Q-Algèbres et produits tensoriels topologiques

Ph. CHARPENTIER

N° 43

Q-ALGEBRES ET PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

par

Philippe CHARPENTIER

Q-ALGEBRES ET PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

par Philippe Charpentier

O. INTRODUCTION

La notion de Q-algèbre a été introduite par J. Wermer dans [11]. Dans ce travail nous nous proposons de répondre essentiellement à deux questions concernant les Q-algèbres. La première consiste à se demander si pour toute Q-algèbre A il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout polynôme $P(z_1, \ldots, z_n)$ de degré 1 et à coefficients dans A, et tout x_i dans la boule unité de A, on ait $\|P(x_1, \ldots, x_n)\|_A \leq K \sup_{|z_i| \leq 1} \|P(z_1, \ldots, z_n)\|_A$. Inversement, une algèbre de Banach commutative qui vérifie cette propriété est-elle une Q-algèbre ? La seconde question est liée aux normes tensorielles définies par A. Grothendieck dans [4]. Si α est une norme tensorielle, on notera $\mathcal{A}\mathcal{C}_\alpha$ la classe des algèbres de Banach commutatives telles que la multiplication est continue de $A \overset{\alpha}{\otimes} A$ dans A. Existe-t-il une norme tensorielle naturelle α telle que $\mathcal{A}\mathcal{C}_\alpha$ soit la classe des Q-algèbres. Ces deux questions sont étroitement liées et nous verrons que la première peut se traiter comme un cas particulier de la seconde.

Dans les trois premiers numéros du premier paragraphe, nous rappelons les définitions concernant les normes tensorielles et nous donnons les résultats dont nous aurons besoin. Dans le n° 4 nous introduisons la notion d'algèbre de type α ; n'ayant pas l'intention d'étudier ces algèbres, nous ne donnons que quelques résultats élémentaires utilisés dans les paragraphes 2 et 3.

Le deuxième paragraphe est une synthèse des principaux résultats connus sur les Q-algèbres.

Dans le paragraphe 3 nous démontrons les résultats annoncés. La plupart des théorèmes et propositions donnés dans les paragraphes 1 et 2 sont utilisés dans les démonstrations.

Notations. En ce qui concerne les normes tensorielles nous avons adopté les notations et la terminologie de [4]. Celles-ci sont quelque peu différentes de celles de [5]. Vu l'importance des espaces de type $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$, rappelons-en brièvement les définitions. On appelle espace de type $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{C}$) un espace de Banach métriquement isomorphe à un espace $L^1(\mu)$ où μ est une mesure positive convenable (resp. à un espace $\mathbb{C}_o(M)$ construit sur un espace localement compact bien choisi). Tout espace de Banach est métriquement isomorphe à un sous-espace d'un espace de type $\mathscr{C}$ et à un quotient d'un espace de type $\mathscr{L}$. Il est bien connu que le dual d'un espace de type $\mathscr{L}$ est de type $\mathscr{C}$ et que le dual d'un espace de type $\mathscr{C}$ est de type $\mathscr{L}$.

Je remercie particulièrement M. N. Th. Varopoulos qui m'a posé ces problèmes et qui a suivi mon travail avec un soin constant.

Je tiens à remercier Mme Dumas qui a dactylographié le manuscrit avec toute la compétence qu'on lui connaît.

Philippe Charpentier

I. NORMES TENSORIELLES NATURELLES ET DEFINITION DES α-ALGEBRES NATURELLES.

1. DEFINITIONS GENERALES.

Etant donnés deux espaces de Banach E et F, on dit qu'une norme α sur le produit tensoriel $E \otimes F$ est une norme raisonnable si pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, $|x \otimes y|_\alpha = \|x\| \, \|y\|$, et si pour tout $x' \in E'$ et $y' \in F'$, $|x' \otimes y'|_{\alpha'} = \|x'\| \, \|y'\|$ où α' désigne la norme duale de α. Il s'ensuit qu'il existe sur $E \otimes F$ une plus petite norme raisonnable, notée $\vee$ (notation de [4] ; dans [5] cette norme est notée $\hat{\lambda}$), et une plus grande, notée $\wedge$. Plus précisément, ces normes sont données par les formules

$$|u|_\vee = \sup_{\substack{\|x'\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} |\langle u , x' \otimes y' \rangle| , \qquad u \in E \otimes F ,$$

$$|u|_\wedge = \sup_{\substack{v \in B(E,F) \\ \|v\| \leq 1}} |\langle u , v \rangle| , \qquad u \in E \otimes F ,$$

où $B(E,F)$ désigne l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$. La norme $\wedge$ sur $E \otimes F$ est aussi donnée par

$$|u|_\wedge = \inf \sum_i \|x_i\| \, \|y_i\| ,$$

le inf portant sur toutes les représentations de u sous la forme d'une somme finie $u = \sum_i x_i \otimes y_i$.

Le complété de $E \otimes F$ pour la norme raisonnable α est noté $E \overset{\alpha}{\otimes} F$. Par définition, le dual de $E \hat{\otimes} F$ est $B(E,F)$.

Soit $\mathcal{N}$ la classe des espaces normés de dimension finie. On appelle <u>norme tensorielle</u> tout foncteur α de la classe $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ tel que si E et F appartiennent à $\mathcal{N}$, $\alpha(E,F)$ est égal à $E \otimes F$ muni d'une norme raisonnable α qui vérifie la propriété suivante : soient u_i une application linéaire de E_i dans F_i, $E_i, F_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2$, et $u_1 \overset{\alpha}{\otimes} u_2$ l'application de $\alpha(E_1,E_2)$ dans $\alpha(F_1,F_2)$ égale à $u_1 \otimes u_2$; alors, $\|u_1 \overset{\alpha}{\otimes} u_2\| \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$. Comme précédemment, l'espace $\alpha(E,F)$ est noté $E \overset{\alpha}{\otimes} F$, et, pour tout $u \in E \overset{\alpha}{\otimes} F$, la norme de u est notée $|u|_\alpha$.

<u>Opérations fondamentales sur les normes tensorielles</u>. Soient α une norme tensorielle, E et F deux espaces normés de dimension finie. Pour $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ dans $E \otimes F$, posons ${}^t u = \sum_i y_i \otimes x_i \in F \otimes E$. Alors $u \longrightarrow |{}^t u|_\alpha$ est une norme sur $E \otimes F$, et on vérifie aussitôt que ceci définit une nouvelle norme tensorielle que l'on note ${}^t\alpha$. En d'autres termes $E \overset{{}^t\alpha}{\otimes} F = F \overset{\alpha}{\otimes} E$. En général ${}^t\alpha \neq \alpha$; on dit que α est <u>symétrique</u> lorsque ${}^t\alpha = \alpha$. Si on considère sur $E \otimes F$ la norme duale de la norme α sur $E' \otimes F'$, on constate que l'on obtient encore une norme tensorielle. Cette norme est notée α' et s'appelle la <u>norme tensorielle duale</u> de α. Il est clair que ${}^t({}^t\alpha) = \alpha$, $(\alpha')' = \alpha$, ${}^t(\alpha') = ({}^t\alpha)'$. On note généralement $\check{\alpha} = ({}^t\alpha)'$. Soient α et β deux normes tensorielles et $\lambda \geq 0$. On écrira $\alpha \leq \lambda\beta$ si pour tout couple d'espaces normés de dimensions finies (E,F), on a $|u|_\alpha \leq \lambda |u|_\beta$ pour tout $u \in E \otimes F$ (ce qui implique $\lambda \geq 1$). On dira que α et β sont <u>équivalentes</u> si il existe $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ tels que $\beta \leq \mu\alpha \leq \lambda\beta$. Il est clair que $\vee$ et $\wedge$ sont des norme tensorielles symétriques duales l'une de l'autre.

<u>Extension aux espaces de Banach</u>. Soient α une norme tensorielle, E et F

deux espaces de Banach. Compte tenu des définitions précédentes, on voit aussitôt que la formule

$$|u|_\alpha = \inf_{(M,N)} |u|_{M \overset{\alpha}{\otimes} N} , \quad u \in E\otimes F,$$

le inf portant sur l'ensemble des couples (M,N) de sous-espaces normés de dimensions finies de E et F respectivement, définit sur $E \otimes F$ une norme raisonnable. On désigne par $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ le complété de $E \otimes F$ pour la norme $|u|_\alpha$. Pour $\alpha = \vee$ et $\alpha = \wedge$ cette définition donne clairement les formules qui ont été données au début de ce numéro. Les propriétés $|{}^t u|_\alpha = |u|_{{}^t\alpha}$ et $\|u_1 \overset{\alpha}{\otimes} u_2\| \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$ citées précédemment passent immédiatement au cas général des espaces de Banach.

<u>Formes et applications de type</u> α. Soient E et F deux espaces de Banach et α une norme tensorielle. Comme $|u|_\alpha \leq |u|_\wedge$, $u \in E\otimes F$, le dual de $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $B(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires continue sur $E \times F$. On dit qu'<u>une forme bilinéaire</u> sur $E \times F$ est de <u>type α</u>, ou une <u>α-forme</u>, si elle appartient au dual de $E \overset{\alpha'}{\otimes} F$. L'espace de ces formes (i.e. le dual de $E \overset{\alpha'}{\otimes} F$) est noté $B^\alpha(E,F)$ et la norme sur cet espace est notée $\|u\|_\alpha$. On dit qu'une application linéaire continue u de E dans F est de <u>type α</u>, ou une <u>α-application</u>, si la forme bilinéaire $\langle u(x) , y' \rangle$ sur $E \times F'$ est de type α, et la α-norme de cette dernière est appelée la α-norme de u et est notée $\|u\|_\alpha$. L'espace des α-applications de E dans F muni de la α-norme est noté $\mathcal{L}^\alpha(E \,;\, F)$. Un résultat élémentaire mais utile et non trivial est prouvé dans [1]: soit A une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, et soit $\widetilde{A}$ son prolongement canonique à $E \times F''$. Pour que A soit de type α, il faut et il suffit que $\widetilde{A}$ le soit, et on a

$\|A\|_\alpha = \|\tilde{A}\|_\alpha$. Notons aussi que si u est une application linéaire de E dans F', u est de type α si et seulement si la forme bilinéaire $\tilde{u}$ sur $E \times F$, $\tilde{u}(x,y) = \langle u(x), y \rangle$ est de type α, et $\|u\|_\alpha = \|\tilde{u}\|_\alpha$. Soit u une application linéaire continue de E dans F, et ${}^t u : F' \to E'$ la transposée de u. Alors u est de type α si et seulement si ${}^t u$ est de type ${}^t\alpha$, et $\|u\|_\alpha = \|{}^t u\|_{{}^t\alpha}$. Si $u \in \mathcal{L}^\alpha(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(E;G)$, on a $v \circ u \in \mathcal{L}^\alpha(E;G)$ et $\|v \circ u\|_\alpha \leq \|v\| \, \|u\|_\alpha$; de même pour $w \in \mathcal{L}(H;E)$ et $u \in \mathcal{L}^\alpha(E;F)$. En particulier, si Φ est un isomorphisme de F sur G, et $u \in \mathcal{L}^\alpha(E;F)$ on a $\|u\|_\alpha \leq \|\Phi^{-1}\| \, \|\Phi \circ u\|_\alpha \leq \|\Phi^{-1}\| \, \|\Phi\| \, \|u\|_\alpha$. Disons encore que dans le cas $\alpha = \wedge$ on emploie les noms de <u>forme bilinéaire intégrale</u>, <u>application intégrale</u>, et <u>norme intégrale</u>.

