Publications Mathématiques d'Orsay

SOUS-ESPACES INVARIANTS

Henry HELSON

ANNEE 1966/1967

Mathématique
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Publications Mathématiques d'Orsay

SOUS-ESPACES INVARIANTS

Henry HELSON

ANNEE 1966/1967

Mathématique
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

PREMIERE SEANCE

FONCTIONS VECTORIELLES

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable dont une base orthonormale complète dénombrable est désignée par $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

<u>Définition</u>. - On dit que $F(e^{ix})$ définie p.p. sur le cercle à valeurs dans $\mathcal{H}$ est mesurable si $(F(e^{ix}), \varphi)$ l'est pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$.

<u>Remarque</u>. -

1) Si $F(e^{ix})$ est mesurable alors la fonction $\|F(e^{ix})\|$ est mesurable.

En effet

$$\|F(e^{ix})\| = \sup_{\varphi_n} |(F(e^{ix}), \varphi_n)|$$

où φ_n parcourt un ensemble dénombrable de la boule unité.

<u>Lemme</u>. - Si F et G sont mesurables alors $(F,G)_{\mathcal{H}}$ est mesurable.

<u>Preuve</u>. - on a :

$$(F + G , F + G) = \|F\|^2 + \|G\|^2 + 2\mathrm{Re}(F,G)$$

d'après la remarque 2) précédente $\|F + G\|$, $\|F\|$, $\|G\|$ sont mesurables donc $\mathrm{Re}(F,G)$ l'est aussi.
En prenant iG au lieu de G on démontre - même raisonnement - que $\mathrm{Im}(F,G)$ est mesurable donc (F,G) l'est aussi.

C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. - L'intégrale d'une fonction vectorielle.

on dit que

$$\int F(e^{ix})\, d\sigma(x) = \varphi \in \mathcal{H} \qquad \text{si :}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \langle F(e^{ix}), \psi \rangle\, d\sigma(x) \qquad \text{pour } \forall \psi \in \mathcal{H}\,.$$

Polynômes trigonométriques. - Ce sont des fonctions de la forme :

$$\sum_{\text{finie}} \varphi_k\, \chi^k \qquad \text{où} \qquad \varphi_k \in \mathcal{H}$$

Norme sur l'ensemble des polynômes trigonométriques. -

on pose

$$\langle P, Q \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (P(e^{ix}), Q(e^{ix}))\, d\sigma(x)$$

Il est clair que si

$$P = \sum \varphi_n\, \chi^n$$

$$Q = \sum \psi_n\, \chi^n$$

alors $(P,Q)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \sum (\varphi_n, \psi_n)_{\mathcal{H}}$

et que :

$\|P\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = \left(\sum \|\varphi_n\|^2_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}$ est une norme sur l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Définition de $L^2_{\mathcal{H}}$. - $L^2_{\mathcal{H}}$ est le complété de l'ensemble des polynômes trigonométriques muni de la norme précédente.

Donc les éléments de $L^2_{\mathcal{H}}$ sont en correspondance biunivoque avec toutes les suites $(\varphi_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ tq $\sum \|\varphi_n\|^2 < \infty$

$$F \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \chi^n$$

Par définition de $L^2_{\mathcal{H}}$ on a :

$$\|F\|^2_{L^2_{\mathcal{H}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\varphi_n\|^2$$

nous allons définir tout élément $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ d'une façon ponctuelle.

Soit $P = \sum \varphi_n \chi^n$ un P.T.

on pose

$$f_j(e^{ix}) = (P(e^{ix}) \, , \, e_j)_{\mathcal{H}} = \sum (\varphi_n \, , \, e_j) \, \chi^n$$

qui est un P.T.

on a d'après la formule de Parseval :

$$P(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix}) \, e_j$$

et

$$\|P(e^{ix})\|^2_{\mathcal{H}} = \sum |f_j(e^{ix})|^2 \qquad \text{p.p.} \, (1)$$

En intégrant (1) on obtient :

$$\|P\|^2_{L^2} = \sum_j \|f_j\|^2_{L^2}$$

Soit donnée une suite de P.T.

$(P^{(k)})$ qui converge vers F dans la norme $L^2_{\mathcal{H}}$ (1) démontre que chaque composante $f_j^{(k)}$ converge dans L^2 vers $f_j \in L^2$

$$(P^{(k)}(e^{ix}) = \sum (P^{(k)}, \, e_j) \, e_j = \sum_j f_j^{(k)}(e^{ix}) \, e_j \qquad \text{p.p.})$$

et que

$$\sum \|f_j\|^2_{L^2} < \infty$$

On pose :

$$F(e^{ix}) = \sum_{j\geq 1} f_j(e^{ix})\, e_j \qquad \text{p.p.} (2)$$

Cette somme existe pour presque tout x , car

$$\sum_j \|f_j\|^2_{L^2} < +\infty \implies \sum_j |f_j(e^{ix})|^2 < +\infty \qquad \text{p.p.}$$

donc

$$\sum_{j\geq 1} f_j(e^{ix})\, e_j \quad \text{existe dans } \mathscr{H} \quad \text{p.p.}$$

$F(e^{ix})$ ainsi définie est mesurable car c'est la somme d'une série de fonctions mesurables et :

$$\|F(e^{ix})\|^2_{\mathscr{H}} = \sum_j |f_j(e^{ix})|^2 \qquad \text{p.p.}$$

par conséquent :

$$\|F\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}} = \sum \|f_j\|^2_{L^2} = \int \|F(e^{ix})\|^2\, d\sigma(x)$$

De plus $P^{(k)}$ converge vers F ainsi définie dans le sens que

$$\int \|F - P^{(k)}\|^2\, d\sigma \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

en effet :

$$\int \|F - P^{(k)}\|^2_{\mathscr{H}}\, d\sigma = \sum_{j\geq 1} \int |f_j - f_j^{(k)}|^2\, d\sigma \leq \liminf_{m_i} \Big(\sum_j \int |f_j^{(m_i)} - f_j^{(k)}|^2 d\sigma \Big)$$

en conséquence du lemme de Fatou, si (m_i) est une sous suite telle que $f_j^{(m_i)}$ converge vers f_j p.p. pour chaque j .Or le dernier membre est petit dès que k est assez grand d'où le résultat.

Ce procédé permet d'identifier L^2 à l'ensemble des F mesurables telles que la norme

$$\|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = \left(\int \|F(e^{ix})\|^2_{\mathcal{H}} \, d\sigma\right)^{1/2}$$

est finie.

Il reste à démontrer que toutes les fonctions ayant cette propriété peuvent être approchées par des P.T. et correspondent à des éléments de $L^2_{\mathcal{H}}$.

En effet, comme $\mathcal{H}$ est séparable on peut écrire p.p.

$$F(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix}) e_j$$

où $$f_j(e^{ix}) = (F(e^{ix}), e_j)_{\mathcal{H}}$$

on peut approcher f_j par un P.T. scalaire $p_j(e^{ix})$ tel que:

$$\|f_j - p_j\|_{L^2} < \sqrt{\frac{\epsilon}{n}} \qquad j=1,2,\dots,n \quad .$$

poser

$$P^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} p_j \; e_j$$

alors :

$$\int \|F - P^{(n)}\|^2_{\mathcal{H}} \, d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \int |f_j - p_j|^2 \, d\sigma + \sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 \, d\sigma$$

$$< \frac{\epsilon}{n} \, n + \sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 \, d\sigma$$

comme :

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \int |f_j|^2 \, d\sigma < \infty$ on peut choisir n de telle façon que $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 \, d\sigma < \epsilon$

ce qui démontre que F est dans l'adhérence des P.T.

<u>Définition de</u> $L^p_{\mathcal{H}}$. - $\qquad 1 \leq p \leq \infty$.

$1 \leqslant p < \infty$: $L^p_{\mathcal{H}}$ = complété de l'ensemble des P.T. pour la norme

$$\|P\|^p_{L^p_{\mathcal{H}}} = \int \|P\|^p_{\mathcal{H}}\, d\sigma$$

$p = \infty$ $L^\infty_{\mathcal{H}}$ = l'ensemble des fonctions mesurables bornées pour la norme :

$$\|F\|_{L^\infty_{\mathcal{H}}} = \sup_x \operatorname{ess} F(e^{ix})$$

Comme dans le cas de $p=2$ on va identifier les F de $L^p_{\mathcal{H}}$. aux fonctions mesurables $F(e^{ix})$ t.q. :

$$\|F\|^p_{L^p_{\mathcal{H}}} = \int \|F(e^{ix})\|^p_{\mathcal{H}}\, d\sigma\,(x) < \infty$$

Pour cela on écrit

$$F(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix})\, e_j \quad \text{où}$$

$$f_j(e^{ix}) = (F(e^{ix})\,,\, e_j)$$

la décomposition est bien définie pour chaque $F(e^{ix})$ mesurable.

Dans ce cas $|f_j| \leqslant \|F\|$ p.p. donc $f_j \in L^p$.

En modifiant un peu le raisonnement du cas $p=2$ on démontre qu'il existe une suite de P.T. $P^{(n)}$ telle que

$$\int \|F - P^{(n)}\|^p_{\mathcal{H}}\, d\sigma \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

et que chaque suite de Cauchy $P^{(n)}$ converge dans ce sens vers une fonction F .

<u>Proposition</u>. - Soit $F \in L^p_{\mathcal{H}}$

alors $\varphi_n = \int F \chi^{-n}\, d\sigma$ existe pour chaque n et on écrit :

$$F(e^{ix}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \, e^{inx} \quad .$$

<u>Preuve</u>. - Pour cela, il nous suffit de démontrer que l'application :

$$P \longrightarrow \varphi_n(P) \qquad \text{où} \quad P = \sum \varphi_n \chi^n \quad : \text{P.T.}$$

est continue pour les normes $L^p_{\mathcal{H}}$ et que

$$\varphi_n = \int P \, \chi^{-n} \, d\sigma \, .$$

car par passage à la limite, cette application sera définie dans $L^p_{\mathcal{H}}$ tout entier.

Soit $\psi \in \mathcal{H} = \|\psi\| = 1$

On a :

$$(\varphi_o, \psi) = \int (P, \psi) \, d\sigma \quad \text{et}$$

$$\left| \int (P,\psi) \, d\sigma \right| \leq \int \| P \| \, d\sigma$$

Donc

$$\|\varphi_o\| \leq \|P\|_{L^1_{\mathcal{H}}} \leq \|P\|_{L^p_{\mathcal{H}}} \qquad \forall_p \; : \; 1 \leq p < \infty$$

le cas de $n \neq o$ est démontré de la même façon et la conclusion est encore valable pour $p = \infty$.

C.Q.F.D.

