(18) \qquad E_k = \{\pm \lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \pm \ldots \pm \lambda_{j_k} , \ j_1 > j_2 > \ldots > j_k\} ,$$

alors $C_{E_k}(T)$ est un espace de Sidon ([76], [104] et [141], §7).

F. Lust-Piquard [96] montre que le produit tensoriel injectif d'espaces de Sidon est un espace de Sidon.

C'est à ce moment qu'intervient le résultat fondamental de H.P. Rosenthal [87] : de toute suite bornée d'un espace de Banach, on peut extraire soit une suite équivalente à la base canonique de ℓ^1, soit une suite de Cauchy pour $\sigma(B,B')$.

Alors, les espaces de Sidon se révèlent être les espaces ayant la propriété de Schur :

DEFINITION 16. Un espace de Banach B a la propriété de Schur si toute suite convergente pour $\sigma(B,B')$ est convergente en norme.

F. Lust-Piquard ([97]) montre aussi que le produit tensoriel injectif d'un espace de Banach faiblement séquentiellement complet et d'un espace de Banach ayant la propriété de Schur est faiblement sequentiellement complet (c'est-à-dire, toute suite de Cauchy de B pour $\sigma(B,B')$ converge vers un élément de B pour $\sigma(B,B')$).

On connaissait peu d'espaces ayant la propriété de Schur, un exemple important est dû à F. Lust-Piquard ([113] et [117]) : si E est un compact dénombrable dans un groupe abélien localement compact G , l'espace PM(E) -transformé de Fourier de $C_E(\bar{\Gamma})$, où Γ est le dual de G et $\bar{\Gamma}$ le compactifié de Bohr de Γ) a la propriété de Schur.

Les ensembles de première espèce et la condition diophantienne déjà utilisée par R.C. Blei [95] sont liés à ce résultat; pour pouvoir expliciter leut utilisation, nous nous plaçons dans un cadre général. Enumérons quelques résultats de [117] :

(i) Soient G un groupe abélien métrisable et compact, Γ son dual et $E \subset \Gamma$. Si $C_E(G)$ est de première espèce, $C_E(G)$ a la propriété de Schur (lemme 2) .

(ii) Soit E un compact dénombrable ayant un seul point d'accumulation dans un groupe G abélien localement compact. Soit Gp E le groupe discret engendré par E dans G , notons $\widehat{\mathrm{Gp}\,E}$ son dual. Alors, $C_E(\widehat{\mathrm{Gp}\,E})$ est de première espèce ([117] , Théorème 2.a et [95]).

<u>Remarque</u>. L'expression "$C_E(G)$ est de première espèce" signifie que le sous-ensemble E du dual Γ discret du groupe compact G est de première espèce, c'est-à-dire : il existe $C > 0$ tel que pour tout compact d'intérieur non vide, il existe une partie finie F de E telle que pour toute fonction $f \in C_{E|F}(G)$, $\|f\|_{C(G)} \leq C \sup_{x \in K} |f(x)|$.

(iii) Soient G un groupe compact, Γ son dual et $E \subset \Gamma$. Supposons qu'il existe un homomorphisme injectif h de Γ dans un groupe abélien localement compact H tel que $h(E)$ soit inclus dans un sous-ensemble compact et dénombrable de H. Alors, $C_E(G)$ a la propriété de Schur et est égal à $L^\infty_E(G)$, c'est-à-dire, E est un ensemble de Rosenthal (Théorème 3).

Le dernier résultat généralise [95] et permet de donner des exemples dans $\mathbb{Z}$, qui incluent l'exemple original de H.P. Rosenthal ([35], [95], [117]) : soit $(d_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers positifs telle que $d_k | d_{k+1}$ pour $k \geq 1$; soit $\Lambda \subset Z$ telle que pour tout $k \geq 1$, $\Lambda \setminus (\Lambda \cap d_k Z)$ est fini ; alors, $C_\Lambda(T) = L^\infty_\Lambda(T)$ et cet espace a la propriété de Schur.

On démontre dans [117] les réciproques suivantes des résultats précédents :

(iv) Si E est un ensemble compact métrisable dans un groupe abélien localement compact tel que $PM(E)$ a la propriété de Schur, l'ensemble E est dénombrable (Proposition 3.a).

(v) Soient G un groupe abélien compact métrisable et Λ une partie de son dual. Si $L^\infty_E(G)$ a la propriété de Schur, alors $L^\infty_E(G) = C_E(G)$ (Proposition 3b, voir aussi [102]).

A notre connaissance, les questions suivantes, liées aux résultats précédents, sont ouvertes.

QUESTION 9. Si $E \subset Z$ et $C_E(T)$ a la propriété de Schur, est-ce que $C_E(T) = L^\infty_E(T)$?

QUESTION 10. Si $E \subset Z$ est un ensemble de Rosenthal, est-ce que $C_E(T)$ a la propriété de Schur ?

QUESTION 11. Si $C_E(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o, $C_E(T)$ a-t-il la propriété de Schur ?

La question suivante avait été posée par A. Pelczynski : si $C_E(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o , est-ce que $C_E(T)$ contient $C(\Delta)$, où Δ est un ensemble de Cantor ? J. Bourgain [144] vient de répondre négativement à cette question.

F. Lust-Piquard relie d'autres propriétés géométriques des espaces $C_E(T)$ et $L^1_E(T)$ aux propriétés harmoniques de E [102] : les égalités $C_E(T) = L^\infty_E(T)$ et $L^1_E(T) = M_E(T)$ (E ensemble de Riesz) caractérisent les sous-espaces invariants de $C(T)$ et $L^1(T)$, respectivement, qui ont la propriété de Radon-Nikodym (théorèmes 1 et 2) ; si $C_E(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o , alors E est un ensemble de Riesz ([102] , Théorème 4a', qui généralise le fait que tout ensemble de Rosenthal est un ensemble de Riesz [89]).

Un dernier résultat de [117] , démontré uniquement dans le cas du groupe T , a trait aux compacts associés : si E est une suite d'entiers telle que, pour $k \geq 1$, l'espace $C_{kE}(T)$ ($kE = E + \ldots + E$ k fois) ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o , alors la densité harmonique de E est nulle (Théorème 4).

L'extension de ce résultat à T^n n'est pas triviale. On l'obtient dans [101] ([141] , version détaillée), en y remplaçant l'ensemble kE , $E = \{\lambda_j , j \geq 1\}$, par l'ensemble plus mince : $E^+_k = \{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \ldots + \lambda_{j_k} , j_1 > \ldots > j_k\}$.
Cette généralisation ([101] , Théorème 1) utilise un résultat nouveau sur les compacts associés : sous certaines hypothèses, quitte à les "élargir" un peu, on peut leur enlever un voisinage d'un sous-groupe (Lemme 2 de [101]).