<u>Comparaison des normes tensorielles</u>. Soient α et β deux normes tensorielles et $\lambda \geq 0$ tels que $\alpha \leq \lambda \beta$. Si E et F sont deux espaces de Banach, on a alors $|u|_\alpha \leq \lambda \, |u|_\beta$ pour tout $u \in E \otimes F$. Si u est une application linéaire continue de E dans F, on a $\|u\|_\alpha \leq \lambda \|u\|_\beta$, et de même pour les formes sur $E \times F$. On dit alors que <u>β domine α.</u> On pourra noter que les résultats essentiels que nous citons dans les trois premiers numéros de ce paragraphe peuvent s'exprimer par de telles relations.

<u>Normes injectives et projectives</u>. Soit α une norme tensorielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Quels que soient les espaces de Banach E et G et le sous-espace F de E, l'application canonique $F \overset{\alpha}{\otimes} G \to E \overset{\alpha}{\otimes} G$ est un isomorphisme isométrique (dans).

b) Quels que soient E , F , G comme dans a), l'application canonique

$E \overset{\alpha'}{\otimes} G \longrightarrow (E/F) \overset{\alpha'}{\otimes} G$ est un homomorphisme métrique surjectif.

c) Toute α'-forme sur $F \times G$ se prolonge en une α'-forme sur $E \times G$ de même α'-norme.

d) Pour toute α-forme sur $E \times G$ qui s'annule sur $F \times G$, la forme sur $(E/F) \times G$ qui s'en déduit par passage au quotient a même α-norme.

On dit qu'une norme tensorielle α est <u>injective à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) si les conditions précédentes sont vérifiées pour α (resp. pour ${}^t\alpha$). On dit que α est <u>injective</u> si elle est injective à gauche et à droite. On dit que α est <u>projective à gauche</u> (resp. <u>projective à droite</u>, resp. <u>projective</u>) si sa duale α' est injective à gauche (resp. injective à droite, resp. injective). Par exemple, il est trivial que $\vee$ est injective et $\wedge$ projective. Il est clair que la borne supérieure d'une famille de normes injectives à gauche (resp. à droite) est une norme tensorielle injective à gauche (resp. à droite). Ainsi pour toute norme tensorielle α, il existe une plus grande norme tensorielle injective à gauche (resp. à droite) majorée par α ; on la note $/\alpha$ (resp. $\alpha\backslash$). Par dualité, il existe une plus petite norme tensorielle projective à gauche (resp. à droite) minorée par α ; on la note $\backslash\alpha$ (resp. $\alpha/$). On a clairement ${}^t(/\alpha) = ({}^t\alpha)\backslash$, ${}^t(\backslash\alpha) = ({}^t\alpha)/$, $(/\alpha)' = \backslash(\alpha')$, etc... On vérifie aussi que $(/\alpha)\backslash = /(\alpha\backslash) = /\alpha\backslash$ est la plus grande norme injective majorée par α, et que $(\backslash\alpha)/ = \backslash(\alpha/) = \backslash\alpha/$ est la plus petite norme projective minorée par α. La propriété fondamentale des normes $/\alpha$, $\backslash\alpha, \dots,$ est qu'elles peuvent se calculer à partir de α en utilisant les espaces de type $\mathscr{L}$ et de type $\mathscr{C}$. Cette propriété est résumée dans la proposition suivante (pour une démonstration voir [1]) :

PROPOSITION 1.1. Soient E un espace de Banach, C un espace de type $\mathscr{C}$,

L un espace de type $\mathcal{L}$, et α une norme tensorielle. On a les isomorphismes isométriques canoniques

$$C \overset{/\alpha}{\otimes} E = C \overset{\alpha}{\otimes} E \quad , \qquad L \overset{\backslash\alpha}{\otimes} E = L \overset{\alpha}{\otimes} E \quad ,$$

$$E \overset{\alpha\backslash}{\otimes} C = E \overset{\alpha}{\otimes} C \quad , \qquad E \overset{\alpha/}{\otimes} L = E \overset{\alpha}{\otimes} L \quad ,$$

$$C_1 \overset{/\alpha\backslash}{\otimes} C_2 = C_1 \overset{\alpha}{\otimes} C_2 \quad , \qquad L_1 \overset{\backslash\alpha/}{\otimes} L_2 = L_1 \overset{\alpha}{\otimes} L_2 \quad ,$$

où les C_i sont du type $\mathcal{C}$ et les L_i du type $\mathcal{L}$, $i = 1, 2$.

Traduisons cette proposition. <u>En termes de formes bilinéaires</u> : si u est une forme bilinéaire sur $C \times E$, on a $\|u\|_{\backslash\alpha} = \|u\|_{\alpha}$; si u est une forme bilinéaire sur $L \times E$ on a $\|u\|_{/\alpha} = \|u\|_{\alpha}$. <u>En termes d'applications linéaires</u>, si u est une application $C \to E$ (resp. $E \to L$, $C \to L$), on a $\|u\|_{\backslash\alpha} = \|u\|_{\alpha}$ (resp. $\|u\|_{\alpha/} = \|u\|_{\alpha}$, $\|u\|_{\backslash\alpha/} = \|u\|_{\alpha}$) ; si u est une application $L \to E$ (resp. $E \to C$, $L \to C$) on a $\|u\|_{/\alpha} = \|u\|_{\alpha}$ (resp. $\|u\|_{\alpha\backslash} = \|u\|_{\alpha}$, $\|u\|_{/\alpha\backslash} = \|u\|_{\alpha}$). E étant plongé (métriquement) dans un espace C du type $\mathcal{C}$, la norme $|u|_{/\alpha}$ dans $E \otimes F$ est induite par la norme de $C \overset{\alpha}{\otimes} F$, et de même pour $E \overset{\alpha\backslash}{\otimes} F$ et $E \overset{/\alpha\backslash}{\otimes} F$. E étant identifié (métriquement) à un quotient d'un espace L du type $\mathcal{L}$, la norme $|u|_{\backslash\alpha}$ dans $E \otimes F$ est la norme quotient de la norme $|u|_{\alpha}$ de $L \otimes F$ par le noyau de l'homomorphisme canonique $L \otimes F \to E \otimes F$. On calcule de même $E \overset{\alpha/}{\otimes} F$ et $E \overset{\backslash\alpha/}{\otimes} F$. Ces remarques permettent de déterminer les formes et applications de type $\backslash\alpha$, $/\alpha$, etc... Donnons par exemple la caractérisation des applications de type $/\alpha$ et $\backslash\alpha$:

PROPOSITION 1.2. Soit u une application linéaire continue de E dans F, et soit α une norme tensorielle.

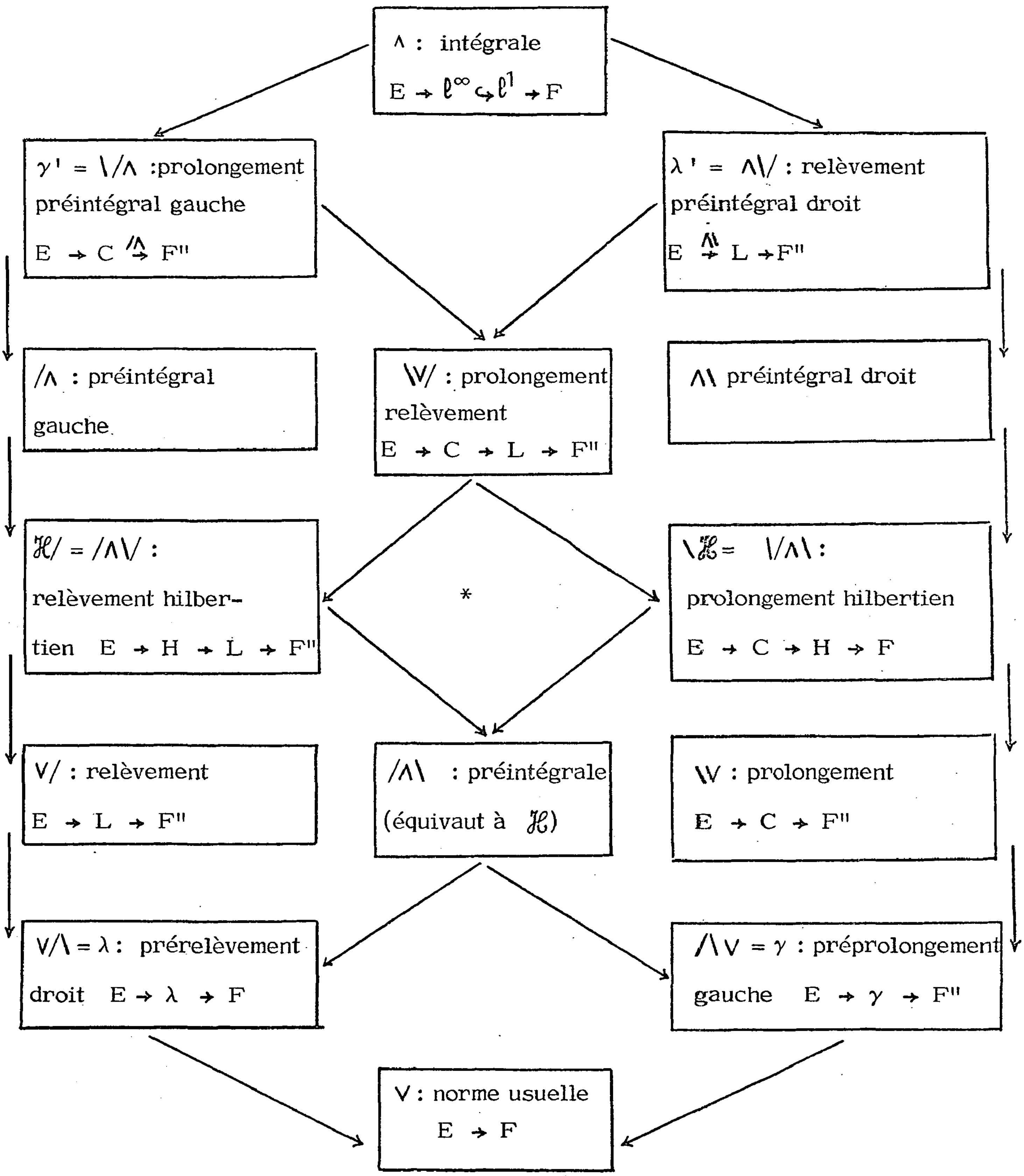
a) Pour que $\|u\|_{/\alpha} \leq 1$, il faut et il suffit que, étant donné un homomorphisme métrique surjectif v d'un espace L du type $\mathcal{L}$ sur E, $u \circ v$ soit de α-norme ≤ 1.

b) Pour que $\|u\|_{\backslash\alpha} \leq 1$, il faut et il suffit que u se factorise en $E \xrightarrow{\Phi} C \xrightarrow{v} F''$ où C est du type $\mathcal{C}$ et $\|\Phi\| \leq 1$, $\|v\|_{\alpha} \leq 1$.

Notons que dans la caractérisation a) il n'est pas nécessaire de supposer que L est du type $\mathcal{L}$. Si il existe un homomorphisme métrique Φ d'un espace E_1 sur E tel que $\|u \circ \Phi\|_{\alpha} \leq 1$, alors $\|u\|_{/\alpha} \leq 1$. De même, si on peut trouver un isomorphisme métrique Ψ de F dans un espace F_1 tel que $\|\Psi \circ u\|_{\alpha} \leq 1$, alors $\|u\|_{\alpha\backslash} \leq 1$.

