UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 224

Suites d'interpolation pour les classes de Bergman de la boule et du polydisque de $\mathbb{C}^n$

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1977

n° 224

Suites d'interpolation pour les classes de Bergman de la boule et du polydisque de $\mathbb{C}^n$

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1977

INTRODUCTION

Soit $\mathbb{D}^n = \{\underline{z} = (z^1,\dots,z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z^i| < 1\}$ le polydisque de $\mathbb{C}^n$ et λ_n la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^n$ normalisée sur $\mathbb{D}^n$. Pour $p > 0$, on définit les espaces de Bergman $A^p(\lambda_n)$ de la manière suivante :

$A^p(\lambda_n)$ est l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}^n$ telles que :

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}^n} |f|^p d\lambda_n < \infty \;;$$

si $\sigma = \{\underline{z}_k, \; k \in \mathbb{N}\}$ est une suite de points de $\mathbb{D}^n$, on définit l'opérateur T_p de $A^p(\lambda_n)$ dans l'espace des suites par :

$$\forall \; f \in A^p(\lambda_n), \; T_p f = \{((1-|\underline{z}_k|^2))^{\frac{2}{p}} f(\underline{z}_k), \; k \in \mathbb{N}\}, \text{où } ((1-|\underline{z}_k|^2)) = \prod_{i=1}^{n} (1-|z_k^i|^2).$$

On dit que σ est <u>d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$ si $T_p(A^p(\lambda_n))$ contient $\ell^p(\mathbb{N})$.

On dit que σ est <u>fortement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$ si, de plus, T_p est borné de $A^p(\lambda_n)$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

On dit que σ possède la <u>propriété d'extension linéaire bornée</u> s'il existe un opérateur linéaire borné de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_n)$ tel que $T_p U_p$ soit l'identité de $\ell^p(\mathbb{N})$.

Enfin on dit que la suite σ est séparée s'il existe un réel positif δ tel que la distance de Gleason [8] de 2 points distincts de σ soit minorée par δ.

L. Carleson [5] a caractérisé les suites d'interpolation $A^\infty(\lambda_1)$; le premier résultat sur les suites d'interpolation $A^p(\lambda_1)$, où p est fini est un contre-exemple dû à D. Amar. Sarroste [1] et montrant qu'il existe une suite fortement d'interpolation $A^2(\lambda_1)$ et qui n'est pas d'interpolation $A^\infty(\lambda_1)$; ce qui souligne la différence avec le cas des suites d'interpolation pour les espaces de Hardy du disque [14].

L'essentiel des idées du présent travail se trouve dans [2].

Le but qu'on se propose est de montrer les résultats suivants, qui sont à rapprocher de ceux de [4] :

THEOREME 1. _Soit_ σ _une suite séparée dans_ $\mathbb{D}^n$; _alors pour tout_ p _positif_, σ _est une réunion finie de suites_ σ_i _fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_n)$; _de plus si_ $p \geqslant 1$, σ_i _possède la propriété d'extension linéaire bornée de_ $\ell^p(\mathbb{N})$ _dans_ $A^p(\lambda_n)$.

Ce résultat est le meilleur possible à cause du théorème suivant établi grâce aux travaux de C. Horowitz [9] sur les zéros des fonctions des classes de Bergman.

THEOREME 2. _Pour tout_ $p > 0$, _il existe deux suites_ σ_1 _et_ σ_2 _fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$ _telles que_ $\sigma_1 \cup \sigma_2$ _soit séparée mais ne soit pas d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$.

On obtient encore un raffinement du théorème de D. Amar. Sarroste.

THEOREME 3. _Pour tout_ p _positif, il existe_ $q > p$ _et une suite_ σ _fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$ _et qui n'est pas d'interpolation_ $A^q(\lambda_1)$.

Grâce à la méthode déjà utilisée dans [1] on démontre des théorèmes analogues aux théorèmes 2 et 3 pour les classes de Hardy du polydisque et de la boule unité $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{C}^n$ si $n \geqslant 2$.

On a aussi les mêmes résultats pour les classes de Bergman de la boule unité $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{C}^n$.

THEOREME 4. _Soit_ σ _une suite séparée dans_ $\mathbb{B}_n$; _alors pour tout_ p _positif_, σ _est une réunion finie de suites_ σ_i _fortement d'interpolation_ $A^p(\mathbb{B}_n)$;

de plus si $p \geqslant 1$, σ_i possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\mathbb{B}_n)$.

Utilisant exactement la même méthode que dans [3] on obtient aussi

THEOREME 5. Soit σ une suite d'interpolation $A^\infty(\mathbb{B}_n)$ (resp. $A^\infty(\mathbb{D}^n)$) alors $\forall p>0$, σ possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\mathbb{B}_n)$ (resp. $A^p(\mathbb{D}^n)$).

Le même théorème, avec les mêmes preuves est valable pour les classes de Hardy de la boule et du polydisque [3] de $\mathbb{C}^n$ généralisant ainsi des théorèmes de H. Shapiro et A.L. Shields [14] et Kabaila [11] obtenu pour $n=1$.

La preuve du théorème 1 donnée ici, plus simple que la preuve originelle, m'a été suggérée par A. Bonami qui m'a indiqué le lemme 2.1.2 de [7].

CHAPITRE I

1.1. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

Soient $\mathbb{B}_n$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$,

$\mathbb{B}_n = \{\underline{z} = (z^1,\dots,z^n) \in \mathbb{C}^n, \ \sum_{i=1}^{n} |z^i|^2 < 1\}$,

S_n le bord de $\mathbb{B}_n$, $S_n = \{\underline{z} = (z^1,\dots,z^n) \in \mathbb{C}^n, \ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1\}$,

λ_n la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{2n}$ normalisée sur $\mathbb{B}_n$.
σ_n la mesure de Lebesgue normalisée sur S_n.

Soit $p > 0$; on définit l'espace de Hardy :

$H^p(\sigma_n)$ est l'espace des fonctions f analytiques dans $\mathbb{B}_n$ et telles que

$$\sup_{r<1} \int_{S_n} |f(r\underline{\zeta})|^p d\sigma_n(\underline{\zeta}) = \|f\|_p^p < \infty$$

et $H^\infty(\sigma_n)$ est l'espace des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbb{B}_n$.

On définit de même les espaces de Bergman :

$A^p(\lambda_n)$ est l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{B}_n$ telles que

$$\int_{\mathbb{B}_n} |f(\underline{\zeta})|^p d\lambda_n(\underline{\zeta}) = \|f\|_p^p < \infty$$

et $H^\infty(\sigma_n) = A^\infty(\lambda_n)$.

Soit σ une suite, $\sigma = \{\underline{z}_i, \ i \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{B}_n$ et soit p un réel positif ou $p = +\infty$.

On définit deux opérateurs T_p^A et T_p^H à valeurs dans l'espace des suites.

$$\forall\ f \in A^p(\lambda_n), \quad T_p^A f = \{(1 - |\underline{z}_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} f(\underline{z}_i), \ i \in \mathbb{N}\}$$

$$\forall\ f \in H^p(\sigma_n),\quad T_p^H f = \{(1-|\underline{z}_i|^2)^{\frac{n}{p}}\ f(\underline{z}_i),\ \ i \in \mathbb{N}\}.$$

On peut alors donner les définitions suivantes :

On dit que σ <u>est d'interpolation</u> A^p si $T_p^A(A^p)$ contient $\ell^p(\mathbb{N})$.

On dit que σ <u>est fortement d'interpolation</u> A^p si de plus T_p^A est borné de A^p dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

On dit que σ <u>a la propriété d'extension linéaire bornée</u> s'il existe un opérateur U_p^A, borné de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_n)$ tel que $T_p^A U_p^A$ soit l'identité de $\ell^p(\mathbb{N})$.

On donne les définitions analogues dans le cas des classes de Hardy avec l'opérateur T_p^H.

Soit $\underline{z}$ un point de $\mathbb{B}_n$ et soit <u>$p > 1$</u> ;

$e_{\underline{z}}^{(p)}$ est le noyau de Cauchy Bergman de $\underline{z}$ normalisé dans $A^p(\lambda_n)$.

$$e_{\underline{z}}^{(p)}(\underline{\zeta}) = c(\underline{z},p,n)\ \frac{(1-|\underline{z}|^2)^{\frac{n+1}{q}}}{(1-\bar{\underline{z}}.\underline{\zeta})^{n+1}} \qquad \text{où}$$

q est le conjugué de p

$$\bar{\underline{z}}.\underline{\zeta} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}^i \zeta^i .$$

$c(\underline{z},p,n)$ est un réel tel qu'il existe 2 réels positifs indépendants de $\underline{z}$ vérifiant :

(1.1) $\quad 0 < \alpha(p,n) \leqslant c(\underline{z},p,n) \leqslant \beta(p,n).$

On note $\Sigma^{(p)}$ la suite $\Sigma^{(p)} = \{e_{\underline{z}}^{(p)},\ \underline{z} \in \sigma\}$ et $E_\sigma^{(p)}$ le sous-espace fermé de $A^p(\lambda_n)$ engendré par $\Sigma^{(p)}$.

On rappelle que $\Sigma^{(p)}$ est une base de $E_\sigma^{(p)}$ équivalente à la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$ si on a la relation :

(1.2) $\quad \exists\ D > 0,\ \ \forall\ a = \{\ a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N}),$

$$\frac{1}{D}\|a\|_p \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\underline{z}_i}^{(p)}\Big\|_p \leqslant D\,\|a\|_p .$$

On peut énoncer le lemme de dualité suivant $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$:

LEMME 1.1.1. <u>La suite</u> σ <u>de</u> $\mathbb{B}_n$ <u>est fortement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$ <u>si et seulement si</u> $\Sigma^{(q)}$ <u>est une base de</u> $E_\sigma^{(q)}$ <u>équivalente à la base canonique de</u> $\ell^q(\mathbb{N})$.

<u>Preuve</u>. Supposons que σ soit fortement d'interpolation A^p ; on considère $a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\} \in \ell^q(\mathbb{N})$ et la fonction f définie par $f(\underline{\zeta}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\underline{z}_i}^{(q)}(\underline{\zeta})$;

on va calculer la norme de f dans $A^q(\lambda_n)$ en utilisant le fait que le dual de $A^q(\lambda_n)$ est $A^p(\lambda_n)$, propriété qui sera démontrée au paragraphe suivant.

On a donc $\|f\|_q \leqslant B_q \sup_{g \in A^p, \|g\|_p = 1} \left|\int_{\mathbb{B}_n} g\bar{f} d\lambda_n\right|$ où B_q est une constante.

$$\left|\int_{\mathbb{B}_n} g\bar{f} d\lambda_n\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \int_{\mathbb{B}_n} g\, \bar{e}_{\underline{z}_i}^{(q)}\, d\lambda_n\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i c(\underline{z}_i)(1 - |z_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(\underline{z}_i)\right|$$

par Hölder il vient :

$$\left|\int_{\mathbb{B}_n} g\bar{f} d\lambda_n\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{a}_i c(\underline{z}_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\underline{z}_i|^2)^{n+1} |g(\underline{z}_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Utilisant (1.1) et l'hypothèse que T_p^A est borné par $c > 0$ (σ étant fortement d'interpolation A^p) on a :

$$\|f\|_q \leqslant B_q c\, \beta(q)\, \|a\|_q.$$

Réciproquement si T_p^A est continu et surjectif, il existe $g \in A^p(\lambda_n)$ tel que

$$(1 - |z_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(\underline{z}_i) = \bar{a}_i |a_i|^{q-2}$$

$\|g\|_p \leqslant D_1 \|a\|_q^{q-1}$ où D_1 est une constante indépendante de a (d'après le théorème de l'application ouverte).

