PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE

D'ANALYSE HARMONIQUE

ORSAY

Année 1968/1969

Mathématiques (425)
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE

D'ANALYSE HARMONIQUE

ORSAY

Année 1968/1969

Mathématiques (425)
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

TABLE DES MATIERES

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-69

Exposé n° 1

Synthèse harmonique

par Y. Meyer

Soit E un ensemble compact de nombres réels et S une distribution, à valeurs complexes, dont le support est contenu dans E. On dit que S est une pseudomesure si la transformée de Fourier $\hat{S}$ de S est une fonction bornée. On pose alors $\|S\|_{PM} = \|\hat{S}\|_\infty$ et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans E est un espace de Banach pour la norme $\|S\|_{PM}$. Cet espace sera noté $PM(E)$.

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach $A(\mathbb{R})$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments f de $L^1(\mathbb{R})$. Les éléments S de $PM(E)$ définissent des formes linéaires continues sur $A(\mathbb{R})$ par $\langle S,\hat{f}\rangle = \langle \hat{S},f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{S}(x)f(x)dx$.

Nous nous intéressons à la construction d'une suite $(\mathcal{L}_n)_{n \geqslant 0}$ d'endomorphismes continus de $PM(E)$ tels que

a) le support de $\mathcal{L}_n(S)$ soit une partie finie de E

b) pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on ait

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{L}_n(S) , \hat{f}\rangle = \langle S , \hat{f}\rangle .$$

C'est à dire : les $\mathcal{L}_n$ approchent l'identité dans la topologie faible des endomorphismes de $PM(E)$.

A cet effet, nous démontrons un théorème analogue à la condition de Herz ([1] th. VI p. 124) où les progressions arithmétiques sont remplacées par les "modèles" définis au § 1

1. Les modèles.

Soient

- K un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$

- $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels, linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. I la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par $I(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$

- $L_1, \ldots, L_{n-1}$ $n-1$ autres formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant avec I une base du dual de $\mathbb{R}^n$.

A ces données correspond un ensemble de nombres réels Λ que nous appellerons un modèle ; Λ est l'ensemble de tous les nombres réels s'écrivant $a_1k_1 + \ldots + a_nk_n$ tels que les entiers relatifs $k_1, \ldots, k_n$ vérifient la condition : $(L_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}(k_1, \ldots, k_n)) \in K$.

2. Pas intérieur d'un modèle.

Les notations sont les mêmes que ci-dessus. Appelons pas d'un ensemble Λ de nombres réels la quantité $\inf \{|\lambda' - \lambda| \;;\; \lambda \in \Lambda \,,\; \lambda' \in \Lambda \,,\; \lambda \neq \lambda'\}$.

Appelons, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont la distance à K ne dépasse pas ε. Soit Λ_ε le modèle défini comme le modèle Λ mais où K est remplacé par K_ε.

Posons $$2\underline{d} = \sup_{\varepsilon > 0} (\text{pas de } \Lambda_\varepsilon)$$

$2\underline{d}$ est le pas intérieur du modèle Λ (il arrive souvent que $2\underline{d}$ soit égal au pas de Λ)

3. Condition pour qu'un ensemble soit de synthèse

Théorème. Soit E un ensemble compact de nombres réels. Supposons qu'un modèle Λ, un réel strictement positif η et une suite $(s_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels strictement positifs s_n tendant vers 0 soient tels que la distance entre $(s_n \Lambda) \cap E$ et E ne dépasse pas $(\underline{d} - \eta)s_n$ où $\underline{d}$ est le pas intérieur de Λ. Alors E est un ensemble de synthèse.

4. Nous n'utilisons, dans la preuve du théorème, la définition des modèles que pour avoir le résultat suivant.

Proposition 1. A tout $\varepsilon > 0$ on peut associer une mesure complexe, non bornée, μ sur la droite telle que la transformée de Fourier (au sens des distributions) $\hat{\mu}$ de μ soit

$$\hat{\mu} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda} \alpha(\lambda)\delta(x - \lambda) \tag{1}$$

où $0 \leq \alpha(\lambda) \leq 1$ et telle que l'on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty .$$

Pour démontrer la proposition, nous étendons la fonction α à tout Λ_ε en posant $\alpha(\lambda) = 1$ pour tout λ de Λ.

Soit φ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{n-1}$, égale à 1 sur K, 0 hors de K_ε. Nous poserons

(2) $$\alpha(\lambda) = \varphi[L_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}(k_1, \ldots, k_n)] = \beta(k_1, \ldots, k_n)$$

si $\lambda = a_1k_1 + \ldots + a_nk_n$; $k_j \in \mathbb{Z}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Appelons ν la mesure discrète définie par le second membre de (1) lorsque α est défini par (2). Calculons la transformée de Fourier $\hat{\nu}$ de ν. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle à support compact.

On a
$$\int f(x)d\hat{\mu}(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \beta(k_1, \ldots, k_n)f(a_1k_1 + \ldots + a_nk_n).$$
La fonction $\beta(x_1, \ldots, x_n)\ f(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$ est à décroissance rapide et a une transformée de Fourier de la forme
$$\gamma(L_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, L_{n-1}^*(x_1, \ldots, x_n)\hat{f}(L_n^*(x_1, \ldots, x_n))$$
où, à un facteur près, $\gamma = \hat{\varphi}$ et où l'endomorphisme L^* de $\mathbb{R}^n$ est l'inverse de l'adjoint de $L = (L_1, \ldots, L_{n-1}, I)$. La formule de Poisson donne alors
$$\int f(x)d\hat{\mu}(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \gamma(L_1^*(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}^*(k_1, \ldots, k_n))\hat{f}(L_n^*(k_1, \ldots, k_n)) = \int \hat{f}\ d\mu(x)$$
où μ est la mesure discrète donnant au point $L_n^*(k_1, \ldots, k_n)$ la masse $\gamma(L_1^*(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}^*(k_1, \ldots, k_n))$. Que μ soit une mesure vient de l'indépendance des L_j^*, $1 \leqslant j \leqslant n$ et de la décroissance rapide de γ. On vérifie sans peine que

(3) $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty .$$

5. Dès ce moment la preuve court d'elle même.

Soient ε et η' deux nombres réels positifs tels que, si d' est le pas de Λ_ε, on ait

(4) $$\text{distance entre } (s_n \Lambda) \cap E \text{ et } E \leqslant (d' - \eta')s_n .$$

Soit $g(x)$ une fonction paire indéfiniment dérivable d'une variable réelle égale à 1 sur $[0\ ,\ d' - \eta']$, à 0 hors de $[0\ ,\ d' - \eta'/2]$. On pose

(5) $$\mu_n = s_n^{-1}\, \mu(s_n x)$$

(6) $$g_n = g(x/s_n)$$

et l'on définit un endomorphisme $\mathcal{L}_n$ de $PM(E)$ par la formule

(7) $$\mathcal{L}_n(S) = (S * g_n)\hat{\mu}_n = \sum_{\lambda \in \Lambda s_n} \delta(x - \lambda) \int_{\lambda - s_n(d'-\eta')}^{\lambda + s_n(d'-\eta')} dS(t) .$$

On a $\|\mathcal{L}_n(S)\|_{PM} = \|\mu_n * (\hat{S}.\hat{g}_n)\|_\infty \leqslant \|\hat{S}\|_\infty \||\mu_n| * |\hat{g}_n|\|_\infty = \|\hat{S}\|_\infty \||\mu| * |\hat{g}|\|_\infty \leqslant C\|\hat{S}\|_\infty$ où $C < +\infty$ grâce à (3) et à la décroissance rapide de $\hat{g}$. Soit $\|\mathcal{L}_n\| \leqslant C$.

On vérifie sans peine que, grâce aux hypothèses du théorème, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n \operatorname{Card}((s_n \Lambda) \cap E) = 0$ (en particulier E est de mesure nulle). Appelons $\mathcal{A}_n$ la partie de $A(\mathbb{R})$ composée des éléments de $A(\mathbb{R})$ constants sur chaque intervalle $[\lambda - s_n d'\ ,\ \lambda + s_n d']$ où $\lambda \in (s_n \Lambda) \cap E$. La réunion $\mathcal{A}_\infty$ des $\mathcal{A}_n$ est dense dans $A(\mathbb{R})$ et la convergence simple de la suite des $\mathcal{L}_n(S)$ sur $\mathcal{A}_\infty$ entraine la convergence simple sur tout $A(\mathbb{R})$ car la suite des normes des $\mathcal{L}_n$ est bornée.

6. *Application. Soit θ un entier algébrique dont tous les conjugués (sauf θ lui-même) appartiennent à $]0\,,\,1[$. Supposons $\theta > 2$. Alors l'ensemble parfait à rapport de dissection θ^{-1} est de synthèse.*

Appelons en effet σ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ les n $\mathbb{Q}$-isomorphismes distincts de $\mathbb{Q}[\theta]$ dans $\mathbb{C}$ où n est le degré de θ et où $\sigma_1 = \mathrm{Id}$.

Soit Λ l'ensemble des nombres réels de la forme $\lambda = p_o + p_1\theta + \ldots + p_{n-1}\theta^{n-1}$, $p_j \in \mathbb{Z}$, tels que $0 \leqslant \sigma_j(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{1-\sigma_j(\theta)}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$. Le pas intérieur du modèle Λ est $\prod_2^n (1-\sigma_j(\theta))$. En effet, si λ et λ' appartiennent à Λ_ε, on a $|\sigma_j(\lambda-\lambda')| \leqslant \dfrac{1}{1-\sigma_j(\theta)} + 2\varepsilon$.

Or le produit $\prod_1^n \sigma_j(\lambda-\lambda')$ est un entier relatif non nul si $\lambda \neq \lambda'$. On a donc $|\lambda-\lambda'| \geqslant \prod_2^n (1-\sigma_j(\theta)) - O(\varepsilon)$ et le pas intérieur de Λ est $\prod_2^n (1-\sigma_j(\theta))$.

Si $\theta - 1$ n'est pas une unité, on a $(\theta-1)\prod_2^n (1-\sigma_j(\theta)) \geqslant 2$. L'intersection de $\theta^{-n}\Lambda$ et de E se réduit aux points de E de la forme $\sum_o^n \varepsilon_k\theta^{-k}$, $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ et le théorème s'applique immédiatement.

Si $\theta - 1$ est une unité, on a $(\theta-1)\prod_2^n (1-\sigma_j(\theta)) = 1$. L'intersection de $\theta^{-n}\Lambda_\varepsilon$ et de E se compose des points $\sum_o^n \varepsilon_k\theta^{-k}$ et, éventuellement, de certains points $\sum_o^n \varepsilon_k\theta^{-k} + \theta^{-n}/\theta-1$, dès que ε est assez petit.

Soit $g(x)$ une fonction paire égale à 1 sur $[0\,,\,1/\theta(\theta-1)]$ nulle hors de $[-\theta^{-1}\,,\,\theta^{-1}]$ et indéfiniment dérivable. On forme

$$\mathcal{L}'_n(S) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta(x-\theta^{-n}\lambda)\,\langle S\,,\,\varphi(\theta^n x-\lambda)\rangle + \sum_{\lambda\in\Lambda_\varepsilon\setminus\Lambda} \alpha(\lambda)\delta(x-\theta^{-n}\lambda)\,\langle S,\,\varphi(\theta^n x-\lambda)\rangle .$$

On vérifie comme dans la preuve de la proposition 1 que, pour une constante C, on a $\|\mathscr{L}'_n(S)\|_{PM} \leq C\|S\|_{PM}$. Grâce au calcul du pas de Λ_ε, on vérifie que si $S \in PM(E)$, $\mathscr{L}'_n(S)$ charge les points de $\theta^{-n}\Lambda$ et éventuellement certains points de $\theta^{-n}\Lambda + \theta^{-n}/\theta - 1$ et que le second terme définissant $\mathscr{L}'_n(S)$ est nul.

On définit alors $\mathscr{L}''_n$ comme $\mathscr{L}'_n$ à la seule différence que Λ_ε y est remplacé par $\Lambda_\varepsilon + 1/\theta - 1$ et l'on pose

$$\mathscr{L}_n(S) = \mathscr{L}'_n(S) + \mathscr{L}''_n[S - \mathscr{L}'_n(S)], \qquad S \in PM(E).$$

(Si $\mathscr{L}_n(S)$ charge déjà $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-n}/\theta - 1$, la masse de $\mathscr{L}''_n[S - \mathscr{L}'_n(S)]$ en ce point est nulle).

La suite des $\mathscr{L}_n(S)$ est l'approximation désirée de $S \in PM(E)$.

<u>Exemples</u>. <u>Soit</u> θ <u>la solution supérieure à 2 de</u> $X^3 - 6X^2 + 5X - 1 = 0$. <u>L'ensemble à rapport de dissection</u> θ^{-1} <u>est de synthèse</u>. <u>L'ensemble à rapport de dissection</u> $2 + \sqrt{2}$ <u>est de synthèse</u>.(1)

[1] <u>J.-P. Kahane</u> et <u>R. Salem</u>. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1962)

(1) En suivant cette méthode on peut démontrer que si θ est un nombre de Pisot quadratique, l'ensemble à rapport de dissection θ^{-1} est toujours de synthèse.

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-69

Exposé n° 2

A PROPOS DE LA FORMULE DE POISSON

par Yves Meyer

Une généralisation de la formule de Poisson donne de nouveaux résultats sur le problème de la répartition modulo 1 et sur celui de la synthèse harmonique.

1. La formule de Poisson dit que si $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et ζ la mesure (non bornée) $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$, somme des masses 1 placées en chaque entier, alors la transformée de Fourier, $\mathcal{F}\zeta$, (au sens des distributions) de ζ est ζ. (La transformée de Fourier de l'élément f de $L^1(\mathbb{R})$ est $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi ixy) f(x)dx$). Nous donnerons des exemples d'ensembles Λ de nombres réels possédant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une mesure, à valeurs complexes, μ_ε, telle que

a) $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu_\varepsilon|(t) < +\infty$

b) $\mathcal{F}\mu_\varepsilon = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \delta(x-\lambda) + R_\varepsilon(x)$

où $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \delta(x-\lambda)$ est une mesure, $R_\varepsilon(x)$ également et où

c) $\overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} d|R_\varepsilon|(x) \leqslant \varepsilon$.

2. La condition c) signifie que le terme d'erreur est petit. Ne peut-on pas, tout simplement, le prendre nul ? Nous allons voir que l'on retombe alors sur la formule de Poisson usuelle.

Supposons, en effet, qu'il existe une mesure, à valeurs complexes, μ telle que

a) $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty$

b) $\mathcal{F}\mu = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda)$.

La somme $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \delta(x - \lambda)$ ne peut être une distribution que si elle est une mesure ; alors Λ est un ensemble fermé dont chaque élément est isolé. Soit $\varphi(x)$ une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, indéfiniment dérivable et à support compact et telle que $\varphi(0) = 1$; soit ψ la fonction à décroissance rapide dont la transformée de Fourier est φ. Grâce à a), la suite des normes (ou variations totales) des mesures $d\mu_n(x) = n^{-1}\,\psi(n^{-1}x)d\mu(x)$ est une suite bornée. D'autre part $\hat{\mu}_n(t) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \varphi(nt - n\lambda)$. Si t n'appartient pas à Λ, $\hat{\mu}_n(t) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ car Λ est fermé. Si t appartient à Λ, $\hat{\mu}_n(t) \longrightarrow 1$ $(n \longrightarrow +\infty)$ car chaque point de Λ est isolé. Il existe donc une mesure ν portée par le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier vaut 1 sur Λ et 0 ailleurs (ν est la limite vague des μ_n). D'après une conséquence du théorème de Paul Cohen due à P. H. Rosenthal, ([3] th. 1.6 p. 22) Λ est à un ensemble fini près, la réunion de k parties de $\mathbb{R}$ de la forme $\alpha_j Z + \beta_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ On retrouve donc la formule de Poisson habituelle.

3. Avant de donner des exemples, montrons que la donnée des mesures μ_ε vérifiant a), b), c) permet de résoudre le problème de la répartition modulo 1 des "suites $x\Lambda$".

D'abord l'hypothèse que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda)$ est une mesure entraine que l'on peut ordonner $\Lambda \cap [0, +\infty[$ en une suite croissante $(\lambda_n)_{n \geq 1}$. Une fois pour toutes, cette suite sera associée à Λ.

<u>Théorème 1. Supposons les conditions</u> a), b) <u>et</u> c) <u>satisfaites et que, de plus</u> $\inf \lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$. <u>Alors pour tout</u> x <u>réel</u>,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon\{x\}.$$

($\mu\{x\}$ désigne la masse au point x de la mesure μ).

La preuve du théorème 1 repose sur le fait que, si ν est une mesure bornée, la moyenne de la fonction $\hat{\nu}(t)\exp(2\pi i t x)$ est égale à la masse de ν en x. Nous ne pouvons appliquer cette remarque à μ_ε mais soit $\varphi(t)$ une fonction indéfiniment dérivable, à support compact, et telle que $\hat{\varphi}(x)$ soit différent de zéro. Posons $\nu(y) = \hat{\varphi}(-y)\mu_\varepsilon(y)$. Grâce à la condition a) et à la décroissance rapide de $\hat{\varphi}$, ν est une mesure bornée. Pour calculer la moyenne de $\hat{\nu}$, appelons χ_n la fonction égale à $\lambda_n^{-1}\exp(-2\pi i t x)$ sur $[0, \lambda_n]$, à 0 ailleurs. On a $\hat{\nu}(t) = \varphi * \hat{\mu}_\varepsilon = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(x - \lambda) + R_\varepsilon * \varphi$.

Mais $\overline{\lim}_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |R_\varepsilon * \varphi| dt \leq \varepsilon \|\varphi\|_1$ et donc $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |\langle R_\varepsilon * \varphi, \chi_n \rangle| \leq \varepsilon \|\varphi\|_1$

($\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$ chaque fois que cette intégrale a un sens).

Enfin $\langle \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(x - \lambda), \chi_n \rangle = M_n(x)\, \hat{\varphi}(-x) + o(1)$, grâce à la condition que $\inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$. On a donc $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |M_n(x) - \mu_\varepsilon\{x\}| \leq \varepsilon \|\varphi\|_1 / \hat{\varphi}(x)$ ce qui entraine évidemment $\lim_{n \to +\infty} M_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon\{x\}$.