2. LES NORMES TENSORIELLES NATURELLES.

Soit Φ le plus petit ensemble de normes tensorielles qui contient la norme usuelle $\vee$ et qui est stable par les opérations $\alpha \to \alpha'$, ${}^t\alpha$, $/\alpha$. On appelle alors norme tensorielle naturelle toute norme tensorielle qui est équivalente à une norme de l'ensemble Φ. L'article [4] de A. Grothendieck est essentiellement contenu dans le fait que le tableau ci-après décrit complètement (à des équivalences près) l'ensemble Φ (la norme $\mathcal{H}$ sera introduite au numéro suivant).



En particulier, il y a 14 normes tensorielles distinctes dans Φ. Le tableau se lit de la manière suivante : dans chaque case est indiqué le symbole permettant de retrouver la la norme à partir de $\bigvee$ suivi du nom de la norme ; le diagramme apparaissant sous la norme α signifie que les α-applications peuvent se caractériser par une telle factorisation. Par exemple une application linéaire u de E dans F est de $\mathcal{H}/$-norme ≤ 1 si et seulement si elle peut se factoriser en $E \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} L \xrightarrow{\varphi} F''$ où H est un espace de Hilbert, L un espace de type $\mathcal{L}$, et $\|v\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, $\|\varphi\| \leq 1$. Enfin chaque flèche $\alpha \to \beta$ signifie que α domine β. L'opération $\alpha \to {}^t\alpha$ est la symétrie par rapport à l'axe vertical passant par $*$; l'opération $\alpha \to \alpha'$ est la symétrie par rapport au centre $*$. Nous n'avons pas l'intention de montrer comment on obtient ces résultats, c'est clairement fait dans [4].

Par la suite nous aurons besoin d'une autre caractérisation des applications linéaires de type $/\Lambda$. Avant de la donner, rappelons deux résultats élémentaires.

Remarques.

1) Pour tout $p \in [1,+\infty]$ nous noterons $\ell^p = \ell^p(N)$ l'espace des suites (x_n) de nombres complexes telles que $\sum_n |x_n|^p < \infty$ muni de la norme habituelle. Soit E un espace de Banach. Alors $\ell^1 \hat{\otimes} E$ s'identifie canoniquement à $\ell^1(N,E)$ l'espace des suites (x_n) d'éléments de E telles que $\sum_n \|x_n\| < \infty$ muni de la norme $\|(x_n)\| = \sum_n \|x_n\|$. La vérification est tout à fait élémentaire. Ceci ne se généralise pas aux espaces ℓ^p pour $1 < p \leq \infty$.

2) Reprenons les mêmes notations. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E est sommable dans E si $\sup_{S \in E', \|S\| \leq 1} (\sum_n |\langle x_n, S\rangle|) < \infty$. On vérifie immédiatement que l'espace $\ell^1 \check{\otimes} E$ s'identifie canoniquement ~~l'espace des suites sommables dans E~~ au sous-espace des séries inconditionnellement convergentes de

muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup_{S\in E', \|S\|\leq 1} (\sum_n |\langle x_n , S\rangle|)$. Comme précédemment, ceci ne se généralise pas aux espaces ℓ^p pour $1 < p \leq \infty$. En particulier, on voit facilement que $\ell^\infty \overset{\vee}{\otimes} E \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, E)$.

PROPOSITION 1.3. Soient E et F deux espaces de Banach, et u une forme bilinéaire continue sur $E \times F$. Soit $\bar{u}$ l'application de E dans F' déduite de u. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\|u\|_{/\wedge} \leq 1$ (ou $\|\bar{u}\|_{/\wedge} \leq 1$) ;

b) pour toute suite finie (y_i) $1 \leq i \leq n$ d'éléments de F,

$$\sum_{i=1}^{n} \|{}^t\bar{u}(y_i)\|_{E'} \leq \sup_{S\in F', \|S\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\langle y_i , S\rangle| .$$

En effet, compte tenu de la remarque 2) ci-dessus et de la proposition 1.2, ceci n'est autre que le théorème 13 (P. 155) de [5]. En utilisant la terminologie utilisée par J. Lindenstrauss et A. Pelczynski dans [6], la condition b) signifie que ${}^t\bar{u} : F \to E'$ est absolument sommable et que $a_1({}^t\bar{u}) \leq 1$.

Nous terminons ce numéro en introduisant une nouvelle notation. Soient n et p deux entiers positifs, K_p l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$ et $\mathbb{C}(K_p)$ l'espace vectoriel de dimension p des fonctions complexes définies sur K_p. On note alors $V(p,n)$ l'espace normé $\mathbb{C}(K_p) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbb{C}(K_p)$ n fois. En d'autres termes, $V(p,n)$ est l'espace des fonctions complexes f définies sur K_p^n et muni de la norme $\|f\|_{V(p,n)} = \inf \sum_i \|f_1^i\| \ldots \|f_n^i\|$, le inf portant sur toutes les représentations possibles de f en somme finie $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{N} f_1^i(\beta_1) \ldots f_n^i(\beta_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K_p^n$ et

$f_j^i \in \mathbb{C}(K_p)$, $\|f_j^i\|$ désignant la norme uniforme de f_j^i. On peut identifier $V(p,n)$ avec son dual en posant $\langle a,b\rangle = \sum_{\beta \in K_p^n} a(\beta)\, b(\beta)$, $a,b \in V(p,n)$, de sorte que l'on peut considérer sur $V(p,n)$ la norme duale de la norme ci-dessus introduite en posant $\|a\|_{V(p,n)^*} = \sup_{\|b\|_{V(p,n)} \leq 1} |\langle a,b\rangle|$. Pour plus de détails sur cet espace, voir [2].

3. RELATIONS AVEC L'ESPACE DE HILBERT.

La norme $\mathcal{H}$ qui apparaît dans le tableau du numéro précédent est définie par la proposition suivante (pour une démonstration voir [1]) :

PROPOSITION 1.4. Il existe une norme tensorielle $\mathcal{H}$ et une seule possédant la propriété suivante : E et F étant des espaces de Banach, si $u \in B(E,F)$, on a $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ si et seulement si il existe des applications linéaires φ, resp. ψ, de normes ≤ 1 de E, resp. F, dans un espace de Hilbert H, resp. son dual H', telles que

$$u(x,y) = \langle \varphi(x)\,,\, \psi(y)\rangle, \qquad x \in E, \quad y \in F.$$

COROLLAIRE. Pour qu'une application linéaire u de E dans F vérifie $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, il faut et il suffit qu'elle se factorise en $E \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} F$ où H est un espace de Hilbert, v et w étant des normes ≤ 1.

La norme $\mathcal{H}$ définie ci-dessus est appelée la <u>norme tensorielle hilbertienne</u>. Les $\mathcal{H}$-formes et les $\mathcal{H}$-applications sont appelées les <u>formes et les applications</u>

<u>hilbertiennes</u>. Il est facile de voir que la norme $\mathcal{H}$ est symétrique et injective, et, par suite, sa norme duale $\mathcal{H}'$ est symétrique et projective. On a donc $\mathcal{H} \leq /\Lambda\backslash$ et $\backslash V/ \leq \mathcal{H}'$.

Le principal théorème de [4], appelé par Grothendieck le théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels est le suivant :

THEOREME 1.1. Soit H un espace de Hilbert. L'application identique φ de H sur lui-même est préintégrale et

$$\|\varphi\|_{/\Lambda\backslash} \leq h ,$$

où h est une constante universelle telle que $\pi/2 \leq h \leq 2\,\mathrm{sh}\,\pi/2$.

En explicitant la notion d'application préintégrale, on voit que ce théorème signifie qu'une application $v : H \to C$, où H est un hilbert et C est de type $\mathcal{C}$, est préintégrale gauche et $\|v\|_{/\Lambda} \leq h\|v\|$. D'après la proposition 1.3 et en utilisant les notations de [6] (rappelées après cette proposition), cela signifie que toute application $u : L \to H$, où L est de type $\mathcal{L}$, est absolument sommable et que $a_1(u) \leq h\|u\|$. Explicitons cela : soit $u : \ell^1 \to H$ telle que $\|u\| \leq 1$. Le théorème 1.1 revient donc à dire que si x_i, $1 \leq i \leq n$ sont dans ℓ^1 tels que

(1) $$\sup_{S \in \ell^\infty, \|S\| \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, S\rangle| \leq 1$$

on a

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|_H \leq h.$$

Si on pose $x_i = \sum_j a_{ij}\, e_j$, $1 \leq i \leq n$ ((e_j) base canonique de ℓ^1), la relation (1) devient

$$\Big|\sum_{i,j} a_{ij}\, t_i\, s_j\Big| \leq 1 \quad \text{pour} \quad |t_i| \leq 1, \quad |s_j| \leq 1,$$

c'est à dire

$$\|(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq p}}\|_{V(p,\mathcal{Q})^*} \leq 1 \quad \text{pour tout entier} \quad p.$$

D'autre part, si $y_i \in H$ sont tels que $\|u(x_i)\| = \langle u(x_i)\, ,\, y_i\rangle$, la relation (2) devient

$$\sum_{i,j} a_{ij}\langle u(e_j)\, ,\, y_i\rangle \leq h.$$

Finalement, on voit que le théorème 1.1 est équivalent au

THEOREME 1.1 bis. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout x_i, y_j $1 \leq i$, $j \leq n$ dans H, on a

$$\|(\langle x_i, y_j\rangle)\|_{V(n,2)} \leq h \sup_{i,j} \|x_i\|\, \|y_j\|,$$

où h est une constante universelle telle que $\pi/2 \leq h \leq 2\mathrm{sh}\,\pi/2$.

Ce théorème est démontré directement dans [6]. En vertu du corollaire de la proposition 1.4, si α est une norme tensorielle, dire que $\alpha \leq \lambda\mathcal{H}$ est équivalent à dire que, pour tout espace de Hilbert H, l'application identique de H sur lui-même a une α-norme $\leq \lambda$. Le théorème 1.1 s'exprime donc aussi par l'inégalité $/\!\wedge\!\backslash \leq h\,\mathcal{H}$. Par dualité, il s'ensuit que $\mathcal{H}' \leq h\, \backslash\!\vee\!/$. Dans [1], I. Amemiya et K. Shiga montrent que $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}'$. Les remarques précédant l'énoncé du théorème 1.1 montrent finalement que $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) est équivalente à $/\!\wedge\!\backslash$ (resp. $\backslash\!\vee\!/$) et que

$$/\!\wedge\!\backslash \leq h\,\mathcal{H} \leq h\,\mathcal{H}' \leq h^2\, \backslash\!\vee\!/.$$

Du théorème 1.1 bis on peut déduire une autre caractérisation des applications hilbertiennes (qui est aussi prouvée dans [6]). Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \to F$ une application linéaire continue. Supposons $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Alors le corollaire de la proposition 1.4 et le théorème 1.1 bis montrent que si $x_i \in E$, $S_j \in F'$, $1 \leq i,j \leq n$, $\|x_i\| \leq 1$, $\|S_j\| \leq 1$, on a $\|(\langle u(x_i), S_j\rangle)\|_{V(n,2)} \leq h$. Inversement, supposons que u vérifie une telle relation (avec $h = K$). Soit $p : L \to E$ une projection métrique d'un espace L de type $\mathcal{L}$ sur E (i. e. $L = \ell^1(I)$ où I est un ensemble d'indices bien choisi). Le raisonnement fait avant l'énoncé du théorème 1;1 bis montre que $u \circ p$ est absolument sommable et que $a_1(u \circ p) \leq K$. Alors, d'après la proposition 1.3, $\|{}^t(u \circ p)\|_{/\wedge} \leq K$, et par transposition, $\|u \circ p\|_{\wedge\backslash} \leq K$. A fortiori, on a $\|u \circ p\|_{\mathcal{H}} \leq K$, ce qui signifie, d'après la proposition 1.2, $\|u\|_{/\mathcal{H}} \leq K$. Mais comme $\mathcal{H}$ est injective, on a $/\mathcal{H} = \mathcal{H}$, et donc $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq K$. Ceci prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 1.5. Soient E et F deux espaces de Banach et u une application linéaire continue de E dans F. Si u est hilbertienne, pour tout $x_i \in E$, $S_j \in F'$, $1 \leq i,j \leq n$, on a

$$\|(\langle u(x_i), S_j\rangle)\|_{V(n,2)} \leq K \sup_{i,j} \|x_i\| \, \|S_j\| ,$$

avec $K \leq h\|u\|_{\mathcal{H}}$. Inversement, si u vérifie une telle inégalité, alors elle est hilbertienne et $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq K$.