La démonstration du théorème 1 peut être adaptée pour fournir le résultat suivant ([101] , [141] , Théorème 2) : si $E = (\lambda_j)_{j \geq 1}$ est une suite dissociée de $\mathbf{Z}^n$, l'ensemble $E_2 = \{\pm \lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} , j_1 > j_2 \geq 1\}$ a une densité harmonique nulle. La méthode employée ne permet apparemment pas d'obtenir le résultat pour $k > 2$ et d'autres groupes que T^n .

QUESTION 12. Soit $E = (\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite dissociée d'un groupe abélien discret

Γ. Quelle est la densité harmonique de l'ensemble $E_k = \{\pm \lambda_{j_1} \pm \ldots \pm \lambda_{j_k}$, $j_1 > j_2 > \ldots > _k\}$, $k > 1$?

On rappelle que $C_{E_k}(T)$ a la propriété de Schur. Les questions suivantes sont plus ambitieuses que 12.

QUESTION 13. Soit $E \subset Z$. Si $C_E(T)$ a la propriété de Schur, est-ce-que la densité harmonique de E est nulle ? Que peut-on dire de la réciproque ?

QUESTION 14. Déterminer des conditions arithmétiques nécessaires et suffisantes sur $E \subset Z$ (E n'étant pas un ensemble de Sidon) pour que $C_E(T)$ ait la propriété de Schur.

On sait que si $C_E(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o, alors la densité supérieure de répartition de E est nulle ([125], Théorème 3).

8. LES ENSEMBLES DE SIDON A PARTIR DE 1976.

Cette période est marquée par les travaux de G. Pisier sur les processus gaussiens, les conditions d'entropie métrique liées aux séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues et leurs applications à l'analyse harmonique.

La date choisie pour reprendre l'histoire des ensembles de Sidon est liée à la question suivante, posée par G. Pisier.

Si Λ est un ensemble de Sidon d'entiers, la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ établit un isomorphisme entre les espaces de Banach $C_\Lambda(T)$ et $\ell^1(\Lambda)$. Mais, s'il existe un isomorphisme de $C_\Lambda(T)$ sur $\ell^1(\Lambda)$, qui n'est pas à priori l'isomorphisme naturel, Λ est-il un ensemble de Sidon ?

On rappelle que $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N})$

et $\quad \ell^1(\Lambda) = \{c = (c(\gamma))_{\gamma \in \Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda,\ \|c\|_1 = \sum_{\gamma \in \Lambda} |c(\gamma)| < \infty\}$.

N.Th. Varapoulos [100] a donné le premier une réponse positive à la question précédente. On trouve ensuite dans [120] une preuve plus directe, dans [109] une première généralisation et dans [144] une deuxième généralisation. Pour énoncer la première généralisation, nous rappelons la notion de cotype.

DEFINITION 17. Notons $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n : \Omega \to \{-1,1\}$ la nième fonction coordonnée (ou nème fonction de Rademacher) et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Un espace de Banach X est de <u>cotype</u> $q \geq 2$ s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de X, on a :

$$\Big(\sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int \Big\|\sum_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 d\mathbb{P}\Big)^{1/2}$$

On pourra consulter [99] pour les différents aspects de cette notion et ses relations avec le type et les propriétés purement géométriques de l'espace X.

L'espace ℓ^1 a cotype 2, et le résultat établi dans [100] admet la généralisation suivante : Λ est un ensemble de Sidon de $\mathbb{Z}$ si et seulement si $C_\Lambda(T)$ a cotype 2 [109].

Par contre, la question proche suivante, posée par G. Pisier, est toujours ouverte.

QUESTION 15. Si $C_\Lambda(T)$ a un cotype $q > 2$, Λ est-il un ensemble de Sidon ?

Tout récemment, J. Bourgain [144] a démontré que s'il existe k tel que Λ soit contenu dans la somme de k ensembles dissociés, alors la réponse est positive.

Rappelons l'affaiblissement suivant de la notion de cotype 2.

DEFINITION 18. Un espace de Banach a la <u>propriété d'Orlicz</u> si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X telle que $\sum_{n\geq 1} \pm x_n$ converge pour <u>tout</u> choix des signes $\pm$, on a $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2 < \infty$.

Un espace de Banach de cotype 2 a la propriété d'Orlicz et la réciproque n'est pas connue ([99], p. 70). Mais dans le cas particulier des espaces $C_\Lambda(T)$, la réciproque vient d'être établie par J. Bourgain [144] : si $C_\Lambda(T)$ a la propriété d'Orlicz, Λ est un ensemble de Sidon.

On trouve aussi dans [109] une démonstration d'un théorème antérieur de D. Rider [94], qui va se réveler fondamental par la suite : il s'agit d'une caractérisation des ensembles de Sidon par des propriétés des séries de Fourier aléatoires à spectre dans l'ensemble considéré. D. Rider avait utilisé des variables aléatoires de Steinhaus (la suite des fonctions coordonnées dans T^N). G. Pisier utilise les fonctions de Rademacher et pour la question relative au cotype fait appel aux variables aléatoires gaussiennes [40].

L'entrée en scène des séries aléatoires gaussiennes entraîne la solution du problème reliant les ensembles de Sidon aux ensembles $\Lambda(p)$, que nous abordons maintenant.

DEFINITION 19. Soit $p > 0$ un nombre réel. L'ensemble Λ d'entiers est un ensemble $\Lambda(p)$ s'il existe $s < p$ et une constante $K_{p,s}$ telle que, pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ, on ait :

$$\|P\|_p \leq K_{p,s} \|P\|_s .$$

W. Rudin [18] avait montré que si Λ est un ensemble de Sidon, il existe $K > 0$ telle que Λ soit un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p et $K_{p,2} \leq K\sqrt{p}$ pour $p > 2$. La réciproque n'était connue que dans le cas particulier où T est remplacé par le groupe $(Z(n))^{\mathbb{N}}$ (n premier) ; dans ce cas, elle résulte immédiatement de [32].

G. Pisier démontre que la réciproque est vraie pour tout ensemble de Sidon discret ou topologique ([110], [111]). La démonstration va être conséquence du théorème de Rider [94] et de la minoration due à X. Fernique des processus gaussiens à trajectoires bornées ([88], p. 84).