<u>Définition de l'espace</u> $H^p_{\mathcal{H}}$. - $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$$H^p_{\mathcal{H}} = \Big\{ F \in L^p_{\mathcal{H}} \quad \text{ou bien 1) } F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j \quad \text{ou} \quad f_j(e^{ix}) \in H^p \; \forall_j \Big\}$$

$$\text{ou bien 2) } F(e^{ix}) \sim \sum_{n=o}^{\infty} \varphi_n e^{inx} \quad \text{où} \quad \varphi_n \in \mathcal{H}$$

Démontrons l'équivalence de 1) et de 2) :

1) $\Longrightarrow$ 2)

En effet

$$(\varphi_n(F), e_j) = \int (F, e_j)\chi^{-n}\, d\sigma$$

$$= \int f_j\, \chi^{-n}\, d\sigma = a_n(f_j)$$

comme $f_j \in H^p$ $\forall_j$ alors $a_n(f_j) = o$ $\forall n<o$

$$\Longrightarrow \varphi_n(F) = o \qquad \forall n<o$$

C.Q.F.D.

2) $\Longrightarrow$ 1)

En effet,

pour $\forall_j$, on a par l'hypothèse $\varphi_n = o$ $n<o$

$$(\varphi_n(F), e_j) = o = \int (F, e_j)\, \chi^{-n}\, d\sigma = a_n(f_j)$$

donc $f_j \in H^p$ $\forall_j = 1,2,\ldots$

C.Q.F.D.

Il est aisé de vérifier que $H^p_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p_{\mathcal{H}}$ pour $\forall p : 1 \leq p \leq \infty$

Soit $F \in L^p_{\mathcal{H}}$; $G \in L^q_{\mathcal{H}}$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$1 \leq p, q \leq \infty$

on a :

$$\int |(F,G)|\, d\sigma \leq \|F\|_{L^p_{\mathcal{H}}} \|G\|_{L^q_{\mathcal{H}}}$$

en effet

$$\int |(F,G)|\, d\sigma \leq \int \|F\|_{\mathcal{H}} \|G\|_{\mathcal{H}}\, d\sigma \leq \|F\|_{L^p_{\mathcal{H}}} \|G\|_{L^q_{\mathcal{H}}}$$

si $p=2$

$(F,G)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (F,G)_{\mathcal{H}}\, d\sigma$ définit un produit scalaire, $L^2_{\mathcal{H}}$ est donc un espace de Hilbert.

<u>Lemme</u>. - (F est orthogonale à G p.p. dans $\mathcal{H}$) $\Longleftrightarrow$ ($F \perp \chi^n G$ dans $L^2_{\mathcal{H}}$ pour $\forall n$) .

<u>Preuve</u>. -

($\Longrightarrow$) est bien évident.

($\Longleftarrow$) en effet, par hypothèse

on a : (3) $\int (F,G)_{\mathcal{H}}\, \chi^{-n}\, d\sigma = o \qquad \forall n$

comme $(F,G) \in L^1$ d'après l'inégalité de Hölder (3) donne :

$$a_n(<F,G>) = o \quad \text{pour } \forall n \text{ donc}$$

$$(F,G) = o \quad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

<u>Définition d'une fonction directionnelle</u> (f.d.) (range fonction).-

Une fonction directionnelle est une fonction $\mathfrak{J}(e^{ix})$ définie p.p. sur le cercle dont les valeurs sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$. On dira que $\mathfrak{J}(e^{ix})$ est mesurable si le projecteur $P(e^{ix})$ de $\mathcal{H}$ sur $\mathfrak{J}(e^{ix})$ est mesurable c.a.d. $(P(e^{ix})\varphi,\psi)$ est mesurable pour $\forall\varphi$, $\psi \in \mathcal{H}$.

<u>Lemme</u>. - Si $\mathfrak{J}(e^{ix})$ est mesurable alors $P(e^{ix})\, F(e^{ix})$ est mesurable pour toute fonction $F(e^{ix})$ mesurable.

<u>Preuve</u>. - Comme

$$(P(e^{ix})\, F(e^{ix}), \varphi)_{\mathcal{H}} = (F, P\varphi)_{\mathcal{H}}$$

remarquer que P est un projecteur autoadjoint en presque chaque point, $p\varphi$ est mesurable donc $(F,P\varphi)_{\mathcal{H}}$ est mesurable donc $P(e^{ix})\, F(e^{ix})$ est mesurable pour $\forall F(e^{ix})$ mesurable

C.Q.F.D.

<u>Définition de l'espace</u> $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$. -

$\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ désigne l'ensemble des fonctions $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ tq :
$F(e^{ix}) \in J(e^{ix})$ p.p.

On a le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. - $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ est un sous-espace fermé de $L^2_{\mathcal{H}}$ dont le complémentaire dans $L^2_{\mathcal{H}}$ est $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp}$

$$(\mathcal{J}^{\perp}(e^{ix}) = \text{complémentaire de } \mathcal{J}(e^{ix}))$$

Le projecteur auto-adjoint sur $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ est P
où $(PF)(e^{ix}) = P(e^{ix})\, F(e^{ix})$.

<u>Preuve</u>. - Soit $F_n \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ si F_n converge dans $L^2_{\mathcal{H}}$ vers F on peut extraire une sous-suite $F_{n_j}(e^{ix})$ qui converge vers $F(e^{ix})$ p.p. or $F_{n_j}(e^{ix}) \in \mathcal{J}(e^{ix})$ p.p. donc $F \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ ce qui démontre que $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ est fermé dans $L^2_{\mathcal{H}}$. Le projecteur $\mathcal{J}^{\perp}(e^{ix})$ est mesurable en même temps que $\mathcal{J}(e^{ix})$ car

$$P_{\mathcal{J}\perp}(e^{ix}) = (I - P_{\mathcal{J}})(e^{ix})$$

Il est évident que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \perp \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp} \text{ dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

car $\left.\begin{array}{l} F(e^{ix}) \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \\ G \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow (F(e^{ix}), G(e^{ix})) = o$ p.p.

donc $(F,G)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (F,G)\, d\sigma = o$

On peut alors écrire :

$$L^2_{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \oplus \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp} \oplus Z$$

Démontrons que $Z = \{o\}$

En effet, soit $F \in Z$

$P(e^{ix})$ le projecteur sur $\mathcal{J}(e^{ix})$

On a :

$$P(e^{ix})\ F(e^{ix}) \quad \text{est mesurable et } \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$$

donc

$$(I - P)F \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp}$$

$$\Longrightarrow F = PF + (I - P)F \in \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \oplus \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp}$$

ce qui démontre que $Z = \{o\}$

$$\Longrightarrow L^2_{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \oplus \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp}$$

c.a.d. $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}^{\perp} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}\perp}$

Il nous reste à démontrer que :

$(PF)\ (e^{ix}) = P(e^{ix})\ F(e^{ix})$ est le projecteur auto-adjoint sur $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$.

En effet, il est aisé de vérifier que P ainsi défini est un projecteur car

$$P^2 = P \quad \text{et} \quad P \text{ est borné dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

de plus P est auto-adjoint car :

$$(PF,G)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (PF,G)_{\mathcal{H}}\, d\sigma = \int (F,PG)_{\mathcal{H}}\, d\sigma = (F,PG)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

dont P est un projecteur auto-adjoint dans $L^2_{\mathcal{H}}$ et son image est contenu dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$.

Nous allons démontrer que :

$$P_{\mathcal{J}}(L^2_{\mathcal{H}}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$$

En effet considérons l'opérateur $P_{\mathcal{J}\perp}$ défini par :

$$(P_{\mathcal{J}\perp} F)(e^{ix}) = P_{\mathcal{J}\perp}(e^{ix})\ F(e^{ix})$$

on a :

$$F(e^{ix}) = (P_{\mathcal{J}}F)\ (e^{ix}) + (P_{\mathcal{J}\perp}F)(e^{ix}) \qquad \text{pour } \forall F$$

c.a.d.

$$F = P_{\mathcal{J}} F + P_{\mathcal{J}^\perp} F \quad .$$

or $L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}} \oplus \mathcal{M}_{\mathcal{J}^\perp}$

$$P_{\mathcal{J}} L^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$$

$$P_{\mathcal{J}^\perp} L^2 \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}^\perp}$$

donc : $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} = P_{\mathcal{J}} L^2_{\mathcal{H}}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{J}^\perp} = P_{\mathcal{J}^\perp} L^2_{\mathcal{H}}$

C.Q.F.D.

DEUXIEME SEANCE

<u>Définition</u>. - Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace fermé dans $L^2_{\mathcal{H}}$ $\mathfrak{M}$ est dit simplement invariant (s.i.) si

$$\chi\,\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{M} \qquad \forall \chi$$

est dit complètement invariant (c.i.) si

$$\chi\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \qquad \forall \chi$$

Il s'agit de déterminer les sous-espaces $\mathfrak{M}$ complètement invariants de $L^2_{\mathcal{H}}$, on a le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. - Les sous-espaces $\mathfrak{M}$ c.i. sont exactement les $\mathfrak{M}_{\mathfrak{J}}$ pour une fonction directionnelle $\mathfrak{J}$ mesurable.

<u>Démonstration</u>. - Il est clair que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{J}}$ est un sous-espace fermé c.i. et comme L^2 et $\mathcal{H}$ sont séparables l'espace $L^2_{\mathcal{H}}$ l'est aussi.

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^{\perp}$ étant fermés dans $L^2_{\mathcal{H}}$ donc sont séparables;

Soient $(F_1 , F_2 ,\ldots)$ une base de $\mathfrak{M}$

$(G_1 , G_2 ,\ldots)$ celle de $\mathfrak{M}^{\perp}$

Il est clair que

$$(1) \qquad \left.\begin{matrix} \forall F \in \mathfrak{M} \\ \forall G \in \mathfrak{M}^{\perp} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (F,G)_{\mathcal{H}} = 0 \qquad \text{p.p.}$$

car

$$\chi^n F \in \mathfrak{M} \qquad \forall n \qquad (\mathfrak{M} \text{ est c.i.})$$

et

$$\chi^n F \perp G \qquad \text{dans } L^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall n$$

cela dit, considérons $\mathfrak{J}$ la fonction directionnelle engendrée par les $\{F_j\}$ on a :

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{\mathfrak{J}}$$

Car $\forall F \in \mathcal{M} \Rightarrow F(e^{ix}) \in \mathcal{J}(e^{ix})$ p.p.

de même, soit $\mathcal{J}'$ la fonction directionnelle engendrée par les $\{Gj\}$ on a

$$\mathcal{M}^{\perp} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$$

et $\mathcal{J}' \perp \mathcal{J}$ p.p. d'après (1)

donc $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} = \mathcal{M}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{M}^{\perp}$

car $L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$

$\mathcal{M}^{\perp} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \perp \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$

Il nous reste à démontrer que $\mathcal{J}$ est mesurable en effet soit P le projecteur global de $L^2_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ et $P(e^{ix})$ le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{J}(e^{ix})$ on a :

$$(PF(e^{ix}) = P(e^{ix})\, F(e^{ix}) \quad \text{p.p.} \qquad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

donc

$P\varphi$ est une fonction mesurable pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$

car $P\varphi(e^{ix}) = P(e^{ix})\varphi$ et $P\varphi \in \mathcal{M}$

C.Q.F.D.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé simplement invariant

on pose

$$\mathcal{M}_n = \chi^n \mathcal{M}$$

on a

$$\mathcal{M}_{n+1} \subsetneqq \mathcal{M}_n \quad \forall n$$

poser

$$\mathcal{M}_{\infty} = \bigcap_{n \uparrow \infty} \mathcal{M}_n$$

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \bigcup_{n \downarrow -\infty} \subset L^2_{\mathcal{H}}$$