Donnons un exemple d'application hilbertienne qui nous servira par la suite :

PROPOSITION 1.6. Soient $p \in [2, +\infty]$ et $r \in [1,2]$. Il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute application linéaire continue u de ℓ^p dans ℓ^r on a $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq K\|u\|$.

Cette proposition est prouvée dans [6]. Nous en faisons toutefois la démonstration car nous aurons besoin de la majoration de la $\mathcal{H}$-norme de u. Nous utilisons le lemme suivant (cf. [6]) :

LEMME. Soit $p \in [2,+\infty]$. Alors il existe un espace de Banach C de type $\mathcal{C}$ tel que ℓ^p soit isomorphe à un quotient de C. Par dualité, si $r \in [1,2]$, il existe un espace L de type $\mathcal{L}$ tel que ℓ^r soit isomorphe à un sous-espace de L.

La démonstration de la proposition 1.6 est alors très simple. Soit $p : C \to \ell^p$ une projection de C sur ℓ^p, et $i : \ell^r \to L$ un isomorphisme de ℓ^r dans L. On a $\|i \circ u \circ p\|_{\backslash\!/} = \|i \circ u \circ p\| \leq K_1\|u\|$ (cf. n° 1) et comme $\mathcal{H} \leq h \backslash\!/$, $\|i \circ u \circ p\|_{\mathcal{H}} \leq h\, K_1\|u\|$. La proposition résulte alors aussitôt de la proposition 1.5. Un autre théorème important de [4] est le suivant :

THEOREME 1.2. Soit H un espace de Hilbert. La $/\mathcal{H}'\backslash$ -norme de l'application identique de H sur lui-même est $\leq \sigma = \frac{\pi}{2}$.

Dans ce théorème, $\frac{\pi}{2}$ est la meilleure valeur possible de la constante σ. De ce théorème, Grothendieck déduit facilement la caractérisation suivante des opérateurs de Hilbert-Schmidt :

PROPOSITION 1.7. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et u un opérateur linéaire de H_1 dans H_2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) u est un opérateur de Hilbert-Schmidt ;

ii) u est de type $\vee/$ (resp. de type $\backslash\vee$) ;

iii) u est de type $\wedge\backslash$ (resp. de type $/\wedge$).

De plus, on a les inégalités

$$\|u\|_{\vee/} = \|u\|_{\backslash\vee} \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\|u\|_{\vee/} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\|u\|_{\backslash\vee},$$

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_{\wedge\backslash} = \|u\|_{/\wedge} \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\|u\|_2,$$

où $\|u\|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de u.

Le théorème 1.2 ainsi que la proposition 1.6 sont démontrés dans [4]. Remarquons que si on ne tient pas compte de la meilleure valeur possible de la constante σ, le théorème 1.2, et par suite la proposition 1.7, peuvent se voir comme des conséquences du théorème 1.1. En effet, comme $/\mathcal{H}'\backslash$ est injective, on a $/\mathcal{H}'\backslash \leq /\wedge\backslash$, et par suite, si φ est l'application identique d'un espace de Hilbert, on a $\|\varphi\|_{/\mathcal{H}'\backslash} \leq h \leq 2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}$.

4. DEFINITION DES α-ALGEBRES NATURELLES.

Dans ce numéro, nous noterons $\mathcal{A}$ la classe des algèbres de Banach et $\mathcal{AC}$ la classe des algèbres de Banach commutatives. Soit α une norme tensorielle. Nous dirons qu'une algèbre de Banach A est une α-algèbre, ou une <u>algèbre de type</u> α, si l'application m de $A \otimes A$ dans A induite par la multiplication de A (i. e. $m(\Sigma\, x_i \otimes y_i) = \Sigma\, x_i y_i$) est continue lorsque l'on munit $A \otimes A$ de la norme α. Dans cette définition nous ne supposons pas l'algèbre A commutative. Nous noterons $\mathcal{A}_\alpha$ la classe des algèbres de type α, et $\mathcal{AC}_\alpha$ la classe des algèbres commutatives de type α. On a bien sûr $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\wedge$ et $\mathcal{AC} = \mathcal{AC}_\wedge$. Soit A une algèbre de Banach. Pour toute $S \in A'$, le dual de A, nous noterons $\tilde{S}$ l'application de A dans A' définie par la multiplication, c'est-à-dire par $\langle y\, ,\, \tilde{S}(x)\rangle = S(xy)$, $x, y \in A$. Dire que A est de type α signifie donc que pour toute $S \in A'$ on a $\|\tilde{S}\|_{\alpha'} \leq K\|S\|$, où K est une constante qui ne dépend que de A. Les classes $\mathcal{A}_\alpha$ (resp. $\mathcal{AC}_\alpha$) pour α norme tensorielle naturelle sont appelées les <u>classes naturelles d'algèbres de type</u> α (resp. <u>les classes naturelles d'algèbres commutatives de type</u> α). D'après ce qui a été dit au n° 2, il y a donc a priori 14 classes naturelles $\mathcal{A}_\alpha$. D'autre part, il est clair que pour toute norme tensorielle α, on a $\mathcal{AC}_\alpha = \mathcal{AC}_{t_\alpha}$; ainsi il y a 9 classes naturelles $\mathcal{AC}_\alpha$, et le tableau du n° 2 permet d'ordonner ces classes par inclusion :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{AC}_\vee \arrow[r] & \mathcal{AC}_\gamma \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{AC}_{\backslash\vee} \arrow[r] & \mathcal{AC}_{\backslash\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{AC}_{/\wedge} \arrow[r] & \mathcal{AC}_{\gamma'} \arrow[r] & \mathcal{AC} \\
 & & \mathcal{AC}_{\mathcal{H}} = \mathcal{AC}_{/\wedge\backslash} \arrow[ur] & & \mathcal{AC}_{\mathcal{H}'} = \mathcal{AC}_{\backslash\vee/} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Dans ce tableau, une flèche $\mathcal{AC}_\alpha \to \mathcal{AC}_\beta$ signifie $\mathcal{AC}_\alpha \subset \mathcal{AC}_\beta$. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, notre but n'est pas d'étudier systématiquement les classes $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{AC}_\alpha$. Nous ne donnerons dans ce numéro que des résultats élémentaires qui seront utiles par la suite.

La classe $\mathcal{A}_{\vee}$ a été introduite par N. Th. Varopoulos dans [7] et [8] où il l'a appelée la classe des algèbres injectives (car la norme $\vee$ est souvent appelée la norme injective). Dans ces articles, il donne certaines caractérisations élémentaires des algèbres de type $\vee$ ainsi que d'autres propriétés que nous verrons plus loin. Une des principales caractérisations est la suivante : une algèbre commutative A est de type $\vee$ si et seulement si il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ et toute $S \in A'$, $\|S\| \leq 1$, il existe une mesure de Radon μ sur la boule unité de A' telle que $\langle S , x_1 \ldots x_n \rangle = \int_{A'_1} \langle T, x_1 \rangle \ldots \langle T, x_n \rangle d\mu(T)$, $\forall x_i \in A$, et $\|\mu\| \leq K^n$. D'autre part, dans ces articles, on trouve deux exemples non triviaux d'algèbres de type $\vee$. Tout d'abord ℓ^1 muni de la multiplication coordonnées par coordonnées (ce qui se ramène à dire que si $(a_{ij}) \in \ell^1 \overset{\vee}{\otimes} \ell^1$, $\sum_i |a_{ii}| \leq \|(a_{ij})\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} \ell^1}$), et, d'autre part, les algèbres $A_\alpha(T)$ pour $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$. Il est à noter que si ℓ^∞ est évidemment de type $\vee$, pour $1 < p < \infty$, ℓ^p n'est jamais de type $\vee$.

PROPOSITION 1.8. Soit A une algèbre de Banach. Pour que A soit de type $\backslash\vee$ (resp. de type $\vee/$) il faut et il suffit qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute suite sommable $(x_i)_{i \in N}$ dans A et toute suite bornée $(y_i)_{i \in N}$ dans A, la suite $(y_i x_i)_{i \in N}$ (resp. $(x_i y_i)_{i \in N}$) soit sommable dans A et de plus

$$\|(y_i x_i)\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} A} \leq K \|(x_i)\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} A} \operatorname{Sup}_i \|y_i\|$$

$$\left(\text{resp. } \|(x_i y_i)\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} A} \leq K \|(x_i)\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} A} \operatorname{Sup}_i \|y_i\|\right).$$

Le cas de la norme $\vee/$ se déduit de l'autre par transposition. Supposons A de type $\backslash\!\vee$. D'après la proposition 1.3 pour toute $S \in A'$, $\|S\| \leq 1$, et toute $(x_i) \in \ell^1 \check{\otimes} A$, on a $\sum_i \|{}^t\tilde{S}(x_i)\|_{A'} \leq K\|(x_i)\|$. Alors si $y_i \in A$, $\|y_i\| \leq 1$, $i \in N$, on a $\sum_i |\langle {}^t\tilde{S}(x_i), y_i\rangle| = \sum_i |\langle x_i, \tilde{S}(y_i)\rangle| = \sum_i |S(y_i x_i)| \leq K\|(x_i)\|$; d'où on déduit $\|(y_i x_i)\|_{\ell^1 \otimes A} \leq K\|(x_i)\|$. La réciproque se voit en choisissant $y_i \in A$, $\|y_i\| = 1$ tels que $\|{}^t\tilde{S}(x_i)\|_{A'} \simeq \langle {}^t\tilde{S}(x_i), y_i\rangle$, et en utilisant la proposition 1.3 dans l'autre sens.

COROLLAIRE. Soit A une algèbre de type $\backslash\!\vee$ (resp. de type $\vee\!/$). Soient $(x_i)_{i \in N}$, resp. $(S_i)_{i \in N}$ une suite sommable dans A, resp. dans A'. Alors on a

$$\sum_i \|{}^t\tilde{S}_i(x_i)\|_{A'} \leq K \|(x_i)\|_{\ell^1 \check{\otimes} A} \|(S_i)\|_{\ell^1 \check{\otimes} A'}$$

(resp. $\sum_i \|\tilde{S}_i(x_i)\|_{A'} \leq K \|(x_i)\|_{\ell^1 \check{\otimes} A} \|(S_i)\|_{\ell^1 \check{\otimes} A'}$),

où K est une constante qui ne dépend que de A.

Supposons par exemple A de type $\backslash\!\vee$. Soient $y_i \in A$, $\|y_i\| = 1$, tels que $\|{}^t\tilde{S}_i(x_i)\| \simeq \langle {}^t\tilde{S}_i(x_i), y_i\rangle = \langle x_i, \tilde{S}_i(y_i)\rangle$. D'après la proposition précédente, la suite $(y_i x_i)$ est sommable et sa norme dans $\ell^1 \check{\otimes} A$ est $\leq K\|(x_i)\|$. Posons $a_{ij} = S_j(y_i x_i)$, $i,j \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que (a_{ij}) appartient à $\ell^1 \check{\otimes} \ell^1$ et que $\|(a_{ij})\|_{\ell^1 \check{\otimes} \ell^1} \leq K\|(x_i)\| \, \|(S_i)\|$. Il résulte alors du fait que ℓ^1 est une algèbre de type $\vee$ que $\sum_i |a_{ii}| \leq K\|(x_i)\| \, \|(S_i)\|$, et comme $a_{ii} = S_i(y_i x_i) = \langle x_i, \tilde{S}_i(y_i)\rangle \simeq \|{}^t\tilde{S}_i(x_i)\|$, cela montre le corollaire.