Ensuite, G. Pisier [112] étudie de plus près l'espace $C_{ps}(T)$ des séries de Fourier aléatoires gaussiennes presque sûrement continues à l'aide du théorème de Dudley-Fernique, caractérise son dual et retrouve comme application le résultat précédent.

DEFINITION 19. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes et normalisées de sorte que $\mathbb{E}\,|g_n|^2 = 1$ pour $n \geq 1$. On note $C_{ps}(T)$ l'espace des fonctions f de $L^2(T)$ telles que $\mathbb{E}\|\sum_{n\in A} g_n \hat{f}(n) e^{int}\|_\infty$ reste borné quand A décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}$. On munit cet espace de la norme :

$$\|f\|_{ps} = \sup\{\mathbb{E}\|\sum_{n\in A} g_n \hat{f}(n) e^{int}\|_\infty \,,\, A \subset \mathbb{Z} \,,\, A \text{ fini}\} .$$

$C_{ps}(T)$ muni de cette norme est un espace de Banach. Pour identifier son dual, nous rappelons la définition des espaces d'Orlicz.

Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, convexe et nulle à l'origine. La fonction Φ définit un espace d'Orlicz, noté $L^\Phi(T)$, formé des fonctions mesurables $f : T \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $c > 0$ tel que $\int_T \Phi(|\frac{f(t)}{c}|)\,dt < \infty$.

On peut munir $L^\Phi(T)$ de la norme

$$\|f\|_\Phi = \inf\{c > 0 \mid \int_T \Phi(|\frac{f(t)}{c}|) \leq \Phi(1)\} .$$

Dans toute la suite, soient $1 < p < 2 < q < \infty$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Posons $\psi_q(x) = \exp|x|^q - 1$ et $\varphi_p(x) = |x|(1 + \mathrm{Log}(1+|x|))^{1/q}$.

L'espace d'Orlicz $L^{\psi_q}(T)$ s'identifie au dual de l'espace $L^{\varphi_q}(T)$ [19].

Notons M_{2,ψ_q} l'espace des opérateurs bornés de $L^2(T)$ dans $L^{\psi_q}(T)$ qui commutent avec les translations de T, muni de sa norme naturelle. On peut construire un prédual de M_{2,ψ_q}, noté A_{2,φ_q}, de la façon suivante [61] : c'est l'espace formé des fonctions f de $L^2(T)$ de la forme $f = \sum_{n\geq 1} h_n * k_n$, avec $h_n \in L^2(T)$, $k_n \in L^{\varphi_q}(T)$, et $\sum_{n\geq 1} \|h_n\|_2 \|k_n\|_{\varphi_q} < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_{2,\varphi_q} = \inf\{\sum_{n\geq 1} \|h_n\|_2 \|k_n\|_{\varphi_q}\} ,$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de f.

G. Pisier traite dans [112] le cas où $q = 2$: il montre que $C_{ps}(T)$ s'identifie à A_{2,φ_2} et son dual à M_{2,ψ_2} ;

Le cas où $1 < p < 2$ est traité dans [123] : Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si la transformée de Fourier est bornée de $\ell^p(\Lambda)$ dans $L_\Lambda^{\psi_q}(T)$. La démonstration de ce résultat conduit à d'autres conditions équivalentes qui en particulier montrent que dans les inégalités qui caractérisent les ensembles de Sidon, il suffit de considérer des polynômes trigonométriques qui ont des coefficients ± 1 (Théorème 2.3 de [123]). Ce fait est fondamental pour les progrès accomplis sur les caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon détaillés au §6.

Dans [137], G. Pisier résume des résultats nouveaux sur les caractérisations des éléments de $C_{ps}(T)$ par des conditions d'entropie métrique, et énonce des généralisations à des processus aléatoires plus généraux que les processus gaussiens. Ensuite, il en donne des applications aux ensembles de Sidon. On y trouve des démonstrations différentes de quelques énoncés de [123] et des raffinements des conditions de [123] ainsi que les caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon les plus récentes signalées au §6 ([134], Théorèmes 2.6 et 2.11).

Pour que le lecteur puisse juger du pas franchi depuis l'établissement des conditions équivalentes définissant les ensembles de Sidon (§4, conditions (a) à (e)), nous résumons ici les principaux résultats de [112], [123] et [134].

Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Λ est un ensemble de Sidon.

(b') Il existe une constante C telle que, pour toute partie finie A de Λ

$$\|\sum_{n\in\Lambda} e^{inx}\|_{\psi_q} \leq C\sqrt{|A|}\ .$$

(c') Il existe p, $1<p<2$, et une constante C_p telle que, pour toute partie finie A de Λ : $\|\sum_{n\in\Lambda} e^{inx}\|_{\psi_q} \leq C\,|A|^{1/p}$.

(d') Il existe $\delta>0$ et une constante C tels que toute partie finie A de Λ contienne une sous-partie B vérifiant $|B| \geq \delta\,|A|$ et dont la constante de Sidon est $\leq C$.

(e') Il existe $\delta>0$ et p, $1<p<2$ tels que, pour toute partie finie A de Λ, on a :

$$\mathbb{E}\,\|\sum_{n\in A} \epsilon_n e^{inx}\| \geq \delta\,|A|^{1/p} \quad ,$$

(où $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est la suite de fonctions de Rademacher) .

(f) Il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute partie finie A de Λ , on a :

$$\mathbb{E}\,\|\sum_{n\in A} \epsilon_n e^{inx}\| \geq \delta\,|A| \quad .$$

(g) (si $0 \notin \Lambda$) Il existe un nombre $\theta < 1$ tel que, pour toute partie finie A de Λ , on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \prod_{n\in A} (1+\cos nx)\,dx < 2^{\theta\,|A|} \quad .$$

(h) (si $0 \notin \Lambda$) Il existe un nombre $\theta < 1$ tel que, pour toute partie finie A de Λ , on a :

$$\sum_{0\leq s\leq |A|} \frac{1}{2^s}\, R_s(A,0) \leq 2^{\theta\,|A|} \quad .$$

(i) Il existe des nombres $\alpha < 1$ et $\beta > 0$ tels que, pour toute partie finie A de Λ , on a :

$$m\,\{x \in T \mid \inf_{n\in A} \operatorname{Re}(e^{inx}) > \alpha\} \leq 2^{-\beta\,|A|} \quad .$$

Revenons à l'article [112] , où G. Pisier introduit une nouvelle classe d'ensembles lacunaires liés à l'espace $C_{ps_\Lambda}(T)$.