Il est clair que $\mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_{-\infty}$ sont c.i. donc il existe deux fonctions directionnelles $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ t q

$$\mathcal{M}_\infty = \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_2}$$

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1}$$

comme $\mathcal{M}_\infty \subsetneq \mathcal{M}_{-\infty}$ alors $\mathfrak{I}_2(e^{ix}) \subset \mathfrak{I}_1(e^{ix})$ p.p. et soit $\mathfrak{I}$ la fonction directionnelle définie par

$$\mathfrak{I}(e^{ix}) = \mathfrak{I}_1(e^{ix}) \ominus \mathfrak{I}_2(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

et soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \oplus \mathcal{N}$ on a le lemme suivant

Lemme. -

1) $\mathcal{N}$ est s.i.
2) $\mathcal{N}_\infty = \{0\}$
3) $\mathcal{N}_{-\infty} = \mathcal{M}_J$
4) $\mathcal{N} = (\mathcal{N} \ominus \mathcal{N}_1) \oplus (\mathcal{N}_1 \ominus \mathcal{N}_2) \oplus \dots \oplus (\mathcal{N}_k \ominus \mathcal{N}_{k+1}) \oplus \dots$
5) $\mathcal{M} = (\mathcal{N} \ominus \mathcal{N}_1) \oplus (\mathcal{N}_1 \ominus \mathcal{N}_2) \oplus \dots \oplus (\mathcal{N}_k \ominus \mathcal{N}_{k+1}) \oplus \mathcal{M}_\infty$
$= \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_\infty$

Démonstration. -

1) $*$ $\mathcal{N}$ est s.i. car

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \oplus \mathcal{N}$$

et $\mathcal{M}$ est s.i. , $\mathcal{M}_\infty$ est c.i.

2) $*$ comme :

$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_\infty \oplus \mathcal{N}_n$ pour $\forall n$ entier positif ou nul

on a : $\mathcal{N}_\infty = \{0\}$.

4) $\mathcal{N}$ étant s.i. on a :

$$\mathcal{N}_{n+1} \subsetneq \mathcal{N}_n \quad \forall n$$

on peut écrire

$$\mathcal{N} = [\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}] \oplus [\chi\mathcal{N} \ominus \chi^2\mathcal{N}) \oplus \ldots$$

car si non, on aura :

$$\mathcal{N} = [\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}] \oplus [\chi\mathcal{N} \ominus \chi^2\mathcal{N}] \oplus \ldots \oplus Z$$

et

soit $H \in Z \Rightarrow H \perp \mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N} \Rightarrow H \in \chi\mathcal{N}$

de même $H \perp \chi^n\mathcal{N} - \chi^{n+1}\mathcal{N} \Rightarrow H \in \chi^{n+1}\mathcal{N}$

ce qui démontre que

$H \in Z$

$H \in \chi^n\mathcal{N}$ pour $\forall n$ positif

cela implique que : $H \in \mathcal{N}_\infty = \{o\}$ d'après (2)

C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. - $\mathcal{N}$ est dit pur si $\mathcal{N}_\infty = \{o\}$

Remarquer que si $\mathcal{N}$ est s.i. pur on peut écrire :

$$\mathcal{N} = (\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}) \oplus (\chi\mathcal{N} \ominus \chi^2\mathcal{N}) \oplus \ldots$$

d'après le raisonnement précédent.

<u>Théorème</u>. - Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace fermé s.i. pur ; $(E_1, E_2, \ldots)$ une base orthonormale complète de $\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}$; alors chaque $F \in \mathcal{N}$ se laisse représenter d'une façon unique :

$$F = \sum_j h_j \, E_j \quad \text{(au sens de la norme dans } L^2_{\mathcal{K}})$$

où $h_j \in H^2$ et

$$\|F\|^2_{L^2_{\mathcal{K}}} = \sum \|h_j\|^2_{L^2}$$

et
$$F(e^{ix}) = \sum_j h_j \, E_j(e^{ix}) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{H}$$

<u>Démonstration.</u> - Soit $(E_1, E_2 \ldots)$ une base orthonormale complète de $\mathcal{N} \ominus \mathcal{X}\mathcal{N}$ alors :
$$\|E_j(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} = 1 \qquad \text{pour } \forall j \quad \text{et} \quad \{E_j(e^{ix})\}_{j=1}^{\infty}$$

est un système orthonormal dans $\mathcal{H}$ pour presque chaque x car pour $\forall j \neq k$, $\forall n$ on a :
$$\mathcal{X}^n E_j \in (\mathcal{X}^n \mathcal{N} \ominus \mathcal{X}^{n+1}\mathcal{N})$$

donc $\mathcal{X}^n E_j \perp \mathcal{N} \ominus \mathcal{X}\mathcal{N}$

ce qui implique que
$$\mathcal{X}^n E_j \perp E_k \qquad \text{pour } \forall n \in Z \qquad \text{si } j \neq k$$

donc $E_j \perp E_k$ p.p. si $j \neq k$

pour $j = k$ le même argument s'applique pour $\forall n$ entier différent de 0

donc $\|E_j\|_{\mathcal{H}} = \text{cste} = 1$ car $\|E_j\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = 1$

cela étant,

soit $F \in \mathcal{N} = [\mathcal{N} \ominus \mathcal{X}\mathcal{N}] \oplus [\mathcal{X}\mathcal{N} \ominus \mathcal{X}^2\mathcal{N}] \oplus \ldots$

on peut écrire $F = F_0 + F_1 + \ldots$

comme $\{E_j\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{N} \ominus \mathcal{X}\mathcal{N}$

$\{\mathcal{X}^n E_j\}_j$ est une base orthonormale de $\mathcal{X}^n \mathcal{N} \ominus \mathcal{X}^{n+1}\mathcal{N}$

donc :
$$F_n = \sum_j a_j^{(n)} \mathcal{X}^n E_j \qquad \text{(au sens de la norme } L^2_{\mathcal{H}})$$

où
$$\|F_n\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = \sum_j |a_j^n|^2 \quad \text{(th. de Parseval)}$$

et on peut écrire

$$F = \sum_{n=o}^{\infty} F_n \qquad \text{au sens de la norme } L^2_{\mathcal{K}} .$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{j} a_j^{(n)} \chi^n E_j$$

avec

$$(1) \qquad \|F\|^2_{L^2_{\mathcal{K}}} = \sum_{n=o}^{\infty} \|F_n\|_{L^2_{\mathcal{K}}} = \sum_{n} \sum_{j} |a_j^{(n)}|^2 < \infty$$

Fixons x ; $\{E_j(e^{ix})\}$ sont orthogonaux 2 à 2 d'après ce qui précède.

pour $\forall j$; on pose

$$h_j = \sum_{n=o}^{\infty} a_j^{(n)} \chi^n$$

il est clair que

$$h_j \in H^2 ,$$

$$\|h_j\|^2_{L^2} = \sum_{n=o}^{\infty} |a_j^{(n)}|^2 \qquad (2)$$

et

$$a_n(h_j) = a_j^{(n)} \qquad (3)$$

à l'aide de (1) + (2), il est légitime d'écrire :

$$\tilde{F}(e^{ix}) = \sum_{j} h_j(e^{ix}) E_j(e^{ix})$$

qui existe dans $\mathcal{K}$ p.p.x et $\|\tilde{F}\|_{L^2_{\mathcal{K}}} = \sum_{j=} \|h_j\|^2_{L^2}$

il nous reste à démontrer que $\tilde{F} = F$ p.p.

pour cela, il nous suffit de démontrer que les projections de F et de $\tilde{F}$ sur chaque $x^n\eta \ominus \chi^{n+1}\eta$ n=o,1,2... sont les mêmes.

En effet

$$(3)\quad (\tilde{F},E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (\sum h_j\, E_j\ ,\ E_k)_{\mathcal{H}}\, d\sigma = \int h_k(e^{ix})\, d\sigma = a_k^{(o)}$$

d'après (2)

et

$$(4)\quad (F,E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (\sum_j a_j^{(o)} E_j\ ,\ E_k)_{\mathcal{H}}\, d\sigma = a_k^{(o)}$$

car $E_j \perp \chi^n E_k$ $\forall n>o$, donc les termes $a_j^{(n)}$ pour $n \neq o$ n'interviennent pas dans $(F, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}}$.

(3) et (4) donnent :

$$(\tilde{F}, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (F, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} \qquad \forall k ,$$

de même

$$(\tilde{F}, \chi^n E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (F, \chi^n E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} \qquad \forall n>o\ ,\ \forall k ,$$

C.Q.F.D.

nous allons dans ce qui suit caractériser les sous-espaces $\mathcal{N}$ s.i. de $L^2_{\mathcal{H}}$.

Considérons $\mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert dont la dimension (finie ou infinie) est égale à celle de $\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}$ qui est appelé rang de $\mathcal{N}$. Il est clair que le rang de $\mathcal{N} \ominus \chi\mathcal{N}$ est 0 si et seulement si $\mathcal{N}$ est c.i.

Soit $(\varphi_1\ ,\ \varphi_2 \ldots)$ une base de $\mathcal{H}_1$, $(E_j)_{j\geq 1}$ une base de $\mathcal{N} \ominus \chi\,\mathcal{N}$, définissons l'opérateur $\mathcal{U}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}\varphi_j = E_j & \forall j \\ \mathcal{U}(\chi^n \varphi_j) = \chi^n E_j & \end{cases}.$$

L'opérateur $\mathcal{U}$ ainsi défini est :

1) une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{N} \ominus \chi n$

2) une isométrie de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ sur $\mathcal{N}_{-\infty}$.

En effet, comme $\mathcal{U}$ transforme une base de $\mathcal{H}_1$ en une base de $\mathcal{N} \ominus \pi\mathcal{N}$ donc 1) est démontré.

Pour démontrer 2) il nous suffit de remarquer que l'ensemble

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum h_j \, E_j \;\middle/\; \begin{array}{l} h_j \in L^2 \\ \sum \|h_j\|^2_{L^2} < +\infty \end{array} \right\}$$

est identique à

$$\mathcal{N}_{-\infty} = \overline{\bigcup_{n > -\infty} \pi^n \mathcal{N}}$$

$\mathcal{U}$-transforme donc un ensemble total de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ en un ensemble dense de $\mathcal{N}_{-\infty}$ donc $\mathcal{U}$ est une isométrie de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ sur $\mathcal{G} = \mathcal{N}_{-\infty}$.

Cela étant, définissons l'opérateur $\mathcal{U}(e^{ix})$ pour presque chaque x par :

$$\mathcal{U}(e^{ix}) \, \varphi_j = E_j(e^{ix}) \qquad \forall j \quad .$$

Par sa définition même, $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une fonction mesurable et isométrique p.p. de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mathfrak{J}$ la fonction directionnelle définie par :

$$\mathfrak{J}(e^{ix}) = sp\{ Ej(e^{ix}) \} \subset \mathcal{H} \qquad \text{p.p.}$$

c.a.d. le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{ E_j(e^{ix}) \}_{j=1}^{\infty}$.
D'après ce qui précède $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathfrak{J}(e^{ix})$ p.p.