PROPOSITION 1.9. Soit A une algèbre de Banach. Pour que A soit de type $\mathcal{H}'$, il faut et il suffit qu'il existe une constante K telle que pour toutes suites (x_i) et (y_j), $1 \leq i,j \leq n$, dans A et toute $S \in A'$, $\|S\| \leq 1$ on ait

$$\|(\langle x_i y_j , S\rangle)\|_{V(n,2)} \leq K \sup_{i,j} \|x_i\| \, \|y_j\| .$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.5.

COROLLAIRE. Toute algèbre fermée d'opérateurs sur un espace de Hilbert est de type $\mathcal{H}'$. En particulier un espace de Hilbert muni d'une structure d'algèbre de Banach est de type $\mathcal{H}'$.

En effet, soit A une algèbre d'opérateurs sur H. Soient $T_i, U_i \in A$ et $S \in A'$; on peut supposer $S = x \otimes y$, $x, y \in H$, et on a alors $\langle T_j \circ U_i , S\rangle = \langle U_i(x) , T_j^*(y)\rangle$ et la conclusion résulte de la proposition et du théorème 1.1 bis. La seconde assertion du corollaire est une conséquence de la première car si H est muni d'une structure d'algèbre de Banach, $\tilde{H}$ l'algèbre unitaire associée à H est isomorphe à un espace de Hilbert et H est une algèbre fermée d'opérateurs sur $\tilde{H}$.

On peut noter que la dernière assertion de ce corollaire est en fait essentiellement équivalente au théorème 1.1 (sans tenir compte de la valeur numérique de h). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple qui sera fourni par le théorème 3.1. D'ailleurs cet exemple montre aussi que l'on ne peut améliorer le corollaire, dans ce sens que les algèbres de Banach commutatives qui sont isomorphes à un espace de Hilbert ne sont pas contenues dans $\mathcal{A}\mathcal{C}_{/\Lambda}$.

EXEMPLES.

1) Pour $1 \leq p \leq 2$ et $p = +\infty$, ℓ^p munie de la multiplication coordonnée par coordonnée est une algèbre de type $\mathbb{V}$. En effet, soit $S \in \ell^q$ $(1 \leq p \leq 2$,

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $S=(S_i)$. On a $\langle y\,,\,\tilde{S}(x)\rangle=\sum_i x_i y_i\,S_i=\langle (y_i)\,,\,(S_i x_i)\rangle$. Donc $\tilde{S}(x)\in \ell^1$ et par suite $\tilde{S}$ se factorise en $\ell^p \xrightarrow{\tilde{S}} \ell^1 \xhookrightarrow{i} \ell^2 \xhookrightarrow{j} \ell^q$ où i et j sont les injections canoniques. Or, d'après le théorème 1.1, i est absolument sommable et $a_1(i)\le 2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$; donc $\tilde{S}$ est absolument sommable et $a_1(\tilde{S})\le 2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\|S\|$. Mais comme $\tilde{S}={}^t\tilde{S}$ (commutativité de la multiplication), d'après la proposition 1.3, cela prouve que $\|\tilde{S}\|_{/\wedge}\le 2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\|S\|$.

2) Pour $1\le p\le\infty$, ℓ^p est une algèbre de type $\backslash\mathcal{H}$. D'après le tableau des classes naturelles $\mathcal{AC}_\alpha$ et l'exemple précédent, il suffit de faire la démonstration pour $2\le p\le\infty$. Soit $S\in\ell^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $s=(S_i)$; comme dans l'exemple précédent on voit que pour tout $x=(x_i)\in\ell^p$, $\tilde{S}(x)=(S_i x_i)\in\ell^1$, et par suite $\tilde{S}$ se factorise en $\ell^p \xrightarrow{\tilde{S}} \ell^1 \xhookrightarrow{i} \ell^q$ où i est l'injection canonique. D'après la proposition 1.6, l'application $\tilde{S}$ de ℓ^p dans ℓ^1 est hilbertienne et on a $\|\tilde{S}\|_{\mathcal{H}}\le K\|S\|$ où K ne dépend pas de S. Ainsi $\tilde{S}:\ell^p\to\ell^q$ se factorise en $\ell^p \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} \ell^1 \xhookrightarrow{i} \ell^q$ où H est un espace de Hilbert, et $\|u\|\,\|v\|\le K\|S\|$. La caractérisation des $\mathcal{H}/$-application (cf. tableau n° 2) montre alors que $\|\tilde{S}\|_{\mathcal{H}/}\le K\|S\|$ ce qui prouve que ℓ^p est de type $\backslash\mathcal{H}$, puisque la norme duale de $\backslash\mathcal{H}$ est la norme $\mathcal{H}/$.

3) De l'exemple précédent et du tableau des classes naturelles $\mathcal{AC}_\alpha$ il résulte que ℓ^p est de type $/\wedge$ pour $1\le p\le\infty$. Notons aussi que l'algèbre $A(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques $P(\theta)=\sum_n a_n e^{in\theta}$ munie de la norme $\|P\|=\sum_n |a_n|$ est une algèbre de type $/\wedge$. Ceci résulte en effet de la caractérisation des $\vee/$ -applications puisque l'espace de Banach $A(\mathbb{T})$ est exactement ℓ^1. On a le même résultat pour $A_\alpha(\mathbb{T})$, $0\le\alpha<\infty$.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Sur le produit tensoriel $H_1 \otimes H_2$ on peut définir une structure d'espace préhilbertien séparé en posant $\langle x_1 \otimes x_2 , y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle \langle x_2 , y_2 \rangle$, $x_i, y_i \in H_i$, $i = 1, 2$. Le complété de $H_1 \otimes H_2$ pour cette structure est donc un espace de Hilbert que nous noterons $H_1 \otimes_2 H_2$. On peut alors définir une nouvelle classe d'algèbres en considérant les algèbres de Banach qui sont des espaces de Hilbert H tels que l'application de $H \otimes H$ dans H induite par la multiplication soit continue de $H \otimes_2 H$ dans H. En fait, on n'otbient pas une nouvelle classe d'algèbres :

PROPOSITION 1.10. Soit H un espace de Hilbert muni d'une structure d'algèbre de Banach, et soit m l'application de $H \otimes H$ dans H induite par la multiplication. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) m est continue de $H \otimes_2 H$ dans H ;

ii) H est de type $/\wedge$ (resp. de type $\wedge\backslash$) ;

iii) H est de type $\backslash\vee$ (resp. de type $\vee/$).

Identifions H' et H par l'isomorphisme isométrique canonique. Il résulte de la proposition 1.7 que les deux assertions ii) et iii) sont équivalentes à dire que pour toute $S \in H'$, $\tilde{S}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt de H dans lui-même et que $\|\tilde{S}\|_2 \leq K\|S\|$, où K ne dépend que de H. Or la condition i) signifie que pour $S \in H'$, $\|S\| \leq 1$, il existe (ξ_{ij}) matrice infinie complexe, $\sum_{i,j} |\xi_{ij}|^2 \leq K$ telle que $S(xy) = \sum_{i,j} x_i y_j \xi_{ij}$, $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in H$; et ceci est manifestement équivalent à $\|\tilde{S}\|_2 \leq K$.

Nous terminons ce paragraphe en posant une question qui sera résolue au § 3. Dans [10] N. Th. Varopoulos a montré qu'une algèbre de Banach A est de type $\vee$ si et seulement si pour toute algèbre de Banach B, $A \check{\otimes} B$ est une algèbre de Banach (et idem en remplaçant algèbre de Banach par algèbre de Banach commutative). Si une telle équivalence se généralisait à toutes les normes tensorielles naturelles, elle serait certainement utile pour étudier les classes naturelles $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{AC}_\alpha$. Malheureusement, nous verrons que ce n'est pas le cas (corollaire 2 du théorème 3.2).

II. LES Q-ALGEBRES

1. DEFINITION.

Soient X un espace topologique compact et $\mathbb{C}(X)$ l'algèbre de toutes les fonctions complexes continues sur X munie de la norme uniforme. Rappelons qu'on appelle algèbre uniforme sur X toute sous-algèbre fermée de $\mathbb{C}(X)$ (ici nous ne supposons pas qu'une algèbre uniforme contient les constantes). Une algèbre de Banach commutative R est appelée une Q-algèbre si elle est isomorphe à une algèbre quotient B/I où B est une algèbre uniforme, et I un idéal fermé de B. Autrement dit, A est une Q-algèbre si et seulement si il existe une algèbre uniforme B et un homomorphisme (d'algèbre) surjectif continu de B dans A.

Soit $A = B/I$ une Q-algèbre. Supposons que A soit semi-simple, et posons $E = \{x \in Sp(B) \text{ tels que } f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$. Alors E est un compact de $Sp(B)$ et on a $I = \{f \in B \text{ telles que } f_{|E} = 0\}$. Car si $f \in B$ est telle que $f_{|E} = 0$, pour tout $\chi \in Sp(A)$, $p : B \to A$ étant la projection canonique, $\chi \circ p(I) = 0$ donc $\chi \circ p \in E$, d'où $\chi(p(f)) = 0$, et comme A est semi-simple, $p(f) = 0$ soit $f \in I$. Ainsi A est l'algèbre restriction de B à E munie de la norme quotient. Inversement une algèbre restriction est évidemment semi-simple. Les Q-algèbres semi-simples sont donc exactement les algèbres restrictions des algèbres uniformes. D'un point de vue opposé, on peut considérer les algèbres radicales et même nilpotentes. S'il est trivial (avec ce qui va suivre) qu'une algèbre commutative vérifiant $x^2 = 0$ pour tout x est une Q-algèbre, en général une algèbre commutative vérifiant $x^3 = 0$ pour tout x n'est pas une Q-algèbre (cf. remarque 2) du n° 3).

Il est évident qu'une sous-algèbre fermée d'une Q-algèbre, une algèbre quotient d'une Q-algèbre, un produit fini de Q-algèbres sont encore des Q-algèbres.

La dernière propriété élémentaire des Q-algèbres que nous noterons dans ce numéro est la bicommutativité. A étant une algèbre de Banach, on peut définir deux multiplications sur son bidual A'' de la manière suivante : si $x, y \in A''$, soient $(x_i), (y_i)$ des suites généralisées dans A qui convergent faiblement dans A'' vers x et y respectivement. Alors la limite $\lim\limits_i(\lim\limits_j x_i y_j)$ existe pour la topologie faible de A'' et est indépendante du choix des suites (x_i) et (y_i) convergent vers x et y. On peut donc poser $xy = \lim\limits_i(\lim\limits_j x_i y_j)$. De la même manière, on aurait pu poser $xy = \lim\limits_j(\lim\limits_i x_i y_j)$, mais en général on n'obtient pas le même résultat. On peut donc définir ainsi deux multiplications, en général distinctes, dans A'' ; ces multiplications sont appelées les <u>multiplications d'Arens</u>. On dit que A est bicommutative si les deux multiplications d'Arens sont égales. Il est bien connu que des sous-algèbres et des algèbres quotients d'algèbres bicommutatives sont aussi bicommutatives ; comme on sait que $\mathbb{C}(X)$ est bicommutative, il en est donc ce même des Q-algèbres.

