FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

COURS de C_3 .

Topologie Algèbrique

-::-::-

Professé par : ROSENBERG

Rédigé par : BETTINELLI

-:-

2ème partie

Année 1968 - 1969

F A C U L T E   D E S   S C I E N C E S   D ' O R S A Y

COURS de C_3.

Topologie Algèbrique

-::-::-

Professé par : ROSENBERG

Rédigé par : BETTINELLI

-:-

2ème partie

Année 1968 - 1969

CHAPITRE 5.

HOMOLOGIE : THEORIE

-:-

HOMOLOGIE DES COMPLEXES SIMPLICIAUX.

Définition (complexe de chaînes orienté) 5.1.

Soit un complexe simplicial K .

a) Etant donné un k-simplexe $\langle S\rangle = \langle p_0 ,\ldots, p_k \rangle$ (de dimension k) on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble ordonné des sommets de S

$$(p_0 ,\ldots, p_k) \sim (p_{\sigma(o)} ,\ldots, p_{\sigma(k)})$$

si σ est une permutation paire (i.e. : de signature $\varepsilon(\sigma) = +1$). Les classes d'équivalence sont notées $[p_0 , p_1 ,\ldots, p_k]$ et chaque classe est appelée k-simplexe orienté de K . A chaque k-simplexe $\langle S\rangle$ correspond donc un k-simplexe oriente si $k = 0$, et deux k-simplexes orienté si $k < 0)$.

b) Soit $\overline{C}_q(K)$ le groupe abélien libre engendré par les q-simplexes orientés σ^q de K avec la relation :

$$\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$$

σ_1^q et σ_2^q désignant les deux orientations possibles de σ^q (lorsqu'elles existent)

Donc $\overline{C}_q(K) = 0$ si $q < 0$, et $\overline{C}_q(K)$ est un groupe abélien libre de rang égal au nombre des q-simplexes de K si $k \geqslant 0$

Si $|K| = \emptyset$ $\overline{C}_q(K) = 0$ $q \in \mathbb{Z}$

c) On définit un opérateur bord $d_q : \overline{C}_q(K) \to \overline{C}_{q-1}(K)$ par

$$d_q[p_0,p_1,\ldots,p_q] = \sum_{0\leqslant i\leqslant q}(-1)^i\, [p_0,p_1,\ldots,\hat{p}_i,\ldots p_q]$$

où $[p_0,p_1,\ldots,\hat{p}_i,\ldots,p_q] = [p_0,p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_q]$

Cet opérateur bord, défini sur les générateurs de $\overline{C}_q(K)$ s'étend à tout $\overline{C}_q(K)$ car

$$d_q(\sigma_1^q + \sigma_2^q) = d_q(\sigma_1^q) + d_q(\sigma_2^q) = 0$$

si σ_1^q , σ_2^q désignent les deux orientations de σ^q . Le lecteur vérifiera par le calcul qu'on a bien

$$d_q d_{q+1} = 0$$

d) Le complexe de chaînes libre $\overline{C}(K) = \{\overline{C}_q(K) , d_q\}$ est appelé complexe de chaînes orienté de K .

L'homologie de ce complexe de chaînes noté

$$\overline{H}(K) = H(\overline{C}(K))$$

est appelée homologie orientée de K

e) Il est parfois utile d'ajouter des générateurs à $\overline{C}_q(K)$. Si on convient de considérer $\overline{C}_q(K)$ engendré par les

$[p_0,\ldots, p_q]$ ($p_0 ,\ldots, p_q$ sommets distincts ou non d'un simplexe)

où $[p_0,\ldots, p_q] = 0$ si les p_i ne sont pas tous distincts et $[p_0 , \ldots , p_q]$ défini en a) s'ils le sont

le lecteur vérifiera qu'on ne change pas la définition de d_q

Proposition 5.2.

