

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

N° 82.08

**PROBLEMES DE PLASTICITE ET DE RUPTURE**

(Cours d'option D.E.A. d'Analyse Numérique et Applications, 1980-81)

**NGUYEN QUOC SON**

Maître de Recherche au C.N.R.S.

**Université de Paris-Sud**

**Département de Mathématique**

**Bât. 425**

**91405 ORSAY France**

Codes Matière AMS (1980) : 73 B 99  
73 C 99  
73 E 20

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

N° 82.08

**PROBLEMES DE PLASTICITE ET DE RUPTURE**

(Cours d'option D.E.A. d'Analyse Numérique et Applications, 1980-81)

**NGUYEN QUOC SON**

Maître de Recherche au C.N.R.S.

**Université de Paris-Sud**  
**Département de Mathématique**

**Bât. 425**

**91405 ORSAY France**

## AVANT-PROPOS

Ce texte est une introduction à la théorie de la plasticité et de la rupture. L'accent est mis sur la présentation des problèmes aux limites ou des problèmes d'évolution posés dans ce cadre. Pour cette raison, les aspects physiques de la déformation ne seront pas abordés. De même, dans un souci de simplification maximale, des problèmes plus difficiles concernant la transformation finie, l'écriture des lois de comportement en transformation finie, les problèmes dynamiques, ... sont laissés de côté.

Il représente un cours d'option du D.E.A. d'Analyse Numérique et Applications (Orsay, 1980-1981), mais il ne s'agit pas d'un cours de Mathématiques. Il a été rédigé afin d'assurer aux Etudiants une connaissance globale des problèmes classiques ou actuels de la Mécanique des Solides.

Nous pensons qu'il pourrait intéresser aussi un public plus étendu, comprenant en particulier les chercheurs, les ingénieurs en Mécanique comme en Mathématiques Appliquées.

*La réalisation matérielle de ce texte est due au dévouement de Mme L. Quéru.*

## PROBLÈMES DE PLASTICITÉ ET DE RUPTURE

- I DEFORMATION ET CONTRAINTE
- II LOI DE COMPORTEMENT
- III PROBLEMES ELASTIQUES
- IV PROBLEMES ELASTOPLASTIQUES
- V EXEMPLES
- VI ANALYSE LIMITE
- VII NOTION DE L'ECROUISSAGE
- VIII PRINCIPE DE LA RESOLUTION NUMERIQUE
- IX MECANIQUE DE LA RUPTURE
- X MECANIQUE DE LA RUPTURE (suite)

## CHAPITRE I

### DÉFORMATION ET CONTRAINTE

On rappelle dans ce chapitre les notions élémentaires de déformation et de contrainte dans un milieu continu quelconque, solide ou fluide. Le principe fondamental de la Mécanique est rappelé. L'hypothèse de petite transformation est considérée, en vue des problèmes pratiques en Mécanique des Solides.

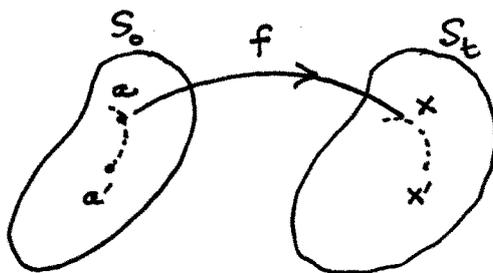
L'objet de la Mécanique est l'étude du mouvement des systèmes de points matériels. Dans un mouvement, les points matériels d'un système se déplacent par rapport à un repère de référence fixe. Si leurs distances relatives restent constantes, il s'agit d'un mouvement de corps rigide. Souvent, pour les milieux continus, les distances varient avec le temps : on dit que le système se déforme. La description de la déformation est la base de la Mécanique des Milieux Continus.

## 1.- TRANSFORMATION DE MILIEU CONTINU. TENSEUR DEFORMATION

### 1.1- Tenseur déformation :

-----

Soit un système de milieu continu en mouvement dans l'espace, défini par sa position  $S_t$  à l'instant  $t$ . Pour étudier sa déformation, il est nécessaire de choisir une configuration de référence  $S_0$  qui est par exemple sa position à l'instant  $t_0$ . Un point matériel occupant la position  $a$  à l'instant  $t_0$  vient en  $X$  à l'instant  $t$ . La correspondance  $f : a \rightarrow X$  définit la transformation du milieu de l'instant  $t_0$  par rapport à l'instant  $t$ . La connaissance des fonctions  $x = x(a, t)$  décrit l'évolution du système. Les fonctions  $u(a, t) = x(a, t) - a$  sont des déplacements.



*Transformation de milieu continu.*

Si on suppose que la transformation respecte la continuité de la matière, c'est-à-dire qu'il n'y a ni interpénétration, ni formation de trous, les fonctions  $x(a, t)$  sont dérivables, la matrice des dérivées :

$$(1) \quad F_{ij}(a,t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}(a,t) \quad (\text{notation}) = x_{i,j}(a,t) = u_{i,j}(a,t) + \delta_{ij} \quad ,$$

appelée gradient de la transformation, vérifie nécessairement :

$$(2) \quad \det | F | > 0 \quad .$$

La déformation est caractérisée par l'évolution de la distance  $|aa'|$  entre deux points matériels quelconques. Si  $a'$  est très proche de  $a$ , en notant  $da = aa'$ ,  $dx = xx'$

$$(3) \quad dx_i = x_{i,j} da_j \quad .$$

On appelle tenseur déformation au point  $a$  la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $\varepsilon(da, da)$  définie par :

$$(4) \quad 2 \varepsilon(da, da) = |dx|^2 - |da|^2 = \left[ x_{i,j} x_{i,k} - \delta_{jk} \right] da_j da_k \quad .$$

Il en résulte que  $\varepsilon(u, V) = \varepsilon_{ij} u_i V_j$  avec :

$$(5) \quad 2 \varepsilon_{ij} = x_{k,i} x_{k,j} - \delta_{ij} = F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij} = 2 \varepsilon_{ji} \quad .$$

En fonction des composantes  $u_i(a,t)$  du vecteur déplacement  $u(a,t)$ , on obtient :

$$(6) \quad 2 \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \quad .$$

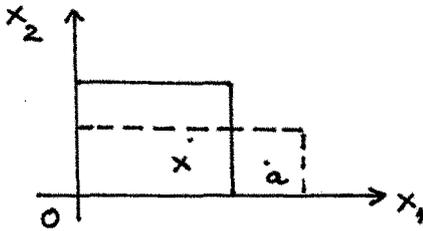
Le tenseur déformation  $\varepsilon$  est susceptible de représenter une bonne mesure de la déformation du système. Dans un mouvement de corps rigide, on a  $|dx| = |da| \forall a$  donc  $\varepsilon = 0$  en tout point  $a$ . Réciproquement, pour un système tridimensionnel, la nullité du tenseur déformation en tout point implique que le système ne se déforme pas. En effet, il suffit de démontrer alors que  $|aa'| = |xx'|$  pour deux points  $a, a'$  quelconques du système. La démonstration, très simple, est laissée au lecteur à titre d'exercice.

## 1.2- Exemples :

- Extension simple :

$$x_i = (1 + \lambda_i) a_i ,$$

$$u_i = \lambda_i a_i$$



$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

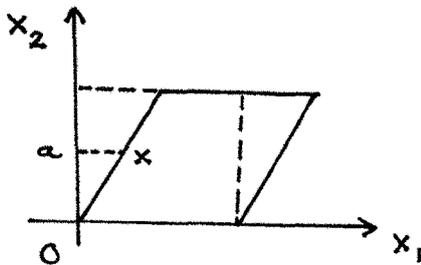
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{\lambda_3^2}{2} \end{bmatrix}$$

- Glissement simple :

$$x_1 = a_1 + \alpha a_2$$

$$x_2 = a_2$$

$$x_3 = a_3$$



$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

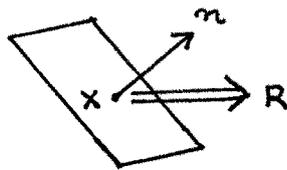
## 2.- TENSEUR CONTRAINTE - LOI FONDAMENTALE DE LA MECANIQUE

---

### 2.1- Tenseur contrainte :

---

Soit  $X$  un point quelconque du volume actuel  $S_t$ . Un élément de surface  $dS$  de normale  $n$  au point  $x$  permet de séparer par la pensée le milieu



continu en deux milieux (1) et (2). Au point  $X$ , les particules du milieu (1) exercent sur les particules du milieu (2) une densité surfacique de force  $R[n]$ , appelée le vecteur contrainte dans la direction  $n$ . Le postulat des

forces consiste à admettre que l'application  $n \rightarrow R[n]$  est une application linéaire, i.e. il existe un tenseur du second ordre  $\sigma_{ij}(X,t)$  tel que :

$$(7) \quad R_i[n] = \sigma_{ij} n_j \quad \text{ou} \quad R[n] = \sigma \cdot n \quad (\text{notation intrinsèque}) \quad ,$$

$\sigma$  est le tenseur contrainte.

### 2.2- Loi fondamentale de la Mécanique :

---

La loi fondamentale de la Mécanique traduit l'équilibre dynamique d'un système quelconque de particules.

Pour un milieu continu, si  $V$  désigne un volume quelconque  $\rho(X, t)$  la masse volumique,  $\gamma(X, t)$  l'accélération de la particule au point  $X$ , à l'instant  $t$ , la loi fondamentale s'énonce de la manière suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t, \forall V, \text{ les torseurs des efforts extérieurs } \{ F_e \} \text{ et le torseur} \\ \text{des quantités d'accélération } \left\{ \int_V \rho \gamma dV \right\} \text{ sont équivalents.} \end{array} \right.$$

Les efforts extérieurs se composent des efforts de contact sur la frontière  $\partial V$  et éventuellement des efforts à distance  $f(X, t)$  par unité de masse. Le torseur des efforts extérieurs est alors le torseur :

$$\left\{ \int_V \rho f dV + \int_{\partial V} \sigma \cdot n dS \right\} .$$

L'équivalence des deux torseurs implique d'une part l'équilibre des deux forces résultantes :

$$(9) \quad \int_V \rho \vec{f} \, dV + \int_{\partial V} \sigma \cdot \vec{n} \, ds = \int_V \rho \vec{\gamma} \, dV \quad ,$$

d'autre part, l'équilibre des moments résultants :

$$(10) \quad \int_V \vec{Ox} \wedge \rho \vec{f} \, dV + \int_{\partial V} \vec{Ox} \wedge \sigma \cdot \vec{n} \, ds = \int_V \vec{Ox} \wedge \rho \vec{\gamma} \, dV \quad .$$

La relation (9) donne,  $\forall V$ , par la formule de Stokes :

$$\int_V \left[ \sigma_{ij,j} + \rho (f_i - \gamma_i) \right] \, dV = 0 \quad ,$$

soit :

$$(11) \quad \text{Div } \sigma + \rho (f - \gamma) = 0 \quad \forall X, \forall t \quad .$$

Compte-tenu de (11), la transformation de (10) par la formule de Stokes conduit aux relations de symétrie :

$$(12) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad ,$$

le tenseur contrainte est donc symétrique.

### 2.3- Equation des puissances virtuelles :

-----

Soit  $\delta u(X)$  un champ de vecteurs quelconques, défini sur  $S_t$  et suffisamment régulier. Si on multiplie scalairement (11) par  $\delta u$ , l'intégration par parties dans un volume  $V$  quelconque donne l'équation :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, dV + \int_V -\rho \gamma \cdot \delta u \, dV + \int_V \rho f \cdot \delta u \, dV + \int_{\partial V} R \cdot \delta u \, ds = 0 \\ \forall V, \forall t, \forall \delta u \quad , \end{array} \right.$$

dans laquelle :

$$(14) \quad \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad .$$

Le champ  $\delta u$  est appelé une vitesse de déplacement virtuel,  $\delta \epsilon$  la vitesse de déformation virtuelle associée. L'équation (13) est l'équation des puissances virtuelles,  $\delta W_i = - \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$  est la puissance virtuelle des efforts intérieurs,

$\delta W_j = \int_V -\rho \gamma \cdot \delta u dV$  est la puissance virtuelle des efforts d'inertie,

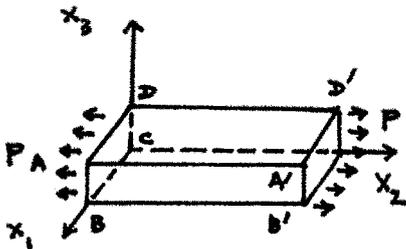
et  $\delta W_e = \int_V \rho f \cdot \delta u dV + \int_{\partial V} R \cdot \delta u ds$  est la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

*Exercice :*

Montrer que (13)  $\Leftrightarrow$  (11) + (7), l'équation des puissances virtuelles traduit sous forme "énergétique" la loi fondamentale de la Mécanique :

$$\delta W_i + \delta W_j + \delta W_e = 0 \quad \forall t, \forall V, \forall \delta u .$$

2.4- Exemples :



Un parallélépipède est en équilibre sous les tractions uniformes  $p$  appliquées aux deux extrémités, les surfaces latérales sont libres. Ecrire les équations que doivent vérifier les contraintes  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ . Que peut-on dire de  $\sigma$  si sa répartition est supposée uniforme ?

Les équations d'équilibre (11) s'écrivent dans le volume  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{array} \right. .$$

Les équations (13) donnent les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{22} = p \quad \text{sur ABCD et A'B'C'D'} \\ \sigma_{12} \quad \sigma_{31} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{sur BB'C'C et AA'D'D} \\ \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{sur ABB'A et DCC'D'} \end{array} \right.$$

Si la répartition de contrainte est supposée uniforme, les équations (11) sont identiquement vérifiées, les conditions aux limites montrent que  $\forall X$ , on a  $\sigma_{22} = p$ , les autres composantes sont nulles.

## 2.5- Bilan de l'énergie mécanique :

-----

Si la vitesse des particules  $v(x,t)$  est suffisamment régulière, on peut prendre en particulier  $\delta u = v$ . En introduisant le tenseur vitesse de déformation  $d$  définie à partir du champ de vitesse par

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad ,$$

on obtient pour tout volume matériel  $V$  :

$$(15) \quad - \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV - \int_V \rho \gamma \cdot v dV + \int_V \rho f \cdot v dV + \int_{\partial V} R \cdot v ds = 0 \quad .$$

Cette équation traduit le bilan d'énergie mécanique  $dW_i + dW_j + dW_e = 0$ , la puissance fournie par l'extérieur compense la variation de l'énergie cinétique et la puissance de déformation.

3.-

## EQUATIONS DU MOUVEMENT

NECESSITE DE RELATIONS SUPPLEMENTAIRES TRADUISANT LA LOI  
DE COMPORTEMENT DU MATERIAU

## 3.1- Equation de continuité :

Au cours du mouvement, la masse des particules se conserve. Si on considère les particules occupant à l'instant  $t$  un volume  $V$  quelconque, la masse totale est :  $M = \int_V \rho \, dV$ . La conservation de la masse, s'écrit quel que soit  $V$  :

$$0 = \frac{dM}{dt} = \underset{\text{notation}}{\dot{M}} = \int_V \rho_{,t} \, dV + \int_{\partial V} \rho \, v \cdot n \, dS \quad ,$$

d'où l'équation de continuité :

$$(16) \quad \rho_{,t} + \operatorname{div}(\rho v) \quad \text{ou encore} \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad ,$$

$v(x,t)$  désigne la vitesse,  $\dot{\rho} = \rho_{,t} + v_i \rho_{,i}$  est la dérivée particulaire (dérivée par rapport au temps en suivant la particule dans son mouvement).

## 3.2- Equations du mouvement :

Le mouvement du système  $S$  est déterminé par la connaissance des déplacements  $u(a,t)$ .

D'une manière plus générale, l'évolution du système est caractérisée par sa position (les déplacements  $u$ ) et son état mécanique (masse volumique  $\rho$ , déformation  $\varepsilon$ , contrainte  $\sigma$ ) soit au total seize fonctions inconnues, en tenant compte de la symétrie des tenseurs déformation et contrainte.

On dispose de six équations (6) donnant les composantes du tenseur déformation en fonction du déplacement, trois équations d'équilibre dynamique (11) et l'équation de continuité (16), au total dix équations. Il manque six équations reliant les tenseurs contrainte et déformation.

Ces relations traduisent les propriétés physiques du matériau. Elles dépendent du milieu considéré : le bois ou l'acier par exemple présentent deux comportements de solide différent. Elles ne peuvent être précisées qu'à partir des études expérimentales sur les matériaux, par contraste avec des équations (11) et (16) qui sont universelles.

On les écrit schématiquement sous la forme :

$$\sigma = F \{ \dots \} ,$$

dite loi de comportement du matériau. Ce sont souvent des relations complexes faisant intervenir toute l'histoire de la déformation.

Dans le cas général, les équations à résoudre pour déterminer l'évolution du système  $S$  sont très difficiles pour différentes raisons :

- L'équation d'équilibre (11) est écrite sur la configuration actuelle  $S_t$ , qui est l'inconnue du problème. On peut la transporter sur la configuration  $S_0$ , mais elle devient plus complexe.
- La présence des termes quadratiques dans (6) est une source de difficultés, même avec des lois de comportement les plus simples.

#### 4.- HYPOTHESE DES PETITES TRANSFORMATIONS

---

La plupart des solides, dans les conditions usuelles d'utilisation, ne subissent que des petites transformations.

Le déplacement  $u(a,t)$  reste petit par rapport à une longueur de référence  $L$ , les gradients du déplacement  $u_{i,j}(a,t)$  sont aussi petits, ne dépassant pas quelques centièmes. Les approximations suivantes sont donc bien justifiées :

- Le volume  $S_t$  est assimilé à  $S_0$ ,  $\forall t$ .
- Dans (6), les termes quadratiques sont négligés :

$$(17) \quad 2 \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad .$$

L'évolution du système est alors décrite par des fonctions  $u(X,t)$ ,  $\varepsilon(X,t)$ ,  $\sigma(X,t)$  définies sur un volume donné  $S_0$ . La masse volumique, d'après (16), est considérée comme une constante  $\rho(X)$ .

- *Exercice : Conditions de compatibilité de déformation :*  
 -----

Les relations (17) montrent que les six fonctions  $\varepsilon_{ij}$  ne sont pas indépendantes. Montrer qu'elles doivent vérifier les conditions suivantes :

$$(18) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

dites conditions de compatibilité. Ces six équations (18) se réduisent d'ailleurs à trois relations indépendantes.

**CHAPITRE II****LOI DE COMPORTEMENT**

On développe l'écriture des lois de comportement des solides en petites transformations. La déformation s'effectue toujours avec des échanges thermiques, une description satisfaisante des lois de comportement doit nécessairement se faire en liaison avec la Thermodynamique. On montre que généralement une loi de comportement s'obtient à partir de la donnée de deux potentiels : le potentiel thermodynamique (énergie libre) et le potentiel de dissipation. Les modèles de solide linéairement élastique et de solide élastique parfaitement plastique sont décrits.

L'expérience montre que la déformation est toujours accompagnée d'échanges thermiques ou de variations de température. Même si l'effet thermique est souvent négligeable dans le cas des solides, les matériaux usuels subissent une transformation irréversible dès qu'on impose une petite déformation. Il en résulte qu'une description satisfaisante des lois de comportement s'effectue nécessairement dans le contexte de la thermodynamique macroscopique. On constate aussi que ce cadre permet de décrire des lois de comportement de la manière la plus complète.

## 1.- THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

### 1.1- Premier et Second principes :

La déformation d'un milieu continu est une transformation thermodynamique particulière. Elle est en accord avec les deux principes de la thermodynamique qui, comme la loi fondamentale de la Mécanique, ont une validité universelle.

Pour un système quelconque  $V$ , on rappelle que le premier principe est un bilan de l'énergie.

Si  $U$  désigne l'énergie interne du système,  $C$  l'énergie cinétique,  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs et  $P_{cal}$  la puissance calorifique reçue, on a :

$$(1) \quad \dot{U} + \dot{C} = P_e + P_{cal} \quad .$$

Pour un milieu continu, on a par définition lorsque l'évolution est régulière :

$$\begin{aligned}
 P_e &= \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial V} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \, ds \\
 P_{\text{cal}} &= \int_{\partial V} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds \\
 C &= \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 \, dV & U &= \int_V \rho e \, dV
 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{f}$  désigne les efforts massiques,  $\mathbf{R}$  le vecteur contrainte,  $\mathbf{q}$  le vecteur flux de chaleur,  $\mathbf{v}$  la vitesse de déplacement et  $e$  la densité massique d'énergie interne.

La densité d'énergie interne  $e$  est fonction des variables d'état du matériau : température  $T$ , variables internes  $\chi$ . Ce sont des variables caractérisant son état physique interne (de déformation, ...).

La notion d'entropie massique  $s(\chi, T)$  permet d'énoncer le second principe sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$(2) \quad \dot{\mathbf{S}} + \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dV \geq 0 \quad ,$$

où  $\mathbf{S}$  est l'entropie du système  $\mathbf{S} = \int_V \rho s \, dV$  .

Si le premier principe peut être interprété comme une possibilité de la transformation de la chaleur en travail mécanique et vice-versa, le second principe introduit une distinction entre une transformation réversible (égalité (2)) et une transformation irréversible (inégalité (2)).

On peut exprimer localement en chaque point les deux principes en transformant les relations (1) et (2) par la formule de Stokes. Lorsque la vitesse est suffisamment régulière dans  $V$ , en prenant  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v}$ , l'équation I(13) donne le bilan de l'énergie mécanique :

$$(3) \quad P_e = \dot{C} + \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} \, dV \quad ,$$

de sorte qu'on obtient :

$$\begin{aligned}
 \rho \dot{e} &= \sigma_{ij} v_{i,j} - \text{div } \mathbf{q} \\
 (4) \quad \rho T \dot{s} + \text{div } \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad } T &\geq 0 \quad .
 \end{aligned}$$

## 1.2- Dissipation intrinsèque - Dissipation thermique :

---

La quantité  $D = \rho T \dot{s} + \text{div } q$  est par définition la dissipation intrinsèque,  $D' = -\frac{q}{T} \cdot \text{grad } T$  est la dissipation thermique, on admet souvent une forme plus restrictive du second principe en admettant que les dissipations  $D$  et  $D'$  sont séparément positives :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \rho T \dot{s} + \text{div } q \geq 0 \\ D' = -\frac{q}{T} \cdot \text{grad } T \geq 0 \end{array} \right. ,$$

soit la positivité de la puissance intrinsèque dissipée  $D$  et la condition intuitive de propagation de la chaleur d'un point chaud à un point froid. Si  $D = 0$ , la dissipation est purement thermique, en particulier si la transformation est aussi isotherme ( $T = T_0$ ), l'évolution mécanique est entièrement réversible.

Il est commode d'introduire l'énergie libre  $W(\chi, T)$  définie à partir de l'énergie interne par la relation  $W = e - T S$ . L'équation (4) donne alors :

$$D = \sigma_{ij} v_{i,j} - \rho (\dot{e} - T \dot{s}) = \sigma_{ij} v_{i,j} - \rho (\dot{W} + S \dot{T}) .$$

On admet toujours, avec Helmholtz, que l'on peut imposer des variations arbitraires de température pour un système en équilibre mécanique ( $D = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\chi = 0$ ). Il en résulte que :

$$(6) \quad S = -\frac{\partial W}{\partial T}(\chi, T) \quad , \quad T = \frac{\partial e}{\partial S}(\chi, S) .$$

La puissance intrinsèque dissipée  $D$  s'écrit alors d'une façon simple à partir des forces associées aux variables d'état  $\chi$  :

$$(7) \quad X = \rho \frac{\partial W}{\partial \chi} \quad ,$$

sous la forme :

$$(8) \quad D = \sigma_{ij} v_{i,j} - X \cdot \dot{\chi} \geq 0 .$$

Sous forme globale, on introduit la puissance intrinsèque dissipée globale  $D_p$  dans un volume quelconque  $V$  :

$$D_p = \int_V D \, dV \quad ,$$

pour énoncer la positivité de la puissance intrinsèque sous la forme :

$$(9) \quad \forall V \quad D_p = P_e - \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( W + \frac{1}{2} v^2 \right) dV - \int_V \rho S \dot{T} dV \geq 0 \quad .$$

En particulier, si la transformation est isotherme :

$$\forall V \quad , \quad D_p = P_e - \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( W(\chi, T_0) + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \geq 0 \quad .$$

Si la transformation est isentropique :

$$\forall V \quad , \quad D_p = P_e - \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( e(\chi, S_0) + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \geq 0 \quad .$$

D'une façon évidente, la séparation de la dissipation n'a de sens que si les fonctions  $T\dot{S}$  et  $-\frac{q}{T} \text{grad} T$  sont bien définies. Dans les problèmes de propagation d'onde de choc par exemple, les fonctions  $T$  et  $S$  sont discontinues à la traversée de l'onde, on doit revenir à l'expression générale (2) du second principe.

### 1.3- Equation thermique :

-----

L'équation thermique découle de la définition de la puissance intrinsèque. On obtient :

$$(10) \quad \text{div } q + \rho T\dot{S} - D = 0 \quad \forall x, \forall t \quad .$$

Si la loi de conduction de Fourier est admise  $q = -k \cdot \text{grad} T$ , on a alors l'équation thermique habituelle :

$$(11) \quad -k \Delta T + \rho T\dot{S} - D = 0 \quad ,$$

dans laquelle  $D$  et  $\rho T\dot{S}$  apparaissent respectivement comme des sources chaude et froide réparties dans le volume  $V$ . Comme  $\dot{S}$  et  $D$  dépendent de l'évolution mécanique, la présence de ces termes traduit le couplage thermomécanique au niveau de l'équation thermique.

2.-

## MODELES USUELS

POTENTIEL THERMODYNAMIQUE ET POTENTIEL DE DISSIPATION

*Le matériau a un comportement mécanique réversible si la dissipation intrinsèque est identiquement nulle, irréversible dans le cas contraire.*

*Le choix des variables d'état  $X$  provient des observations, des descriptions et des vérifications expérimentales. De cette manière, on obtient des modèles destinés à caractériser d'une façon plus ou moins convenable les matériaux usuels.*

## 2.1- Modèles usuels de fluide :

Une particule de fluide a souvent un mouvement très complexe, il est pratiquement sans intérêt de connaître son origine. On se limite donc dans l'étude des fluides à la détermination des champs de vitesse  $v(x, t)$ .

Pour un fluide compressible, l'énergie libre  $W$  ne dépend que de la masse volumique  $\rho$  et de la température  $T$  soit  $W = W(\rho, T)$ . L'équation de continuité I(16) qui s'écrit encore  $\dot{\rho}/\rho + \text{div } v = 0$  conduit à l'expression suivante de la puissance intrinsèque dissipée :

$$D = \sigma_{ij} v_{i,j} + \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} v_{k,k} \geq 0 \quad .$$

- Pour un fluide parfait, la dissipation intrinsèque est identiquement nulle, quelle que soit la distribution de vitesse  $v$ . Il en résulte que :

$$(12) \quad \sigma_{ij} = - \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = - p \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad p = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \quad .$$

La quantité  $p$  est la pression moyenne du fluide, l'équation (12) est l'équation d'état.

Par exemple, l'équation d'état d'un gaz idéal, parfait est  $p = \rho R T$ .

■ Pour un fluide visqueux, la dissipation n'est pas nulle. En décomposant la contrainte sous la forme

$$(13) \quad \sigma = \sigma^R + \sigma^{IR} \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij}^R = -p \delta_{ij} ,$$

on obtient

$$D = \sigma_{ij}^{IR} V_{i,j} = \sigma_{ij}^{IR} d_{ij} \quad \text{avec} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) .$$

Le tenseur  $d_{ij}$  est appelée la vitesse de déformation.

La loi de comportement d'un fluide visqueux est complètement définie dès qu'on connaît une relation entre les tenseurs  $d_{ij}$  et  $\sigma_{ij}^{IR}$ . Par exemple, pour un fluide Newtonien, cette relation s'écrit :

$$(14) \quad \sigma_{ij}^{IR} = \zeta (d_{kk}) \delta_{ij} + 2\eta d_{ij} ,$$

$\zeta$  et  $\eta$  désignent deux coefficients de viscosité. Si  $D(d_{ij})$  désigne la fonction  $D = \frac{1}{2} \zeta (d_{ii})^2 + \eta d_{ij} d_{ij}$ , la relation (14) s'écrit aussi :

$$(15) \quad \sigma_{ij}^{IR} = \frac{\partial D}{\partial d_{ij}} .$$

La loi de comportement d'un fluide visqueux, Newtonien est donc complètement précisée dès que les deux fonctions  $W(\rho, T)$  et  $D(d)$  sont connues. On les appelle respectivement potentiel thermodynamique et potentiel de dissipation.

## 2.2- Modèles usuels de solide :

-----

L'identification des variables d'état pour un solide est relativement facile lorsque l'on fait l'hypothèse des petites transformations. L'énergie libre  $W$  dépend au moins de la déformation  $\varepsilon$ . D'autres variables physico-chimiques pourraient aussi intervenir dans le processus de déformation, elles sont qualifiées de variables cachées  $\alpha$ . L'introduction des variables cachées est naturelle, car elles ont souvent une signification physique précise : concentrations dans un mélange, indice du vide dans un sol, ... Ces variables varient au cours d'une transformation irréversible et doivent être prises en compte dans l'expression de la dissipation.

Les modèles les plus utilisés de solide sont :

• Solide élastique :

Un solide est élastique si l'énergie libre ne dépend que de la déformation  $\varepsilon$  (en dehors de la température) et si le matériau est réversible.

D'après la définition  $W(\varepsilon, T)$  doit vérifier  $D = \sigma_{ij} V_{i,j} - \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0$   
 $\forall \dot{\varepsilon}$ . Il en résulte que :

$$(16) \quad \sigma = \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (\varepsilon, T) .$$

L'énergie étant toujours régulière, il existe alors une relation bi-univoque entre les tenseurs contrainte et déformation pour les matériaux élastiques.

Un développement de l'énergie au second ordre par rapport à  $\varepsilon$  et  $\tau = T - T_0$  autour d'un état de référence  $(0, T_0)$  sans contrainte, conduit au modèle de thermo-élasticité linéaire. Par exemple, si le matériau est isotrope :

$$(17) \quad \rho W(\varepsilon, \tau) = \rho W_0 - \rho S_0 \tau + \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) - \\ - 3 K \alpha \tau \varepsilon_{kk} - \frac{c}{2T_0} \tau^2 ,$$

dans lequel  $3 K = 3 \lambda + 2\mu$  est le module de compression,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique,  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients élastiques,  $c$  la chaleur volumique à déformation constante.

• Solide visco-élastique :

Un comportement visqueux correspond à une dissipation intrinsèque fonction de la vitesse des variables d'état.

D'une manière générale, on admet que  $W = W(\varepsilon, \alpha, T)$ . Si l'on note les forces associées par :

$$(18) \quad \sigma_{ij}^R = \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} , \quad A = - \rho \frac{\partial W}{\partial \alpha} , \quad \sigma = \sigma^R + \sigma^{IR} ,$$

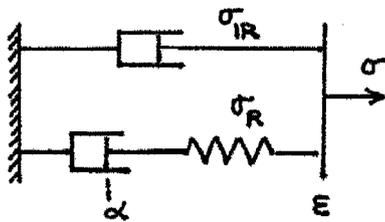
La dissipation intrinsèque  $D$  s'écrit :

$$(19) \quad D = \sigma_{ij}^{IR} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} + A \cdot \dot{\alpha} \quad .$$

La loi de comportement d'un solide visco-élastique est complètement déterminée dès qu'on connaît une relation entre les vitesses  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\alpha}$  et les forces  $\sigma^{IR}$ ,  $A$ . Souvent, on admet aussi un potentiel de dissipation  $D(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha})$  différentiable, pour écrire cette relation sous la forme :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^{IR} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \\ A = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \end{array} \right. \quad .$$

Le modèle rhéologique suivant, formé de ressort et d'amortisseurs donne une image du comportement visco-élastique :



$$W = \frac{1}{2} E (\epsilon - \alpha)^2$$

$$D = \frac{1}{2} \eta_1 \dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} \eta_2 \dot{\alpha}^2$$

Figure 1

Un développement au second ordre des deux potentiels  $W$  et  $D$  conduit aux modèles de visco-élasticité linéaire.