2. PRINCIPALES PROPRIETES DES Q-ALGEBRES.

Commençons par donner les principaux critères. Le critère suivant est dû à I. G. Craw :

PROPOSITION 2.1. (Lemme de Craw). Soit A une algèbre de Banach commutative. Pour que A soit une Q-algèbre, il faut et il suffit qu'il existe deux constantes $K > 0$ et $\delta > 0$ telles que pour tout polynôme complexe $P(z_1, \ldots, z_n)$, $P(0) = 0$, et tout $x_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, $\|x_i\| \leq \delta$, on ait

$$\|P(x_1, \ldots, x_n)\|_A \leq K \sup_{|z_i| \leq 1} |P(z_1, \ldots, z_n)|.$$

La démonstration de ce critère est très facile. En effet, il est clair que la condition est nécessaire, et la seule chose à prouver est qu'elle est suffisante. Supposons donc que A vérifie la condition. Soit A_δ la boule fermée de centre 0 et de rayon δ dans A. Pour tout $x \in A_\delta$, soit D_x une copie du disque unité fermé de $\mathbb{C}$, et posons $X = \prod_{x \in A_\delta} D_x$, de sorte que X est un espace compact. Notons par (z_x) les éléments de X, et pour tout $x \in A_\delta$ soit Z_x la fonction coordonnée $(z_x) \to z_x$. Soit $P(X)$ la sous-algèbre fermée de $\mathbb{C}(X)$ engendrée par les fonctions coordonnées Z_x. Il est alors clair que l'application $Z_x \to x$ induit un homomorphisme surjectif continu de $P(X)$ sur A, ce qui montre que A est une Q-algèbre.

Suivant une idée de Davie (cf. [2]) qui consiste à décomposer les polynômes en sommes de polynômes homogènes, Varopoulos a obtenu le critère suivant (cf. [8]) : pour qu'une algèbre de Banach commutative A soit une Q-algèbre, il faut et il suffit qu'il existe une constante K telle que pour tous entiers $p \geq 1$ et $n \geq 1$, tout polynôme $P(z_1, \ldots, z_p)$ homogène de degré n et tout x_i, $1 \leq i \leq p$ dans la boule unité de A, on ait

$$\|P(x_1, \ldots, x_p)\| \leq K^n \sup_{|z_i| \leq 1} |P(z_1, \ldots, z_p)|.$$

En utilisant les algèbres tensorielles $V(p,n)$ (cf. § 1 fin du n° 2), A. M. Davie a déduit du lemme de Craw un critère plus profond et souvent plus utile :

THEOREME 2.1. Soit A une algèbre de Banach commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est une Q-algèbre ;

ii) Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous entiers $n \geq 1$ et $p \geq 1$, tous x_i, $1 \leq i \leq p$ dans la boule unité de A, et toute $S \in A'$, $\|S\| \leq 1$, on ait

$$\|(\langle x_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_{\beta_n}, S\rangle)\|_{V(p,n)} \leq K^n.$$

Ce théorème est démontré dans [2].

Nous donnons maintenant les propriétés essentielles des Q-algèbres. Le théorème suivant est dû à B. Cole :

THEOREME 2.2. Soit B une algèbre uniforme et I un idéal fermé de B. Alors l'algèbre quotient B/I est isométriquement isomorphe à une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert.

La démonstration de ce théorème est faite dans [11]. De ce théorème J. Wermer a déduit plusieurs résultats. Tout d'abord, il a montré que l'algèbre $A(\mathbb{T})$ n'est pas une Q-algèbre, car elle ne peut être isomorphe à une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert. D'autre part, il a montré la propriété suivante des Q-algèbres : si A est une Q-algèbre, et x un élément inversible de A tel que $\|x^n\| \leq c$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, alors pour tout polynôme complexe d'une variable $P(z)$, on a $\|P(x)\| \leq K c^2 \sup_{|z| \leq 1} |P(z)|$, où K est une constante qui ne dépend que de A. A. Bernard a généralisé ce résultat en montrant que si G est un groupe multiplicatif dans A tel que $\|g\| \leq c$ pour tout $g \in G$, alors pour tout polynôme complexe $P(z_1, \ldots, z_n)$ et tout $g_1, \ldots, g_n$ dans G, on a $\|P(g_1, \ldots, g_n)\| \leq K c^2 \sup_{|z_i| \leq 1} |P(z_1, .., z_n)|$, où K ne dépend que de A. Dans [8], Varopoulos a donné une autre généralisation partielle du résultat de Wermer. On s'est alors demandé si pour toute Q-algèbre A et tout $x \in A$ tel que $\|x^n\| \leq c$ pour tout $n \geq 1$ on a $\|P(x)\| \leq c_1 \sup_{|z| \leq 1} |P(z)|$ pour tout polynôme P, c_1 étant une constante ne dépendant que de A et de x. La réponse à cette question est non et Davie a donné dans [3] un contre-exemple.

Après avoir étudié la manière dont les polynômes complexes opèrent dans les Q-algèbres, il est naturel de chercher ce qu'il en est des polynômes à coefficients dans l'algèbre. On peut par exemple se demander qu'elles sont les algèbres qui vérifient le lemme de Craw pour les polynômes à coefficients dans l'algèbre . Ces algèbres sont bien sûr des Q-algèbres, mais la réciproque n'a aucune chance d'être vraie, l'hypothèse étant beaucoup trop forte. Les questions raisonnables dans ce sens seront obtenues en ne prenant que certaines classes de polynômes. Par exemple, on peut considérer les algèbres de Banach commutatives A telles que pour tout polynôme $P(z)$ d'une variable et à coefficients dans A, et tout $x \in A$, $\|x\| \leq 1$, on a $\|P(x)\| \leq K \sup_{|z| \leq 1} \|P(z)\|$. Les relations entre ces algèbres et les Q-algèbres dépendent de la valeur de K. Par exemple, si on prend une algèbre de Banach commutative A qui vérifie $x^3 = 0$ pour tout élément $x \in A$, il est clair que A vérifie cette propriété, mais une telle algèbre n'est pas nécessairement une Q-algèbre. Par contre, si on suppose $K = 1$ alors l'inégalité passe automatiquement à tous les polynômes à plusieurs variables et à coefficients dans l'algèbre. On peut alors considérer une autre classe de polynômes qui donne des résultats plus nets, celle des polynômes de degré 1. En effet, si on considère la classe des algèbres de Banach commutatives A telles que pour tout polynôme $P(z_1, \ldots, z_n)$ de degré 1 et à coefficients dans A, et tout x_i dans la boule unité de A on a $\|P(x_1, \ldots, x_n)\| \leq K \sup_{|z| \leq 1} \|P(z_1, \ldots, z_n)\|$, nous verrons au paragraphe 3 que cette classe est égale à une classe naturelle $\mathcal{AB}_\alpha$ (lemme n° 1 du § 3), qu'elle est contenue dans la classe des Q-algèbres (proposition 3.1 bis) mais que l'inclusion inverse est fausse (corollaire 1 du théorème 3.2).

Un des problèmes les plus importants concernant les Q-algèbres, était de savoir si la réciproque du théorème 2.2 est vraie ou non. Compte-tenu du lemme de Craw, ce problème se ramène à savoir si pour tout entier n, tout polynôme complexe à n variables $P(z_1, \ldots, z_n)$ et tous opérateurs $T_1, \ldots, T_n$ de normes ≤ 1 d'un espace de Hilbert qui commutent deux à deux (i.e. $T_i o T_j = T_j o T_i$, $\forall i,j$) on a l'inégalité $\|P(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_i| \leq 1} |P(z_1, \ldots, z_n)|$. Pour $n = 1$ cette inégalité avait été prouvée par Von Neumann, et pour $n = 2$, elle avait été montrée par Ando. Récemment, N. Th. Varopoulos a démontré que cette inégalité est en général fausse pour $n \geq 3$. Précisément, il a prouvé le théorème suivant :

THEOREME 2.3. Sur l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$ il existe une structure d'algèbre de Banach commutative (vérifiant $x^4 = 0 \quad \forall x \in H$) qui n'est pas une structure de Q-algèbre.

Ce théorème est démontré dans [9].

3. EXEMPLES.

Dans [8], Varopoulos montre que toute algèbre de type V est une Q-algèbre. Dans [7], il donne le résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 2.2. Soit A une algèbre de Banach commutative. A est une algèbre de type V si et seulement si il existe une algèbre uniforme B, un homomorphisme surjectif continu h de B sur A et une application linéaire continue ℓ de A dans B telle que $h \circ \ell = id_A$.

La démonstration de ce résultat est relativement simple et s'inspire de celle du lemme de Craw. En effet, la condition est évidemment suffisante car on voit aussitôt que toute algèbre uniforme est de type V. Inversement, soit A une algèbre de Banach commutative de type V, et reprenons les notations de la démonstration du lemme de Craw. La preuve se fait alors en utilisant le critère pour les algèbres de Banach de type V que nous avons cité au début du n^o 4 du § 1. On pose $Y = \{(\varphi(x))_{x\in A_\delta}, \ \varphi \in A', \ \|\varphi\| \leq 1\} \subset X$, $\delta > 0$ choisi en fonction de la constante du critère. Si $z = (z_x) \in Y$, pour $|t| \leq 1$, $tZ = (tz_x) \in Y$, autrement dit, Y est cerclé. Si $P_Y(X)$ est la restriction de $P(X)$ à Y, et B l'adhérence de $P_Y(X)$ dans $\mathbb{C}(Y)$, on a automatiquement un homomorphisme surjectif continu h de B sur A en utilisant le critère rappelé et le fait que Y est cerclé (pour le voir, il suffit de décomposer les polynômes en sommes de polynômes homogènes, δ étant bien choisi). L'application $\ell : A \to B$ se définit alors en posant $\ell(0) = 0$, $\ell(x) = Z_{x|Y}$ pour $\|x\| = \delta$, et pour tout $x \in A$, $\ell(x) = \frac{\|x\|}{\delta}\,\ell(\frac{\delta x}{\|x\|})$. La définition même de Y montre que ℓ est bien une application linéaire continue, et on a bien $h \circ \ell = \mathrm{id}_A$.

COROLLAIRE. Soit R une algèbre de Banach commutative de type $\vee$ et A une Q-algèbre (resp. une algèbre commutative de type $\vee$). Alors $R \check{\otimes} A$ est une Q-algèbre (resp. une algèbre commutative de type $\vee$).

En effet, si A est de type $\vee$, pour voir que $R \check{\otimes} A$ est de type $\vee$, d'après la proposition précédente, il suffit de voir que si B_1 et B_2 sont deux algèbres uniformes, alors $B_1 \check{\otimes} B_2$ est aussi une algèbre uniforme. Or ceci est évident car si X et Y sont deux compacts, on vérifie aussitôt que $\mathbb{C}(X) \check{\otimes} \mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(X \times Y)$. Si A est une Q-algèbre, d'après la proposition précédente, il suffit de voir que si B est une algèbre uniforme sur X, alors $B \check{\otimes} A$ est une Q-algèbre. Comme précédemment, l'injectivité de $\vee$ montre qu'il suffit de le voir pour $\mathbb{C}(X) \check{\otimes} A$, et ceci est évident (en vertu du lemme de Craw) car $\mathbb{C}(X) \check{\otimes} A$ est égale à l'algèbre $\mathcal{C}(X ; A)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans A munie de la norme uniforme.

REMARQUES.

1) Le produit tensoriel $A_1 \check{\otimes} A_2$ de deux Q-algèbres n'est pas en général une

Q-algèbre (voir [9]).