Etant donnés deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application simpliciale :

$$\varphi : K_1 \to K_2$$

elle induit une transformation de chaînes $\overline{C}(\varphi)$ telle que :

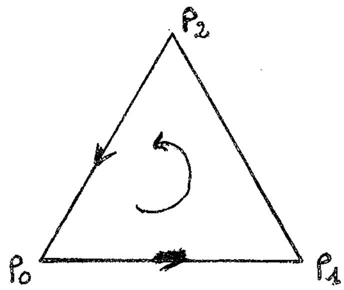
$$\overline{C}(\varphi)[p_0 , p_1 , \ldots , p_q] = [\varphi(p_0), \varphi(p_1), \ldots , \varphi(p_q)]$$

et la correspondance $\varphi \to \overline{C}(\varphi)$ est fonctorielle (covariante).

Preuve : laissée au lecteur.

Il faut remarquer que l'on a besoin de 5.1. d) pour que la définition de $\overline{C}(\varphi)$ soit correcte car les $\varphi(p_i)$ ne sont pas nécéssairement distincts

Remarque 5.3.



Soit un S-simplexe $\langle S \rangle = \langle p_0, p_1 , p_2 \rangle$
Dans le complexe simplicial S des faces de S , $\sigma = [p_0\ p_1] + [p_1\ p_2] + [p_2\ p_0]$ est un cycle (ce qui se visualise par une boucle en dimension 1) mais aussi un bord car $\sigma = d_2[p_0\ p_1\ p_2]$.

Par contre dans le complexe S des faces propres de S , ce cycle n'est pas un bord, donc $\{\sigma\}$ est un générateur de $\overline{H}_1(K)$.

Ceci donne au lecteur l'idée intuitive que $\overline{H}_q(K)$ est engendré par les trous de dimension q de K (dans S le trou de dimension 1 correspond à $\langle S \rangle$).

Le lecteur pourra exercer ce raisonnement sur un complexe simplicial quelconque dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5.4.

$\overline{C}(K)$ est un complexe augmenté

Une augmentation est donnée par : $\varepsilon : \overline{C}_0(K) \to \mathbb{Z}$

$$\varepsilon[p] = 1 \quad \text{pour tout sommet } p \text{ de } K$$

Preuve :

Pour tout générateur $[p_0 , p_1]$ de $\overline{C}_1(K)$, on a :

$$\varepsilon d_1[p_0\ p_1] = \varepsilon\ ([p_0] - [p_1]) = 1 - 1 = 0$$

Définition (complexe de chaînes ordonné) 5.5.

Au complexe simplicial K nous allons associer un nouveau complexe de chaînes dont l'intérêt sera de servir d'intermédiaire entre le complexe de chaînes orienté et le complexe de chaînes singulier que nous définirons plus loin.

a) Un q-simplexe ordonné est une suite ordonnée de $(q + 1)$ sommets $p_0 , \dots, p_q$ appartenant à un même simplexe.

On note un tel simplexe ordonné : $(p_0 , \dots, p_q)$.

Dans ce cas, la définition d'un q-simplexe ordonné permet la répétition des sommets.

b) Soit $C_q(K)$ le groupe abélien libre engendré par les q-simplexes ordonnés de K , si $q \geqslant 0$ et $C_q(K) = 0$ si $q < 0$.

On définit un opérateur bord $d_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ par

$$d_q(p_0 , p_1 ,\dots,p_q) = \sum_{0\leqslant i\leqslant q} (-1)^i (p_0, p_1 ,\dots, \hat{p}_i ,\dots, p_q)$$

(le $\hat{p}_i$ signifie toujours qu'on ôte p_i)

Il est évident ici que d_q est bien défini puisque défini sur une base de $C_q(K)$ et on montre comme pour 5.1. que

$$d_{q+1}\, d_q = 0$$

c) Le complexe de chaînes libre $C(K) = \{C_q(K) ; d_q\}$ est appelé complexe de chaînes ordonné de K .