Soit maintenant l'opérateur global $\mathcal{U}$ défini par

$$(\mathcal{U} F)(e^{ix}) = \mathcal{U}(e^{ix}) \, F(e^{ix}) \quad \text{p.p.} \qquad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}_1} \quad .$$

Il est clair que $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}_1}$ est simplement invariant et pur.
D'après ce qui précède et d'après le théorème précédent on a :

$$\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}_1} = \mathfrak{N} \quad .$$

donc on a le théorème suivant :

<u>Théorème de Beurling-Lax.</u>

Soit $\mathfrak{N}$ un sous espace s.i. pur $\subset L^2_{\mathcal{H}}$

alors :

$$\mathfrak{N} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

pour un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ convenablement choisi et $\mathcal{U}$ tq $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie pour presque chaque x de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace s.i. $\subset L^2_{\mathcal{H}}$

alors : $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\infty} \oplus \mathfrak{N}$

où $\mathfrak{N}$ est s.i. et pur, $\mathfrak{M}_{\infty}$ est c.i.

donc $\mathfrak{M}_{\infty} = \mathfrak{M}_{\mathcal{K}}$ avec $\mathcal{K}$: f.d. mesurable.

d'après le théorème précédent on a :

$$\mathfrak{N} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

et

$$\mathfrak{N}_{-\infty} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$$

où $\mathcal{J}(e^{ix})$ est l'image de $\mathcal{U}(e^{ix})$ pour presque chaque e^{ix}

et

$$\mathcal{J}(e^{ix}) \perp \mathcal{K}(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

car $\mathfrak{M}_{\infty}$ est c.i.

donc le théorème précédent peut s'énoncer sous une autre forme.

<u>Théorème.</u> - Tout sous-espace $\mathfrak{M}$ s.i. de $L^2_{\mathcal{H}}$ est de la forme

$$\mathfrak{M} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \oplus \mathfrak{M}_K$$

où $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert convenablement choisi, $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ p.p. dont les valeurs sont $\mathcal{J}(e^{ix})$ et $\mathcal{J}(e^{ix})$ est orthogonal à $\mathcal{K}(e^{ix})$ p.p.

Dans ce qui suit nous allons étudier l'opérateur $\mathcal{U}$ précédent et on a le théorème suivant

<u>Théorème.</u> -

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathrm{Id} \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{H}_1$$
$$\mathcal{U}\,\mathcal{U}^* = \text{projecteur de } \mathcal{H} \text{ sur } \mathcal{J}(e^{ix})\,\text{p.p.}$$

<u>Démonstration.</u> - comme

$$(\mathcal{U}^*\mathcal{U}\ \varphi_j, \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (\mathcal{U}\ \varphi_j, \mathcal{U}\varphi)_{\mathcal{H}} = (\varphi_j, \varphi)_{\mathcal{H}_1}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1$$

donc

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U}\,\varphi_j = \varphi_j \quad \text{pour chaque } j$$

autrement dit

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \text{Identité sur } \mathcal{H}_1 \quad \text{p.p.}$$

Cela implique que $\mathcal{U}\mathcal{U}^* =$ identité sur $\mathcal{J}$.

Il nous reste donc à démontrer que $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = 0$ sur $\mathcal{J}^\perp$. En effet, soit $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ tq $F \perp J$ p.p.

alors

$$(\mathcal{U}^*F, \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (F, \mathcal{U}\varphi)_{\mathcal{H}} = 0 \qquad \text{p.p.}$$

donc

$$\mathcal{U}^*F = 0 \qquad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

TROISIEME SEANCE

<u>Définition</u>. - Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathcal{H}}$, $\mathfrak{M}$ est dit complet si $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \Longrightarrow \mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace s.i. d'après le théorème de Beurling-Lax

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_K \oplus \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

et soit

$$\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{U}(e^{ix})\mathcal{H}_1$$

on a

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{J}} = (\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1})_{-\infty}$$

donc si $\mathfrak{M}$ est complet alors

$$\mathcal{H} = \mathcal{J}(e^{ix}) \oplus \mathcal{K}(e^{ix}) \qquad \text{p.p.}$$

$\mathfrak{M}$ est dit pur si $\mathfrak{M}_{\mathcal{K}} = \{0\}$

ou $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} = \{0\}$

<u>Proposition</u>. - Soit $\mathfrak{M}$ s.i. $\subset H^2_{\mathcal{H}}$ alors $\mathfrak{M}$ est pur.

<u>Démonstration</u>. - c'est évident !

<u>Définition</u>. - $\mathcal{U}$ est dite analytique si

$$\mathcal{U}\varphi \in H^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1 \quad .$$

<u>Lemme</u>. - Soit $\mathcal{U}$ isométrique p.p. de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ alors ($\mathcal{U}$ est analytique) $\Longleftrightarrow$ ($\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}}$) .

<u>Preuve</u>. - ($\Longrightarrow$) Soit $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$

$\forall \varphi_j \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{U}\varphi_j \in H^2_{\mathcal{H}} \Longrightarrow \chi^k \mathcal{U}\varphi_j = \mathcal{U}\chi^k \varphi_j \in H^2_{\mathcal{H}}$ $\forall k \geq 0$

or l'ensemble

$$\left\{\chi^n \varphi_j \;;\; \begin{matrix} n = 0,1,2\ldots \\ j = 1,2\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \quad \text{engendre } H^2_{\mathcal{H}_1}$$

donc :

$$\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}}$$

($\Longleftarrow$) c'est trivial

C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. - $\mathcal{J}$ est dite analytique s'il existe un ensemble dénombrable $\{F_j\}$ dans $H^2_{\mathcal{H}}$ t.q. :

$$\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathrm{sp}\{F_j(e^{ix})\} \quad \text{p.p.}$$

<u>notation</u> : $\mathrm{sp}\{F_j(e^{ix})\}$ le sous-espace fermé engendré par $\{F_j(e^{ix})\}$ dans $\mathcal{H}$

<u>Théorème</u>. - A chaque $\mathcal{J}$ fonction directionnelle analytique on peut choisir des F_j soit E_j dans $H^2_{\mathcal{H}}$ t.q. les $\{E_j(e^{ix})\}_{j=1}^{\infty}$ forment p.p. une base orthonormale de $\mathcal{J}(e^{ix})$.

<u>Preuve</u>. - Soit $\mathcal{G}_J = \mathcal{M}_J \cap H^2_{\mathcal{H}}$

Il est clair que $\mathcal{G}_J$ est un sous-espace s.i. et pur donc d'après le théorème de Beurling-Lax on a :

$$\mathcal{G}_J = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

où $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{J}(e^{ix})$ p.p. et $\mathcal{U}$ est analytique car :

$$\mathcal{G}_J = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}} \quad .$$

Soit $E_j = \mathcal{U}\tilde{e}_j$ où $(\tilde{e}_j)$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$ on a déjà remarqué que les $\{E_j\}$ sont orthonormales p.p. [$\mathcal{U}(e^{ix})$ étant isométrique p.p.]

or $$Sp(E_j(e^{ix})] = \mathcal{J}(e^{ix}) \qquad \text{p.p.}$$

donc les $\{E_j\}$ ont les propriétés demandées (puisque $\mathcal{U}$ analytique $\mathcal{U}(e_j) = E_j \in H^2_{\mathcal{H}} \; \forall j$)

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>. - Si $\mathcal{J}$ est une fonction directionnelle analytique alors sa dimension est constante dans le sens que

$$\dim \mathcal{J}(e^{ix}) = \begin{cases} N & \text{p.p.} \\ \text{ou bien} & \\ \infty & \text{p.p.} \end{cases}$$

<u>Preuve</u>. - En effet
$$Sp\left\{E_j(e^{ix})\right\} = \mathcal{J}(e^{ix}) \qquad \text{p.p.}$$

donc
$$\text{Card}\left\{(E_j)\right\} = \text{Card}\ (\tilde{e}_j) \qquad \text{p.p.}$$

et le dernier est constant

C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. - $\mathcal{U}$ est dite fonction unitaire si elle opère dans un même espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et ses valeurs sont unitaires et $\mathcal{U}(e^{ix})$ est mesurable.

Il est aisé de vérifier que si $\mathcal{U}$ est une fonction unitaire alors :

$$\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M} \text{ est un sous-espace :}$$

1) s.i.
2) pur
3) complet

Si de plus $\mathcal{M} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ alors $\mathcal{U}$ est dite intérieure.

<u>Lemme.</u> - Si $\mathcal{U}$ est unitaire

on a : $(\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}} = H^2_{\mathcal{H}}) \iff (\mathcal{U}$ opérateur constant) .

<u>Preuve.</u> - <u>Condition suffisante</u> :

Si $\mathcal{U}$ est constante unitaire alors

$(\mathcal{U}(e^{ix})\, e_j)_{j=1}^{\infty}$ forment p.p. une autre base de $\mathcal{H}$.

<u>Condition nécessaire</u> :

Si $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}} = H^2_{\mathcal{H}}$ alors $\mathcal{U}$ est analytique

et

$\mathcal{U}^* \mathcal{U}\, H^2_{\mathcal{H}} = H^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{U}^* H^2_{\mathcal{H}}$ car $\mathcal{U}^* \mathcal{U} = \mathrm{Id}$ p.p.

donc $\mathcal{U}^*$ est analytique

donc $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ on a :

$(\mathcal{U}^* \psi, \varphi) = (\psi, \mathcal{U} \varphi)$ est analytique

or $(\mathcal{U} \varphi, \varphi)$ est analytique

donc :

$(\mathcal{U} \varphi, \psi) = \overline{(\psi, \mathcal{U} \varphi)}$ est analytique

$\Rightarrow (\mathcal{U} \varphi, \psi)$ est constante $\Rightarrow$ U est un opérateur constant unitaire.

C.Q.F.D.

<u>Théorème.</u> - Soient $\mathcal{U}$ et V deux isométries de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ p.p. alors :

1) $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{V} H^2_{\mathcal{H}_1}$

si et seulement si $\mathcal{U} = \mathcal{V} A$

où A est unitaire constant dans $\mathcal{H}_1$

2) $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset \mathcal{V} H^2_{\mathcal{H}_1}$

si et seulement si $\mathcal{U} = \mathcal{V} Q$

où Q est analytique et isométrique dans $\mathcal{H}_1$.

Preuve. -

Remarquer que 1) résulte de 2)
Donc il nous reste à démontrer 2).

2) Si $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset \mathcal{V} H^2_{\mathcal{H}_1}$ on aura :

$$\mathcal{V}^* \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}_1}$$

poser $Q = \mathcal{V}^* \mathcal{U}$:

alors $Q H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}_1}$

donc Q est analytique.

Q est isométrique car :

$$Q = \mathcal{V}^* \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ étant isométrique, et $\mathcal{V}^*$ conserve les normes pour les éléments de $\mathcal{V}\mathcal{H}_1 = \mathcal{U}\mathcal{H}_1$.

enfin $\mathcal{U} = \mathcal{V} Q$

C.Q.F.D.