DEFINITION 20. L'ensemble $\Lambda \subset Z$ est <u>stationnaire</u> si $C_\Lambda(T) \subset C_{ps_\Lambda}(T)$.

D'après les travaux de M. Marcus et G. Pisier [124] , une série aléatoire gaussienne est presque sûrement continue si et seulement si la série de Fourier aléatoire de Rademacher associée est p.s. continue. Alors, les ensembles Λ stationnaires sont caractérisés par la propriété suivante : si $f \in L^2_\Lambda(G)$ et s'il existe un choix de signes $\epsilon_n = \pm 1$ tel que la série $\sum_{n\in\Lambda} \epsilon_n \hat{f}(n)\,e^{int}$ est la série de Fourier d'une fonction continue sur T , alors en fait presque tout choix de signes $\epsilon_n = \pm 1$ a la même propriété.

Un ensemble stationnaire ne contient pas de progressions arithmétiques arbitrairement longues ([112] , Proposition 6.1). Si Λ est un ensemble de Sidon de $\mathbb{Z}$, pour tout entier $N \geq 1$, l'ensemble Λ^N est un ensemble stationnaire de $\mathbb{Z}^N$.

Ce résultat a été généralisé par J. Bourgain [132] : le produit de deux ensembles stationnaires est stationnaire si et seulement si l'un d'eux est fini ou s'ils sont tous les deux des ensembles $\Lambda(2)$ (définition 19).

Les exemples connus d'ensembles stationnaires sont essentiellement les ensembles de Sidon, les ensembles E_k définis par (11) et leurs produits. Le problème suivant est ouvert.

QUESTION 16. Si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble stationnaire, existe-til $p \geq 1$ tel que Λ soit un ensemble $\Lambda(p)$?

Pour conclure, nous allons suivre les prolongements en géométrie des espaces de Banach d'un résultat de [123].

G. Pisier ([123], Théorème 7.1) donne l'estimation suivante du cardinal des sous-ensembles de Sidon d'une partie finie A de $\mathbb{Z}$. Soit

$$\mu = \int_{\{-1,+1\}^A} \| \sum_{n\in A} \epsilon_n(\omega)\, e^{inx}\|_\infty \, d\omega \ .$$

Alors, il existe $B \subset A$ tel que $|B| \geq \alpha \mu^2 n^{-1}$, et la constante de Sidon de B est $\leq C$ (α et C sont des constantes numériques).

Remarquons que ce résultat signifie que tout sous-espace invariant par translation de dimension finie $C_A(T)$ de $C(T)$ contient un sous-espace invariant $C_B(T)$ de dimension $\geq \alpha\mu^2 |A|^{-1}$ et dont la distance de Banach-Mazur à $\ell^1_{|B|}$ est $\leq C$.

Rappelons que $\ell^1_n = \ell^1(\{1,\dots,n\})$ et que la distance de Banch-Mazur de deux espaces de Banach E et F est : $d(E,F) = \inf \{\|T\| \, \|T^{-1}\| , T : E \to F \text{ isomorphisme}\}$.

Ensuite, V.D. Milman [132] montre qu'une propriété analogue est valable pour des fonctions $f_1,\dots,f_n$ à valeurs dans $\{-1,+1\}$ définies sur un ensemble S ; dans ce cas, pour tout $0 < \beta < 1$, on trouve $B \subset \{1,\dots,n\}$ tel que $|B| > \beta\mu^2(4n\log n)^{-1}$, le sous-espace vectoriel réel engendré par $\{f_j, j\in B\}$ étant isométrique à $\ell^1_{|B|}$. La démonstration de V.D. Milman s'appuie sur un lemme combinatoire de N. Sauer [75].

Le résultat est alors étendu à des espaces de Banach réels par J. Elton [135] sous la forme suivante : soit $0 < \delta < 1$; il existe deux constantes $C > 0$ et $c > 0$ ne dépendant que de δ telles que, pour tout espace de Banach réel B et toute suite $\{e_1, \dots e_n\} \subset B$ telle que $\|e_i\| \le 1$ pour $1 \le i \le n$ et

$$\mu = \int_{\{-1,1\}^n} \| \sum_{1 \le i \le n} \epsilon_n(\omega)\, e^{inx} \|_\infty \, d\omega \ \ge\ \delta n ,$$

alors il existe une partie $B \subset \{1,\dots,n\}$ telle que $|B| \ge cn$, et le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_i,\ i \in B\}$ soit à distance $\le C$ de $\ell^1_{|B|}$. Dans le cadre du résultat précédent [132], J. Elton montre qu'on peut obtenir B tel que $|B| \ge \beta\, \mu^2 (n \log \frac{2n}{\mu})^{-1}$, le sous-espace vectoriel réel engendré par $\{f_j,\ j \in B\}$ étant isométrique à $\ell^1_{|B|}$.

Récemment, ces résultats ont été prolongés dans deux directions. D'une part, A. Pajor [140] étend au cas complexe le théorème de J. Elton, à l'aide d'un nouveau lemme combinatoire de "type Sauer". D'autre part, G. Pisier [143] améliore les estimations précédentes de V.D. Milman et J. Elton en montrant que l'on peut prendre $|B| \ge \alpha \mu^2 n^{-1}$, α constante numérique, en utilisant les classes de Vapnik-Cervonenkis [60].

L'ensemble de ces résultats illustre bien l'intérêt que présente l'étude simultanée des problèmes concernant les ensembles lacunaires et ceux de la géométrie des espaces de Banach.

9. QUELQUES TRAVAUX PARALLELES.

Nous regroupons ici quelques résultats qui n'ont pas trouvé leur place dans le texte. Le foisonnement et la richesse d'informations sont tels que bien des résultats nous échapperons. De plus, nous avons pris le parti de nous limiter exclusivement aux ensembles de Sidon, les compacts associés et les travaux qui lui sont directement liés. C'est ainsi que nous n'avons pas cité les ensembles de Helson, qui sont pourtant les analogues compacts des ensembles de Sidon, et bien d'autres sujets importants. En voulant couvrir une large période sur un sujet précis, nous apportons peut-être un point de vue très limité sur ce qu'a été cette période : nous nous en excusons.

A. SUR LES ENSEMBLES DE SIDON ET LES COMPACTS ASSOCIES.

L'étude de la constante de Sidon des groupes ou ensembles finis est développée dans [115] , [127] et [128] .