Son homologie est appelée homologie ordonnée de K et est notée

$$H(C(K)) = H(K) .$$

Comme ci-dessus, on a les deux propositions suivantes :

<u>Proposition 5.6.</u>

Etant donnés deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application simpliciale

$$\varphi : K_1 \to K_2$$

elle induit une transformation de chaînes $C(\varphi)$ définie par

$$C(\varphi)(p_0 ,\dots, p_q) = (\varphi(p_0),\dots, \varphi(p_q))$$

et la correspondance est fonctorielle (covariante).

Proposition 5.7.

$C(K)$ est un complexe augmenté :

Une augmentation $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ est donnée par

$$\varepsilon(p) = 1 \quad \text{pour tout sommet } p \text{ de } K .$$

Remarque et définition 5.8.

a) Ce qu'on a dit jusqu'à présent sur les complexes simpliciaux aurait pu être dit sur les complexes abstraits (au sens du chapitre III). Mais il est évident que ceux-ci non d'intérêt que dans la mesure où ils sont munis d'une topologie convenable, ce qui n'est pas fait dans ce cours.

b) Nous allons cependant définir les composantes connexes d'un complexe abstrait A (qui correspondent aux composantes par arcs de leurs réalisations) p et p' sont dits être connectés, s'il existe $p_0 = p, p_1 \dots p_n = p'$, tous sommets de A, tels que (p_i , p_{i+1}) soit un simplexe de A pour tout i.

c) Pour un tel complexe (abstrait ou simplicial) K dont les composantes connexes sont $(K_j)_{j \in I}$, on a d'après 4.33

$$C_p(K) = \bigoplus_{j\in I} C_p(K_j) \quad \text{donc} \quad H_p(K) = \bigoplus_{j\in I} H_p(K_j)$$

Théorème 5.9.

Soit K un complexe simplicial, de la forme

$$K = K' * \overline{p_0}$$

où K' est un complexe simplicial et $\overline{p_0}$ un sommet de K.

Alors $C(K)$ est un complexe de chaînes augmenté acyclique.

Preuve :

Nous allons utiliser 4.45 en montrant que ε induit une équivalence de chaînes

Soit $\tau' : \mathbb{Z} \to C(K)$ où $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_q = 0$ $q \neq 0$, définie par

$$\tau_0(n) = n\bar{p}_0 \quad , \quad \tau_q = 0 \quad q \neq 0$$

On a $\tau\tau' = ID_Z$

L'application $D : C_q(K) \to C_{q+1}(K)$ définie par :

$$D(p_0,\ldots,p_q) = (\bar{p}_0 \, , \, p_0,\ldots, p_q)$$

est une homotopie entre $Id_{C(K)}$ et $\tau'\tau$

$$D : Id_{C(K)} \simeq \tau'\tau \quad .$$

Corollaire 5.10.

Soit un simplexe S de dimension n

On a $\tilde{H}_q(S) = 0$ pour tout q .

Définition (transformation acyclique) 5.11.

Etant donnés un complexe simplicial (ou abstrait) et un complexe de chaînes augmenté par ε C , une transformation

$$\Gamma : K \to C$$

est dite transformation acyclique, si à chaque simplexe $S \in K$ Γ associe un sous-complexe de C tel que :

a) Pour tout $S \in K$, $\Gamma(S)$ est acyclique, et augmenté par ε

b) Si $S_1 \leqslant S_2 (\in K)$ $\Gamma(S_1)$ est un sous-complexe de $\Gamma(S_2)$.

Théorème 5.12.