Soit $\mathfrak{J}$ une fonction directionnelle analytique on peut choisir un nombre dénombrable (E_j) d'éléments de $H^2_{\mathcal{H}}$ t.q. $\{E_j(e^{ix})\}_{j\geq 1}$ forment p.p. une base orthonormale de $\mathfrak{J}(e^{ix})$ et de plus chaque $F \in H^2_{\mathcal{H}}$ à valeurs dans $\mathfrak{J}$ s'écrit comme $\sum h_j E_j$ avec $h_j \in H^2$ une telle famille (E_j) est appelée base analytique extérieure de $\mathfrak{J}$.

Théorème. - Soit $\{E'_j\}_{j\geq 1}$ une autre base analytique extérieure de $\mathfrak{J}$ alors E'_j peut s'écrire :

$$E'_j(e^{ix}) = \sum_{k\geq 1}^{\infty} a_{jk}\, E_k(e^{ix})$$

où $A = (a_{j,k})_{j,k\geq 1}$ est une matrice unitaire constante

Il y a d'autres bases analytiques non extérieures en voici une.

Soit $\mathcal{V}$ intérieur non constant dans $\mathcal{H}_1$ alors

$\{E_j\} = \{\mathcal{U}\,\mathcal{V}\,\tilde{e}_j\}$ est une telle base de $\mathfrak{J}$

pour presque chaque point $\{E_j(e^{ix})\}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{J}(e^{ix})$ mais $\mathcal{U}\mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}_1}$ ne remplit pas $\mathcal{G}_J$ tout entier parce que $\mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}_1} \underset{\neq}{\subset} H^2_{\mathcal{H}_1}$

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace s.i. pur $\subset H^2_{\mathcal{H}}$

alors $\mathcal{M} = \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}_1}$, soit $\mathfrak{J}$ la f.d. engendré par $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{J}} = \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{M}_{\mathfrak{J}} \cap H^2_{\mathcal{H}}$$; $\mathcal{V}$ est isométrique extérieure,

d'après le théorème précédent

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}\, Q$$

où Q est intérieure.

Donc l'étude de $\mathcal{M}$ est réduite :

1°) à l'étude de $QH^2_{\mathcal{H}_1}$ ou a l'étude de Q intérieure dans $\mathcal{H}_1$ et

2°) à l'étude de $\mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}_1}$ ou a l'étude de $\mathfrak{J} = \mathcal{V}\mathcal{H}_1$ f.d. analytique.

<u>Théorème</u>. - $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ étant intérieures :

alors :

$$(\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}}) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V}\,W$$ où W est intérieure).

<u>Démonstration</u>. - c'est évident.

QUATRIEME et CINQUIEME SEANCES

<u>Rapppel</u> : Soit M un opérateur Auto-adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même alors il existe une famille spectrale (P_λ) t.q. :

1) P_λ est croissante en c.a.d. $P\,P_t = P$ si

2) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P_\lambda = 0$

3) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P_\lambda = I$

au sens de la topologie forte

et

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda \quad \text{si } M \text{ est non borné}$$

$$M = \int_{-\|M\|}^{\|M\|} \lambda dP_\lambda \quad \text{si } M \text{ est borné.}$$

Remarques : 2) et 3) sont équivalentes à

a) $\bigcap\limits_{\lambda \to -\infty} P_\lambda \mathcal{H} = 0$

$$\overline{\bigcup\limits_{\lambda \to \infty} P_\lambda \mathcal{H}} = \mathcal{H}$$

b) Si M est non borné, le domaine de définition de M :($\mathcal{D}(M)$) consiste en tous les éléments $x \in \mathcal{H}$ t.q. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \quad d\|P_\lambda x\|^2 < +\infty \quad .$$

c) Soit f une fonction réelle continue et bornée.
l'intégrale vectorielle $f(M) = \int f(\lambda)\, dP_\lambda$ est bien définie comme un opérateur auto-adjoint borné, en particulier si $f(\lambda) = e^{i\lambda}$:

$$e^{iM} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda} dP_\lambda$$

et on a le théorème suivant :

Théorème de Stone. - Chaque groupe à un paramètre V_t unitaire et continu est de la forme

$$V_t = e^{itM}$$

où M est auto-adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même, non nécessairement borné, et M parfaitement déterminé par $\{V_t\}$.

De plus étant donnés les V_t

$$iMx = \lim_{t \to 0} \frac{V_t x - x}{t} \quad , \forall x \in \mathcal{D}M$$

pour la norme de $\mathcal{H}$,

et cette limite n'existe pas si $x \notin \mathcal{D}M$.

Cela étant, soit $\mathcal{U}$ unitaire dans $\mathcal{H}$ p.p. et mesurable il est clair que $\mathcal{M} = \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}}$ est s.i. pur et complet, donc si P_n est le projecteur sur $\mathcal{M}_n = \chi^n \mathcal{M}$

alors la suite (P_n) est décroissante et

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = 0$$

$$\lim_{n \to -\infty} P_n = I$$

poser $P_\lambda = P_n$ si $n-1 < \lambda \leq n$

$I - P_\lambda = Q_\lambda$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} Q_n = I$$

$$\lim_{n \to -\infty} Q_n = 0$$

d'après la théorie de la décomposition spectrale on peut écrire

$$V_t = \int e^{it\lambda} dQ_\lambda = - \int e^{it\lambda} dP_\lambda$$

Comme $\mathcal{M}$ est pur alors on a :

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \ominus \chi\mathfrak{M}) \oplus (\chi\mathfrak{M} \ominus \chi^2\mathfrak{M}) \oplus \ldots$$

ou

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

où

$$R_n = \chi^n\mathfrak{M} \ominus \chi^{n+1}\mathfrak{M}$$

<u>1er cas.</u> - si $\mathfrak{M} = H^2_{\mathcal{H}}$

alors

$$R_n = \chi^n \mathcal{H}$$

sur R_n , V_t est la multiplication scalaire par e^{itn}

$$V_t(e^{inx}\varphi) = e^{in(x+t)}\varphi$$

poser $T_t F(e^{ix}) = F(e^{i(x+t)})$

on a

$$T_t F = V_t F \qquad \text{pour } F \in R_n$$

nous allons déterminer B où

$$V_t = e^{itB}$$

on sait que B est auto-adjoint et que :

$$B = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP\lambda$$

$$iB(\chi^n \varphi) = in\,\chi^n\varphi$$

$$\frac{d}{dx}(e^{inx}\varphi) = in\chi^n\varphi$$

donc $\quad iBF = \frac{d}{dx} F \qquad$ pour $\quad F \in R_n$

Il est aisé de vérifier que

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ F \in L^2_{\mathcal{H}} / \; F(e^{ix}) \sim \sum \chi^n \varphi_n \atop \sum n^2 \|\varphi_n\|^2 < \infty \right\}$$

et ce domaine est identique à l'ensemble des F t.q.

$$\lim_{t \to o} \frac{V_t F - F}{t} = iBF$$

$$V_t F = T_t F \qquad \forall F \in \mathcal{D}(B)$$

donc

$$\lim_{t \to o} \frac{T_t F - F}{t} = F' = iBF \qquad \forall F \in \mathcal{D}(B)$$

De plus tout $F \in \mathcal{D}(B)$ est continu :

car

$$F \sim \sum_n \varphi_n \chi^n$$

alors

$$\sum n^2 \|\varphi_n\|^2 < +\infty \implies \sum \|\varphi_n\| < +\infty \qquad \text{d'après}$$

l'inégalité de Hölder.

Ce qui implique que

$$F = \sum \varphi_n \chi^n \quad \text{est continu.}$$

<u>2ème cas.</u> - $\quad \mathfrak{M} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}} \quad$ où $\mathcal{U}$ est unitaire

$$B = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda$$

comme $\mathfrak{M}$ est pur on peut écrire :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M} \ominus \mathcal{T}\mathcal{M}) \oplus (\mathcal{T}\mathcal{M} \ominus \mathcal{T}^2\mathcal{M}) \oplus \dots$$

$$= \mathcal{U}\mathfrak{X} \oplus (\mathcal{U}\mathcal{T}\mathfrak{X}) \oplus (\mathcal{U}\mathcal{T}^2\mathfrak{X}) \oplus \dots$$

$$= R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \dots$$

il est clair que :

$$iB(\mathcal{U}\mathcal{T}^n\varphi) = i\eta(\mathcal{U}\mathcal{T}^n\varphi) = \mathcal{U}D(\mathcal{T}^n\varphi)$$

c.a.d.

$$iB\mathcal{U} = \mathcal{U}D \qquad \text{sur } R_n \quad , \forall n$$

et on a le théorème suivant :

<u>Théorème.</u> -

$$[F \in \mathcal{D}(D)] \iff \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{U}F \in \mathcal{D}(B) & \\ \text{et} & \\ iB\mathcal{U}F = \mathcal{U}DF & \forall F \in \mathcal{D}(D) \end{array} \right\}$$

<u>Preuve.</u> - c'est évident, la démonstration découle immédiatement de la définition de $\mathcal{D}(B)$.

<u>Définition.</u> - $\mathcal{U}$ est dit dérivable si

$$\lim_{t \to o} \frac{\mathcal{U}(e^{i(x+t)}) - \mathcal{U}(e^{ix})}{t} \quad \text{existe dans le sens}$$

qu'il existe un opérateur $\mathcal{U}'(e^{ix})$ t.q :

$$(1) \quad \left\| \frac{T_t\mathcal{U} - \mathcal{U}}{t} - U' \right\|_{L^2_{\mathcal{H}}} \xrightarrow[t \to o]{} 0$$

<u>Proposition.</u> - $\mathcal{U}^*$ est dérivable en même temps que $\mathcal{U}$ et

$$\mathcal{U}'^* = \mathcal{U}^{*\prime}$$

<u>Preuve.</u> - (1) donne

$$\left\| \frac{T_t\mathcal{U}^* - \mathcal{U}^*}{t} - \mathcal{U}'^* \right\|_{L^2_{\mathcal{H}}} \xrightarrow[t \to o]{} 0$$

C.Q.F.D.

on sait que $I = \mathcal{U}\mathcal{U}^*$

donc

$$0 = \mathcal{U}'\mathcal{U}^* + \mathcal{U}\,\mathcal{U}^{*\prime} \qquad (2)$$

et on pose

$$-iM = \mathcal{U}\mathcal{U}^{*\prime}$$

(2) implique que $M = M^*$

Lemme. - Soit Q un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$ qui commute avec toutes les multiplications par des fonctions scalaires bornées (c.a.d. pour toute fonction scalaire bornée $q(e^{ix})$ on a :

$$q(e^{ix})QF = Q(qF) \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}})$$

alors il existe une fonction $\tilde{Q}(e^{ix})$ dont les valeurs sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$ t.q. :

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix})\, F(e^{ix}) \quad \text{p.p. pour } \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

De plus :

$$\operatorname{ess-sup}_x \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} = \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}} .$$

Preuve. - Il nous suffit de démontrer le lemme pour le cas de dimension finie car dans le cas infini,

Soit $\{e_n\}$ une base de $\mathcal{H}$,

P_n le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $Sp\{e_1,\dots,e_n\}$

il est clair que P_n commute avec toutes les multiplications scalaires donc P_nQP_n aussi, $\forall n$, le lemme étant démontré pour le cas de dimension finie donc il existe un opérateur $\tilde{Q}_n(e^{ix})$ t.q. :

$$(P_n Q P_n) \text{ est défini par } \tilde{Q}_n(e^{ix})$$

et le lemme sera démontré en faisant tendre n vers l'infini. Cela étant, nous supposons $\mathcal{H}$ de dimension finie.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathcal{H}$, on pose :

$$\tilde{Q}(e^{ix})\, e_j = (Q\, e_j)(e^{ix})$$

nous allons démontrer que

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix})\, F(e^{ix}) \quad \text{p.p. pour } \forall F \in L^2_{\mathcal{H}} \quad .$$

En effet c'est évident pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ et pour tout polynôme trigonométrique car Q est supposé commuter avec toutes les multiplications scalaires.