Corollaire. Supposons que $\lambda_n = O(n)$. Alors

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i\lambda_1 x) +\ldots+ \exp(2\pi i\lambda_n x)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon\{x\} / \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon\{0\}.$$

4. Les modèles.

Soient

- n un entier supérieur ou égal à 2
- K un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$
- $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels, linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$
- I la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par

  $$I(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 +\ldots+ a_nx_n$$

- $L_1, \ldots, L_{n-1}$, $n-1$ autres formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant avec I une base du dual de $\mathbb{R}^n$.

A ces données correspond un ensemble de nombres réels, Λ, que nous appellerons un modèle ; Λ est l'ensemble de tous les nombres réels $a_1k_1 +\ldots+ a_nk_n$ où $k_1, \ldots, k_n$ sont des entiers relatifs tels que le point de $\mathbb{R}^{n-1}$ de coordonnées $L_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}(k_1, \ldots, k_n)$ appartienne à K.

Pas intérieur d'un modèle.

Les notations sont les mêmes que ci-dessus. Appelons pas d'un ensemble Λ de nombres réels la quantité $\inf\{|\lambda' - \lambda| \ ; \ \lambda \in \Lambda, \ \lambda' \in \Lambda, \ \lambda \neq \lambda'\}$. Appelons, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont la distance à K ne dépasse pas ε.

Soit Λ_ε le modèle défini comme le modèle Λ mais où K est remplacé par K_ε.

Posons $2\underline{d} = \sup\limits_{\varepsilon > 0}$ (pas de Λ_ε)

$2\underline{d}$ est le pas intérieur du modèle Λ (il arrive souvent que $2\underline{d}$ doit égal au pas de Λ).

Proposition. Le pas (et donc le pas intérieur) d'un modèle sont strictement positifs.

En effet, soit $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$, $\mu = \lambda - \lambda'$. On veut montrer que μ ne peut être arbitrairement voisin de 0. On peut donc se restreindre à $|\mu| \leqslant 1$; on a $\mu = I(k_1, \dots, k_n)$ où $k_j \in Z$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Quand $|\mu| \leqslant 1$, le point $(k_1, \dots, k_n)$ de Z^n vérifie $|I(k_1, \dots, k_n)| \leqslant 1$; on a, d'autre part, si D est le diamètre de K, $|L_j(k_1, \dots, k_n)| \leqslant D$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$. Ces n inégalités ne peuvent être satisfaites que par un nombre fini de points de Z^n et donc il n'y a qu'un nombre fini de différences $\lambda - \lambda'$ telles que $|\lambda - \lambda'| \leqslant 1$.

Mesures associées à un ensemble

Théorème 2. Soit K un compact de R^{n-1} dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle ; Λ et Λ_ε sont définis à l'aide de K et K_ε comme ci-dessus. A tout $\varepsilon > 0$ on peut associer une mesure complexe μ_ε telle que

1) $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu_\varepsilon|(t) < +\infty$

2) $\mathcal{F}\mu_\varepsilon = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda) + R_\varepsilon(x)$

3) $R_\varepsilon(x) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda} \alpha(\lambda)\delta(x - \lambda)$ et $0 \leqslant \alpha(\lambda) \leqslant 1$

4) $\overline{\lim}_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} d|R_\varepsilon(x)| \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \longrightarrow 0).$

Cela signifie que la transformée de Fourier de μ_ε est la somme des masses unités placées en chaque point de Λ et d'un terme d'erreur. Ce terme d'erreur est formé de masses comprises entre 0 et 1 et placées sur $\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda$. En moyenne, les masses du terme d'erreur peuvent être rendues arbitrairement petites.

Passons à la démonstration. Nous allons d'abord définir la fonction α que l'on va étendre à tout Λ_ε en posant $\alpha(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \Lambda$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{n-1}$, égale à 1 sur K, à 0 hors de K_ε. Soit

$$\alpha(\lambda) = \varphi[L_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}(k_1, \ldots, k_n)]$$

si $\lambda = a_1 k_1 + \ldots + a_n k_n$; $k_j \in \mathbb{Z}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Soit enfin β la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\beta(x_1, \ldots, x_n) = \varphi[L_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, L_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)].$$

Posons $\nu = \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon} \alpha(\lambda)\delta(x - \lambda)$ et calculons $\mathcal{F}\nu$! Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle, à support compact (une fonction test). On a

$$\int f(x)d\nu(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \beta(k_1, \ldots, k_n) f(a_1 k_1 + \ldots + a_n k_n).$$

La fonction $\beta(x_1, \ldots, x_n) f(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)$ est à décroissance rapide et a pour transformée de Fourier la fonction à décroissance rapide $\rho(x_1, \ldots, x_n) =$ $(\det L)^{-1} \hat{\varphi}(L_1^*, L_2^*, \ldots, L_{n-1}^*) \hat{f}(L_n^*)$ où $L = (L_1, \ldots, L_{n-1}, I)$ et où l'endomorphisme de L^* de $\mathbb{R}^n$, défini par $L^*(x_1, \ldots, x_n) = (L_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, L_n^*(x_1, \ldots, x_n))$, est l'inverse de l'adjoint de L.

La formule de Poisson relative à Z^n donne alors

$$\int_R f(x)d\nu(x) = \sum_{Z^n} \rho(k_1, \ldots, k_n) = \int_R \hat{f}\, d\mu$$

où μ est la mesure discrète donnant au point $L_n^*(k_1, \ldots, k_n)$ la masse $(\det L)^{-1}\, \hat{\varphi}(L_1^*, \ldots, L_{n-1}^*)(k_1, \ldots, k_n)$. On a $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| = (\det L)^{-1}\sum |\hat{\varphi}|(L_1^*, ..L_{n-1}^*)$ où la somme est étendue à tous les éléments X de Z^n tels que $L_n^*(X)$ appartienne à $[x, x+1]$. Soit θ la fonction caractéristique de $[0, 1]$. Alors $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| =$ $(\det L)^{-1} \sum |\hat{\varphi}|(L_1^*, \ldots, L_{n-1}^*)\theta(L_n^* - x)$. Puisque les formes $L_1^*, \ldots, L_n^*$ forment une base du dual de R^n, il y a un ξ dans R^n tel que $L_1^*(\xi) = \ldots = L_{n-1}^*(\xi) = 0$, $L_n^*(\xi) = x$. Appelons ω la fonction, définie sur R^n par $\omega = (\det L)^{-1}|\hat{\varphi}|(L_1^*, \ldots$ $\ldots, L_{n-1}^*)\theta(L_n^*)$. Avec cette notation, $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| = \sum_{X\in Z^n} \omega(X - \xi)$. La décroissance rapide de ω entraine $\sup_{\xi\in R^n} \sum_{X\in Z^n} \omega(X - \xi) < +\infty$ et donc $\sup_{x\in R} \int_x^{x+1} d|\mu(t)| < +\infty$.

Soit à prouver 4). Nous avons besoin de l'étape suivante : soit U un compact de R^{n-1}, Λ_U le modèle associé à U et L. Ordonnons $\Lambda_U \cap [0, +\infty]$ en une suite croissante $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ et posons $\overline{\text{dens}}\,\Lambda_U = \overline{\lim}\, \frac{n}{\lambda_n}$.

<u>Lemme</u>. <u>On a</u> $\overline{\text{dens}}\ \Lambda_U \leq (\det L)^{-1}$ mes U.

En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction positive d'intégrale égale à 1, indéfiniment dérivable, à support compact. Alors, parce que R_ε est une mesure positive, $\overline{\text{dens}}\ \Lambda_U \leq \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\hat{\mu}_\varepsilon * \varphi)dx = \mu_\varepsilon\{0\}$. La dernière égalité est due à un théorème de Wiener appliqué à la mesure bornée $\hat{\varphi}(-x)d\mu_\varepsilon(x)$.

En passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient le lemme.

Soit alors $U = \overline{K_\varepsilon \setminus K}$. On a $\overline{\text{dens}}(\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda) \leqslant (\det L)^{-1} \operatorname{mes}(\overline{K_\varepsilon \setminus K})$ et la mesure de la frontière de K étant nulle, on a $\lim \overline{\text{dens}}(\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda) = 0$. Puisque les masses de R_ε sont comprises entre 0 et 1 et portées par $\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda$, 4) en résulte.

5. Application au problème de la répartition modulo 1

Soit Λ un modèle défini par un compact K de R^{n-1} et un endomorphisme linéaire inversible L de R^n où $L = (L_1, \ldots, L_{n-1}, I)$. Rappelons que $I(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, les a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ étant indépendants sur Z. Ordonnons $\Lambda \cap [0, +\infty[$ en une suite croissante $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ et par abus de langage, appelons K la fonction caractéristique du compact K et $\hat{K}$ sa transformée de Fourier. Enfin l'endomorphisme $L^* = (L_1^*, \ldots, L_n^*)$ de R^n est l'adjoint de l'inverse de L.

Proposition 1. Si le nombre réel x peut être écrit $L_n^*(k_1, \ldots, k_n)$ où $k_j \in Z$, $1 \leqslant j \leqslant n$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i \lambda_n x)\right] = \frac{\hat{K}(L_1^*(k_1, \ldots, k_n), \ldots, L_{n-1}^*(k_1, \ldots, k_n))}{\operatorname{mes} K}$$

Sinon $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i \lambda_n x)\right] = 0$.

C'est là une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2.

En particulier appelons, pour tout nombre réel x, $\|x\|$ le reste modulo 1 de x situé dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Proposition 2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ k

nombres irrationnels et $\eta_1, \ldots, \eta_k$ k nombres réels non nuls tels que les $k+1$ nombres réels $1 + \eta_1\theta_1 + \ldots + \eta_k\theta_k, \eta_1, \ldots \eta_k$, soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Soit $\lambda_n = n + \eta_1\|n\theta_1\| + \ldots + \eta_k\|n\theta_k\|$. Alors si $x = p_1\theta_1 + \ldots + p_k\theta_k + q$, $p_1, \ldots, p_n$ et q étant des entiers relatifs,

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)\right] = \frac{\sin\pi(\eta_1 x + p_1)}{\pi(\eta_1 x + p_1)} \cdots \frac{\sin\pi(\eta_k x + p_k)}{\pi(\eta_k x + p_k)}.$$

Si au contraire, x n'est pas de cette forme, $\lim_{n \to +\infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)\right] = 0$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente car en écrivant chaque $\|n\theta_j\|$ sous la forme $n\theta_j - m_j$ à la condition que $|n\theta_j - m_j| \leqslant 1/2$ (il n'y a pas d'ambiguité car θ_j est irrationnel), on voit que l'ensemble des λ_n est l'ensemble des éléments positifs d'un modèle.

Proposition 3. Soit $(\theta_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de nombres irrationnels et $(\eta_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de nombres réels non nuls telle que $\sum_1^\infty |\eta_k| < +\infty$. Supposons que, pour toute valeur de l'entier k, les $k+1$ nombres réels $1 + \eta_1\theta_1 + \ldots + \eta_k\theta_k, \eta_1, \ldots, \eta_k$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Posons $\lambda_n = n + \sum_1^\infty \eta_k \|n\,\theta_k\|$.

a) Si $x = q + p_1\theta_1 + \ldots + p_k\theta_k$, $\lim_{n \to +\infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)\right] =$

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{\sin\pi(\eta_j x + p_j)}{\pi(\eta_j x + p_j)} \prod_{k+1}^{\infty} \frac{\sin\pi\eta_j x}{\pi\eta_j x}$$ (nous excluons le cas évident où $x = 0$.)

b) Si pour aucune valeur de l'entier k, x ne s'écrit $q + p_1\theta_1 + \ldots + p_k\theta_k$ ($p_1, \ldots, p_n$ et q entiers relatifs), alors $\lim_{n \to +\infty} n^{-1}\left[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)\right] = 0$.

Appelons, en effet $\prod(x)$ le produit infini qui figure au second membre de a) et, pour tout entier m, appelons $\Pi_m(x)$ le produit des m premiers termes de $\Pi(x)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un entier m tel que $|\Pi(x) - \Pi_m(x)| \leqslant \varepsilon/3$ et que $\sum_{m+1}^{\infty} |\eta_k| \leqslant \varepsilon/6\pi|x|$. Posons $\lambda_{n,m} = n + \sum_{1}^{m} \eta_k \|n\ \theta_k\|$. On a alors $|n^{-1}[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots$ $\ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)] - n^{-1}[\exp(2\pi i\lambda_{1,m} x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_{n,m} x)]| \leqslant \varepsilon/3$; m étant ainsi fixé, il existe un entier N tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|n^{-1}[\exp(2\pi i\lambda_{1,m} x) + \ldots$ $\ldots + \exp(2\pi i\lambda_{n,m} x)] - \Pi_m(x)| \leqslant \varepsilon/3$. Mais $|\Pi(x) - \Pi_m(x)| \leqslant \varepsilon/3$. Ainsi, pour $n \geqslant N$, $|n^{-1}[\exp(2\pi i\lambda_1 x) + \ldots + \exp(2\pi i\lambda_n x)] - \Pi(x)| \leqslant \varepsilon$.

La seconde partie de la proposition 3 se prouve de façon analogue.

Théorème 3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels telle que $|\lambda_n - n| \leqslant \varepsilon$ et que $(x\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ soit équirépartie modulo 1 si et seulement si le nombre réel x est transcendant.

Soit en effet $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel sur Q formé des nombres algébriques. Soit $1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots$ une base de $\mathcal{A}$ sur Q. Les θ_k sont donc irrationnels. Soit η un nombre transcendant appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}[$. Posons $\lambda_n = n + \sum_{1}^{\infty} \eta^k \|n\ \theta_k\|$. Les hypothèses de la proposition 3 sont satisfaites et le théorème 3 résulte du critère de Weyl.

6. Application au problème de la synthèse harmonique

Soit E un ensemble compact de nombres réels et S une distribution, à valeurs complexes, dont le support est contenu dans E. On dit que S est une pseudomesure si la transformée de Fourier $\hat{S}$ de S est une fonction bornée. On pose alors $\|S\|_{PM} = \|\hat{S}\|_{\infty}$ et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans E est un espace de Banach pour la norme $\|S\|_{PM}$. Cet espace sera noté $PM(E)$.

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach $A(R)$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments f de $L^1(R)$. Les éléments de S de $PM(E)$ définissent des formes linéaires continues sur $A(R)$ par $\langle S,\hat{f}\rangle = \langle \hat{S},f\rangle = \int_R \hat{S}(x)f(x)\,dx$.

Nous nous intéressons à la construction d'une suite $(\mathscr{S}_n)_{n \geq 0}$ d'endomorphismes continus de $PM(E)$ tels que

a) le support de $\mathscr{S}_n(S)$ soit une partie finie de E

b) pour tout $f \in L^1(R)$, on ait

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathscr{S}_n(S) , \hat{f} \rangle = \langle S , \hat{f} \rangle .$$

C'est-à-dire : les $\mathscr{S}_n$ approchent l'identité dans la topologie faible des endomorphismes de $PM(E)$.

L'existence d'une telle suite entraine évidemment que E est un ensemble de synthèse harmonique.

A cet effet, nous démontrons un théorème analogue à la condition de Herz ([1], th. VII p. 124) où les progressions arithmétiques sont remplacées par les "modèles" définis au § 4.

Théorème 4. Soit E un ensemble compact de nombres réels. Supposons qu'un modèle Λ, un nombre réel strictement positif η et deux suites s_n et t_n de nombres réels strictement positifs tendant vers 0 soient tels que la distance entre $(s_n \Lambda) \cap E + t_n$ et E ne dépasse pas $(d - \eta)s_n$ où $2d$ est le pas intérieur de Λ. Alors E est un ensemble de synthèse.

Soient, en effet, ε et η' deux nombres réels positifs tels que, si $2d'$ est le pas de Λ_ε, la distance entre $(s_n \Lambda) \cap E + t_n$ et E ne dépasse pas $(d' - \eta')s_n$. Alors les points de $s_n \Lambda_\varepsilon + t_n$ n'appartenant pas à $(s_n \Lambda) \cap E + t_n$ sont centres d'intervalles de longueur $2(d' + \eta')s_n$ ne rencontrant pas E. Soit $g(x)$ une fonction paire, indéfiniment dérivable, d'une variable réelle, égale à 1 sur $[0 , d' - \eta'/2]$ à 0 hors de $[-d' , d']$. Soit $\mu = \mu_\varepsilon$ la mesure canoniquement associée, par le théorème 2, au modèle Λ. On pose

$$\mu_n = s_n^{-1} \mu(s_n x)$$
$$g_n = g\left(\frac{x - t_n}{s_n}\right)$$

et l'on définit un endomorphisme $\mathcal{L}_n$ de $PM(E)$ par la formule

$$\mathcal{L}_n(S) = (S * g_n)\hat{\mu}_n = \sum_{\lambda \in \Lambda s_n} \delta(x - \lambda) \int_{\lambda - s_n(d' - \frac{\eta'}{2}) + t_n}^{\lambda + s_n(d' - \frac{\eta'}{2}) + t_n} dS(t).$$

On a $\|\mathcal{L}_n(S)\|_{PM} = \|\mu_n * (\hat{S}.\hat{g}_n)\|_\infty \leqslant \|\hat{S}\|_\infty \, \| |\mu_n| * |\hat{g}_n| \|_\infty = \|\hat{S}\|_\infty \, \| |\mu| * |\hat{g}| \|_\infty \leqslant C \, \|\hat{S}\|_\infty$ où $C < +\infty$ grâce à la condition 1) du théorème 2 et à la décroissance rapide de $\hat{g}$. Soit $\|\mathcal{L}_n\| \leqslant C$.

On vérifie sans peine que, grâce aux hypothèses du théorème 4,

$\lim_{n \to +\infty} s_n \operatorname{Card}((s_n \Lambda) \cap E) = 0$ (en particulier E est de mesure nulle). Appelons $\mathcal{B}_n$ la partie de $A(R)$ composée des éléments de $A(R)$ constants sur chaque intervalle $[\lambda - s_n d' , \lambda + s_n d']$ où $\lambda \in (s_n \Lambda) \cap E$. La réunion $\mathcal{B}_\infty$ des $\mathcal{B}_n$ est dense dans $A(R)$ (voir p. ex. [2], 1.3, p. 256) et la convergence simple de la suite des $\mathcal{L}_n(S)$ sur $\mathcal{B}_\infty$ entraine la convergence simple sur tout $A(R)$ car le suite des normes des $\mathcal{L}_n$ est bornée.

7. Application. <u>Soit</u> θ <u>un entier algébrique, soit</u> $P(X) = a_o + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ <u>le polynôme irréductible de</u> $Z[X]$ <u>tel que</u> $P(\theta) = 0$.