Soit un complexe simplicial (ou abstrait) K , un complexe de chaînes C' et une transformation acyclique Γ . Alors il existe une transformation de chaînes, unique à une homotopie près $\tau : C(K) \to C'$ telle que :

Le support de τ soit inclus dans Γ .

i.e. a) pour tout simplexe $\langle S\rangle = \langle p_0 ,\dots, p_q\rangle \in K$

$$\tau_q(p_0 ,\dots, p_q) \in C_q(\Gamma(S))$$

b) τ soit algébrique

i.e. : si ε est l'augmentation de $C(K)$ définie par $\varepsilon(p) = 1$ pour tout sommet p , et ε' l'augmentation de C'

$$\varepsilon'\tau_0 = \varepsilon$$

Preuve :

Existence :

1) en dimension 0 :

Comme Γ est acyclique, pour tout sommet p de K , par définition a) :

$$\varepsilon'| \; C_0(\Gamma(p)) \text{ est surjectif}$$

donc il existe $z_p \in C_0(\Gamma(p))$ tel que $\varepsilon'(z_p) = 1$

τ_0 est défini par $\tau_0(p) = (z_p)$ sur la base de $C_0(K)$ donc partout par extension et vérifie : $\varepsilon'\tau_0 = \varepsilon$

et $\tau_0(p) \in C_0(\Gamma(p))$

2) Supposons τ_p définie pour tout $p < q$, satisfaisant à a) et b)

$(q > 0)$

$$\begin{tikzcd} C_q(K) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\tau_q"] & C_{q-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{q-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_0(K) \arrow[d, "\tau_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ C'_q \arrow[r, "d'"] & C'_{q-1} \arrow[r] & \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

Soit $\sigma = (p_0 , \ldots , p_q) \in C_q(K)$

$$d_\sigma = \sum_{o<i<q} (-1)^i (p_0, \ldots, \hat{p}_i , \ldots p_q)$$

$$\tau_{q-1} d_\sigma = \sum_{o<i<q} (-1)^i \; \tau_{q-1} (p_0 , \ldots , \hat{p}_i , \ldots p_q)$$

D'après l'hypothèse a) supposée pour $(q-1)$: $\tau_{q-1} d_\sigma \in C_{q-1} [\Gamma(\sigma)]$.

Or τ définie jusqu'à $(q-1)$ est supposée être une transformation de chaînes donc vérifie

$$d' \tau_{q-1}(d\sigma) = (\tau_{q-2})(d\sigma) = \tau_{q-2} \sigma = 0$$

i.e. : $\tau_{q-1} d\sigma \in Z_{q-1}(\Gamma(\sigma)) = B_{q-1}(\Gamma(\sigma))$

car $\Gamma(\sigma)$ est acyclique

donc $\tau_{q-1} d\sigma = d' z_\sigma$ $\qquad z_\sigma \in C_q(\Gamma(\sigma))$

Posons $\tau\rho(\sigma) = z_\sigma$

τ_q ~~définie~~ définie sur une base de $C_q(K)$ s'étend à $C_q(K)$ et vérifie

$$d' \tau_q = \tau_{q-1} d$$

Unicité :

Soient $\tau, \tau' : C(K) \rightarrow C'$ satisfaisant à a) et b)

1) En dimension 0

Soit un sommet p de K.

$$\tau(p) - \tau'(p) \in C_o(\Gamma(p) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\tau(p) - \varepsilon\tau'(p) = 1 - 1 = 0$$

donc $\tau(p) - \tau'(p)$ est un cycle de $\Gamma(p)$ qui est acyclique c'est-à-dire un bord.

$$\tau(p) - \tau'(p) = d'(z_p) \qquad z_p \in C_1(\Gamma(p))$$

On définit alors $D_o : C_o(K) \rightarrow C'_1$ par

$$D_o(p) = z_p \quad \text{sur une base de } C_o(K)$$

On a donc : $D_o(p) \in C_1(\Gamma(p))$ pour tout sommet p de K .