Soit $F \in L^2_{\mathcal{H}}$, il existe une suite de polynômes P_n qui tend vers F dans $L^2_{\mathcal{H}}$, on peut en extraire une sous suite F_{n_j} qui tend vers F p.p.

donc

$$\tilde{Q}(e^{ix})\, F_{n_j}(e^{ix}) \longrightarrow \tilde{Q}(e^{ix})\, F(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

et

$$QF_{n_j} \longrightarrow QF \quad \text{dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

autrement dit

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix})\, F(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

Il nous reste à démontrer que :

$$\sup_x \text{ess} \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} = \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

Il est clair que :

$$\sup_x \text{ess} \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \geq \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}} \quad ,$$

si

$$\sup_x \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} > \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

alors il existe ε , un ensemble ξ de mesure non nulle ($\sigma(\xi) > 0$) et un $\varphi \in \mathcal{H}$ de norme 1 t.q. :

$$\|\tilde{Q}(e^{ix})\varphi\|_{\mathcal{H}} \geqq \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}} + \varepsilon \qquad \text{sur } \xi$$

Soit F la fonction définie par :

$$F(e^{ix}) = \begin{cases} \varphi & x \in \xi \\ 0 & x \notin \xi \end{cases}$$

$$F \in L^2_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \|F\|^2_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int_{\xi} \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} d\sigma = \sigma(\xi)$$

et

$$\|QF\|^2_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int \|\tilde{Q}(e^{ix})\, F(e^{ix})\|^2_{\mathcal{H}} d\sigma \geqq (\|Q\| + \epsilon)^2 \sigma(\xi)$$

donc

$$\|QF\|^2 \geqq (\|Q\| + \epsilon)^2 \sigma(\xi) = (\|Q\| + \epsilon)^2 \|F\|^2$$

ce qui est impossible.

C.Q.F.D.

donc si Q satisfait le lemme précédent on écrit $Q(e^{ix})$ au lieu de $\tilde{Q}(e^{ix})$.

<u>Théorème</u>. - Si $\mathcal{U}$ est dérivable alors

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(iD) \quad \text{et}$$
$$B = -i\mathcal{D} - M$$

où M est auto-adjoint borné et commute avec toutes les multiplications scalaires, donc d'après le lemme précédent

$$\|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|M\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

Preuve. - Le théorème résulte de ce qui précède

C.Q.F.D.

Par définition

$$M = + i\mathcal{U}\mathcal{U}^{'*} \Rightarrow \mathcal{U}' = iM\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}'\varphi = iM(\mathcal{U}\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$(F \in \mathcal{D}_B \subset B, \quad BF = 0) \Longleftrightarrow (F \in R_o = \{\mathcal{U}\varphi / \varphi \in \mathcal{H}\})$$

donc si $F \in R_o$ alors F est une solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ inversement on a le théorème suivant :

Théorème. - Si F est une solution dans le sens ordinaire de l'équation différentielle

$$F' = iMF \qquad (3)$$

alors $F \in R_o$

Preuve. - Nous savons que $\mathcal{U}\varphi$ est une fonction continue pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ donc $\mathcal{U}(1)$ est un opérateur bien défini poser :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \circ \mathcal{U}^{-1}(1)$$

$$\mathcal{U}_1(1) = I \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

et $\mathcal{U}_1$ vérifie l'équation :

$$\mathcal{U}' = iM\,\mathcal{U}$$

donc on peut supposer que $\mathcal{U}(1) = I$ dans $\mathcal{H}$ et pour chaque $\varphi \in \mathcal{H}$, $\mathcal{U}\varphi$ est une solution F de (3) avec $F(1) = \varphi$.

Cela étant, soit G une solution de (3) t.q. $G(1) = \varphi$ d'après ce qui précède, il existe un $F \in R_0$ qui est une solution de (3) avec la condition initiale $F(1) = \varphi$

or $F-G$ est une solution de (3) et $(F-G)(1) = 0$ donc la théorie classique des équations différentielles affirme que $F = G$

autrement dit $G \in R_0$

C.Q.F.D.

Dans ce qui suit nous avons besoin du lemme suivant : (sans démonstration).

<u>Lemme.</u> - Soit M un opérateur de $L^2_{\mathcal{H}}$ tel que :

a) $\|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leq K < +\infty$

b) $M(e^{ix})$ est a.a. presque partout

alors $-iD - M$ est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ dont le domaine est $\mathcal{D}(D)$.

D'après ce qui précède, à tout sous-espace $\mathcal{M}$ s.i. pur et complet de $L^2_{\mathcal{H}}$ correspond un opérateur unitaire $\mathcal{U}$ et si $\mathcal{U}$ est dérivable, à $\mathcal{M}$ correspond un opérateur M :

$$M = + i\mathcal{U}\mathcal{U}^{*\prime} .$$

Inversement, si seulement $M(e^{ix})$ est borné a.a. en posant :

$B = -iD - M$ qui est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ à domaine $\mathcal{D}(D)$, on retrouve

$$B \doteq \int \lambda \, dP_\lambda$$

$$\mathcal{M} = P_{-0} L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}}$$

et les éléments de $\mathcal{M} \ominus \lambda\mathcal{M}$ sont exactement les solutions de l'équation différentielle $F' = iMF$.

D'après ce qui précède on a vu que si $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ étant une solution de l'équation différentielle :

$$F' = iMF$$

est une solution de $BF = 0$ alors F est périodique donc pour que le problème soit possible il faut que toute solution de l'équation $F' = iMF$ soit périodique et on a le lemme suivant :

Lemme.- F étant une solution classique de $F' = iMF$

$$(F \text{ solution de } BF = 0) \Longleftrightarrow (F \text{ est périodique}) .$$

Preuve. - En effet, il nous suffit de démontrer que

$$F \in \mathcal{D}_{iD}$$

$$F \sim \sum \chi^n \psi_n \quad \text{comme} \quad F' = iMF \Longrightarrow F' \in L^2_{\mathcal{H}}$$

$$F' \sim i \sum n^2 \chi^n \psi_n \Longrightarrow \sum n^2 \|\psi_n\|^2 < +\infty \Longrightarrow F \in \mathcal{D}_{iD}$$

C.Q.F.D.

Théorème. - Si $B + iD$ est un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$ avec B a.a. sur $\mathcal{D}_{(iD)}$

et $P_{\lambda+n} = \chi^n P_n \chi^{-n}$ (avec $B = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda$)

alors $B = - iD - M$ avec un opérateur borné M auto-adjoint.

Inversement si $B = -iD - M$ avec M opérateur borné a.a. M alors

$$P_{\lambda+n} = \chi^n P_\lambda \chi^{-n}$$

Preuve. -

($\Longrightarrow$)

poser $Q_\lambda = \chi^n P_\lambda \chi^{-n}$

Il est aisé de vérifier que (Q_λ) est un projecteur dans $L^2_{\mathcal{H}}$ et que (Q_λ) est décroissant,

et $\lim_{\lambda \to +\infty} Q = 0$; $\lim_{\lambda \to -\infty} Q_\lambda = I$

et $\{Q_\lambda\}$ est la famille spectrale de $\chi^n B \chi^{-n}$

donc on peut écrire :

$$\chi^n B \chi^{-n} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d[\chi^n P_\lambda\ \chi^{-n}]$$ ce qui a un sens ;

d'après l'hypothèse : $P_{\lambda+n} = \chi^n P_\lambda \chi^{-n}$

on a :

$$\chi^n B \chi^{-n} = -\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - n)\ dP_\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_\lambda - nI \qquad (4)$$

Le même raisonnement appliqué à $-iD$ donne :

$$- iD - nI = \chi^n(-iD)\ \chi^{-n}$$

cela implique :

$$\chi^n\ [B - (-iD)]\ \chi^{-n} = B + iD$$

c.a.d. $B + iD$ commute avec toutes les multiplications scalaires donc d'après le lemme (page 34) $B + iD$ est a.a. et $B + iD$ est défini par $M(e^{ix})$ t.q. M est a.a. et borné

autrement dit $B = -iD - M$

C.Q.F.D.

SIXIEME SEANCE

D'après ce qui précède, à chaque sous-espace s.i. pur et complet $\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ correspond un opérateur M a.a. borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$ (à condition que $\mathcal{U}$ soit dérivable avec $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}$) et que toute solution de l'équation différentielle

$$F' = iMF \quad \text{appartient à} \quad P_o = \mathcal{U}\,\mathcal{H}$$

$$\text{et} \quad B = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda$$

$$\text{avec} \quad P_{n+\lambda} = \chi^n P_\lambda \chi^{-n} \quad .$$

<u>Problème</u> : Est ce qu'on peut faire correspondre à tout opérateur M a.a. borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$ un sous-espace s.i. pur et complet $\mathfrak{M}$?

D'après le raisonnement précédent, on trouve une condition nécessaire c'est que la famille spectrale (P_λ) est une fonction de saits aux entiers $\{n\}$.

comme $-iD - M$ est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ on peut écrire :

$$-iD - M = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda$$

si de plus $(P_\lambda)_{\lambda=-\infty}$ satisfait à :

$$P_{\lambda+n} = \chi^n P_\lambda \chi^{-n} \qquad \forall\lambda \ , \ \forall n \ \text{entier}$$

on peut démontrer en posant :

$$\mathfrak{M} = P_{-o} L^2_{\mathcal{H}}$$

que $\mathfrak{M}$ est le sous-espace s.i. pur et complet correspondant à M

En effet, comme

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$$

$$\lim_{n\to-\infty} P_n = I$$

et

$$P_{\lambda+n} = \chi^{n} P_{\lambda} \chi^{-n}$$

alors $\mathfrak{M} = P_{-0} L^2_{\mathcal{H}}$ est s.i. , pur et complet.

<u>2ème problème</u> : Etant donné M un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ t.q. $\|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leqslant K<\infty$. Est ce que toute solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ est à la fois périodique et de classe $H^2_{\mathcal{H}}$.

Remarquer que d'après la théorie classique des équations différentielles si M est analytique toute solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ est analytique.