<u>Supposons que les conjugués de</u> θ <u>(sauf</u> θ <u>lui-même) appartiennent à</u> $]0 , 1[$ <u>et que</u> $P(1)$ <u>ne soit ni</u> -1, <u>ni</u> 1.

<u>Alors l'ensemble parfait à rapport de dissection</u> θ^{-1} <u>est de synthèse.</u>

Appelons, en effet, σ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ les n Q-isomorphismes distincts de $Q[\theta]$ dans $\mathbf{C}$; σ_1 est l'application identique de $Q[\theta]$ dans $\mathbf{C}$.

Soit Λ l'ensemble des nombres réels de la forme $\lambda = p_o + p_1\theta + \ldots + p_{n-1}\theta^{n-1}$ tels que $p_k \in Z$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et que $0 \leqslant \sigma_j(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{1 - \sigma_j(\theta)}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$; toute somme finie $\sum_{k \geqslant o} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ appartient à Λ. Soit Λ_ε l'ensemble des $\lambda = p_o + p_1\theta + \ldots + p_{n-1}\theta^{n-1}$ tels que $-\varepsilon \leqslant \sigma_j(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{1 - \sigma_j(\theta)} + \varepsilon$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.

<u>Lemme</u> 1. <u>Le pas intérieur du modèle</u> Λ <u>est supérieur ou égal à</u> $\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))$.

En effet, si λ et λ' appartiennent à Λ, on a $|\sigma_j(\lambda - \lambda')| \leqslant \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)} + 2\varepsilon$. Or le produit $\prod_1^n \sigma_j(\lambda - \lambda')$ est un entier relatif non nul si $\lambda \neq \lambda'$. On a donc $|\lambda - \lambda'| \geqslant \prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta)) - 0(\varepsilon)$ et le pas intérieur de Λ est supérieur ou égal à $\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))$.

Soit E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^{-k}$ associées à toutes les suites $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 0}$ de 0 ou de 1. Appelons E_n l'ensemble des sommes $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k}$ correspondantes. Alors $E_n \subset E \subset E_n + [0 , \theta^{-n}/\theta - 1]$.

<u>Lemme</u> 2. <u>On a</u> $E_n = E \cap \theta^n \Lambda$.

En effet $|P(1)| = (\theta - 1)(1 - \sigma_2(\theta)) \ldots (1 - \sigma_n(\theta))$ est un entier supérieur ou égal à 2. Le pas intérieur comme le pas de Λ dépassent $2/\theta - 1$. Chaque élément de E_n appartient à $\theta^{-n}\Lambda$ et le pas de $\theta^{-n}\Lambda$ est "grand", E est "proche" de E_n si bien que les autres points de $\theta^{-n}\Lambda$ ne peuvent appartenir à E.

Le théorème 4 s'applique avec $s_n = \theta^{-n}$, $t_n = \theta^{-n}/2(\theta - 1)$, $\underline{d} \geqslant \theta^{-n}/\theta - 1$ puisque la distance entre $\theta^{-n}\Lambda \cap E + t_n = E_n + \theta^{-n}/2(\theta - 1)$ et E ne dépasse pas $\theta^{-n}/2(\theta - 1)$.

Exemples. <u>L'ensemble à rapport de dissection</u> $3 - 2\sqrt{2}$ <u>est de synthèse. Soit</u> θ <u>la solution supérieure à</u> 1 <u>de l'équation</u> $X^3 - 8X^2 + 6X - 1 = 0$. <u>L'ensemble à rapport de dissection</u> θ^{-1} <u>est de synthèse</u>.

[1] <u>J.-P. Kahane</u>.- Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1963)

[2] <u>Y. Katznelson</u> et <u>W. Rudin</u>.- The Stone-Weierstrass property in Banach algebras. Pacific J. Math. 11 (1961), 253-265

[3] <u>P. H. Rosenthal</u>.- Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$. Memoir of the A. M. S. n° 63 (1966).

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-1969

Exposé n° 3

Semi-groupes de mesures complexes

par J. Faraut

Introduction

Soit G un groupe abélien localement compact. Soit $\{\mu_t\}_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de mesures sur G, c'est-à-dire une famille de mesures complexes sur G vérifiant

$$\|\mu_t\| \leqslant 1$$

$$\mu_0 = \delta, \quad \forall t, \quad s \geqslant 0, \quad \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$$

$$\lim_{t \to 0} \mu_t = \delta \qquad \text{(B-convergence)}$$

(des mesures μ_i B-convergent vers une mesure μ si pour toute fonction f continue bornée, $\int f d\mu_i$ converge vers $\int f d\mu$).

Alors il existe une fonction ψ continue sur le groupe dual Γ du groupe G telle que pour tout t positif la transformée de Fourier de la mesure μ_t soit égale à la fonction $e^{-t\psi}$. L'objet de l'exposé est de donner une caractérisation des fonctions ψ telles que $e^{-t\psi}$ soit la transformée de Fourier d'un tel semi-groupe de mesures.

Semi-produit intérieur et opérateurs dissipatifs

G. Lumer et R. S. Phillips ont caractérisés les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions d'un espace de Banach E à l'aide de semi-produits intérieurs [1].

Un semi-produit intérieur sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, $(x,y) \longrightarrow [x\ ,\ y]$, vérifiant :

$[x\ ,\ y]$ est linéaire en x

$|[x\ ,\ y]| \leqslant \|x\|\ \|y\|$

$[x\ ,\ x] = \|x\|^2$.

Supposons l'espace de Banach E muni d'un semi-produit intérieur. Un opérateur $(D_A\ ,\ A)$ désigne le couple d'un sous-espace D_A de E et d'une application linéaire A de D_A dans E.

Définition 1. Un opérateur $(D_A\ ,\ A)$ sur E est dit dissipatif si

$$\forall x \in D_A \quad , \quad \mathrm{Re}[Ax\ ,\ x] \leqslant 0.$$

Comme dans le cas hilbertien le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions est dissipatif, et on a la récirpoque suivante, qui est une variante de résultats démontrés par Lumer et Phillips [1].

Théorème 1. Soit $(D_A\ ,\ A)$ un opérateur dissipatif, de domaine D_A dense tel que

$$\forall \lambda > 0, \quad (\lambda I - A)D_A \text{ est dense dans } E.$$

Alors $(D_A\ ,\ A)$ admet un plus petit prolongement fermé qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.

Principe du maximum du module [2].

Soit X un espace localement compact, et $C_o(X)$ l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|f\| = \operatorname{Sup} |f|$.

Définition 2. Un opérateur (D_A, A) sur $C_o(X)$ vérifie le principe du maximum du module si

$$f \in D_A \ , \ f(x) = \|f\| \Longrightarrow \operatorname{Re} Af(x) \leqslant 0.$$

Définissons sur $C_o(X)$ un semi-produit intérieur de la façon suivante : soit f une fonction de $C_o(X)$, $|f|$ atteint son maximum en au moins un point de X, nous en choisissons un que nous notons x_f, et posons

$$[f \ , \ g] = f(x_g)\overline{g(x_g)}.$$

Si un opérateur $(D_A \ , A)$ vérifie le principe du maximum du module, il est dissipatif pour ce semi-produit intérieur.

Semi-groupes de mesures complexes

Soit G un groupe abélien localement compact, Γ le groupe dual, $B(\Gamma)$ l'espace des transformées de Fourier des mesures de variation totale finie sur G. Les fonctions de $B(\Gamma)$ sont caractérisées par la propriété suivante [3] :

Soit φ une fonction continue sur Γ, pour que φ soit la transformée de Fourier d'une mesure sur G de variation totale inférieure ou égale à A, il faut et suffit que pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x \, , \gamma_k)$$

<u>on ait</u>

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k \, \varphi(\gamma_k)\right| \leqslant A\|f\|_\infty .$$

<u>Théorème</u> 2. <u>Soit</u> ψ <u>une fonction continue sur</u> Γ. <u>Les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u>

a) <u>Pour tout</u> t <u>positif</u> $e^{-t\psi}$ <u>est la transformée de Fourier d'une mesure de variation totale inférieure ou égale à</u> 1

b) <u>Pour tout polynôme trigonométrique sur</u> G

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x \, , \gamma_k)$$

<u>tel que</u> $f(0) = \|f\|_\infty$ <u>on a</u>

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \, \varphi(\gamma_k) \geqslant 0.$$

Montrons que a) entraine b). Soit f un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x \, , \gamma_k)$$

tel que $f(0) = \|f\|_\infty$. D'après la caractérisation des fonctions de $B(\Gamma)$

$$\forall t > 0, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-t\,\psi(\gamma_k)}\right| \leqslant f(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

donc

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k (1 - e^{-t\,\psi(\gamma_k)}) \geqslant 0$$

et en passant à la limite quand t tend vers 0

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \, \psi(\gamma_k) \geqslant 0.$$

Montrons que b) entraine a).

Soit $\bar{G}$ le compactifié de Bohr de G, $C(\bar{G})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{G}$ muni de la norme $\|f\| = \mathrm{Sup}|f|$. Définissons l'opérateur (D_A , A) de la façon suivante : D_A est l'espace des polynômes trigonométriques sur G considéré comme sous-espace de $C(\bar{G})$ et si f est un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x , \gamma_k)$$

posons

$$Af(x) = - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\gamma_k)(x , \gamma_k).$$

Soit f un polynôme trigonométrique tel que en $\bar{x}_o$ point de $\bar{G}$ on ait

$$f(\bar{x}_o) = \|f\|$$

le polynôme trigonométrique g défini par

$$g(x) = f(x + \bar{x}_o) = \sum_{k=1}^{n} c_k (\bar{x}_o , \gamma_k)(x , \gamma_k)$$

vérifie $g(0) = \|g\|$, et par suite de l'hypothèse faite sur la fonction ψ

$$\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k (\bar{x}_o , \gamma_k) \psi(\gamma_k) \geqslant 0$$

c'est à dire

$$\mathrm{Re}\ Af(\bar{x}_o) \leqslant 0.$$

L'opérateur (D_A , A) vérifie le principe du maximum du module, il existe donc un semi produit intérieur sur $C(\bar{G})$ pour lequel (D_A , A) est dissipatif. D'autre part le domaine D_A est dense. En considérant $f(x) = (x , \gamma)$, on obtient $\mathrm{Re}\ \psi(\gamma) \geqslant 0$. Il en résulte que pour tout λ positif et tout γ, $\lambda + \psi(\gamma) \neq 0$, et donc que

$$\forall \lambda > 0, \quad (\lambda I - A) D_A = D_A .$$

L'opérateur (D_A , A) vérifie les hypothèses du théorème 1 et par suite les opérateurs P_t

définis sur D_A par

$$P_t f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-t\,\psi(\gamma_k)}(\bar{x} , \gamma_k)$$

se prolongent, pour t positif, en des contractions sur $C(\bar{G})$, ce qui se traduit par,

pour $\bar{x} = 0$

$$\forall t > 0, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-t\,\psi(\gamma_k)}\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

d'où le résultat en utilisant la caractérisation des fonctions de $B(\Gamma)$.

[1] Lumer G. - Phillips R. S.
Dissipative operators in a Banach space. Pacific J. Math., 11, p. 679-698, (1961)

[2] Faraut J.
Principe du maximum du module et semi-groupes de mesures. C. R. Acad. Sc. Paris, 267, série A, p. 257-260, (1968)

[3] Rudin W.
Fourier analysis on groups. Interscience publishers, (1962).

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-1969

Exposé n° 4

On non-triangular sets in tensor algebras

by

S. W. Drury (Orsay, France)

For an arbitrary regular symmetric algebra $R(K)$ of continuous functions on a compact hausdorff space K and an arbitrary closed subset E of K we denote

$$I(E) = \{f \; ; \; f \in R(K) \; , \; f \text{ vanishes on } E\}$$

$$I_o(E) = \{f \; ; \; f \in R(K) \; , \; f \text{ vanishes on a neighbourhood of } E\}.$$

It is easy to see that $I(E)$ is a closed ideal of $R(K)$ and that $I_o(E)$ is an ideal in $R(K)$. The subset E is said to be of synthesis if $\overline{I_o(E)} = I(E)$ (closure in $R(K)$) and E is said to be a strong dytkin set if there exists a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $u_n \in I_o(E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and for every $f \in I(E)$ we have $u_n f \longrightarrow f$ as $n \longrightarrow \infty$ for the norm of $R(K)$. Every strong dytkin set is clearly a set of synthesis. Together the following conditions imply that E is a strong dytkin set :

1) E is of synthesis

2) There exist open sets Ω_n containing E such that $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n = E$

3) There exists a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $1 - u_n \in I_o(E)$ $n = 1, 2, \ldots$ satisfying the two conditions

$$u_n(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \notin \Omega_n$$

$$\|u_n\|_{R(K)} \leqslant 1 + \varepsilon_n$$

where $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence decreasing to zero. We observe that these conditions tend to bear on the case K metrizable. We also point out that 3) could be weakened considerably without affecting the conclusion.

The following are examples of regular symmetric algebras :

A) All continuous functions $C(K)$ on a compact metrizable space K

B) Absolutely convergent Fourier series $A(G)$ on a compact abelian metrizable group G. We denote by $\hat{G}$ the dual group of G and by G_d the group G furnished with the discrete topology.

C) The tensor algebra $V(K_1 \times K_2) = C(K_1) \hat{\otimes} C(K_2)$ where K_1, K_2 will always denote compact metrizable spaces. A theory of this algebra can be found in Varopoulos [1].

In this paper we shall be concerned with the examples B) and C). A closed subset E of $K_1 \times K_2$ is said to be non-triangular if for all $\Lambda_j \subseteq K_j$ such that $\mathrm{card}(\Lambda_j) = 2$ $(j = 1,2)$ we have that $\mathrm{card}(E \cap (\Lambda_1 \times \Lambda_2)) \neq 3$. The set $\{0_G\}$ satisfies conditions 1), 2) and 3) for the algebra $A(G)$; it is the main object of this paper to use this result to show that every non-triangular set satisfies 1), 2) and 3) with respect to a tensor algebra and hence is a strong dytkin set.

If K is a compact hausdorff space we shall denote by $M(K)$ the space of bounded complex regular Borel measures on K and by $M^+(K)$ the subset of such positive measures.

The reader should observe that a non-triangular subset E of $D_1 \times D_2$ the product of discrete spaces D_1, D_2 is the union of rectangles $X_\alpha \times Y_\alpha$ $(X_\alpha \subseteq D_1,\ Y_\alpha \subseteq D_2)$ with pairwise disjoint sides $(X_\alpha \cap X_\beta = Y_\alpha \cap Y_\beta = \emptyset,\ \ \alpha \neq \beta)$. We now prove the analogous result for compact metrizable spaces.

<u>Lemma</u> 1. Let $E \subseteq K_1 \times K_2$ be a non-triangular closed subset. Then there exists a compact metrizable space Q and continuous mappings $\alpha_j : K_j \longrightarrow Q$ $(j = 1,2)$ such that $E = \{(x_1,x_2)\ ;\ \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\}$.

Proof. We define an equivalence relation $\sim$ on $K_1 \cup K_2$ (the disjoint union of K_1 and K_2) as follows :

If $x \in K_1$, $y \in K_2$ then $x \sim y$ if and only if $(x,y) \in E$.

If $(x_1,x_2) \in K_1$ then $x_1 \sim x_2$ if and only if either $x_1 = x_2$ or there exists $y \in K_2$ such that (x_1,y) and $(x_2,y) \in E$.

If $y_1,y_2 \in K_2$ then $y_1 \sim y_2$ if and only if either $y_1 = y_2$ or there exists $x \in K_1$ such that (x,y_1) and $(x,y_2) \in E$.

The relation $\sim$ is clearly reflexive and symmetric. We show that $\sim$ is transitive. There are essentially 3 cases.

A) $x_1, x_2, x_3 \in K_1$ (identical argument for K_2) and $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$. There exist $y_1, y_2 \in K_2$ such that $(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_2) \in E$. If $y_1 = y_2$ then $x_1 \sim x_3$. If $y_1 \neq y_2$ then $(x_3,y_1) \in E$ since already $(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_2) \in E$ and E is non-triangular. Hence $x_1 \sim x_3$.

B) $y \in K_2$, $x_1, x_2 \in K_1$ (or vice-versa) and $y \sim x_1$, $x_1 \sim x_2$. There exists $y_0 \in K_2$ such that $(x_1,y_0),(x_2,y_0) \in E$. If $y = y_0$ the clearly $y \sim x_2$. If $y \neq y_0$ then $(x_2,y) \in E$ since already $(x_2,y_0),(x_1,y),(x_1,y_0) \in E$. Hence $x_2 \sim y$.

C) $y \in K_2$, $x_1, x_2 \in K_1$ (or vice-versa) and $x_1 \sim y$, $y \sim x_2$. Clearly $(x_1,y),(x_2,y) \in E$. Hence $x_1 \sim x_2$.

Next we show that the $\sim$-saturation of any closed subset of $K_1 \cup K_2$ is closed. Let π_j denote the projection of $K_1 \times K_2$ onto K_j for $j = 1, 2$. For $L \subseteq K_1$ we define

$$\sigma_1(L) = \pi_2((L \times K_2) \cap E) \subseteq K_2$$

and σ_2 is defined similarly. If L is closed in K_1 then we observe that $\sigma_1(L)$ is closed in K_2. Let M be an arbitrary closed subset of $K_1 \cup K_2$. Then $M = M_1 \cup M_2$ where $M_j \subseteq K_j$ $(j = 1,2)$ is closed. We observe that

$$\text{saturation } (M) = M_1 \cup M_2 \cup \sigma_1(M_1) \cup \sigma_2(M_2) \cup \sigma_2 \circ \sigma_1(M_1) \cup \sigma_1 \circ \sigma_2(M_2)$$

is closed. Let $g : K_1 \cup K_2 \longrightarrow Q$ be the canonical projection associated with $\sim$. Since $\sim$-saturation preserves closedness and $K_1 \cup K_2$ is a normal space we see that the projection g is hausdorff and that Q is a compact metrizable space in the quotient topology. It is an immediate consequence of the definition of $\sim$ that

$E = \{(x_1,x_2) \; ; \; \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\}$ where $\alpha_j = g|_{K_j}$ $(j = 1,2)$.

If we denote $Q_j = \alpha_j(K_j)$ $(j = 1,2)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$, $P = Q_1 \cap Q_2$ then we have $E = (\alpha_1 \times \alpha_2)^{-1}(\Delta)$ where Δ denotes the diagonal of $P \times P$ considered as a subset of $Q_1 \times Q_2$.