2) Supposons que D_p soit défini sur $C_p(K)$ pour tout $p < q$ $(q > 0)$ tel que $D_p : C_p(K) \rightarrow C'_{p+1}$

et (1) $d'D_p + D_{p-1}d = \tau_p - \tau'_p$; (2) $D_p(\sigma) \in C_{p+1}(\Gamma(\sigma))$

Soit $\sigma = (p_o, \dots, p_q) \in C_q(K)$

$$\tau\sigma - \tau'\sigma - D_{q-1}\, d\sigma \in C_q(\Gamma(\sigma))$$

les deux premiers termes y appartiennent d'après a) et le troisième d'après l'hypothèse de récurrence (2) vérifie

$$D_{q-1}d\sigma = \sum_{o \leqslant i \leqslant q} (-1)^i \; D_{q-1}(p_o, \dots, \hat{p}_i, \dots p_q)$$

mais Γ est une transformation acyclique et

$$(p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_q) \leqslant (p_0 \ldots p_q) \implies \Gamma(p_0, \ldots \hat{p}_i \ldots p_q) \subset \Gamma(\sigma)$$

enfin $\quad D_{q-1} d\sigma \in C_q(\Gamma(\sigma))$

D'après l'hypothèse (1)

$$d' D_{q-1}(d\sigma) + D_{q-2} d(d\sigma) = \tau(d\sigma) - \tau'(d\sigma)$$

donc : $\quad d'(\tau\sigma - \tau'\sigma - D_{q-1} d\sigma) = d'\tau\sigma - d'\tau'\sigma - \tau d\sigma + \tau' d\sigma - D_{q-2} d^2\sigma = 0$.

Comme précédemment :

$$\tau\sigma - \tau'\sigma - D_{q-1} d\sigma \in Z_q(\Gamma(\sigma)) = B_q(\Gamma(\sigma))$$

Il existe donc $\quad z_\sigma \in C'_{q+1}$ $\quad$ tel que

$$\tau\sigma - \tau'\sigma - D_{q-1} d\sigma = d' z\sigma$$

Nous définissons D_q sur une base de $C_q(K)$ par

$$D_q(\sigma) = z_\sigma$$

Il est evident alors que D vérifie l'hypothèse d'induction pour $p \leqslant q$.

Nous avons donc montré par induction que

$$D : \tau \simeq \tau'$$

Corollaire 5.13.

Etant donné un complexe simplicial (ou abstrait) K on a l'isomorphisme : $H(K) \sim \overline{H}(K)$

Plus précisèment $C(K)$ et $\overline{C}(K)$ sont équivalentes.

Preuve :

Nous allons montrer que la transformation de chaînes :

$\tau : C(K) \to \overline{C}(K)$ définie par

$$\tau(p_o, \ldots, p_q) = [p_o, \ldots, p_q]$$

est une équivalence de chaînes.

Le fait que ce soit une transformation de chaînes est visible.

Pour définir une inverse $\bar{\tau} : \overline{C}(K) \to C(K)$ de τ nous choisissons un ordre total arbitraire sur l'ensemble des sommets de K, et nous appelons chaîne normale toute chaîne $C = \Sigma\, n_i\, \sigma_i$ de $C(K)$ pour laquelle l'ordre de chaque simplexe ordonné σ_i est celui induit par l'ordre total choisi.

Il est donc clair que si c est normale, dc aussi.

Si $C(K)$ est le groupe des chaînes normales, on a

$$\tau | C'(K) \quad \text{est bijective.}$$

On définit $\bar{\tau} = [\tau | C'(K)]^{-1}$

$\bar{\tau}$ est une transformation de chaîne en

$$\bar{\tau}\, d\, \bar{c} = d\, \bar{\tau}\, \bar{c} \quad \text{pour tout} \quad \bar{c} \in \overline{C}(K)$$

($\bar{\tau}\bar{c}$ est normale, donc $d\bar{\tau}\bar{c}$ aussi et $\tau(d\bar{\tau}\bar{c}) = d\tau\bar{\tau}\bar{c} = d\bar{c}$) .