Par exemple, le modèle de Maxwell correspond à  $\sigma = \sigma^R$ ,  $\sigma^{IR} = 0$ ,  $\alpha$  est la déformation visco-élastique  $\epsilon^V$ ,  $W = \frac{1}{2} E_{ijkl} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^V) (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^V)$  et  $D = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij}^V \dot{\epsilon}_{kl}^V$ .

Le modèle de Kelvin-Voigt correspond à  $W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ ,  $\sigma_{ij}^R = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$ ,  $\sigma_{ij}^{IR} = \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$  et  $D = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl}$ .

• Solide élasto-plastique :

-----

La modélisation des métaux dans les conditions normales de température conduit au modèle élasto-plastique.

On admet que  $\sigma^{\text{IR}} = 0$ ,  $W = W(\epsilon, \alpha, T)$ , ce qui donne  $D = A \dot{\alpha}$ . Dans l'espace des forces  $A$ , les forces réelles ne sont pas illimitées, mais restreintes à l'intérieur d'un domaine convexe  $C$  appelé domaine d'élasticité contenant l'origine  $O$ . La dissipation  $D$  s'exprime en fonction de la vitesse  $\dot{\alpha}$  sous la forme :

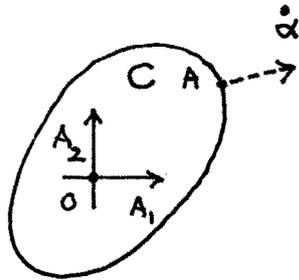
$$(21) \quad D(\dot{\alpha}) = \text{Sup}_{A^* \in C} A^* \dot{\alpha} \geq 0 \quad .$$

La dissipation  $D$  est donc fonction positivement homogène de degré 1 de la vitesse  $\dot{\alpha}$ , i.e.  $D(\lambda \dot{\alpha}) = \lambda D(\dot{\alpha})$  si  $\lambda \geq 0$ .

La définition (21) de la dissipation est aussi équivalente à l'inégalité

$$(22) \quad (A - A^*) \dot{\alpha} \geq 0 \quad \forall A^* \in C \quad .$$

C'est le principe du travail maximal de Hill. La définition (21) ou l'inégalité (22) traduit la propriété de normalité suivante : la vitesse  $\dot{\alpha}$  est un vecteur du cône des normales extérieures en  $A$  au domaine d'élasticité



$C$ . Si  $A$  est un point intérieur  $\dot{\alpha} = 0$ , la réponse est alors purement réversible, c'est-à-dire purement élastique puisque  $\dot{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} \dot{\epsilon}$  (ce qui justifie la dénomination du domaine  $C$ ). Les paramètres  $\alpha$  ne peuvent évoluer que si l'état de force  $A$  atteint un seuil qui correspond à la frontière du domaine  $C$ .

Il est utile de remarquer que la fonction  $D(\dot{\alpha}) \equiv D(\dot{\alpha})$  est différentiable pour  $\dot{\alpha} \neq 0$  et qu'on obtient tout simplement  $A = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}}$ . Le potentiel de dissipation associé au modèle élastoplastique est une fonction convexe, positivement homogène de degré 1. On peut, si l'on veut, introduire la notion de sous-gradient d'une fonction convexe :

$$\partial D(\dot{\alpha}) = \left\{ A \mid D(\dot{\alpha}^*) \geq D(\dot{\alpha}) + A (\dot{\alpha}^* - \dot{\alpha}) \quad \forall \dot{\alpha}^* \right\} ,$$

pour écrire une relation analogue à (20) même pour  $\dot{\alpha} = 0$  :

$$(23) \quad A \in \partial D(\dot{\alpha}) \quad ,$$

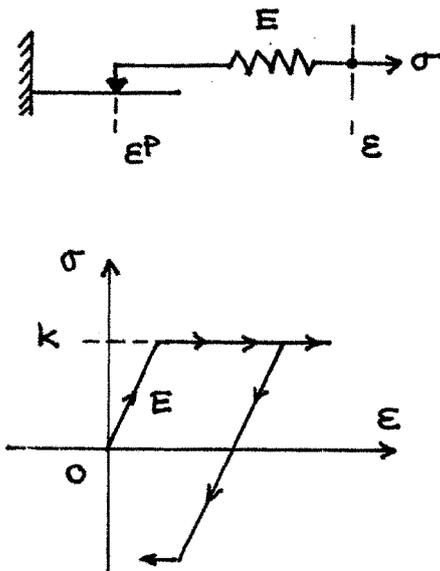
qui étend la notion du potentiel aux fonctions convexes, non différentiables.

Les modèles rhéologiques suivants illustrent la loi de comportement élasto-plastique. La contrainte ne peut dépasser le seuil de glissement dans le premier modèle qui correspond au schéma élastique parfaitement plastique. Le deuxième modèle permet de tenir compte de l'écroutissage cinématique.

Figure 3 :

Modèles Rhéologiques

Elastique parfaitement plastique



Paramètre interne :

Déformation plastique  $\epsilon^P$

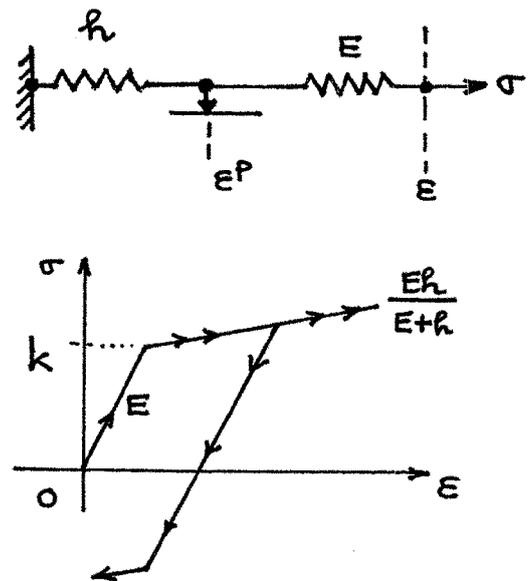
$$W = \frac{1}{2} E (\epsilon - \epsilon^P)^2$$

$$D(\dot{\epsilon}^P) = k |\dot{\epsilon}^P|$$

$$A = E (\epsilon - \epsilon^P) = \sigma$$

$$|A| \leq k$$

Ecroutissage cinématique



Paramètre interne :

Déformation plastique  $\epsilon^P$

$$W = \frac{1}{2} E (\epsilon - \epsilon^P)^2 + \frac{1}{2} h \epsilon^{P2}$$

$$D(\dot{\epsilon}^P) = k |\dot{\epsilon}^P|$$

$$A = -h \epsilon^P + E(\epsilon - \epsilon^P) = \sigma - h \epsilon^P$$

$$|A| \leq k$$

La réponse d'un milieu élastique plastique est indépendante de l'échelle de temps : dans les modèles précédents, un trajet de déformation effectué d'une façon plus ou moins rapide donne toujours le même trajet de contrainte. D'autre part, même si les vitesses sont très faibles, on ne peut linéariser un tel comportement.

Le tableau ci-après permet de résumer les principaux modèles étudiés :

<i>Matériaux</i>	<i>Potentiel thermodynamique</i>	<i>Potentiel de dissipation</i>
Fluide parfait	$W(\rho, T)$	0
Solide élastique	$W(\epsilon, T)$	0
Fluide visqueux	$W(\rho, T)$	$D(\dot{\epsilon})$ diff.
Solide viscoélastique	$W(\epsilon, \alpha, T)$	$D(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha})$ diff.
Solide élastoplastique	$W(\epsilon, \alpha, T)$	$D(\dot{\alpha})$ convexe homog. d°1.

### 2.3- Remarques :

-----

Lorsque les variations de température sont négligées, on obtient un cadre purement mécanique, souvent rencontré dans les applications pratiques. Ce cadre correspond à la transformation isotherme en prenant  $T = T_0$ . Mais, en toute généralité, l'évolution d'un milieu continu est plutôt thermomécanique. On doit ajouter une inconnue supplémentaire  $T$  et l'équation thermique (11) aux équations du mouvement.

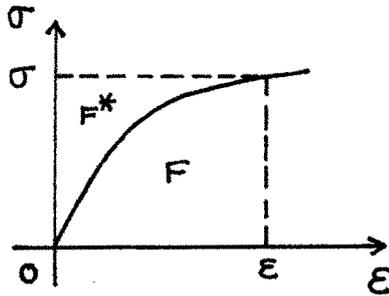
Dans la suite du cours, on se limitera à l'étude en petites transformations isothermes de quelques modèles : solide linéairement élastique, solide élastique-parfaitement plastique ou écrouissable, à écrouissage positif. La température étant constante  $T = T_0$ , on notera désormais  $W(\chi)$  à la place de  $W(\chi, T)$ .

3.-

SOLIDE LINEAIREMENT ELASTIQUE

Par sa simplicité, c'est le modèle le plus connu, le plus développé en Mécanique des Solides.

Les relations (16) définissent la correspondance  $\varepsilon \leftrightarrow \sigma$  d'une manière bi-univoque. La fonction  $F(\varepsilon) = \rho W(\varepsilon)$  représente l'énergie élastique emmagasinée par unité de volume.



Energie élastique et  
Energie complémentaire.

Figure 4.

Pour exprimer les  $\varepsilon_{ij}$  en fonction des  $\sigma_{ij}$ , il est commode d'introduire la transformée de Legendre de la fonction  $F(\varepsilon)$  :

$$(24) \quad F^*(\sigma) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - F(\varepsilon) \quad ,$$

$F^*$  est la densité volumique d'énergie complémentaire. On obtient alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial F^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad .$$

En particulier, si  $F(\varepsilon)$  est fonction convexe,  $F^*(\sigma)$  est aussi convexe et vérifie l'inégalité :

$$(25) \quad F(\varepsilon) + F^*(s) \geq \varepsilon_{ij} s_{ij} \quad \forall \varepsilon, \forall s \quad .$$

Le développement de l'énergie au second ordre donne le schéma linéairement élastique :

$$(26) \quad F(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} L_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad , \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad .$$

Les coefficients élastiques  $E_{ijkl}$  doivent vérifier les conditions classiques de symétrie et de positivité :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{ijkl} = E_{klij} = E_{jikl} \\ E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl} \geq m \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad , \quad m > 0 \quad . \end{array} \right.$$

En particulier, on obtient lorsque le matériau est aussi isotrope :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho W = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ \sigma_{ij} = \lambda (\varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad . \end{array} \right.$$

La positivité de l'énergie implique les conditions suivantes sur les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$3 \lambda + 2 \mu > 0 \quad , \quad \mu > 0 \quad .$$

On peut aussi exprimer les déformations  $\varepsilon_{ij}$  en fonction des contraintes  $\sigma_{ij}$  :

$$(29) \quad \varepsilon_{ij} = - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk}) \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} \quad ,$$

en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{3 \lambda + 2 \mu}{\lambda + \mu} \cdot \mu \quad , \quad \nu = \frac{\lambda}{2 (\lambda + \mu)} \\ E > 0 \quad , \quad -1 \leq \nu \leq 0.5 \quad , \end{array} \right.$$

$E$  désigne le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson.

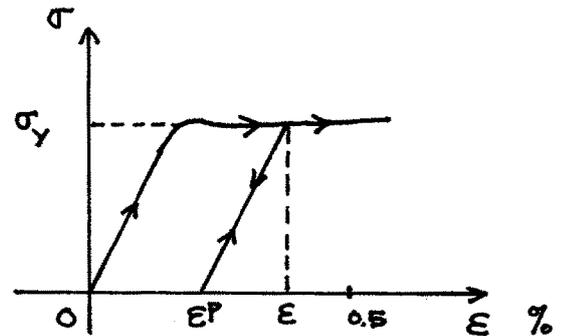
#### 4.- SOLIDE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE

##### 4.1- Critère de plasticité - Loi de normalité :

-----

La figure 5 présente la courbe de traction-compression d'une tige en acier doux :

Figure 5 :  
Courbe de traction expérimentale.



Elle montre que le comportement est linéairement élastique lorsque la charge est faible. A partir d'un seuil  $\sigma_y$ , des déformations résiduelles, dites déformations plastiques, apparaissent à la décharge, le comportement du métal est élastique-plastique. La partie réversible de la déformation  $\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p$  est la déformation élastique.

Du point de vue physique, un solide métallique est un agrégat de grains cristallins. La déformation élastique provient des variations de la distance entre les plans du réseau cristallin, ces variations sont réversibles sous les efforts appliqués. La déformation plastique par contre est due aux glissements des plans du réseau cristallin les uns par rapport aux autres. Pour cette raison, elle s'effectue sans variation de volume.

Des expériences ont permis de définir pour les matériaux usuels le seuil de plasticité  $\sigma_y$  et son évolution avec la déformation plastique. En particulier, si le seuil reste pratiquement invariable, on obtient le solide élastique parfaitement plastique.

Il s'agit d'une généralisation du premier modèle rhéologique de la figure 3. L'énergie  $W$  est l'énergie élastique emmagasinée :

$$(30) \quad \rho W(\varepsilon, \varepsilon^P) = \frac{1}{2} E_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^P) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^P) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e .$$

Le contrainte  $\sigma$  et le paramètre de force  $A$  associé à la déformation plastique s'écrivent :

$$(31) \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^P) \quad , \quad A_{ij} = -\rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^P} = \sigma_{ij} .$$

Le domaine d'élasticité  $C$  est défini dans l'espace des contraintes  $\sigma_{ij}$ . Lorsque sa frontière est régulière (cas du potentiel plastique simple), on l'exprime sous la forme d'une inégalité :

$$(32) \quad C = \left\{ \sigma \mid f(\sigma) \leq 0 \right\} \quad ,$$

où la fonction convexe  $f(\sigma)$ , appelée critère de plasticité, permet de préciser le seuil de plasticité par l'égalité  $f(\sigma) = 0$ . Par exemple, le critère de Misès :

$$(33) \quad f(\sigma) \equiv \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - k^2 \quad , \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad ,$$

est bien vérifié pour la plupart des métaux usuels (cuivre, aluminium...). Le critère de Misès est indépendant de la contrainte moyenne, le domaine d'élasticité associé est une sphère dans l'espace des déviateurs  $\sigma'_{ij}$  ou un cylindre dans l'espace des contraintes  $\sigma_{ij}$ .

La loi de normalité (22) s'énonce sous la forme :

$$(34) \quad \dot{\varepsilon}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) < 0 .$$

En résumé, les équations du modèle s'écrivent :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^P \\ \sigma = E \cdot \varepsilon^e \\ \dot{\varepsilon}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad \lambda \leq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) < 0 . \end{array} \right.$$

*Exercice :*

-----

Montrer que si le trajet de déformation  $\varepsilon(t)$  est connu sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , les équations (33) permettent de définir un trajet de contrainte unique associé, à partir d'un état initial de contrainte  $\sigma(0) = \sigma_0$  donné.

Les équations (35) définissent bien une loi de comportement, mais la correspondance Histoire de déformation  $\rightarrow$  Histoire de contrainte est plus compliquée que celle de l'élasticité.

#### 4.2- Relations incrémentales :

-----

D'une façon plus précise, les relations (35) sont de type incrémental. Si l'état de contrainte actuel  $\sigma(t)$  est connu, à une vitesse  $\dot{\varepsilon}$  on peut associer une vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$  unique, de sorte que de proche en proche, en intégrant suivant le temps, on peut déterminer le trajet de contrainte associé à un trajet de déformation. En effet, on obtient explicitement les relations entre les vitesses  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\sigma, \dot{\varepsilon})$  de la manière suivante :

La relation (22)  $\dot{\varepsilon}^p(\sigma - \sigma^*) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in C$  donne, en prenant  $\sigma^* = \sigma(t + \Delta t)$  puis  $\sigma^* = \sigma(t - \Delta t)$ , après passage à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$(36) \quad \dot{\sigma} \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad .$$

On peut donc préciser les relations (34), en écrivant que :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \\ \lambda = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) < 0 \quad \text{ou} \quad \dot{f}(\sigma) < 0 \quad . \end{array} \right.$$

Pour un élément matériel, en charge plastique ( $f = 0, \dot{f} = 0$ ), on a alors d'après (35) :

$$\dot{f} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot E_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl} = 0 \quad ,$$

soit l'expression suivante du multiplicateur plastique :

$$(38) \quad \lambda = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} \right\rangle ,$$

puis :

$$(39) \quad \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} - \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

ou  $\langle a \rangle$  est la partie positive de  $a$  :  $\langle a \rangle = 0$  si  $a < 0$ ,  $\langle a \rangle = a$  si  $a > 0$ .

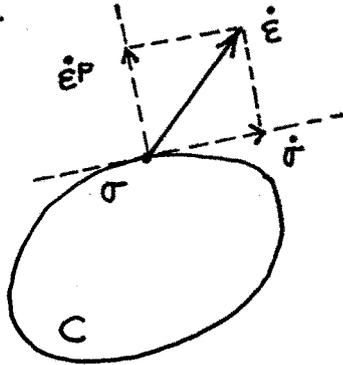
La vitesse  $\dot{\sigma}$  s'exprime aussi sous la forme :

$$(40) \quad \dot{\sigma} = \frac{\partial \psi^\sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} (\dot{\varepsilon}) ,$$

en posant :

$$(41) \quad \psi^\sigma(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} \right\rangle^2 .$$

La figure 6 illustre d'une façon schématique la loi en vitesses obtenue.



On prend  $E = 1$  (!) .

$\dot{\sigma}$  est alors la projection de  $\dot{\varepsilon}$  sur le cone tangent en  $\sigma$  au domaine d'élasticité.

Figure 6

**CHAPITRE III****PROBLÈMES ÉLASTIQUES**

On donne la formulation des problèmes aux limites en élasticité. Les équations locales ainsi que les principes du minimum de l'énergie potentielle totale et de l'énergie complémentaire sont établis pour une structure tridimensionnelle en transformation petite, quasi statique et isotherme.

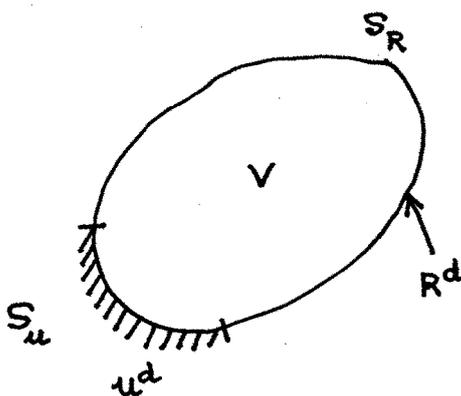
Dans ce chapitre, on étudie la réponse d'une structure élastique en petite transformation isotherme. Les problèmes considérés sont relatifs à l'évolution quasi-statique, c'est-à-dire lorsque les mouvements du solide sont suffisamment lents pour que l'effet d'inertie soit négligeable.

## 1.- EQUATIONS DU MOUVEMENT

### 1.1- Equations locales :

-----

Soit une structure occupant dans l'espace un volume  $V$ . A partir d'un état initial connu, elle est soumise à un trajet de charge défini par des conditions de charge et de liaison imposées par l'extérieur. D'une façon



plus précise, on suppose que les efforts imposés correspondent d'une part à des efforts de volume  $\rho f(x, t)$ , d'autre part à des efforts de surface donnés  $R^d(x, t)$  sur une partie  $S_R$  de la frontière. Sur la partie complémentaire  $S_u$  on impose des déplacements donnés  $u^d(x, t)$ . Les portions de surface  $S_R$  et  $S_u$  sont invariables et les fonctions  $u^d(x, t)$ ,  $R^d(x, t)$ ,  $f(x, t)$  sont des fonctions régulières de l'espace

et du temps. Ce sont des données classiques de type mixte, simple.

L'évolution de la structure est décrite par les équations suivantes lorsque le matériau est élastique :

- Equations indéfinies dans  $V$  :

$$2 \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (\text{six équations géométriques})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon) \quad (\text{six équations de comportement})$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (\text{trois équations dynamiques})$$

- Conditions aux limites :

$$(1) \quad \sigma_{ij} n_j = R_i^d \quad \text{sur} \quad S_R \quad (\text{force imposée})$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur} \quad S_u \quad (\text{déplacement imposé})$$

- Conditions initiales :

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (\text{déplacement initial})$$

$$\dot{u}(x, 0) = V^0(x) \quad (\text{vitesse initiale})$$

On peut, si l'on veut, ne retenir que l'inconnue en déplacement  $u(x, t)$ . Si le matériau est linéairement élastique, isotrope et homogène, les équations  $\sigma_{ij} = \lambda (\varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$  conduisent aux équations :

$$(2) \quad \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u + \rho (f - \ddot{u}) = 0$$

de l'élasticité linéaire.

Il s'agit d'un problème aux dérivées partielles d'ordre 2, linéaire si l'élasticité est linéaire. Dans ce dernier cas, un nombre considérable de solutions analytiques, exactes ont été mises en évidence pour des problèmes à données et à géométrie simples. Mais souvent la solution n'est accessible que par le calcul numérique.

## 1.2- Problème statique :

---

Si l'évolution est très lente, les efforts d'inertie  $-\rho \ddot{u}$  sont négligés, on obtient alors les équations de la transformation quasi-statique. Les équations (1) sont particulièrement simple dans ces conditions puisque la solution  $(u, \varepsilon, \sigma)$  à chaque instant ne dépend plus que des données  $(f, u^d, R^d)$  à cet instant. L'évolution de la structure s'obtient par la résolution d'une succession de problèmes aux limites :

- Equations indéfinies :

$$\begin{aligned} 2 \varepsilon_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ (3) \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i &= 0 \end{aligned}$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^d \quad \text{sur} \quad S_u \\ \sigma_{ij} n_j &= R_i^d \quad \text{sur} \quad S_R \end{aligned}$$

traduisant l'équilibre statique sous les données  $(f, u^d, R^d)$ .

En élasticité linéaire, par exemple, les équations du problème statique donnent :

$$\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \rho \Delta u + \rho f = 0 \quad .$$

## 2.- THEOREMES DU MINIMUM ASSOCIES AU PROBLEME STATIQUE

---

On va établir que le problème statique (3) conduit à des principes du minimum associés. La solution en déplacement  $u$  (resp. en contrainte  $\sigma$ ) minimise l'énergie potentielle totale (resp. l'énergie complémentaire totale) du système, lorsque la densité volumique d'énergie  $F(\varepsilon)$  est supposée convexe.

### 2.1- Définitions préliminaires :

---

On appelle l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles l'ensemble des champs de vecteur vérifiant les liaisons imposées :

$$(4) \quad U = \left\{ \xi \mid \xi = u^d \quad \text{sur} \quad S_u \right\} .$$

On appelle l'ensemble des contraintes statiquement admissibles l'ensemble des champs des contraintes symétriques vérifiant les conditions de forces imposées :

$$(5) \quad S = \left\{ \sigma^* \mid \text{Div } \sigma^* + \rho f = 0, \sigma^* \cdot n = R^d \quad \text{sur} \quad S_R \right\} .$$

Pour tout  $\xi \in U$  et tout  $\tau \in S$ , l'équation des puissances virtuelles I(13) donne, avec  $\delta u = \xi$  :

$$(6) \quad \int_V \tau \cdot \varepsilon(\xi) \, dV = \int_V \rho f \cdot \xi \, dV + \int_{S_u} u^d \cdot \tau \cdot n \, ds + \int_{S_R} R^d \cdot \xi \, ds .$$

## 2.2- Théorème du minimum de l'énergie potentielle totale :

---

On va établir la proposition suivante :

La solution en déplacement  $u$  minimise l'énergie potentielle totale :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} I(\xi) = \int_V F(\varepsilon(\xi)) \, dV - \int_V \rho f \cdot \xi \, dV - \int_{S_R} R^d \cdot \xi \, ds \quad , \\ \text{parmi les champs de déplacement cinématiquement admissibles i.e.} \\ I(u) = \min_{\xi \in U} I(\xi) \quad . \end{array} \right.$$

En effet, un extremum quelconque  $u$  de  $I(\xi)$  vérifie nécessairement  $\langle I'(u), \delta\xi \rangle = 0$  ou, d'une façon plus explicite :

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \cdot \delta\varepsilon \, dV - \int_V \rho f \delta\xi \, dV - \int_{S_R} R^d \cdot \delta\xi \, ds = 0 \quad ,$$

avec  $\delta\xi = \xi - u$ . Cette équation représente l'équation des puissances virtuelles (13) et montre que la contrainte associée  $\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u))$  est statiquement admissible. Un extremum quelconque  $u$  de  $I(\xi)$  est donc une solution du problème en déplacement. Si  $F(\varepsilon)$  est fonction convexe  $I(\xi)$  est une fonction convexe de  $\xi$  il s'agit d'un minimum. La solution en déplacement est aussi unique à un déplacement de corps rigide près si  $F(\varepsilon)$  est strictement convexe.

## 2.3- Théorème du minimum de l'énergie complémentaire totale :

---

La solution en contrainte  $\sigma$  vérifie la propriété suivante :

La solution en contrainte  $\sigma$  minimise l'énergie complémentaire totale :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} J(\tau) = \int_V F^*(\tau) \, dV - \int_{S_u} u^d \cdot \tau \cdot n \, ds \quad , \\ \text{parmi les champs de contraintes statiquement admissibles i.e.} \\ J(\sigma) = \min_{\tau \in S} J^*(\tau) \quad . \end{array} \right.$$

En effet, les relations II(24), II(25) et (6) montrent que :

$$\begin{aligned} I(u) + J(\tau) &\geq 0 \\ I(u) + J(\sigma) &= 0 \end{aligned} .$$

Il en résulte que  $\forall \tau \in S$ ,  $J(\tau) \geq J^*(\sigma) = -I(u)$ .

#### 2.4- Remarques :

-----

- Du problème aux dérivées partielles (3), on a été amené à résoudre deux problèmes de minimisation.

Dans (7), on a choisi comme inconnue principale le déplacement, dans (8) la contrainte.

- A partir de la fonctionnelle de Reisner à deux champs :

$$L(\xi, \tau) = \int_V (\tau \cdot \varepsilon(\xi) - F^*(\tau)) dV - \int_V \rho f \cdot \xi dV - \int_{S_u} (\xi - \xi^d) \tau \cdot n ds - \int_{S_R} R^d \cdot \xi ds ,$$

on établit sans peine que :

$$I(u) = \inf_{\xi} \sup_{\tau} L(\xi, \tau) , \quad -J(\sigma) = \sup_{\tau} \inf_{\xi} L(\xi, \tau) ,$$

$I(\xi)$  et  $-J(\tau)$  sont deux fonctionnelles en dualité.

### 3. - EXEMPLES : ENVELOPPE SPHERIQUE SOUS PRESSION

(voir cours de Mécanique ENPC, Y. Bamberger).

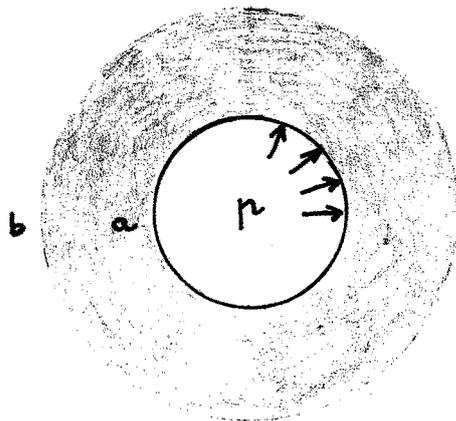
On considère une enveloppe sphérique épaisse (rayon intérieur  $a$ , rayon extérieur  $b$ ) constituée d'un matériau linéairement élastique, homogène et isotrope (coefficients d'élasticité  $E, \nu$  ou  $\lambda, \mu$ ). Elle est soumise à une pression intérieure  $p$ , à l'extérieur la pression atmosphérique est négligeable.

On se propose de déterminer la solution à l'équilibre statique de la sphère sous les efforts considérés, en utilisant successivement les équations locales (3), puis la formulation variationnelle en déplacement (7), puis la formulation variationnelle en contrainte (8).

En raison de la symétrie du problème, le déplacement est uniquement radial, le tenseur de contrainte diagonal et leurs composantes ne dépendent que de  $r$  (coordonnées sphériques) :

$$u = \xi(r) \vec{e}_r, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi}(r) \end{bmatrix}$$

les inconnues sont  $\xi(r)$ ,  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$ .



### 3.1- Résolution à partir des équations locales :

Le tenseur de déformation associé à  $u = \xi(r) \vec{e}_r$  est :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \xi' & 0 & 0 \\ 0 & \xi/r & 0 \\ 0 & 0 & \xi/r \end{bmatrix} .$$

La loi de comportement II(28), II(29) donne alors :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \xi' + 2\lambda \xi/r , \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2(\lambda + \mu) \xi/r + \lambda \xi' .$$

En coordonnées sphériques, les équations d'équilibre I(11) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \sigma_{r\varphi,\varphi} + \\ + \frac{1}{r} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cotg \theta) + \rho f_r = 0 \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \sigma_{\varphi\theta,\varphi} + \\ + \frac{1}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cotg \theta + 3 \sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = 0 \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\varphi\theta,\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + \\ + \frac{1}{r} (3 \sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cotg \theta) + \rho f_\varphi = 0 \end{aligned} ,$$

et donnent dans le cas de la sphère :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 .$$

En fonction de  $\xi(r)$ , on obtient alors l'équation différentielle :

$$\left[ \frac{1}{r^2} (r^2 \xi)_{,r} \right]_{,r} = 0 ,$$

on en déduit que :

$$\xi(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r^2} \quad , \quad \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^3} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{2r^3} \quad ,$$

avec :

$$A = \alpha (3 \lambda + 2 \mu) \quad , \quad B = 2 \mu \beta \quad .$$

Les constantes d'intégration A et B sont calculées à partir des conditions aux limites :

- sur la face interne  $r = a$ ,  $n = -e_r$ ,  $R^d = + p e_r$  d'où  $\sigma_{rr}(a) = - p$
- sur la face externe  $r = b$ ,  $n = e_r$ ,  $R^d = 0$  d'où  $\sigma_{rr}(b) = 0$  .

Ces deux conditions donnent :

$$A = p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \quad , \quad B = p \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \quad .$$

### 3.2- Résolution à partir de la formulation variationnelle en déplacement

-----

La densité d'énergie élastique  $F(\epsilon)$  s'écrit dans le cas considéré :

$$2 F = \lambda \epsilon_{ii}^2 + 2 \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ (\lambda + \mu) \xi'^2 + 4 \lambda \frac{\xi \xi'}{r} + 4 (\lambda + \mu) \left( \frac{\xi}{r} \right)^2 \right] \quad .$$

En remarquant que  $f^d = 0$ , que la surface  $S_R$  se compose des faces interne et externe de l'enveloppe, on aboutit à l'expression suivante de l'énergie potentielle totale :

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\epsilon) r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p \xi(a) a^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad .$$

Après les intégrations en  $\theta$  et  $\varphi$ , au facteur  $4\pi$  près, le problème initial s'énonce sous la forme :

Déterminer la fonction  $\xi(r)$  minimisant la fonctionnelle :

$$\xi \rightarrow I(\xi) = \int_a^b F r^2 dr - p \xi(a) a^2 \quad .$$

Sa résolution nécessite un calcul des variations. On obtient :

- l'équation d'Euler du problème des variations :

$$\xi'' + \left( \frac{\xi}{r} \right)_{,r} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \left[ \frac{1}{r^2} (r^2 \xi)_{,r} \right]_{,r} = 0 \quad ;$$

- les conditions aux limites naturelles :

$$(\lambda + 2 \mu) \xi' + 2 \frac{\xi}{r} \lambda = \begin{cases} - p & \text{pour } r = a \\ 0 & \text{pour } r = b \end{cases} \quad .$$

On retrouve l'équation d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte (en effet  $\sigma_{rr} = (\lambda + 2 \mu) \xi' + 2 \lambda \frac{\xi}{r}$ ) obtenues lors de la résolution à partir des équations locales.