Il est connu qu'une des définitions de la suite des fonctions de Rademacher est $r_n(t) = \mathrm{sgn}\,(\sin 2^n t)$ $(n \geq 1\ ,\ t \in T)$, et que le sous-espace de $C(T)$ engendré par $\{r_n,\ n \geq 1\}$ est isomorphe à ℓ^1 . J. Bourgain [142] établit la propriété analogue pour tout ensemble de Sidon d'un groupe discret.

Une caractérisation des ensembles de Sidon contenus dans la somme de deux ensembles dissociés disjoints se trouve dans [45] . Cet article reprend dans le cas discret les résultats fondamentaux sur les algèbres tensorielles [33] .

Autres résultats : [92] , [108] , [116] , [121] , [122] , [126] .

B. SUR LES ENSEMBLES $\Lambda(p)$.

R.C. Blu [103] a étudié des propriétés d'interpolation d'ensembles lacunaires, en particulier des ensembles $\Lambda(2)$ et leurs applications à la géométrie des espaces de Banach.

R.C. Blu [118] construit des ensembles $\Lambda(p)$ dont la constante $K_{p,2}$ (définition 10) est $0(p^a)$ et non $0(p^{a-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$. Voir aussi [130] et [137] .

C. SUR LES ENSEMBLES p-SIDON.

Soient $E \subset Z$ et $1 \leq p < 2$. L'ensemble E est p-Sidon s'il existe une constante C telle que, pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{n \in \Lambda} a_n e^{inx}$, on a

(19) $\qquad (\Sigma |a_n|^p)^{1/p} \leq C \|P\|_\infty$.

Pour $p = 1$, on retrouve la définition des ensembles de Sidon. Les exemples connus sont essentiellement les mêmes que pour les ensembles $\Lambda(p)$. Les premiers résultats sur les ensembles p-Sidon se trouvent dans [74] , [90] , [91], [104], [106].

Autres résultats : [112] (corollaire 6.1), [118] , [130] .

J. Bourgain [144] montre que si l'on a (19) avec au second membre $\|P\|_{ps}$ à la place de $\|P\|_\infty$, et si $1 < p \leqslant 4/3$, alors il existe $p' < 2$ tel que E soit p'-Sidon.

D. LIVRES.

Plusieurs livres abordent la théorie des ensembles de Sidon ou des compacts associés. Nous précisons pour certains d'entre eux l'aspect traité.

[21] Chapitre V, 5.7, Ensembles de Sidon (l'ensemble des résultats connus vers 1960 dans le cadre des groupes abéliens compacts, à l'exception de la condition des mailles).

[24] Chapitre 10, Zéros de fonctions à séries de Fourier rares ou lacunaires (théorie L^2 des compacts associés).

[36] Chapitre 15, Séries de Fourier lacunaires (une introduction assez complète à la théorie des ensembles de Sidon d'entiers et leurs applications).

[40] Chapitre VI, §3 (la condition des mailles).

[41] Chapitre V, Series lacunaires et classes quasi-analytiques (quelques propriétés des fonctions sur le cercle à spectre dans une suite lacunaire de Hadamard).

[54] Chapitre X, Séries lacunaires (ensembles de Sidon d'entiers, densité et intervalles associés à une suite d'entiers).

[55] Chapitre IX, section 37, Lacunarité dans les groupes compacts (une étude assez complète dans un cadre général non abélien).

[62] Chapitres V et VI, Ensembles de Sidon et méthodes combinatoires (quelques propriétés des ensembles de Sidon d'un groupe discret et ensembles de V-Sidon d'un produit).

[77] Chapitre VI.A, Ensembles de Sidon topologiques de nombres réels (densité harmonique et propriétés d'élargissement).

[98] Présente un panorama complet du sujet jusqu'en 1975 dans le cadre des groupes abéliens compacts.

[119] Les ensembles de Sidon interviennent dans plusieurs des problèmes traités.

[124] Chapitre VI (l'étude de l'espace $C_{ps}(G)$, G groupe compact (non abélien) et applications aux ensembles de Sidon).

10. LISTE RECAPITULATIVE DES QUESTIONS OUVERTES.

QUESTION 1. Si les suites réelles Λ_1 et Λ_2 possèdent des compacts associés et $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ est régulière, est-ce que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ possède un compact associé ? Si oui, a-t-on $d_h(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \leq d_h(\Lambda_1) + d_h(\Lambda_2)$? (§ 2)

QUESTION 2. Si Λ est un ensemble de Sidon de $\mathbb{R}$, quelles sont les propriétés de l'adhérence $\bar{\Lambda}$ de Λ dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$? $\bar{\Lambda}$ a-t-elle mesure nulle ? Peut-on avoir $\bar{\Lambda} = \bar{\mathbb{R}}$? (§ 4)

QUESTION 3. Tout ensemble de Sidon est-il réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ? (§ 6)

QUESTION 4. Un ensemble d'entiers satisfaisant à la condition des mailles est-il un ensemble de Sidon ? (§ 6)

QUESTION 5. Si $(n_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Sidon d'entiers, $(n_j^2)_{j\geq 1}$ est-elle une suite de Sidon ? (§ 6)

QUESTION 6. Si Λ est un ensemble quasi-indépendant d'entiers, Λ est-il réunion finie d'ensembles dissociés ? (§ 6)

QUESTION 7. La réunion de deux ensembles d'entiers admettant des partitions pour la norme uniforme admet-elle une partition pour la norme uniforme ? (§ 7)

QUESTION 8. Quelle est la densité harmonique d'un ensemble d'entiers admettant une partition pour la norme uniforme ? (§ 7)

QUESTION 9. Si $E \subset Z$ et $C_E(T)$ a la propriété de Schur, est-ce que $C_E(T) = L^\infty_E(T)$? (§ 7)

QUESTION 10. Si $E \subset Z$ est un ensemble de Rosenthal, est-ce que $C_E(T)$ a la propriété de Schur ? (§ 7)

QUESTION 11. Si $C_E(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o, $C_E(T)$ a-t-il la propriété de Schur ? (§ 7)

QUESTION 12. Soit $E = (\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite dissociée d'un groupe abélien discret Γ. Quelle est la densité harmonique de l'ensemble

$$E_k = \{\pm \lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \pm \ldots \pm \lambda_{j_k},\ j_1 > j_2 > \ldots > j_k\}$$

pour $k > 1$? (§ 7)

QUESTION 13. Soit $E \subset Z$. Si $C_E(T)$ a la propriété de Schur, est-ce que la densité harmonique de E est nulle ? Que peut-on dire de la réciproque ? (§ 7)

QUESTION 14. Déterminer des conditions arithmétiques nécessaires et suffisantes sur $E \subset Z$ (E n'étant pas un ensemble de Sidon) pour que $C_E(T)$ ait la propriété de Schur. (§ 7)

QUESTION 15. Si $C_\Lambda(T)$ a un cotype $q > 2$, Λ est-il un ensemble de Sidon ? (§ 8)

QUESTION 16. Si $\Lambda \subset Z$ est un ensemble stationnaire, existe-t-il $p \geq 1$ tel que Λ soit un ensemble $\Lambda(p)$? (§ 8)

On trouvera d'autres listes de questions dans les références suivantes :

[98] Page 171. La question 3 a été résolue affirmativement par G. Pisier [110] (voir § 8). La question 6 a été résolue affirmativement par J. Bourgain [136] (voir § 6). La question 1 peut être remplacée par la question 4 ci-dessus ([134], voir § 6). Des éléments de réponse à 4 se trouvent dans [136].