On a donc :

$$\left|\int g\bar{f} d\lambda_n\right| \leqslant \|f\|_q \|g\|_p \leqslant D_1\, \|a\|_q^{q-1} \|f\|_q$$

$$\text{d'où} \quad \|f\|_q \geqslant \frac{1}{D_1 \|a\|_q^{q-1}} \sum_{i=1}^{\infty} |c(\underline{z}_i)|\, |a_i|^q$$

$$\text{d'où d'après (1.1)} \quad \|f\|_q \geq \frac{\alpha}{D_1}\|a\|_q.$$

Supposons maintenant que $\Sigma^{(q)}$ soit une base de $E_\sigma^{(q)}$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$ et soit $g \in A^p$; on a

$$\|T_p^A g\|_p = \sup_{a \in \ell^q(\mathbb{N}),\|a\|_q=1} \left|\Sigma\, a_i (1-|\underline{z}_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(\underline{z}_i)\right|$$

$$= \sup_{a \in \ell^q(\mathbb{N}),\|a\|_q=1} \left|\int_{\mathbb{B}_n} \bar{f} g\, d\lambda_n\right|$$

où l'on a posé $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c(\underline{z}_i)^{-1} e_{\underline{z}_i}^{(q)}$.

D'après l'hypothèse $\|f\|_q \leq \frac{D}{\alpha}\|a\|_q$, d'où :

$$\|T_p^A g\|_p \leq \frac{D}{\alpha}\|g\|_p.$$

Pour obtenir l'autre inégalité, il suffit de montrer que l'adjoint T_p^{A*} de T_p^A vérifie $\|T_p^{A*} a\|_q \geq \frac{1}{D\beta}\|a\|_q$; mais pour $a = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \in \ell^q(\mathbb{N})$ on a :

$$T_p^{A*} a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c^{-1}(\underline{z}_i) e_{\underline{z}_i}^{(q)} \quad \text{d'où}$$

$$\|T_p^{A*} a\| \geq \frac{1}{D\beta}\|a\|_q \quad \text{grâce à (1.1)}$$

et l'hypothèse que $\Sigma^{(q)}$ est une base de $E_\sigma^{(q)}$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$.

Nous aurons aussi besoin de la notion suivante :

Soient σ une suite dans $\mathbb{B}_n$, $\sigma = \{z_i,\ i \in \mathbb{N}\}$,
p un réel plus grand que 1 et q le conjugué de $p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$; on dit que σ est <u>strictement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$ si σ est fortement d'interpolation $A^p(\lambda_n)$ et si de plus le dual de $E_\sigma^{(q)}$ est isomorphe à $E_\sigma^{(p)}$.

On a le lemme

LEMME 1.1.2. <u>Si σ est une suite strictement d'interpolation $A^p(\lambda_n)$ dans $\mathbb{B}_n$, elle possède la propriété d'extension linéaire bornée.</u>

Preuve. Puisque $\Sigma^{(q)}$ est une base de $E_\sigma^{(q)}$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$, il existe un opérateur bicontinu Q de $\ell^q(\mathbb{N})$ sur $E_\sigma^{(q)}$ tel que, si on appelle $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}\}$ la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$, on a

$$\forall \underline{z}_i \in \sigma, \quad Q\varepsilon_i = e_{\underline{z}_i}.$$

Par dualité on en déduit un opérateur Q^{-1*} borné de $\ell^p(\mathbb{N})$ sur le dual de $E_\sigma^{(q)}$, c'est-à-dire par hypothèse sur $E_\sigma^{(p)}$; notons $\{\tilde{\varepsilon}_i, i \in \mathbb{N}\}$ la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$; pour $i \in \mathbb{N}$ on pose $\varphi_i = Q^{-1*}\tilde{\varepsilon}_i$.

La suite $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ est une base de $E_\sigma^{(p)}$ équivalente à la base $\{\tilde{\varepsilon}_i, i \in \mathbb{N}\}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \langle \varphi_i, e^{(q)}_{\underline{z}_j} \rangle &= \langle Q^{-1*}\tilde{\varepsilon}_i, Q\varepsilon_j \rangle \\ &= \langle \tilde{\varepsilon}_i, \varepsilon_j \rangle \\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Soit maintenant $\omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$ une suite de $\ell^p(\mathbb{N})$; on pose

$U_p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} c(\underline{z}_i, q)\omega_i\varphi_i$; on a alors

$T_pU_p(\omega) = \omega$ car :

$$\forall f \in A^p(\lambda_n), \ \langle f, e^{(q)}_{\underline{z}_i} \rangle = f(\underline{z}_i)(1 - |\underline{z}_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} c(\underline{z}_i, q)$$

et
$$\begin{aligned}\|U_p(\omega)\|_p &= \|Q^{-1*} \sum_{i=1}^{\infty} c(\underline{z}_i, q)\omega_i\tilde{\varepsilon}_i\|_p \\ &\leqslant \|Q^{-1*}\| \ \beta(q) \ \|\omega\|_p.\end{aligned}$$

L'opérateur U_p répond à la question. Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe pour les espaces de Bergman restent valables, avec des preuves analogues, pour les espaces de Hardy, et s'étendent au cas du polydisque de $\mathbb{C}^n$.

2. UN LEMME DE SUBORDINATION.

Soit $(\underline{\zeta}, \xi)$ un point de $\mathbb{B}_{n+1}$ où $\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_n$.

Soit alors $f \in H^p(\mathbb{B}_{n+1})$, $p > 0$ et considérons la projection P ainsi définie

$Pf(\underline{\zeta},\xi) = f(\underline{\zeta},0)$; on a alors le lemme de "subordination".

LEMME 1.2.1. <u>Soit</u> $p > 0$ <u>et</u> $f \in H^p(\mathbb{B}_{n+1})$. <u>Alors la projection</u> P <u>est une contraction de</u> $H^p(\mathbb{B}_{n+1})$ <u>sur</u> $A^p(\lambda_n)$.

<u>Preuve</u>. Si $f \in L^1(\sigma_{n+1})$ ne dépend que de $\underline{\zeta}$, en appliquant le théorème de Fubini on a :

$$(2.1) \qquad \int_{S_{n+1}} f(\underline{\zeta},\xi)d\sigma_{n+1}(\underline{\zeta},\xi) = \int_{\mathbb{B}_n} f(\underline{\zeta},0)d\lambda_n(\zeta).$$

On a utilisé au paragraphe 1 la propriété que le dual de $A^p(\lambda_n)$ est $A^q(\lambda_n)$; on va maintenant le démontrer.

LEMME 1.2.3. <u>Pour</u> $1 < p < \infty$, <u>le dual de</u> $A^p(\lambda_n)$ <u>est</u> $A^q(\lambda_n)$.

<u>Preuve</u>. On sait que le dual de $H^p(\sigma_{n+1})$ est $H^q(\sigma_{n+1})$ [12]. Il faut montrer qu'il existe $B_p > 0$ telle que :

$$\forall\, f \in A^p(\lambda_n) \qquad \|f\|_p \leqslant B_p \sup_{g \in A^q(\lambda_n), \|g\|_q = 1} |< f,g >|.$$

Pour cela considérons f comme élément de $H^p(\sigma_{n+1})$; on sait qu'il existe $B_p > 0$ telle que pour tout $f \in H^p(\sigma_{n+1})$, il existe $g \in H^q(\sigma_{n+1})$ vérifiant :

$$\|f\|_p \leqslant B_p < f,g > \quad \text{et} \quad \|g\|_{H^q(\sigma_{n+1})} = 1.$$

Mais $f = Pf$ d'où :

$$< f,g > = < Pf,g > = < Pf, P^*g >.$$

On a clairement $\quad P^*g(\underline{\zeta}) = g(\underline{\zeta},0) = Pg(\underline{\zeta})$

et d'après le lemme de subordination

$$\|Pg\|_{A^q(\lambda_n)} \leqslant \|g\|_{H^q(\sigma_{n+1})} \leqslant 1.$$

d'où $\quad \|f\|_p \leqslant B_p < f,g_1 > \quad$ avec $\quad g_1 = Pg \quad$ et $\quad \|g_1\|_{A^q(\lambda_n)} \leqslant 1$

ce qui prouve le lemme 2.3.

Remarque 1.2.1.

Soit $k \leqslant n-1$; considérons la mesure $\lambda_k^{(n)}$ sur $\mathbb{B}_k$ définie par $\lambda_k^{(n)} = (1-|\underline{z}|^2)^{n-k+1}\lambda_k$.

Si $(\underline{\zeta},\underline{\xi}) \in S_n$ avec $\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_k$, $\underline{\xi} \in \mathbb{B}_{n-k}$ on définit le projecteur $P_{n,k}$ par :

$$\forall\, f \in H^p(\sigma_n) \quad P_{n,k}f = f(\underline{\zeta},\underline{0}) \quad \text{alors}$$

$$\int_{\mathbb{B}_k} |P_{n,k}f|^p d\lambda_k^{(n)} = \int_{S_n} |P_{n,k}f|^p d\sigma_n \leqslant \int_{S_n} |f|^p d\sigma_n .$$

Remarque 1.2.2. Il y a des résultats plus fins (l'existence d'une projection bornée de L^1 sur A^1) pour les classes de Bergman dans [13].

CHAPITRE II

1. LE THEOREME PRINCIPAL POUR LES CLASSES $A^p(\lambda_1)$.

On dit qu'une suite σ de $\mathbb{D}$ est séparée s'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $z \in \sigma$, et tout $w \in \sigma$, $w \neq z$ alors $d(z,w) > \delta$, où d est la distance de Gleason, c'est-à-dire dans le cas de $\mathbb{D}$

$$d(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|.$$

THEOREME 2.1.1. Soit σ une suite séparée dans $\mathbb{D}$; alors pour $0 < p < +\infty$, σ est une réunion finie de suites σ_i, $i = 1,\ldots,k$, fortement d'interpolation $A^p(\lambda_1)$; de plus si $p \geqslant 1$ chaque σ_i possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_1)$.

On suppose d'abord $p > 1$.

– Réduction du problème –

Soit ν un entier positif ; et soit $A = 2^\nu$. Considérons la partition de $\mathbb{D}$ en "cellules" allongées $D_{n,k}$ pour $n \geqslant \nu$ et $0 \leqslant k < 2^{n-\nu}$ définies par :

$$D_{n,k} = \{z = re^{i\theta},\ 1-2^{-n} \leqslant r < 1-2^{-n-1},\ 2\pi kA2^{-n} \leqslant \theta < 2\pi(k+1)A2^{-n}\}.$$

σ étant séparée, chaque cellule $D_{n,k}$ contient un nombre de points de σ uniformément majoré par rapport à n et k par un entier M ; on peut donc écrire $\sigma = \bigcup_{i=1}^{M} \sigma_i$ avec $\mathrm{card}(\sigma_i \cap D_{n,k}) \leqslant 1$.

Considérons alors les quatre familles d'indices suivantes :

$$\Lambda_1 = \{(n,k),\quad n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\quad k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

$$\Lambda_2 = \{(n,k)\quad n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2),\quad k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

$$\Lambda_3 = \{(n,k)\quad n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\quad k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

$$\Lambda_4 = \{(n,k)\quad n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2),\quad k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$

On peut alors considérer les $4M$ sous-suites de σ :

$$\sigma_{i,j} = \bigcup_{(m,k)\in\Lambda_j} \{\sigma_i \cap D_{\eta,k}\}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant M$, $i \leqslant j \leqslant 4$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant \nu$, notons C_m la couronne $C_m = \bigcup_{\ell=0}^{2^{m-\nu}-1} D_{m,\ell}$.

On pose encore $\sigma_{i,j,k} = \bigcup_{m\equiv k(\mathrm{mod}\ \nu)} (\sigma_{i,j} \cap C_m)$

pour $1 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$.

Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir ν pour que chaque $\sigma_{i,j,k}$ soit d'interpolation forte $A^p(\lambda_1)$.

Cette réduction étant faite, pour (i,j,k) fixé on pose $s = \sigma_{i,j,k}$ et $s_m = s \cap C_m$.

Grâce à la réduction, on note $z_{m,p}$ l'unique point, s'il existe, de $D_{m,\ell} \cap s_m$; si $z_{m,\ell} \in s_m$ et $z_{m,h} \in s_m$ on a $\ell = h(\mathrm{mod}\ 2.)$.

On notera $\Lambda = \{(m,\ell)$, t.q. $z_{m,\ell}$ existe dans $s\}$ et

$$\Lambda_m = \{\ell \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \exists\, z_{m,\ell} \text{ dans } s \cap D_{m,\ell}\}.$$

<u>Preuve du théorème</u>. <u>Soit</u> $p > 1$.

Soit donc s la suite obtenue après réduction ; on va montrer que s <u>est strictement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_1)$.

<u>1ERE PARTIE</u>. Soit $a = \{a_{n,\ell}, (n,\ell)\in\Lambda\} \in \ell^q(\mathbb{N})$

et posons $f = \sum_{(n,\ell)\in\Lambda} a_{n,\ell}\, e^{(q)}_{z_{n,\ell}}$; on va montrer que f est borné dans $A^q(\lambda_1)$.

On a : $\|f\|_q \leqslant B_p \sup_{g\in A^p, \|g\|_p=1} |\langle f,g\rangle|$ grâce au lemme 1.2.2.

$$\|f\|_q \leqslant B_p \sup_g \Big|\sum_{(n,\ell)\in\Lambda} \bar{a}_{n,\ell} \langle g, e^{(q)}_{z_{n,\ell}}\rangle\Big| \quad \text{par Hölder il vient}$$

$$(1.1) \qquad \|f\|_q \leqslant \beta(q) B_p \|a\|_q \sup_g \Big\{\sum_{(n,\ell)\in\Lambda} |g(z_{n,\ell})|^p (1-|z_{n,\ell}|^2)^2\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

Montrons alors le lemme.

LEMME 2.1.1. <u>Soit</u> s <u>une suite séparée dans</u> $\mathbb{D}$; <u>il existe alors une</u>

<u>constante</u> C <u>positive telle que</u> ; <u>pour</u> $0 < p \leqslant +\infty$,

(1.2) $\quad \forall\, g \in A^p(\lambda_1), \quad \sum_{z \in s} |g(z)|^p (1-|z|^2)^2 \leqslant C \|g\|_p^p.$

<u>Preuve du lemme</u>. a) $p \geqslant 1$: Puisque s est séparée il existe δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, tel que les disques D_z de centre z et de rayon $\delta(1-|z|^2)$ sont disjoints lorsque z est dans s.

Notons $|D_z| = \lambda_1(D_z)$, on a, grâce à la propriété de la moyenne :

$$I = \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} |D_z| \left| \left\{ \frac{1}{|D_z|} \int_{D_z} f(\varphi)\, d\lambda_1(\varphi) \right\} \right|^p = \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} |D_z|^{1-p} \left| \left\{ \int_{D_z} f \right\} \right|^p$$

utilisant alors Hölder dans l'intégrale :

$$I \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} \int_{D_z} |f|^p d\lambda = \frac{1}{\delta^2} \int_{D_z} |f|^p \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|f\|_p^p.$$

b) $0 < p < 1$. Soit $f \in A^p(\lambda_1)$; alors $g = |f|^p$ est sous-harmonique dans $\mathbb{D}$ et est dans $L^1(\mathbb{D})$; on a donc :

$$I = \sum_{z \in s} (1-|z|^2)^2 |f(z)|^p = \sum_{z \in s} (1-|z|^2)^2 g(z) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} \int_{D_z} g\, d\lambda \leqslant \frac{1}{\delta^2} \int_{D} g\, d\lambda$$

donc $I \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|g\|_1 = \frac{1}{\delta^2} \|f\|_p^p$.

Appliquant le lemme 2.1.1 à (1.1) il vient :

(1.3) $\quad \|f\|_q \leqslant \beta(q) B_q C \|a\|_q.$

<u>2EME PARTIE</u>. Pour montrer que s est strictement d'interpolation A^p il suffit alors de montrer que, avec f comme dans la première partie, il existe $\gamma > 0$ avec :

(1.4) $\quad \sup_{g \in E_s^p, \|g\|_p = 1} |\langle f, g \rangle| \geqslant \gamma \|a\|_q$

écrivant $g = \sum_{(m,k) \in \Lambda} b_{m,k} e_{z_{m,k}}^{(p)}$, avec $b = \{ b_{m,k}, (m,k) \in \Lambda \} \in \ell^p(\Lambda)$

cela revient à montrer que l'opérateur matriciel

$$\tilde{Q}_p(n, \ell \,;\, m,k) = \frac{(1-|z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}} \;(1-|z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}}}{|1-\bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2}$$

est d'inverse borné de $\ell^q(\Lambda)$ dans $\ell^q(\Lambda)$.

Posons $Q_p = \tilde{Q}_p - I$, où I est l'identité de $\ell^q(\Lambda)$ dans $\ell^q(\Lambda)$; il suffit de montrer que $\|Q_p\|$ est strictement inférieure à un ; pour cela on va utiliser le lemme suivant [7] issu d'un théorème de Shur.

LEMME [7] 2.1.2. <u>Soit</u> μ <u>une mesure positive sur un espace</u> X <u>et</u> Q <u>une application de</u> $X \times X$ <u>dans</u> $[0,+\infty]$; <u>soit</u> g <u>une fonction positive sur</u> X <u>telle qu'il existe deux nombre</u> a <u>et</u> b <u>positifs tels que</u> :

$$\int_X Q(x,y)g(y)^q d\mu(y) \leqslant a^q[g(x)]^q \quad \underline{\text{et}} \quad \int_X Q(x,y)g^p(x)d\mu(x) \leqslant b^p[g(y)]^p, \ \underline{\text{alors}}$$

<u>l'opérateur</u> $Tf(x) = \int_X Q(x,y)f(y)d\mu(y)$ <u>est borné de</u> L^p <u>dans</u> L^p <u>et on a</u> $\|T\| \leqslant ab$.

On va prendre $X = \Lambda$, muni de la mesure de dénombrement, Q la fonction définie ci-dessus.

On va montrer, avec le ν de la réduction.

PROPOSITION 2.1.1. <u>Pour tout</u> θ, $\frac{2}{q} - 1 < \theta < \frac{2}{q}$ <u>il existe une constante positive</u> $K^p_{\theta,\nu}$ <u>telle que</u>

$$(1.5) \qquad \sum_{n,\ell} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)(1-|z_{n,\ell}|^2)^\theta \leqslant K_{\theta,\nu}(1-|z_{m,k}|^2)^\theta, \ \underline{\text{et}}\ K_{\theta,\nu}$$

<u>tend vers zéro quand</u> ν <u>tend vers l'infini.</u>

<u>Preuve de la proposition</u> 2.1.1.

$$I = \sum_{(n,\ell)\in\Lambda} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)(1-|z_{n,\ell}|^2)^\theta = I_1 + I_2 + I_3$$

avec $I_1 = \sum_{n<m} \sum_{\ell\in\Lambda_n} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)(1-|z_{n,\ell}|^2)^\theta$

$$I_2 = \mathop{}_{\substack{\ell\in\Lambda_m\\ \ell\neq k}} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)(1-|z_{n,\ell}|^2)^\theta$$

$$I_3 = \sum_{n>m} \sum_{\ell\in\Lambda_n} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)(1-|z_{n,\ell}|^2)^\theta .$$

<u>Voyons</u> I_1. On a : (1.6) $\forall\,(n,\ell)\in\Lambda, 2^{-n-1} \leqslant (1-|z_{n,\ell}|^2) \leqslant 2^{-n+1}$

à cause de la réduction, de plus,

$$|1-\bar{z}_{n,\ell}z_{m,k}|^2 \geqslant \delta((2^{-(n+1)}+2^{-(m+1)})^2+(\varphi_{m,\ell}-\varphi_{m,k})^2)$$

où δ est une constante absolue et $\varphi_{n,\ell}$ est l'argument de $z_{n,\ell}$; cette relation vaut dès que $|z_{n,\ell}| \geqslant \frac{1}{2}$ et $|z_{m,k}| \geqslant \frac{1}{2}$ par exemple ; à cause de la réduction, on peut réindicer les points pour écrire :

$|\varphi_{n,\ell}-\varphi_{m,k}| \geqslant \ell 2\pi 2^{-n+\nu-1}$; il vient alors

$$(1.7)\qquad |1-\bar{z}_{n,\ell}z_{m,k}|^2 \geqslant \pi^2\delta 2^{-2n}2^{2\nu}\{\ell^2+\frac{2^{-2\nu}}{4\pi^2}(1+2^{-(m-n)})^2\}$$

on en déduit

$$\sum_\ell \frac{1}{|1-\bar{z}_{n,\ell}z_{m,k}|^2} \leqslant \frac{2^{2n}}{\pi^2\delta 2^{2\nu}}\sum_{\ell>0}\frac{1}{\ell^2+\frac{2^{-2\nu}}{4\pi^2}(1+2^{-(m-n)})^2}$$

que l'on peut majorer par :

$$\sum_\ell \frac{1}{|1-\bar{z}_{n,\ell}z_{m,k}|^2} \leqslant \frac{2^{2n}}{\pi\delta 2^{\nu-1}(1+2^{-(m-n)})}+\frac{2^{2n}}{\pi^2\delta 2^{2\nu}}\frac{2^{2\nu}4\pi^2}{(1+2^{-(m-n)})^2}$$

que l'on majore encore par

$$(1.8)\qquad \sum_\ell \frac{1}{|1-\bar{z}_{n,\ell}z_{m,\ell}|^2} \leqslant \frac{2.2^m}{\delta(1+2^{-(m-n)})}.$$

On en déduit, puisque grâce à la réduction $m\equiv n \pmod \nu$

$$I_1 \leqslant \frac{2}{\delta}2^{-m\frac{2}{q}}\sum_{\substack{n<m\\ n\equiv m(\nu)}}\frac{2^{-n(\frac{2}{p}+\theta)}2^{2n}}{1+2^{-(m-n)}} \leqslant \frac{2}{\delta}2^{-\frac{2m}{q}}\sum_{\substack{n<m\\ n\equiv m(\nu)}}2^{n(\frac{2}{q}-\theta)}$$

Soit $\quad I_1 \leqslant \frac{2}{\delta}\frac{1}{2^{(\frac{2}{q}-\theta)\nu}-1}2^{-m\theta}$ et, grâce à (1.6) il vient

$$(1.9)\qquad I_1 \leqslant \frac{4}{\delta(2^{(\frac{2}{q}-\theta)\nu}-1)}(1-|z_{m,k}|^2)^\theta .$$

<u>Voyons</u> I_2 $\qquad I_2 = \sum_{\substack{\ell\in\Lambda_m\\ \ell\neq k}}\frac{(1-|z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}}(1-|z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}}(1-|z_{m,\ell}|^2)^\theta}{|1-\bar{z}_{m,k}z_{n,\ell}|^2}$

grâce à (1.6) et (1.7) avec $n=m$ il vient :

$$I_2 \leqslant 2^{-2m} \frac{2^{-\theta m} 2^{2m}}{\pi^2 \delta 2^{2\nu}} \sum_{\ell > 1} \frac{1}{\ell^2 + \frac{2^{-2\nu}}{2\pi^2}} \text{ , où on a}$$