### 3.3- Résolution à partir de la formulation variationnelle en contrainte :

-----

Les champs de contrainte statiquement admissibles et respectant les symétries du problème sont caractérisés par les seules composantes non nulles  $\sigma_{rr}(r)$  et  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 & , \\ \sigma_{rr}(a) = - p \quad , \quad \sigma_{rr}(b) = 0 & . \end{cases}$$

On pose pour simplifier les notations,  $d(r) = \sigma_{rr}(r)$ . Comme  $\sigma_{\theta\theta}$  s'exprime en fonction de  $d$  et de  $d'$  d'après la première condition, on obtient l'expression suivante de l'énergie complémentaire en fonction de  $d$  :

$$\begin{aligned} 2 F^* &= - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^2 + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{2E} \left[ d^2 + 2 (1 - \nu) \left( d + \frac{r}{2} d' \right)^2 - 4 \nu d \left( d + \frac{r}{2} d' \right) \right] \quad . \end{aligned}$$

Le problème à résoudre s'énonce donc sous la forme :

Déterminer la fonction  $d(r)$  qui minimise la fonctionnelle :

$$J(d) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F^* r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \int_a^b F^* r^2 \, dr \quad ,$$

parmi les fonctions vérifiant  $d(a) = -p$  ,  $d(b) = 0$  .

On doit résoudre un problème de calcul des variations. L'équation d'Euler associée s'écrit :

$$4 \, d' + r \, d'' = 0 \quad \text{soit} \quad d = \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^3} \quad ,$$

A et B sont tels que  $d(a) = -p$  ,  $d(b) = 0$  .

On retrouve bien les résultats précédents.

#### 4.- EXERCICE :

On se place dans le contexte de l'élasticité linéaire. Si l'état initial n'est pas sans contrainte, la loi de comportement s'écrit d'une manière générale :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + E_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{\circ}) \quad ,$$

où  $\sigma^{\circ}$  désigne la contrainte initiale,  $\epsilon^{\circ}$  la déformation initiale. Comme  $\sigma^{\circ}$  joue le même rôle que  $-E \, \epsilon^{\circ}$ , on va prendre  $\sigma^{\circ} = 0$  pour étudier la réponse d'une structure élastique soumise à une déformation initiale imposée  $\epsilon^{\circ}$ .

1- Ecrire les équations que doivent vérifier les champs de contrainte et de déplacements.

2- On introduit les ensembles :

$$U_0 = \left\{ u \in H^1(V) \mid u|_{S_u} = 0 \right\}, \quad E_0 = \left\{ e \in L^2 \mid e = E \varepsilon(u), \quad u \in U_0 \right\}$$

$$S_0 = \left\{ \sigma \in L^2(V) \mid \text{Div } \sigma = 0 \text{ dans } V, \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } S_R \right\}$$

( $S_0$  s'appelle l'ensemble des champs de contrainte auto-équilibrés), puis la norme de l'énergie dans l'espace des contraintes, définie à partir du produit scalaire de l'énergie :

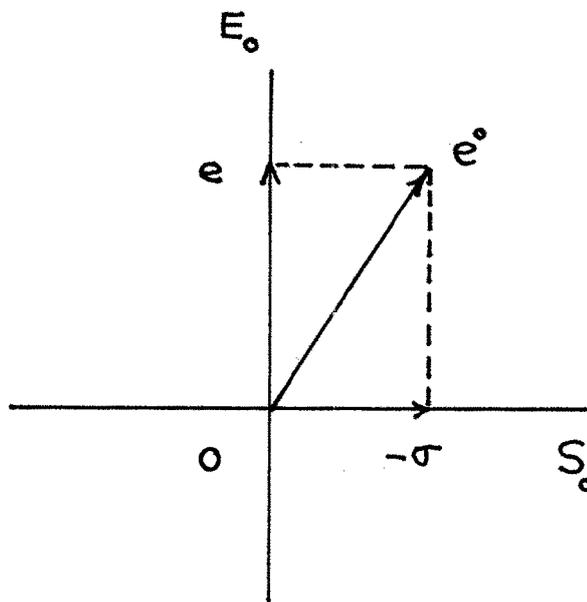
$$\langle \sigma, \sigma^* \rangle = \int_V \sigma \cdot E^{-1} \cdot \sigma^* \, dV \quad .$$

Montrer que les espaces vectoriels  $E_0, S_0$  sont orthogonaux et qu'on obtient à partir des théorèmes de l'énergie :

$$\sigma = - \text{Proj} (e^0, S_0) \quad , \quad e = \text{Proj} (e^0, E_0) \quad ,$$

en supposant que  $e^0 = E \cdot \varepsilon^0 \in L^2(V)$ .

Si l'on note  $Z$  l'opérateur  $\text{Proj} (\cdot, S_0)$ ,  $Z$  est une application linéaire de noyau  $E_0$ . Ceci signifie qu'une déformation initiale compatible n'induit pas de contrainte résiduelle.



**CHAPITRE IV****PROBLÈMES ÉLASTOPLASTIQUES**

On donne les équations décrivant en petite transformation l'évolution d'une structure élastique-parfaitement plastique. La formulation du problème en vitesses de contrainte, de déplacement permet de comprendre la réponse quasi-statique à chaque instant. Les propriétés principales de la solution, tels que l'existence, l'unicité, la régularité, la nature des discontinuités et le comportement asymptotique, sont examinées.

Lors de l'étude des lois de comportement, on a souligné la différence fondamentale entre les matériaux élastiques et les matériaux élastoplastiques. En élasticité, la relation entre contrainte et déformation est bi-univoque ; la réponse quasi-statique d'une structure élastique s'obtient directement à partir des conditions de liaisons et de charges à chaque instant. En plasticité, la loi de comportement est incrémentale. Pour obtenir la réponse quasi-statique d'une structure élastoplastique, il est nécessaire de suivre l'évolution du matériau de proche en proche, à partir d'un état initial donné. Nous examinons dans ce chapitre les différentes équations caractérisant l'évolution d'une structure élastique parfaitement plastique soumise à un trajet de charge quelconque.

## 1.- EQUATIONS LOCALES

Soit une structure élastique plastique occupant dans l'espace un volume  $\Omega$ . A partir d'un état initial connu, elle est soumise en petite transformation quasi-statique à des conditions de charge et de liaison de type mixte classique : charge volumique  $\rho f^d(x, t)$ , efforts de surface  $R^d(x, t)$  sur  $S_R$ , liaison  $u^d(x, t)$  sur  $S_u$ .

Le matériau est supposé élastique, parfaitement plastique. Le problème d'évolution quasi-statique de la structure consiste à déterminer la réponse en déplacement  $u(x, t)$ , en contrainte  $\sigma(x, t)$  à partir d'un état initial  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\sigma(x, 0) = \sigma_0(x)$  supposé donné.

Ces fonctions doivent vérifier les équations suivantes :

- Le déplacement doit être cinématiquement admissible :

$$(1) \quad u_t \in U(t) = \left\{ u^* \mid u^*(x) = u^d(x,t) \quad \text{sur} \quad S_u \right\} .$$

On a utilisé ici la notation  $u_t$  qui représente le champ de déplacement à l'instant  $t$ , sa valeur locale au point  $x$  est  $u(x, t)$ .

- La contrainte doit être statiquement admissible :

$$(2) \quad \sigma_t \in S(t) = \left\{ \sigma^* \mid \begin{array}{l} \sigma_{ij,j}^* + \rho f_i(x,t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \sigma_{ij}^* n_j = R_i^d(x,t) \quad \text{sur} \quad S_R \end{array} \right\} .$$

- La loi de comportement est partout vérifiée :

La contrainte  $\sigma$  vérifie partout dans  $\Omega$  le critère de plasticité  $\sigma \in C$ . Si l'on introduit l'ensemble des champs de contrainte plastiquement admissibles  $P$  :

$$(3) \quad P = \left\{ \sigma^* \mid \sigma^*(x) \in C \quad \forall x \in \Omega \right\} ,$$

on a donc  $\sigma_t \in P$ .

La loi de comportement élastoplastique s'écrit sous la forme :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \\ \dot{\epsilon}_{kl}^p (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^*) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in C \end{array} \right. ,$$

ce qui donne, lorsque le domaine d'élasticité  $C$  est défini par une inégalité  $f(\sigma) \leq 0$  (potentiel plastique simple) :

$$\begin{aligned}
 & \dot{\sigma} = \frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \\
 (5) \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 \text{avec } \Psi^\sigma(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{1}{2} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^2 \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot E_{ijkl} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \\
 \\
 \text{si } f(\sigma) = 0 \\
 \\
 \text{et } \Psi^\sigma(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \text{si } f(\sigma) < 0 \quad .
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

- Enfin, les conditions initiales sont vérifiées :

$$(6) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x) \quad .$$

2.- EXEMPLE : Enveloppe sphérique épaisse soumise à une pression intérieure  
(J. Mandel, Cours de Mécanique des Milieux continus)

Comme dans le cas élastique, les seules composantes non-nulles du déplacement et de la contrainte sont : déplacement radial  $\xi(r)$ , contraintes  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$ .

La solution élastique correspond à :

$$\xi(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{2r^2},$$

avec  $A = p \frac{1}{b^3/a^3 - 1}$ ,  $B = A \cdot b^3/a^3$ ,  $\alpha = A/(3\lambda + 2\mu)$ ,  $\beta = B/2\mu$ .

Si l'on admet que le matériau est élastique, parfaitement plastique et obéit au critère de Tresca, la condition de plasticité qui s'écrit en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\text{Max}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq 2k,$$

montre que lorsque la pression intérieure  $p$  atteint la valeur  $\frac{2k}{a} (1 - a^3/b^3)$ , le contour intérieur entre dans le domaine plastique. Si l'on continue à augmenter  $p$ , on distingue dans l'enveloppe deux régions : une région plastique  $a < r < c$  et une région encore élastique  $c < r < b$ . Dans la région élastique, la solution élastique correspond à :

$$\sigma_{rr} = \frac{2k}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2k}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right)$$

$$\xi = \frac{k c^3}{2E} \left[ \frac{1 + \nu}{r^2} + 2(1 - 2\nu) \frac{r}{b^3} \right]$$

puisque pour  $r = c$ , on a  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2k$ .

Dans la région plastique, l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad ,$$

jointe à la condition de plasticité  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2k$ , donne :

$$\sigma_{rr} = 2k \operatorname{Log} r + C \quad .$$

La constante  $C$  s'obtient à partir de la continuité du vecteur contrainte sur le contour  $r = c$  :

$$C + 2k \operatorname{Log} c = -\frac{2k}{3} (1 - c^3/b^3) \quad .$$

En résumé, on obtient en fonction de  $c$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 2k \left[ \operatorname{Log} \frac{r}{c} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2k = \sigma_{\varphi\varphi} \end{array} \right. .$$

La pression maximale admissible correspond à  $c = b$  soit

$P_{\max} = 2k \operatorname{Log} \frac{b}{a}$ . Le déplacement radial  $\xi$  est obtenu en remarquant que la dilatation volumique  $\xi_{,r} + 2 \frac{\xi}{r}$  est purement élastique, en effet la loi de normalité et le critère de Tresca impliquent que  $\epsilon_{ii}^p = 0$ . Il en résulte que  $\xi_{,r} + 2 \frac{\xi}{r} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$ , soit :

$$\xi = 2 \frac{1-2\nu}{E} k \left[ r \operatorname{Log} \frac{r}{c} - \frac{r}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} \right) + \frac{D}{r^2} \right] \quad .$$

La constante  $D$  étant définie par la continuité de  $\xi$  pour  $r = c$ . On obtient :

$$\xi = \frac{k}{E} \left\{ 2 (1-2\nu) r \left[ \operatorname{Log} \frac{r}{c} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] + (1-\nu) \frac{c^3}{r^2} \right\} \quad .$$

Dans cet exemple simple, le champ de contrainte dans la zone plastique a pu être déterminé à partir des équations d'équilibre et des conditions de plasticité, on dit que le problème est statiquement déterminé. Il s'agit d'un cas très particulier, souvent l'évolution élastoplastique est complexe et dans la littérature on ne connaît que quelques exemples de solution explicite.

### 3.- PROBLEME EN VITESSES

Les relations (4) ou (5) sont des relations incrémentales. Elles relient les vitesses lorsque les grandeurs actuelles sont supposées connues. A chaque instant, si l'on suppose connus les champs de déplacement et de contrainte, en fonction des vitesses de données  $\dot{u}_t^d, \dot{R}_t^d, \dot{f}_t$ , on peut formellement décrire les vitesses de contrainte  $\dot{\sigma}_t$  et de déplacement  $\dot{u}_t$  par des "équations différentielles" à préciser :

$$(7) \quad \begin{aligned} (u, \sigma, \dot{u}^d, \dot{R}^d, \dot{f}) &\longrightarrow \dot{u} = F_1(u, \sigma, \dot{u}^d, \dot{R}^d, \dot{f}) \\ &\dot{\sigma} = F_2(u, \sigma, \dot{u}^d, \dot{R}^d, \dot{f}) \end{aligned} .$$

La détermination des vitesses  $\dot{u}, \dot{\sigma}$  à partir de l'état actuel  $(u, \sigma)$  et des vitesses de données  $(\dot{u}^d, \dot{R}^d, \dot{f})$  permet de comprendre les fonctionnelles  $F_1, F_2$ . Elles correspondent à la résolution d'un problème aux limites appelé problème en vitesses.

#### 3.1- Formulation locale du problème en vitesses :

Les conditions que doivent vérifier les vitesses  $\dot{u}, \dot{\sigma}$  s'obtiennent à partir de (1), (2) et des relations de comportement. Elles s'écrivent :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i} - \bullet \dot{u} = \dot{u}^d \quad \text{sur } S_u \\ \text{ii} - \bullet \text{Div } \dot{\sigma} + \rho \dot{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \quad \quad \quad \dot{\sigma} \cdot n = \dot{R}^d \quad \text{sur } S_R \\ \text{iii} - \bullet \text{ Relations de comportement (4) ou (5) .} \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un problème aux dérivées partielles avec des conditions aux limites mixtes. La vitesse de déformation plastique ou, ce qui revient au même, la vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$  s'exprime comme fonction non linéaire de  $\dot{\epsilon}$ . Cette non linéarité provient de la distinction entre la charge et la décharge dans la zone plastique actuelle, suivant le signe de la quantité  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ . E.  $\dot{\epsilon}$  d'après la relation (5). Le problème en vitesses est donc non linéaire.

### 3.2- Formulations variationnelles du problème en vitesses :

---

Les relations (5) peuvent être comparées aux relations de l'élasticité II(14). On a vu que l'existence d'un potentiel élastique  $F(\varepsilon)$ ,  $\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$  conduit aux principes du minimum de l'énergie potentielle totale et de l'énergie complémentaire lorsque  $F$  est convexe. Comme la fonction  $\Psi^\sigma(\dot{\varepsilon})$  est aussi convexe en  $\dot{\varepsilon}$ , on montre de la même façon que le problème en vitesses élastoplastiques est associé aux deux principes du minimum :

#### 3.2.1- Principe du minimum de Greenberg (1949) :

La vitesse  $\dot{u}$  minimise la fonctionnelle :

$$(9) \quad A(\dot{u}) = \int_{\Omega} \Psi^\sigma(\dot{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \dot{f} \dot{u} \, d\Omega - \int_{S_R} \dot{R} \dot{u} \, ds \quad ,$$

parmi les vitesses  $\dot{u}^*$  compatibles avec les conditions cinématiques, i.e.  $\dot{u}^*|_{S_u} = \dot{u}^d$ .

#### 3.2.2- Principe du minimum de Hodge-Prager (1948) :

Il est nécessaire d'abord de définir l'image de  $\Psi^\sigma(\dot{\varepsilon})$  par la transformée de Legendre :

$$\Psi_*^\sigma(\dot{\sigma}) = \sup_{\dot{\varepsilon}^*} \dot{\sigma} \dot{\varepsilon}^* - \Psi^\sigma(\dot{\varepsilon}^*) \quad .$$

On obtient l'expression suivante de  $\Psi_*^\sigma$  :

. Lorsque  $f(\sigma) < 0$  :  $\Psi_*^\sigma(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma} E^{-1} \dot{\sigma} \quad .$

. Lorsque  $f(\sigma) = 0$  :

$$\Psi_*^\sigma(\dot{\sigma}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{\sigma} E^{-1} \dot{\sigma} & \text{si } \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} \leq 0 \\ +\infty & \text{si } \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} > 0 \end{cases} \quad .$$

Si l'on se restreint à des vitesses de contrainte  $\dot{\sigma}^*$  compatibles avec la condition de plasticité :

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma}^* \leq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = 0$$

on peut alors énoncer le principe du minimum en vitesse de contrainte sous la forme suivante :

La vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$  minimise la fonctionnelle :

$$(11) \quad B(\dot{\sigma}^*) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{\sigma}^* E^{-1} \dot{\sigma}^* d\Omega - \int_{S_u} \dot{u}^d \cdot \dot{\sigma}^* \cdot n ds \quad ,$$

parmi les vitesses  $\dot{\sigma}^*$  compatibles avec les conditions de plasticité (9) et les conditions statiques (8ii) .

Il s'agit d'une minimisation de fonctionnelle quadratique sous "contraintes" égalité (8ii) et inégalité (9) .

### 3.2.3- Exercice :

On peut simplifier les expressions de A et B en introduisant la réponse purement élastique  $(u^E, \sigma^E)$  qui représente les déplacements et les contraintes obtenus dans les mêmes conditions de charge et de liaison pour une structure fictive, identique, supposée purement élastique, de module E :

- Dans le cas général, le domaine d'élasticité correspond au convexe C, on introduit la norme de l'énergie dans l'espace des contraintes :

$$\langle \sigma, \sigma^* \rangle = \int_{\Omega} \sigma \cdot E^{-1} \cdot \sigma^* dV \quad , \quad \|\sigma\|^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle$$

le cône normal en  $\sigma$  :  $N_{\sigma} = \left\{ n \mid \langle n, \sigma - \sigma^* \rangle \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in P \right\}$

puis le cône tangent :  $T_{\sigma} = \left\{ t \mid \langle t, n \rangle \leq 0 \quad \forall n \in N_{\sigma} \right\}$

- Montrer que si l'on pose  $\dot{e} = E \dot{\epsilon}$ ,  $\dot{e}^p = E \dot{\epsilon}^p$  pour raisonner dans l'espace des contraintes, les vitesses  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{e}^p$  associées à une vitesse  $\dot{e}$  donnée s'écrivent :

$$\dot{\sigma} = \text{Proj}(\dot{e}, T_{\sigma}) \quad , \quad \dot{e}^p = \dot{e} - \text{Proj}(\dot{e}, N_{\sigma}) \quad .$$

- Montrer que les fonctionnelles A et B s'écrivent, à une constante près, sous la forme équivalente suivante :

$$A(\dot{u}) = \frac{1}{2} \left\| \dot{e}(\dot{u}) - \dot{\sigma}^E \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\| \dot{e}^p(\dot{u}) \right\|^2 \quad ,$$

$$B(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \left\| \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^E \right\|^2 \quad .$$

- Si la fonctionnelle B est strictement convexe, A ne l'est pas dans le cas général. *Etudier l'unicité des vitesses  $\dot{u}$ ,  $\dot{\sigma}$ .*

#### 3.2.4- Remarques :

La détermination des vitesses  $\dot{u}$ ,  $\dot{\sigma}$  pour un état de contrainte  $\sigma$  donné a une importance capitale pour différentes raisons :

- Le calcul effectif, théorique ou numérique, des problèmes posés dans la pratique de l'ingénieur doit nécessairement s'effectuer de proche en proche, compte-tenu du caractère incrémental des lois de comportement. On a l'habitude de donner une description "naturelle" en termes d'incréments de contrainte et de déplacement.
- La deuxième raison est plus profonde car elle concerne les effets de l'érouissage, que jusqu'à maintenant nous avons négligé en nous limitant au schéma de plasticité parfaite. L'érouissage réel est un phénomène compliqué, tout ce qu'on peut dire avec certitude, c'est que le domaine d'élasticité évolue avec la déformation plastique. Si l'on n'adopte pas une schématisation précise de l'érouissage, la formulation du problème d'évolution globale est impossible. Dans les traités classiques de plasticité, on s'est donc limité à décrire le comportement purement mécanique en vitesses.

Mais, il est clair que la résolution du problème en vitesses ne permet pas d'établir les résultats globaux sur l'évolution.

#### 4.- ETUDE DE L'EVOLUTION QUASI-STATIQUE

Nous passons en revue dans ce paragraphe quelques résultats généraux de l'évolution quasi-statique.

Les premiers concernent la question de l'existence. D'une façon générale, on constate que les modélisations moins physiques posent souvent plus de difficultés mathématiques. Parmi tous les modèles de matériaux considérés au chapitre II, le schéma élastique parfaitement plastique est le plus difficile à étudier lorsque l'on souhaite établir des résultats globaux sur l'évolution. Pour cette raison, ce schéma a donné lieu à de nombreuses discussions. Le modèle visco-élastique est par contre le plus simple. Il permet de retrouver certains aspects du schéma plastique lorsque l'on fait tendre le coefficient de viscosité vers 0, c'est la méthode de régularisation viscoplastique ou viscoélastique. L'introduction d'un écrouissage strictement positif régularise aussi le problème plastique.

L'unicité de la réponse en contrainte est assurée dès que les données en force sont compatibles avec le seuil de plasticité. La détermination des déplacements pose par contre des problèmes de régularité, la (ou les) solution(s) présente(nt) souvent des surfaces de discontinuité bien connues dans les études classiques de plasticité.

##### 4.1- Existence et régularité des solutions en plasticité parfaite

---

Les résultats les plus complets concernant l'existence, sont dûs à Moreau, Johnson et Suquet. Pour simplifier, on ne présente ici que les résultats de Suquet (1978).

On fait les hypothèses suivantes :

- Régularité des données :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^d \in W^{1,\infty} (0, T, H^{1/2}(S_u)) \\ R^d \in W^{1,\infty} (0, T, L^2(S_R)) \\ f \in W^{1,\infty} (0, T, L^2(\Omega)) \end{array} \right. .$$

- Données en force compatibles avec le seuil de plasticité :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose qu'il existe une contrainte } \chi \in W^{1,\infty} (0, T, L^\infty(\Omega)), \\ \text{vérifiant :} \\ \bullet \chi_t \in S(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ \bullet \chi_t \text{ est strictement contenu dans } P \text{ au sens suivant :} \\ \text{La boule de rayon } \delta > 0, \text{ centré au point } \chi(x, t) \text{ est strictement} \\ \text{contenue dans le domaine d'élasticité } C \text{ au point } x. \end{array} \right.$$

La condition (13) est une condition de sécurité. Elle traduit le fait que les données en force ne dépassent pas la limite supportable pour la structure (on reviendra sur cette question au chapitre VII).

Alors, on obtient la conclusion suivante :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un couple } (\sigma, V), \sigma \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \dot{\sigma} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \\ V \in L^2(0, T, DB(\Omega)) \text{ vérifiant p.p. } t \text{ une formulation} \\ \text{"faible" :} \\ \bullet \sigma \in P \cap S(t) \\ \bullet \int_{\Omega} \dot{\sigma} E^{-1} (\sigma^* - \sigma) d\Omega - \int_{S_u} \dot{u}^d (\sigma^* - \sigma) n ds - \int_{\Omega} V(\text{Div } \sigma^* - \text{Div } \sigma) d\Omega \\ \quad \forall \sigma^* \in P \quad \quad \quad - \int_{S_R} V(\sigma^* - \sigma) n ds \geq 0, \end{array} \right.$$

ainsi que les conditions initiales.

$DB(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions  $V \in L^2(\Omega)$  telles que  $d_{ij}(V)$  sont des mesures bornées sur  $\Omega$  :

$$(15) \left\{ DB(\Omega) = \left\{ V \mid V_i \in L^2(\Omega), \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \in M^1(\Omega) \right\} \right\} .$$

Le lecteur peut se référer aux travaux de Suquet, Moreau, Temam et Strang ... pour les compléments mathématiques sur l'espace fonctionnel  $DB(\Omega)$ . Physiquement,  $DB(\Omega)$  permet de traduire les discontinuités observées (surface de glissement, rotule ou charnière plastique) dans les problèmes particuliers. Il est intéressant de remarquer que la solution en vitesse de déplacement  $V$  ne vérifie pas nécessairement les conditions de liaison imposées  $V = \dot{u}^d$  sur  $S_u$  au sens classique. Une fonction  $V \in DB(\Omega)$  possède sur une surface une trace interne  $V_-$  et une trace externe  $V_+$ , seule  $V_+$  vérifie les conditions de liaison. Les équations (14) sont "naturelles", car elles traduisent simplement d'une façon globale le principe du travail maximal  $\dot{\varepsilon}^p(\sigma - \sigma^*) \geq 0$ . Si l'on adopte la méthode de régularisation visco-plastique, les principales étapes de la démonstration sont :

- On remplace le matériau plastique considéré par un matériau visco-élastique à potentiel de dissipation régulier associé, défini par :

$$\dot{\varepsilon}^v = \frac{1}{\eta} (\sigma - \text{Proj}(\sigma, c)) .$$

On démontre alors que l'évolution quasi-statique pour ce matériau admet une solution  $(\sigma_\eta, V_\eta)$  telle que  $\sigma_\eta \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ ,  $\dot{\sigma}_\eta \in L^\infty(0, T, L(\Omega))$ ,  $V_\eta \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ .

- On fait des estimations a priori sur  $(V_\eta, \sigma_\eta)$  :

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &\in \text{borné de } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \\ \dot{\sigma}_\eta &\in \text{borné de } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \\ V_\eta &\in \text{borné de } L^2(0, T, DB(\Omega)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite,  $\eta \rightarrow 0$ , on construit un couple  $(\sigma, V)$  et on justifie que ce couple vérifie les équations (14).

#### 4.2- Evolution de la contrainte :

-----

On a vu lors de l'étude du problème en vitesse que l'introduction de la réponse purement élastique  $u^E, \sigma^E$  permet de simplifier les équations. Dans le même esprit, on va introduire les contraintes résiduelles  $\sigma^R$  et les déplacements résiduels  $u^R$  :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma^E + \sigma^R \\ u = u^E + u^R \end{array} \right. ,$$

les quantités  $(\sigma^E, u^E), (\sigma^R, u^R)$  sont respectivement solutions des problèmes d'élasticité suivants :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet u^E \in U(t) \\ \bullet \sigma^E \in S(t) \\ \bullet \sigma^E = E \cdot \varepsilon^E \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2} (u_{i,j}^E + u_{j,i}^E) \end{array} \right. ,$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet u^R \in U_0 = \left\{ u \mid u = 0 \text{ sur } S_u \right\} \\ \bullet \sigma^R \in S_0 = \left\{ \sigma \mid \text{Div } \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } S_R \right\} \\ \bullet \sigma^R = E (\varepsilon^R - \varepsilon^P) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij}^R = \frac{1}{2} (u_{i,j}^R + u_{j,i}^R) \end{array} \right. ,$$

$S_0$  est l'ensemble des champs de contrainte auto-équilibrés. On sait, d'après le chapitre III, que :  $\sigma^R = -\text{proj}(\varepsilon^P, S_0) = -Z \cdot \varepsilon^P$ .

On va maintenant montrer que la contrainte  $\sigma$  est solution d'un problème variationnel simple.

En effet,  $\forall \sigma^* \in S(t)$ ,  $\sigma_t - \sigma^* \in S_0$ . Comme  $\dot{u}_t - \dot{u}_t^E \in U_0$ , on a :

$$\int_{\Omega} (\sigma - \sigma^*) (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^E) dV = 0 ,$$

soit :

$$\int_{\Omega} (\sigma - \sigma^*) (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p + \dot{\varepsilon}^E) dV = 0 .$$

Si en plus  $\sigma^* \in P$ ,  $\int_{\Omega} (\sigma - \sigma^*) \dot{\varepsilon}^D \geq 0$  d'après les relations (4), il en résulte que :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \sigma^* \in P \cap S(t) \\ \langle \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^E, \sigma^* - \sigma \rangle \geq 0 \end{array} \right. .$$

Dans l'espace des contraintes muni du produit scalaire de l'énergie  $\langle, \rangle$  on peut donc écrire l'équation différentielle que vérifie la contrainte  $\sigma$  :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} + N_{P \cap S}(t) (\sigma) = \dot{\sigma}^E \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{array} \right. .$$

L'équation (20) a été étudiée par Moreau depuis 1970 pour des convexes mobiles quelconques, qui ne sont pas nécessairement de la forme  $P \cap S(t)$ , i.e. intersection d'un convexe fixe et d'un espace affine mobile par translation. Des problèmes d'origine diverse se posent sous la même forme dans des contextes différents de la Mécanique (Econométrie, ...).

L'unicité de la réponse en contrainte est évidente d'après (19). En effet, s'il existe deux solutions éventuelles  $\sigma_1, \sigma_2$  on obtient :

$$\forall t \quad \langle \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}^E, \sigma_2 - \sigma_1 \rangle \geq 0, \quad \langle \dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}^E, \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \geq 0,$$

soit  $\langle \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2, \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \leq 0$ , ce qui donne par intégration :

$$(21) \quad \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|^2 \leq \|\sigma_1(0) - \sigma_2(0)\|^2 \quad \forall t \geq 0 .$$

Cette inégalité montre que la distance entre deux solutions éventuelles ne peut que décroître. L'unicité résulte alors des conditions initiales  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \sigma_0$ .

### 4.3- Evolution de la déformation plastique :

-----

On a vu que la vitesse de déformation n'est pas nécessairement une fonction régulière (mesures bornées sur  $\Omega$ ). Comme la contrainte est régulière, cette irrégularité provient de la vitesse de déformation plastique. Par intégration, la déformation plastique n'est pas nécessairement régulière.

Dans les problèmes particuliers, lorsque le trajet de charge est proportionnel à un paramètre de chargement pris comme le temps, i.e.  $u^d(t) = t u_0^d$ ,  $R^d(t) = t R_0^d$ ,  $f(t) = t f_0$ , à partir de l'état naturel  $\sigma_0 = 0$ , souvent on constate, comme dans l'exemple de l'enveloppe sphérique, que la réponse est d'abord élastique, ensuite la zone plastique s'étend au sein du volume. Au début, la déformation plastique peut être régulière, elle se concentre ensuite sur des zones faibles et donne naissance à des surfaces de discontinuité, c'est le phénomène de déformation localisée, bien connu en Mécanique.

Tant que la déformation plastique reste régulière ( $\epsilon^p \in L^2(\Omega)$  pour fixer les idées), on peut formuler son évolution à partir de l'expression  $\sigma^r = -Z e^p$ . La loi de normalité  $\dot{\epsilon}^p$  ( $\sigma - \sigma^*$ )  $\geq 0$  s'écrit sous la forme globale :

$$(22) \quad \langle \dot{\epsilon}^p, \sigma^E - Z e^p - \sigma^* \rangle \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in P,$$

de sorte que formellement, on obtient l'équation différentielle :

$$(23) \quad \dot{\epsilon}^p = N_p (\sigma^E - Z e^p).$$

L'équation (23) est très utile dans les études de stabilité.

## 5.- COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE : ADAPTATION

On vient d'étudier l'évolution d'une structure élastique, parfaitement plastique, soumise à un trajet de charge à partir d'une donnée initiale. Dans certains cas, on ne dispose que de peu de renseignements sur l'état initial du matériau, une étude précise de l'évolution n'a alors qu'un intérêt mécanique relativement limité. Il est bien plus intéressant de connaître l'influence de cette donnée initiale sur le comportement ultérieur du système.

La théorie de l'adaptation donne une réponse satisfaisante dans cette direction et concerne le comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution. En particulier, elle est à la base du calcul de résistance des structures aux phénomènes de rupture par déformation plastique cumulée ou alternée, une des préoccupations principales de l'Ingénieur. Depuis les travaux de Melan (1936), elle a fait l'objet de nombreuses études dont les plus intéressantes sont dues à Koiter. Des travaux plus récents ont contribué à une formulation mathématique plus cohérente des résultats obtenus par ces deux auteurs.

Il s'agit d'étudier le comportement asymptotique des solutions  $u(t)$ ,  $\sigma(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le trajet de charge étant décrit par la réponse purement élastique  $(u^E(t), \sigma^E(t))$  donnée.