[119] Chapitre 13.

[123] Paragraphe 8 (la réponse à 8.3 est donnée dans [134]).

BIBLIOGRAPHIE PAR ORDRE CHRONOLOGIQUE

1872 [1] WEIERSTRASS, K. Über continuuliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Königl. Akad. Wiss. (1872), Mathematische Werke II, 71-74.

1892 [2] HADAMARD, J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. J. Math. 8 (1892), 101-186.

1918 [3] RIESZ, F. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränker Schwankung. Math. Zeitschrift 2 (1918), 312-315.

1927 [4] SIDON, S. Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute konvergenz von Fourierreihen mit Lücken. Math. Ann. 97, 675-676.

1930 [5] BANACH, S. Lakunare trigonometrische Reihen. Studia Math. II (1930), p. 212.

[6] ZYGMUND, A. On the convergence of lacunary trigonometric series. Fund. Math. 16 (1930), 90-107.

[7] ———— Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques. Studia Math. 3 (1931), 77-91.

1934 [8] PALEY, R. and WIENER, N. Fourier transforms in the complex domain. Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. (1934).

1935 [9] KACZMARZ, S. und STEINHAUS, H. Theorie der orthononalreihen. Warsaw (1935).

[10] MANDELBROJT, S. Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. Paris, Gauthier-Villars (1935).

1936 [11] INGHAM, A. E. Some trigonometrical inequalities. Math. Z. 41 (1936).

1956 [12] STECKIN, S. B. On absolute convergence of Fourier series. Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. Math. 20 (1956), p. 385.

1957 [13] KAHANE, J.-P. Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées. Ann. Inst. Fourier 7 (1957), 293-314.

1959 [14] WEISS, M. Concerning a theorem of Paley on lacunary trigonometric series. Acta Math. 102 (1959), 225-238.

[15] HEWITT, E. and ZUCKERMAN, H. S. Some theorems on lacunary Fourier series, with extensions to compact groups. Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 1-19.

[16] ZYGMUND, A. Trigonometric series I, II. Cambridge Univ. Press, 1959.

1960 [17] KAHANE, J.-P. Fonctions moyenne-périodiques dans R^p. Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1960).

[18] RUDIN, W. Trigonometric series with gaps. J. Math. Mech. 9 (1960), 203-228.

1961 [19] KRASNOSELSKII, M. A. and RUTICKII, Y. Convex functions and Orlicz spaces. Noordhof (1961), Groningen.

1962 [20] KAHANE, J.-P. Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, 79 (1962), 93-150.

[21] RUDIN, W. Fourier Analysis on Groups. Inters. Publ., N.Y., 1962.

[22] RADO, R. A combinatorial theorem on vector spaces. J. London Math. Soc. 37 (1962), 351-353.

1963 [23] KAHANE, J.-P., WEISS M. and G. On lacunary power series. Arkiv för Math. 5 (1963), 1-26.

[24] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963.

1964 [25] MELA, J.-F. Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres et points exceptionnels. Ann. Inst. Fourier 14 (1964), 533-538.

[26] HARTMAN, S. and RYLL-NARDZEWSKI, C. Almost periodic extensions of functions. Colloquium Math. 12 (1964), 23-24.

[27] KAHANE, J.-P. Lacunary Taylor and Fourier Series. Bull. Amer. Math. Soc. 10 (1964), 119-213.

1965 [28] HELSON, H. and KAHANE, J.-P. A Fourier method in diophantine problems. J. Anal. Math. 15 (1965), 87-92.

1966 [29] RIDER, D. Gap series on groups and spheres. Canad. J. Math. 18 (1966), 389-398.

[30] HARTMAN, S. and RYLL-NARDZEWSKI, C. Almost periodic extensions of functions II. Colloquium Math. 15 (1966), 79-86.

[31] KAHANE, J.-P. Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson. Colloquium Math. 15 (1966), 87-92.

1967 [32] MALLIAVIN-BRAMERET, M. P. et MALLIAVIN, P. Caractérisation arithmétique des ensembles de Helson. C. R. Acad. Sc. Paris 264 (1967), 192-193.

[33] VAROPOULOS, N. Th. Tensor algebras and harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967), 51-112.

[34] MEYER, Y. Elargissement des ensembles de Sidon sur la droite. Sém. Anal. Harm. Orsay, année 1967-68.

[35] ROSENTHAL, H. P. On trigonometric series associated with weak* closed subspaces of continuous functions. J. Math. Mech. 17 (1967), 485-490.

[36] EDWARDS, R. E. Fourier series : A modern introduction II. H. R. and Winston, N. Y. (1967).

1968 [37] MELA, J.-F. Sur les ensembles d'interpolation de C. Ryll-Nardzewski et de S. Hartman. Studia Math. 29 (1968), 167-193.

[38] MELA, J.-F. Sur certains ensembles exceptionnels en analyse de Fourier. Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 32-71.

[39] BONAMI, A. Ensembles $\Lambda(p)$ dans le dual de D^{∞}. Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 193-204.

[40] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Heath and Co., Lexington, Mass. (1968).

[41] KATZNELSON, Y. An introduction to harmonic analysis. J. Wiley, Inc., N. Y. (1968).

[42] Some Combinatorial problems in harmonic analysis. Lecture notes by D. Salinger from a course given by N. Th. Varopoulos. Summer school in Harm. Anal., Univ. Warvick (1968).

1969 [43] MELA, J.-F. Problèmes de pseudo-périodicité. Coll. Théorie des Nombres (1969, Bordeaux). Bull. Soc. Math. France, Mémoire 25 (1971), 135-141.