Soit Γ la transformation acyclique : $K \to C(K)$

$$\Gamma(S) = C(S) \quad \text{(complexe de chaînes ordonné de } S)$$

$Id_{c(K)}$ et $\bar{\tau}\tau$ vérifient les conditions du théorème 5.12 donc

$$\bar{\tau}\tau \simeq Id_{c(K)}$$

or

$$\tau\bar{\tau} = Id_{\bar{c}(K)}$$

Donc τ est une équivalence de chaînes.

Remarque : les deux complexes de chaînes $C(K)$ et $\overline{C}(K)$ ayant la même homologie, $H(K)$ désignera dès maintenant cette homologie.

Théorème (relation avec la contiguité) 5.14.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et deux applications simpliciales :

$$\varphi , \varphi' : K_1 \to K_2$$

dans une même classe de contiguité (cf. 3.46).

Alors $C(\varphi)$, $C(\varphi') : C(K_1) \to C(K_2)$ d'une part

et $\overline{C}(\varphi)$, $\overline{C}(\varphi') : \overline{C}(K_1) \to \overline{C}(K_2)$ d'autre part sont homotopes.

Preuve :

Comme l'homotopie est une relation d'équivalence nous pouvons supposer que φ est contigue à φ'. L'homotopie de $C(\varphi)$ et $C(\varphi')$ est donnée par :

$$D(p_o,\ldots, p_q) = \sum_{o\leqslant i\leqslant q} (-1)^i(\varphi'(p_o),\ldots, \varphi'(p_i), \varphi(p_i),\ldots, \varphi(p_q))$$

Celle de $C(\varphi)$ et $C(\varphi')$ s'en déduit par 5.13.

Théorème 5.15.

Si K est un complexe simplicial (ou abstrait) non vide, connexe,

Alors $H_o(K) = \mathbb{Z}$ $(\tilde{\tilde{H}}_o(K) = 0)$

Preuve :

Soit ε l'augmentation de $C(K)$ $(\varepsilon(p) = 1$ pour tout $p)$. Fixons un sommet p_o . Pour chaque sommet p_i il existe un chemin d'arête de p_o à

q auquel correspond une chaîne $c_i \in C_1(K)$ telle que $dc_i = p_i - p_o$.
Une chaîne de $\tilde{H}_o(K)$ s'écrit $\{\Sigma\, n_i(p_i)\}$ avec

$$\varepsilon(\Sigma\, n_i(p_i)) = \Sigma\ n_i = 0$$

Mais alors le cycle $\Sigma\, n_i(p_i)$ est aussi un bord car

$$d(\Sigma\, n_i c_i) = \Sigma\, n_i(p_i) - \Sigma\, n_i(p_o) = \Sigma\, n_i(p_i)$$

donc $\tilde{H}_o(K) = 0$.

Corollaire 5.16.

Pour tout complexe simplicial K , $H_o(K)$ est un groupe libre de rang égal au nombre de composantes connexes de K (non vides) .

Preuve : Evidente d'après 5.8 et 5.15.

Définition (homologie relative) 5.17.

Soit un complexe simplicial (ou abstrait) K et un sous-complexe L .

a) On appelle homologie orientée relative de K par rapport à (ou modulo) L , l'homologie de $\bar{C}(K)/\bar{C}(L)$ et on la note :

$$H(\bar{C}(K)/\bar{C}(L)) = \bar{H}(K,L)$$

b) On appelle homologie ordonnée relative de K par rapport à L , l'homologie de $C(K)/C(L)$ et on la note :

$$H(C(K)/_{C(L)}) = H(K,L)$$

c) Pour l'une ou l'autre des théories on définit comme au chapitre IV l'homologie relative de K modulo L à coefficients dans G et à valeurs dans G et on note ces groupes

$$\bar{H}(K,L\ ;\ G) \qquad H(K,L\ ;\ G)$$

$$\bar{H}^*(K,L\ ;\ G) \qquad H^*(K,L\ ;\ G)$$

d) On a évidemment $H(K,\emptyset) = H(K)$; $\bar{H}(K,\emptyset) = \bar{H}(K)$

Lemme 5.18.