Now let us explain how a non-triangular set E satisfies the conditions 2) and 3). Since Q is a compact metrizable space it can be embedded in T_∞ the torus of countable infinite dimension. We consider the mapping $\rho : K_1 \times K_2 \longrightarrow T_\infty$ given by

$$\rho(x_1,x_2) = \alpha_1(x_2) - \alpha_2(x_2)$$

where the subtraction takes place relative to the group structure of T_∞. There exist open sets $\sum_n \subseteq T_\infty$ such that $0 \in \sum_n$, $\sum_{n+1} \subseteq \sum_n$ for $n = 1, 2, \dots$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_n} = \{0\}$ and also functions $v_n \in A(T_\infty)$ such that $1 - v_n \in I_o(\{0\})$ $(n = 1, 2, \dots)$, $v_n(x) = 0$ for all $x \notin \sum_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ and $\|v_n\|_A \leqslant 1 + \varepsilon_n$ where ε_n is a sequence of positive numbers decreasing to zero. We define $\Omega_n = \rho^{-1}(\sum_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ open sets in $K_1 \times K_2$ satisfying condition 2) with respect to E. We also set $u_n = v_n \circ \rho (\in C(K_1 \times K_2))$ functions taking the value 1 in a neighbourhood of E and vanishing outside Ω_n $(n = 1, 2, \dots)$. To show that 3) is satisfied it remains to show that the mapping

$$v \longrightarrow v_o \rho$$

is norm decreasing between the spaces $A(T_\infty)$ and $V(K_1 \times K_2)$. Let $\chi \in \hat{T}_\infty$. We observe that

$$\chi_o \rho = (\chi_o \alpha_1) \otimes (\bar{\chi}_o \alpha_2)$$

where $\chi_o\alpha_1$ and $\overline{\chi}_o\alpha_2$ are functions of unit modulus on K_1, K_2 respectively. Extending by linearity and continuity we have the result.

Theorem 1. Every non-triangular set satisfies conditions 2) and 3) of the introduction with respect to the tensor algebra.

Suppose now that G is a compact abelian group and that K_1, K_2 are two disjoint compact metrizable subsets of G such that $K_1 \cup K_2$ is a kronecker set. It is well known (Varopoulos [1] 4 § 2) that the restriction algebra $A(K_1 + K_2)$ can be identified isometrically with $V(K_1 \times K_2)$ by means of the dual of the multiplication mapping $\sigma : K_1 \times K_2 \longrightarrow K_1 + K_2$. Let E be a closed subset of $K_1 \times K_2$ and let $\tilde{E} = \sigma(E)$ be the corresponding set in $K_1 + K_2$.

Theorem 2. The set E is non-triangular if and only if $\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H)$ for some $g \in G$ and some (discrete) subgroup H of G.

Proof. Suppose the latter statement holds. Let $x_1, x_2 \in K_1$, $y_1, y_2 \in K_2$ such that $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ and (x_1, y_1), (x_1, y_2), $(x_2, y_1) \in E$. Since $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$ belong to $\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H)$ we can write $x_1 + y_1 = g + h_1$, $x_1 + y_2 = g + h_2$, $x_2 + y_1 = g + h_3$ where $h_1, h_2, h_3 \in H$. Hence $x_2 + y_2 = g + (h_2 + h_3 - h_1)$ and it follows that $x_2 + y_2 \in (K_1 + K_2) \cap (g + H)$ and that $(x_2, y_2) \in E$. This shows that E is non-triangular.

Suppose now that E is non-triangular and that $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ is the sequence constructed in theorem 1. Regarding u_n as elements of $A(K_1 + K_2)$ we choose extensions $\tilde{\omega}_n$ to $A(G$

such that

$$\|\tilde{\omega}_n\|_{A(G)} \leqslant 1 + 2\varepsilon_n \ , \quad \tilde{\omega}_n|_{K_1+K_2} = u_n \ .$$

On account of the fact that there exists $g \in G$ such that $\tilde{\omega}_n(g) = 1$ the Fourier coefficients of $\tilde{\omega}_n$ are very well aligned ; we shall perturb the $\tilde{\omega}_n$ very slightly so as to make the alignment perfect. Towards this let $\omega \in A(G)$ be such that $\|\omega\|_{A(G)} \leqslant 1 + 2\varepsilon$ and $\omega(0) = 1$. We have $\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\omega}(\chi) = 1$ and $\sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{\omega}(\chi)| \leqslant 1 + 2\varepsilon$. Let $\hat{\lambda}(\chi) = |\hat{\omega}(\chi)|$ and define $\theta_\chi = \arg[\hat{\omega}(\chi)]$. Then

$$\begin{aligned}\|\lambda - \omega\|_{A(G)} &\leqslant 2^{1/2} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\lambda}(\chi)(1 - \cos \theta_\chi)^{1/2} \\ &\leqslant 2^{1/2}\Big(\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\lambda}(\chi)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\lambda}(\chi)(1 - \cos \theta_\chi)\Big)^{1/2} \\ &\leqslant 2\varepsilon^{1/2}(1 + 2\varepsilon)^{1/2}\end{aligned}$$

Let $\omega_n(x) = \tilde{\omega}_n(x + g)$ and define λ_n by the method indicated above. We can regard $\hat{\lambda}_n$ as belonging to $M^+([G_d]^\wedge)$ with $\|\hat{\lambda}_n\|_M \leqslant 1 + 2\varepsilon_n + 2\varepsilon_n^{1/2}(1 + 2\varepsilon_n)^{1/2}$ which bound decreases to 1 as $n \longrightarrow \infty$. By the weak compactness of the unit ball of $M([G_d]^\wedge)$ the sequence $\{\hat{\lambda}_n\}_{n=1}^\infty$ has a weak limit point $\hat{\lambda} \in M^+([G_d]^\wedge)$ such that $\|\hat{\lambda}\|_M \leqslant 1$. Since $\|\omega_n - \lambda_n\|_{A(G)} \leqslant 2\varepsilon_n^{1/2}(1 + 2\varepsilon_n)^{1/2}$ tends to zero as $n \longrightarrow \infty$ we see that $\hat{\lambda}$ is also a weak limit point of the sequence $\{\hat{\omega}_n\}_{n=1}^\infty$. The Fourier transform λ of $\hat{\lambda}$ can be identified with a bounded function on G_d. We claim that $H = \{h \ ; \ h \in G \ , \ \lambda(h) = 1\}$ is a discrete subgroup of G on account of the implications

$$\lambda(h) = 1 \Longleftrightarrow \int_{[G_d]^\wedge} \langle h , \chi \rangle \, d\hat{\lambda}(\chi) = 1 \Longleftrightarrow \langle h , \chi \rangle = 1 \quad \hat{\lambda} - \text{a.e.}$$

But $\lambda(k)$ is a limit point of $\{\omega_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ and hence also of $\{u_n(g + k)\}_{n=1}^{\infty}$. Given that $g + k \in K_1 + K_2$ we shall have that $g + k \in E$ if and only if $k \in H$. Hence $\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H)$. This completes the proof.

Corollary. The conditions 2) and 3) characterize non-triangular sets.

In the remainder of the paper we discuss condition 1) that is the synthesis of non-triangular sets. We denote $BM(K_1 \times K_2) = [V(K_1 \times K_2)]'$ the dual space of $V(K_1 \times K_2)$ whose elements are called bimeasures. For E a closed subset of $K_1 \times K_2$ we define the space $BM(E)$ of bimeasures supported on E as the annihilator $[I_0(E)]^\circ$ of the ideal $I_0(E)$. The set E has the unit bounded synthesis property if for every $S \in BM(E)$ there exists a sequence $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\mu_n \in M(E) \qquad \|\mu_n\|_{BM} \leqslant \|S\|_{BM} \qquad (n \geqslant 1)$$

with $\mu_n \longrightarrow S$ for the weak topology $\sigma(BM , V)$. Such a set is evidently a set of synthesis. We aim to show that non-triangular sets have the unit bounded synthesis property. We shall need the following standard lemma.

Lemma 2. Let L_1 be closed in K_1 and E be closed in $L_1 \times K_2$. The two spaces $BM_{L_1 \times K_2}(E)$ and $BM_{K_1 \times K_2}(E)$ of bimeasures supported on E defined with reference to the two tensor algebras $V(L_1 \times K_2)$ and $V(K_1 \times K_2)$ are isometrically identified and the two corresponding weak topologies on them coincide.

We start by considering those non-triangular sets for which the projection $\alpha_2 : K_2 \longrightarrow Q_2$ is identical. This is the case in which each ordinate $\{k_1\} \times K_2$ $(k_1 \in K_1)$ cuts the set E in at most one point. Such a non-triangular set will be called a graph.

Theorem 3. For every graph E the inclusion $M(E) \subsetneq BM(E)$ is an isometric identification.

Proof. We embed K_2 into a compact abelian metrizable group G. We denote $K_1' = \alpha_1^{-1}(Q_1 \cap Q_2)$. Since $E \subseteq K_1' \times K_2$ and by lemma 2 it suffices to prove the result with respect to the algebra $V(K_1' \times G)$. The set E is given by

$$E = \text{graph}(\alpha) = \{(k_1 , \alpha(k_1)) ; k_1 \in K_1'\}$$

where $\alpha : K_1' \longrightarrow G$ is the restriction of α_1 to K_1'. We shall need the following mappings :

$$\pi : K_1' \times G \longrightarrow K_1' \qquad \pi(k , g) = k$$

$$i : K_1' \longrightarrow E \qquad i(k) = (k , \alpha(k))$$

$$\sigma : K_1' \times G \longrightarrow G \qquad \sigma(k,g) = g - \alpha(k)$$

where $-$ is taken in the group G. The significance of σ is that the dual mapping

$$\sigma^* : A(G) \longrightarrow V(K_1' \times G)$$

is norm decreasing. By extension by linearity and continuity it suffices to check this on an arbitrary character $\chi \in \hat{G}$.

$$[\sigma^*(\chi)](k,g) = \chi(g - \alpha(k)) = \chi(g) \cdot \overline{\chi_o \alpha(k)} = [\overline{\chi_o \alpha} \otimes \chi](k,g)$$

For an arbitrary $S \in BM(E)$ we have $\check{\pi}(S) \in M(K_1')$ and $\mu = \check{i}_o \check{\pi}(S) \in M(E)$ where $\check{\pi}$ and

$\check{i}$ are the norm decreasing bidual mappings of π and i.

$$\check{\pi} : BM(K_1' \times G) \longrightarrow M(K_1') \quad , \quad \check{i} : M(K_1') \longrightarrow M(E).$$

It suffices to show that $S = \mu$. We observe first that $\check{\pi}(S) = \check{\pi}(\mu)$ since $\pi_o i = 1_{K_1'}$. Let $f \in C(K_1')$ and $\chi \in \hat{G}$ be arbitrary elements. We have

$$[f \otimes \chi - (f(\chi_o\alpha) \otimes 1_G)](k,g) = f(k)[\chi(g) - \chi_o\alpha(k)]$$

$$= f(k).\ \chi_o\alpha(k).[\chi(g - \alpha(k)) - 1]$$

$$= [(f(\chi_o\alpha) \otimes 1_G).(\sigma^*(\chi - 1_G))](k,g).$$

Now $\chi - 1_G$ vanishes on $\{0_G\}$ a set of synthesis for $A(G)$. Hence we can find functions $\varphi_n \in A(G)$ vanishing on a neighbourhood of 0_G and with $\varphi_n \longrightarrow \chi - 1_G$ in $A(G)$. The functions $\sigma^*(\varphi_n)$ vanish on a neighbourhood of E and tend to $\sigma^*(\chi - 1_G)$ in $V(K_1' \times G)$. Hence

$$\langle S - \mu, [(f.(\chi_o\alpha) \otimes 1_G).(\sigma^*(\chi - 1_G))]\rangle = 0.$$

Also we have

$$\langle S - \mu, (f.(\chi_o\alpha) \otimes 1_G)\rangle = \langle \check{\pi}(S - \mu), f.(\chi_o\alpha)\rangle = 0.$$

Therefore $\langle S - \mu, f \otimes \chi \rangle = 0$. Extending by linearity and continuity and using the fact that trigonometric polynomials are uniformly dense in $C(G)$ we see that $S = \mu$.

Let K be a compact metrizable space. We shall denote $\check{K}$ the space of continuous mappings of K into T. $\check{K}$ is a group under pointwise multiplication on K and with the discrete topology. The dual group of $\check{K}$ is denoted K^f. There is a natural topological embedding i_K of K in K^f. A continuous surjection $\alpha : K \longrightarrow Q$ between compact metrizable spaces K and Q defines a dual mapping $\alpha^* : \check{Q} \longrightarrow \check{K}$ an injective group homomorphism and a bidual mapping $\alpha^f : K^f \longrightarrow Q^f$ a continuous surjective group homomorphism with the property $\alpha^f{}_o i_K = i_{Qo}\alpha$.

Lemma 3. Let $\alpha : K \longrightarrow Q$ be a continuous surjection between compact metrizable spaces K and Q. There exists $\pi : G \longrightarrow H$ a continuous surjective group homomorphism between compact abelian metrizable groups G and H and embeddings $\varepsilon_K : K \longrightarrow G$, $\varepsilon_Q : Q \longrightarrow H$ such that $\pi_o\varepsilon_K = \varepsilon_{Qo}\alpha$.

Proof. There exists a countable subset B of $\check{K}$ which separates the points of K. To see this we embed K in T_∞ and project T_∞ onto its coordinate spaces. Let A be a similar subset of $\check{Q}$. We define the countable groups $\hat{H}$ and $\hat{G}$ to be the groups generated by A and $A \cup B$ respectively in $\check{K}$. The inclusions $\hat{H} \subset \check{Q}$, $\hat{G} \subset \check{K}$ and $\hat{H} \subset \hat{G}$ dualize to continuous surjective group homomorphisms $p_Q : Q^f \longrightarrow H$, $p_K : K^f \longrightarrow G$ and $\pi : G \longrightarrow H$ respectively such that $\pi_o p_K = p_{Qo}\alpha^f$ where G and H are compact abelian metrizable groups. The continuous mappings $\varepsilon_K = p_{Ko}i_K : K \longrightarrow G$ and $\varepsilon_Q = p_{Qo}i_Q : Q \longrightarrow H$ are embeddings since $\hat{G}$ and $\hat{H}$ separate the points of K and Q respectively. Evidently $\pi_o\varepsilon_K = \varepsilon_{Qo}\alpha$. This completes the proof.

In the situation of lemma 3 we define $\Lambda = \pi^{-1}(0_H)$ a closed subgroup of G and $L = \pi^{-1}(Q) = K + \Lambda$ a closed subset of G. When we come to apply lemma 3 we shall regularize on K by the action of Λ. To compensate for the fact that K is not Λ-stable we shall need a well behaved borel mapping $\beta : L \longrightarrow K$.

Since G is compact metrizable we may choose a translation invariant metric d on G of total distance 1 giving the topology of G.

Let $I = [0 , 1]$ be the unit interval and let X be a closed subspace of $L \times I$ such that the coordinate projection $X \longrightarrow L$ is onto. We define the mapping $\theta : L \longrightarrow I$ by

$$\theta(\ell) = \inf \{t \, ; \, (\ell , t) \in X\}.$$

We denote

$$X' = \mathrm{graph}(\theta) = \{(\ell , \theta(\ell)) \, ; \quad \ell \in L\}$$

the unique subset of X with the properties :

B) $(\ell , t_1) \in X \Longrightarrow \exists\, t_2 \in I$ such that $(\ell , t_2) \in X'$.

C) $(\ell , t_1) , (\ell , t_2) \in X' \Longrightarrow t_1 = t_2$

D) $(\ell , t_1) \in X' , (\ell , t_2) \in X \Longrightarrow t_1 \leqslant t_2$

<u>Lemma</u> 4. In addition we have

A) X' is a G_δ (intersection of a sequence of open sets).

Proof. The mapping θ is lower semicontinuous and therefore has a G_δ graph. We leave the details to the reader.

<u>Lemma</u> 5. There exists a borel mapping $\beta : L \longrightarrow K$ such that :

E) $\alpha_o \beta(\ell) = \pi(\ell) \qquad \forall \ell \in L.$

F) $k \in K, \ \ell \in L, \ \alpha(k) = \pi(\ell) \Longrightarrow d(\ell , \beta(\ell)) \leqslant d(\ell , k).$

Proof. We consider the continuous mapping

$$\gamma : L \times K \longrightarrow L \times I$$

given by $\gamma(\ell , k) = (\ell , d(k , \ell))$ and the closed subset $Y = \{(\ell , k) ; \ \ell \in L , k \in K , \alpha(k) = \pi(\ell)\}$ of $L \times K$. We set $X = \gamma(Y)$ a closed subset of $L \times I$ and denote by X' the subset of X in lemma 4. The subset $Y' = Y \cap \gamma^{-1}(X')$ of $L \times K$ has the following properties :

A') Y' is G_δ .

B') For all $\ell \in L \ \exists k \in K$ such that $(\ell , k) \in Y'$.

D') $(\ell , k_1) \in Y' , (\ell , k_2) \in Y \Longrightarrow d(\ell , k_1) \leqslant d(\ell , k_2)$.

E') $(\ell , k) \in Y' \Longrightarrow \pi(\ell) = \alpha(k)$.

Let $p_L : Y' \longrightarrow L$ and $p_K : Y' \longrightarrow K$ be the continuous mappings defined by the inclusion of Y' into $L \times K$ followed by projection on the coordinate spaces. On account of B') p_L is onto. On account of A') and Bourbaki [2] [illegible] is an "espace polonais" The projection $p_L : Y' \longrightarrow L$ satisfies the conditions [illegible]e Borel section theorem (Bourbaki [2]). It follows there exists a borel mapping $\bar\beta : L \longrightarrow Y'$ which is injective and satisfies $p_L \circ \bar\beta = 1_L$. We set $\beta = p_K \circ \bar\beta : K \longrightarrow L$ a borel mapping which satisfies E) on account of E') and F) on account of D'). This completes the proof.

<u>Lemma</u> 6. Let $\beta : L \longrightarrow K_2$ be borel. Then the bidual mapping

$$(1_{K_1} \times \beta)^{\vee} : M(K_1 \times L) \longrightarrow M(K_1 \times K_2)$$

is norm decreasing for the bimeasure norm.

Proof. Let $\mu \in M(K_1 \times L)$ with $\|\mu\|_{BM} \leqslant 1$ and $f \in C(K_1)$ with $\|f\|_\infty \leqslant 1$ be fixed.