[44] MELA, J.-F. Approximation diophantienne et ensembles lacunaires. Bull. Soc. Math. France 19 (1969), 26-54.

[45] VAROPOULOS, N. Th. Tensor algebras over discrete spaces. J. Funct. Anal. 3 (1969), 321-325.

[46] BONAMI, A. et MEYER, Y. Propriétés de convergence de certaines séries trigonométriques. C. R. Acad. Sc. Paris 269 A (1969), 68-70.

[47] MEYER, Y. et SCHREIBER, J.-P. Quelques fonctions moyenne-périodiques non bornées. Ann. Inst. Fourier 19 (1969), 231-236.

1970 [48] DRURY, S. W. Sur les ensembles de Sidon. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 162-163.

[49] DECHAMPS-GONDIM, M. Compacts associés à un ensemble de Sidon. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 590.

[50] DECHAMPS-GONDIM, M. Sur les ensembles de Sidon topologiques. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 1247.

[51] VAROPOULOS, N. Th. Groups of continuous functions in harmonic analysis. Acta Math. 127 (1970), 109.

[52] BONAMI, A. Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. Ann. Inst. Fourier 20 (1970).

[53] MEYER, Y. Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique. Lecture notes 117, Springer-Verlag, 1970.

[54] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

[55] HEWITT, E. and ROSS, K. A. Abstract harmonic analysis. Vol. II, Heidelberg, Springer-Verlag, die Grund. der math. Wiss., Band 152, (1970).

1971 [56] VAROPOULOS, N. Th. Ensembles pics et ensembles d'interpolation pour les algèbres uniformes. C. R. Acad. Sc. Paris 272 (1971), 866.

[57] ______________ Sur la réunion de deux ensembles d'interpolation d'une algèbre uniforme. C. R. Acad. Sc. Paris 272 (1971), 950.

[58] BERNARD, A. Algèbres quotients d'algèbres uniformes. C. R. Acad. Sc. Paris 272 (1971), p. 1101.

[59] BENKE, G. Sidon sets and the growth of L^p norms. Univ. Maryland thesis (1971).

[60] VAPNIK, V. N. and CERVONENKIS, A. Y. On the uniform convergence of relative frequences of events to their probabilities. Theor. Prob. Appl. 16 (1971), 264-280.

[61] LARSEN, R. An introduction to the theory of multipliers. Springer-Verlag, Die Grund. der math. Wiss., Band 175, 1971.

[62] LINDAHL, L. A. and POULSEN, F. (ed.) Thin sets in harmonic analysis, Springer-Verlag (1979).

1972 [63] DRURY, S. W. Unions of sets of interpolation. Springer Lecture Notes 266 (1972), 23-33.

[64] HERZ, C. Durry's lemma and Helson sets. Studia Math. 42 (1972), 205-219.

[65] DECHAMPS-GONDIM, M. Ensembles de Sidon topologiques. Ann. Inst. Fourier 22 (1972).

[66] ROSS, K. A. Sur les ensembles associés à un ensemble de Sidon. C. R. Acad. Sc. Paris 275 (1972), p. 183.

[67] EDWARDS, HEWITT, E. and ROSS, K. A. Lacunarity for compact groups I. Ind. Univ. Math. J. 21 (1972).

[68] ______________ Lacunarity for compact groups II. Pacific J. Math. 41 (1972).

[69] ______________ Lacunarity for compact groups III. Studia Math. 44 (1972).

[70] BLEI, R. C. On trigonometric series associated with separable translation invariant subspaces of $L^\infty(G)$. Trans. Amer. Math. Soc. 173 (1972), p. 491.

[71] HARTMAN, S. Interpolation par les mesures diffuses. Coll. Math. 26 (1972), 339-342.

[72] KATZNELSON, Y. Suites aléatoires d'entiers. L'analyse harmonique dans le domaine complexe (Actes Table Ronde Int. CNRS, Montpellier 1972).Lecture Notes in Math., vol. 336, Springer-Verlag (1973).

[73] BENKE, G. Arithmetic structure and lacunary Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 128-132.

[74] BÖZEJKO, M. and PYTLIK, T. Some types of lacunary Fourier series. Coll. Math. 25 (1972), 117-124.

[75] SAUER, N. On the density of families of sets. J. Comb. Theory 13 (1972), 145-147.

[76] MEYER, Y. Recent advances in spectral synthesis. Conf. on Harm. Anal., Maryland 1972, Lecture notes in math. 266.

[77] ___________ Algebraic numbers and harmonic analysis. North-Holland, 1972.

1973 [78] ___________ Adèles et séries trigonométriques spéciales. Ann. Math. 97 (1973), 171-186.

[79] ___________ Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. Astérisque 1. Soc. Math. de France (1973).

[80] DECHAMPS-GONDIM, M. Interpolation linéaire approchée des fonctions bornées définies sur un ensemble de Sidon. Coll. Math. 28 (1973).

[81] ABDALIAN-FAKHIM, A. Les ensembles de type (S). Thèse de 3ème cycle. Publ. Math. d'Orsay, 1974.

[82] BLEI, R. C. On subset with associated compacts in discrete abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 453-455.

[83] ROSS, K. A. Fatou-Zygmund sets. Proc. Cambridge Phil. Soc. 73 (1973), 57-65.

[84] WELLS, B. B. Restrictions of Fourier transform of continuous measures. Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 92-94.

[85] GRAHAM, C. C. Sur un théorème de Katznelson et McGehee. C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 37-40.

1974 [86] DRURY, S. W. The Fatou-Zygmund property for Sidon sets. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 535-538.

[87] ROSENTHAL, H. P. A characterisation of Banach spaces containing ℓ^1. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 71 (1974), 2411-2413.

[88] FERNIQUE, X. Régularité des trajectoires des processus gaussiens. Springer-Verlag, Lecture notes 480 (1974).

[89] DRESSLER, R. E. and PIGNO, L. Rosenthal sets and Riesz sets. Duke Math. J. 41 (1974), 675-677.

[90] EDWARDS, R. E. and ROSS, K. A. p-Sidon sets. J. Funct. Anal. 15 (1974), 404-427.

[91] JOHNSON, G. W. and WOODWARD, G. S. On p-Sidon sets. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 161-167.

[92] BLEI, R. C. Some thin sets in discret abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 55-65.

1975 [93] DRURY, S. W. Birelations and Sidon sets. Proc. AMS 53 (1975), 123-128.

[94] RIDER, D. Randomly continuous functions and Sidon sets. Duke Math. J. 42 (1975), 759-764.