### 5.1- Définition de l'Adaptation :

-----

La structure s'adapte pour les charges considérées, si pour  $t \rightarrow +\infty$  la réponse du système tend à devenir purement élastique. Cette condition signifie que :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u^R(t) \rightarrow u_\infty^R & (i) \\ \sigma^R(t) \rightarrow \sigma_\infty^R & (ii) \\ \varepsilon^P(t) \rightarrow \varepsilon_\infty^P & (iii) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire l'existence des limites  $u_\infty^R$ ,  $\sigma_\infty^R$ ,  $\varepsilon_\infty^P$  quelles que soient les données initiales. Ces limites dépendent évidemment des données initiales, mais l'essentiel est que ces limites existent, car alors  $\dot{\sigma} \sim \dot{\sigma}^E$ ,  $\dot{u} \sim \dot{u}^E$ ,  $\dot{\varepsilon}^P \sim 0$

Il est nécessaire cependant de préciser la nature de la convergence dans (24). L'énergie élastique  $W = \frac{1}{2} \sigma \cdot E^{-1} \sigma$  est bien définie pour une solution, la convergence  $\sigma^R(t) \rightarrow \sigma_\infty^R$  est au sens de la norme de l'énergie. Par contre, on a vu que les déformations plastiques sont, dans le cas général, des mesures bornées. Pour simplifier, on adopte une définition plus simple de l'adaptation en exigeant uniquement la condition (24)ii.

### 5.2- Théorème de Melan-Koiter :

-----

On obtient alors le théorème de Melan-Koiter :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{S'il existe un champ de contrainte résiduelle } \sigma_*^R \text{ constant et un} \\ \text{coefficient de sécurité } m > 1 \text{ tels que le champ de contrainte} \\ m(\sigma_*^R + \sigma^E(t)) \text{ satisfasse aux conditions de plasticité } \forall t \geq 0 : \\ m(\sigma_*^R + \sigma^E(t)) \in P \quad , \end{array} \right.$$

alors il y a adaptation quelles que soient les données initiales.

La démonstration du théorème s'effectue en deux étapes :

• On montre que sous les hypothèses adoptées le travail plastique dissipé est nécessairement borné. La puissance dissipée  $D_p$  s'écrit, d'après II(9)

$$D_p = \int_S V \cdot \sigma \cdot n \, ds - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma E^{-1} \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon}^p \, d\mu .$$

On vérifie que  $D_p \geq 0$  d'après les relations (14) en prenant  $\sigma^* = 0$ . La loi de normalité  $\dot{\varepsilon}^p(\sigma - \sigma^*) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in C$  donne en prenant  $\sigma^* = \sigma_*^r + \sigma^E$  puis  $\sigma^* = m(\sigma_*^r + \sigma^E)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_*^r - \sigma^E) \dot{\varepsilon}^p \, d\mu &\geq 0 \\ \int_{\Omega} (\sigma - m \sigma_*^r - m \sigma^E) \dot{\varepsilon}^p \, d\mu &\geq 0 , \end{aligned}$$

soit :

$$\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_*^r - \sigma^E) \dot{\varepsilon}^p \, d\mu \geq \frac{m-1}{m} D_p .$$

Comme  $\sigma - \sigma_*^r - \sigma^E \in S_0$  et  $\dot{u} - \dot{u}^E \in U_0$ , on a aussi :

$$\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_*^r - \sigma^E) \dot{\varepsilon}^p \, d\mu + \langle \sigma - \sigma_*^r - \sigma^E, \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^E \rangle = 0 ,$$

de sorte que :

$$- \langle \sigma - \sigma_*^r - \sigma^E, \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_*^r - \dot{\sigma}^E \rangle \geq \frac{m-1}{m} D_p ,$$

soit :

$$(26) \quad \frac{1}{2} \left\| \sigma(0) - \sigma_*^r - \sigma^E(0) \right\|^2 \geq \frac{m-1}{m} \int_0^t D_p(\tau) \, d\tau .$$

Il en résulte que quelle que soit la donnée initiale  $\sigma(0)$ , le travail plastique dissipé

$$W_p(t) = \int_0^t D_p(\tau) \, d\tau$$

reste borné.

• Dans la deuxième étape, on montre que la contrainte résiduelle  $\sigma^r(t)$  possède une limite  $\sigma_\infty^r$  :

soit  $t_1 < t_2$  ,  $\sigma^r(t_1) = \sigma_1^r$  ,  $\sigma^r(t_2) = \sigma_2^r$  , on cherche à estimer  $\| \sigma_1^r - \sigma_2^r \|$  suivant une méthode due à Nayroles :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \sigma_1^r - \sigma_2^r \|^2 &= \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{\sigma}^r , \sigma^r - \sigma_1^r \rangle dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\bar{\Omega}} \dot{\varepsilon}^p (\sigma^r - \sigma_1^r) d\mu dt \quad . \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} - \dot{\varepsilon}^p (\sigma^r - \sigma_1^r) &= - \dot{\varepsilon}^p (\sigma - \sigma^E - \sigma_*^r + (\sigma_1 - \sigma_1^E - \sigma_*^r)) \\ &= - \dot{\varepsilon}^p (\sigma - \sigma^E - \sigma_*^r) + \dot{\varepsilon}^p \cdot \sigma_1 - \dot{\varepsilon}^p (\sigma_1^E + \sigma_*^r) \quad . \end{aligned}$$

Au second membre, le premier terme est négatif ou nul, le deuxième terme est majoré par  $\sigma \dot{\varepsilon}$  car  $\sigma_1 \in C$ . Si le domaine d'élasticité  $C$  est symétrique par rapport à l'origine (cas des critères de Misès, Tresca),  $-(\sigma_1^E + \sigma_*^r) \in C$ , on a une estimation simple :

$$\frac{1}{2} \| \sigma_1^r - \sigma_2^r \|^2 \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} D_p(\tau) d\tau \quad ,$$

qui montre que la suite  $\sigma^r(t_1)$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$  est de Cauchy, donc convergente, compte-tenu du fait que le travail plastique reste borné.

Si le domaine d'élasticité n'est pas symétrique par rapport à l'origine mais borné, la méthode reste valable moyennant quelques modifications mineures.

Le théorème de Melan-Koiter correspond à une approche statique du problème de l'adaptation. L'approche cinématique, par dualité, a été aussi donnée par Koiter (1961).

## 6.- REMARQUES SUR LES DISCONTINUITES

Si une discontinuité de vitesse apparaît sur une surface  $\Sigma$  du volume de la structure  $\bar{\Omega}$ , la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est une distribution définie sur  $\Sigma$  :

$$(27) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ( [V]_i n_j + [V]_j n_i )$$

où  $[V]$  est la discontinuité de la vitesse à la traversée de  $\Sigma$  dans le sens de la normale  $n$ .

Comme la vitesse de contrainte est régulière ( $\dot{\sigma} \in L^2(\Omega)$ ), la décomposition  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$  montre que la vitesse de déformation plastique s'écrit sur  $\Sigma$  :

$$(28) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ( [V]_i n_j + [V]_j n_i )$$

La loi de comportement  $\dot{\epsilon}^p (\sigma - \sigma^*) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in C$  entraîne alors des restrictions sur la discontinuité  $[V]$  car  $\dot{\epsilon}^p$  doit être une normale extérieure au domaine d'élasticité. Pour le critère de Misès, par exemple, le domaine d'élasticité étant défini par  $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - k^2 \leq 0$  avec  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ , les restrictions sont les suivantes (Halphen [10]) :

- . Une discontinuité de vitesse est purement tangentielle  $[V] \cdot n = 0$ .
- . Si  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  désignent les contraintes principales, on doit avoir nécessairement en un point de discontinuité de vitesse  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ .
- . La discontinuité  $[V]$  est dirigée suivant une bissectrice de l'angle  $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_3)$ .
- . Si  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  désignent les bissectrices de  $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_3) = \frac{\pi}{2}$  avec  $(\vec{\sigma}_1, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{4}$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$  la discontinuité de vitesse est positive ( $[V] \cdot \vec{\alpha} \geq 0$  ou  $[\vec{V}] \cdot \vec{\beta} \geq 0$ ).

Si nous admettons que la vitesse est régulière en dehors des surfaces de discontinuité, la puissance plastique dissipée globale  $D_p$  est :

$$(29) \quad \int_{\bar{\Omega}} \sigma \dot{\varepsilon}^p d\mu = \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon}^p dV + \int_{\Sigma} [V] \cdot \sigma \cdot n ds \quad ,$$

où la sommation  $\int_{\Sigma}$  s'étend à toutes les surfaces de discontinuité, elle représente la puissance plastique dissipée concentrée sur des surfaces. La formule (29) s'obtient à partir de (28), ou tout simplement à partir de l'expression générale de la puissance dissipée II(9) :

$$D_p = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n \cdot v ds - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n V ds - \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon}^e d\Omega \quad .$$

En effet, si la vitesse est discontinue sur des surfaces  $\Sigma$ , on peut compléter  $\Sigma$  pour faire une partition de  $\bar{\Omega}$  en morceaux dans lesquels la vitesse est régulière. La formule d'intégration par parties, valable dans chaque morceau, donne alors :

$$D_p = \int_{\Omega} (\sigma \dot{\varepsilon} - \sigma \dot{\varepsilon}^e) d\Omega + \int_{\Sigma} [V] \cdot \sigma \cdot n ds \quad .$$

**CHAPITRE V****EXEMPLES**

On étudie quelques exemples d'évolution de structure en plasticité parfaite. Ce sont des problèmes de flexion circulaire et de torsion de barres cylindriques.

On a vu que la résolution d'un problème d'évolution élasto-plastique est un problème relativement complexe : il faut distinguer la zone plastique de la zone élastique. Dans la zone plastique, la loi de comportement entre les vitesses s'écrit différemment selon que le matériau est en charge ou en décharge.

Ces difficultés expliquent que dans la littérature on ne connaît que très peu de solutions exactes.

## 1.- FLEXION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE

(Solution de J. Mandel)

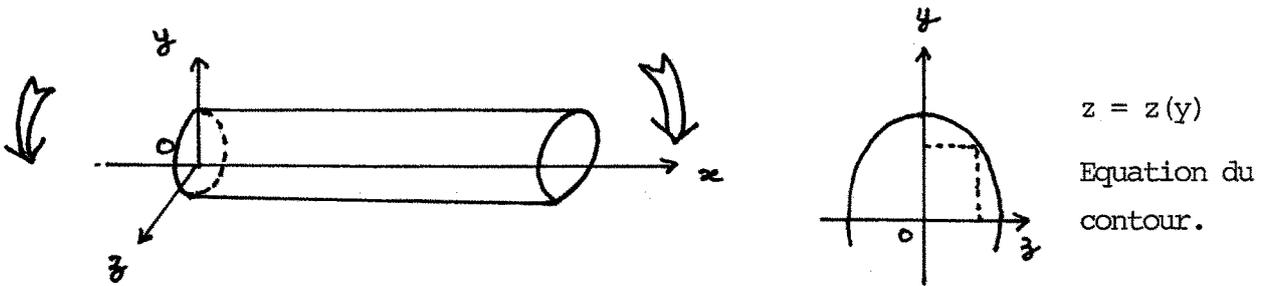
Un cylindre homogène est soumis sur ses deux bases à des couples de flexion égaux et opposés. Le matériau constitutif est élastique parfaitement plastique, obéissant au critère de Tresca. On cherche à construire des solutions explicites possédant les propriétés suivantes :

- les sections planes restent planes et normales à la fibre moyenne après la déformation,
- la contrainte est unidimensionnelle.

Ce sont des hypothèses classiques de la théorie des poutres élastiques. Les conditions aux limites sur les sections extrêmes doivent être compatibles avec les propriétés requises. On impose :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = c \times y \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 \end{array} \right. ,$$

$c(t)$  est une fonction donnée telle que  $\dot{c} > 0$ .



La seule composante non nulle de contrainte est  $\sigma_{xx}$  que l'on notera  $\sigma$  pour simplifier les formules. On a toujours :  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$ ,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  sont indépendants de  $x$ ,  $\varepsilon_{xx} = +cy$ . Les conditions de compatibilité de déformation se réduisent à une seule équation :

$$(2) \quad \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 0 \quad .$$

La courbure  $c$  croît en fonction du temps, le matériau reste en charge dans les zones plastiques. Les équations en vitesse :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda^1 + \lambda^2 \\ \dot{\varepsilon}_{yy} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma} - \lambda^2 \\ \dot{\varepsilon}_{zz} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma} - \lambda^1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(les multiplicateurs plastiques} \\ \lambda^1 \text{ et } \lambda^2 \text{ ont le signe de } \sigma) \end{array}$$

s'intègrent et donnent :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} cy = \frac{\nu}{E} \sigma + \left\langle |cy| - \frac{k}{E} \right\rangle \frac{y}{|y|} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma - G \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma - H \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (G, H \text{ ont le signe de } y) \\ G + H = \left\langle |cy| - \frac{k}{E} \right\rangle \frac{y}{|y|} \end{array} .$$

Dans la zone élastique caractérisée par  $|cy| - \frac{k}{E} < 0$ , les équations (2) sont toujours vérifiées. Dans la zone plastique caractérisée par  $|cy| - \frac{k}{E} > 0$ , les fonctions  $H(y, z)$ ,  $G(y, z)$  doivent vérifier l'équation (2) qui s'écrit :

$$G_{,zz} + H_{,yy} = 0 \quad .$$

En posant :

$$H(y, z) = L(y, z) + v < |cy| - \frac{k}{E} > \frac{y}{|y|}$$

$$G(y, z) = L(y, z) + (1 - v) < |cy| - \frac{k}{E} > \frac{y}{|y|} ,$$

il vient :

$$(5) \quad L_{,ZZ} - L_{,YY} = 0 .$$

La fonction L s'écrit donc sous la forme générale :

$$L = \alpha'(y - z) + \beta'(y + z) .$$

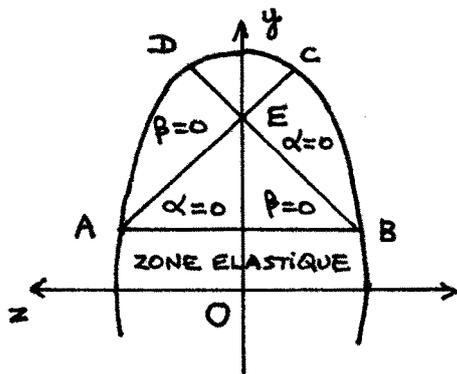
Pour construire le déplacement dans une section, on peut considérer la demi-section supérieure. Dans la zone plastique  $y > \frac{k}{cE}$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = k \\ \varepsilon_{YY} = -\frac{k\nu}{E} + \alpha'(y - z) + \beta'(y + z) - (1 - \nu) \left( cy - \frac{k}{E} \right) \\ \varepsilon_{ZZ} = -\frac{k\nu}{E} - \alpha'(y - z) - \beta'(y + z) - \nu \left( cy - \frac{k}{E} \right) , \end{array} \right.$$

ce qui donne :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = c xy \\ \eta = -\frac{c}{2} \left[ x^2 + \nu(y^2 - z^2) \right] - (1 - 2\nu) \frac{1}{2} \left( cy - \frac{k}{E} \right)^2 + \alpha(y - z) + \beta(y + z) \\ \zeta = -\nu cyz + \alpha(y - z) - \beta(y + z) . \end{array} \right.$$

La continuité du déplacement à la frontière  $y = \frac{k}{cE}$ , conduit à distinguer dans la section différentes régions (fig.) :



$$\alpha = 0 \quad \text{si} \quad y - z < \frac{k}{cE} + z \left( \frac{k}{cE} \right)$$

$$\beta = 0 \quad \text{si} \quad y + z < \frac{k}{cE} + z \left( \frac{k}{cE} \right)$$

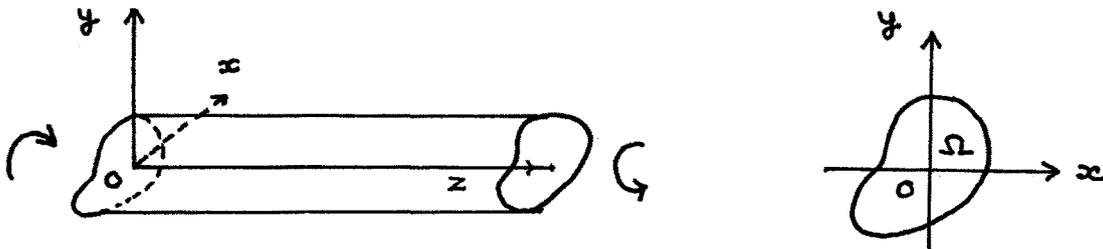
On constate que la solution en déplacement n'est pas unique. Dans la région DEC, les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont arbitraires, la seule restriction est que  $G \geq 0$ ,  $H \geq 0$  soit :

$$(7) \quad -v \left( cy - \frac{k}{E} \right) \leq \alpha' (y - z) + \beta' (y + z) \leq (1 - v) \left( cy - \frac{k}{E} \right)$$

## 2.- TORSION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE

(voir cours de J. Zarka [26])

On considère un cylindre de section  $\Omega$ , de génératrice parallèle à l'axe Oz. Les efforts volumiques sont supposés nuls, ainsi que les efforts de contact sur la surface latérale. Sur chacune de ses bases, on exerce un couple C d'axe parallèle à Oz.



Le matériau constituant est supposé homogène, isotrope.

### 2.1- Etude de la solution en élasticité linéaire :

#### 2.1.1- Calcul direct du déplacement :

En prenant le système d'axe Oxyz dans lequel l'axe Oz passe par le centre d'inertie des sections, on cherche, a priori, un déplacement de la forme :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\alpha zy \\ \eta = \alpha zx \\ \zeta = \alpha \phi(x, y) \end{array} \right. .$$

On voit que  $\alpha$  représente géométriquement l'angle de rotation relative entre deux sections du cylindre distantes de l'unité de longueur,  $\alpha \phi$  représente le gauchissement des sections, indépendant de la cote z, la fonction  $\phi(x, y)$  est à déterminer.

La déformation et la contrainte associées par la loi de l'élasticité linéaire s'écrivent ; compte-tenu de l'isotropie, d'après (8) :

$$(9) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \\ 2 \varepsilon_{xz} = \alpha (\phi_{,x} - y) , \quad 2 \varepsilon_{yz} = \alpha (\phi_{,y} + x) , \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} = \alpha \mu (\phi_{,x} - y) , \quad \sigma_{yz} = \alpha \mu (\phi_{,y} + x) . \end{cases}$$

Les équations d'équilibre  $\operatorname{div} \sigma = 0$  se réduisent à une seule équation :

$$(11) \quad \Delta \phi = 0 ,$$

$\phi$  est donc une fonction harmonique.

Sur la surface latérale du cylindre, le vecteur contrainte est nul. Soit  $n$  une normale extérieure à  $\partial\Omega$  de composantes  $n_x, n_y$ , on doit avoir :

$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y = 0 ,$$

soit d'après (10) :

$$(12) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = y n_x - x n_y .$$

La détermination de  $\phi$  se ramène donc à la résolution d'un problème de Neumann.

Le couple  $C$  s'obtient par intégration sur  $\Omega$  :

$$C = \int_{\Omega} \vec{O m} \wedge (\sigma_{xz} \vec{i} + \sigma_{yz} \vec{j}) d\Omega = \mu \alpha J \vec{k} ,$$

avec :

$$J = \int_{\Omega} (x (\phi_{,y} + x) - y (\phi_{,x} - y)) dx dy ,$$

$J$  est l'inertie de la torsion. C'est une caractéristique de la section, car elle ne dépend que de la géométrie de  $\Omega$ .

Exemple :

Considérons le cas d'un cylindre circulaire de rayon R. L'origine 0 étant le centre du cercle,  $n_x \cdot y - n_y \cdot x = 0$  en tout point de  $\partial\Omega$ . Il en résulte que  $\phi = 0$  est une solution de (11), (12), ce qui donne :

$$\sigma_{yz} = \mu \alpha x \quad , \quad \sigma_{xz} = -\mu \alpha y \quad , \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \quad .$$

2.1.2- Calcul direct de la contrainte :

On cherche a priori une répartition de contrainte dont les seules composantes non nulles sont  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ . Les équations d'équilibre  $\sigma_{xz,z} = 0$ ,  $\sigma_{yz,z} = 0$ ,  $\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} = 0$  sont satisfaites si l'on pose :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \Psi_{,y} \\ \sigma_{yz} = -\Psi_{,x} \end{array} \right.$$

$\Psi$  ne dépend pas de  $z$ ,  $\Psi = \Psi(x, y)$ . Le problème se ramène à la recherche de la fonction de contrainte  $\Psi(x, y)$ .

Les déformations associées sont compatibles si les équations de compatibilité  $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$  sont vérifiées. Elles s'écrivent ici  $\Delta\sigma_{xz} = 0$ ,  $\Delta\sigma_{yz} = 0$ . Il en résulte que  $\nabla(\Delta\Psi) = 0$  ou :

$$\Delta\Psi = -2\beta \quad (\beta : \text{constante}).$$

La signification de la constante  $\beta$  est claire si l'on compare les expressions des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{,y} = \mu \alpha (\phi_{,x} - y) \\ -\Psi_{,x} = \mu \alpha (\phi_{,y} + x) \end{array} \right. \quad .$$

On obtient par élimination de  $\phi$ ,  $\Delta\Psi = -2\alpha \mu$  soit  $\beta = \mu \alpha$ .

Les conditions aux limites  $\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y = 0$  sur  $\partial\Omega$  donnent

$$\Psi_{,y} \cdot n_x - \Psi_{,x} n_y = 0 \quad \text{soit} \quad \nabla \Psi \cdot \tau = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\Psi}{ds} = 0 ,$$

$s$  désigne l'abscisse curviligne sur le contour  $\partial\Omega$ . Si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe, on peut prendre  $\Psi = 0$  sur  $\partial\Omega$  car la fonction  $\Psi$  n'est définie qu'à une constante près.

La fonction de contrainte s'obtient par la résolution du problème de Dirichlet :

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta\Psi = -2\mu \alpha \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} .$$

Le couple de torsion  $C$  est :

$$C = \vec{k} \int_{\Omega} (x \sigma_{yz} - y \sigma_{xz}) d\Omega = -\vec{k} \int_{\Omega} (x \Psi_{,x} + y \Psi_{,y}) d\Omega = 2 \vec{k} \int_{\Omega} \Psi d\Omega .$$

Exemples :

. *Section circulaire de rayon R :*

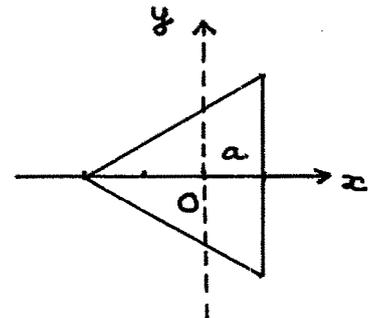
$$\Psi = \frac{1}{2} \mu \alpha [R^2 - (x^2 + y^2)] .$$

. *Section de forme triangle équilatéral de hauteur  $h = 3a$  :*

$$\Psi = -\frac{\mu\alpha}{6a} (x - a)(x - y\sqrt{3} + 2a)(x + y\sqrt{3} + 2a)$$

$$\phi = \frac{y}{6a} (3x^2 - y^2)$$

$$C = \frac{9}{5} \sqrt{3} a^4 \mu \cdot \alpha .$$



## 2.2- Etude de la solution en plasticité parfaite :

On admet que le matériau obéit au critère de Misès. Le temps réel n'intervenant pas, on peut prendre comme paramètre l'angle de torsion  $\alpha$  que l'on augmente d'une façon monotone.

Par analogie avec la solution élastique, le problème se ramène à la détermination des deux fonctions  $\phi(x, y, \alpha)$ ,  $\Psi(x, y, \alpha)$ .

Le critère de Misès s'écrit simplement :

$$(15) \quad |\nabla\Psi|^2 = \Psi_{,X}^2 + \Psi_{,Y}^2 = k^2 \quad .$$

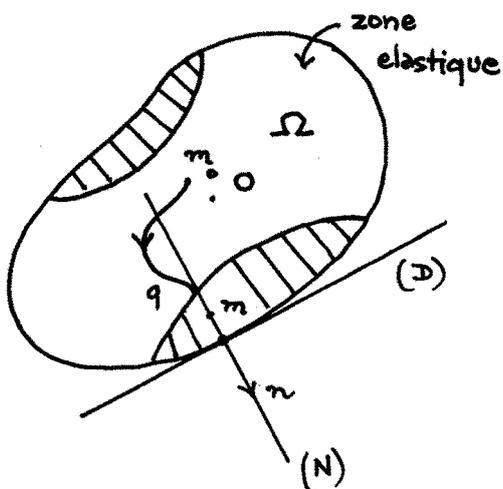
Les relations de comportement entre vitesses s'écrivent :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{,X} - Y = \frac{1}{\mu} \dot{\Psi}_{,Y} + \lambda \Psi_{,Y} \\ \phi_{,Y} + X = \frac{1}{\mu} \dot{\Psi}_{,X} - \lambda \Psi_{,X} \end{array} \right. ,$$

avec  $\lambda \geq 0$  si  $|\nabla\Psi| = k$  et si  $|\dot{\nabla\Psi}| = 0$   
 $\lambda = 0$  si  $|\nabla\Psi| < k$  ou si  $|\nabla\Psi| = k$  et si  $|\dot{\nabla\Psi}| < 0$  .

### 2.2.1- Calcul de la contrainte :

On démontre (nous ne le ferons pas ici), lorsque l'angle de torsion  $\alpha$  augmente, que le premier point plastique apparaît toujours sur le contour  $\partial\Omega$  ; la région plastique s'étend vers l'intérieur, un point plastique reste plastique, il n'y a jamais de décharge élastique.



Les zones plastiques sont définies par l'équation (15). Dans les zones élastiques,  $|\nabla\Psi| < k$ , mais la fonction  $\Psi$  doit vérifier l'équation  $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$ . La fonction  $\Psi$  s'obtient de la manière suivante :

On introduit l'ensemble des fonctions admissibles :

$$(17) \quad K = \left\{ \Psi \in H_0^1(\Omega) \mid |\nabla \Psi| \leq k \text{ p.p.} \right\}$$

et on établit la proposition :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La solution } \Psi \text{ minimise dans } K \text{ la fonctionnelle :} \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} 2 \mu \alpha \Psi \, d\Omega \end{array} \right. .$$

En effet, on vérifie sans peine que la solution du problème (18) possède toutes les propriétés requises.

Pour obtenir  $\Psi$ , en résumé, on doit résoudre un problème de programmation convexe. Il est utile de remarquer que si  $d(m)$  désigne la distance d'un point  $m(x, y)$  à la frontière  $\partial\Omega$ , on obtient :

$$(19) \quad \Psi(x, y) = k d(m(x, y)) \quad ,$$

lorsque  $m$  appartient à une zone plastique.

### 2.2.2- Calcul du déplacement :

On admet que la fonction  $\Psi$  a été déterminée par la résolution du problème (18). La formule (19) montre d'ailleurs que lorsqu'un point devient plastique, la fonction  $\Psi$  reste constante, indépendante de l'angle de torsion  $\alpha$ .

En un point de la frontière  $\partial\Omega$ , situé dans la zone plastique (fig.), soient  $n$  la normale extérieure,  $\theta$  l'angle  $(Ox, n)$ . La tangente (D) a pour équation  $x \cos \theta + y \sin \theta - f(\theta) = 0$ , la normale (N) a pour équation  $-x \sin \theta + y \cos \theta - f'(\theta) = 0$ .

En un point de la normale (N), situé dans la zone plastique, on a donc  $\Psi(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta - f(\theta)$ . Les relations (16) donnent :

$$\phi_{,x} - y = \lambda \sin \theta$$

$$\phi_{,y} + x = -\lambda \cos \theta$$

de sorte que  $\nabla\phi \cdot n = y \cos \theta - x \sin \theta = f'(\theta)$ . Si  $q$  est l'intersection de (N) avec la frontière élastoplastique actuelle  $\Gamma$ , on a alors :

$$\phi(m) = \phi(q) + q m \cdot f'(\theta) \quad .$$

Les relations (16) permettent de relier  $\phi(q)$  à  $\phi(m_0)$  où  $m_0$  est un point quelconque de la zone plastique, par intégration le long d'une courbe par exemple. On construit ainsi la fonction  $\phi$  dans  $\Omega$ .

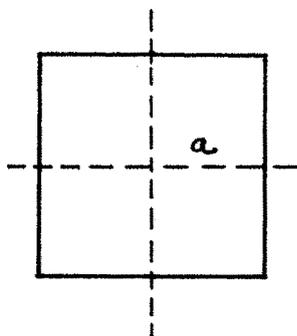
### 2.2.3- Exercices :

- Section circulaire de rayon R :

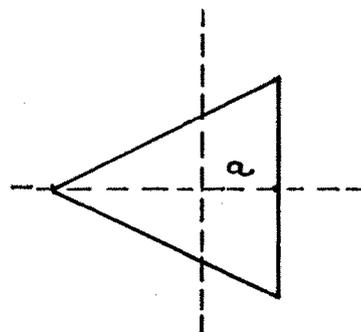
Déterminer l'angle de rotation  $\alpha_p$  qui provoque les premières plastifications.

Calculer la fonction  $\Psi$ , la fonction  $\phi$  et le couple de torsion C en fonction de  $\alpha$ .

- Déterminer  $\Psi$ , C pour les sections suivantes :



Carré de côté  $2a$



Triangle équilatéral de hauteur  $3a$ .

CHAPITRE VI
-------------

ANALYSE LIMITE
----------------

Ce chapitre est une introduction à l'analyse limite. On y étudie la notion de charge limite et la ruine des structures parfaitement plastiques par déformations plastiques non contenues.

Dans les exemples d'évolution de structure élastique, parfaitement plastique, considérés aux chapitres précédents, on peut constater que la réponse élasto-plastique passe souvent par trois étapes.

La première étape est élastique, le matériau est partout élastique. Cette étape dure jusqu'à ce que les premières plastifications apparaissent. Mais, le fait que le critère de plasticité  $f(\sigma) = 0$  soit atteint, ne signifie pas nécessairement la ruine de la structure. Si la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  reste "contrôlée", la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}^p$  n'est pas illimitée, car elle s'exprime en fonction de  $\dot{\epsilon}$  par les formules II(32), II(36). Dans l'exemple de l'enveloppe sphérique sous pression, la vitesse de déformation est contrôlée par la couronne élastique extérieure qui empêche toute possibilité de déformation plastique non limitée. On dit que la déformation plastique reste contenue.

La deuxième étape correspond à l'apparition et à l'extension d'une ou plusieurs régions appelées zone plastique, dans laquelle, en chaque point, le critère de plasticité est atteint. Pendant cette étape, on peut encore augmenter la charge appliquée jusqu'au moment où les régions élastiques ne permettent plus de contrôler la vitesse de déformation.

C'est la dernière étape qui indique le début de la ruine par déformation plastique non contenue de la structure.

## 1.- NOTION DE CHARGE LIMITE

Pour mieux comprendre la troisième étape, on va considérer le cas du chargement progressif à un paramètre  $\delta$  d'une structure quelconque.

La structure, de volume  $\Omega$ , est soumise sur une partie  $S_R$  de sa frontière à des efforts de surface  $\delta \cdot R^0$ , sur la partie complémentaire le déplacement nul est imposé ( $u^d = 0$ ). On suppose, pour simplifier, qu'il n'y a pas d'effort de volume. En augmentant progressivement  $\delta$  à partir de 0, on définit un trajet de charge à un seul paramètre  $\delta$ .

Il est intuitif qu'une structure réelle ne résiste pas indéfiniment. Si le matériau est élastique parfaitement plastique et si les changements de géométrie sont négligeables, une étude complète de l'évolution quasi-statique devrait mettre en évidence les différentes étapes de la réponse élasto-plastique. En particulier, la dernière étape fournit la charge maximale admissible  $\delta_m$ . La connaissance de  $\delta_m$  est évidemment, pour l'Ingénieur, un renseignement capital dans le dimensionnement des structures réelles.

### 1.1- Une estimation :

Une estimation évidente de  $\delta_m$  provient de l'étude du problème d'évolution. En effet, on rappelle que la solution en contrainte  $\sigma(\delta)$  vérifie l'équation différentielle IV(20) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} + N_P \cap S(\delta) (\sigma) = \dot{\sigma}^E \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{array} \right. ,$$

dans laquelle P désigne l'ensemble des champs de contrainte plastiquement admissibles,  $S(\delta)$  l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} P = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega) \mid \sigma \in C \quad \forall x \in \Omega \right\} \\ S(\delta) = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \text{Div } \sigma = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = \delta \cdot R^0 \quad \text{sur } S_R \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Au moment de la ruine,  $\delta = \delta_m$  et  $\sigma \in P \cap S(\delta_m)$ . Si l'on introduit la quantité :

$$(3) \quad \delta_L = \sup_{P \cap S(\delta) \neq \emptyset} \delta = \sup_{\substack{(\sigma, \delta) \\ \sigma \in P \\ \sigma \in S(\delta)}} \delta$$

on a nécessairement  $\delta_m \leq \delta_L$ . Le coefficient  $\delta_L$ , d'après sa définition (3) est tel que  $P \cap S(\delta)$  soit l'ensemble vide pour tout  $\delta > \delta_L$ . C'est une majorante de la charge maximale admissible  $\delta_m$ .