The mapping

$$g \longrightarrow \langle \mu , f \otimes g \rangle$$

is norm decreasing and linear form $C(L)$ to $\mathbb{C}$. Hence there exists a measure $\vartheta \in M(L)$ with $\|\vartheta\|_M \leqslant 1$ such that

(*) $$\langle \mu , f \otimes g \rangle = \langle \vartheta , g \rangle \qquad \forall g \in C(L).$$

It follows that (*) is true for every bounded borel function g. Let $h \in C(K_2)$ with $\|h\|_\infty \leqslant 1$. Then

$$|\langle (1_{K_1} \times \beta)^{\vee}(\mu) , f \otimes h \rangle| = |\langle \mu , f \otimes h_o\beta \rangle| = |\langle \vartheta , h_o\beta \rangle| \leqslant 1.$$

This gives the result.

Let $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of positive reals decreasing to zero fixed for the remainder of the paper. In the situation of lemma 5 we define

$$U_n = \{\lambda \ ; \ d(0_G , \lambda) \leqslant \varepsilon_n , \quad \lambda \in \Lambda\}$$

and also $L_n = K + U_n \subseteq G$. We denote by β_n the borel mapping $\beta_n : L_n \longrightarrow K$ obtained by restricting the β of lemma 5. On account of F) we see

$$d(\ell , \beta_n(\ell)) \leqslant \varepsilon_n \qquad \forall \ell \in L_n .$$

<u>Lemma</u> 7. Let μ_n be a sequence of measures with $\mu_n \in M(L_n)$, $\|\mu_n\|_M \leqslant 1$ and $\mu_n \longrightarrow \mu$ weakly where $\mu \in M(K)$. Then $\check{\beta}_n(\mu_n) \longrightarrow \mu$ weakly also.

Proof. Let $f \in C(L)$ with $\|f\|_\infty \leqslant 1$ and $\varepsilon > 0$. There exists n such that

(i) $|\langle \mu - \mu_m , f \rangle| \leqslant \varepsilon/2 \qquad \forall m \geqslant n.$

(ii) $d(\ell_1 , \ell_2) \leqslant \varepsilon_n \Longrightarrow |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leqslant \varepsilon/2.$

For $m \geqslant n$

$$|\langle \mu_m - \check{\beta}_m(\mu_m) \,,\, f \rangle| = |\langle \mu_m \,,\, f - f_o\beta_m \rangle| \leqslant \varepsilon/2 \,.$$

Hence $|\langle \mu - \check{\beta}_m(\mu_m) \,,\, f \rangle| \leqslant \varepsilon$ as required.

<u>Theorem</u> 4. Every non-triangular closed subset $E \subsetneq K_1 \times K_2$ (K_j metrizable) has the unit bounded synthesis property.

Proof. The mappings $\alpha_j : K_j \longrightarrow Q_j$ $(j = 1, 2)$ are given by lemma 1. We apply lemma 3 to the mapping $\alpha_2 : K_2 \longrightarrow Q_2$ and define G, H, L, L_n, β, β_n, U_n and Λ with respect to α_2 as in lemmas 3-7. By lemma 2 it suffices to prove the result with respect to the tensor algebra $V(K_1 \times G)$. We define the closed subset E^* of $K_1 \times G$

$$E^* = \{(k \,,\, g) \;;\; \alpha_1(k) = \pi(g)\}.$$

For $f \in V(K_1 \times G)$ and $\lambda \in \Lambda$ we define the translate f_λ by

$$f_\lambda(k \,,\, g) = f(k \,,\, g + \lambda).$$

Evidently $f_\lambda \longrightarrow f$ in V norm as $\lambda \longrightarrow 0_\Lambda$. For $S \in BM(K_1 \times G)$ we define the translate S_λ by

$$\langle S_\lambda \,,\, f \rangle = \langle S \,,\, f_{-\lambda} \rangle.$$

Since $\|f_\lambda\|_V \leqslant \|f\|_V$ we have $\|S_\lambda\|_{BM} \leqslant \|S\|_{BM}$ and since $f_\lambda \longrightarrow f$ as $\lambda \longrightarrow 0_\Lambda$ we see that $S_\lambda \longrightarrow S$ in $\sigma\,(BM \,,\, V)$ as $\lambda \longrightarrow 0_\Lambda$. We say that $S \in BM(K_1 \times G)$ is invariant if $S_\lambda = S$ for all $\lambda \in \Lambda$. Suppose that S is invariant and is supported on E^*. We act on S by the norm decreasing mapping

$$(1 \times \pi)^\vee : BM(K_1 \times G) \longrightarrow BM(K_1 \times H)$$

and observe that

$$\operatorname{supp}((1 \times \pi)^{\vee}(S)) \subseteq \{(k_1 , \alpha_1(k_1)) \ ; \ k_1 \in K_1 \ , \ \alpha_1(k_1) \in \Omega_2\}$$

where the right hand side is a graph in $K_1 \times H$. By theorem 3 we have that $(1 \times \pi)^{\vee}(S) \in M(K_1 \times H)$ and

$$\|(1 \times \pi)^{\vee}(S)\|_M \leqslant \|S\|_{BM} .$$

Let $f \in V(K_1 \times G)$. Then

$$< S , f > = < S , \int f_\lambda \, d\eta_\Lambda(\lambda) >$$

where η_Λ is the haar measure of Λ. The function $\int f_\lambda \, d\eta_\Lambda(\lambda)$ respects $(1 \times \pi)$ and can be written

$$\int f_\lambda \, d\eta_\Lambda(\lambda) = F_o(1 \times \pi)$$

where $F \in C(K_1 \times H)$ by virtue of the fact that $(1 \times \pi)$ is a closed mapping. Hence

$$|< S , f >| = |< (\pi \times 1)^{\vee}(S) , F >| = \|S\|_{BM}\|F\|_\infty \leqslant \|S\|_{BM}\|f\|_\infty .$$

Since $V(K_1 \times G)$ is dense in $C(K_1 \times G)$ we see that S is a measure and that $\|S\|_M \leqslant \|S\|_{BM}$.

Let $\sum \in BM(E)$. We aim to synthesize $\sum$. Let $\chi \in [\Lambda]^{\wedge}$. We choose an extension $\mathcal{X}$ of χ to G with $\mathcal{X} \in \hat{G}$. We observe that the bimeasure

$$S = (1_{K_1} \otimes \mathcal{X}) \int \sum\nolimits_\lambda \chi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) \in BM(E^*)$$

is invariant. For all $\rho \in \Lambda$ we have

$$\begin{aligned} < S , f_\rho > &= < \sum , \int (1_{K_1} \otimes \mathcal{X}_\lambda) f_{\rho+\lambda} \chi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) > \\ &= < \sum , \int (1_{K_1} \otimes \mathcal{X}_{\rho+\lambda}) f_{\rho+\lambda} \chi(\rho + \lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) > \end{aligned}$$

$$= \langle \Sigma , \int (1_{K_1} \otimes \mathcal{X}_\lambda) f_\lambda \chi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) \rangle$$
$$= \langle S , f \rangle .$$

We denote $\Sigma^{(\varphi)} = \int \Sigma_\lambda \varphi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda)$ for $\varphi \in C(\Lambda)$. We have that $\Sigma^{(\chi)}$ is a measure and $\|\Sigma^{(\chi)}\|_M \leqslant \|\Sigma\|_{BM}$. Hence for $\varphi \in A(\Lambda)$ the two inequalities

$$\|\Sigma^{(\varphi)}\|_{BM} \leqslant \|\varphi\|_{L^1(\Lambda)} \|\Sigma\|_{BM}$$
$$\|\Sigma^{(\varphi)}\|_M \leqslant \|\varphi\|_{A(\Lambda)} \|\Sigma\|_{BM}$$

hold. Let φ_n be a sequence of functions in $A(\Lambda)$ which are positive, such that $\int \varphi_n(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) = 1$ and with $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq U_n$. It is easy to see that

(i) $\|\Sigma^{(\varphi_n)}\|_{BM} \leqslant \|\Sigma\|_{BM}$

(ii) $\Sigma^{(\varphi_n)}$ is a measure

(iii) $\Sigma^{(\varphi_n)} \longrightarrow \Sigma$ in $\sigma(BM , \check{V})$

(iv) $\operatorname{supp}(\Sigma^{(\varphi_n)}) \subseteq (K_1 \times L_n) \cap E^*$.

We define $\vartheta_n = (1_{K_1} \times \beta_n)^\vee (\Sigma^{(\varphi_n)}) \in M(K_1 \times K_2)$. By lemma 6 we have

(**) $$\|\vartheta_n\|_{BM} \leqslant \|\Sigma\|_{BM}$$

and by condition E) on β we see that

$$\operatorname{supp}(\vartheta_n) \subseteq E.$$

We aim to show that $\vartheta_n \longrightarrow \Sigma$ in $\sigma(BM , V)$ and by virtue of (**) it suffices to check the convergence on an arbitrary atom $\psi_1 \otimes \psi_2$, $\psi_1 \in C(K_1)$, $\psi_2 \in C(G)$ with $\|\psi_j\|_\infty \leqslant 1$ $(j = 1 , 2)$. We regard ψ_1 as fixed and let ψ_2 vary. Arguing as in lemma 6 we have measures μ, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ in $M(G)$ bounded in the measure norm by $\|\Sigma\|_{BM}$ and such that

$$\langle\!\langle \Sigma , \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle\!\rangle = \langle \mu , \psi_2 \rangle$$

$$\langle \Sigma^{(\varphi_n)} , \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \mu_n , \psi_2 \rangle$$

$$\langle \nu_n , \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \omega_n , \psi_2 \rangle$$

where $\operatorname{supp}(\mu_n) \subseteq L_n$. By virtue of (iii) $\mu_n \longrightarrow \mu$ weakly and evidently $\omega_n = \check{\beta}_n(\mu_n)$. We conclude from lemma 7 that $\omega_n \longrightarrow \mu$ weakly. Hence

$$\langle \nu_n , \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle \longrightarrow \langle \Sigma , \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle .$$

This completes the proof.

I should like to end by extending my thanks to Dr. Varopoulos for his guidance and suggesting theorem 3, to Mr. J. D. Stegeman for helpful suggestions, to the Faculté des Sciences d'Orsay and University of Warwick for their hospitality and to the S.R.C. for financial support.

REFERENCES

[1] Varopoulos N. Th. : Tensor algebras and Harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967) 51–112

[2] Bourbaki N. : Topologie Générale Ch. 9 (Hermann) § 6.1 and § 6.8.

Séminaire d'Analyse Harmonique
Année 1966-1967

Exposé n° 5

Calcul symbolique dans le centre d'une algèbre de groupe

par Noël Leblanc

Introduction

Il existe une analyse harmonique des groupes non commutatifs qui utilise des méthodes différentes de celles rencontrées en analyse harmonique des groupes abéliens ; en particulier, la théorie de Gelfand n'est pas applicable pour ces groupes. On peut toutefois rechercher les sous-algèbres commutatives d'une algèbre de groupe ; en particulier, le centre de l'algèbre de groupe d'un groupe G est toujours une sous-algèbre commutative de $L^1(G)$, et nous nous proposons de donner ici un résultat de calcul symbolique pour cette sous-algèbre.

Références

Nous exposerons ici un résultat devant paraitre aux Annales de l'Institut Fourier, et nous le démontrerons dans un cas particulier.

Nous serons amené à utiliser certains résultats classiques d'analyse harmonique sur les groupes compacts non commutatifs. On en trouve de nombreuses références dans la littérature et notamment :

R. Godement.- Séminaire Bourbaki, 1957.

S. Helgason.- Differential geometry and symmetric spaces.- Academic Press 1962

L. Loomis.- An introduction to abstract harmonic analysis.- Van Nostrand 1953

L. Pontrjagin.- Topological groups.- Princeton 2nd ed. 1946

A. Weil.- L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.- 2me ed. Hermann 1953

H. Weyl.- The classical groups.- Princeton 2nd ed. 1946

Problème.

Soit G un groupe compact abélien. On sait que

$$\begin{cases} G \text{ fini : toute fonction continue opère dans } \widehat{L^1}(G) \\ G \text{ infini : si } F \text{ opère dans } \widehat{L^1}(G),\ F \text{ est analytique dans un voisinage de l'ori-} \end{cases}$$

gine (Helson et Kahane).

On se propose de voir ce que devient ce résultat pour un groupe G non commutatif. On note $L^1_c(G)$, le centre de l'algèbre de groupe de G, et on obtient.

Théorème.- Si G est un groupe de Lie compact semi simple (i. e. dont le centre est fini), il existe des fonctions continues n't n'opérant pas dans $\widehat{L^1_c}(G)$, mais les fonctions dérivables un nombre suffisant de fois à l'origine opère dans $\widehat{L^1_c}(G)$.

Remarque 1. Si le centre de G est infini, on est dans le cadre du théorème de Helson et Kahane.

L'hypothèse "G groupe de Lie" est également indispensable, comme on peut s'en convaincre en étudiant le groupe $[SO(3)]^{\infty}$: les fonctions qui opèrent dans $\widehat{L_c^1}\{|SO(3)|^{\infty}\}$ sont analytiques dans un voisinage de l'origine.

Remarque 2. Le centre de l'algèbre de groupe de G est formé des fonctions f telles que, $\forall g \in L^1(G)$,

$$\int_G g(y^{-1}x)f(y)dy = \int_G f(y^{-1}x)g(y)dy.$$

Si G est un groupe unimodulaire, cette condition s'écrit

$$\int_G g(y)\left[f(y^{-1}x) - f(xy^{-1})\right]dy = 0$$

Alors, $f(xy) = f(yx)$ presque partout

$f(y) = f(x^{-1}yx)$ presque partout.

Si G n'est pas compact, le centre de l'algèbre de groupe est en général réduit à la fonction nulle, et il est donc légitime de supposer G compact.

Démonstration.

On sait qu'un groupe de Lie semi simple peut se décomposer en un produit de groupes de Lie simple. Cette remarque permettra d'induire le théorème dès que nous l'aurons démontré pour les groupes de Lie simples.

Ceux-ci sont $Su(n+1)$, $Sp(2n)$, $So(2n)$, $So(2n+1)$ (plus 5 groupes exceptionnels).

Remarque 3. D'après la remarque 2, le centre de l'algèbre de groupe d'un groupe de matrices est formé des fonctions qui ne dépendent que des valeurs propres des matrices envisagées. Les fonctions de $L_c^1(G)$, où G est l'un des groupes $SO(n+1)$, $Sp(2n)$, $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, dépendent donc de n paramètres. On dit alors que G est de rang n.

<u>Cas</u> $G = SO(3)$. Nous allons montrer que si $f \in L^1_c(G)$, l'exponentielle de convolution satisfait

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leqslant 20(\|f\|^{7/2}_{L^1} + 1).$$

Le calcul est dans ce cas simplifié du fait que les fonctions de $L^1_c(G)$ ne dépendent que d'un paramètre, et le produit de convolution s'écrit

$$\sin t\ (f * g) = \frac{1}{\pi} \iint_{|x-y| < t < |x+y|} \sin x \sin y\ f(x) g(y) dx\, dy$$

avec $|z| = \operatorname{Arc} \cos (\cos z)$, la mesure de Haar se réduisant à $d\mu = \frac{2}{\pi} \sin^2 x\, dx$, et les caractères à $\omega_n(x) = n \frac{\sin nx}{\sin x}$.

Nous remarquons alors que, si f et g ont un support compact disjoint de 0 et π

$$\sin t |(f * g)(t)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}}{\inf\limits_{\substack{x \in \mathrm{supp}.f \\ y \in \mathrm{supp}.g}} \sin x \sin y}$$

est borné, et $f * g \in L^2(d\mu)$.

Alors, $e^{if} - \delta - if \in L^2(d\mu)$, et l'égalité de Parseval implique même, compte tenu de la formule de Taylor

$$\|e^{if} - \delta - if\|_{L^2} \leqslant \|f * f\|_{L^2} .$$

Si donc f est à support compact disjoint de 0 et π,

$$\|e^{iNf} - \delta\|_{L^1} \leqslant N\|f\|_{L^1} + N^2 \|f * f\|_{L^2}.$$

Nous allons maintenant adapter ce résultat particulier à une fonction quelconque.

Soit $f \in L^1(d\mu)$; il existe α tel que, si ε est fixé,

$$\int_0^{\alpha} |f(x)| \sin x \, dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} |f(x)| \sin x \, dx \leqslant \varepsilon\pi,$$

et N tel que $N\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} < (N+1)\alpha$.

On peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{n=o}^{N} f_n(x) \qquad \text{avec}$$

$$\operatorname{supp} f_n(x) = [n\alpha \, , \, (n+1)\alpha] \cup [\pi - (n+1)\alpha \, , \pi - n\alpha],$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} e^{if} - \delta &= \sum_{p=1}^{N} \Big[\exp(i \sum_{n=o}^{p} f_n) - \exp(i \sum_{n=o}^{p-1} f_n)\Big] + (e^{if_o} - \delta) \\ &= \sum_{p=1}^{N} \Big[\exp(i \sum_{n=o}^{p} f_n) - \exp(i \sum_{n=o}^{p-1} f_n) - if_p * \exp(i \sum_{n=o}^{p-1} f_n)\Big] \\ &+ \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{p-1} if_p * \Big[\exp(i \sum_{n=o}^{q} f_n) - \exp(i \sum_{n=o}^{q-1} f_n)\Big] \\ &+ e^{if_o} - \delta + i\, e^{if_o} * \sum_{p=1}^{N} f_p . \end{aligned}$$

On pose alors

$$F_{pp} = \exp(i \sum_{n=1}^{p} f_n) - \exp(i \sum_{n=1}^{p-1} f_n) - if_p * \exp(i \sum_{n=1}^{p-1} f_n)$$

$$F_{pq} = if_p * \Big[\exp(i \sum_{n=o}^{q} f_n) - \exp(i \sum_{n=o}^{q-1} f_n)\Big],$$

ce qui donne

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leqslant e^{\varepsilon} - 1 + e^{\varepsilon}\|f\|_{L^1} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{p} \|F_{pq}\|_{L^1}.$$

D'après la remarque initiale, $f_p * f_q \in L^2(d\mu)$, et on obtient d'après l'inégalité de Minkowski

$$\|f_p * f_q\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi |f_p(x)f_q(y)| \sin x \sin y \, dx \, dy \sqrt{\int_{|x-y|}^{|x+y|} \frac{2}{\pi}\, dt}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \; \frac{\|f_p\|_{L^1} \, \|f_q\|_{L^1}}{\sin p\alpha \quad \sqrt{\sin q\alpha}} \, .$$

D'après la formule de Taylor

$$\widehat{F}_{pq}(m) = \hat{f}_p(m)(e^{if_q} - 1)^\wedge(m)\left[\exp(i\sum_{n=o}^{q-1} f_n)\right]^\wedge(m)$$

et $$\widehat{F}_{pp}(m) = (e^{if_p} - 1 - if_p)^\wedge(m)\left[\exp(i\sum_{n=o}^{p-1} f_n)\right]^\wedge(m)$$

satisfont l'inégalité $(p = q \quad \text{ou} \quad p \neq q)$

$$|\widehat{F}_{pq}(m)| \leqslant |\hat{f}_p(m)\hat{f}_q(m)|$$

et la formule de Parseval implique

$$\|F_{pq}\|_{L^2} \leqslant \|f_p * f_q\|_{L^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \; \frac{\|f_p\|_{L^1}\|f_q\|_{L^1}}{\sin p\alpha \ \sqrt{\sin q\alpha}} \, .$$

Posons alors $r = \|f\|_{L^1}$ et

$$\Omega_{pq} = [0 \, , \pi] \cap \Big\{ [p\alpha - er(q+1)\alpha \; , \; (p+1)\alpha + er(q+1)\alpha]$$

$$\cup \, [\pi - (p+1)\alpha - er(q+1)\alpha \; , \pi - p\alpha + er(q+1)\alpha] \Big\}$$

puis $F_{pq} = G_{pq} + H_{pq}$ avec

$G_{pq} = 0$ en dehors de Ω_{pq}

$H_{pq} = 0$ sur Ω_{pq}.