$\ell \geqslant 1$ grâce au fait que $z_{m,\ell} \neq z_{m,k}$; soit :

$$I_2 \leqslant \frac{2^{-m\theta}}{\pi^2 \delta 2^{2\nu}} \sum_{\ell > 1} \frac{1}{\ell^2} = \frac{2^{-m\theta}}{6\delta 2^{2\nu}} \text{ ; par (2.6) on a}$$

$$(1.10) \qquad I_2 \leqslant \frac{1}{3\delta 2^{2\nu}} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\theta} .$$

<u>Voyons</u> I_3. $\quad I_3 = \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} \sum_{\ell \in \Lambda_n} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}} (1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p} + \theta}$

grâce à (1.6) et (1.8) il vient

$$I_3 \leqslant 2^{-m\frac{2}{q}} \frac{2}{\delta} \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} \frac{2^{-n(\frac{2}{p} + \theta)} 2^{2n}}{1 + 2^{-(m-n)}} \leqslant \frac{2}{\delta} 2^{-\frac{2m}{q}} \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} 2^{-n(\frac{2}{p} + \theta - 1)} 2^m$$

$$I_3 \leqslant \frac{2}{\delta} 2^{-\frac{2m}{q}} 2^m \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} 2^{-n(1 - \frac{2}{q} + \theta)} = \frac{2}{\delta} 2^{m(1 - \frac{2}{q})} \frac{2^{-m(1 - \frac{2}{q} + \theta)} 2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-(1 - \frac{2}{q} + \theta)\nu}}$$

d'où (1.11) $$I_3 \leqslant \frac{4}{\delta} \frac{2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-(1 - \frac{2}{q} + \theta)\nu}} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\theta} .$$

Posons alors : $K^p_{\theta,\nu} = \frac{4}{\delta}\left[\frac{1}{2^{(\frac{2}{q} - \theta)\nu} - 1} + \frac{1}{12.2^{2\nu}} + \frac{2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}\right]$

on a bien la proposition 2.1.1.

Soit alors $p > 1$ et posons $t_{n,\ell} = (1 - |z_{n,\ell}|^2)^a$, $a > 0$; grâce à la proposition 2.1.1 si (*) $\frac{2}{q} - 1 < ap < \frac{2}{q}$ alors on a

$$(1.12) \qquad \sum_{n,\ell} Q_p(n,\ell \; ; \; m,k) t^p_{n,\ell} \leqslant K^p_{ap,\nu} t^p_{m,k}$$

échangeant dans la proposition 2.1.1 les rôles de p et q il vient, si (**) $\frac{2}{p} - 1 < aq < \frac{2}{p}$,

$$(1.13)\qquad \sum_{m,k} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)t^q_{m,k} \leqslant K^q_{aq,\nu} t^q_{m,k}$$

mais $p > 1$ donné on voit que (**) implique $\frac{2}{q} - \frac{p}{q} < ap < \frac{2}{q}$ et donc, en prenant

$$a = \frac{1}{2p}\Big[\frac{2}{q} + \max\{(\frac{2}{q} - 1), (\frac{2}{q} - \frac{p}{q})\}\Big],$$

on a que (*) et (**) sont vérifiés donc aussi (1.12) et (1.13) ; appliquant alors le lemme 2.1.2 à Q_p on a

$$(1.14)\qquad \Big\|\{\sum_{n,\ell} Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)a_{n,\ell},\ (m,k) \in \Lambda\}\Big\|_q \leqslant (K^p_{ap,\nu})^{\frac{1}{p}} (K^q_{aq,\nu})^{\frac{1}{q}} \|a\|_q.$$

<u>Preuve du théorème pour</u> $p > 1$.

Soit $a = \{a_{n,\ell}, (n,\ell) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$ et $b = \{b_{n,\ell}, (n,\ell)\} \in \ell^p(\Lambda)$;

posons $f = \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} a_{n,\ell} e^{(q)}_{z_{n,\ell}}$ et $g = \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} b_{n,\ell} e^{(p)}_{z_{n,\ell}}$.

Par (1.3) on a $\|f\|_q \leqslant \beta(q)B_q c\,\|a\|_q$ et $\|g\|_p \leqslant \beta(p)B_p c\,\|b\|_p$,

et
$$< f,g > = \sum_{\substack{(n,\ell) \in \Lambda \\ (m,k) \in \Lambda}} a_{n,\ell}\bar{b}_{m,k} < e^{(q)}_{z_{n,\ell}}, e^{(p)}_{z_{m,k}} >$$

$$< f,g > = \sum a_{n,\ell} c(z_{n,\ell}; q)\bar{b}_{m,k} c(z_{m,k}; p)\, \frac{(1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}}(1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}}}{(1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k})^2},$$

d'où avec la définition naturelle de $\tilde{R}_p(n,\ell\ ;\ m,k)$:

$$< f,g > = \sum a_{n,\ell} c(z_{n,\ell}; q)\bar{b}_{m,k} c(z_{m,k}; p)\tilde{R}_p(n,\ell\ ;\ m,k)$$

mais $\tilde{R}_p(n,\ell\ ;\ m,k) = I + R_p(n,\ell\ ;\ m,k)$ et grâce à (1.14)

$$\|\{R_p(n,\ell\ ;\ m,k)\}\| \leqslant \|Q_p(n,\ell\ ;\ m,k)\| \leqslant (K^p_{ap,\nu})^{1/p} (K^q_{aq,\nu})^{1/q}\ ;$$

choisissons donc ν assez grand pour que la norme de $R_p(n,\ell\ ;\ m,k)$ soit strictement inférieure à un ; on en déduit que $\tilde{R}_p$ est inversible et donc qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $a = \{a_{n,\ell}, (n,\ell) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$ il existe

$b = \{b_{n,\ell}, (n,\ell) \in \ell^p(\Lambda)$ avec $|< f,g >| \geqslant \alpha(p)\alpha(q)\gamma\,\|a\|_q\,\|b\|_p$.

On en déduit que
$$\|f\|_q \geqslant \sup_{\substack{g \in E^p_\sigma \\ \|g\|_p < 1}} |< f,g >| \geqslant \frac{\alpha(p)\alpha(q)\gamma\|a\|_q}{\beta(p)B_p}$$

donc que Σ^q est une base de E^q_σ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\Lambda)$ d'une part, ce qui grâce au lemme 1.1.1 prouve que s est fortement d'interpolation $A^p(\lambda_1)$, et d'autre part cela prouve que le dual de E^q_σ est isomorphe à E^p_σ ce qui achève la preuve du théorème dans le cas $p > 1$, à cause du lemme 1.1.2.

Remarque 2.1.1. On a que l'opérateur $\tilde{R}_p$ n'est autre que $\tilde{R}_p = T_q T^*_p$ et on vient de montrer que $\tilde{R}_p$ est l'inverse borné ; il en va de même de $\tilde{R}_q = \tilde{R}^*_p = T_p T^*_q$; posons alors $U_p = T^*_q \tilde{R}_q^{-1}$; U_p est borné de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $E^p_s \subset A^p(\lambda_1)$ et on a $T_p U_p = T_p T^*_q (T_p T^*_q)^{-1}$ = identité de ℓ^p ; on a donc directement l'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_1)$.

Cette remarque vaut également pour les chapitres suivants.

2.2. Cas $p < 1$.

Soit $\sigma = \{z_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ une suite dans $\mathbb{D}$.

On dit que $\Sigma = \{e^{(2)}_z,\ z \in \sigma\}$ possède une suite de conjugués bornés s'il existe une suite $\{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $A^2(\lambda_1)$ vérifiant :

(2.1) $\forall\, i \in \mathbb{N},\ \forall\, j \in \mathbb{N} \quad < \varphi_i, e^{(2)}_{z_j} > = \delta_{ij} = \varphi_i(z_j)c(z_j,2)(1-|z_j|^2)$

(2.2) $\exists\, K > 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \qquad \|\varphi_i\|_2 \leqslant K.$

On a alors

PROPOSITION 2.2.1. Si σ est une suite telle que $\Sigma = \{e^{(2)}_z,\ z \in \sigma\}$ possède une suite de conjugués bornés alors σ possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_1)$ pour tout p de la forme $p = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Preuve. Soit $\omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbb{N}\} \in \ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$. On pose :

$$U_{\frac{1}{k}}(\omega) = \sum_i \omega_i c(z_i,2)^{-2k} \varphi_i^{2k} ;$$

on a :

$$\|U_{\frac{1}{k}}(\omega)\|_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} = \int \Big| \sum_i \omega_i c(z_i,2)^{-2k} \varphi_i^{2k} \Big|^{\frac{1}{k}} d\lambda_1$$

$$\leqslant \int \alpha(2)^{-2} \big(\sum_i |\omega_i|^{\frac{1}{k}} |\varphi_i|^2\big) d\lambda_1$$

$$\leqslant \alpha(2)^{-2} \sum_i |\omega_i|^{\frac{1}{k}} \int |\varphi_i|^2 d\lambda_1$$

$$\leqslant \alpha(2)^{-2} K^2 \|\omega\|_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \quad \text{d'après } (4.2)$$

d'où $U_{\frac{1}{k}}$ applique $\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$ dans $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$; d'après (2.1) on a clairement

$T_{\frac{1}{k}} U_{\frac{1}{k}}(\omega) = \omega$.

COROLLAIRE 2.2.1. Si σ est une suite séparée dans $\mathbb{D}$, alors σ est une réunion finie de suites σ_i telles que pour $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, σ_i possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$ dans $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$.

Preuve. Grâce au §1 on peut écrire σ comme réunion de suites $\sigma_i, i = 1,\dots,M$, telles que σ_i soit fortement d'interpolation $A^2(\lambda_1)$. Mais $E^{(2)}_{\sigma_i}$ étant un espace de Hilbert, son dual est isomorphe à $E^{(2)}_{\sigma_i}$ et donc σ_i est strictement d'interpolation $A^2(\lambda_1)$.

Il existe donc une suite $\{\varphi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ dans $E^{(2)}_{\sigma_i}$ telle que $\langle \varphi_k, e^{(2)}_{z_\ell} \rangle = \delta_{k,\ell}$ et $\|\varphi_k\|_2 \leqslant K$ où K est une constante. D'après la proposition 2.2.1, σ_i possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$ dans $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$, d'où le corollaire.

La proposition suivante achèvera la preuve du théorème principal dans le cas de $\mathbb{D}$.

PROPOSITION 2.2.2. Soit σ une suite fortement d'interpolation $A^{p'}(\lambda_1)$ pour $p' > 1$. Alors σ est fortement d'interpolation $A^{p}(\lambda_1)$ pour $p = \frac{p'}{k}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Preuve. Puisque σ est fortement d'interpolation $A^{p'}(\lambda_1)$, σ est séparée (c'est facile à voir) et donc grâce au lemme 2.1.1 on obtient que pour tout $r > 0$, T_r est continu de $A^r(\lambda_1)$ dans $\ell^r(\mathbb{N})$.

Soit alors $\omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ un élément de $\ell^{\frac{p'}{k}}(\mathbb{N})$ et considérons une suite $a = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ $a_i^k = \omega_i$; a appartient à $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ et il existe donc $f \in A^{p'}(\lambda_1)$ vérifiant :

$\forall\, i \in \mathbb{N},\ (1 - |z_i|^2)^{\frac{2}{p'}} f(z_i) = a_i$; d'où en élevant à la puissance k

$\forall\, i \in \mathbb{N},\ (1 - |z_i|^2)^{\frac{2k}{p'}} f^k(z_i) = \omega_i$; et posant $g = f^k$ on a bien :

$$g \in A^{\frac{p'}{k}}(\lambda_1) \quad \text{et} \quad T_{\frac{p'}{k}}\, g = \omega.$$

Fin de la preuve du théorème principal.