## 1.2- Caractérisation de la charge limite :

---

Il est cependant nécessaire de préciser la notion de charge maximale admissible  $\delta_m$  que l'on appellera charge limite associée au chargement considéré. Au moment de la ruine, les déformations plastiques ne sont plus contrôlées, l'état de contrainte à cet instant est un état d'équilibre limite au sens de la définition suivante :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in P \cap S(\delta_m) \quad \text{et} \quad \exists V \in V_0 = \left\{ \text{Vitesse} \mid V_+ = 0 \quad \text{sur } S_u \right\} \\ \text{tel que } \dot{\varepsilon}(V) = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \neq 0 \quad \text{vérifie} \\ \dot{\varepsilon}(V) = N_P(\sigma) \end{array} \right.$$

Autrement dit, on peut associer au champ de contrainte statiquement et plastiquement admissible  $\sigma$  un champ de vitesse de déformation plastique compatible  $\dot{\varepsilon}(V)$  suivant la règle de normalité.

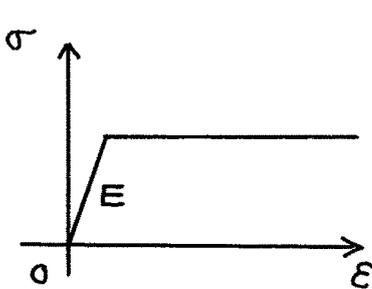
### 1.3- Modèle rigide - plastique :

-----

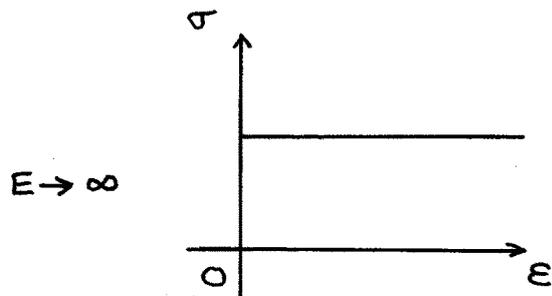
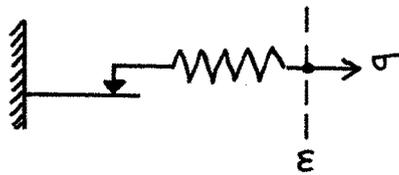
La loi de comportement introduite dans (4), à savoir :

$$(5) \quad \dot{\varepsilon}(V) = N_C(\sigma) \Leftrightarrow (\dot{\varepsilon}_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in C) ,$$

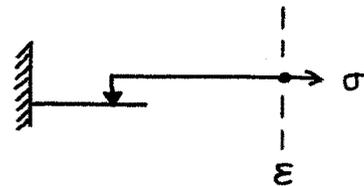
définit un matériau particulier, appelé *modèle rigide-plastique associé* au modèle élasto-plastique considéré. Il s'agit d'un matériau identique en ce qui concerne les caractéristiques plastiques (même critère de plasticité, même règle d'évolution de la déformation plastique), mais la vitesse de déformation est purement plastique. La figure ci-après donne une interprétation unidimensionnelle du modèle.



Matériau élasto-plastique.



Matériau rigide-plastique.



#### 1.4- Exemple :

-----

Revenons à l'exemple de l'enveloppe sphérique sous pression. Si l'on admet que la répartition de contrainte respecte toujours la symétrie sphérique, d'après (3),  $\delta_L$  est le maximum des coefficients  $\delta$  qui satisfont aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \leq 2k \\ \sigma_{rr}(b) = 0 \\ \sigma_{rr}(a) = \delta \end{array} \right. .$$

Il en résulte que  $\delta_L = 2k \text{ Log } \frac{b}{a}$ . La pression intérieure  $2k \text{ Log } \frac{b}{a}$  est un maximum qu'on ne peut pas dépasser.

## 2.- CALCUL DE LA CHARGE LIMITE

### 2.1- Généralités :

-----

La charge limite  $\delta_m$  s'obtient à partir de la détermination des états d'équilibre limite. D'après (4), un tel état est représenté par le triplet  $(\sigma, V, \delta_m)$  vérifiant les équations locales :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \sigma \in C \quad \text{dans } \Omega \\ \cdot \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j = \delta_m R_i^o \quad \text{sur } S_R \\ \cdot V_i = 0 \quad \text{sur } S_u, \quad V \neq 0 \\ \cdot \dot{\varepsilon}(V) = N_C(\sigma) \end{array} \right.$$

La vitesse  $V$  peut être éventuellement discontinue sur des surfaces, mais la discontinuité  $[V]$  n'est pas arbitraire. Elle doit être compatible avec la loi de normalité, comme il a été expliqué au chapitre IV.

Le système des équations (6) représente un problème aux valeurs propres généralisées. Si l'on suppose que la "valeur propre"  $\delta_m$  a pu être déterminée, le "vecteur propre"  $V$  s'obtient par la résolution d'un problème aux limites non-linéaire. En particulier, le champ de vitesse  $V$  est un mode de ruine.

Le problème aux limites associé correspond aux équations locales :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \sigma \in C \quad \text{dans } \Omega \\ \cdot \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j = R_i \quad \text{sur } S_R \\ \cdot V_i = V_i^d \quad \text{sur } S_u \\ \cdot \dot{\varepsilon}(V) = N_C(\sigma) \end{array} \right.$$

On rappelle que la puissance plastique dissipée  $D(\dot{\epsilon})$  a été définie au chapitre II :

$$(8) \quad D(\dot{\epsilon}) = \sigma \dot{\epsilon} = \sup_{\sigma^* \in C} \sigma^* \dot{\epsilon} .$$

Elle représente aussi le potentiel de dissipation car d'après la définition (8), on obtient :

$$(9) \quad \sigma = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}} .$$

$D(\dot{\epsilon})$  est une densité volumique ou une distribution de surface, selon la nature de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ .

- Exemple :

Pour le critère de Misès, C est défini par l'inégalité  $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - k^2 \leq 0$

$$D(\dot{\epsilon}) = \sup_{|\sigma^*| \leq k} \sigma^* \cdot \dot{\epsilon} = k (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} = k |\dot{\epsilon}| .$$

Si  $\dot{\epsilon}$  est une distribution de surface,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ([V]_i n_j + [V]_j n_i)$  avec  $[V] \cdot n = 0$ , car la discontinuité est alors purement tangentielle l'expression précédente se réduit à :

$$D(\dot{\epsilon}) = \frac{k}{\sqrt{2}} |[V]| .$$

Il est important de remarquer que la relation (9) conduit, comme en élasticité, au principe du minimum pour les vitesses de déformation

(Markov) :

La solution en vitesse  $V$  du problème (7) minimise la fonctionnelle :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(V^*) = \int_{\bar{\Omega}} D(\dot{\epsilon}(V^*)) \, d\mu - \int_{S_R} R \cdot V^* \, ds , \\ \text{parmi les champs de vitesse } V^* \text{ cinématiquement admissibles} \\ V_i^* = V_i^d \text{ sur } S_u \text{ et compatibles avec la loi de normalité ;} \end{array} \right.$$

et par dualité, au principe du minimum pour les contraintes (Hill) :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \text{La solution en contrainte } \sigma \text{ du problème aux limites (7) minimise} \\ \text{la fonctionnelle :} \\ Y(\sigma^*) = - \int_{S_u} V_i^d \cdot \sigma_{ij}^* n_j \, ds \quad , \\ \text{parmi les champs de contrainte statiquement admissibles} \\ \text{(Div } \sigma^* = 0 \text{ dans } \Omega \text{ , } \sigma^* \cdot n = R \text{ sur } S_R) \text{ et plastiquement admis-} \\ \text{sibles ( } \sigma^* \in C \text{ dans } \Omega \text{ ).} \end{array} \right.$$

## 2.2- Méthode statique et méthode cinématique :

-----

Revenons maintenant au problème de charge limite (6). On va établir les propriétés importantes que vérifie nécessairement une solution éventuelle  $(\sigma, V, \delta_m)$ .

On considère d'abord la proposition suivante :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \delta \text{ un niveau de charge quelconque. Si } P \cap S(\delta) \neq \emptyset, \text{ c'est-à-} \\ \text{dire s'il existe au moins un champ de contrainte } \sigma^* \in P \cap S(\delta) \\ \text{alors } \delta \text{ vérifie l'inégalité :} \\ \delta \leq \delta_m \quad . \end{array} \right.$$

En effet, on a :

$$\int_{\Omega} \sigma^* \dot{\varepsilon}(V) \, d\mu = \int_{S_R} \delta R^o \cdot V \, ds$$

et :

$$\int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon}(V) \, d\mu = \int_{S_R} \delta_m R^o \cdot V \, ds$$

car  $\sigma \in S(\delta)$  ,  $\sigma^* \in S(\delta)$ . Or, la loi de normalité  $\dot{\varepsilon}(V) \cdot (\sigma - \sigma^*) \geq 0$  donne :

$$\delta_m = \frac{\int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} \, d\mu}{\int_{S_R} R^o \cdot V \, ds} \geq \frac{\int_{\Omega} \sigma^* \dot{\varepsilon} \, d\mu}{\int_{S_R} R^o \cdot V \, ds} = \delta \quad \text{cqfd} \quad .$$

La proposition (12) montre clairement que l'estimation  $\delta_L$  est exactement la charge limite.

La charge limite  $\delta_m$  est définie par le quotient de Rayleigh :

$$(13) \quad \delta_m = \frac{\int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}(V)) \, d\mu}{\int_{S_R} R^\circ \cdot V \, ds} = \inf_{V^*} \frac{\int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}(V^*)) \, d\mu}{\int_{S_R} R^\circ V^* \, ds} ,$$

où les champs de vitesses  $V^* \in V_0$  sont choisis de telle manière que le quotient soit positif. En effet, pour  $R = \delta_m R^\circ$ , le champ de vitesse  $V$  vérifie le principe du minimum (10), qui s'écrit :

$$0 = \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}(V)) \, d\mu - \int_{S_R} \delta_m R^\circ \cdot V \, ds \leq \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}(V^*)) \, d\mu - \int_{S_R} \delta_m R^\circ V^* \, ds ,$$

ce qui conduit à (13).

On peut aussi exprimer (13) sous une autre forme :

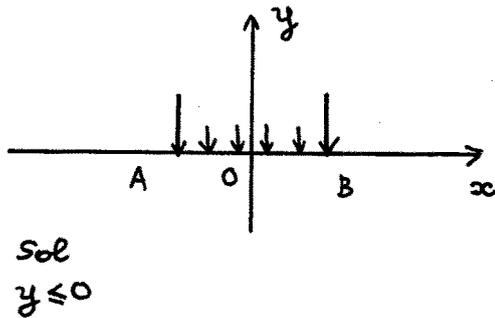
$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \delta \text{ un niveau de charge quelconque. S'il existe un champ de} \\ \text{vitesse } V^* \text{ cinématiquement admissible et compatible avec la loi} \\ \text{de normalité tel que :} \\ \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}(V^*)) \, d\mu \leq \int_{S_R} \delta R^\circ V^* \, ds , \\ \text{alors nécessairement } \delta \geq \delta_m . \end{array} \right.$$

On peut approcher  $\delta_m$  par des valeurs inférieures, en appliquant la proposition (12), c'est la méthode statique de calcul de la charge limite. La proposition (14) permet d'approcher  $\delta_m$  par des valeurs supérieures, c'est la méthode cinématique du calcul de la charge limite. Souvent, on se contente d'un encadrement par excès et par défaut de  $\delta_m$ , car la résolution exacte des problèmes (3), (6) ou (13) est un problème difficile.

2.3- Exemple : Charge limite d'une fondation :  
(J. Mandel [15])

-----

On considère une fondation de largeur  $a$ , de longueur infinie sur un sol plastique, homogène, obéissant au critère de Tresca. On admet que la fondation exerce sur le sol une pression uniforme  $\delta$  et on souhaite calculer la pression maximale admissible  $\delta_m$ .



Critère de Tresca :

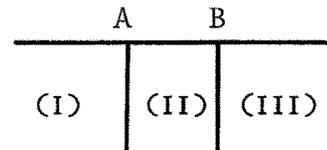
$$\max_{I,J} |\sigma_I - \sigma_J| \leq 2k .$$

Il s'agit d'un problème de déformation plane. On démontre dans ce cas que l'on a dans la zone plastique nécessairement  $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ ,  $\sigma_{zz}$  est donc la contrainte principale intermédiaire.

Méthode statique :

Un champ de contrainte  $\sigma^* \in P \cap S$  ( $4k$ ) s'obtient en prenant :

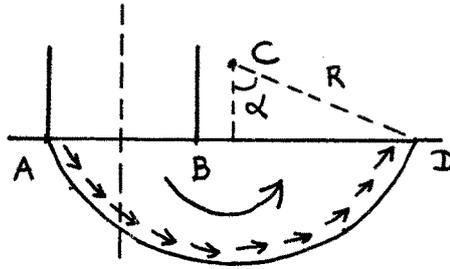
Si $ x  > \frac{a}{2}$	Si $ x  < \frac{a}{2}$
$\sigma_{xx}^* = -2k$	$\sigma_{xx}^* = -2k$
$\sigma_{yy}^* = 0$	$\sigma_{yy}^* = -4k$
$\sigma_{xy}^* = 0$	$\sigma_{xy}^* = 0$



Ce champ n'est pas continu aux limites des régions I, II, III, mais il est bien statiquement admissible pour la pression  $4k$  car lorsque  $|x| = \frac{a}{2}$  le vecteur contrainte  $\sigma \cdot n$  est continu. Ce champ donne  $\delta_m \geq 4k$ .

. Méthode cinématique :

On imagine une répartition de vitesse particulière  $V^*$  dans laquelle la fondation et une partie du sol tournent en bloc en glissant le long d'un arc de cercle de centre C, de rayon R, d'angle  $2\alpha$ .



Cette répartition est cinématiquement admissible et compatible avec la loi de normalité car la discontinuité de vitesse  $[V^*]$  est purement tangentielle sur l'arc AD.

Si  $\omega^*$  est la vitesse de rotation, la vitesse de glissement est  $R \omega^*$ ,  $[V^*] = R \omega^* \vec{\tau}$  et la puissance plastique dissipée est uniquement définie sur l'arc AD,  $\sigma \dot{\epsilon}(V^*) = k R \omega^*$  d'après l'expression donnée du critère de Tresca.

On a :

$$\int_{\Omega} D(\dot{\epsilon}(V^*)) \, d = \int_{AD} k R \omega^* \, ds = 2k R^2 \alpha \omega^*$$

$$\int_{\Omega} R^o \cdot V^* \, ds = \int_{AB} (R \sin \alpha - \frac{a}{2} - x) \omega^* \, dx = (R \sin \alpha - \frac{a}{2}) a \omega^* \quad .$$

Donc :

$$\delta_m \leq \frac{2k R^2 \alpha}{a R \sin \alpha - \frac{a^2}{2}} \quad .$$

Le minimum du second membre s'obtient pour  $a = R \sin \alpha$ ,  $\text{tg } \alpha = 2$  soit  $\alpha = 67^\circ$  et donne  $\delta_m \leq 5,53 k$ .

Ce procédé est très connu en Mécanique des Sols (Cercles de Fellenius).

. Solution exacte :

La valeur exacte est  $\delta_m = (\pi + 2)k$ . Les états d'équilibre limite associés ne sont pas définis d'une manière unique. En voici une solution :

. *Répartition des contraintes :*

Dans AIB :

$$\sigma_{yy} = -(\pi + 2)k, \quad \sigma_{xx} = -\pi k, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{contrainte homogène.}$$

Dans BJK :

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xx} = -2k, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{contrainte homogène}$$

Dans IBJ : Répartition de contrainte en éventail de Prandtl.

En un point quelconque m de l'éventail, les axes  $e_r, e_\theta$  représentent les directions de cisaillement maximal, la pression moyenne  $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$  est constante sur le rayon Bm et varie linéairement suivant l'angle  $\theta$ .

On complète cette répartition en la prolongeant dans le reste de la structure par un champ purement élastique. Ce prolongement, relativement difficile, ne sera pas développé ici.

. *Répartition des vitesses :*

Dans AIB : Enfoncement uniforme  $V_x = 0, V_y = V$ , le triangle AIB se déplace en bloc avec la vitesse  $-V$  suivant Oy.

Dans BJK : Le triangle BJK se déplace en bloc, parallèlement à JK avec la vitesse  $V/\sqrt{2}$ .

Dans IBJ :  $V_r = 0, V_\theta = \frac{V}{\sqrt{2}}$ .

En fait, on peut construire une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire ! On a donné ici une solution à titre indicatif, sans expliciter les raisonnements qui ont permis de l'obtenir.



**CHAPITRE VII****NOTION DE L'ÉCROUISSAGE**

Ce chapitre est consacré à la description de l'écrouissement dans le contexte des milieux standards généralisés. Les modèles usuels sont introduits. En particulier, on établit la régularité de la réponse en déplacement lorsque l'écrouissement est strictement positif.

Lorsqu'un élément de matière subit des déformations plastiques macroscopiques, l'état interne du matériau est modifié. Pour un métal, par exemple, les divers cristaux constitutifs ne sont pas déformés de la même façon, ils subissent des rotations et des glissements relatifs. De même, des glissements microscopiques se produisent dans les mailles cristallines. L'état des contraintes résiduelles intergranulaires évolue ... Ces phénomènes divers peuvent être étudiés d'une façon plus ou moins précise par l'intermédiaire d'un certain nombre de paramètres internes qui, à chaque instant, caractérisent l'état interne du matériau.

L'étude de l'évolution des paramètres internes, c'est-à-dire de la modification de l'état interne avec la déformation, est un problème physique difficile. On connaît de nombreuses analyses microscopiques basées sur les résultats de la Physique des Solides. Ces analyses permettent de comprendre les mécanismes élémentaires de la déformation plastique à l'échelle des mailles cristallines, mais elles ne donnent pas toujours des relations globales, utilisables d'une façon sûre et simple dans les applications pratiques. Pour les applications, on doit souvent adopter une approche différente basée sur des modélisations macroscopiques obtenues à partir des observations à l'échelle humaine. Ce point de vue macroscopique, phénoménologique a été adopté au chapitre II. C'est d'ailleurs la base de toute la Physique macroscopique, i.e. de la Thermo-dynamique, de l'Electromagnétisme et de la Mécanique des Milieux Continus, etc...

On a développé, au chapitre II, une description basée sur le potentiel thermodynamique et le potentiel de dissipation. On va préciser ici les propriétés des matériaux élastoplastiques définis dans ce cadre. Ces matériaux, dits Matériaux Standards Généralisés constituent une extension simple du modèle de plasticité parfaite.

## 1.- MATERIAUX STANDARDS GENERALISES

### 1.1- Rappels sur la loi de comportement ( $T = T_0$ ) :

On rappelle qu'un milieu élastoplastique écrouissable est défini par une densité d'énergie libre  $W$  fonction des variables d'état  $(\varepsilon, \alpha)$  vérifiant :

$$(1) \quad \sigma = \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} .$$

En notant  $A$  la force thermodynamique associée aux paramètres internes  $\alpha$

$$(2) \quad A = - \rho \frac{\partial W}{\partial \alpha} ,$$

la puissance intrinsèque dissipée est :

$$(3) \quad D = A \dot{\alpha} \geq 0 .$$

Les variables internes  $\dot{\alpha}$  évoluent suivant la règle de normalité :

$$(4) \quad \dot{\alpha} = N_C(A) ,$$

où le domaine d'élasticité  $C$  est un domaine convexe, contenant l'origine  $0$  dans l'espace des forces  $A$ .

La signification des paramètres internes dépend des modèles adoptés. Le modèle de plasticité parfaite par exemple correspond à l'expression suivante de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^P) E (\varepsilon - \varepsilon^P) .$$

La déformation plastique  $\varepsilon^P$  est alors le seul paramètre interne.

En général, l'énergie libre ne s'identifie pas à l'énergie élastique emmagasinée. L'expérience montre d'ailleurs que  $\sigma$  ne dépend que de la déformation élastique  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^P$ . Ces conditions nous amènent à admettre que l'énergie libre s'écrit sous la forme séparée :

$$(5) \quad W = W^e (\varepsilon - \varepsilon^p) + W^\alpha (\alpha) = W^e (\varepsilon^e) + W^\alpha (\alpha) \quad ,$$

dans laquelle  $W^e$  est l'énergie élastique emmagasinée,  $W^\alpha$  est l'énergie réversible stockée par modification de l'état interne, d'origine physique diverse.

Les exemples suivants permettent de mieux comprendre la nature de l'érouissage.

## 1.2- Exemples :

### 1.2.1- Erouissage cinématique (Prager, ...) :

Le modèle d'érouissage cinématique de Prager est une généralisation du modèle rhéologique ressort-patin-ressort présenté au chapitre II. Comme en plasticité parfaite,  $\varepsilon^p$  est le seul paramètre interne, mais l'énergie libre s'écrit :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = W^e + W^\alpha \quad \text{avec} \quad W^e = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) E (\varepsilon - \varepsilon^p) \\ W^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^p \cdot H \cdot \varepsilon^p \end{array} \right. .$$

On obtient  $A = \sigma - H \cdot \varepsilon^p$ . Le domaine d'élasticité C est défini dans l'espace des forces  $A_{ij}$  par l'inégalité :

$$f(A) \equiv |A'| - k \leq 0 \quad , \quad |A'|^2 = A'_{ij} A'_{ij} \quad ,$$

où  $A'$  désigne le tenseur déviateur associé à  $A$ ,  $A'_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ij}$  .

1.2.2- Ecrouissage isotrope :

On admet que les paramètres internes sont  $(\epsilon^p, \beta)$ ,  $\beta$  désigne un scalaire à préciser et que l'énergie s'écrit sous la forme :

$$(7) \quad W = W^e + W^\alpha \quad \text{avec} \quad W^e = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon^p) E (\epsilon - \epsilon^p),$$

$$W^\alpha = k(\beta)$$

ce qui donne  $A = (\sigma, B)$  en notant  $B = -k'(\beta)$ .

Si le domaine d'élasticité est défini par l'inégalité

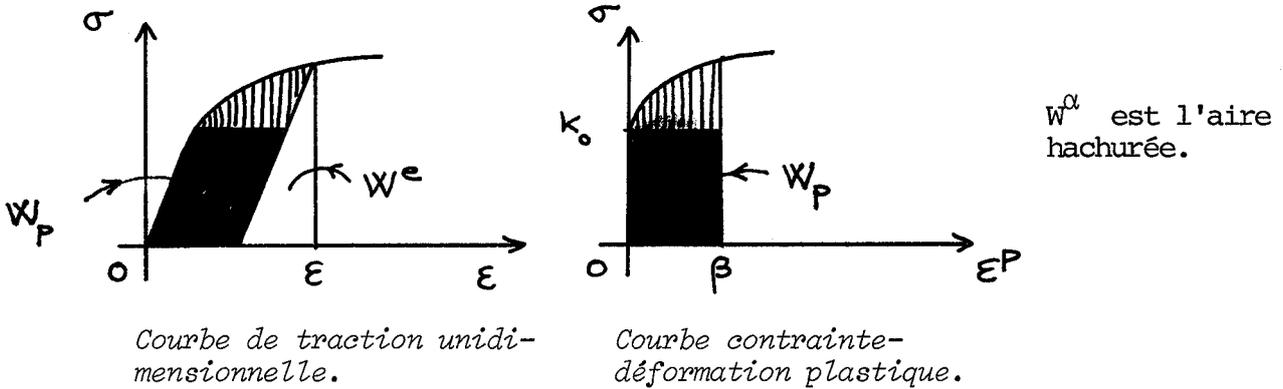
$$f \equiv |\sigma'| + B - k_0 \leq 0 \quad (\Leftrightarrow |\sigma'| - k_0 - k'(\beta) \leq 0) \quad ,$$

on obtient alors d'après la règle de normalité :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad \dot{\beta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial B} \quad \text{soit} \quad \dot{\beta} = |\dot{\epsilon}^p| \quad .$$

Cette équation montre que  $\beta = \beta_0 + \int_0^t |\dot{\epsilon}^p| d\tau$ ,  $\beta$  mesure le chemin décrit par

le vecteur  $\epsilon^p$ , c'est la déformation plastique équivalente. Les fonctions  $W^e$  et  $W^\alpha$  s'obtiennent alors à partir de la courbe de traction unidimensionnelle :



Courbe de traction unidimensionnelle.

Courbe contrainte-déformation plastique.

Fig. : Identification des énergies  $W^e$  et  $W^\alpha$  à partir de la courbe de traction unidimensionnelle.

La puissance dissipée est  $D = \sigma \dot{\epsilon}^p + B \dot{\beta} = k_0 |\dot{\epsilon}^p|$ . L'énergie dissipée  $W_p = \int_0^t D d\tau$  ne s'identifie pas au travail de la déformation plastique  $\int_0^t \sigma \dot{\epsilon}^p d\tau$ .

1.2.3- Modèles rhéologiques :

On considère deux modèles rhéologiques simples avant de faire une discussion générale.

- Patins et Ressorts en série (Prager, Mroz, ...)

Les paramètres internes  $\alpha$  sont la déformation plastique  $\varepsilon^p$  (glissement du premier patin) et les élongations des ressorts  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . L'énergie libre est l'énergie emmagasinée dans tous les ressorts :

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) E (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} E_1 \beta_1^2 + \dots + \frac{1}{2} E_n \beta_n^2 .$$

Les paramètres de force associée sont :

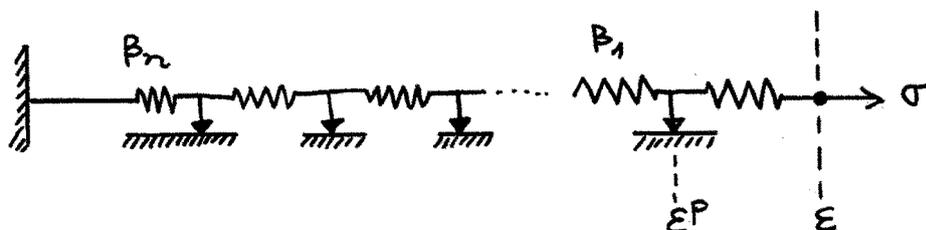
$$A = (\sigma, B_1, \dots, B_n) \quad \text{avec} \quad B_i = -E_i \beta_i, \quad \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^p) ,$$

les  $B_i$  sont donc les tensions dans les ressorts. Si  $k_i$  désigne le seuil de glissement du patin  $i$ , le domaine d'élasticité est alors défini par les inégalités :

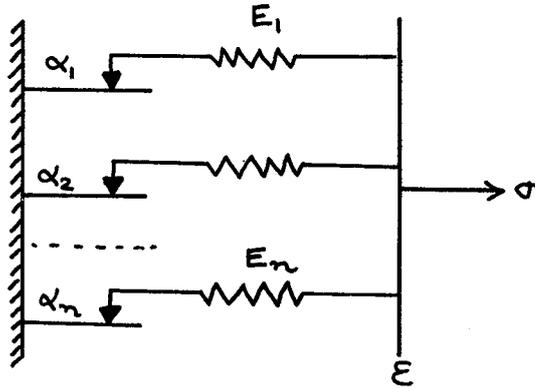
$$\begin{aligned} |\sigma + B_1| - k_1 &\leq 0 \\ |B_2 - B_1| - k_2 &\leq 0 \\ &\dots \\ |B_n - B_{n-1}| - k_n &\leq 0 . \end{aligned}$$

C'est un domaine convexe dans l'espace  $\sigma \times B_1 \times \dots \times B_n$ . Les équations d'évolution s'écrivent d'après la loi de normalité :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \lambda_1 \text{sign} (\sigma + B_1) \\ \dot{\beta}_1 &= \lambda_1 \text{sign} (\sigma + B_1) - \lambda_2 \text{sign} (B_2 - B_1) \\ &\vdots \\ \dot{\beta}_n &= \lambda_n \text{sign} (B_n - B_{n-1}) \end{aligned} \right. .$$



- Patins et ressorts en parallèle :



L'état du système est défini par la déformation  $\epsilon$  et les glissements des patins  $\alpha_i$ . La déformation plastique  $\epsilon^p$  s'obtient par décharge élastique, elle est définie à partir de l'état actuel du système par une décharge imaginaire, tous les patins étant bloqués.

L'énergie libre du système est l'énergie emmagasinée dans tous les ressorts :

$$W = \frac{1}{2} E_1 (\epsilon - \alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} E_n (\epsilon - \alpha_n)^2 \quad .$$

La contrainte est :

$$\sigma = E_1 (\epsilon - \alpha_1) + \dots + E_n (\epsilon - \alpha_n) = \left( \sum_i E_i \right) \epsilon - E_i \alpha_i \quad .$$

Si l'on pose  $E = E_1 + \dots + E_n$ , la définition  $\sigma = E (\epsilon - \epsilon^p)$  conduit à :

$$\epsilon^p = \frac{1}{E} \left[ E_1 \alpha_1 + \dots + E_n \alpha_n \right] \quad .$$

La séparation de l'énergie  $W = W^e + W^\alpha$  découle des expressions de  $W$  et de  $\epsilon^p$ .

Les forces associées sont les tensions des ressorts :

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad \text{avec} \quad A_i = E_i (\epsilon - \alpha_i) \quad .$$

Si  $k_i$  est le seuil de glissement du  $i^{\text{ème}}$  ressort, le domaine d'élasticité  $C$  est défini par les inégalités :

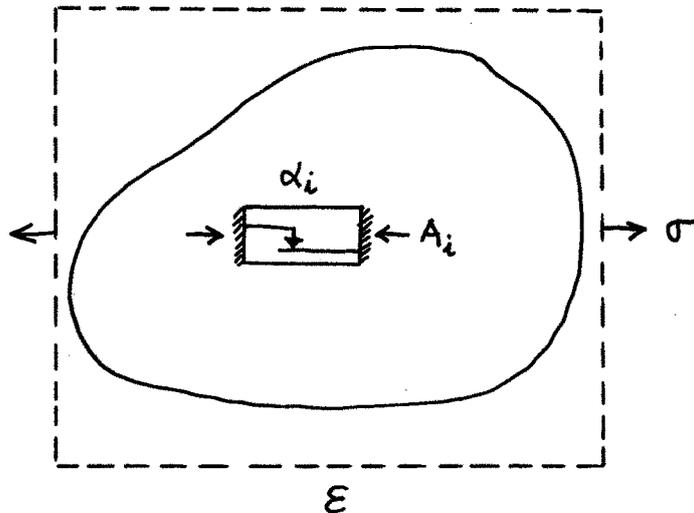
$$|A_i| - k_i \leq 0 \quad , \quad i = 1, n$$

La loi d'évolution  $\dot{\alpha}_i = \lambda_i \text{sign } A_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$  si le patin est actif, traduit bien la règle de normalité.

• Ces deux exemples suggèrent la proposition suivante, d'intérêt pratique important :

(8)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tout modèle rhéologique à élasticité instantanée,} \\ \text{constitué par un assemblage quelconque de patins,} \\ \text{ressorts, est de type standard généralisé.} \end{array} \right.$

On peut démontrer cette proposition de plusieurs manières différentes. La plus simple consiste à isoler tous les patins. Soit  $\alpha_i$  le glissement du  $i^{\text{ème}}$  patin.



Le reste du modèle est une structure élastique avec liaison interne parfaite. Par rapport à un état initial sans contrainte, la structure est soumise à des déplacements imposés  $(\varepsilon, \alpha)$  et emmagasine une énergie  $W(\varepsilon, \alpha)$  dans les ressorts. Le principe des travaux virtuels donne :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \quad \text{et} \quad -A_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad ,$$

$A_i$  désigne la force exercée sur le patin  $i$ . Si les ressorts sont linéaires,  $W$  est fonction quadratique des déplacements imposés :

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon E \varepsilon - \varepsilon G_i \alpha_i + \frac{1}{2} \alpha_i H_{ij} \alpha_j \quad ,$$

et donne :

$$\sigma = E \varepsilon - G_i \alpha_i \quad , \quad -A_i = H_{ij} \alpha_j \quad ,$$

la déformation plastique  $\varepsilon^p$  est alors la quantité  $\frac{1}{E} G_i \alpha_i$ .