L'inégalité de Schwarz implique alors

$$\|G_{pq}\|_{L^1} \leqslant \|F_{pq}\|_{L^2} \cdot \sqrt{\int_{\Omega_{pq}} \frac{2}{\pi} \sin^2 x \, dx} \; .$$

L'intégrale doit être évaluée différemment selon que $er(q+1)$ est inférieur ou supérieur à p. On obtient ~~dans les deux cas~~

$$\|G_{pq}\|_{L^1} \leqslant \sqrt{\frac{64}{\pi} e^3 r^3 \sin q\alpha \sin^2 p\alpha} \; \|F_{pq}\|_{L^2}$$

$$\leqslant 4(er)^{3/2} \|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1} .$$

L'étude du support de $f_p * f_q$ et la formule de Stirling montrent en outre

$$\|H_{pq}\|_{L^1} \leqslant \|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1} .$$

Alors, $\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} + \|f\|^2_{L^1} + 20\|f\|^{7/2}_{L^1}$ ce qui est le résultat annoncé.

<u>Remarque</u> 4.

Pour $G = SO(3)$, l'algèbre commutative que nous venons d'étudier satisfait

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leqslant C(1 + \|f\|^{7/2}).$$

Il existe une autre sous algèbre commutative intéressante de $L^1(G)$, celle des fonctions ne dépendant que de l'angle d'Euler "de mutation" Θ. Dans cette sous algèbre, on obtient par un calcul semblable à celui effectué ici

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leqslant C'(1 + \|f\|^4).$$

Pourtant, si on envisage la sous-algèbre $L(G)$ de $L^1(G)$ des fonctions ne dépendant que de Θ et de la valeur propre α, cette algèbre $L(G)$ est encore commutative, mais c'est une algèbre d'analyticité. On peut s'en rendre compte en remarquant que $L(G)$

contient aussi une sous-algèbre isomorphe à $L^1(T)$, à savoir l'ensemble des fonctions de $L^1(G)$ ne dépendant que de la somme $\varphi + \psi$ des autres angles d'Euler

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{\cos\alpha - \cos\theta}{1 + \cos\theta} .$$

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 68-69

Exposé n° 6

Méthodes combinatoires en analyse harmonique

par J. D. Stegeman

§ 1. Ensembles d'interpolation

Soient Γ_1, Γ_2 et $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ des espaces discrets. Considérons l'algèbre tensorielle $V = V(\Gamma) = C(\Gamma_1) \hat{\otimes} C(\Gamma_2)$, $C(\Gamma_i)$ étant l'algèbre de Banach des fonctions bornées sur Γ_i $(i = 1, 2)$. Les éléments de $V(\Gamma)$ sont les fonctions $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C}$ qui peuvent s'écrire $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \otimes g_i$ avec $f_i \in C(\Gamma_1)$, $g_i \in C(\Gamma_2)$ et $\sum \|f_i\|_\infty \|g_i\|_\infty < \infty$; mais on peut dire aussi que ce sont les fonctions φ qui s'écrivent $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \otimes g_i$ avec $f_i : \Gamma_1 \longrightarrow \{0,1\}$, $g_i : \Gamma_2 \longrightarrow \{0,1\}$, $\alpha_i \in \mathbf{C}$ et $\sum |\alpha_i| < \infty$. [On le voit en deux étapes : en écrivant $f_i = f_{i1} + if_{i2} - f_{i3} - if_{i4}$ et de même pour g_i, on remplace $f_i \otimes g_i$ par une somme de termes $\alpha_{jk} f_{ij} \otimes g_{ik}$ avec les f et g positifs, ensuite en écrivant $f = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} k_t$ (disons que $0 \leqslant f \leqslant 1$) et de même pour g, on obtient le but].

Soit $E \subset \Gamma$. E est <u>ensemble d'interpolation</u> (pour l'algèbre V) si $V(E) = C(E)$, c'est-à-dire si chaque fonction bornée sur E peut être prolongée en une fonction de $V(\Gamma)$. Pour démontrer que E est d'interpolation, il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques k_F $(F \subset E)$ sont dans $V(E)$. De là, en combinant avec les remarques plus haut on obtient que E est d'interpolation si et seulement si pour chaque $F \subset E$ il existe un nombre fini de rectangles $R_1, \dots, R_N$ dans Γ tels que $F = (R_1 \cup \dots \cup R_N) \cap E$.

Si $\Delta \subset \Gamma$, on notera $R(\Delta)$, le rectangle engendré par Δ, l'ensemble $\pi_1 \Delta \times \pi_2 \Delta$, où $\pi_i : \Gamma \longrightarrow \Gamma_i$ est la projection canonique $(i = 1, 2)$.

Soient $a, b \in E$. On dit que $a \underset{E}{\sim} b$, a et b liés dans E, si et seulement si $\mathrm{Card}(R(a,b) \cap E) \geqslant 3$.

Une coloration X de E est une application $X : E \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ telle que $a \underset{E}{\sim} b \Longrightarrow X(a) \neq X(b)$.

Le nombre chromatique $K(E)$ de E est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer E : $K(E) = \inf\{N \mid \exists$ coloration $X : E \longrightarrow \{1, 2, \dots, N\}\}$ (on prend $\inf \emptyset = +\infty$).

Théorème ([2]). $E \subset \Gamma$ est ensemble d'interpolation (pour V) si et seulement si $K(E) < +\infty$.

Démonstration. Soit $K(E) = N < +\infty$. Soit $E = E_1 \cup \dots \cup E_N$ une décomposition chromatique de E (c'est-à-dire $E_i = X^{-1}(i)$ pour une coloration minimale X de E). Soit $F \subset E$. $F = F_1 \cup \dots \cup F_N$ avec $F_i = F \cap E_i$. On vérifie facilement que $(R(F_1) \cup \dots \cup R(F_N)) \cap E = F$. Donc E est d'interpolation.

Dans l'autre direction c'est plus compliqué. En utilisant le fait que E est ensemble de Sidon (voir [2]) on peut démontrer (loc. cit.) que $E = E_1 \cup \dots \cup E_p$ où les E_j $(j = 1, \dots, p)$ sont des sections disjointes, c'est à dire que pour chaque E_j

π_1 ou π_2 est injectif. Il existe des rectangles R_{jk} $(j = 1, \ldots, p, k = 1, \ldots, q_j)$, disjoints pour j fixé, tels que $\bigcup_k R_{jk} \cap E = E_j$. Grâce à la structure spéciale des E_j on obtient une coloration avec $\sum q_j$ couleurs si on utilise une couleur différente pour chaque R_{jk}. Ceci achève la démonstration.

Démontrons encore le lemme

<u>Lemme</u>. $K(E) = \sup\{K(F) | F \subset E, \text{Card } F < \infty\}$.

<u>Démonstration</u>. $K(E) \geqslant K(F)$, donc il reste à démontrer que si $K(F) \leqslant N$ pour chaque F fini alors $K(E) \leqslant N$. Or, posons $I = \{1, \ldots, N\}$ et $I^E = \{X : E \longrightarrow I\}$ avec la topologie du produit. Pour chaque $F \subset E$ fini, soit $\Phi_F = \{X \in I^E | X|_F$ est une coloration de $F\}$. $\Phi_F \neq \emptyset$ et Φ_F est fermé. Aussi $\Phi_{F_1} \cap \ldots \cap \Phi_{F_p} \supset \Phi_{F_1 \cup \ldots \cup F_p} \neq \emptyset$. I^E étant compact, il en découle que $\bigcap_F \Phi_F \neq \emptyset$, et il est clair qu'un X qui est coloration pour chaque F, l'est aussi pour E.

§ 2. <u>Bisections</u>

Le paragraphe précédent donne une motivation pour étudier un problème tout à fait combinatoire : prendre un ensemble $E \subset \Gamma$ et étudier son nombre chromatique. Le lemme, là, indique qu'il ne s'agit pas seulement de décider si $K(E)$ est fini ou non, mais, en particulier pour les E finis, d'obtenir des évaluations plus précises de $K(E)$.

Considérons le cas spécial où E est une bisection [1]. Rappelons que $E \subset \Gamma$ est une bisection s'il existe une décomposition $E = E_1 \cup E_2$ $(E_1 \cap E_2 = \emptyset)$ telle que π_i

est injectif sur E_i $(i = 1, 2)$. Pour chaque $a \in E_1$ il existe au plus un élément dans E_2, notons-le da, tel que $\pi_2 a = \pi_2\, da$. On a donc une application $d : E_1 \longrightarrow E_2$, définie sur une partie de E_1. De même on a $d : E_2 \longrightarrow E_1$ telle que $\pi_1 b = \pi_1 db$ chaque fois que $b \in E_2$ et qu'il existe un tel $db \in E_1$. Deux points a et b de E sont liés si et seulement si une (au moins) des relations suivantes est satisfaite :

$$(*)\quad \begin{cases} \text{(i)}\quad d^2a = b\,, & \text{(ii)}\quad d^2b = a \\ \text{(iii)}\ d^2a = db,\ da \neq b & \text{(iv)}\quad d^2b = da,\quad db \neq a. \end{cases}$$

Les cas typiques sont resp.

$$\begin{array}{c} x\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{0}\ x \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c} 0\ x\ \underline{x} \\ \underline{0} \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c} x \\ 0\ \ \underline{x} \\ \underline{0} \end{array}\ .$$

(x = élément de E_1, 0 = élément de E_2 ; a et b sont soulignés).

Disons que a et b sont <u>connectés</u> dans E s'il existe $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ tels que $d^m a = d^n b$. C'est une relation d'équivalence et il suit de $(*)$ qu'on peut colore les classes d'équivalence de E indépendamment. Supposons alors désormais que la bisection E soit connexe (tous ses points connectés).

Soit $c \in E$ tel que pour un $N > 0$ (nécessairement pair) on a $d^N c = c$, $d^n c \neq c$ $(1 \leqslant n < N)$. On dit alors que c est <u>cyclique</u> d'ordre N. $S = \{dc, d^2c, \ldots, d^N c = c\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ est l'ensemble de tous les éléments cycliques de E. Car soit $d^M b = b$ pour un $b \in E$. On a aussi $d^m b = d^n c$ (certains m et n ; E est connexe), alors $b = d^{Mm} b = d^{Mm-m+n} c \in S$.

On dit que la bisection connexe E est <u>cyclique</u> d'ordre N si elle contient un cycle S avec N éléments, sinon E est <u>acyclique</u>. L'<u>arbre</u> T_n est l'ensemble des éléments $b \in E \setminus S$ qui "entrent dans S à la place c_n", c'est-à-dire pour lesquels il existe $h = h(b)$ (la <u>hauteur</u> de b) tel que $d^h b = c_n$, $d^{h-1} b \notin S$. L'indice n de l'arbre T_n est déterminé modulo N.

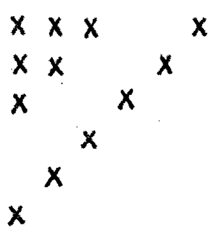
Si E (connexe) est acyclique on définit une coloration $X : E \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ en prenant $a \in E$ quelconque et en définissant $X(b) = (n - m) \bmod 3$ si $d^n b = d^m a$. X est bien défini (soit aussi $d^{n'} b = d^{m'} a$, alors $d^{m+n'} a = d^{n+n'} b = d^{n+m'} a$, donc $m + n' = n + m'$ car E est acyclique). Les relations $(*)$ montrent que X est une coloration. La même méthode s'applique encore si E est cyclique avec ordre $N \equiv 0(6)$. Si au contraire $N \equiv 2(6)$ ou $N \equiv 4(6)$ ça ne va plus, mais il est clair qu'avec quatre couleurs $\{1, 2, 3, 4\}$ on peut le faire facilement. Donc $K(E) \leq 4$ si E est une bisection. Il faut être plus précis pour démontrer qu'il existe des bisections avec nombre chromatique 4 :

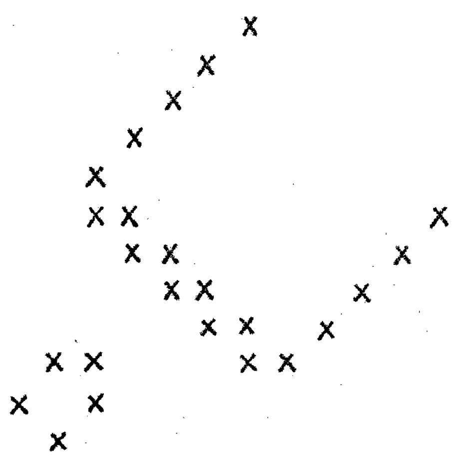
<u>Théorème</u>. Soit E une bisection connexe cyclique avec ordre $N \not\equiv 0(6)$ telle que aucun arbre est vide et qu'il existe deux arbres avec distance impaire (T_n et T_m, $n-m$ impair) qui possèdent un élément d'hauteur 2 et deux éléments d'hauteur 1. Alors $K(E) = 4$.

<u>Démonstration</u>. Supposons que $X : E \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ est une coloration. Il existe un m tel que $X(c_m) = X(c_{m+1})$ ($S = \{c_n\}$ est le cycle de E). Sinon on aurait pour S une coloration comme 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ..., mais ça ne se ferme pas si $N \not\equiv 0(6)$.

Alors on peut supposer que $X(c_1) = X(c_2) = 1$, $X(c_3) = 2$. Soit $b_n \in T_n$ avec $h(b_n) = 1$. $X(b_3) \neq X(c_1) = 1$. Si $X(b_3) = 2$ alors $X(b_4) = 3$ (car $X(b_4) \neq X(c_2)$ et $\neq X(b_3)$), et de même $X(c_4) = 3$, $X(b_5) = X(c_5) = 1$, etc. Toujours on aurait $X(c_n) \neq X(c_{n+1})$, mais on a déjà $X(c_{N+1}) = X(c_{N+2}) = 1$. Donc $X(b_3) = 3$. Il en découle que $X(b_4) = X(c_4) = X(c_3) = 2$. En continuant on trouve que toujours $X(b_{2m}) = X(c_{2m}) = X(c_{2m-1}) \neq X(c_{2m-2})$ et que $X(b_{2m-1}) \neq X(c_{2m-1})$, $X(b_{2m-1}) \neq X(c_{2m-2})$ donc $X(b_{2m-1})$ est la troisième couleur. Prenons maintenant l'arbre spécial avec indice impair, disons T_n. Pour l'élément a_n avec hauteur 2 il n'y a plus de couleur, parce que b'_n, c_n et c_{m-1} occupent les trois couleurs ($b'_n \in T_n$, $h(b'_n) = 1$, $da_n \neq b'_n$). Donc X n'est pas une coloration et le théorème est démontré.

Le théorème nous permet de construire des ensembles avec nombre chromatique 4, par exemple :





§ 3. Les ensembles de type B_M

On peut démontrer ([1], § 8) qu'un ensemble $E \subset \Gamma$ est une bisection si et seulement si pour chaque $\Delta_1 \subset \Gamma_1$, $\Delta_2 \subset \Gamma_2$, Δ_1, Δ_2 finis, on a

$$\operatorname{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E) \leqslant \operatorname{Card} \Delta_1 + \operatorname{Card} \Delta_2$$

et qu'il est acyclique si l'inégalité est toujours stricte (sauf si $\Delta_1 = \Delta_2 = \emptyset$). C'est une définition plus naturelle que celle du § 2, qui se prête aussi à des généralisations. En effet, disons que $E \subset \Gamma$ est un ensemble de type B_M, et écrivons $E \in B_M$, si E satisfait à

$$(**) \qquad \sup_{\substack{\Delta_i \subset \Gamma_i \\ 0 < \operatorname{Card} \Delta_i < \infty}} \operatorname{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E) = \operatorname{Card} \Delta_1 + \operatorname{Card} \Delta_2 + M.$$

Si $M \leqslant -2$, B_M est vide (prendre $\operatorname{Card} \Delta_1 = \operatorname{Card} \Delta_2 = 1$). B_{-1} est la classe des bisections acycliques, B_o la classe des bisections cycliques. On peut démontrer que si $E \in B_M$ alors $K(E) \leqslant 4 + M$, de sorte que tous les ensembles de type B_M $(M < \infty)$ sont d'interpolation. La question se pose d'évaluer la fonction

$$K(M) = \sup \left\{ K(E) \mid E \in B_M \right\}.$$

On peut démontrer que $K(1) = 4$ et $K(2) = 5$. La démonstration du théorème de § 2 est une indication que ce problème sera peut être assez difficile pour M grand. D'autre part, l'ensemble $E = \Gamma_1 \times Z \subset \Gamma$ $(Z \subset \Gamma_2)$ satisfait à

$$K(E) = \operatorname{Card} Z,$$

$$\sup_{\substack{\Delta_i \subset \Gamma_i \\ \Delta_i \text{ finis}}} \frac{\operatorname{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E)}{\operatorname{Card} \Delta_1 + \operatorname{Card} \Delta_2} = \operatorname{Card} Z,$$

ce qui démontre en particulier que pour chaque M il existe $E \in B_M$ avec $K(E) = 2$.