Soit $0 < p \leqslant 1$; il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mp = p' > 1$; soit σ une suite séparée dans $\mathbb{D}$; dans le §3 on a montré que σ est une réunion finie de suites fortement d'interpolation $A^{p'}(\lambda_1)$; et grâce à la proposition 4.2, on peut en déduire que chacune de ces suites est fortement d'interpolation $A^{p}(\lambda_1)$.

Remarque 2.2.2. Dans le cas $0 < p < 1$ on ne sait pas prouver qu'il y a toujours extension linéaire bornée mais on a une extension non linéaire bornée ainsi :

soit $m \in \mathbb{N}$ t.q. $mp = p' > 1$, m fixé et considérons $\omega = \{\omega_k,\ k \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$; à ω associons $\tilde{\omega}$ une des suites de $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ telles que $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ avec $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\omega}_k^m = \omega_k$, appelons R cet opérateur ; soit alors $U_{p'}$ l'extension linéaire bornée de $\ell^{p'}$ dans $A^{p'}(\lambda_1)$ et R' l'opérateur de $A^{p'}$ dans A^p ainsi définit : $\forall\ f \in A^{p'}$, $R'f = f^m \in A^p$; posons enfin

$\tilde{U}_p = R'U_{p'}R$; on voit que $\tilde{U}_p$ est une extension non linéaire mais bornée sur les boules de centre 0 de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $A^p(\lambda_1)$.

Cette remarque vaut aussi pour les chapitres III et IV.

2.3. COMPARAISON AVEC LES SUITES DE ZEROS DE FONCTIONS DE $A^p(\lambda_1)$.

On va montrer que les résultats obtenus sont les meilleurs possibles dans le sens suivant : pour $p > 0$ donné, il existe une suite séparée dans $\mathbb{D}$ qui n'est même pas un zéro pour la classe $A^p(\lambda_1)$, donc qui ne peut être d'interpolation $A^p(\lambda_1)$; nécessairement une telle suite est une réunion d'au moins deux suites d'interpolation $A^p(\lambda_1)$.

On va utiliser le théorème suivant dû à C. Horowitz [9].

THEOREME 2.3.1. [9]. _Soit_ f _dans_ $A^p(\lambda_1)$, $0 < p \leq \infty$, $f(0) \neq 0$ _et soit_ $\{z_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ _la suite des zéros ordonnés par modules croissants de_ f _alors_ :

$$(3.1) \qquad \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|z_k|} = O(N^{\frac{1}{p}}).$$

On va montrer les théorèmes suivants :

THEOREME 2.3.2. _Pour tout_ $p > 0$, _il existe deux suites_ σ_1 _et_ σ_2 _fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$ _et telles que la réunion_ $\sigma_1 \cup \sigma_2$ _est séparée et n'est pas une suite d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$.

THEOREME 2.3.3. _Pour tout_ $p > 0$, _il existe_ $q > p$ _et une suite_ σ _qui est fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_1)$ _mais qui n'est pas d'interpolation_ $A^q(\lambda_1)$.

Ces deux théorèmes soulignent la différence avec le cas des classes $H^p(\sigma_1)$.

Preuve du théorème 2.3.2.

Soit $\gamma > 1$ et soit $\nu \in \mathbb{N}$; considérons la suite $\sigma(\gamma,\nu)$ suivante :

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ m \geqslant \nu+1,\quad \forall\, \ell \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant \ell \leqslant E[\gamma^{m-\nu}],$$

$$z_{m,\ell} = (1-\gamma^{-m})e^{i2\pi\gamma^{-m}\ell\gamma^{\nu}}$$

où $E[x]$ est la partie entière de x.

Appliquons le critère de Horowitz à cette suite :

si $N = \sum_{k=\nu+1} E[\gamma^{k-\nu}]$, N est équivalent, quand $m \to \infty$ à $\gamma \dfrac{1-\gamma^{m-\nu}}{1-\gamma}$ d'où :

(3.2) $\quad \log N \sim m \operatorname{Log} \gamma \quad$ quand m tend vers $+\infty$.

$$I = \prod_{k=\nu+1}^{m} \prod_{\ell=1}^{E(\gamma^{k-\nu})} \frac{1}{1-\gamma^{-k}} = \prod_{k=\nu+1}^{m} \frac{1}{[1-\gamma^{-k}]^{E[\gamma^{k-\nu}]}} \text{ ; d'où}$$

$$\log I = -\sum_{k=\nu+1} E[\gamma^{k-\nu}] \operatorname{Log}(1-\gamma^{-k}) \quad \text{et}$$

(3.3) $\quad \log I \sim m\gamma^{-\nu} \quad$ quand $m \to \infty$.

On déduit des relations (3.2) et (3.3) et du théorème 2.3.1 de C. Horowitz que, pour que $\{z_{m,\ell} \ ;\ m,\ell\}$ soit contenu dans un ensemble de zéros d'une fonction de $A^p(\lambda_1)$ nécessairement on a :

$$\frac{1}{p} \log N \geqslant \log I \quad \text{soit :}$$

(3.4) $\quad p \leqslant \dfrac{m \log \gamma}{m\gamma^{-\nu}} = \gamma^{\nu} \log \gamma.$

Soit alors $p_0 > 0$ donné et $1 < \gamma < e^{p_0}$.

La suite $\sigma(\gamma,0)$ construite ci-dessus ne peut être une suite d'interpolation $A^{p_0}(\lambda_1)$; en effet toute suite d'interpolation $A^{p_0}(\lambda_1)$ est incluse dans un ensemble de zéros d'une fonction de $A^{p_0}(\lambda_1)$, à savoir une fonction f interpolant l'élément $(1,0,0,\ldots,0,\ldots)$ de $\ell^{p_0}(\mathbb{N})$. A cause de (3.4) et du choix de γ, $\sigma(\gamma,0)$ ne vérifie pas (3.1) et donc ne peut être incluse dans un ensemble de zéros d'une fonction de $A^p(\lambda_1)$ et n'est pas d'interpolation $A^p(\lambda_1)$.

Toutefois la suite $\sigma(\gamma,0)$ est séparée et donc d'après le théorème principal, $\sigma(\gamma,0)=\bigcup_{i=1}^{M}\sigma_i$ où σ_i est fortement d'interpolation $A^{p_0}(\lambda_1)$ et M un entier, on en déduit le théorème 2.3.2.

<u>Preuve du théorème</u> 2.3.3. Soit $p>0$ donné, dans la preuve du théorème principal, on a montré que que pour γ et ν assez grands $\sigma(\gamma,\nu)$ est fortement d'interpolation $A^p(\lambda_1)$; il suffit alors de considérer $q>\gamma^\nu\log\gamma$ pour que $\sigma(\gamma,\nu)$ ne soit pas d'interpolation $A^q(\lambda_1)$ à cause de (3.4) et du raisonnement ci-dessus.

2.4. <u>APPLICATIONS AUX ESPACES DE HARDY</u>.

Comme corollaire du 2.3 on va montrer les théorèmes suivants

THEOREME 2.4.1. a) <u>Pour tout</u> $p>0$, <u>il existe deux suites</u> s_1 <u>et</u> s_2 <u>fortement d'interpolation</u> $H^p(\sigma_2)$ <u>et telles que la réunion</u> $s_1\cup s_2$ <u>est séparée mais n'est pas une suite d'interpolation</u> $H^p(\sigma_2)$.

b) <u>Pour tout</u> $p>0$, <u>il existe</u> $q>p$ <u>et une suite</u> s <u>qui est fortement d'interpolation</u> $H^p(\sigma_2)$ <u>mais qui n'est pas d'interpolation</u> $H^q(\sigma_2)$.

<u>Preuve</u>. a) On considère les suites s_1 et s_2 du théorème comme étant dans le plan $w=0$ de la boule $\{|z|^2+|w|^2<1\}$ de $\mathbb{C}^2$, on utilise alors le lemme 2.2 de subordination pour conclure ; pour montrer le b) on procède de la même façon.

Soit m_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$, on définit les classes de Hardy de la manière usuelle :

$p > 0$, $H^p(m_2) = \{f$ analytique dans $\mathbb{D}^2$ tq. $\sup\limits_{\gamma>} \int_{\varphi \in \mathbb{T}^2} |f(r\underline{\varphi})|^p dm_2 = \|f\|_p^p < H\}$

et $H^\infty(\mathbb{D}^2) = \{ f$ analytique et bornée dans $\mathbb{D}^2\}$.

On a alors

THEOREME 2.4.2. a) Pour tout $p \geqslant 1$, il existe deux suites s_1 et s_2 fortement d'interpolation $H^p(m_2)$ et telles que la réunion $s_1 \cup s_2$ est séparée mais n'est pas d'interpolation $H^p(m_2)$.

b) Pour tout $p \geqslant 1$, il existe $q > p$ et une suite s qui est fortement d'interpolation $H^p(m_2)$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^q(m_2)$.

Preuve. a) Soit $s_1' = \{z_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $s_2' = \{w_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ les suites du théorème 2.3.2, on considère dans $\mathbb{D}^2$ les suites suivantes :

$s_1 = \{(z_k, z_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ et $s_2 = \{(w_k, w_k),\ k \in \mathbb{N}\}$; C. Horowitz et D.M. Oberlin [10] ont montré que pour $p \geqslant 1$, l'opérateur T définit sur $H^p(\mathbb{D}^2)$ ainsi : $\forall f \in H^p(\mathbb{D}^2)$, $Tf(z) = f(z,z)$ est continu et surjectif sur $A^p(\mathbb{D})$; il est alors clair que les suites s_1 et s_2, portée par la diagonale de $\mathbb{D}^2$, vérifient le a) du théorème.

b) On procède de la même façon pour b) en plaçant sur la diagonale de $\mathbb{D}^2$ la suite s du théorème 2.3.3 et en utilisant le théorème de C. Horowitz et D. Oberlin.

CHAPITRE III

CLASSES DE BERGMAN DU POLYDISQUE DE $\mathbb{C}^n$.

On fera les démonstrations dans le cas de $\mathbb{D}^2$, le cas général s'en déduisant aisément.

On note $\underline{z} = (z,w)$, $\underline{n} = (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2$ et $\underline{z}_{\underline{n}} = (z_{n_1}, w_{n_2})$, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^2$ restreinte et normalisée à $\mathbb{D}^2$ sera encore notée λ_2.

On note $A^p(\lambda_2)$ les classes de Bergman.

$$\forall\ p > 0,\ A^p(\lambda_2) = \{\ f \text{ analytique dans } \mathbb{D}^2 \text{ t.q. } \int_{\mathbb{D}^2} |f|^p d\lambda_2 = \|f\|_p^p < +\infty\}$$

$$A^\infty(\lambda_2) = \{\ f \text{ analytique et bornée dans } \mathbb{D}^2,\ \|f\|_\infty = \sup_{\underline{z}\in\mathbb{D}^2} |f(\underline{z})|\}.$$

Si $\underline{z} = (z,w) \in \mathbb{D}^2$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $((1-|\underline{z}|^2))^\alpha = (1-|z|^2)^\alpha(1-|w|^2)^\alpha$.

1. <u>On va généraliser les lemmes 1.2.3 et 2.1.1 au cas du polydisque</u>.

LEMME 3.1.1. <u>Pour</u> p <u>supérieur à un, le dual de</u> $A^p(\lambda_2)$ <u>est isomorphe à</u> $A^q(\lambda_2)$, <u>avec</u> $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

<u>Preuve</u>. Comme dans $\mathbb{D}$, il suffit de montrer que l'on a une projection bornée de $L^p(\lambda_2)$ sur $A^p(\lambda_2)$, $p > 1$.

La mesure λ_2 étant le produit de la mesure λ_1 sur $\mathbb{D}$ par elle même, on vérifie directement par itération que l'intégrale avec le noyau de Cauchy Bergman réalise bien une projection bornée de $L^p(\lambda_2)$ sur $A^p(\lambda_2)$, la constante étant B_p^2.