Le domaine d'élasticité C et la loi de normalité s'écrivent :

$$|A_i| - k_i \leq 0 \quad , \quad \dot{\alpha}_i = \lambda_i \text{ sign } A_i \quad ,$$

ce qui montre que le modèle est standard généralisé.

On a supposé que les variables  $(\varepsilon, \alpha)$  sont indépendantes, c'est-à-dire qu'on peut déformer (d'une manière élastique) le système à paramètres internes bloqués, d'où la restriction de la proposition à des modèles à élasticité instantanée.

### 1.3- Etude de la loi de comportement élastoplastique écouvissable :

#### 1.3.1- Relations entre vitesses :

• Il est utile de distinguer parmi les paramètres internes la déformation plastique  $\epsilon^p$  des autres variables, notées  $\beta$  comme dans le modèle de patins-ressorts en série. Dans ces conditions, l'énergie libre s'écrit :

$$(9) \quad W = W^e (\epsilon - \epsilon^p) + W^\alpha (\epsilon^p, \beta) \quad ,$$

$$\text{et :} \quad A = (\sigma + B^p, B^\beta) \quad \text{avec} \quad B^p = \frac{-\partial W^\alpha}{\partial \epsilon^p} \quad , \quad B^\beta = \frac{-\partial W^\alpha}{\partial \beta} \quad .$$

Le domaine d'élasticité est un domaine convexe dans l'espace des forces  $(\sigma + B^p) \times B^\beta$  et la loi de normalité devient :

$$(10) \quad (\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}) = N_C (\sigma + B^p, B^\beta) \quad .$$

En particulier, si C s'exprime par une inégalité  $f(\sigma + B^p, B^\beta) \leq 0$ , on obtient :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad f = 0 \\ \dot{\beta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial B^\beta} \quad \quad \quad \lambda = 0 \quad \text{si} \quad f < 0 \end{array} \right. \quad .$$

Comme au chapitre II, la loi de normalité implique la condition II(34) qui s'écrit pour les matériaux écouvissables sous la forme :

$$(12) \quad \dot{\sigma} \dot{\epsilon}^p + \dot{B}^p \dot{\epsilon}^p + \dot{B}^\beta \dot{\beta} = 0 \quad .$$

On va introduire les notations suivantes :

$$(13) \quad E = \frac{\partial^2 W^e}{\partial \epsilon^e \partial \epsilon^e} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} L & N \\ N^T & M \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\text{avec :} \quad L = \frac{\partial^2 W^\alpha}{\partial \epsilon^p \partial \epsilon^p} \quad , \quad N = \frac{\partial^2 W^\alpha}{\partial \epsilon^p \partial \beta} \quad , \quad M = \frac{\partial^2 W^\alpha}{\partial \beta \partial \beta} \quad .$$

Les matrices E et H sont positives si l'on admet aussi la convexité de l'énergie totale :

$$(14) \quad W \text{ fonction convexe} \Leftrightarrow E, H \text{ définis positifs.}$$

Dans ces conditions, l'égalité (12) s'écrit aussi :

$$(15) \quad \dot{\sigma} \dot{\epsilon}^P = \dot{\alpha} H \dot{\alpha} \geq 0 \quad .$$

La convexité de l'énergie implique alors la condition (de Drucker)  $\dot{\sigma} \dot{\epsilon}^P \geq 0$  qui traduit le fait que la courbe contrainte-déformation plastique est non décroissante. On dit, par définition, que l'écrouissage est positif ou nul.

• Comme en plasticité parfaite la vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$  s'exprime en fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  lorsque l'état actuel est supposé connu. Le calcul est très simple lorsque C s'exprime sous la forme d'une seule inégalité  $f(\sigma + B^P, B^\beta) \leq 0$ .

En effet  $\lambda \geq 0$  si  $\dot{f} = 0$  et  $f = 0$ , la première condition s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} + \dot{B}^P) + \frac{\partial f}{\partial B^\beta} \dot{B}^\beta = 0 \quad ,$$

ou :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\epsilon} - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial B^\beta} \right) H \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial B^\beta} \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big| \lambda = 0 \quad .$$

En notant  $N = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial B^\beta} \right)$ , on obtient alors  $\lambda = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\epsilon} \rangle}{N H N + \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma}}$ , ce qui donne :

$$(16) \quad \dot{\epsilon}^P = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\epsilon} \rangle}{N H N + \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{N H N} \langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{si } N H N > 0 \quad ,$$

$$(17) \quad \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} - \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\epsilon} \rangle}{N H N + \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}) \quad ,$$

avec :

$$\Psi^\alpha(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} E \dot{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{1}{N H N + \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} < \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} >^2 .$$

La quantité  $h = N H N$  s'appelle le module d'écrouissage.

$$(18) \quad \text{Module d'écrouissage } h = N H N .$$

### 1.3.2- Stabilité au sens d'Ilyushin :

On va montrer que les matériaux standards généralisés satisfont au "postulat" d'Ilyushin :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout cycle de déformation } \varepsilon(t), t \in [0,1], \varepsilon(0) = \varepsilon(1), \\ \text{le travail de déformation est positif ou nul :} \\ \int_0^1 \sigma \dot{\varepsilon}(t) dt \geq 0 . \end{array} \right.$$

En effet, la relation II(8) donne :

$$\int_0^t A \dot{\alpha} d\tau = \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon} d\tau - W(\varepsilon_0, \alpha_1) + W(\varepsilon_0, \alpha_0)$$

en notant :  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = \varepsilon(1), \alpha_0 = \alpha(0), \alpha_1 = \alpha(1)$ . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon} d\tau &= W(\varepsilon_0, \alpha_1) - W(\varepsilon_0, \alpha_0) + \int_0^t A \dot{\alpha} d\tau \\ &\geq \frac{\partial W}{\partial \alpha_0} (\alpha_1 - \alpha_0) + \int_0^t A \dot{\alpha} d\tau && \text{d'après la convexité de } W \\ &\geq \int_0^t (A - A_0) \dot{\alpha} d\tau \geq 0 && \text{d'après la loi de normalité.} \end{aligned}$$

cqfd

#### 1.4- Ecrouissage positif :

-----

On rappelle que le domaine d'élasticité  $C$  est convexe dans l'espace des forces  $(\sigma + B^p) \times B^\beta$ . On note  $C_\infty$  le cône asymptotique du convexe,  $C_\infty^\perp$  le cône normal à  $C_\infty$ . L'ensemble des normales extérieures en des points frontières de  $C$  est évidemment  $C_\infty^\perp$ . Par exemple, si  $C$  est borné,  $C_\infty$  est vide et  $C_\infty^\perp$  est tout l'espace  $(\sigma + B^p) \times B^\beta$ .

L'écrouissage positif est une propriété dépendant à la fois de l'énergie  $W$  et du domaine d'élasticité  $C$ . Elle s'énonce de la manière suivante :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecrouissage strictement positif} \Leftrightarrow \\ \exists h_0 > 0 \text{ tel que} \\ \forall N \in C_\infty^\perp \\ \inf N H N \geq h_0 > 0 \\ \|N\| = 1 \end{array} \right.$$

On demande donc que le module d'écrouissage soit toujours positif. Si l'écrouissage est strictement positif, la relation (16) montre que la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}^p$  s'exprime en fonction de la vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$ , la relation entre vitesse  $\dot{\sigma}(\dot{\epsilon})$  est donc biunivoque (alors que ce n'est pas le cas en plasticité parfaite !).

#### 1.5- Déformation et contrainte généralisées :

-----

Si l'on introduit les notations suivantes :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E^p = (\epsilon^p, \epsilon^p, \beta) & \text{la déformation plastique généralisée} \\ E^e = (\epsilon^e, -\epsilon^p, -\beta) & \text{la déformation élastique généralisée} \\ \Sigma = (\sigma, B^p, B^\beta) & \text{la contrainte généralisée} \\ \tilde{E} = (\epsilon, 0, 0) & \text{la déformation généralisée} \end{array} \right. ,$$

on obtient de nouveau les équations de la plasticité parfaite, car :

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Sigma} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\varepsilon}^p = N_C(\Sigma) \\ \dot{\Sigma} = \mathfrak{E} \cdot \dot{\varepsilon}^e \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \mathfrak{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & L & N \\ 0 & N^T & M \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Matrice des coef-} \\ \text{ficients élastiques} \\ \text{généralisés.} \end{array}$$

La matrice  $\mathfrak{E}$  représente les dérivées secondes de l'énergie par rapport aux paramètres internes  $(\varepsilon^e, -\varepsilon^p, -\beta)$ .

## 2.- EVOLUTION QUASI-STATIQUE DES STRUCTURES ECROUISSABLES

---

On considère, comme au chapitre IV, l'évolution d'une structure élasto-plastique, écrouissable, soumise à un trajet de charge de type classique. Les équations (17), (21), (22) montrent que tous les résultats établis pour la plasticité parfaite sont encore valables pour les matériaux standards généralisés.

### 2.1- Exercice : Etude du problème en vitesses :

---

L'état actuel étant supposé connu, on s'intéresse à la détermination des vitesses  $\dot{u}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\alpha}$ ...

- Montrer que la vitesse  $\dot{u}$  minimise la fonctionnelle de Greenberg :

$$(23) \quad A(\dot{u}) = \int_{\Omega} \Psi^{\alpha}(\dot{\epsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \, \dot{f} \, \dot{u} \, d\Omega - \int_{S_R} \dot{R} \, \dot{u} \, ds \quad ,$$

parmi les vitesses  $\dot{u}^*$  compatibles avec les conditions cinématiques, i.e.  
 $\dot{u}^*|_{S_u} = \dot{u}^d$ .

- Montrer que la vitesse  $\dot{u}$  est unique lorsque l'écrouissage est strictement positif. On peut, par exemple, établir d'abord que la fonction  $\Psi^{\alpha}(\dot{\epsilon})$  est alors strictement convexe car elle vérifie :

$$(24) \quad \left( \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} - \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^*} \right) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^*) \geq h_0 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*) E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*) \quad .$$

- Montrer que la vitesse  $\dot{\sigma}$  minimise la fonctionnelle de Hodge-Prager :

$$(25) \quad B(\dot{\sigma}^*) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{\sigma} E^{-1} \dot{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega_P} \frac{1}{2h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right\rangle^2 \, d\Omega - \int_{S_u} \dot{u}^d \cdot \dot{\sigma}^* \cdot n \, ds \quad ,$$

parmi les champs de vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}^*$  statiquement admissibles.

$\Omega_P$  représente le volume plastique actuel, c'est-à-dire l'ensemble des points où le critère de plasticité  $f(\sigma + B^p, B^p) = 0$  est vérifié.

La vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$  est-elle unique ?

## 2.2- Etude du problème d'évolution :

-----

Si l'on admet en plus, comme au chapitre IV, que l'énergie libre est quadratique, tous les résultats se transposent immédiatement. Il suffit de remplacer dans les équations les quantités  $\varepsilon, \varepsilon^P, \sigma, E$  par  $\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}^P, \Sigma, \mathcal{E}$ .

La condition de sécurité II(13) est toujours vérifiée lorsque l'é-crouissage est positif. Cette propriété est basée sur le fait que quel que soit  $\sigma$  on peut toujours trouver  $B^P, B^\beta$  pour que la contrainte généralisée  $\Sigma = (\sigma + B^P, B^\beta) \in C$ . La démonstration est assez technique dans le cas général, mais elle est très simple lorsque l'é-crouissage est isotrope ou cinématique. Nous l'admettons ici sans démonstration.

Il en résulte que sous les hypothèses de régularité des données II(12), il existe un couple unique  $(\Sigma, V)$ ,  $\Sigma \in L^\infty(0, T, L^2)$ ,  $\dot{\Sigma} \in L^\infty(0, T, L^2)$ ,  $V \in L^\infty(0, T, H^1)$ , solution du problème d'évolution quasi-statique. La régularité de la vitesse  $V$  provient de la régularité de la contrainte  $\Sigma$  et de la formule (16) qui caractérise l'é-crouissage positif.

C'est la régularisation par é-crouissage positif. L'introduction d'un é-crouissage positif régularise la solution en déplacement du problème d'évolution. La déformation plastique  $\varepsilon^P$  est une fonction régulière ( $L^2$ ), les surfaces de discontinuité ne sont plus envisageables en é-crouissage positif.

On rappelle que la contrainte obéit à l'équation différentielle :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Sigma} + N_P \cap S(t) (\Sigma) = \dot{\Sigma}^E \\ \Sigma(0) = \Sigma_0 \end{array} \right. ,$$

dans laquelle  $\Sigma^E = (\sigma^E, 0)$  désigne la réponse purement élastique. La déformation plastique généralisée  $\dot{\varepsilon}^P$  vérifie l'équation différentielle :

$$(27) \quad \dot{\varepsilon}^P = N_P (\Sigma^E - (H + Z) \varepsilon^P) ,$$

dans laquelle  $Z = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  où  $Z = \text{Proj}(\cdot, S_0)$  est l'opérateur de projection au sens de l'énergie sur l'ensemble des champs auto-contraints  $S_0$ .

Les théorèmes d'adaptation sont évidemment valables pour les matériaux écouissables. En particulier, la condition de Melan assure l'adaptation suivant la définition la plus compétente IV(24). On constate que la prise en compte de l'écrouissage permet d'éliminer toutes les difficultés mathématiques inhérentes au modèle de plasticité parfaite.

**CHAPITRE VIII****PRINCIPE DE LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE  
DES PROBLÈMES DE PLASTICITÉ**

On étudie les méthodes de résolution numérique des problèmes d'évolution quasi-statique de structures élastoplastiques en petite transformation. La résolution numérique s'effectue pas à pas, après une discrétisation spatiale et temporelle des équations. Des exemples de calcul par la méthode des éléments finis sont présentés.

En plasticité, l'évolution quasi-statique est un problème complexe. Même dans les situations les plus simples, telles que l'enveloppe sphérique sous pression ... où grâce à des simplifications dues à la géométrie, on peut ramener la résolution à un calcul unidimensionnel, l'analyse de la réponse quasi-statique devient très compliquée dès que les efforts appliqués correspondent à des charges et des décharges successives.

Pour cette raison, le recours au calcul numérique est la seule démarche possible dans les applications pratiques. L'analyse numérique des problèmes d'élastoplasticité a fait l'objet de nombreuses études depuis 1945. A partir de 1965, le calcul élasto-plastique devient courant dans les études de structure, grâce au développement des moyens de calcul (ordinateur) et de l'emploi de plus en plus répandu de la méthode des éléments finis.

On donne ici le principe des méthodes de résolution numérique des problèmes d'élastoplasticité. Compte-tenu du caractère incrémental des équations, la résolution numérique s'effectue nécessairement pas à pas après une discrétisation spatio-temporelle des équations.

## 1.- PRINCIPE DE LA RESOLUTION NUMERIQUE

### 1.1- Rappels sur l'intégration numérique des équations différentielles :

-----

On rappelle d'abord quelques notions élémentaires du calcul numérique. Soit l'équation différentielle  $y' = A(y, t)$  où  $y(t)$  appartient à un espace vectoriel  $V$  avec la donnée initiale  $y(0) = y_0$ . Connaissant  $A$  et  $y_0$ , il s'agit de définir une approximation numérique de la solution  $y(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ .

On introduit un pas d'intégration par rapport au temps  $\Delta t$ . Si  $y_n$  désigne l'approximation de  $y(t_n)$ ,  $t_n = n \Delta t$ , le schéma d'Euler explicite consiste à écrire :

$$(1) \quad Y_{n+1} = Y_n + \Delta t A(Y_n, t_n) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y = y'_n \Delta t \quad .$$

Le schéma d'Euler implicite consiste à écrire :

$$(2) \quad Y_{n+1} = Y_n + \Delta t A(Y_{n+1}, t_{n+1}) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y = y'_{n+1} \cdot \Delta t \quad ,$$

$y_0$  étant connu, les formules (1) ou (2) définissent de proche en proche  $y_1, y_2 \dots$ . Le schéma implicite est un peu plus compliqué car la détermination de  $Y_{n+1}$  exige la résolution d'une équation. Lorsque  $A$  est non linéaire, le calcul de  $Y_{n+1}$  par le schéma implicite s'effectue nécessairement par itérations.

On appelle erreur de calcul la quantité  $e_n = y_n - y(t_n)$ . On peut améliorer l'erreur en introduisant des schémas plus perfectionnés que (1) ou (2). Les schémas perfectionnés nécessitent cependant des calculs intermédiaires, des mémoires de machines supplémentaires. A-priori, dans les applications, on ne peut affirmer que les schémas perfectionnés donnent les meilleurs rapports qualité/coût ! L'estimation de l'erreur est un problème difficile. Dans la plupart des problèmes de la Physique,  $V$  est un espace de dimension infinie, on doit approcher  $V$  par  $V^h$  de dimension finie et représenter  $y_n$  par  $y_n^h$  par une discrétisation dans l'espace, de paramètre  $h$ . Les discrétisations dans l'espace et dans le temps conduisent alors à une erreur  $e_n^h = y_n^h - y(t_n)$ . Elle dépend des paramètres  $\Delta t$ ,  $h$  et de la nature de l'opérateur  $A$ .

## 1.2- Méthodes de discrétisation :

-----

Soit une structure élastoplastique  $\Omega$ , en évolution quasi-statique sous charge  $(f, u^d, R^d)$  définie sur l'intervalle  $[0, T]$ . Soit  $0 < t_1 < t_2 \dots t_n = T$  une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ . Pour  $t=0$ , on a  $u(0) = u_0$ ,  $E(0) = E_0$ ,  $E^P(0) = E_0^P$ ,  $\Sigma(0) = \Sigma_0$ . Le problème est de nature incrémentale, il est naturel de supposer par récurrence :

$$(3) \quad u_n, E_n, \Sigma_n \quad \text{connus} \quad ,$$

et on cherche à déterminer les accroissements  $\Delta u = u_{n+1} - u_n$ ,  $\Delta E = E_{n+1} - E_n$ ,  $\Delta \Sigma = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n$  à partir des accroissements de données  $\Delta f, \Delta u^d, \Delta R^d$ .