Donnons enfin un exemple d'un ensemble $E \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ("l'ensemble des sept") qui se décompose en deux sections, $E = E_1 \cup E_2$ telles que π_1 est injectif sur E_1 et sur E_2 (mais E n'est pas une bisection), et dont le nombre chromatique est $+\infty$.

En effet, soit $\Gamma_1 = \mathbf{Z}_- \times \mathbf{Z}_-$ et $\Gamma_2 = \mathbf{Z}_-$ où $\mathbf{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$; naturellement $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \cong \mathbf{Z}$. Posons pour $k \geqslant 1$

$$E_1^{(k)} = \{((-j , -k) , -k) \; ; \; j > k\},$$

$$E_2^{(k)} = \{((-j , -k) , -j) \; ; \; j > k\}.$$

Chaque $E^{(k)} = E_1^{(k)} \cup E_2^{(k)}$ forme un sept, et π_1 est injectif sur les $E_i = \bigcup_{k \geqslant 1} E_i^{(k)}$, $i = 1, 2$.

Supposons que $K(E) = N < +\infty$ et soit $X : E \longrightarrow \{1, \dots, N\}$ une coloration de E. Alors il existe un sous-ensemble infini monochrome $F_1^{(1)} \subset E_1^{(1)}$. Il est maintenant facile à voir qu'on peut extraire un sous-ensemble F de E tel que $F_1^{(1)} \subset F$, que $E' = F \setminus E^{(1)}$ est isomorphe à E (dans un sens immédiat) et que chaque point de E' est lié avec un point de $F_1^{(1)}$. Donc nécessairement $\mathrm{Card}(X^{-1}(E')) \leqslant N - 1$, et cela implique que $K(E) = K(E') \leqslant N - 1$. Il résulte de cette contradiction que $K(E) = +\infty$.

Bibliographie

[1] J. D. Stegeman. On Bisections, à paraitre

[2] N. Th. Varopoulos. Tensor algebras over discrete spaces, Journal of Functional Analysis 3 (1969), 321-335.

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-1969

Exposé n° 7

Ensembles d'analyticité dans les Algèbres Tensorielles

par D.L. Salinger

Soient G un groupe abélien compact et $A(G)$ l'algèbre de Banach des séries de Fourier absolument convergentes sur G. Pour un sous-ensemble fermé E de G notons $I(E)$ l'idéal fermé des fonctions de $A(G)$ s'annulant sur E et notons $A(E) = A(G)/I(E)$ l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A(G)$.

Soit R une algèbre de Banach commutative, régulière de fonctions à valeurs complexes à spectre compact. Une fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{C}$ opère sur R quand $\varphi o f \in R$ pour chaque fonction $f \in R$ prenant ses valeurs dans $[-1,1]$. Nous dison que seules les fonctions analytiques opèrent sur R si chaque fonction φ qui opère sur R est prolongeable en fonction analytique dans un voisinage de $[-1,1]$. Seules les fonctions analytiques opèrent sur $A(G)$.

Soit E un sous-ensemble fermé de G. E sera dite d'analyticité si seules les fonctions analytiques opèrent sur $A(E)$. J.P. Kahane et Y. Katznelson [2] ont donné une condition pour qu'un sous-ensemble fermé E de G soit d'analyticité : s'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que pour tout réel positif r il existe une fonction f à valeurs réelles appartenant à $A(E)$ satisfaisant à

$$\|f\|_{A(E)} < r$$

et

$$\|e^{if}\| > e^{\alpha r}$$

alors E est d'analyticité.

En utilisant ce critère, Y. Katznelson et P. Malliavin ont donné des conditions arithmétiques pour que E soit d'analyticité [3]. Ils ont aussi fait [4] une vérification statistique, pour une certaine classe d'ensembles, de la conjecture de la dichotomie (tout sous-ensemble fermé d'un groupe compact est soit de Helson soit d'analyticité).

Nous donnons ici des résultats analogues dans le cadre des algèbres tensorielles. Soient X, Y deux compacts. Notons, comme d'habitude, $V(X \times Y)$ l'algèbre de Banach $\mathbb{C}(X) \hat{\otimes} \mathbb{C}(Y)$. Pour un sous-ensemble fermé E de $X \times Y$ notons $I(E)$ l'idéal fermé de fonctions de $V(X \times Y)$ s'annulant sur E et notons $V(E) = V(X \times Y)/I(E)$ l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $V(X \times Y)$. Seules les fonctions analytiques opèrent sur $V(X \times Y)$. Un sous-ensemble fermé E de $X \times Y$ sera dit <u>d'analyticité</u> si seules les fonctions analytiques opèrent sur $V(E)$.

Remarquons que le critère de Kahane et Katznelson s'applique dans ce cas : il suffit de trouver un groupe compact G et une application biunivoque continue

$\Psi : X \cup Y \to G$ telle que $\Psi(X \cup Y)$ soit un Kronecker. Alors il y a une application biunivoque $\varphi : X \times Y \to X + Y$ telle que $\check{\varphi} : A(X+y) \longrightarrow V(X \times Y)$ soit une isométrie ([8], §4).

Nous considérerons une certaine classe de sous-ensembles de $X \times Y$. Appelons S un <u>carré d'ordre</u> n si S est de la forme $S = X_n \times Y_n$ où X_n et Y_n sont des sous-ensembles de X et Y respectivement, avec card X_n = card $Y_n = n$. Nous disons qu'une partie fermée E de $X \times Y$ <u>contient des carrés arbitrairement grands</u> si E contient un carré d'ordre n pour tout entier positif n.

<u>Proposition</u> : Soient X, Y deux compacts et E un sous-ensemble fermé de $X \times Y$ contenant des carrés arbitrairement grands. Alors E est d'analyticité.

<u>Démonstration</u> : $\mathbb{T}$ désignera le tore. On sait [1] qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour un réel positif quelconque r il existe une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ à valeurs réelles satisfaisant à

$$\|f\|_A < r$$

et

$$\|e^{if}\|_A > e^{\alpha r} .$$

Pour un entier positif quelconque n soit $\mathbb{Z}(n)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité plongé dans $\mathbb{T}$. Notons f_n la restriction de f à $\mathbb{Z}(n)$. Alors $f_n \in A(\mathbb{Z}(n))$ et

$$\|f_n\|_{A(\mathbb{Z}(n))} \leqslant \|f\|_{A(\mathbb{T})} < r .$$

En utilisant la régularisation de Herz (cf. par exemple [6]) on peut montrer qu'il existe un entier positif $n = n(r)$ tel que

$$\|e^{if_n}\|_A > e^{\alpha r} .$$

Utilisons maintenant l'application $M : A(\mathbb{Z}(n)) \to V(\mathbb{Z}(n) \times \mathbb{Z}(n)) = V(S_n)$ donnée par

$$(Mg)(x,y) = g(x+y)$$

pour tout $g \in A(\mathbb{Z}(n))$ tout $x,y \in \mathbb{Z}(n)$. Cette application est une isométrie, donc $h_n = Mf_n \in V(S_n)$ vérifie

$$\|h_n\|_V < r$$

et

$$\|e^{ih_n}\|_V > e^{\alpha r}$$

h_n étant une fonction à valeurs réelles, nous pouvons trouver une fonction $h \in V(E)$ à valeurs réelles satisfaisant aux deux inégalités au-dessus ; donc E est d'analyticité.

Nous obtiendrons une amélioration apparente de ce résultat à l'aide des techniques combinatoires.

<u>Théorème</u> : Soient X,Y deux compacts, E un sous-ensemble fermé de $X \times Y$. Supposons qu'il existe une suite $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de carrés dans $X \times Y$ telle que S_n soit d'ordre n et que pour un nombre infini de carrés,

$$\text{card}(S_n \cap E) > n^{2-\varepsilon_n}$$

où $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors E est d'analyticité.

<u>Démonstration</u> : Le théorème découle de la proposition précédente et du lemme suivant.

<u>Lemme</u> (cf. par exemple [5]) : Soit E un sous-ensemble du produit $X \times Y$ de deux ensembles infinis. Supposons qu'il existe une suite $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de carrés dans $X \times Y$ telle que S_n soit d'ordre n et que pour un nombre infini de carrés

$$\operatorname{card}(S_n \cap E) \geqslant n^{2-\varepsilon_n}$$

où $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors E contient des carrés arbitrairement grands.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que pour tout n

$$\operatorname{card}(S_n \cap E) \geqslant n^{2-\varepsilon_n}$$

et que n^{ε_n} soit un entier.

Soit $S_n = X_n \times Y_n$. Nous considérerons S_n comme matrice, alors <u>rang</u> (respectivement <u>colonne</u>) de S_n notera un ensemble de la forme $X_n \times y$ (respectivement $x \times Y_n$) où $y \in Y_n$ (respectivement $x \in X_n$). Soit $r > 1$ un entier positif et supposons que n_o est un entier tel que $rn^{\varepsilon_n} < n$ pour $n \geqslant n_o$. Pour un tel n nous choisissons un sous-ensemble $S \subset S_n$ composé de rn^{ε_n} rangs de S_n tel que

$$\operatorname{card}(S \cap E) \geqslant rn .$$

Notons $S^{(1)}$ l'ensemble des colonnes de S qui contiennent au moins r points de E. Posons $S^{(2)} = S \setminus S^{(1)}$.

Soit s le nombre de colonnes de $S^{(1)}$, alors

$$\operatorname{card}(S^{(2)} \cap E) \leqslant (n-s)(r-1) ,$$

donc, en posant $rn^{\varepsilon_n} = t$,

$$st + (n-s)(r-1) \geqslant \mathrm{card}(S \cap E)$$
$$\geqslant rn$$

alors

$$st \geqslant n .$$

Dans chaque colonne de S, r points peuvent être rangés de ${}^rC_t$ façons. Alors si $S^{(1)}$ contient plus de $(r-1)^r C_t$ colonnes c'est-à-dire si

$$s > (r-1)^r C_t ,$$

nous obtenons un carré d'ordre r dans $S^{(1)} \cap E$. Mais

$$(r-1)^r C_t < t^r$$
$$= r^r n^{r\varepsilon_n}$$

et

$$s \geqslant n^{1-\varepsilon_n}/r .$$

Donc quand n est suffisamment grand, $S_n \cap E$ contient un carré d'ordre r.

Nous ne savons pas si le lemme ci-dessus est le meilleur possible. Dans le sens contraire T. Kovari, V.T. Sos et P. Turan [5] ont construit un ensemble E ne contenant pas de carrés d'ordre 2 mais tel qu'il existe une suite $\{S_p\}_{p \text{ premier}}$ de carrés avec S_p d'ordre p^2 et

$$\mathrm{card}(S_p \cap E) = p^3 .$$

Par des techniques tout à fait différentes (c'est-à-dire suivant les méthodes de Katznelson et Malliavin [3], [4]) on peut montrer le théorème suivant.

Théorème [7] : Soient X, Y deux compacts; E un sous-ensemble fermé de $X \times Y$. Soit $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de carrés de $X \times Y$ avec S_n d'ordre n. Notons δ_n

la mesure de Dirac en un point $x \in X \times Y$ et notons $\Delta_n = \{\delta_n\}_{x \in S_n}$. Soit θ_n une mesure aléatoire équidistribuée dans Δ_n. Soit $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'entiers positifs et posons

$$\xi_n = \frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{p_n} \theta_{nj}$$

où les θ_{nj} sont des copies de θ_n telles que $\{\theta_{nj}\}_{j=1,\ n=1}^{p_n\ \ \infty}$ est un ensemble indépendant. Posons $E_n = \operatorname{supp} \xi_n$.

Alors si $np_n^{-1} \to 0$ quand $n \to \infty$, l'ensemble $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ est presque sûrement d'analyticité.

Références

[1] H. HELSON, J.P. KAHANE, Y. KATZNELSON, W. RUDIN.- The functions which operate on Fourier transforms. Acta Math 102 (1959) 135-157.

[2] J.P. KAHANE, Y. KATZNELSON.- Contribution à deux problèmes concernant les fonctions de la classe A. Israël J. Math 1 (1963) 110-131.

[3] Y. KATZNELSON, P. MALLIAVIN.- Un critère d'analyticité pour les algèbres de restriction. C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965) 4964-4967.

[4] Y. KATZNELSON, P. MALLIAVIN.- Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restriction. C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) 490-492.

[5] T. KOVARI, V.T. SOS, P. TURAN.- On a problem of K. Zarankiewicz. Colloq. Math. 3 (1954) 50-57.

[6] W. RUDIN.- Fourier Analysis on Groups. p. 168-169, Interscience.

[7] D.L. SALINGER.- Large squares and sets of analyticity. A paraître.

[8] N.Th. VAROPOULOS.- Tensor algebras and harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967) 51-112.

Séminaire d'Analyse Harmonique

Année 1968-69

Exposé n° 8

Semi-groupes de mesures

par J. Faraut

G groupe abélien localement compact

Γ groupe dual

$B(\Gamma)$ espace des transformées de Fourier des mesures bornées sur G.

Les fonctions de $B(\Gamma)$ sont caractérisées par la propriété suivante

Théorème. Soit φ une fonction continue sur Γ, pour que $\varphi = \mathcal{F}\mu$, $\|\mu\| \leqslant A$, il faut et suffit que pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x, \gamma_k)$$

on ait

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(\gamma_k)\right| \leqslant A\|f\|_\infty$$

(Rudin, Fourier analysis on groups, p. 32).

Proposition 1. Soit ψ une fonction continue sur Γ telle que pour tout $t > 0$ $e^{-t\psi} = \mathcal{F}\mu_t$, $\|\mu_t\| \leqslant 1$, alors pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x, \gamma_k) \quad \text{tel que} \quad f(0) = \|f\|_\infty$$

on a

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\gamma_k) \geqslant 0.$$

En effet d'après le théorème précédent

$$\forall t > 0, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-t\psi(\gamma_k)}\right| \leqslant f(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

donc

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k (1 - e^{-t\psi(\gamma_k)}) \geqslant 0$$

et en passant à la limite quand t tend vers 0

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\gamma_k) \geqslant 0$$

Proposition 2. *Supposons G compact, soit ψ une fonction définie sur Γ telle que pour tout polynôme trigonométrique sur G*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x, \gamma_k) \quad \text{tel que} \quad f(0) = \|f\|_\infty$$

on ait

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\gamma_k) \geqslant 0$$

alors, pour tout $t > 0$, $e^{-t\psi} = \mathcal{F}\mu_t$, $\|\mu_t\| \leqslant 1$.

Soit $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G. Pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x, \gamma_k)$$

posons

$$Af(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\gamma_k)(x, \gamma_k).$$

Ceci définit un opérateur (D_A, A) en général non borné de domaine dense dans $C(G)$ (l'espace des polynôme trigonométriques). Soit f un polynôme trigonométrique dont le module est maximum en x_0, et $f(x_0) > 0$, la fonction g définie par $g(x) = f(x + x_0)$ vérifie

$g(0) = \|g\|_\infty$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_o , \gamma_k)(x , \gamma_k)$$

donc, d'après l'hypothèse faite sur la fonction ψ

$$\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k (x_o , \gamma_k) \psi(\gamma_k) \geqslant 0$$

c'est à dire

$$\mathrm{Re}\ Af(x_o) \geqslant 0.$$

L'opérateur (D_A , A) vérifie le principe du maximum du module. En considérant $f(x) = (x, \gamma)$, on obtient $\mathrm{Re}\, \psi(\gamma) \geqslant 0$. Pour tout $z > 0$, $(zI+A)D_A = D_A$. Il en résulte que les opérateurs P_t définis par

$$P_t f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ e^{-t\psi(\gamma_k)}(x , \gamma_k)$$

se prolongent en des contractions sur $C(G)$.

(C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, p. 257, Proposition 2).

Ce qui se traduit par

$$\forall\, t > 0,\quad \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\ e^{-t\psi(\gamma_k)}\right| \leqslant \|f\|_\infty .$$

D'où le résultat en utilisant le théorème.

Proposition 3. Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k x}, \quad \text{vérifiant} \quad f(0) = \|f\|_\infty$$

on ait

$$\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(\alpha_k) \geqslant 0$$

alors, pour tout $t > 0$, $e^{-t\psi} = \mathcal{F}\mu_t$, $\|\mu_t\| \leqslant 1$.

Soit f un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, e^{i\alpha_k x}$$

il existe ξ_{kj}, β_j $(j = 1, \ldots, p)$ tels que

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{p} \xi_{kj} \, \beta_j$$

les nombres β_j sont des réels indépendants sur $\mathbf{Q}$, et les nombres ξ_{kj} des entiers relatifs. Considérons le polynôme trigonométrique g sur T^p

$$g(y_1, \ldots, y_p) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i(\xi_{k1}y_1 + \ldots + \xi_{kp}y_p)}$$

on a

$$f(x) = g(\beta_1 x, \ldots, \beta_p x).$$

Posons

$$\Psi(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = \Psi(\beta_1\gamma_1 + \ldots + \beta_p\gamma_p).$$

Ceci définit une fonction sur $\mathbf{Z}^p$. Soit h un polynôme trigonométrique sur T^p

$$h(x) = \sum_{k} a_{k_1 k_2 \ldots k_p} e^{i(\gamma_{k1}y_1 + \ldots + \gamma_{kp}y_p)} \quad (k = (k_1, \ldots, k_p)).$$

Supposons $g(0) = \|g\|_\infty$ et posons

$$h'(x) = h(\beta_1 x, \ldots, \beta_p x)$$

alors $h'(0) = \|h'\|_\infty$ et par suite de l'hypothèse faite sur ψ

$$\mathrm{Re} \sum_{k} a_{k_1 \ldots k_2} \Psi(\gamma_{k1}\beta_1 + \ldots + \gamma_{kp}\beta_p) \geqslant 0$$

c'est à dire

$$\mathrm{Re} \sum_{k} a_{k_1 \ldots k_2} \Psi(\gamma_{k1}, \ldots, \gamma_{kp}) \geqslant 0.$$

La fonction Ψ vérifie donc les hypothèses de la proposition 2, et pour tout polynôme trigonométrique sur T^p

$$h(x) = \sum_{k} a_{k_1 k_2 \ldots k_p} \, e^{i(\gamma_{k1}y_1 + \ldots + \gamma_{kp}y_p)}$$

$$\left|\sum_k a_{k_1\ldots k_2}\, e^{-t\Psi(\gamma_{k1},\ldots,\gamma_{kp})}\right| \leqslant \|h\|_\infty$$

en particulier pour le polynôme g, et comme

$$\Psi(\xi_{k1},\ldots,\xi_{kp}) = \Psi(\xi_{k1}\beta_1+\ldots+\xi_{kp}\beta_p) = \Psi(\alpha_k)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{-t\psi(\alpha_k)}\right| \leqslant \|g\|_\infty .$$

D'autre part, les nombres β_j étant indépendants, l'application de $\mathbf{R}$ dans T^p

$$x \longrightarrow (\beta_1 x, \ldots, \beta_p x)$$

a une image dense dans T^p, donc $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{-t\psi(\alpha_k)}\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

d'où le résultat en utilisant le théorème.