LEMME 3.1.2. _Soit_ $\sigma = \{\underline{z}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ _une suite séparée dans_ $\mathbb{D}^2$ _; il existe une constante_ C _positive telle que_

$$(1.1) \qquad \forall\, p > 0,\ \forall\, f \in A^p(\lambda_2),\quad \sum_n \left((1-|\underline{z}_n|^2)\right)^2 |f(\underline{z}_n)|^p \leqslant C\,\|f\|_p^p.$$

Puisque la suite est séparée il existe $\delta > 0$ tel que les polydisques $D_{\underline{z}_n} = \{(\varphi,\eta) \in \mathbb{D}^2,\ \text{t.q. } |\varphi - z_n| < \delta(1-|z_n|^2),\ |\eta - w_n| < \delta(1-|w_n|^2\}$ sont disjoints. On recopie alors la preuve du lemme 2.1.1.

Le but de ce chapitre est de montrer le

THEOREME 3.1.1. _Soit_ σ _une suite séparée dans_ $\mathbb{D}^n$, _pour_ $p > 1$, σ _est une union finie de suites strictement d'interpolation_ $A^p(\lambda_2)$ _; pour_ $p > 0$, σ _est une union finie de suites_ σ_i _fortement d'interpolation_ $A^p(\lambda_n)$, _et de plus, si_ $p = \frac{1}{k}$ _avec_ $k \in \mathbb{N}$, σ_i _possède la propriété d'extension linéaire bornée de_ $\ell^p(\mathbb{N})$ _dans_ $A^p(\lambda_n)$.

2. REDUCTION DU PROBLEME.

Soit encore ν dans $\mathbb{N}$ et posons, comme au chapitre II,

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ k < 2^{n-\nu},\ D_{n,k} = \{z = re^{i\varphi},\ 1-2^{-n} \leqslant r < 1-2^{-n-1}$ et

$k2^{-n+\nu}2\pi \leqslant \varphi < (k+1)2\pi 2^{-n+\nu}\}$ si $\underline{n} = (n_1,n_2)$ et $\underline{k} = (k_1,k_2)$ on pose

$D_{\underline{n},\underline{k}} = D_{n_1,k_1} \times D_{n_2,k_2}$.

Soit σ une suite séparée dans $\mathbb{D}^2$; dans chaque cellule $D_{\underline{n},\underline{k}}$ il existe un nombre de points de σ uniformement majoré par un entier M ; on peut donc écrire $\sigma = \bigcup_{i=0}^{M} \sigma_i$ avec pour $i \geqslant 1$ $\mathrm{Card}(\sigma_i \cap D_{n,k}) \leqslant 1$ et σ_o constituée des points (z,w) de σ tels que $|z| \leqslant 1-2^{-\nu}$ et $|w| \leqslant 1-2^{-\nu}$; σ_o n'ayant qu'un nombre fini de points est strictement d'interpolation $A^p(\lambda_2)$ pour $p \geqslant 1$ et fortement d'interpolation $A^p(\lambda_2)$ avec la propriété d'extension linéaire pour $0 < p < 1$.

On procède alors comme au chapitre II et on a $\sigma_i = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,4^2 \\ k=1,\dots,\nu}} \sigma_{i,j,k}$;

on pose, pour i,j,k fixés, $s = \sigma_{i,j,k} = \{z_{\underline{m},\underline{\ell}},\ \underline{m} = (m_1,m_2),\ \underline{\ell} = (\ell_1,\ell_2)\}$ où

$z_{\underline{m},\underline{\ell}}$ est l'unique point, s'il existe, de s dans $D_{\underline{m},\underline{\ell}}$.

On a les propriétés suivantes :

(2.1) $\quad z_{\underline{m},\underline{\ell}}$ et $z_{\underline{m},\underline{k}}$ dans $s \Longrightarrow \ell_1 \equiv k_1 \pmod 2 \quad \ell_2 \equiv k_2 \pmod 2$

$\quad z_{\underline{m},\underline{\ell}}$ et $z_{\underline{n},\underline{\ell}}$ dans $s \Longrightarrow m_1 \equiv n_1 \pmod \nu \quad m_2 \equiv n_2 \pmod \nu$.

On pose encore :

$$\Lambda = \{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2,\ \text{t.q.}\ \exists\ z_{\underline{m},\underline{\ell}} \in s\}$$

$$\Lambda_{\underline{m}} = \{\underline{\ell} \in \mathbb{N}^2\ \text{t.q.}\ \exists\ z_{\underline{m},\underline{\ell}} \in s\}.$$

3. <u>PREUVE DU THEOREME</u>.

<u>Soit</u> $p > 1$. Soit $a = \{a_{\underline{m},\underline{\ell}},\ (\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$

et posons $e^{(q)}_{\underline{z}}(\underline{\varphi}) = e^{(q)}_z(\varphi)e^{(q)}_w(\eta)$ où $\underline{z} = (z,w) \in \mathbb{D}^2$ et $\underline{\varphi} = (\varphi,\eta) \in \bar{\mathbb{D}}^2$; posons

encore $f(\underline{\varphi}) = \sum_{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda} a_{\underline{m},\underline{\ell}}\, e^{(q)}_{z_{\underline{m},\underline{\ell}}}(\underline{\varphi})$; comme au chapitre II et grâce au

lemme 3.1.2 on a

(3.1) $\quad \|f\|^q_q \leqslant B^2_q \beta^2(q) C\, \|a\|^q_q$.

De même si on pose $b = \{b_{\underline{m},\underline{\ell}},\ (\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda\} \in \ell^p(\Lambda)$ on a $g = \sum_{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda} b_{\underline{m},\underline{\ell}}\, e^{(p)}_{z_{\underline{m},\underline{\ell}}}$ et

(3.2) $\quad \|g\|^p_p \leqslant B^2_p \beta(p) C\, \|b\|^p_p$.

Reprenant exactement les arguments du chapitre II, il nous faut alors montrer

que l'opérateur matriciel

$$Q'_p(\underline{n},\underline{\ell}\ ;\ \underline{m},\underline{k}) = \frac{((1-|z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\frac{2}{p}}\ ((1-|z_{\underline{m},\underline{\ell}}|^2))^{\frac{2}{q}}}{|((1-\bar{z}_{\underline{n},\underline{\ell}} z_{\underline{m},\underline{\ell}}))^2|} \qquad (\underline{n},\underline{\ell}) \neq (\underline{m},\underline{k})$$

et $Q'_p(\underline{m},\underline{k}\ ;\ \underline{m},\underline{k}) = 0$, avec $((1-\underline{\bar{z}}.\underline{z}'))^2 = (1-\bar{z}z')^2(1-\bar{w}w')^2$ où $\underline{z} = (z,w)$ et

$\underline{z}' = (z', w')$, peut-être rendu de norme inférieure à un par un choix convenable de ν. Cela sera conséquence de la

PROPOSITION 3.3.1. <u>Pour tout</u> θ, $\frac{2}{q} - 1 < \theta < \frac{2}{q}$, <u>il existe une constante positive</u> $K^p_{\theta,\nu}$ <u>telle que</u>

$$(3.3) \qquad \sum_{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda} Q'_p(n,\ell\,;\,m,k)\,((1-|z_{n,\ell}|^2))^{\theta} \leqslant \tilde{K}^p_{\theta,\nu}\,((1-|z_{\underline{m},\underline{k}}|^2))^{\theta},$$

<u>et</u> $\tilde{K}_{\theta,\nu}$ <u>tend vers zéros quand</u> ν <u>tend vers l'infini.</u>

<u>Preuve de la proposition.</u>

On a : $\displaystyle\sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (\underline{n},\underline{\ell}) \neq (\underline{m},\underline{k})}} Q'_p(\underline{n},\underline{\ell}\,;\,\underline{m},\underline{k})\,((1-|z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\theta} = \sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_1,\ell_1) \neq (m_2,k_2)}} + \sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_2,\ell_2) \neq (m_2,k_2)}}$

Voyons le premier terme :

$$\sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_1,\ell_1) \neq (m_1,k_1)}} Q'_p\,((1-|z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\theta} =$$

$$\sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_1,\ell_1) \neq (m_1,k_1)}} Q_p(n_1,\ell_1;m_1,k_1)(1-|z_{n_1,\ell_1}|^2)^{\theta}\tilde{Q}_p(n_2,\ell_2;m_2,k_2)(1-|z_{n_2,\ell_2}|^2)^{\theta}$$

où Q_p et $\tilde{Q}_p$ sont les opérateurs définis au chapitre II, le 2e membre s'écrit comme un produit, et, utilisant la proposition 2.1.1 il vient

$$\sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_1,\ell_1) \neq (m_1,k_1)}} Q'_p\,((1-|z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\theta} \leqslant (1+K^p_{\theta,\nu})K^p_{\theta,\nu}\,((1-|z_{\underline{m},\underline{k}}|^2))^{\theta}.$$

Exactement de la même manière on a :

$$\sum_{\substack{(\underline{n},\underline{\ell}) \in \Lambda \\ (n_2,\ell_2) \neq (m_2,k_2)}} Q'_p\,((1-|z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\theta} \leqslant (1+K^p_{\theta,\nu})K^p_{\theta,\nu}\,((1-|z_{\underline{m},\underline{k}}|^2))^{\theta}$$

d'où la proposition 3.3.1 en posant $\tilde{K}^p_{\theta,\nu} = 2(1+K^p_{\theta,\nu})K^p_{\theta,\nu}$.

On achève alors la preuve du théorème 3.1.1 à partir de cette proposition comme au chapitre II ; le cas $p \leqslant 1$ se traite exactement comme au chapitre II également.

CHAPITRE IV

ESPACES DE BERGMAN DE LA BOULE $\mathbb{B}_n$ DE $\mathbb{C}^n$.

4.1. PSEUDO METRIQUE SUR $S_n = \partial\mathbb{B}_n$.

Introduisons la pseudo-distance d définie par :

$\underline{\zeta} \in S_n$ $\underline{\eta} \in S_n$, $d(\underline{\zeta},\underline{\eta}) = |1 - \bar{\underline{\zeta}}.\underline{\eta}|$; d est invariante sous l'action de $SU(n)$; étudions quelques unes de ses propriétés :

(1.1) $\exists\, K_1 > 0$, $\forall\, (\underline{\zeta},\underline{\eta},\underline{\xi}) \in S_n^3$, $d(\underline{\zeta},\eta) \leqslant K_1[d(\underline{\xi},\underline{\zeta}) + d(\underline{\xi},\underline{\eta})]$.

Pour $h > 0$, posons $R(\underline{\zeta},h) = \{\underline{\eta} \in S_n,\ d(\underline{\mathbb{1}},\underline{\zeta}) < h\}$ où $\underline{\mathbb{1}} = (1,0,\dots,0)$; on a alors

(1.2) $\exists\, K_2 > 0$ $\exists\, K_3 > 0$, $\forall\, h > 0$, $K_2 h^n \leqslant \sigma_n(R(\underline{\zeta},h) \leqslant K_3 h^n$.