### 1.2.1- Schéma Explicite - Schéma Implicite :

~~~~~

Le schéma explicite s'obtient en discrétisant les lois de comportement VII(22) sous la forme :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta E = \Delta E^e + \Delta E^p \\ \Delta E^p = N_C(\Sigma_n) \\ \Delta \Sigma = \mathcal{G} \cdot \Delta E^e \end{array} \right.$$

On doit résoudre alors le problème aux limites suivant pour obtenir les accroissement  $\Delta u, \Delta E, \Delta \Sigma$  :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u^d \quad \text{sur } S_u \quad \underline{\text{(condition cinématique à l'instant } t_{n+1})} \\ \Sigma_n + \Delta \Sigma \in S_{n+1} \quad \underline{\text{(condition statique à l'instant } t_{n+1})} \\ \text{Relation de comportement discrétisée (3).} \end{array} \right.$$

Le schéma implicite s'obtient en discrétisant les lois de comportement VII(22) sous la forme :

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta E = \Delta E^e + \Delta E^p \\ \Delta E^p = N_C(\Sigma_{n+1}) \\ \Delta \Sigma = \mathcal{E} \cdot \Delta E^e \end{cases}$$

On peut observer que le schéma implicite est beaucoup plus satisfaisant, car on respecte en plus la condition de plasticité à l'instant  $t_{n+1}$   $\Sigma_{n+1} \in C$ .

### 1.2.2- Convergence du schéma implicite :

La convergence du schéma implicite a été discutée par de nombreux auteurs (Moreau, Johnson, ...). Le résultat essentiel est le suivant :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une constante } \gamma \text{ indépendant de } h \text{ et } \Delta t \text{ tel que} \\ \max_n \|\Sigma_n - \Sigma_n^h\| \leq (\delta(h) + \sqrt{\Delta t}) \gamma \end{array} \right. ,$$

où  $\delta(h)$  caractérise la finesse de la discrétisation spatiale  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$ .

L'estimation (7) de l'erreur sur les contraintes montre que les discrétisations par rapport au temps et par rapport à l'espace sont totalement découplées. En particulier, le schéma implicite est inconditionnellement stable.

REMARQUE : Un schéma de discrétisation est stable si la solution approchée est continue par rapport aux données initiales. Si l'on considère par exemple l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f$ , le schéma approché

$$\frac{T_{n+1}^j - T_n^j}{\Delta t} - \frac{T_n^{j+1} + T_n^{j-1} - 2T_n^j}{h^2} = f_n^j ,$$

n'est stable que si  $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ .

En dynamique des structures, on a la même constatation. Lorsque la discrétisation spatiale s'effectue par la méthode des éléments finis, le paramètre  $h$  est lié à la plus haute fréquence de la structure discrétisée et la condition de stabilité impose une certaine relation entre  $\Delta t$  et cette fréquence.

Par rapport à ces problèmes, l'évolution quasi-statique des structures élasto-plastiques pose donc moins de difficultés numériques.

### 1.3- Résolution numérique du problème en accroissements :

---

#### 1.3.1- Problème en accroissements :

---

Le calcul des accroissements  $\Delta u$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta \Sigma$  définis par le schéma implicite consiste à résoudre le problème aux limites suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \Delta u = \Delta u^d \text{ sur } S_u \quad (\text{condition cinématique à l'instant } t_{n+1}) \\ \cdot \Sigma_n + \Delta \Sigma \in S_{n+1} \quad (\text{condition statique à l'instant } t_{n+1}) \\ \cdot \text{Relation de comportement discrétisée (6).} \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un problème aux limites non-linéaire, comparable au problème en vitesses.

#### 1.3.2- Exercice :

---

On introduit la réponse purement élastique  $\Sigma^E = (\sigma^E, 0)$  comme au chapitre IV.

- Montrer que le problème en accroissements conduit aux principes du minimum :

• L'accroissement du déplacement  $\Delta u$  minimise la fonctionnelle :

$$(9) \quad \bar{A}(\Delta u^*) = \frac{1}{2} \| \mathcal{E} \Delta E^* - \Delta \Sigma^E \|^2 - \frac{1}{2} \| \mathcal{E} \Delta E^D(\Delta u^*) \|^2 \quad ,$$

parmi les champs  $\Delta u^*$  vérifiant les conditions cinématiques :

$$(10) \quad u_n + \Delta u^* \in U_{n+1} \quad .$$

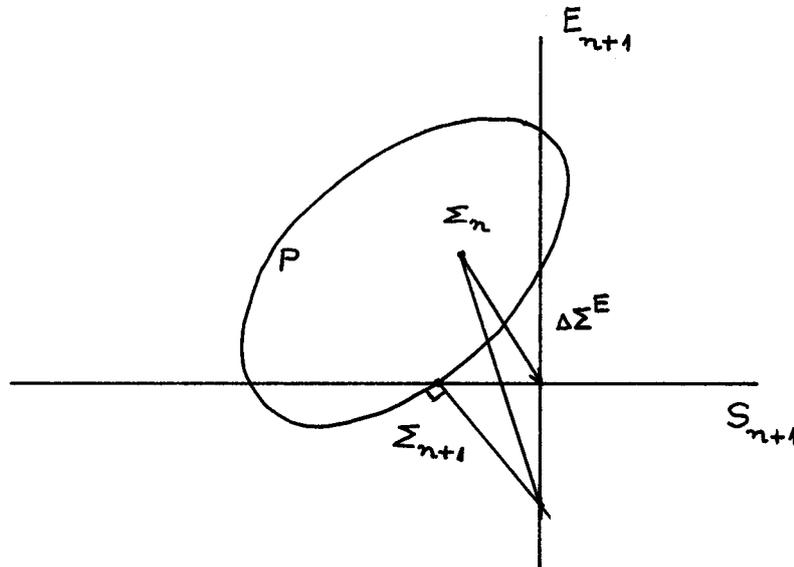
- L'accroissement de contrainte  $\Delta \Sigma$  minimise la fonctionnelle :

$$(11) \quad \bar{B}(\Delta \Sigma^*) = \frac{1}{2} \| \Delta \Sigma^* - \Delta \Sigma^E \|^2$$

parmi les champs  $\Delta \Sigma^*$  vérifiant les conditions statiques et les conditions de plasticité :

$$(12) \quad \Sigma_n + \Delta \Sigma_n \in S_{n+1} \cap P \quad .$$

- Justifier le dessin suivant :



### 1.3.3- Méthodes itératives :

Le problème en accroissements étant non-linéaire, on ne peut obtenir la solution que par itérations successives.

On va étudier une méthode itérative basée sur l'opérateur de l'élasticité, dont le principe est le suivant :

La solution  $\Delta u$  est approchée par des solutions élastiques successives, avec déformation initiale calculée à partir du résultat précédent. D'une façon précise, on prend :

- .  $\Delta u^0 = \Delta u^E$
- .  $\Delta u^k$  étant supposé connu,  $\Delta u^{k+1}$  est la solution en déplacement du problème élastique.

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet u_n + \Delta u^{k+1} \in E_{n+1} \\ \bullet \Sigma_n + \Delta \Sigma^{k+1} \in S_{n+1} \\ \bullet \text{Relation de comportement élastique avec déformation initiale} \\ \Delta \Sigma = \mathfrak{E} \cdot (\Delta E^{k+1} - \Delta E^P(\Delta E^k)). \end{array} \right.$$

$$\bullet k \rightarrow +\infty, \quad \Delta u^k \rightarrow \Delta u.$$

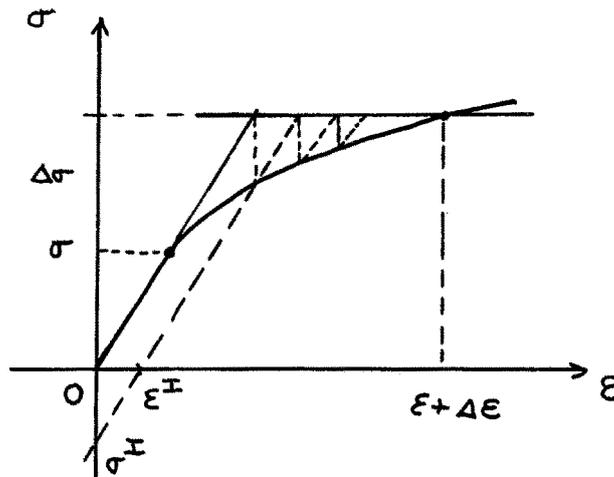
En effet, la convergence de cette méthode itérative s'obtient sans difficulté. On démontre que :

- la suite  $\Delta u^k$  est une suite minimisante de la fonctionnelle  $\bar{A}$ ,
- la suite  $\Delta \Sigma^k$  converge vers  $\Delta \Sigma$  au sens de l'énergie.

Si l'écroutissage est positif, la convergence du déplacement est donc assurée. Il est important de remarquer que  $\Sigma_n + \Delta \Sigma^k$  vérifie les conditions statiques, mais ne vérifie les conditions de plasticité qu'après la convergence. Une évaluation de distance de  $\Sigma_n + \Delta \Sigma^k$  au domaine d'élasticité C en chaque point de la structure peut fournir un bon critère d'arrêt des itérations.

La méthode considérée est très classique en plasticité (Ilyushin, 1947). Elle s'identifie à la méthode du gradient pour la recherche du minimum de la fonctionnelle  $\bar{A}$ . L'introduction d'un coefficient de relaxation est possible, mais n'améliore pas la vitesse de convergence.

Au cours des itérations, la déformation plastique intervient comme une déformation initiale, ou si l'on veut comme une contrainte initiale, afin de réaliser la condition de plasticité. Le calcul s'effectue à rigidité constante et peut être schématisé de la manière suivante :



Si cette figure donne une idée de la méthode, elle est assez ambiguë car elle ne précise pas comment  $\Delta E^D$  est calculée à partir de  $\Delta u^k$ . On peut adopter une présentation plus explicite à deux dimensions dans l'espace des contraintes sur la figure suivante.

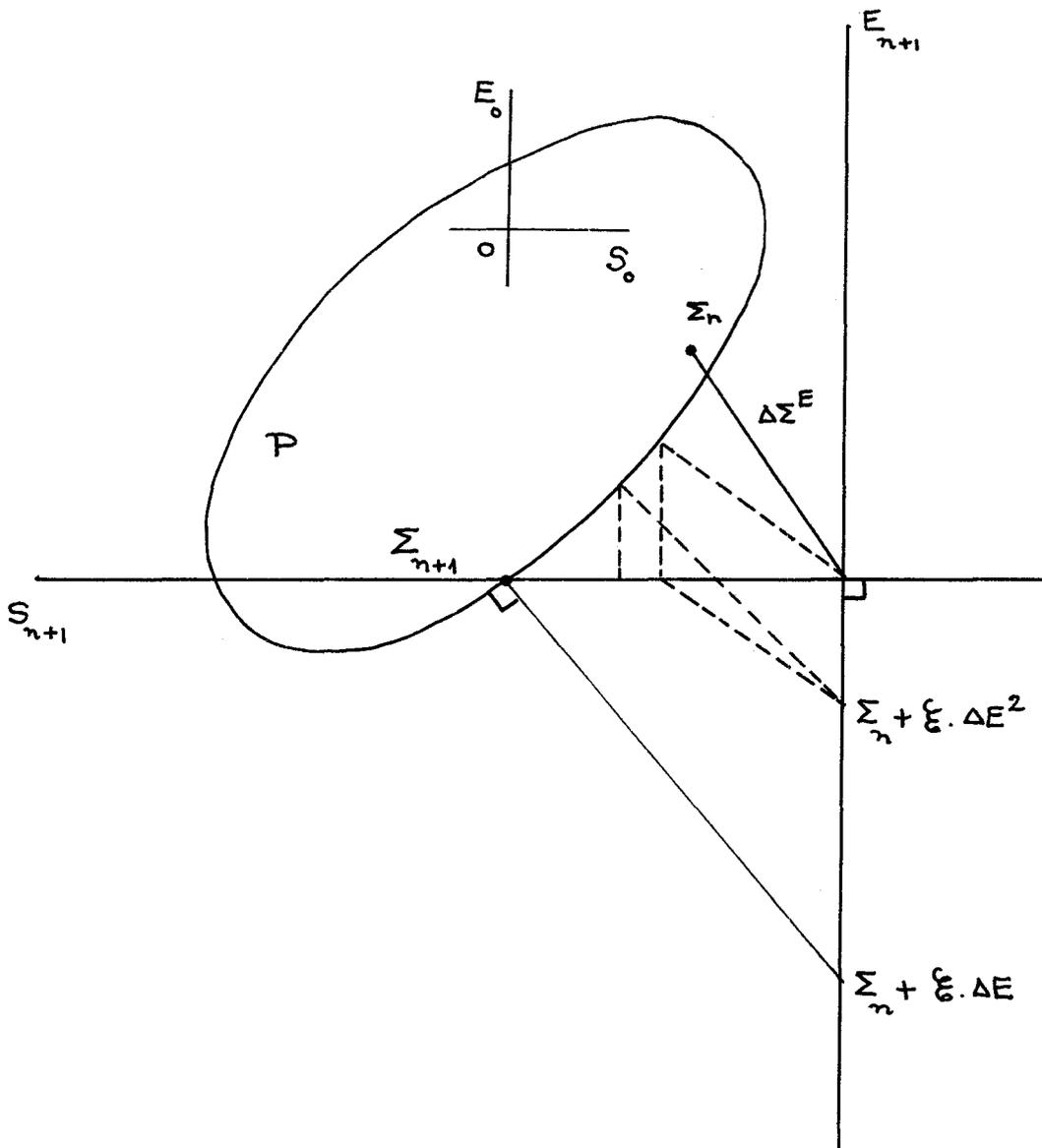
Ces dessins, très schématiques, montrent clairement que la vitesse de convergence dépend de la position relative des ensembles  $P$  et  $S_{n+1}$ . Si ces deux ensembles se coupent tangentiellement, cela veut dire que la charge limite de la structure est presque atteinte à l'instant  $t_{n+1}$  et la convergence sera lente.

Pour accélérer la convergence, on peut introduire des méthodes itératives à rigidité variable. Par exemple, Mercier a proposé la méthode itérative suivante :

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Sigma^k, \Delta E^k \text{ étant connus, } \Delta \Sigma^{k+1}, \Delta E^{k+1} \text{ vérifient :} \\ \Delta \Sigma^k + \tau (\mathfrak{E} \Delta E^{k+1} - \mathfrak{E} \Delta E^k) + \Sigma_n \in S_{n+1} \\ \Delta \Sigma^{k+1} + \Sigma_n = \text{Proj} \left( \Sigma_n + \frac{\tau}{\tau+1} (\mathfrak{E} \Delta E^{k+1} + \frac{1}{\tau} \Delta \Sigma^k), C \right) \end{array} \right. .$$

Les relations (14) montrent que  $\Delta u^{k+1}$  s'obtient par la résolution d'un problème élastique de rigidité  $\tau$  fois augmentée, avec contrainte initiale.

Modèle itérative à rigidité constante.



## 2.- MISE EN OEUVRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

On précise maintenant les équations matricielles à résoudre après une discrétisation par rapport au temps par le schéma implicite et une discrétisation dans l'espace par la méthode des éléments finis.

Le déplacement  $u$  est exprimé en fonction des paramètres de déplacement  $q$  et  $\bar{q}$  :

$$(15) \quad u = Nq + \bar{N}\bar{q} \quad ,$$

où pour des raisons de commodité, on suppose que les paramètres  $\bar{q}$  traduisent les conditions imposées sur  $S_u$ ,  $N$  et  $\bar{N}$  sont des fonctions de base convenablement choisies.

On rappelle que pour une structure élastique, soumise à des données aux limites mixtes et à une contrainte initiale  $\sigma^I$ , la solution du problème discrétisé vérifie l'équation matricielle :

$$(16) \quad \begin{bmatrix} K & \bar{K} \\ \bar{K}^T & \bar{\bar{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ R \end{bmatrix} - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} B^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} \cdot \sigma^I d\Omega \quad ,$$

dans laquelle les matrices  $B, \bar{B}, D, K, \bar{K}, \bar{\bar{K}}$  sont définies, selon les notations usuelles en Éléments Finis, par :

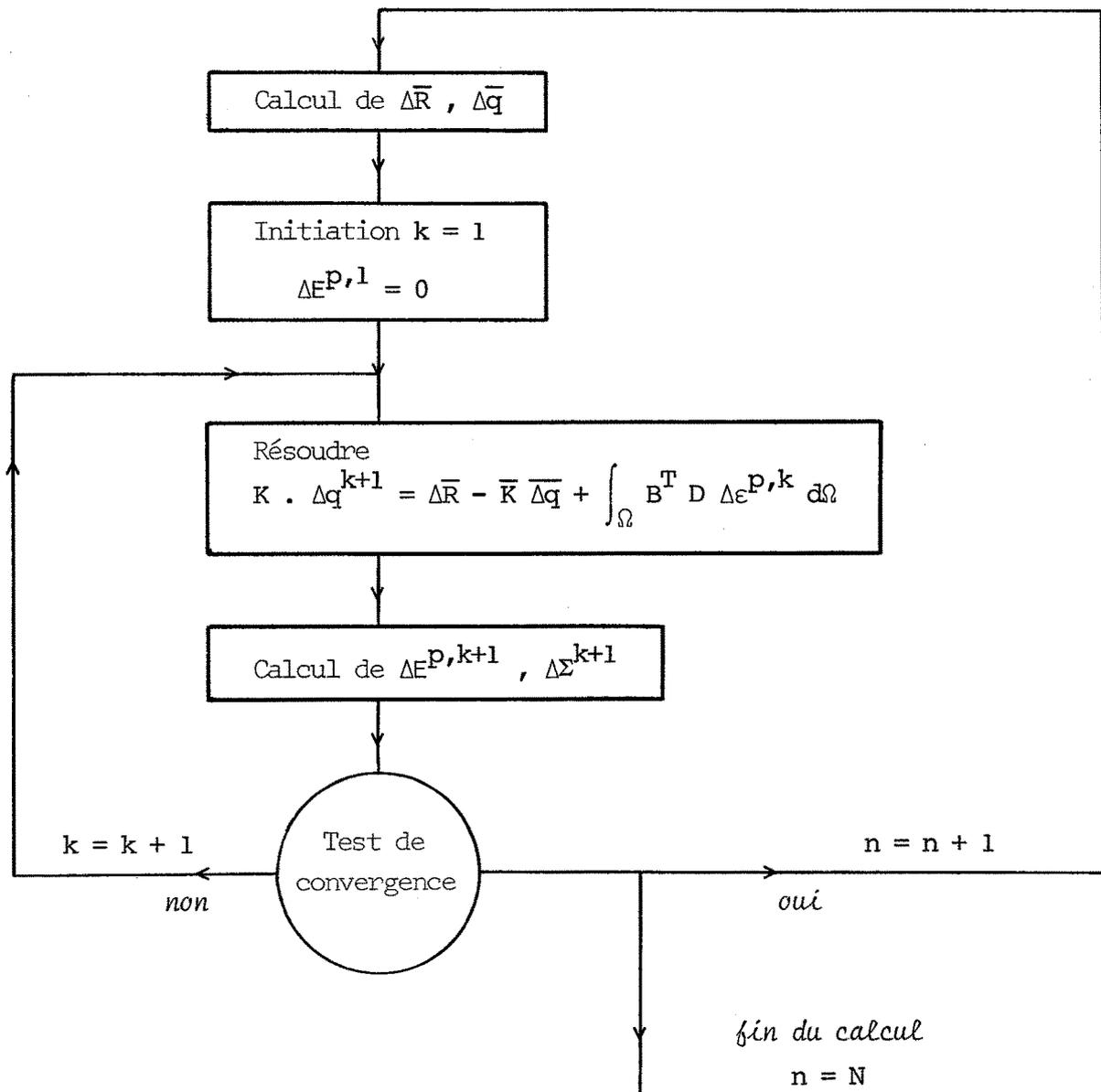
$$(17) \quad \begin{cases} \epsilon = Bq + \bar{B}\bar{q} \\ \sigma = D \epsilon \\ K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad , \quad \bar{K} = \int_{\Omega} B^T D \bar{B} d\Omega \quad , \quad \bar{\bar{K}} = \int_{\Omega} \bar{B} D \bar{B} d\Omega \quad , \end{cases}$$

$\bar{R}$  provient des efforts donnés (de volume, de surface  $S_R$ ) et  $R$  représente les réactions sur  $S_u$ .

En particulier, les paramètres à déterminer  $q$  vérifient le système linéaire :

$$(18) \quad K q = \bar{R} - \bar{K} \bar{q} - \int_{\Omega} B^T \sigma^I d\Omega \quad .$$

A chaque étape  $t_n$ , le calcul de l'incrément  $\Delta q$  du problème élasto-plastique discrétisé est donné par l'organigramme :

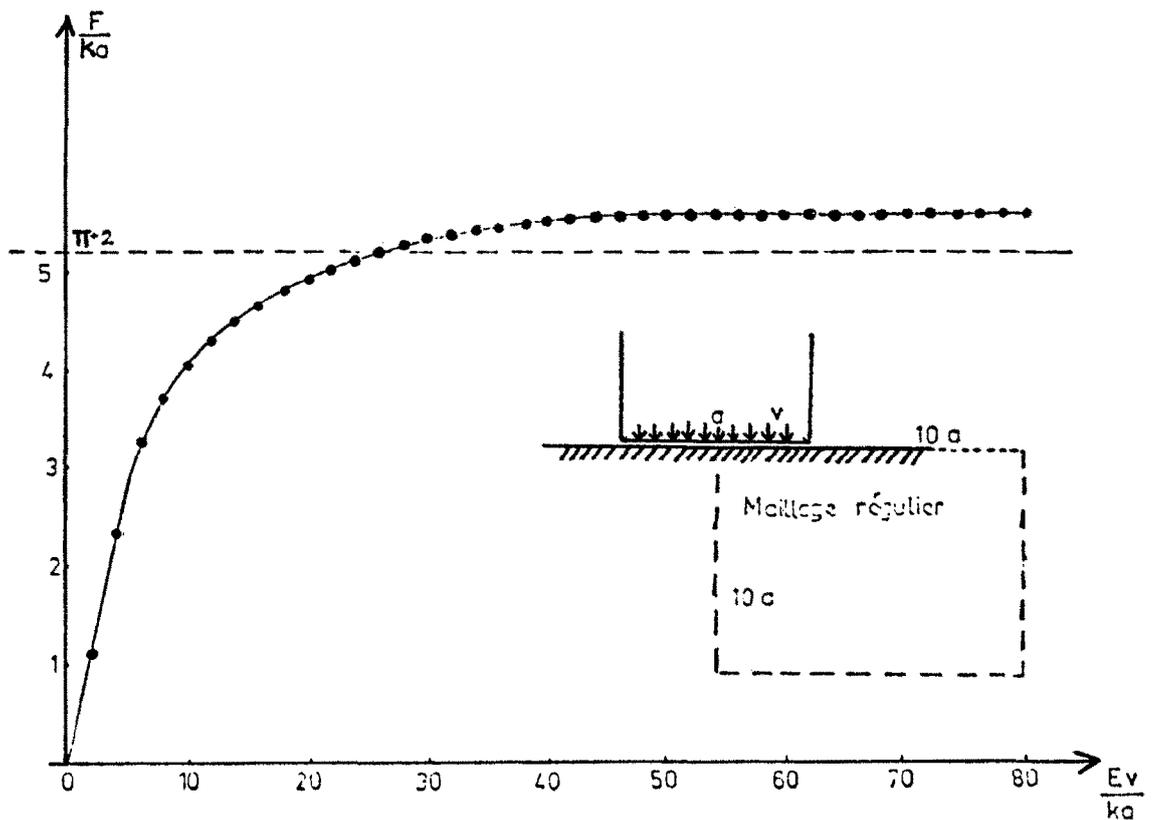


### 3.- QUELQUES EXEMPLES DE CALCUL

*Les exemples suivants illustrent quelques aspects du calcul.*

#### 3.1- Fondation sur un sol plastique :

On reprend l'exemple d'une fondation sur un sol plastique traité au chapitre IV. On impose cependant cette fois le déplacement vertical de la fondation et on enregistre la réaction du sol. On vérifie que cette réaction ne peut dépasser une valeur limite qui est la portance de la fondation. La valeur numérique dépasse d'ailleurs la valeur théorique  $(\pi + 2) ka$ . On a utilisé des éléments rectangulaires formés de quatre triangles.

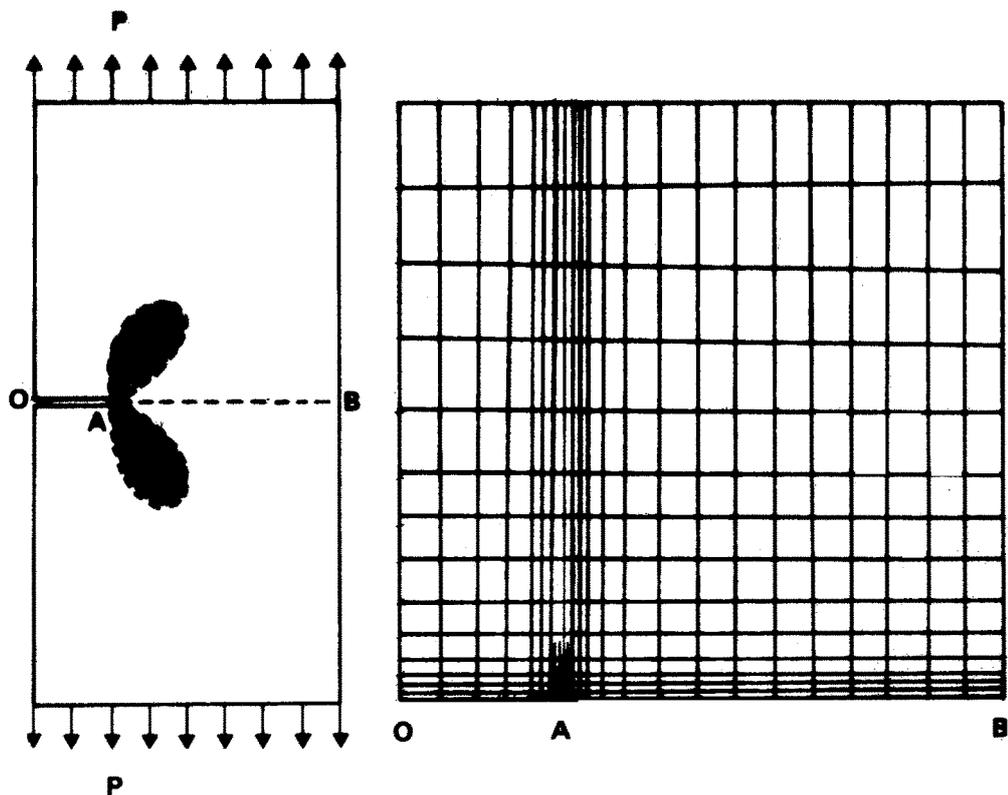


### 3.2- Calcul d'une plaque fissurée :

-----

La plaque est élastique, parfaitement plastique, obéissant au critère de Misès.  $|\sigma'| - k \leq 0$ , de caractéristiques élastiques  $E = 500 k$ ,  $\nu = 0.3$ . La pression totale est appliquée en un seul pas de calcul. Avec le même critère d'arrêt, la vitesse de convergence devient plus lente lorsqu'on approche la charge limite.

|                        |   |     |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|
| Pression $\frac{P}{k}$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
| Nombre d'itérations    | 7 | 9   | 12  | 32  | 40  |



**CHAPITRE IX****MÉCANIQUE DE LA RUPTURE**

Après un bref aperçu du développement historique et de l'objectif de la Mécanique de la Rupture, on étudie la notion de singularité en fond de fissure dans un milieu linéairement élastique homogène et isotrope en vue des problèmes de rupture fragile.

Même à l'échelle macroscopique, les hypothèses de continuité du matériau ne sont pas parfaitement vérifiées. Dans un acier courant, par exemple, il existe toujours des défauts métallurgiques ou des défauts de fabrication entraînant une certaine décohésion de la matière par décollement, création de micro-vides .. lors des sollicitations mécaniques. Ces défauts peuvent éventuellement grossir et donner naissance à une surface de discontinuité au sein de la matière, c'est la formation d'une fissure. La présence d'une fissure dans une structure réelle pose évidemment des problèmes de sécurité, sa croissance conduit à la ruine par rupture !

Si les phénomènes de rupture sont connus depuis fort longtemps, leurs études systématiques n'ont débuté qu'à partir des années 1900. La construction des machines industrielles, le développement de l'aéronautique, l'introduction des matériaux nouveaux, les problèmes de sécurité dans la construction des plateformes en mer, dans la construction des centrales nucléaires ... sont des multiples facteurs qui ont contribué au développement actuel de la Mécanique de la Rupture, surtout depuis une vingtaine d'années.

## 1.- GENERALITES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

### 1.1- Généralités :

-----

L'objet de la Mécanique de la Rupture est d'apporter une réponse satisfaisante au calcul de la résistance des structures vis à vis du phénomène de rupture. Dans ce but, on est amené à étudier :

- Les conditions d'amorçage de fissure : ce sont des analyses souvent microscopiques et métallurgiques en vue d'expliquer les mécanismes physiques conduisant à la formation d'une fissure visible à l'échelle macroscopique (fissure de dimension 1mm pour fixer les idées !).
- Les conditions de propagation de fissure macroscopique : la dimension de la fissure macroscopique étant grande par rapport aux grains constituant le matériau, on peut utiliser la Mécanique des Milieux Continus pour décrire la répartition des contraintes et des déplacements autour du fond de fissure. On espère ainsi arriver à formuler les lois de propagation par l'intermédiaire des critères de rupture et à définir les conditions assurant la résistance à la rupture.

La propagation peut s'effectuer sous charge monotone ou cyclique, les problèmes physiques rencontrés dans ces deux cas sont très différents. On distingue donc la fatigue qui correspond à la croissance des fissures sous charge cyclique, de la rupture proprement dite, qui se produit d'une façon plus ou moins brutale sous charge monotone.

Dans ce cours, nous nous limitons à l'étude de la propagation sous charge monotone. A titre indicatif, voici quelques dates historiques illustrant le développement de la théorie :

- . Analyse de Griffith en 1920, qui a introduit la notion d'énergie surfacique de rupture.
- . Analyse d'Irwin vers 1950, qui propose l'utilisation systématique de la solution élastique pour caractériser la répartition des contraintes et des déplacements autour de la fissure par des facteurs d'intensité de contrainte.

## 1.2- Modes de Rupture :

---

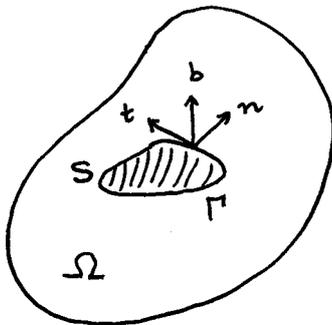
La rupture est caractérisée par la séparation irréversible du milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique, appelée surface fissurée ou fissure. Sur la fissure, le déplacement des points matériels situés sur les faces  $S^+$  ou  $S^-$  subit une discontinuité et les vecteurs contraintes sont nuls, la pression atmosphérique étant négligée :

$$(1) \quad [u] = u^+ - u^- \quad , \quad R_+ = \sigma_+ \cdot n = 0 \quad , \quad R_- = \sigma_- \cdot n = 0 \quad .$$

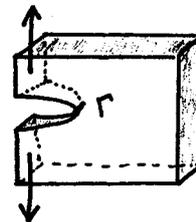
La discontinuité  $[u]$  peut être normale ou tangentielle. Ces considérations nous amènent à distinguer les différents modes de rupture :

- . MODE I : discontinuité purement normale. Les lèvres de la fissure se déplacent perpendiculairement au plan de fissuration et au front de fissure .
- . MODE II : discontinuité purement tangentielle, perpendiculaire au front de fissure.
- . MODE III : discontinuité purement tangentielle, parallèle au front de fissure .

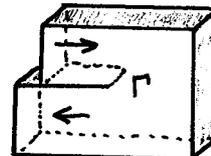
Il est clair que dans le cas général, la discontinuité  $[u]$  est une combinaison des trois modes I, II, III.



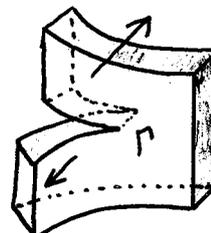
Structure avec une fissure.



MODE I



MODE II



MODE III

### 1.3- Rupture fragile - Rupture ductile :

-----

La rupture est fragile lorsqu'elle se produit sans déformation plastique appréciable, ductile dans le cas contraire. Pour les métaux, la rupture fragile correspond à la séparation des facettes cristallographiques par clivage alors que la rupture ductile s'effectue sous grandes déformations plastiques avec des mécanismes différentes. La fragilité d'un matériau dépend de nombreux facteurs : température, vitesse de chargement, milieu d'ambiance, etc...

Pour étudier la rupture fragile, on peut, d'une façon raisonnable, admettre le modèle de l'élasticité linéaire.

## 2.- NOTION DE SINGULARITE

On se propose de déterminer l'état de contrainte et de déformation au voisinage du fond de fissure lorsque le matériau est linéairement élastique, homogène et isotrope.

### 2.1- Exemple en mode III pur (problème anti-plan) :

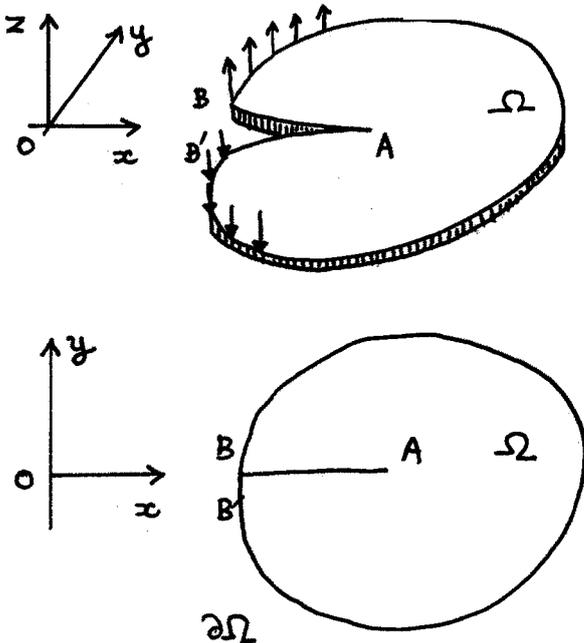
On déchire une plaque mince  $\Omega$  de contour  $\partial\Omega$  en imposant des déplacements  $W^d$  sur le contour  $\partial\Omega - BAB'$  suivant la verticale  $Oz$ ,  $BAB'$  représente la fissure supposée rectiligne. On souhaite déterminer la réponse en contrainte et en déplacement, en admettant, dans une analyse simpliste (!), que le déplacement est purement vertical :

$$\vec{u}(x, y, z) = w(x, y) \vec{k}$$

en tout point de coordonnées  $(x, y, z)$ . Dans ces conditions les seules composantes non nulles de la déformation et de la contrainte sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} w_{,x} \quad , \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} w_{,y} \\ \sigma_{13} = \mu w_{,x} \quad , \quad \sigma_{23} = \mu w_{,y} \end{array} \right.$$

et les équations d'équilibre I(1) se réduisent à  $\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0$ , soit l'équation  $\Delta w = 0$ .

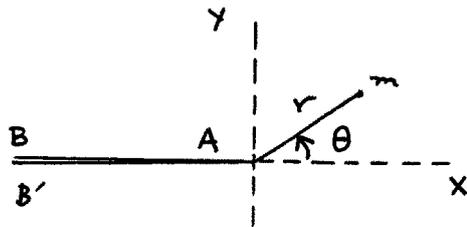


Fissure rectiligne.

Sur la surface fissurée  $BAB'$ , la condition  $R = \sigma \cdot n = 0$  s'écrit  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ . Il en résulte que le déplacement vertical  $w$  est donné par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W = 0 \\ W = W^d \quad \text{sur } \partial\Omega - BAB' \\ \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } BAB' \end{array} \right.$$

qui admettent une solution unique  $W \in H^1(\Omega)$  lorsque  $W^d$  est régulier. Mais, la présence de la fissure entraîne que A est un point singulier. Pour étudier la solution en ce point, nous admettons la validité de la proposition suivante en nous plaçant dans le repère



AXY, avec les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

Au voisinage du point A, la solution possède un développement asymptotique en  $r^{\alpha_i} (\text{Log } r)^{\beta_i} g_i(\theta)$  c'est-à-dire :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(r, \theta) = C_1 r^{\alpha_1} (\text{Log } r)^{\beta_1} g_1(\theta) + C_2 r^{\alpha_2} (\text{Log } r)^{\beta_2} g_2(\theta) + \dots \\ \text{dans l'ordre de régularité,} \end{array} \right.$$

ce qui signifie que  $w = C_1 r^{\alpha_1} (\text{Log } r)^{\beta_1} g_1(\theta) + \text{"termes plus réguliers"}$  en fond de fissure.

Le calcul des coefficients  $(\alpha_1, \beta_1)$  et de la répartition angulaire  $g_1(\theta)$  est très simple,  $r^{\alpha_1} (\text{Log } r)^{\beta_1} g_1(\theta)$  est la plus singulière des fonctions  $r^\alpha (\text{Log } r)^\beta g(\theta)$  de  $H^1(\Omega)$ , satisfaisant aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta (r^\alpha (\text{Log } r)^\beta g(\theta)) = 0 \quad \forall r, \forall \theta \neq \pm \pi \\ \frac{\partial}{\partial n} (r^\alpha (\text{Log } r)^\beta g(\theta)) = 0 \quad \text{pour } \theta = \pm \pi \end{array} \right. .$$

Il en résulte que  $\beta_1 = 0$  et que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 g_1 + g_1'' = 0 \\ g_1'(\pm \pi) = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui donne  $g_1 = \sin \alpha_1 \theta$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ . En résumé, on a :

$$(3) \begin{cases} W(r, \theta) = C r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + \dots & \text{(termes plus réguliers)} \\ \sigma_{13}(r, \theta) = -\frac{\mu}{2} C r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} + \dots & \text{(termes plus réguliers)} \\ \sigma_{23}(r, \theta) = \frac{\mu}{2} C r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + \dots & \text{(termes plus réguliers)} \end{cases}$$

On pose, par convention,  $K_{III} = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} C$  pour écrire les contraintes sous la forme :

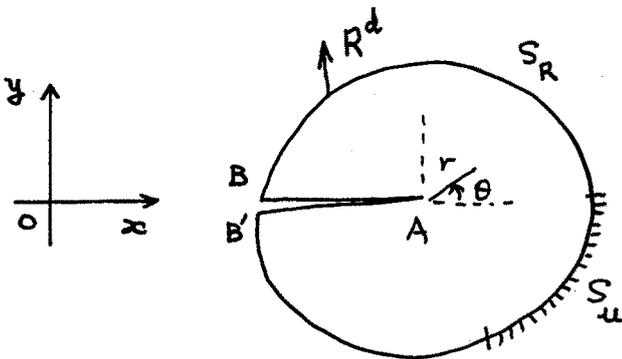
$$\begin{aligned} \sigma_{13}(r, \theta) &= -K_{III} (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \\ \sigma_{23}(r, \theta) &= K_{III} (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + \dots \end{aligned}$$

$K_{III}$  est le facteur d'intensité des contraintes en mode III.

2.2- Exemple en mode mixte I et II :

(contrainte plane ou déformation plane)

La même plaque est soumise maintenant à des données aux limites mixtes dans son plan : déplacement donné  $u_i^d$ ,  $i = 1, 2$  sur  $S_u$ , force donnée  $R_i^d$ ,  $i = 1, 2$  sur  $S_R$  avec  $S_R \cup S_u = \partial\Omega - BAB'$ .



La fissure est la surface  $BAB'$ .

Il s'agit d'un problème en contrainte plane car  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Les relations de l'élasticité linéaire II(28), les équations d'équilibre I(11) et le développement asymptotique (2) conduisent aux expressions suivantes :

$$(4) \begin{cases} u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} (k + 2 + \cos \theta) \\ u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) - \frac{K_{II}}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} (k - 2 + \cos \theta) \end{cases},$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) - K_{II} (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{22} &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + K_{II} (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \right. ,$$

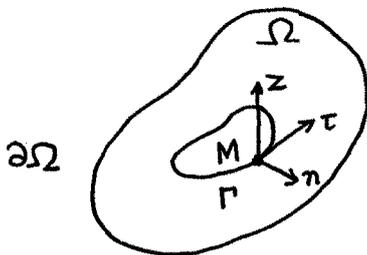
avec  $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ . Les coefficients  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des facteurs d'intensité des contraintes en mode I et II.

Si au lieu d'une plaque plane, on considère un cylindre de longueur infinie, de section  $\Omega$ , soumise à des efforts par unité de longueur sur  $S_R$  dans la section, on doit résoudre un problème de déformation plane, car  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ . La même analyse conduit aux mêmes expressions asymptotiques avec  $k = 3 - 4\nu$ .

### 2.3- Fissure plane de contour quelconque :

-----

D'une manière plus générale, on considère une structure tridimensionnelle de volume  $\Omega$ , ayant à l'intérieur une fissure plane de contour  $\Gamma$  de type  $C^1$ .



Soit  $\tau$  le vecteur tangent,  $n$  le vecteur normal tel que  $(n, \tau)$  constitue le plan de la fissure. On démontre que dans le repère  $M n \tau z$ , le développement asymptotique des déplacements et des contraintes est le même qu'en déformation plane lorsque la fissure est entièrement enveloppée, i.e., lorsque  $\Gamma$  ne

coupe pas la frontière  $\partial\Omega$ . Pour le mode I, par exemple, on obtient :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} u_n &= \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) + \dots \\ u_t &= \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \times 0 + \dots \\ u_z &= \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) + \dots \end{aligned} \right. ,$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nn} = K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + \dots \\ \sigma_{tt} = K_I (2\pi r)^{-1/2} 2 \nu \cos \frac{\theta}{2} + \dots \\ \sigma_{zz} = K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + \dots \\ \sigma_{nz} = -K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \\ \sigma_{zt} = K_I \cdot (2\pi r)^{-1/2} \times 0 + \dots \\ \sigma_{nt} = K_I \cdot (2\pi r)^{-1/2} \times 0 + \dots \end{array} \right.$$

#### 2.4- Remarques :

-----

• La contrainte est infinie en fond de fissure comme  $r^{-1/2}$ . D'une façon plus précise, elle s'écrit sous la forme :

$$(8) \quad \sigma = r^{-1/2} (K_I \sigma_I + K_{II} \sigma_{II} + K_{III} \sigma_{III}) + \sigma_1 ,$$

dans laquelle les fonctions  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  sont connues et  $\sigma_1$  est finie en fond de fissure. Les conditions de géométrie de la structure, les données aux limites n'interviennent dans la partie singulière que par l'intermédiaire des facteurs d'intensité  $K_I, K_{II}, K_{III}$ .

• Les vitesses  $\dot{u}, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$  ne sont pas des fonctions régulières sur  $\Omega$  lorsque la fissure se propage car alors :

$$(9) \quad \dot{u} \sim r^{-1/2} , \quad \dot{\sigma} \sim \dot{\varepsilon} \sim r^{-3/2} .$$

Dans le repère fixe, on a par exemple pour un problème bidimensionnel de fissure rectiligne (contrainte plane, déformation plane, problème anti-plan) :

$$(10) \quad \sigma(x, y, t) = K_J(t) \cdot \sigma_J^S(x - \ell(t), y, t) + \sigma_1(x, y, t) \quad ,$$

où  $\sigma_J^S$  est singulier au point  $A(\ell(t), 0)$  comme  $((x - \ell(t))^2 + y^2)^{-1/2}$ .

Si la fissure se propage, le domaine de définition de la structure est variable  $\Omega = \Omega_{\ell(t)}$ . Le champ de vitesses  $\dot{\sigma}$ , défini sur  $\Omega_{\ell(t)}$  :

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}(x, y, t) = & \dot{K}_J(t) \sigma_J^S(x - \ell(t), y, t) + K_J(t) \sigma_{J,t}^S(x - \ell, y, t) \\ & - \dot{\ell} K_J(t) \sigma_{J,1}^S(x - \ell, y, t) + \dot{\sigma}_1 \end{aligned}$$

est singulier comme  $\sigma_{J,1}^S \sim r^{-3/2}$  donc  $\dot{\sigma} \notin L^2(\Omega_{\ell(t)})$  lorsque  $\dot{\ell} \neq 0$ .

Même remarque pour la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} \sim r^{-3/2}$ .

Le bilan de l'énergie I(15) qui s'écrit en quasi-statique :

$$\int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} R \dot{u} \, ds \quad ,$$

n'est pas valable lorsqu'il y a propagation, car l'intégrale du premier membre n'a pas de sens ( $\sigma \dot{\varepsilon} \sim r^{-2}$ ).

L'analyse énergétique du problème de fissure mobile nécessite donc quelques précautions. Nous l'examinerons d'une manière approfondie au chapitre suivant.

### 3.- CRITERES DE PROPAGATION EN RUPTURE FRAGILE

---

Le terme singulier  $K_J \cdot \sigma_J^S$  donne la répartition de contrainte au voisinage du fond de fissure.

En mode I pur par exemple, le facteur d'intensité  $K_I$  est une grandeur caractéristique de l'état local en fond de fissure. On est donc tenté de formuler la loi de propagation des fissures rectilignes en mode I par une relation reliant la vitesse de propagation  $\dot{\ell}$  à  $K_I$  :

$$(12) \quad \dot{\ell} = \dot{\ell}(K_I) \quad .$$

Le critère  $K_{\max}$  consiste à écrire :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\ell} = 0 & \text{si } K_I < K_{IC} \\ \dot{\ell} \geq 0 & \text{si } K_I = K_{IC} \end{array} \right.$$

$K_{IC}$  est un coefficient caractéristique du matériau, pour les matériaux usuels comme le plexiglass ou l'acier,  $K_{IC}$  est de l'ordre  $10^7 \text{ Pa} \times \text{m}^{1/2}$ .

D'une manière générale, la rupture se produit lorsque l'état local atteint un état critique défini par un critère de rupture. Un bon critère doit permettre de distinguer les états critiques et donner la direction dans laquelle la fissure risque de se propager.

De nombreux critères ont été proposés. La plupart s'expriment en fonction des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ .

**CHAPITRE X****MÉCANIQUE DE LA RUPTURE**  
(suite)

Ce chapitre est consacré à l'analyse énergétique dans le processus de fissuration. Pour un milieu dissipatif quelconque (élastique, plastique, ...), on établit la notion de force due aux singularités en fond de fissure et sa caractérisation comme un taux de restitution de l'énergie.