Remarque : La démonstration de la proposition 3 se généralise sans difficulté au cas $G = R^m$.

Proposition 4. Supposons G compact, où $G = R^m$. Soit ψ une fonction continue sur Γ, les deux propriétés suivantes sont équivalentes

a) Pour tout t réel, $e^{+t\psi}$ appartient à $B(\Gamma)$ et $\|e^{+t\psi}\| \leqslant e^{w|t|}$, $w \geqslant 0$

b) Pour tout polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x\,,\gamma_k) \quad \text{vérifiant} \quad f(0) = \|f\|_\infty$$

on a

$$\left|\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} c_k\,\psi(\gamma_k)\right| \leqslant w f(0).$$

Cette proposition est un corollaire direct des propositions 2 et 3.

Dérivabilité de la fonction de Riemann en certains points

par Hervé Queffélec

d'après Joseph Gerver

I. Introduction. Soit $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$; Riemann avait conjecturé que cette fonction était partout non dérivable, et Hardy avait partiellement confirmé cette conjecture, en montrant par exemple que f n'était pas dérivable aux points de la forme $\xi\pi$, où ξ était irrationnel ; mais Gerver a montré que f était dérivable en certains points, notamment au point π. C'est ce qu'on va montrer.

II. Dérivabilité de f au point π : On va montrer que $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$. Il revient au même de montrer que $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin[n^2(x+\pi)]}{n^2}$ est dérivable en zéro, avec pour dérivée $-\frac{1}{2}$. Or,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin[n^2(x+\pi)]}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\sin(2k+2)^2 x}{(2k+2)^2} - \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)^2 x}{(2k+1)^2} .$$

Tout revient à montrer que

$$g(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \left(\frac{\sin(2k+1)^2 x}{(2k+1)^2} - \frac{\sin(2k+2)^2 x}{(2k+2)^2}\right)$$ a pour dérivée à droite $+\frac{1}{2}$ au point 0.

On utilisera les notations suivantes : n est un entier variable, qui tend vers $+\infty$. On prend $0 < x < \frac{1}{n^{10}}$. On pose, pour $i \geqslant 1$, $S(i) = \frac{\sin(i^2 x)}{i^2}$, car on raisonnera la plupart du temps à x fixé. On a donc à considérer :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[S(2k+1) - S(2k+2)\right].$$

On divise cette expression en 3 parties :

$$\sum_{k=0}^{a-1} \quad \sum_{k=a}^{b-1} \quad \sum_{k=b}^{\infty},$$ où a et b sont les entiers déterminés par

$$a - 1 < \frac{1}{n\sqrt{x}} \leqslant a$$

$$b - 1 < \frac{1}{nx} \leqslant b.$$

On montre que

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} = 0(\frac{x}{n})$

2) $\displaystyle\sum_{k=a}^{b-1} = \frac{x}{2} + 0(\frac{x}{n})$

3) $\displaystyle\sum_{k=b}^{\infty} = 0(\frac{x}{n}).$

1) <u>Valeurs de k inférieures ou égales à a-1</u> :

$k \leqslant a-1 \Longrightarrow 2k+2 \leqslant 2a \leqslant \dfrac{4}{n\sqrt{x}} \Longrightarrow (2k+2)^2 x \leqslant \dfrac{16}{n^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, dès que $n \geqslant 4$. A fortiori, $(2k+1)^2 x \leqslant \frac{\pi}{2}$, si $n \geqslant 5$.

Si $0 < i < j \leqslant a-1$, on a $S(i) \geqslant S(j)$, car $S(i) - S(j)$, comme fonction de x, est nulle en 0, et a à droite de 0 une dérivée $\cos i^2 x - \cos j^2 x$ positive, la fonction cosinus décroissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc,

$$\left|\sum_{k=0}^{a-1} \left[S(2k+1) - S(2k+2)\right]\right| = \sum_{k=0}^{a-1} \left[S(2k+1) - S(2k+2)\right] \leqslant \sum_{k=0}^{a-1} \left[S(2k+1) - S(2k+3)\right]$$

$$= S(1) - S(2a+1) = \sin x - \frac{\sin(2a+1)^2 x}{(2a+1)^2}$$

$$\leqslant x - \frac{\sin(2a+1)^2 x}{(2a+1)^2} \leqslant \frac{(2a+1)^6 x^3}{6(2a+1)^2} \leqslant \frac{3^4}{6} a^4 x^3$$

$$\leqslant \frac{3^4}{6}\,\frac{16}{n^4x^2}x^3 = 0\left(\frac{x}{n^4}\right) = 0\left(\frac{x}{n}\right).$$

(on a utilisé $u - \sin u \leqslant \frac{u^3}{6}$, pour $u > 0$).

2) Valeurs de k comprises entre a et $b-1$: il nous faut d'abord un lemme

$$\boxed{\text{lemme 1 : } |S(i) - 2S(i+1) + S(i+2)| \leqslant 4x^2 + \frac{6x}{i^2} + \frac{6}{i^4}.}$$

On utilise la majoration classique $|S(i) - 2S(i+1) + S(i+2)| \leqslant \max\limits_{i \leqslant t \leqslant i+2} |S''(t)|$,

où $S(t) = \frac{\sin(t^2x)}{t^2}$, x étant considéré comme un paramètre. Il suffit de calculer $S''(t)$:

$S''(t) = -4x^2\sin(t^2x) - 6x\frac{\cos(t^2x)}{t^2} + \frac{6\sin(t^2x)}{t^4}$. Et on majore $|\text{sinus}|$ et $|\text{cosinus}|$ par 1.

Soit maintenant c l'entier déterminé par $c - 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} < c$. Nous avons

$$S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3)) = \frac{1}{2}\left[S(2k+1) - S(2k+2) + S(2k+3)\right]$$

$\Longrightarrow |S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))| \leqslant 2x^2 + \frac{3x}{k^2} + \frac{3}{k^4}$. On va sommer ces inégalités de a à $b-1$, en passant par c.

(Il est évident que $a \ll c \ll b$). Ecrivons symboliquement $|\quad|$ pour $|S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))|$. Nous avons $\sum\limits_{k=a}^{c-1}|\quad| \leqslant c(2x^2 + \frac{3x}{a^2} + \frac{3}{a^4})$. Le second membre est de l'ordre de $n^4\frac{x^2}{\sqrt{x}} = n^4\sqrt{x}\;x$. Or, $n^4\sqrt{x} < \frac{1}{n}$, puisque $0 < x < \frac{1}{n^{10}}$.

Donc : $\sum\limits_{k=a}^{c-1}|\quad| = 0\left(\frac{x}{n}\right)$

$\sum\limits_{k=c}^{b-1}|\quad| \leqslant b(2x^2 + \frac{3x}{c^2} + \frac{3}{c^4})$. Le second membre est de l'ordre de bx^2, c'est à dire précisément de $\frac{x}{n}$.

Donc, $\sum\limits_{k=a}^{b-1}|\quad| = 0\left(\frac{x}{n}\right)$, et $\left|\sum\limits_{k=a}^{b-1}\left[S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))\right]\right| = 0\left(\frac{x}{n}\right)$.

Ou encore :

$$\left|\sum_{k=a}^{b-1}\left[S(2k+1) - S(2k+2)\right] - \frac{1}{2}(S(2a+1) - S(2b+1))\right| = 0(\frac{x}{n}).$$

Or,

$|S(2b+1)| \leqslant \frac{1}{b^2} \leqslant n^2x^2 = 0(\frac{x}{n})$. Et $|S(2a+1) - x| = 0(\frac{x}{n^4}) = 0(\frac{x}{n})$, comme on l'a vu dans l'étude des valeurs de k inférieures ou égales à $a-1$. D'où :

$$\sum_{k=a}^{b-1}\left[S(2k+1) - S(2k+2)\right] = \frac{x}{2} + 0(\frac{x}{n}).$$

3) <u>Valeurs de k supérieures ou égales à</u> b : alors que le groupement $S(2k+1) - S(2k+2)$ était l'essentiel dans le 2), puisqu'il a permis de faire apparaitre la valeur $\frac{1}{2}$ de la dérivée de g, avec l'apparition de $\frac{x}{2}$, il ne sert plus a rien dans cette partie. On va montrer en fait que :

$$\left|\sum_{k=b}^{\infty} S(2k+1)\right| = 0(\frac{x}{n}) \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=b}^{\infty} S(2k+2)\right| = 0(\frac{x}{n}).$$ Les calculs étant parallèles, on fera seulement la démonstration pour $\left|\sum_{k\geqslant b} S(2k+1)\right|$. On utilisera le lemme suivant de van der Corput (Zygmund, Trigonometric Series, tome 1, page 198).

<u>Lemme 2</u> : si f est réelle, deux fois continûment dérivable sur $[\alpha , \beta]$, si $f'' \geqslant \rho > 0$ sur $[\alpha , \beta]$, on a $\left|\sum_{\alpha \leqslant k \leqslant \beta} e^{2i\pi f(k)}\right| \leqslant \left[f'(B) - f'(\alpha)+2\right](A + \frac{4}{\sqrt{\rho}})$, où A est une constante universelle, qui ne dépend pas de la fonction f.

On applique le lemme 2 avec

$$f(k) = \frac{(2k+1)^2 x}{2\pi} \Longrightarrow f''(k) = \frac{8x}{\pi} = \rho = \text{constante}.$$

$$\left|\sum_{\alpha < k < \beta} E^{2i\pi f(k)}\right| = \left|\sum_{\alpha < k < \beta} e^{i(2k+1)^2 x}\right| \leqslant \left|2 + \frac{8x}{\pi}(\beta - \alpha)\right|(A + 4\sqrt{\frac{\pi}{8x}}).$$

On divise les entiers supérieurs ou égaux à b en blocs successifs R_u de j éléments consécutifs, j étant l'entier : $j = \left[\frac{n^2}{\sqrt{x}}\right] + 1$. Ainsi :

$$R_1 = \left\{b\ ,\ b+1,\ \ldots,\ b+j-1\right\} \quad , \quad R_2 = \left\{b+j,\ \ldots,\ b+2j-1\right\},\ \ldots$$

On va montrer que

$$\left|\sum_{K \in R_u} S(2k+1)\right| \leqslant C\,\frac{j}{n^2 t^2},$$

où C est une constante universelle, et où t désigne le plus petit élément de R_u. $R_u = \left\{t,\ t+1,\ \ldots,\ t+j-1\right\}$. Posons

$$U_t = e^{i(2t+1)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leqslant t} e^{i(2k+1)^2 x}$$

$$U_{t+1} = e^{i(2t+1)^2 x} + e^{i(2t+3)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leqslant t+1} e^{i(2k+1)^2 x}$$

$$\vdots$$

$$U_{t+j-1} = e^{i(2t+1)^2 x} + \ldots + e^{i(2t+2j-1)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leqslant t+j-1} e^{i(2k+1)^2 x}.$$

Nous avons :

$$\sum_{k \in R_u} S(2k+1) = \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i(2t+1)^2 x}}{(2t+1)^2} + \frac{e^{i(2t+3)^2 x}}{(2t+3)^2} + \ldots + \frac{e^{i(2t+2j-1)^2 x}}{(2t+2j-1)^2}\right\}$$

$$\sum_{k \in R_u} S(2k+1) = \operatorname{Im}\left\{\frac{U_t}{(2t+1)^2} + \frac{U_{t+1} - U_t}{(2t+3)^2} + \ldots + \frac{U_{t+j-1} - U_{t+j-2}}{(2t+2j-1)^2}\right.$$

Pour $0 \leqslant \ell \leqslant j-1$, on a :

$$|U_{t+\ell}| = \left|\sum_{t-1 < k \leqslant t+\ell} e^{i(2k+1)^2 x}\right| \leqslant \left[2 + \frac{8x}{\ }(\ +1)\right](A + 2\sqrt{\frac{\pi}{x}})$$

$$\leqslant (2 + \frac{8xj}{\pi})(A + 2\sqrt{\frac{\pi}{x}}).$$

Or, $jx \ll 1$, donc le second membre est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. On peut donc écrire (utilisant $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$) :

$$\left|\sum_{k \in R_u} S(2k+1)\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{(2t+1)^2} - \frac{1}{(2t+2j-1)^2} + \frac{1}{(2t+2j-1)^2}\right]$$

$\leqslant \dfrac{C}{t^2\sqrt{x}}$, où C est une constante universelle. Or,

$\dfrac{1}{t^2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{j}{n^2t^2}$, par choix de j. D'où : $\left|\sum_{k\in R_u} S(2k+1)\right| \leqslant \dfrac{C\,j}{n^2t^2}$. C'est ce qu'on voulait montrer.

Or, $t \geqslant b \geqslant \dfrac{1}{nx}$, donc $t \gg j$, donc $t+j \leqslant 2t$, donc

$(t+j)^2 \leqslant 4t^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{4}{(t+j)^2}$, $\Longrightarrow \left|\sum_{k\in R_u} S(2k+1)\right| \leqslant \dfrac{4C}{n^2} \sum_{k\in R_u} \dfrac{1}{k^2}$. D'où :

$\left|\sum_{k\geqslant b} S(2k+1)\right| \leqslant \dfrac{4C}{n^2} \sum_{k\geqslant b} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{8C}{n^2}\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{8C}{n^2}\, nx = 0(\frac{x}{n})$. Même estimation pour $\left|\sum_{k\geqslant b} S(2k+2)\right|$.

Donc :
$$\left|\sum_{k\geqslant b} \left[S(2k+1) - S(2k+2)\right]\right| = 0(\tfrac{x}{n}).$$

On a donc montré qu'il existe une constante universelle D telle que

$\left|g(x) - \frac{x}{2}\right| \leqslant D\,\frac{x}{n}$, pour $0 < x < \dfrac{1}{10^n}$.

Il est alors immédiat que $g'(0)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

III. <u>Généralisations</u>. On a montré le théorème suivant

> <u>Théorème</u> 1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(2k+1)^2x}{(2k+1)^2} - \frac{\sin(2k+2)^2x}{(2k+2)^2}\right]$ est dérivable en 0, avec pour dérivée $+\frac{1}{2}$.

On peut facilement, en adaptant point par point les méthodes employées pour la démonstration du théorème 1, obtenir le

> <u>Théorème</u> 1 <u>bis</u>. Soient μ, ν, λ trois entiers tels que $0 < \mu < \nu \leqslant \lambda$, et τ un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \tau \leqslant -\frac{\pi}{\lambda}$, ou $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}$. Alors
> $$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin\left[(\lambda k+\mu)^2x + \tau\right]}{(\lambda k+\mu)^2} - \frac{\sin\left[(\lambda k+\nu)^2x + \tau\right]}{(\lambda k+\nu)^2}\right]$$
> a une dérivée à droite en zéro, qui vaut $\dfrac{(\nu-\mu)}{\lambda}\cos\tau$.

A partir du théorème 1 bis, on obtient facilement le

<u>Théorème</u> 1 ter. Soient μ, ν, λ trois entiers tels que $0 < \mu < \nu \leqslant \lambda$, et τ un réel quelconque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin[(\lambda k+\mu)^2 x + \tau]}{(\lambda k+\mu)^2} - \frac{\sin[(\lambda k+\nu)^2 x + \tau]}{(\lambda k+\nu)^2} \right]$$ a une dérivée en zéro qui vaut $\frac{(\nu - \mu)}{\lambda} \cos \tau$.

On est alors près à démontrer le théorème essentiel obtenu par Gerver :

<u>Théorème</u> 2. $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ est dérivable au point $\frac{2A+1}{2B+1}\pi$, où A et B sont des entiers, avec la dérivée $-\frac{1}{2}$.

Tout entier n peut s'écrire : $n = (2B+1)k + r$, avec $1 \leqslant r \leqslant 2B+1$, $k \geqslant 0$. La dérivabilité de la fonction f au point considéré équivaut à la dérivabilité de la fonction $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin[n^2(x + \frac{2A+1}{2B+1}\pi)]}{n^2} = h(x)$ au point zéro. On peut écrire :

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[((2B+1)k+r)^2 x + \frac{2A+1}{2B+1}((2B+1)k+r)^2 \pi]}{((2B+1)k+r)^2} \right. .$$

Ou encore, en distinguant les valeurs paires et impaires de k.

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin[(2(2B+1)k+r)^2 x + \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi]}{(2(2B+1)k+r)^2} - \frac{\sin[(2B+1)2k+2B+1 \quad + \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi]}{(2(2B+1)k + 2B+1+r)} \right) \right\}$$

Donc,

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin[(\lambda k+\mu_r)^2 x + \tau_r]}{(\lambda k+\mu)^2} - \frac{\sin[(\lambda k+\nu_r)^2 x + \tau_r]}{(\lambda k+\nu)^2} \right) \right\},$$

avec $\lambda = 2(2B+1)$, $\mu_r = r$, $\nu_r = 2B+1+r$, $\tau_r = \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi$. D'après le théorème 1 ter, h est dérivable en 0, avec pour dérivée :

$$\sum_{r=1}^{2B+1} \frac{\nu_r - \mu_r}{\lambda} \cos \tau_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2B+1} \cos \tau_r .$$

Or, pour $r < 2B+1$, on a $1 \leqslant 2B+1 - r \leqslant 2B+1$; si on groupe les valeurs r et $2B+1-r$, on constate aisément que $\cos \tau_r + \cos \tau_{2B+1-r} = 0$. Donc, dans l'expression de $h'(0)$, il reste seulement :

$$\frac{1}{2} \cos \tau_{2B+1}. \quad \text{Or,} \quad \tau_{2B+1} = \frac{2A+1}{2B+1}(2B+1)^2 \pi = \pi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad \text{donc}$$

$\cos \tau_{2B+1} = -1$, et donc

$$h'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \text{ce qui achève la démonstration du théorème 2.}$$

Bibliographie

[1] Zygmund. Trigonometric series, tome 1, p. 198

[2] Gerver. The differentiability of the Riemann function at certain rationnal multiple of

[3] Hardy. Weierstrass's non-differentiable function. Transactions A.M.S. (1916), pp. 322-323.