Soit $t \in \mathbb{N}$, considérons la couronne

$C_{th}(\mathbb{1}) = \{\underline{\zeta} \in S_n,\ th \leqslant d(\mathbb{1},\underline{\zeta}) < (t+1)h\}$; on a alors

(1.3) $\exists\, K_4 > 0$ $\exists\, K_5 > 0$, $((t+1)h < 1) \Longrightarrow$

$$(K_4 t^{n-1} h^n \leqslant \sigma_n(C_{th}(\mathbb{1})) \leqslant K_5 t^{n-1} h^n).$$

Les relations (1.1) et (1.2) peuvent se trouver dans [6]. La relation (1.3) se démontre ainsi :

si $\underline{\zeta} = (\zeta^1,\dots,\zeta^n)$, $d(\mathbb{1},\underline{\zeta}) = |1 - \zeta_1|$; on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{D},\ th \leqslant |1-z| < (t+1)h\} ;$$

il vient grâce au lemme (1.2.1) de subordination :

$$\sigma_n(C_{th}(\mathbb{1})) = \alpha_n \int_\Delta (1-|z|^2)^{n-2}\, d\lambda_1(z), \quad \text{où}$$

α_n est une constante absolue ; on remarque alors que Δ est l'intersection du disque $\mathbb{D}$ et de la couronne centrée en 1 de rayons $(th\ ;\ (t+1)h)$.

On en déduit aisément (1.3).

Il existe une constante $K_6 > 0$, telle que pour tout $h > 0$, il existe un réseau $\mathfrak{K}_h = \{\underline{\zeta_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ de points de S_n vérifiant :

(1.4) $R(\underline{\zeta_k}, h) \cap R(\underline{\zeta_\ell}, h) = \emptyset$ si $k \neq \ell$.

(1.5) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R(\underline{\zeta_k}, K_6 h) = S_n$. Voir [6].

Enfin de (1.1) on tire aisément la relation :

(1.6) $\forall\ (\underline{\zeta},\underline{\eta},\underline{\zeta'},\underline{\eta'}) \in S_n^4,\qquad d(\underline{\zeta},\underline{\eta}) \geqslant \frac{1}{K_1^2}\, d(\underline{\zeta'},\underline{\eta'}) - \frac{d(\underline{\eta},\underline{\eta'})}{K_1} - d(\underline{\zeta},\underline{\zeta'})$.

On a alors

LEMME 4.1.1. <u>Il existe un entier</u> $\gamma > 0$ <u>tel que pour tout</u> $h > 0$, <u>il existe</u> γ <u>réseaux</u> $\mathfrak{K}_h^{(i)}$, $i = 1,\dots,\gamma$, <u>vérifiant que</u> S_n <u>est l'union des</u> $R(\underline{\zeta},\frac{h}{4K_1^2})$ <u>quand</u> $\underline{\zeta}$ <u>parcourt</u> $\bigcup_{i=1,\dots,\gamma} \mathfrak{K}_h^{(i)}$.

<u>Preuve</u>. Soit $\mathfrak{K}_h^{(o)}$ un réseau vérifiant les relations (1.4) et (1.5) ; soit $\underline{\zeta_o}$ un point de $\mathfrak{K}_h^{(o)}$ et soit $R(\underline{\zeta_o},K_6 h)$ la boule de centre $\underline{\zeta_o}$ et de rayon $K_6 h$; utilisant le théorème de [6], il existe une suite $\{\underline{\zeta_{o,i}},i = 1,\dots,M\}$ de points de $R(\underline{\zeta_o},K_6 h)$ telle que, si on pose

$h' = \frac{h}{4K_1^2}$ on ait :

a) $R(\underline{\zeta_{o,i}},\frac{h'}{K_6}) \cap R(\zeta_{o,j},\frac{h'}{K_6}) = \emptyset$

b) $\bigcup_{i=1}^{M} R(\underline{\zeta_{o,i}},h') \supset R(\underline{\zeta_o},K_6 h)$.

Soit alors $\underline{\zeta}$ un point de $\bigcup_{i=1}^{M} R(\underline{\zeta_{o,i}},\frac{h'}{K_6})$; soit i l'indice tel que $\underline{\zeta} \in R(\underline{\zeta_{o,i}},\frac{h'}{K_6})$; on a d'après (1.1) :

$$d(\underline{\zeta_o},\underline{\zeta}) \leqslant K_1[d(\underline{\zeta_o},\underline{\zeta_{o,i}}) + d(\underline{\zeta_{o,i}},\underline{\zeta})] \quad \text{d'où :}$$

$$d(\underline{\zeta_o},\underline{\zeta}) \leqslant K_1[K_6 h + \frac{h'}{K_6}] \quad \text{donc}$$

$$\bigcup_{i=1}^{M} R(\underline{\zeta_{o,i}},\frac{h'}{K_6}) \subseteq R(\underline{\zeta_o},K_1(K_6 h + \frac{h'}{K_6}))$$

et d'après (1.2) et la propriété a)

$$K_2 \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{K_6^n} h'^n \leqslant K_3 K_1^n (K_6 h + \frac{h'}{K_6})^n \quad ; \text{ d'où}$$

$$M \leqslant \frac{K_3}{K_2} K_1^{3n} 4^n K_6^n (K_6 + \frac{1}{4K_1^2 K_6})^n$$; et en notant γ la partie entière

de $[\frac{K_3}{K_2} K_1^{3n} 4^n K_6^n (K_6 + \frac{1}{4K_1^2 K_6})^n]$, on a $M \leqslant \gamma$ et γ <u>ne dépend pas de</u> h.

Clairement si $\mathfrak{R}_h$ est un réseau jouissant des propriétés (1.4) et (1.5) et si $u \in SU(n)$, alors $u\mathfrak{R}_h = \{u\underline{\zeta_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ est encore un réseau possédant les propriétés (1.4) et (1.5) puisque la pseudo métrique est invariante par $SU(n)$; soit alors u_i, $i = 1,\dots,M$ l'élément de $SU(n)$ vérifiant $\underline{u_i \zeta_o} = \underline{\zeta_{o,i}}, i = 1,\dots,M$ et posons $\mathfrak{R}_h^{(i)} = u_i \mathfrak{R}_h^{(o)}$; alors la suite $\mathfrak{R}_h^{(i)}, i = 1,\dots,M$ répond à la question parce que chaque u_i transforme une pseudo boule en pseudo boule de même rayon.

4.2 <u>ETUDE D'UNE CONVOLUTION SUR</u> $SU(n)$.

On identifie $SU(n)$ à S_n de la manière suivante

$$u \in SU(n) \longleftrightarrow \underline{\varphi} = u.\underline{\mathbb{1}} \in S_n.$$

Soit alors pour $t_o \in \mathbb{N}$, $h > 0$ et $a \geqslant 0$ la fonction suivante

$$K_{h,t_o,a}(\underline{\zeta}) = \frac{h\chi_{t_o h}(\underline{\zeta})}{[|1 - \underline{\mathbb{1}} \cdot \underline{\varphi}|^2 + a^2 h^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

où $\chi_{t_o h}(\underline{\zeta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\zeta} \in R(\mathbb{1}, 1) \setminus R(\mathbb{1}, t_o h) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Posons $\varphi(t_o,a) = \frac{K_5}{a} \int_{\frac{t_o}{a}}^{+\infty} \frac{y^{n-1}dy}{[y^2+1]^{\frac{n+1}{2}}}$ si $a > 0$

et $\varphi(t_o,0) = K_5 \sum\limits_{t \geqslant t_o} \frac{1}{t^2}$ si $a=0$, on a alors :

LEMME 4.2.1. <u>La fonction</u> $K_{h,t_o,a}$ <u>appartient à</u> $L^1(\sigma_n)$ <u>et vérifie</u> $\|K_{h,t_o,a}\| \leqslant \varphi(t_o,a)$; <u>la convolution avec</u> $K_{h,t_o,a}$ <u>est donc un opérateur borné de</u> $L^p(\sigma_n)$ <u>dans</u> $L^p(\sigma_n)$ <u>de norme inférieure à</u> $\varphi(t_o,a)$.

<u>Preuve</u>. On a $\int_{S_n} K_{h,t_o,a}(\underline{\varphi})d\sigma_n(\underline{\zeta}) = \alpha_n \int_{\mathbb{D}\cap\{|1-z|\geqslant t_o h\}} \frac{h(1-|z|^2)^{n-2}\, d\lambda_1(z)}{[|1-z|^2+a^2h^2]^{\frac{n+1}{2}}}$

grâce au lemme de subordination, d'où

$$\|K_{h,t_o,a}\|_1 \leqslant \alpha_n h \sum_{t \geqslant t_o} \int_{\mathbb{D}\cap\{th\leqslant|1-z|<(t+1)h\}} \frac{(1-|z|^2)^{n-2}}{|1-z|^{n+1}}\, d\lambda_1(z)$$

$$\|K_{h,t_o,a}\|_1 \leqslant h \sum_{t \geqslant t_o} \frac{1}{[t^2+a^2]^{\frac{n+1}{2}} h^{n+1}}\, \sigma_n(C_{th}(\underline{1}))$$

$$\|K_{h,t_o,a}\|_1 \leqslant K_5 \sum_{t \geqslant t_o} \frac{t^{n-1}}{[t^2+a^2]^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{grâce à (1.3)}$$

d'où en comparant la série et l'intégrale

$\|K_{h,t_o,a}\|_1 \leqslant \varphi(t_o,a)$; <u>on remarque bien que</u> $\varphi(t_o,a)$ <u>ne dépend pas de</u> h.

Puisque σ_n est une mesure invariante par $SU(n)$, la convolution avec $K_{h,t_o,a}$ est bien bornée de L^p dans L^p avec comme norme $\varphi(t_o,a)$.

On aura aussi besoin du lemme suivant.

LEMME 4.2.2. <u>Soit</u> $\sigma = \{\underline{z_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ <u>une suite séparée dans</u> $\mathbb{B}_n$; <u>alors il</u>

existe une constante positive C telle que :

$$\forall\, p > 0,\quad \forall\, f \in A^p(\lambda_n),\quad \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(\underline{z}_k)|^p (1-|z_k|^2)^{n+1} \leqslant C\, \|f\|_p^p.$$

Preuve. A $\underline{z}$ dans $\mathbb{B}_n$, $\underline{z} \neq \underline{0}$, on associe la droite complexe $R_{\underline{z}}$ déterminée par $\underline{0}$ et $\underline{z}$, et l'espace $T_{\underline{z}}$ orthogonal à $R_{\underline{z}}$ en $\underline{z}$ dans $\mathbb{C}^n$; $T_{\underline{z}}$ est de dimension complexe $n-1$; pour δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, on associe à $\underline{z}$ le polydisque $D_{\underline{z}} = D^1_{\underline{z}} \times D^2_{\underline{z}}$ où $D^1_{\underline{z}} = \{\underline{\varphi} \in R_{\underline{z}},\ |\underline{z} - \underline{\varphi}| < \delta(1-|\underline{z}|^2)\}$ et $D^2_{\underline{z}} = \{\underline{\varphi} \in T_{\underline{z}},\ |\underline{z}-\underline{\varphi}| < \delta\sqrt{1-|\underline{z}|^2}\}$; on a $\lambda_n(D_{\underline{z}}) = \delta^{2n}(1-|\underline{z}|^2)^{n+1}$.

Soit maintenant $\sigma = \{\underline{z}_k,\ k \in \mathbb{N}\}$; il existe δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$; tel que les polydisques $D_{\underline{z}_k}$ soient disjoints ; reprenant alors exactement la preuve du lemme 2.1.1 on montre le lemme 4.2.2.