On effectue dans ce chapitre une analyse énergétique du problème de fissure mobile. Pour simplifier, on adopte un cadre purement mécanique (transformation isotherme). Il n'est pas nécessaire de se limiter au milieu élastique car l'analyse énergétique suivant les méthodes du chapitre II s'applique pour un milieu continu quelconque.

D'une manière générale, la rupture est un phénomène consommateur d'énergie. Même si le matériau est purement élastique, le solide avec fissure mobile est un système en évolution irréversible. L'énergie consommée est due essentiellement à la plastification locale confinée en tête de fissure, aux frottements entre grains le long des joints, aux mouvements de dislocations, aux mouvements de micro-fissures, etc... c'est-à-dire essentiellement à des mécanismes dissipatifs. L'analyse énergétique du phénomène s'effectue de la manière suivante :

Dans un premier temps, on présente une analyse globale de la dissipation pour un milieu dissipatif quelconque en petite transformation dynamique.

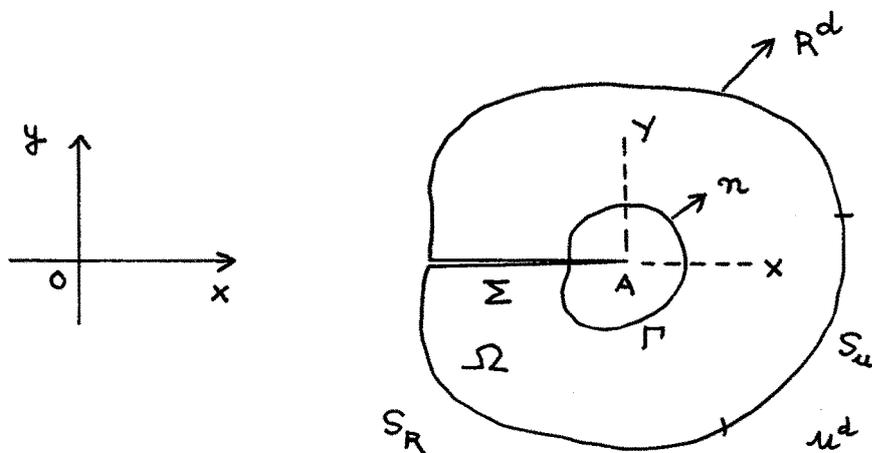
Cette analyse introduit d'une façon naturelle la notion de force due aux singularités en fond de fissure. C'est une grandeur énergétique intéressante dans la formulation des critères de propagation. La caractérisation de cette grandeur est discutée ensuite, selon la méthode des extensions virtuelles.

## 1.- PROBLEME DE FISSURE MOBILE

On considère en petite transformation isotherme un problème bidimensionnel de fissure rectiligne en propagation (contrainte plane ou déformation plane). Une structure  $\Omega$  avec fissure est soumise sur  $[0, T]$  à des forces et des liaisons données de type classique : déplacement  $u^d(t)$  et force  $R^d(t)$  sur les parties fixes  $S_u, S_R$  de la frontière  $\partial\Omega$  du solide. Sous ces sollicitations, la fissure se propage, sa longueur  $\ell(t)$  augmente avec le temps.

Pour comprendre la distribution des grandeurs physiques pendant cette propagation, on étudie un problème purement mécanique plus simple, en supposant que  $\ell(t)$  est une fonction donnée régulière, obtenue par exemple à partir des observations expérimentales, et on analyse la réponse mécanique au voisinage du fond de fissure. Cette analyse devrait mettre en évidence les grandeurs physiques intéressantes.

La figure suivante présente schématiquement la structure. Sur la surface fissurée  $\Sigma$ , le contact unilatéral des bords libres de la fissure est supposé sans frottement.



L'évolution du système étudié est régie par les lois de comportement et les équations dynamiques traduisant le principe fondamental de la mécanique.

### 1.1- Loi de comportement :

-----

On adopte le modèle de solide le plus général développé au chapitre II. Il est caractérisé par un potentiel thermodynamique représentant la densité d'énergie libre par unité de masse  $W(\varepsilon, \alpha)$  :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_R + \sigma_{IR} \\ \sigma_R = \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ A = - \rho \frac{\partial W}{\partial \alpha} \end{array} \right.$$

et un potentiel de dissipation  $\mathcal{D}(\dot{\varepsilon}, \dot{\alpha})$  vérifiant :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{IR} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}} \\ A = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\alpha}} \end{array} \right. .$$

On a établi au chapitre II que dans une transformation régulière la puissance de déformation par unité de volume est  $\sigma \cdot \dot{\varepsilon}$ , la partie non-compensée  $D = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} - \rho \dot{W}$  est la puissance intrinsèque dissipée (en transformation isotherme). On obtient, d'après la définition (1) des forces  $\sigma_R$ ,  $A$  associées aux variables d'état  $\varepsilon, \alpha$ , l'expression :

$$(3) \quad D = \sigma_{IR} \cdot \dot{\varepsilon} + A \dot{\alpha} .$$

Le modèle considéré englobe tous les matériaux usuels : élastiques, visco-élastiques, élasto-plastiques.

### 1.2- Equations dynamiques :

-----

On rappelle que les équations dynamiques s'écrivent sous forme locale, en absence des efforts de volume :

$$(4) \quad \text{Div } \sigma - \rho \ddot{u} = 0 .$$

Elles s'écrivent aussi globalement comme équation des puissances virtuelles :

$$(5) \quad \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon \, dV + \int_V \rho \ddot{u} \delta u \, dV = \int_{\partial V} n \cdot \sigma \cdot \delta u \, dS \quad ,$$

pour un volume quelconque  $V$ . En particulier, si la vitesse  $\dot{u}$  est assez régulière, on peut prendre  $\delta u = \dot{u}$ , l'équation (5) conduit au bilan de l'énergie mécanique :

$$(6) \quad \int_V \sigma \dot{\varepsilon} \, dV + \int_V \rho \ddot{u} \dot{u} \, dV = \int_{\partial V} n \cdot \sigma \cdot \dot{u} \, dS \quad ,$$

la puissance des efforts extérieurs compense la puissance de déformation et la variation de l'énergie cinétique.

### 1.3- Propriété de la solution :

-----

La fissure entraîne par sa propagation une modification du domaine de définition du solide,  $\Omega = \Omega(\ell)$ . Au point de vue mathématique, le problème de fissure mobile s'apparente donc à des problèmes de variations de domaine.

Les propriétés suivantes de la solution seront admises sans démonstration :

(P1) Le fond de fissure  $A$  est un point singulier, les différentes grandeurs  $y$  sont éventuellement singulières avec un développement asymptotique  $r^\alpha (\text{Log } \tau)^\beta f(\theta, \ell)$ .

(P2) Si les fonctions  $\dot{W}$ ,  $\dot{u}$  ne sont pas nécessairement intégrables sur  $\Omega(\ell)$ , pour des raisons physiques, les fonctions  $\rho W$ ,  $\rho \dot{u}^2$ ,  $A \dot{\alpha}$ ,  $\sigma_{\text{IR}} \dot{\varepsilon}$  sont nécessairement intégrables.

Les intégrales dans  $\Omega(\ell)$  de  $\rho W$ ,  $\rho \dot{u}^2/2$ ,  $A \dot{\alpha}$ ,  $\sigma_{\text{IR}} \dot{\varepsilon}$  correspondent respectivement à l'énergie libre globale, l'énergie cinétique, la puissance dissipée globale par les différents mécanismes physiques dans le volume  $\Omega(\ell)$ .

(P3) Le champ de vitesse  $v = \dot{u}$ , défini sur  $\Omega(\ell)$  n'est pas nécessairement régulier. Soit  $\dot{u}^*$  le champ de vitesse de déplacement dans le repère  $A X Y$  mobile avec la fissure :

$$(7) \quad \ddot{u} = U_{,t} (X, Y, t) = \frac{\partial}{\partial t} u (X + \ell(t), Y, t) = \dot{u} + \dot{\ell} u_{,1} \quad .$$

On établit que le champ  $\dot{u}^*$  est plus régulier que  $\dot{u}$  car les termes singuliers en fond de fissure de  $\dot{u}$  et de  $\dot{\ell} u_{,1}$  se compensent. En particulier, les fonctions  $\sigma \dot{\varepsilon}^*$ ,  $V \dot{V}^*$  sont intégrables dans  $\Omega(\ell)$ .

Par exemple, si le matériau est élastique, les résultats du chapitre IX permettent d'illustrer les propriétés P1, P2, P3. On a vu que  $\sigma \dot{\varepsilon} \sim r^{-2} \notin L^1(\Omega)$  alors que  $\sigma \dot{\varepsilon}^* \sim r^{-1}$ .

Une conséquence importante de la propriété P3 est qu'on peut appliquer l'équation des puissances virtuelles (5) avec  $\delta u = \dot{u}^*$  et  $V = \Omega(\ell)$ .

## 2.- ANALYSE DE LA DISSIPATION

*Étudions le bilan de l'énergie mécanique.*

D'après II(9), la puissance dissipée intrinsèque globale du système  $D_p$  est :

$$(8) \quad D_p = P_e - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left\{ \rho W + \frac{1}{2} v^2 \right\} d\Omega \quad .$$

La puissance des efforts extérieurs  $P_e$  du système de solide avec fissure est :

$$P_e = \int_{\partial\Omega} R \cdot v \, ds + \int_{\Sigma} R \cdot [v] \, ds \quad .$$

La condition de contact sans frottement sur  $\Sigma$  implique que le second terme est identiquement nul, les réactions sur  $\Sigma$  ne travaillent pas. En effet, localement, on a sur  $\Sigma$  :

$$R \cdot [u] = 0 \quad , \quad R_2 = 0 \text{ si } [u]_2 > 0 \quad , \quad R_2 \leq 0 \quad , \quad R_1 = 0 \quad ,$$

soit  $R \cdot [v] + [u] \cdot \dot{R} = R \cdot [v] = 0$  par continuité de  $[u]$  avec le temps.

Pour simplifier les notations, on note  $\phi(t) = \int_{\Omega(\ell(t))} \rho W \, d\Omega$  l'énergie réversible emmagasinée,  $C(t) = \int_{\Omega(\ell(t))} \frac{1}{2} \rho v^2 \, d\Omega$  l'énergie cinétique.

Le calcul de  $\frac{d}{dt} (C(t) + \phi(t))$  n'est pas simple car le domaine  $\Omega$  est variable avec le temps. D'ailleurs les fonctions  $\rho \dot{W}$  et  $\rho \dot{u} \dot{u}$  qui sont les dérivées sous le signe  $\int$  ne sont pas nécessairement intégrables. Il est nécessaire d'isoler les singularités en fond de fissure.

On introduit donc une courbe fermée régulière  $\Gamma$  entourant le fond de fissure, en mouvement de translation avec A. On désigne par  $V_{\Gamma}$  le volume géométrique limité par  $\Gamma$ , puis les fonctions :

$$(9) \quad \phi_{\Gamma}(t) = \int_{\Omega - V_{\Gamma}} \rho W \, d\Omega \quad , \quad C_{\Gamma}(t) = \int_{\Omega - V_{\Gamma}} \rho v^2 / 2 \, d\Omega \quad .$$

Le volume géométrique  $\Omega - V_\Gamma$  est variable avec le temps car  $V_\Gamma$  est en mouvement de translation, de vitesse  $\dot{\ell}$ .

En remarquant d'après P3 que :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\Gamma} \rho (W + \frac{1}{2} v^2) d\Omega = \int_{V_\Gamma} \rho (\dot{W} + v \dot{v}) d\Omega ,$$

et que :

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{V_\Gamma} \rho (\dot{W} + v \dot{v}) d\Omega = 0 ,$$

on obtient :

$$(10) \quad \frac{d}{dt} (C(t) + \phi(t)) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (C_\Gamma(t) + \phi_\Gamma(t)) .$$

Si  $n$  désigne la normale extérieure à  $\Gamma$ , on obtient donc :

$$(11) \quad D_P = \int_{\partial\Omega} R.v ds - \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - V_\Gamma} \rho (\dot{W} + v \dot{v}) d\Omega - \dot{\ell} \int_{\Gamma} \rho (W + \frac{1}{2} v^2) n_1 ds \right\} .$$

Or, le bilan de l'énergie pour le système des points matériels occupant le volume  $\Omega - V_\Gamma$  à l'instant  $t$  s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} R.v ds - \int_{\Gamma} n.\sigma.v ds = \int_{\Omega - V_\Gamma} \rho (\dot{W} + v \dot{v}) d\Omega + \int_{\Omega - V_\Gamma} D d\Omega .$$

Il en résulte l'expression suivante de la puissance dissipée intrinsèque :

$$D_P = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - V_\Gamma} D d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ \rho \dot{\ell} (W + \frac{1}{2} v^2) n_1 + n . \sigma . v \right\} ds \right\} ,$$

ou :

$$(12) \quad D_P = \int_{\Omega} D d\Omega + \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ \rho \dot{\ell} (W + \frac{1}{2} v^2) n_1 + n . \sigma . v \right\} ds ,$$

ou encore si l'on remarque que  $V$  a la même singularité que  $-\dot{\ell} u_{,1}$

$$D_p = \int_{\Omega} D \, d\Omega + \dot{\ell} \cdot \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ \rho \left( W + \frac{1}{2} v^2 \right) n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1} \right\} ds \quad .$$

Cette expression de la puissance dissipée globale suggère l'introduction de la quantité suivante :

$$(14) \quad G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ \rho \left( W + \frac{1}{2} v^2 \right) n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1} \right\} ds \quad ,$$

dont la définition est indépendante de la forme des contours  $\Gamma$  à faire tendre vers zéro. On l'appelle force due aux singularités en fond de fissure d'après son expression.

La puissance dissipée globale  $D_p$  s'écrit donc sous la forme :

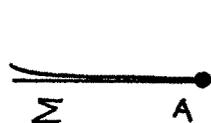
$$(15) \quad D_p = \int_{\Omega} D \, d\Omega + G \cdot \dot{\ell} \quad .$$

Dans un volume matériel  $V$  quelconque enveloppant  $A$ , la puissance dissipée  $D_p(V)$  s'écrit de la même façon :

$$D_p(V) = \int_V D \, d\Omega + G \dot{\ell} \quad \forall V, A \in V \quad .$$

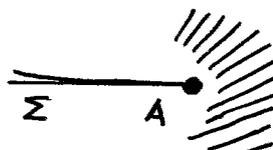
La thermodynamique implique  $D_p \geq 0 \forall V$  soit  $D \geq 0, G \geq 0$ . Si  $G \neq 0$  on voit que  $G\dot{\ell}$  représente une dissipation concentrée en fond de fissure, liée à la propagation.

Selon la loi de comportement adoptée, trois situations se présentent suivant la nature des singularités :



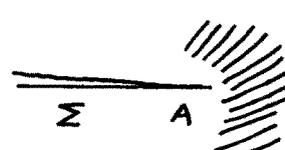
$$G \neq 0, D = 0$$

Matériau élastique.



$$G \neq 0, D \neq 0$$

Cas intermédiaire.



$$G = 0, D \neq 0$$

Matériau "fortement dissipatif".

On voit d'après les relations (8) et (15) que la puissance fournie par l'extérieur est d'une part stockée par le système sous forme d'énergie libre et d'énergie cinétique, d'autre part dissipée dans le volume  $\Omega$  par des mécanismes de volume lorsque  $D \neq 0$ , dissipée en fond de fissure  $A$  par des processus de rupture lorsque  $G \neq 0$ .

. Exercice :

On suppose que le matériau est élastique, homogène, isotrope.

. Montrer, à partir des résultats du chapitre IX, que la formule (14) conduit en quasi-statique et en déformation plane à l'expression suivante de la force due aux singularités  $G$  :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad .$$

3.- CALCUL DE G PAR LA METHODE DES EXTENSIONS VIRTUELLES :  
 TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

---

La grandeur  $G$  est une force thermodynamique définie sur l'état actuel. On peut l'estimer aussi en la faisant travailler dans une transformation virtuelle suivant la méthode habituelle de la Mécanique des Milieux Continus.

Pour simplifier, on se place en transformation quasi-statique en supposant que les efforts d'inertie ainsi que l'énergie cinétique sont négligeables. On obtient dans ces conditions l'expression suivante de  $G$  :

$$(16) \quad G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\rho W n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1}) ds \quad .$$

On va montrer que cette valeur de  $G$  s'obtient aussi par la méthode des extensions virtuelles, à partir des déplacements élastiques virtuels notés  $u[\ell]$ , définis à partir de la configuration actuelle de la manière suivante :

. Toutes les données en force et en liaison, les répartitions de contraintes irréversibles  $\sigma_{IR}$ , les paramètres internes  $\alpha$  sont bloqués à leurs valeurs actuelles (l'instant  $t$  considéré), on considère une extension virtuelle de la fissure, en faisant augmenter  $\ell$  d'une façon fictive à partir de sa valeur actuelle. On note  $u[\ell]$  la réponse en déplacement d'un solide fictif, purement élastique de volume  $\Omega[\ell]$  de comportement élastique

$$(17) \quad \varepsilon \rightarrow \sigma(\varepsilon) = \sigma_{IR}(t) + \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha(t)) \quad ,$$

soumis à des efforts et des liaisons  $R^d(t)$ ,  $u^d(t)$ .

Comme il s'agit de réponses purement élastiques, on peut introduire (voir chapitre III) la valeur de l'énergie potentielle associée à la solution  $u[\ell]$  :

$$(18) \quad P[\ell] = \int_{\Omega[\ell]} \left\{ \rho W(\varepsilon[\ell], \alpha(t) + \sigma_{IR}(t) \cdot \varepsilon[\ell]) \right\} d\Omega - \\ - \int_{S_R} R^d(t) \cdot u[\ell] ds \quad .$$

Montrons que la force  $G$  s'écrit aussi :

$$(19) \quad G = - \left. \frac{dP}{d\ell} \right|_{\ell = \ell(t)} \quad (\text{Théorème de Rice généralisé}) \quad .$$

Pour établir la relation (18), il suffit de reprendre le calcul du paragraphe 2 pour les matériaux élastiques fictifs considérés. Ces matériaux correspondent à l'expression suivante de l'énergie libre volumique :

$$\rho W(\varepsilon, \alpha(t) + \sigma_{IR}(t) \cdot \varepsilon) \quad ,$$

et donnent pour  $\ell = \ell(t)$  :

$$\mathcal{G} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ (\rho W + \sigma_{IR} \cdot \varepsilon) n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1} \right\} ds \quad ,$$

avec  $\mathcal{G}$  vérifiant d'après la relation (8),  $\mathcal{G} = - \frac{dP}{d\ell}$  .

Il en résulte que :

$$- \left. \frac{dP}{d\ell} \right|_{\ell = \ell(t)} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ (\rho W + \sigma_{IR} \cdot \varepsilon) n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1} \right\} ds \quad .$$

D'autre part, l'intégrabilité de la dissipation  $\sigma_{IR} \cdot \dot{\varepsilon}$  assure que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \sigma_{IR} \cdot \varepsilon ds = 0 \quad , \quad \text{d'où la relation (18)} .$$

## REMARQUES :

1- L'énergie potentielle  $P$  définie d'après (17) est fonction de la géométrie, de l'état actuel et des données :

$$(20) \quad P = P (u^d, R^d, \sigma_{IR}, \alpha, \ell) \quad .$$

En effet, si tous les paramètres  $u^d, R^d, \sigma_{IR}, \alpha, \ell$  sont connus, on obtiendra la valeur associée de  $P$  par la résolution d'un problème purement élastique, de loi de comportement élastique (17) avec contact unilatéral sans frottement sur  $\Sigma$ . La formule (19) montre que  $G$  est donné par la dérivée partielle  $\frac{\partial P}{\partial \ell}$  :

$$(21) \quad G = - \frac{\partial P}{\partial \ell} (u^d, R^d, \sigma_{IR}, \alpha, \ell) \quad .$$

Pour cette raison,  $G$  est appelé taux de restitution de l'énergie.

2- On peut, dans la pratique, accéder à la grandeur  $G$  à partir des expressions (16) ou (21). Il s'agit de deux méthodes complémentaires, l'une purement locale, l'autre plus énergétique.

3- Pour un matériau élastique, homogène  $W = W (\varepsilon(x, t))$ , en transformation quasi-statique, la relation (16) se simplifie :

$$G = \int_{\Gamma} (\rho W n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1}) ds \quad ,$$

car on vérifie sans difficulté que dans ce cas particulier, l'intégrale considérée est indépendante du contour  $\Gamma$ .

4- On peut aussi, par changement de variables, effectuer les calculs de  $\frac{d}{dt} (C(t) + \phi(t))$  en envoyant le domaine  $\Omega(\ell)$  sur un domaine fixe  $\Omega_0$ . Cette technique est fréquemment utilisée en mathématique et en mécanique lorsqu'il y a des variations de domaines.

On envoie le domaine  $\Omega(\ell)$  sur  $\Omega_0$  par le changement de variables :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(y, \ell) \\ \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right| > 0 \end{array} \right. \quad x \in \Omega(\ell) \quad , \quad y \in \Omega_0$$

On désigne par  $\theta(y, \ell)$  le champ des vecteurs :

$$(23) \quad \theta(y, \ell) = \frac{\partial x}{\partial \ell}(y, \ell)$$

Vu la géométrie du problème, on peut se limiter à des correspondances  $x \rightarrow y(x, \ell)$  dont la restriction à  $\partial\Omega$  est une simple translation et qui maintiennent la normale à  $\Sigma$ . Par exemple, on adopte la correspondance suivante :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x, \ell) = x \quad \text{si} \quad |x - A| \geq \tau_1 \\ y(x, \ell) = x - (\ell - \ell_0) \vec{i} \quad \text{si} \quad |x - A| \leq \tau_0 \\ y(x, \ell) = x - (\ell - \ell_0) \vec{i} \frac{|x - A| - \tau_1}{\tau_0 - \tau_1} \quad \text{si} \quad \tau_0 < |x - A| < \tau_1 \end{array} \right.$$

Dans (24), le disque de centre  $A$  de rayon  $\tau_0$  est ramené par translation sur le disque de centre  $A_0$ , de rayon  $\tau_0$ , alors que la correspondance est l'application identique pour les points extérieurs au disque de centre  $A$ , de rayon  $\tau_1$ .

Les grandeurs physiques  $u(x, t)$ ,  $\sigma(x, t)$  deviennent  $U(y, t)$ ,  $\Sigma(y, t)$  avec  $U(y, t) = u(x(y, \ell(t)), t)$ ,  $\Sigma(y, t) = \sigma(x(y, \ell(t)), t)$ . On va noter  $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t}$ , ... La vitesse  $\dot{U}$  s'écrit :

$$\dot{U} = \dot{u} + \dot{\ell} u_{,i} \theta_i$$

La vitesse  $\dot{U}$  est identique à  $\dot{u}$  dans le disque  $(A, \tau_0)$ , c'est donc un champ régulier de  $\tau_0$ .

On obtient alors :

$$C(t) + \phi(t) = \int_{\Omega_0} \rho(W + \frac{1}{2} v^2) \det \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| d\Omega_0$$

Pour simplifier, on va se placer en transformation quasi-statique pour retrouver la formule (16). Si l'on prend  $\Omega_0 = \Omega(\ell(t))$  en remarquant que  $\det \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|_{\ell=\ell(t)} = 1$ ,  $\frac{d}{dt} \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|_{\ell=\ell(t)} = \dot{\ell} \operatorname{div} \theta$ , on a :

$$(25) \quad \frac{d}{dt} \phi(t) = \int_{\Omega} (\rho W \dot{\ell} \operatorname{div} \theta + \rho \dot{W}^*) d\Omega \quad .$$

or  $\rho \dot{W}^* = \rho \dot{W} + \dot{\ell} \rho W_{,i} \theta_i - \sigma \dot{\epsilon} + \sigma \dot{\epsilon} = \sigma \dot{\epsilon} + \dot{\ell} \rho W_{,i} \theta_i - D$

et  $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}^* - \dot{\ell} \sigma_{ij} (u_{i,k} \theta_k)_{,j}$  .

Comme  $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot \dot{u} ds = P_e$ , on obtient donc :

$$P_e = \frac{d}{dt} \phi(t) + \int_{\Omega} D d\Omega + \dot{\ell} \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij} (u_{i,k} \theta_k)_{,j} - \rho W_{,i} \theta_i - \rho W \operatorname{div} \theta \right\} d\Omega \quad .$$

L'introduction du domaine  $\Omega_T$  est les intégrations par parties conduisent alors à l'expression (16) de G.

. Exercice :

Si le matériau est élastique, homogène en transformation quasi-statique, montrer que l'on obtient en particulier :

$$G = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,k} \theta_{k,j} - \rho W \operatorname{div} \theta) d\Omega \quad .$$

#### 4.- CRITERE ENERGETIQUE DE PROPAGATION

La dissipation en fond de fissure est le produit d'une force  $G$  par une vitesse  $\dot{l}$ . La méthode du potentiel de dissipation nous conduit comme en plasticité, à postuler l'existence d'un potentiel  $\varphi(G)$  tel que :

$$(26) \quad \dot{l} = \partial\varphi(G) \quad .$$

Une telle loi de propagation est une loi standard. L'exemple le plus simple correspond au critère de Griffith :

$$\varphi(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G \leq G_c \\ +\infty & \text{si } G > G_c \end{cases} \quad ,$$

ce qui donne :

$$(27) \quad \begin{cases} \dot{l} \geq 0 & \text{si } G = G_c \\ \dot{l} = 0 & \text{si } G < G_c \end{cases} \quad ,$$

$G_c$  représente l'énergie dissipée critique par unité de surface.

|                                                      |
|------------------------------------------------------|
| QUELQUES REMARQUES GENERALES SUR LE CONTENU DU COURS |
|------------------------------------------------------|

-1- Depuis une vingtaine d'années, les besoins de l'industrie, les progrès réalisés dans les méthodes expérimentales et numériques ont beaucoup contribué au développement des études sur le comportement réel des matériaux. Le lecteur peut, par exemple, se rapporter à des références [2], [23] pour l'aspect physique des modèles en liaison avec la théorie des dislocations, à des références [2], [15], [20] pour l'aspect phénoménologique. Dans notre exposé, nous nous sommes limités essentiellement à la caractérisation des matériaux à partir de deux potentiels. Il s'agit d'une théorie à la fois simple et opérationnelle, elle permet non seulement de décrire la plupart des modèles usuels, mais, lorsqu'elle est appliquée à des contextes différents, conduit d'une manière systématique à la formulation de nouvelles lois énergétiques. Un exposé détaillé de cette théorie a été donné dans le cours de Mécanique des Milieux Continus de M. P. GERMAIN [8].

-2- Nous avons laissé de côté tous les problèmes relatifs aux effets visqueux. Pour les solides, la modélisation de la viscosité conduit à des modèles viscoélastiques ou viscoplastiques. D'une manière générale, ces modèles posent beaucoup moins de difficultés mathématiques que les modèles plastiques.

-3- Pour décrire l'endommagement des matériaux, la méthode du chapitre II est encore valable. Certains modèles de l'endommagement [14] correspondent à l'existence d'une énergie libre non convexe et non séparée.

-4- Il est intéressant de se demander dans quelles conditions (les moins restrictives !) les résultats sur le comportement asymptotique établis au chapitre IV peuvent encore être valables. On constate en effet que si l'élasticité est non-linéaire, la propriété de contraction IV(21) n'étant plus vérifiée, la démonstration n'est pas facilement généralisable. C'est un problème ouvert d'intérêt pratique important lorsque l'on travaille avec des métaux à haute température, par exemple.

-5- La condition d'adaptation qu'exige le théorème de Melan n'est pas toujours satisfaite dans les structures industrielles.

D'autre part, même si l'adaptation est réalisée, on se demande comment l'état asymptotique a été atteint. Pour les chargements cycliques, par exemple, il est important que le praticien puisse estimer le nombre de cycles nécessaires pour atteindre d'une façon raisonnable la limite.

Ces deux problèmes correspondent à deux directions d'études intéressantes :

- Comportements cycliques et réponses plastiques ou viscoplastiques périodiques.
- Estimations de la vitesse de convergence vers les états asymptotiques.

Des études telles que [9], [18], [27] apportent beaucoup de résultats sur le sujet.

-6- On peut donner une justification rigoureuse du développement asymptotique IX(2). Il faut encore établir sa validité pour des comportements plus complexes.

|               |
|---------------|
| BIBLIOGRAPHIE |
|---------------|

- [1] BAMBERGER Y      *Cours de Mécanique,*  
E.N.P.C. (1971).
- [2] BUI H.D.          *Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relation de comportement élasto-plastique des métaux cubiques,*  
Thèse, Paris (1969).
- [3] BUI H.D.          *La mécanique de la rupture fragile,*  
Masson, Paris (1977).
- [4] BREZIS H.          *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires dans les espaces de Hilbert,*  
North Holl. Pub. (1973).
- [5] DEBORDES O.      *Contribution à la théorie et au calcul de l'élastoplasticité asymptotique,*  
Thèse, Marseille (1977).
- [6] DESTUYNDER P.  
DJAOUA M.          *Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice,*  
Math. Meth. Appl. Sc. (1981).
- [7] DUVAUT G.  
LIONS J.L.          *Les inéquations en Physique et en Mécanique,*  
Dunod, Paris (1972).
- [8] GERMAIN P.        *Cours de mécanique des milieux continus,*  
Masson & Cie (1973).
- [9] HALPHEN B.        *Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité,*  
Thèse, Paris (1978).
- [10] HALPHEN B.       *Sur les discontinuités des vitesses en élastoplasticité,*  
C.R. Acad. Sci., A, (1978).
- [11] HALPHEN B.  
NGUYEN Q.S.        *Sur les matériaux standards généralisés,*  
J. de Mécanique, (1975).

- [12] JOHNSON C. *A mixed finite element method for plasticity problems with hardening,*  
Scien. J. Num. An., (1977).
- [13] KOITER W.T. *General problems for elastic plastic solids,*  
Progress in Solid Mechanics, (1960).
- [14] LEMAITRE J.  
CHABOCHE J.L. *Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement,*  
J. Mech. Appl., (1978).
- [15] MANDEL J. *Cours de Mécanique des Milieux Continus,*  
Gauthier-Villars, (1966).
- [16] MANDEL J. *Note sur l'application du critère de Tresca au problème de la flexion circulaire d'un cylindre élastoplastique,*  
Arch. Mech. Stos. (1972).
- [17] MERCIER B. *Sur la théorie et l'analyse numérique des problèmes de plasticité,*  
Thèse, Paris (1977).
- [18] MOREAU J.J. *On unilateral constraints, friction and plasticity,*  
Cours du CIME, (1973).
- [19] NAYROLES B. *Tendances récentes et perspectives à moyen terme en élastoplasticité asymptotique des constructions,*  
3è C.F.M., Grenoble (1977).
- [20] NGUYEN Q.S. *Contribution à la théorie macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage,*  
Thèse, Paris (1973).
- [21] NGUYEN Q.S. *Méthodes énergétiques en Mécanique de la Rupture,*  
J. de Mécanique, (1980).
- [22] SALENÇON J. *Analyse limite,*  
Cours de l'Ecole Polytechnique, (1975).
- [23] SIDOROFF F.  
TEODOSIU C. *A theory of finite elastoviscoplasticity of simple crystals,*  
Int. J. Eng. Sc., (1976).
- [24] SUQUET P. *Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité parfaite,*  
Thèse, Paris (1978).

- [25] TEMAM R.  
STRANG G. *Functions of bounded deformation,*  
Orsay (1979).
- [26] ZARKA J. *Principes des méthodes actuelles de résolution numérique  
des problèmes classiques en mécanique des solides,*  
Cours Paris VI, (1973).
- [27] ZARKA J.  
CASIER J. *Elastic-plastic response of a structures to cyclic  
loading : practical rules,*  
Mechanics Today, Vol. 6, (1979).

N° d'impression 568  
4e trimestre 1982