Or dans le cas que nous étudions, on peut trouver des opérateurs M dans $L^2_{\mathcal{H}}$ non analytique tandis que toute solution de l'équation différentielle

$$F' = iMF \quad \text{est de classe } H^2_{\mathcal{H}} .$$

par exemple si $\mathcal{U}$ est dérivable, $M = i\,\mathcal{U}\mathcal{U}^{*\prime}$ n'est pas analytique car $M = M^*$.
Etant donnés 2 opérateurs M et N a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ t.q.

$$\|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leqslant K<+\infty \quad ; \quad \|N(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leqslant K<\infty$$

et à M et N correspondent 2 opérateurs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et on a le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. - Pour que $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}}$ il faut et il suffit que $f(-iD-M) \leqslant f(-iD-N)$ pour toute fonction f réelle continue bornée et croissante.

<u>Preuve</u>. - Comme f est supposée réelle continue et bornée donc $f(-iD-M) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda$ est un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$

de même pour l'opérateur :

$$f(-iD-N) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dQ_\lambda$$

La relation d'ordre :

$$f(-iD-M) \leqslant f(-iD-N)$$

peut s'interpréter par :

$$(f(-iD-M)F,F) \leqslant (f(-iD-N)F,F) \quad , \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

c.a.d.

$$(1) \qquad -\int f(\lambda)\, d(P_\lambda F,F) \leqslant -\int f(\lambda)\, d(Q_\lambda F,F) \quad , \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

poser

$$d\mu_1(\lambda) = -d(P_\lambda F,F)$$

$$d\mu_2(\lambda) = -d(Q_\lambda F,F)$$

qui sont des mesures positives

poser : $\mu_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu_1(t)$

$\mu_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu_2(t)$ qui sont des fonctions croissantes.

En intégrant par parties, (1) peut s'écrire :

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(\lambda)\, df(\lambda) \leqslant -\int_{-\infty}^{\infty} \mu_2(\lambda)\, df(\lambda) \qquad (2)$$

pour toute f réelle, continue bornée et croissante

donc

$$\mu_1(\lambda) \geqq \mu_2(\lambda) \quad , \quad \forall\lambda$$

or
$$\mu_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d(Q_\lambda F, F)$$

$$\mu_2(\lambda) = \| (I-Q_\lambda)F\|^2$$

de même
$$\mu_1(\lambda) = \|(I-P_\lambda)F\|^2$$

$$(\mu_1(\lambda) \geqslant \mu_2(\lambda)) \Longleftrightarrow (\|P_\lambda F\|^2 \leqslant \|Q_\lambda F\|^2) \ , \ \forall\lambda, \ \forall F \in L^2_{\mathcal{H}} \qquad (3))$$

Il nous reste à démontrer que :

$$(3) \Longleftrightarrow (\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}})$$

En effet

$\|P_\lambda F\|$ et $\|Q_\lambda F\|$ désignent les normes des projections de $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}}$ et sur $\mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}}$ respectivement donc

$$(3) \Longleftrightarrow (\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}})$$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>. - Si $\mathcal{U}$ est intérieur alors M est $\geqslant 0$ p.p.

<u>Démonstration</u> :

En effet, $\mathcal{U}$ étant intérieur $\Longrightarrow \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}}$
on pose $\mathcal{V} = I$ le théorème précédent démontre que :

$f(-iD-M) \leqslant f(-iD)$ pour toute fonction f réelle continue bornée et croissante car $N=0$
en particulier on prend $f(\lambda) = \lambda$

et posons

$$f_n(\lambda) = \lambda \qquad |\lambda| \leqslant n$$

$$f_n(\lambda) = n \qquad \lambda \geqslant n$$

$$f_n(\lambda) = -n \qquad \lambda \leqslant -n$$

$f_n(\lambda)$ est réelle, continue, bornée et croissante donc :

$$f_n(-iD-M) \leqslant f_n(-iD)$$

c.a.d. pour $\forall F \in \mathcal{D}_{(iD)}$ on a :

$$(f_n(-iD-M)F,F)_{L^2_{\mathcal{H}}} \leqslant (f_n(-iD)F,F)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

or

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n(-iD-M)F,F)_{L^2_{\mathcal{H}}} = ((-iD-M)F,F)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n(-iD)F,F)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (-iD.F,F)$$

donc $((-iD-M)F,F) \leqslant (-iD.F,F)$, $\forall F \in \mathcal{D}_{iD}$

ce qui démontre que

$$-iD-M \leqslant -iD$$

autrement dit :

$$M \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathcal{H}}$$

donc

$$M(e^{ix}) \geqslant 0 \qquad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

Comme M vérifie

$$M^2 = \mathcal{U}'\mathcal{U}'^* \quad (4)$$

donc si $\mathcal{U}$ correspondant est intérieur d'après le corollaire précédent $M \geqq 0$ et M est bien déterminé par (4).

SEPTIEME SEANCE

<u>Définition</u>. - Soient T un opérateur borné dans $\mathcal{H}$, S un opérateur borné défini sur $\mathcal{H}'$ et à valeurs dans $\mathcal{H}$, Q un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$.

T est dit semblable à S $(T \sim S)$ si $SQ = QT$.

De plus si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ et Q est unitaire, T et S sont dits unitairement semblables.

<u>Problème</u> : Est ce vrai que tout opérateur borné T défini sur $\mathcal{H}$ a valeurs dans $\mathcal{H}$ $(\dim \mathcal{H} > 1)$ possède un sous-espace fermé $\mathcal{H}_o$ non vide $\mathcal{H}_o \subsetneqq \mathcal{H}$ t.q. :

$$T\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}_o \quad ?$$

La réponse est positive quand $\mathcal{H}$ est de dimension finie. Même si $\mathcal{H}$ n'est pas séparable, la réponse est affirmative en effet

Soit $\varphi \in \mathcal{H}$ un élément quelconque non nul de $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}_o = \mathrm{Sp}\{T^n\varphi\}_{n=o}^{\infty}$: l'espace fermé engendré par $\{T^n\varphi\}_{n=o}^{\infty}$.

Il est clair que $\{0\} \neq \mathcal{H}_o \subsetneqq \mathcal{H}$ (car $\mathcal{H}$ n'est pas séparable) et que $T\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}_o$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ de norme $\|T\| < 1$.
Considérons l'application :

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow H^2_{\mathcal{H}}$$
$$\varphi \longrightarrow F_\varphi = \sum_o^{\infty} (T^n\varphi)\lambda^n = (I - \lambda T)^{-1}\varphi$$

l'expression a un sens car $\|T\| < 1$.

Soit $\mathcal{K} = A\mathcal{H}$, il est aisé de vérifier que A est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}$.

Considérons l'opérateur S^* défini par :

$$S^* : H^2_{\mathcal{H}} \longrightarrow H^2_{\mathcal{H}}$$

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n \chi^n \rightarrow \sum_{n \geq 0} \psi_{n+1} \chi^n$$

on a :

$$F_{T\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (T^n \varphi) \chi^n = S^* F_\varphi$$

c.a.d. :

$$AT = S^* A$$

S^* et T sont semblables.

Ce qui implique que l'hypothèse sur les sous-espaces invariants en général est donc équivalente à cette même hypothèse sur les sous-espaces $\mathcal{K} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ obtenus précédemment.

Soit $\mathcal{M} = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{K}$

et S l'opérateur défini par :

$$S\left(\sum_{0}^{\infty} \varphi_n \chi^n\right) = \sum_{n \geq 1} \varphi_{n-1} \chi^n = \chi \left(\sum_{n \geq 0} \varphi_n \chi^n\right)$$

Il est aisé de vérifier que S^* est l'opérateur adjoint de S dans $H^2_{\mathcal{H}}$ et que

$$(S^* \mathcal{K} \subset \mathcal{K}) \Longleftrightarrow (S\mathcal{M} \subset \mathcal{M})$$

donc trouver des sous-espaces fermés inveriants pour S^* compris entre $\{0\}$ et $\mathcal{K}$ équivaut à trouver des sur-espaces fermés $\mathcal{M}_0$ invariants pour S compris entre $\mathcal{M}$ et $H^2_{\mathcal{H}}$.

<u>Lemme</u>. - Si

$$\mathcal{K} = \left\{ F_\varphi \Big/ F_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n \varphi) \chi^n \right\}_{\varphi \in \mathcal{H}} \quad \text{alors}$$

$\mathcal{M} = H^2 \ominus \mathcal{K}$ est complet.

Preuve. - Il est aisé de vérifier que le vecteur

$$G = T^*\varphi - \varphi\lambda \quad \text{est orthogonal à } \mathcal{K} \text{ pour } \forall\varphi \in \mathcal{H}$$

Soit $\mathcal{J}$ une f.d. t.q. :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$$

nous allons démontrer que $\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

En effet on a :

$$T^*\varphi - \varphi\lambda \in \mathcal{J}(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

or $\|T^*\| < 1$ donc $T^* - \lambda(e^{ix})$ est inversible dans $\mathcal{H}$ p.p.

ce qui démontre que

$$\varphi \in (T^* - \lambda)^{-1}(\mathcal{J}(e^{ix})) \quad \text{p.p. (1)}$$

si $\mathcal{J}(e^{ix}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{H}$ p.p.

on a :

$$(T^* - \lambda)^{-1}\,\mathcal{J}(e^{ix}) \not\equiv \mathcal{H} \quad \text{p.p.}$$

ce qui est en contradiction avec (1) car φ est choisi arbitrairement dans $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

C.Q.F.D.

$\mathcal{M}$ étant complet et contenu dans $H^2_{\mathcal{H}}$ donc

$$\mathcal{M} = \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \quad \text{où } \mathcal{U} \text{ est intérieur.}$$

<u>Proposition</u>. - Les sur espaces de $\mathcal{M} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ sont en correspondance biunivoque à des facteurs unitaires constants près avec les factorisations $\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathcal{W}$ où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont intérieurs. Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ ne sont pas constants

$$\text{alors} \quad \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}} \underset{\neq}{\subset} H^2_{\mathcal{H}}$$

<u>Preuve</u>. - La démonstration découle du fait suivant :

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux fonctions unitaires alors

$$(\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}H^2_{\mathcal{H}}) \iff (\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathcal{W} \text{ où } \mathcal{W} \text{ est intérieur})$$

C.Q.F.D.