2) Soit A une algèbre de Banach commutative. Si $x^2 = 0$ pour tout $x \in A$, A est évidemment injective et par suite une Q-algèbre, mais ceci ne se généralise pas : il existe en effet des algèbres de Banach commutatives vérifiant $x^3 = 0$ pour tout x (i.e. $xyz = 0$ pour tout x, y, z) et qui ne sont pas des Q-algèbres. Par exemple, soit R une algèbre de Banach commutative vérifiant $x^3 = 0$ pour tout $x \in R$, mais telle qu'il existe $x_o \in R$ tel que $x_o^2 \neq 0$ (par exemple l'algèbre engendrée par l'opérateur dérivation D sur l'espace des polynômes de degrés ≤ 2 muni de la norme $\| a_o + a_1 D + a_2 D^2 \| = \sum_o^2 |a_i|$, $a_i \in \mathbb{C}$). Soit ensuite A l'algèbre des suites complexes (x_n) à variation bornée munie de la multiplication coordonnée par coordonnée et de la norme

$$\| (x_n) \| = |x_1| + \sum_1^\infty |x_{n+1} - x_n| .$$

A est clairement une algèbre de Banach commutative, et, dans [2], Davie montre qu'il existe deux suites (x^i) et (y^j) dans A et $\varphi \in A'$, $\|x^i\| \leq 1$, $\|y^j\| \leq 1$ et $\|\varphi\| \leq 1$ telles que

$$\langle x^i y^j , \varphi \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad j \geq i , \\ 0 & \text{si} \quad i > j . \end{cases}$$

Considérons alors l'algèbre de Banach commutative $R \hat{\otimes} A$. Il est clair que $x^3 = 0$ pour tout $x \in R \hat{\otimes} A$. D'autre part, si on considère les suites $(x_o \otimes x^i)$ et $(x_o \otimes y^j)$, et si $\psi_o \in R'$ est tel que $\|\psi_o\| \leq 1$, $\psi_o(x_o^2) \neq 0$, on a $\|x_o \otimes x^i\| \leq \|x_o\|$, $\|x_o \otimes y^j\| \leq \|x_o\|$, $\|\psi_o \otimes \varphi\| \leq 1$ et

$$\langle x_o^2 \otimes x^i y^j , \psi_o \otimes \varphi \rangle = \begin{cases} -\psi_o(x_o^2) & \text{si} \quad j \geq i , \\ 0 & \text{si} \quad i > j . \end{cases}$$

Alors si x (resp. y) est une valeur d'adhérence faible de la suite $(x_o \otimes x^i)$ (resp. $(x_o \otimes y^i)$) les deux multiplications d'Arens de x et y sont distinctes. $R \hat{\otimes} A$ n'est donc pas bicommutative et, en particulier, n'est pas une Q-algèbre.

Voyons maintenant quelques exemples de Q-algèbres. Définissons tout d'abord une notation. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, et tout espace de Banach E, nous noterons $\ell^p(\mathbb{N}, E)$ l'espace des suites (x_n) d'éléments de E telles que $\sum_1^\infty \|x_n\|^p \leq \infty$ muni de la norme $\|(x_n)\| = (\sum_1^\infty \|x_n\|^p)^{1/p}$. Nous avons vu dans la remarque du § 1 du n° 2 que $\ell^1(\mathbb{N},E) = \ell^1 \hat{\otimes} E$ et $\ell^\infty(\mathbb{N},E) \supset \ell^\infty \check{\otimes} E$. Au § 1 n° 4 nous avons vu que ℓ^1 est une algèbre de type V. Plus généralement, si A est une algèbre commutative de type V alors $\ell^1(\mathbb{N},A)$ munie de la multiplication coordonnée par coordonnée est aussi de type V. En effet, d'après la proposition 2.2, il suffit de le faire pour une algèbre uniforme B sur un compact X. Or il est clair que si $x_i = (x_i^n)_n$ et $y_i = (y_i^n)_n$ $1 \leq i \leq m$ appartiennent à $\ell^1(\mathbb{N},B)$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i\right|_V = \sup_{h_n \in X, k_n \in X} \ \sup_{\substack{(\lambda_n),(\mu_n) \in \ell^\infty \\ \|(\lambda_n)\| \leq 1, \|(\mu_n)\| \leq 1}} \left|\sum_{i=1}^m \langle \lambda, x_i(h)\rangle \langle \mu, y_i(k)\rangle\right|$$

où $\langle \lambda, x_i(h)\rangle = \sum_n \lambda_n x_i^n(h_n)$ et $\langle \mu, y_i(k)\rangle = \sum_n \mu_n y_i^n(k_n)$. La conclusion résulte alors aussitôt du fait que ℓ^1 est une algèbre de type V. De même, $\ell^\infty \check{\otimes} A$ est une algèbre de type V pour toute algèbre commutative A de type V (corollaire de la proposition 2.2).

Dans [2], A. M. Davie a montré, en utilisant le théorème 2.1, que, pour $1 \leq p \leq 2$, ℓ^p est une Q-algèbre. En utilisant une méthode d'interpolation, Varopoulos a prouvé dans [8] que ce résultat est vrai pour $1 \leq p \leq \infty$. Comme précédemment, on peut voir plus généralement que si A est une Q-algèbre, pour $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^p(\mathbb{N},A)$ est une Q-algèbre. En effet, en vertu du théorème de l'application ouverte, il suffit de le voir pour une algèbre uniforme B sur un compact X. Or, si $x = (x^n)_n$ appartient à $\ell^p(\mathbb{N},B)$, on a $\|(x^n)\| = \sup_{k_n \in X} \|x(k)\|_{\ell^p}$ où $x(k) = (x^n(k_n)) \in \ell^p$. La conclusion résulte donc du lemme de Craw et du fait que ℓ^p est une Q-algèbre.

Au paragraphe suivant nous verrons un autre exemple de Q-algèbres, les algèbres commutatives de type $\mathbb{W}$.

III. LE CONTRE-EXEMPLE ET SES CONSEQUENCES.

1. POSITION DU PROBLEME.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, le problème central est de savoir si il existe une classe naturelle $\mathcal{A}\mathcal{C}_\alpha$ qui est égale à la classe des Q-algèbres. Nous verrons que ce problème est lié aux questions que nous avons posées dans les paragraphes précédents (fin du § 1 et n° 2 du § II). Notons tout d'abord quelques résultats qui sont des conséquences faciles de ce qui précède.

D'après le théorème 2.2 et le corollaire de la proposition 1.9, la classe des Q-algèbres est contenue dans la classe $\mathcal{A}\mathcal{C}_{\mathcal{H}'}$ (on peut voir cette inclusion sans utiliser le théorème 2.2 car toute Q-algèbre est clairement de type $\mathbb{W}$ donc appartient à la classe $\mathcal{A}\mathcal{C}_{\mathcal{H}'} = \mathcal{A}\mathcal{C}_{\mathbb{W}}$). D'après le théorème 2.3, cette inclusion est stricte. Ainsi aucune des deux classes naturelles $\mathcal{A}\mathcal{C}_{\mathcal{H}'}$ et $\mathcal{A}\mathcal{C}_{\gamma'}$ ne peut être égale à la classe des Q-algèbres. D'un autre côté, nous avons vu que la classe $\mathcal{A}\mathcal{C}_{\mathrm{V}}$ est contenue dans la classe des Q-algèbres (proposition 2.2). Dans ce sens, on peut donner un résultat plus fort :

PROPOSITION 3.1. Toute algèbre de Banach commutative de type $\mathcal{W}$ est une Q-algèbre.

En effet, soit A une algèbre de Banach commutative de type $\mathcal{W}$, et soit L un espace de Banach de type $\mathcal{L}$ tel que A soit (comme espace de Banach) un quotient métrique de L. Soit $p : L \to A$ la projection canonique de L sur A. En raisonnant par récurrence, et en utilisant la proposition 1.1, on voit aussitôt que tout produit fini de la forme

$$(\ldots((L \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} \ldots) \overset{\vee}{\otimes} L$$

est canoniquement (et isométriquement) égal au produit

$$(\ldots((L \overset{\mathcal{W}}{\otimes} L) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} L) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} \ldots) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} L.$$

Il en résulte aussitôt que $p \otimes p \otimes \ldots \otimes p$ est une application linéaire continue de $(\ldots((L \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} \ldots) \overset{\vee}{\otimes} L$ dans $(\ldots((A \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} \ldots) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A$, et que sa norme est ≤ 1. Supposons que la longueur des produits précédents soit n, et soit m_n l'application de $A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ (n fois) dans A induite par la multiplication. Par récurrence sur n, on voit immédiatement que m_n est une application linéaire continue de $(\ldots((A \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} \ldots) \overset{\mathcal{W}}{\otimes} A$ dans A et que, pour $n \geq 3$, on a $\|m_n\| \leq \|m_2\| \, \|m_{n-1}\|$. Si donc $\|m_2\| = K$, on a $\|m_n\| \leq K^{n-1}$. Soit maintenant $a(\beta) = a(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ un élément de $V(p,n)$ tel que $\|a(\beta)\|_{V(p,n)^*} \leq 1$, et soient x_i $1 \leq i \leq p$ des éléments de la boule unité de A. Soient ℓ_i des éléments de L, $\|\ell_i\| \leq 2$, tels que $p(\ell_i) = x_i$, $1 \leq i \leq p$. D'après ce qui précède, on a

$$\|\sum_{\beta} a(\beta_1, \ldots, \beta_n) x_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_{\beta_n}\|_A \leq$$

$$\leq K^{n-1} |\sum_{\beta} a(\beta)\, x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n}|_{(\ldots((A \overset{\vee}{\otimes} A) \overset{\vee}{\otimes} A) \overset{\vee}{\otimes} A \ldots) \overset{\vee}{\otimes} A}$$

$$\leq K^{n-1} |\sum_{\beta} a(\beta)\, \ell_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \ell_{\beta_n}|_{(\ldots((L \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} L) \overset{\vee}{\otimes} \ldots) \overset{\vee}{\otimes} L}$$

$$= K^{n-1} \sup_{\substack{\varphi_j \in L' \\ \|\varphi_j\| \leq 1}} |\sum_{\beta} a(\beta)\, \varphi_1(\ell_{\beta_1}) \ldots \varphi_n(\ell_{\beta_n})|.$$

Si, pour tout $\beta \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on pose $f_j(\beta) = \varphi_j(\ell_\beta)$, $1 \leq j \leq n$, on a $\|f_j\| \leq 2$, et par suite,

$\|\sum_{\beta} a(\beta)\, x_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_{\beta_n}\|_A \leq K^{n-1} \operatorname{Sup} |\sum_{\beta} a(\beta)\, f_1(\beta_1) \ldots f_n(\beta_n)|$, le sup étant pris sur toutes les suites $f_j \in \mathbb{C}(\{1,2,\ldots,p\})$, $1 \leq j \leq n$ telles que $\|f_j\| \leq 2$. Par définition de la norme $\vee(p,n)^*$, on a donc $\|\sum_{\beta} a(\beta)\, x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_n}\|_A \leq 2(2K)^{n-1}$. Ceci étant vrai pour tout $a(\beta)$, par dualité, on a $\|(\langle x_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_{\beta_n}, S\rangle)\|_{\vee(p,n)} \leq K_1^n$ pour toute $S \in A'$, $\|S\| \leq 1$, où K_1 ne dépend que de A. D'après le théorème 2.1, ceci prouve que A est une Q-algèbre.

En utilisant le proposition 1.10, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. Soit H un espace de Hilbert muni d'une structure d'algèbre de Banach commutative. Si l'application $m : H \otimes H \to H$ induite par la multiplication est continue de $H \otimes_2 H$ dans H, alors H est une Q-algèbre.