4.3. REDUCTION DU PROBLEME.

On considère $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant \nu$ et le système de réseaux $\mathcal{F}^{(i)}_{2^{\nu-m}}$ $i = 1,\ldots,M$, introduit au paragraphe 1 ; on définit alors les cellules de la manière suivante :

$$D^{(i)}_{m,\underline{\zeta}_k} = \{\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_n,\ \underline{\zeta} = r\underline{\eta},\ 1-2^{-m} \leqslant r < 1-2^{-m-1},\ \underline{\eta} \in R(\underline{\zeta}^{(i)}_k, \frac{2^{\nu-m}}{4K_1^2})\}.$$

Soit σ une suite séparée dans $\mathbb{B}_n$; il existe donc un entier N tel que :

$$\forall\, i = 1,\ldots,M,\quad \forall\, m \geqslant \nu,\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\quad \mathrm{card}(\sigma \cap D_{m,\underline{\zeta}_k^{(i)}}) \leqslant N.$$

Soit σ_i, $i = 1,\ldots,M$, définie par :

$\sigma_i = \bigcup_{m,k} (\sigma \cap D_{m,\zeta_k^{(i)}})$; alors $\sigma = \bigcup_{i=1}^{M} \sigma_i$ et il existe $\sigma_{i,j}$, $j = 1,\ldots,N$, telle que $\mathrm{card}(\sigma_{i,j} \cap D_{m,\underline{\zeta}_k^{(i)}}) \leqslant 1$ et $\bigcup_{j=1}^{N} \sigma_{i,j} = \sigma_i$.

Si $C_m^{(i)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{m,\underline{\zeta}_k^{(i)}}$ posons pour $k = 1,\dots,\nu$

$\sigma_{i,j,k} = \bigcup_{m \equiv k (\mathrm{mod}\ \nu)} (\sigma_{i,j} \cap C_m^{(i)})$. On a alors $\sigma = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,M \\ j=1,\dots,N \\ k=1,\dots,\nu}} \sigma_{i,j,k}$.

On étudiera $s = \sigma_{i,j,k}$ pour i,j,k fixés. Il existe au plus un point de s dans $D_{m,\underline{\zeta}_\ell^{(i)}} = D_{m,\ell}$, on notera $\underline{z}_{m,\ell}$ ce point et on pose

$$\Lambda_m = \{\ell \in \mathbb{N},\quad s \cap D_{m,\ell} \neq \emptyset\} \qquad \text{et}$$

$$s_m = \{z_{m,k},\quad k \in \Lambda_m\}.$$

L'indice i étant fixé dans cette étude, soit $\underline{\zeta}_{m,\ell}$ l'élément $\zeta_\ell^{(i)}$ du réseau $\mathfrak{F}^{(i)}_{2^{\nu-m}}$ et soit $\underline{z}_{m,\ell} = r_{m,\ell}\, \underline{\eta}_{m,\ell}$. On a alors :

$$(3.1) \qquad \forall\, m \geq \nu,\quad \forall\, \ell \in \Lambda_m,\quad 1 - 2^{-m} \leq r_{m,\ell} < 1 - 2^{-m-1}$$

$$(3.2) \qquad (\underline{z}_{m,\ell} \in s,\quad \underline{z}_{m,\ell} \in s) \Longrightarrow m \equiv m' (\mathrm{mod}\ \nu)$$

$$(3.3) \qquad d(\underline{\zeta}_{m,\ell}, \underline{\eta}_{m,\ell}) \leq \frac{2^{-\nu-m}}{4K_1^2}$$

$$(3.4) \qquad \ell \neq k \Longrightarrow d(\underline{\eta}_{m,\ell}, \underline{\eta}_{m,k}) \geq \frac{2^{-\nu-m}}{2K_1^2}$$

d'après la relation (1.6).

LEMME 4.3.1. <u>On a</u> : (3.5) $\displaystyle\sum_{\ell \in \Lambda_m} \frac{1}{|1 - \bar{\underline{z}}_{m,\ell} \cdot \underline{z}_{m',k}|^{n+1}} \leq K_7 \frac{2^{m(n+1)}}{[1 - 2^{-(m'-m)}]}$

<u>si</u> $m \neq m'$ <u>et</u> (3.6) $\displaystyle\sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ \ell \neq k}} \frac{1}{|1 - \bar{\underline{z}}_{m,\ell} \cdot \underline{z}_{m,k}|^{n+1}} \leq K_8 \psi(\nu) 2^{m(n+1)}$ <u>où</u> $\psi(\nu)$ <u>tend vers</u> 0 <u>quand</u> ν <u>tend vers l'infini</u>.

<u>Preuve</u>. avec les notations ci-dessus on a, $\exists\, K_9 > 0$ et $K_{10} > 0$ t.q. :

$$(3.7) \qquad |1 - \bar{\underline{z}}_{m,\ell} \cdot \underline{z}_{m',k}|^2 \geq K_9[(2^{-m} + 2^{-m'})^2 + |1 - \bar{\underline{\eta}}_{m,\ell} \cdot \eta_{m',k}|^2]$$

dès que $d(\eta_{m,\ell},\eta_{m',k}) < 1$ et

$$(3.8) \qquad |1-\bar{z}_{m,\ell}\cdot z_{m',k}|^2 \geqslant K_{10} \quad \text{dès que} \quad d(\eta_{m,\ell},\eta_{m',k}) \geqslant 1.$$

La somme (3.5) peut donc s'écrire :

$$\sum_{\ell\in\Lambda_m} \frac{1}{|1-\bar{\underline{z}}_{m,\ell}\cdot\underline{z}_{m',k}|^{n+1}} = I_1 + I_2 \quad \text{avec} \quad I_1 = \sum_{\substack{\ell\in\Lambda_m \\ d(\underline{\eta}_{m,\ell},\underline{\eta}_{m',k})<1}} \frac{1}{|1-\bar{\underline{z}}_{m,\ell}\cdot\underline{z}_{m',k}|^{n+1}}$$

et $$I_2 = \sum_{\substack{\ell\in\Lambda_m \\ d(\underline{\eta}_{m,\ell},\underline{\eta}_{m',k})\geqslant 1}} \frac{1}{|1-\bar{\underline{z}}_{m,\ell}\cdot\underline{z}_{m',k}|^{n+1}}.$$

<u>Voyons</u> I_1. On a grâce à (3.7)

$$I_1 \leqslant \frac{1}{K_9} \sum_{\ell\in\Lambda_m,\, d(\underline{\eta}_{m,\ell},\underline{\eta}_{m',k})<1} \frac{1}{[(2^{-m}+2^{-m'})^2 + |1-\bar{\underline{\eta}}_{m,\ell}\,\underline{\eta}_{m',k}|^2]}.$$

Posons $$f(\underline{\zeta}) = \sum_{\substack{\ell\in\Lambda_m \\ d(\eta_{m,\ell};\eta_{m,k})<1}} \chi_{B_{m,\ell}}(\underline{\zeta}) \quad \text{et} \quad g(\underline{\eta}) = \chi_{B_{m',k}}(\underline{\eta})$$

avec $B_{m,\ell} = R(\zeta_{m,\ell}, \frac{2^{-m}}{4K_1^2})$ $B_{m',k} = R(\zeta_{m',k}, \frac{2^{-m'}}{4K_1^2})$ et χ_E la fonction indicatrice de E ; on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|g\|_1 \leqslant K_3 2^{-m'(n+1)}$; posons encore $h = 2^{-m}$, $t_o = 0$, et $a = 1+2^{-(m'-m)}$ et appliquons le lemme 4.2.1 ; on a

$$|\langle K_{h,o,a} * f, g\rangle| \leqslant \varphi(0,a)\, \|f\|_\infty \|g\|_1$$

ce qui donne aisément, grâce aux relations (3.1) (3.2) (3.3) (3.4).

$$(3.9) \qquad I_1 \leqslant K_{11} \frac{2^{m(n+1)}}{[1+2^{-(m'-m)}]} \qquad \text{si} \quad m \neq m'.$$

Si $m = m'$, on choisit t_o = partie entière de $\frac{2^\nu}{2K_1^2}$ et $a = 0$ et il vient :

$$(3.10) \qquad I_1 \leqslant K_{12}\varphi(t_o)2^{m(n+1)} = K_{12}\psi(\nu)2^{m(n+1)}$$

avec $\psi(\nu) = \varphi(t_o) \to 0$ qd $\nu \to +\infty$.

<u>Voyons</u> I_2 : On a $I_2 \leqslant |\Lambda_m| \leqslant 2^{(m-\nu)n}$ grâce à (3.8) donc

si $m \neq m'$ $\qquad I \leqslant K_7 \dfrac{2^{m(n+1)}}{[1+2^{-(m'-m)}]}$

si $m = m'$ $\qquad I \leqslant K_8 \psi(\nu) 2^{m(n+1)}$.

Reprenant alors exactement les arguments utilisés dans le cas du disque on montre la

PROPOSITION 4.3.1. <u>Pour</u> $p > 1$, <u>pour tout</u> θ, $\frac{n+1}{q} - 1 < \theta < \frac{n+1}{q}$, <u>il existe une constante positive</u> $K^p_{\theta,\nu}$ <u>telle que</u> :

$\Sigma\, Q_p(m,\ell\,;\, m',k)(1-|z_{m,\ell}|^2)^{\theta} \leqslant K^p_{\theta,\nu}(1-|\underline{z}_{m',k}|^2)^{\theta}$ et $K^p_{\nu,\theta}$ <u>tend vers</u> 0 <u>quand</u> ν <u>tend vers l'infini</u>.

où l'on a posé $\quad Q_p(m,\ell\,;\, m',k) = \dfrac{(1-|\underline{z}_{m,\ell}|^2)^{\frac{n+1}{p}}(1-|\underline{z}_{m',k}|^2)^{\frac{n+1}{q}}}{|1-\overline{\underline{z}}_{m,\ell}\cdot\underline{z}_{m',k}|^{n+1}}$ $\quad$ avec

$(m,\ell) \neq (m',k)$ et 0 sinon.

De cette proposition et utilisant le lemme puis des arguments identiques à ceux du chapitre II on tire le

THEOREME 4.3.1. <u>Soit</u> σ <u>une suite séparée dans</u> $\mathbb{B}_n$; <u>pour</u> $p > 1$, σ <u>est une union finie de suites strictement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$; <u>pour</u> $p > 0$ σ <u>est une union finie de suites</u> σ_i <u>fortement d'interpolation</u> $A^p(\lambda_n)$; <u>de plus, si</u> p <u>est inverse d'entiers</u>, σ_i <u>possède la propriété d'extension linéaire bornée de</u> $\ell^p(\mathbb{N})$ <u>dans</u> $A^p(\lambda_n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. et E. AMAR : Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans $\mathbb{C}^n$. Preprint n° 167. Analyse Harmonique, Orsay (1975).

[2] E. AMAR : Méthodes hilbertiennes et interpolation. Preprint n° 152. Analyse Harmonique, Orsay (1975).

[3] E. AMAR : Interpolation dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$. Preprint n° 207. Analyse Harmonique, Orsay (1976).

[4] E. AMAR : Suites d'interpolation harmonique. Preprint n° 217. Analyse Harmonique, Orsay (1976).

[5] L. CARLESON : An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).

[6] R. COIFMAN et G. WEISS : Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes. Lect. Notes in Math. n° 242. Springer Verlag (1971).

[7] F. FORELLI et W. RUDIN : Projections on spaces of holomorphie functions in bolls. Indiana Univ. Math. J. Vol 24 n° 6 (1974).

[8] T.W. GAMELIN : Uniform Algebras. Prentice Hall Series in Modern Math. (1969).

[9] C. HOROWITZ : Zeros of functions in the Bergman Spaces. Bull. Amer. Math. Soc 80 (1974).

[10] C. HOROWITZ et D. OBERLIN : Restriction of H^p functions to the Diagonal of U^n. Indiana Univ. Math. J. Vol 24 n° 8 (1975).

[11] V. KABAILA : Interpolation Sequences for the H^p classes in the case $p < 1$. Litovsk. Mat. Sb. 3 (1963) n° 1.

[12] A. KORANYI et S. VAGI : Intérales singulières sur certains espaces homogènes. C.R.A.S. 268 (1969).

[13] A.L. SHIELDS et D.L. WILLIAMS : Bounded Projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions. T.A.M.S. (162) (1971).

[14] H. SHAPIRO et A.L. SHIELDS : On some interpolations problems for analytic functions. Amer. J. Math. 83 (1961).