Conclusion : D'après ce qui précède on se demande si tout opérateur $\mathcal{U}$ intérieur se laisse représenter comme $\mathcal{V}\mathcal{W}$ où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des opérateurs intérieurs non constants sauf dans le cas où la codimension de $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}}$ dans $H^2_{\mathcal{H}}$ est égale à 1 .
On va trouver la forme de $\mathcal{M} = \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ si $\mathcal{M}$ est de condimension 1 dans $H^2_{\mathcal{H}}$:

$$\mathcal{M} = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{K} \quad , \quad \mathrm{cod}\,\mathcal{M} = 1 \Longleftrightarrow \dim \mathcal{K} = 1$$

Soit $G \in \mathcal{K}$, $G \neq 0$

$$G(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \varphi_n x^n$$

$S^* G \in \mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est invariant pour S^* et

$$S^* G(x) = \sum_{n=o}^{\infty} x^n \varphi_{n+1} = \lambda \sum_{n=o}^{\infty} \varphi_n x^n \quad \text{car} \quad \dim \mathcal{K} = 1$$

donc $\varphi_{n+1} = \lambda \varphi_n \quad \forall n$

cela implique que :

$$\varphi_n = \lambda^n \varphi_o \quad \forall n$$

et $\varphi_o \neq 0$

donc

$$G(x) = \left(\sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n x^n\right) \varphi_o \in H^2_{\mathcal{H}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=o}^{\infty} |\lambda|^{2n} < +\infty \Rightarrow |\lambda| < 1$$

on peut écrire alors :

$$G(x) = \frac{1}{1 - \lambda x} \varphi_o$$

Réciproquement, tout couple (λ , φ) où $|\lambda| < 1$; $\varphi \in \mathcal{H}$ donne lieu à G et à $\mathcal{K} = \{\lambda G\}$ invariant pour S^* ($\mathcal{K}$ est de dim.1) on va étudier l'espace $\mathcal{M} = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{K}$

$\forall F \in \mathcal{M}$ on a :

$$0=(G,F)_{H^2_{\mathcal{H}}} = \int \frac{1}{1-\lambda \bar{\imath}}(\varphi,F)_{\mathcal{H}}d\sigma = (\varphi, \int (1+\bar{\lambda}\bar{\imath}^{-1}+\ldots+\bar{\lambda}^n\bar{\imath}^{-n}+\ldots)Fd\sigma)_{\mathcal{H}}$$

$$\text{or} \quad F = \sum_{n \geq 0} \psi_n \bar{\imath}^n$$

donc

$$0 = (G,F)_{H^2_{\mathcal{H}}} = (\varphi, \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\lambda}^n \psi_n)_{\mathcal{H}} = (\varphi, F(\bar{\lambda}))_{\mathcal{H}}$$

autrement dit :

$(F \in \mathcal{M}) \Longleftrightarrow (F(\bar{\lambda}) \perp \varphi$ dans $\mathcal{H}$).

ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème. -

(cod $\mathcal{M}=1$) $\Longleftrightarrow$ ($\mathcal{M}$ consiste en toutes les fonctions F t.q. : $F(\bar{\lambda}) \perp \varphi$ où $\bar{\lambda}$ et φ sont fixés)

$|\lambda|<1$

$\varphi \neq 0$, $\varphi \in \mathcal{H}$

Dans ce qui suit nous allons étudier la forme de $\mathcal{U}$ associé à $\mathcal{M}(\bar{\lambda},\varphi)$. Il est aisé de vérifier que U est défini par

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U}(e^{ix})\psi &= \psi \text{ si } \psi \perp \varphi \\ \mathcal{U}(Z)\varphi &= \frac{Z-\bar{\lambda}}{1-\lambda Z}\varphi \end{aligned}\right\} (2)$$

car :

$$\mathcal{U}(\bar{\lambda})F(\bar{\lambda}) \perp \varphi \qquad \forall F \in H^2_{\mathcal{H}}$$

en effet

$$F = \sum^{+\infty} f_j e_j \qquad \text{où } f_j \in H^2$$

$(e_j)_{j\geq 1}^{\infty}$ est une base de $\mathcal{H}$ t.q. $e_1 = \varphi$

pour $j=1 \Longrightarrow \mathcal{U}(\bar{\lambda})\varphi = 0$ d'après (2)

et $j\neq 1$ $(e_j, \varphi) = o$

donc $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$

et Inversement chaque fonction appartenant à $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$ peut se mettre sous la forme $\mathcal{U}F$ pour une fonction F analytique ce qui donne :

$$\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$$

or

$$iM = \mathcal{U}' \, \mathcal{U}^{-1}$$

où M est l'opérateur correspondant à $(\varphi, \bar{\lambda})$

Comme

$$\mathcal{U}(e^{ix})\psi \equiv \psi \quad \text{si} \quad \psi \perp \varphi$$

$$\mathcal{U}'(e^{ix})\psi = 0 \quad \text{si} \quad \psi \perp \varphi$$

et $\mathcal{U}'(e^{ix})\varphi = \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ix}} \varphi$ (par définition de $\mathcal{U}(e^{ix})$)

$$= i\chi \frac{1-|\lambda|^2}{(1-\lambda\chi)^2}\varphi$$

$$iM\varphi = \mathcal{U}'\mathcal{U}^{-1}$$

$$= i\,\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda\chi|^2}\varphi$$

et $iM\psi = \mathcal{U}'\mathcal{U}^{-1}\psi \equiv 0$ si $\psi \perp \varphi$

pour $\lambda = 0 \Longrightarrow iM\varphi = i\varphi$

$$M(e^{ix}) = \text{projection de } \mathcal{H} \text{ sur } \{\varphi\}$$

c'est le cas où $\mathcal{U}$ est trivialement non factorisable. Est ce que l'on peut trouver d'autres $\mathcal{U}$ non factorisables en étudiant les M qui sont des projecteurs p.p. ?

La réponse est négative, en effet on a le théorème suivant :

Théorème. - Si $M(e^{ix})$ est un projecteur dans $\mathcal{H}$ pour presque chaque x et si $\mathcal{U}' = iM\mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est intérieur alors $\mathcal{U}$ est factorisable, sauf dans le cas où M est constant et son image est de dimension 1 .

Démonstration. - La démonstration se divise en plusieurs étapes supposer que M n'est pas constant et que $\mathcal{U}$ n'est pas factorisable (cas où M est constant est trivial)

1ère étape : $\mathcal{U}$ étant supposé intérieur pour $\forall F \in \mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}$ on va démontrer que $MF \in H^2_{\mathcal{H}}$ (remarquer que M n'est pas analytique car M est auto-adjoint) en effet soit $G \in H^2_{\mathcal{H}}$ t.q. $F = \mathcal{U}G$

on a $\mathcal{U}'G = iMF$

($\mathcal{U}'$ étant analytique) $\Longrightarrow$ $\mathcal{U}'G$ l'est aussi donc MF l'est.

2ème étape : Poser $\tilde{\mathfrak{M}} = \{ F \in H^2_{\mathcal{H}} \,/\, MF \in H^2_{\mathcal{H}} \}$

Il est aisé de vérifier que $\tilde{\mathfrak{M}}$ est un s.e.v. invariant fermé propre de $H^2_{\mathcal{H}}$ et que

$$\mathfrak{M} \subset \tilde{\mathfrak{M}} \subsetneq H^2_{\mathcal{H}}$$

Par l'hypothèse provisoire : "$\mathcal{U}$ est non factorisable" nous avons $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$

Soit $\mathcal{J}(e^{ix})$ l'image de $M(e^{ix})$ alors $\mathcal{J}(e^{ix})$ est le plus petit sous-espace fermé contenant l'image de $\mathcal{U}'$ p.p. donc $\mathcal{J}$ est une f.d. analytique soit V l'opérateur isométrique analytique extérieur qui applique $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{J}$, remarquons que V est définis par :

$$VH^2_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \cap H^2_{\mathcal{H}}$$

Il est aisé de vérifier que

$$VV^* = M$$

<u>3ème étape</u> : Soit $\mathcal{H}_1$ l'espace engendré par $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$

on pose

$$F_j = V\alpha_j$$

on va démontrer que

$$V^*\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}_1}$$

En effet, puisque V est extérieure, il nous suffit de prouver que $VV^*\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}}$.

Or dans la 2ème étape on sait que $M=VV^*$

donc

$$VV^*\mathfrak{M} = M\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après la 1ère étape}$$

autrement dit :

$$V^*\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}_1}$$

de plus $S^*F_j \perp \mathfrak{M}$ car pour $VG \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}(S^*F_j, G)_{\mathcal{H}} &= (F_j, SG)_{\mathcal{H}} = (V\alpha_j, SG)_{\mathcal{H}} \\ &= (\alpha_j, V^*SG)_{\mathcal{H}_1} = (\alpha_j, V^*\chi G)_{\mathcal{H}_1} \\ &= (\alpha_j, \chi V^*G)_{\mathcal{H}_1}\end{aligned}$$

or $V^*\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathcal{H}_1} \Longrightarrow V^*G$ est analytique $\Longrightarrow$ χV^*G l'est aussi et sa valeur moyenne est nulle donc

$$\int (\alpha_j, \chi V^*G)_{\mathcal{H}_1} d\sigma = 0$$

$S^*F_j \perp \mathfrak{M} \Longrightarrow S^*F_j \in \mathcal{K}$

En d'autres termes

$$F_j \in \mathcal{M} \ominus \lambda \mathcal{M}$$

$F_j \in \mathcal{M} \Longrightarrow F_j = \mathcal{U} G_j$ où $G_j \in H^2_{\mathcal{H}}$

on va démontrer que G_j = cste.

$S^* F_j \perp \mathcal{M}$ dans $L^2_{\mathcal{H}} \Longrightarrow \lambda^{-1} F_j$ dans $L^2_{\mathcal{H}}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{U} \lambda^{-1} G_j \perp \mathcal{M}$ dans $L^2_{\mathcal{H}}$

ou

$$\lambda^{-1} G_j \perp \mathcal{U}^* \mathcal{M}$$

or $\mathcal{U}^* \mathcal{M} = H^2_{\mathcal{H}}$ car $\mathcal{M} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}}$

ce qui revient à dire que

($\lambda^{-1} G_j$ est conjugué analytique et à valeur moyenne nulle)
autrement dit G_j est constante.

<u>4ème étape</u> :

poser

$F_j = V\alpha_j = U\, G_j$ où $\alpha_j \in \mathcal{H}_1$

$G_j \in H^2_{\mathcal{H}}$ d'après la 3ème étape

or $(F'_j = iMF_j) \Longleftrightarrow (F_j \in \mathcal{M} \ominus \lambda \mathcal{M})$

mais $MF_j = F_j$

donc $F'_j = iF_j$:

ou :

$$F'_j = \sum_{n \geq 0} in\, \psi_n \lambda^n$$

avec $F_j = \sum_{n \geq 0} \psi_n \lambda^n$

Ce qui donne

$$\sum_{o}^{\infty} in\ \psi_n \chi^n = \sum_{n=o}^{\infty} \psi_n \chi^n$$

$$\Longrightarrow F_j = \psi_1 \chi$$

on est arrivé ainsi à une contradiction pour 2 raisons :

<u>1ère raison</u> : V est supposé extérieur

or les $\{F_j\}$ se laissent diviser par χ

c.a.d. $VH^2_{\mathcal{H}_1} \subset \chi H^2_{\mathcal{H}}$ ce qui est impossible

<u>2ème raison</u> :

$\mathcal{J}(e^{ix}) = \{F_j(e^{ix})\}$ chaque fonction (F_j) a une direction constante donc $\mathcal{J}$ = cste $\Longrightarrow$ M = cste ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur M . Le théorème est donc démontré par l'absurde.

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u>. - Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie chaque $\mathcal{U}$ intérieur peut être factorisé sauf dans le cas trivial.

Voir la démonstration dans "Lectures on invariants subspaces" HELSON