La réciproque de ce corollaire est fausse en ce sens qu'il existe un espace de Hilbert muni d'une structure de Q-algèbre telle que l'application m ne soit pas continue de $H \otimes_2 H$ dans H (théorème 3.1 et proposition 1.10).

La proposition 3.1 est étroitement liée à la question posée au n° 2 du § 2, car elle peut s'exprimer de la manière suivante :

PROPOSITION 3.1 bis. Soit A une algèbre de Banach commutative. Si il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout polynôme $P(z_1,\dots,z_n) = \sum_1^n a_i z_i$ à n variables, de degré 1 et à coefficients a_i dans A et tout x_i, $1 \le i \le n$, dans la boule unité de A, on a

$$\Big\|\sum_1^n a_i x_i\Big\|_A = \|P(x_1,\dots,x_n)\|_A \le K \sup_{|z_i|\le 1} \|P(z_1,\dots,z_n)\|_A = K \sup_{|z_i|\le 1} \Big\|\sum_1^n a_i z_i\Big\|_A,$$

alors, A est une Q-algèbre.

En effet, c'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME. Pour qu'une algèbre de Banach commutative A soit de type $\vee$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout polynôme $P(z_1, \dots, z_n)$ de degré 1 à coefficients dans A, et tout x_i, $1 \le i \le n$ dans la boule unité de A, on ait

$$\|P(x_1, \dots, x_n)\|_A \le K \sup_{|z_i|\le 1} \|P(z_1, \dots, z_n)\|_A .$$

C'est une conséquence évidente de la proposition 1.8 car dire que le polynôme $P(z_1, \dots, z_n) = \sum_1^n a_i z_i$, $a_i \in A$ est de norme uniforme ≤ 1 sur le polydisque unité de $\mathbb{C}^n$, c'est dire que la suite (a_i) est sommable dans A et que $\|(a_i)\|_{\ell^1 \overset{\vee}{\otimes} A} \le 1$.

2. LE CONTRE-EXEMPLE ET SES CONSEQUENCES.

Ce numéro est basé sur le contre-exemple suivant :

THEOREME 3.1. Sur l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$, il existe une structure de Q-algèbre qui n'est pas une structure d'algèbre de type Λ.

Nous utilisons le lemme suivant :

LEMME. Soit H un espace de Hilbert muni d'une structure d'algèbre de Banach. Soit m l'application de $H \otimes H$ dans H définie par la multiplication, et supposons que m soit continue de $H \hat{\otimes} H$ dans H. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H et posons

$$c_{ijk} = \langle e_i e_j , e_k \rangle, \quad i,j,k \in I.$$

Alors on a les inégalités

$$\sup_{\|z\|_H \leq 1} \sum_{i,j} \left|\sum_k c_{ijk} z_k\right|^2 \leq \frac{\pi}{2} \|m\|^2 \leq \frac{\pi}{2} \sup_{\|z\|_H \leq 1} \sum_{i,j} \left|\sum_k c_{ijk} z_k\right|^2 ,$$

où les z_k sont les coordonnées de z sur la base (e_i) et $\|m\|$ la norme de l'application $m : H \hat{\otimes} H \to H$.

Démontrons tout d'abord ce lemme. Identifions H et H' par l'isomorphisme isométrique canonique. On a $\|m\| = \sup_{|u|_\wedge \leq 1} \sup_{\|z\|_H \leq 1} |\langle m(u) , z \rangle|$. Pour tout $z \in H$, soit s_z la forme linéaire sur H associée à z (i.e. $s_z(x) = \langle x,z \rangle$), et, conformément aux notations utilisées au n° 4 du § 1, notons $\tilde{s}_z$ l'application de H dans H' associée à s_z (i.e. $\tilde{s}_z(x).y = \langle xy , z \rangle$). $s_z \circ m$ étant considérée comme une forme linéaire sur $H \hat{\otimes} H$, on a donc $\|m\| = \sup_{\|z\|_H \leq 1} \|s_z \circ m\|$. $s_z \circ m$ étant la forme linéaire sur $H \hat{\otimes} H$ associée à la forme bilinéaire $(x,y) \to \langle xy , z \rangle = \tilde{s}_z(x).y$, on a $\|s_z \circ m\| = \|\tilde{s}_z\|_{\vee}$, et par suite $\|m\| = \sup_{\|z\|_H \leq 1} \|\tilde{s}_z\|_{\vee}$. Si on considère $\tilde{s}_z$ comme un opérateur de H sur lui-même, la proposition 1.7 permet de comparer sa $\vee$-norme avec sa norme de Hilbert-Schmidt. Précisément, on a

$$\|\tilde{s}_z\|_{\vee} \leq \|\tilde{s}_z\|_2 \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, \|\tilde{s}_z\|_{\vee} .$$

Cette inégalité et le calcul de $\|m\|$ donnent donc

(1) $$\sup_{\|z\|_H \leq 1} \|\tilde{s}_z\|_2^2 \leq \tfrac{\pi}{2}\|m\|^2 \leq \tfrac{\pi}{2} \sup_{\|z\|_H \leq 1} \|\tilde{s}_z\|_2^2 .$$

Calculons alors $\|\tilde{s}_z\|_2$: pour tout $i,j \in I$, on a par définition de $\tilde{s}_z$,

$\langle e_i , \tilde{s}_z(e_j)\rangle = \langle e_j e_i , z\rangle = \sum_{k\in I} c_{jik}\, z_k$, avec $z = \sum_{k\in I} z_k e_k$. Il vient donc

$$\|\tilde{s}_z(e_j)\|^2 = \sum_i \Big|\sum_k c_{jik}\, z_k\Big|^2, \quad \text{et}$$

$$\|\tilde{s}_z\|_2^2 = \sum_{i,j\in I} \Big|\sum_{k\in I} c_{ijk}\, z_k\Big|^2 .$$

Compte tenu de (1), ceci donne l'inégalité cherchée.

Démontrons maintenant le théorème 3.1. Nous définissons sur $\ell^2(\mathbb{N})$ une structure d'algèbre de Banach commutative de la manière suivante. Soit (e_n) la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$, et pour tout $x = \sum_n x_n e_n$, $y = \sum_n y_n e_n$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, posons

(2) $$xy = \Big(\sum_{i=2}^{\infty} x_i y_i\Big) e_1 .$$

Il est clair que $(x,y) \to xy$ est une application bilinéaire de $\ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$; il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que $\|xy\|_{\ell^2} \leq \|x\|_{\ell^2}\|y\|_{\ell^2}$, et clairement $xy = yx$. D'autre part, il résulte aussitôt de (2) que pour tout x,y,z dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on a $xyz = 0$. Alors en utilisant la proposition 1.9 et son corollaire, on voit qu'il résulte du théorème 2.1 que l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de la structure définie par cette multiplication est une Q-algèbre. Pour voir que H n'est pas une algèbre de type $/\!\!\wedge$, il suffit d'appliquer le lemme. En effet, d'après (2), on a

$$c_{ijk} = \langle e_i e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \text{ ou } i = j = 1, \\ \delta_{ij} & \text{si } k = 1 \text{ et } i \text{ et } j \geq 2, \end{cases}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Si on prend alors $z_o = e_1$ le premier élément de la base canonique de H (i. e. $z_o^k = 0$ pour $k \geq 2$ et $z_o^1 = 1$), il vient

$$\sum_{i,j} \Big|\sum_k c_{ijk}\, z_o^k\Big|^2 = \sum_{i,j=2}^{\infty} \delta_{ij} = +\infty,$$

ce qui montre que H n'est pas de type $/\!\!\wedge$.

De ce contre-exemple, nous déduisons immédiatement la réponse au problème général posé :

THEOREME 3.2. Il n'existe pas de norme tensorielle naturelle α telle que la classe $\mathcal{AC}_\alpha$ soit égale à la classe des Q-algèbres.

En effet, supposons qu'il existe une telle norme tensorielle naturelle α. D'après ce qui a été dit au n° 1 cette norme ne peut être ni $\mathcal{H}'$, ni γ', ni bien sûr $\wedge$. Alors le tableau des classes naturelles $\mathcal{AC}_\alpha$ (cf. n° 4 du § 1) montre que la classe des Q-algèbres serait contenue dans la classe $\mathcal{AC}_{/\!\wedge}$ ce qui contredit le théorème 3.1.

COROLLAIRE 1. Il existe une Q-algèbre A telle que pour tout $K > 0$ il existe un polynôme $P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$ de degré 1 et à coefficients a_i dans A, et n éléments x_i de la boule unité de A tels que

$$\|P(x_1,\dots,x_n)\|_A = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_A > K \sup_{|z_i|\leq 1} \|P(z_1,\dots,z_n)\|_A = K \sup_{|z_i|\leq 1} \|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\|_A .$$

En d'autres termes, la classe $\mathcal{AB}_{\vee}$ est strictement contenue dans la classe des Q-algèbres.

En effet, dans le cas contraire, d'après le lemme de la proposition 3.1 bis, toute Q-algèbre serait de type $\vee$, et la proposition 3.1 montrerait que la classe des Q-algèbres serait égale à la classe $\mathcal{AB}_{\vee}$.

COROLLAIRE 2. L'équivalence

$$\text{"}A \in \mathcal{AB}_{\vee} \Longleftrightarrow \begin{cases} A \overset{\vee}{\otimes} B & \text{est une algèbre de Banach commutative pour toute} \\ B & \text{algèbre de Banach commutative} \end{cases}$$

est fausse.

Raisonnons par l'absurde, et supposons cette équivalence vraie. Soient A une algèbre uniforme, I un idéal fermé de A, posons $R = A/I$, et soit B une algèbre de Banach commutative. Comme A est de type $\vee$, l'équivalence montrerait que $A \overset{\vee}{\otimes} B$ est une algèbre de Banach ; comme la norme $\vee$ est projective à gauche, $R \overset{\vee}{\otimes} B$ est un quotient de $A \overset{\vee}{\otimes} B$, et alors $R \overset{\vee}{\otimes} B$ serait aussi une algèbre de Banach. L'équivalence utilisée dans l'autre sens donnerait $R \in \mathcal{AB}_{\vee}$. Cette inclusion confrontée avec la proposition 3.1 donnerait que la classe des Q-algèbres serait égale à la classe $\mathcal{AB}_{\vee}$ ce qui contredit le théorème 3.2.

Références

[1] AMEMIYA, I. and SHIGA, K. On tensor products of Banach spaces. Kodai Math. Seminar Reports 9 (1957), 161-176.

[2] DAVIE, A. M. Quotient algebras of uniform algebras. J. London Math. Soc. A paraître.

[3] DAVIE, A. M. Power bounded elements in a Q-algebra. A paraître.

[4] GROTHENDIECK, A. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Boletin da sociedade de matematica de Sao Paulo 8 (1956), 1-79.

[5] GROTHENDIECK, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] LINDENSTRAUSS, J. and PELZYNSKI, A. Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications. Studia Math., 29 (1968), 275-326.

[7] VAROPOULOS, N. Th. Sur les quotients d'algèbres uniformes. C. R. Acad. Sc. Paris, 274 (1972), 1344-1346.

[8] VAROPOULOS, N. Th. Some remarks on Q-algebras. Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 1-11.

[9] VAROPOULOS, N. Th. On an inequality of Von Newmann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory. J. Funct. Anal. A paraître.

[10] VAROPOULOS, N. Th. Sur le produit tensoriel d'algèbres normées. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276 (1973), 1193-1195.

[11] WERMER, J. Quotient algebras of uniform algebras. Symposium of function algebras and rational approximation. Univ. of Michigan 1969.