[95] BLEI, R. C. A simple diophantine condition in harmonic analysis. Studia Math. 52 (1975), 195-202 and Corrigendum and Addendum. Studia Math. 68 (1980), no. 1, 105-106.

[96] LUST (PIQUARD), F. Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon. Colloquium Math. 32 (1975), 285-289.

[97] LUST (PIQUARD), F. Produits tensoriels injectifs d'espaces faiblement séquentiellement complets. Colloquium Math. 33 (1975), 289-290.

[98] LOPEZ, J.-M. and ROSS, K. A. Sidon sets. Lecture Notes in P. and Appl. Math. 13, M. Dekker (1975).

1976 [99] MAUREY, B. et PISIER, G. Séries de variables aléatoires indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math. 58 (1976), 45-90.

[100] VAROPOULOS, N. Th. Une remarque sur les ensembles de Helson. Duke Math. J. 43 (1976), 387-390, cf. aussi Sém. Maurey-Schwartz 1976/77, exposé 12.

[101] DECHAMPS-GONDIM, M. Densité harmonique et espaces de Banach ne contenant pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o. C. R. Acad. Sc. Paris 282 (1976), p. 963.

[102] LUST-PIQUARD, F. Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz. C. R. Acad. Sc. Paris 282 (1976), p. 833.

[103] BLEI, R. C. A uniformity property for $\Lambda(2)$ sets and Grothendieck's inequality. Symposia Math., vol. 22 (Convegno sull'Analise Armonica, Rome, 1976), 321-336. Academic Press, London, 1977.

[104] BLEI, R. C. Sidon partitions and p-Sidon sets. Pacific J. Math. 65 (1976), no. 2, 307-313.

[105] WOODWARD, G. S. p-Sidon sets and a uniform property. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 995-1003.

[106] JOHNSON, G. W. Theorems on lacunary sets, especially p-Sidon sets. Studia Math. 58 (1976).

1977 [107] BLEI, R. C. Rosenthal sets that cannot be sup-norm partitioned and an application to tensor products. Colloquium Math. 37 (1977), no. 2, 295-298.

[108] GRAHAM, C. C. Associate and Pseudo-associate sets in L.C.A. groups. Coll. Math. 38 (1977), 97-101.

1978 [109] PISIER, G. Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2. Sém. sur la Géométrie des Espaces de Banach. Ecole Polytechnique, exposé no. 14 (1978).

[110] PISIER, G. Ensembles de Sidon et processus gaussiens. C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 671.

[111] ________ Lacunarité et processus gaussiens. C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), p. 1003.

[112] ________ Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues. Sém. sur la Géométrie des Espaces de Banach, Ecole Polytechnique, exposé no. 17-18 (1978).

[113] LUST-PIQUARD, F. Propriétés harmoniques et géométriques des sous-espaces invariants par translation de $L^\infty(G)$. Thèse, Publ. Math. Orsay (1978).

[114] KUELBS, J. and WOYCZYNSKI, W. A. Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 281-291.

[115] GRAHAM, C. C. The Sidon constant of a finite abelian group. Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 83-84.

[116] GRAHAM, C. C. Associate and Pseudo-associate sets in L.C.A. groups II. Colloquium Math. 40 (1978).

1979 [117] LUST-PIQUARD, F. L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur. Coll. Math. 41 (1979).

[118] BLEI, R. C. Fractional cartesian products of sets. Ann. Inst. Fourier 29 (1979), 49-105.

[119] GRAHAM, C. C. and McGEHEE, O. C. Essays in commutative harmonic analysis. Springer-Verlag (1979).

1980 [120] KWAPIEN, S. and PELCZYNSKI, A. Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups. Math. Nachrichten 94 (1980), 303-340.

[121] RAMSEY, L. T. A theorem of C. Ryll-Nardzewski and metrisable l. c. a. groups. Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 221-224.

[122] GRAHAM, C. C. and RAMSEY, L. T. Three results on I-sets. Preprint 1980.

1981 [123] PISIER, G. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. Math. Anal. and Appl., Part B, Advances in Math. Suppl. studies, vol. 7B (1981).

[124] MARCUS, M. and PISIER, G. Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Annals of Math. Studies 101 (1981), Princeton Univ. Press.

[125] LUST-PIQUARD, F. Eléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(\Gamma)$. Studia Math. 69 (1981).

[126] GRAHAM, C. C. Mappings that preserve Sidon sets in R. Arkiv för Matematik 19 (1981), 217-221.

[127] CARTWRIGHT, D. I., HOWLETT, R. B. and McMULLEN, J. R. Extreme values for the Sidon constant.

[128] GRAHAM, C. C. and RAMSEY, L. T. Sidon sets with extremal Sidon constants. Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 522-526.

[129] BOURGAIN, J. Communication orale.

[130] BLEI, R. C. and KÖRNER, T. W. Combinatorial dimension and random sets. Preprint.

1982 [131] MILMAN, V. D. Some remarks about embeddings of ℓ_1^k in finite dimensional spaces. Israël J. Math. 43 (1982), 129-138.

[132] BOURGAIN, J. Une remarque sur les ensembles stationnaires. Publ. Math. d'Orsay 83-01, exposé no. 2, 1981-1982.

[133] RAMSEY, L. T. and WELLS, B. B. Interpolation sets in bounded groups. Preprint.

[134] PISIER, G. Conditions d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon. Proc. Conf. on modern topics in harmonic analysis (Torino-Milano 1982). Preprint.

[135] ELTON, J. Sign-embeddings of ℓ_1^n. Preprint.

[136] BOURGAIN, J. Propriétés de décomposition pour les ensembles de Sidon. Preprint (à paraître au Bull. Soc. Math. France).

[137] BLEI, R. C. A paraître.

1983 [138] PISIER, G. Arithmetic characterization of Sidon sets. Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), 87-89.

[139] BOURGAIN, J. Sur les ensembles d'interpolation pour les mesures discrètes. C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983), p. 149.

[140] PAJOR, A. Plongement de ℓ_1^n dans les espaces de Banach complexes. C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983).

[141] DECHAMPS-GONDIM, M. Densité harmonique et espaces de Banach invariants par translation ne contenant pas c_0. Publ. Math. Orsay, à paraître.

[142] BOURGAIN, J. ℓ^1 sequences generated by Sidon sets. J. London Math. Soc., à paraître.

[143] PISIER, G. Remarques sur les classes de Vapnik-Cervonenkis, à paraître.

[144] BOURGAIN, J. Communication orale.

No. d'impression 644
1er trimestre 1984