Soit un complexe simplicial (ou abstrait) K , un sous-complexe L et un groupe G

Alors on a les suites exactes :

$$\to H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{p_*} H_q(K,L) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(L) \to$$

$$\to H_q(L\ ;\ G) \xrightarrow{i_*\otimes 1} H_q(K\ ;\ G) \xrightarrow{p_*\otimes 1} H_q(K,L\ ;\ G) \xrightarrow{\beta} H_{q-1}(L\ ;\ G) \to$$

$$\to H^{q-1}(L\ ;\ G) \xrightarrow{\gamma} H^q(K,L\ ;\ G) \xrightarrow{p^*} H^q(K\ ;\ G) \xrightarrow{i^*} H^q(L\ ;\ G) \to$$

et de même en homologie orientée.

Preuve :

De la suite exacte : $0 \to C(L) \xrightarrow{i} C(K) \xrightarrow{p} C(K)/C(L) \to 0$

Le complexe de chaînes $C(K)$ étant libre, on déduit les suites exactes :

$$0 \to C(L)\otimes G \to C(K)\otimes G \to C(K)/C(L)\otimes G \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C(K)/C(L),\ G) \to \mathrm{Hom}(C(K),\ G) \to \mathrm{Hom}(C(L),\ G) \to 0$$

Il suffit de leur associer leurs suites exactes d'homologie.

Théorème 5.19.

Etant donné un complexe simplicial (ou abstrait) K et un sous complexe L, on a les isomorphismes

$$H(K,L) \approx \overline{H}(K,L)$$

$$H(K,L\,;\,G) \approx \overline{H}(K,L\,;\,G)$$

$$H^{*}(K,L\,;\,G) \approx \overline{H}^{*}(K,L\,;\,G)$$

Preuve :

L'équivalence de chaînes $\tau : C(K) \to \overline{C}(K)$ définie en 5.13 induit des équivalences de chaînes

$$\tau \otimes 1 : C(K) \otimes G \to \overline{C}(K) \otimes G$$

$$\mathrm{Hom}(\tau,G) : \mathrm{Hom}(\overline{C}(K)\,;\,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C(K)\,;\,G)$$

On ne va donc traiter que le premier résultat, les autres se résolvant par le même procédé.

τ induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_q(L) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*", "S"'] & H_q(K) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*", "S"'] & H_q(K,L) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*"] & H_{q+1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*", "S"'] & H_{q+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*", "S"'] & {} \\
{} \arrow[r] & \overline{H}_q(L) \arrow[r] & \overline{H}_q(K) \arrow[r] & \overline{H}_q(K,L) \arrow[r] & \overline{H}_{q+1}(L) \arrow[r] & \overline{H}_{q+1}(K) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On sait d'après 5.13 que τ_* est un isomorphisme entre les homologies absolues.

Le résultat se déduit donc du lemme des cinq (4.36).

Définition (caractéristique d'Euler) 5.20.

a) On appelle $q^{\text{ième}}$ nombre de Betti du complexe simplicial K , le rang de $H_q(K)$ (qui est de type fini)

b) On appelle $q^{\text{ième}}$ nombre de Betti de la paire (K,L) , le rang de $H_q(K,L)$.

c) On appelle caractéristique d'Euler de K , le nombre

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} b_i(K) \qquad b_i(K) : i^{\text{ième}} \text{ nombre de Betti de } K$$

Proposition 5.21.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} \rho(C_i(K)) \qquad \rho : \text{ rang de}$$

Preuve :

On remarquera que $\chi(K)$ est aussi :

$$\chi(K) = \operatorname{Tr} \mathrm{Id}_* = \operatorname{Tr} \mathrm{Id}$$

d'après 4.80.

Remarque : on a de même : $\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} \rho(\overline{C}_i(K))$

Corollaire 5.22.

$$\chi(K,L) = \sum_{i=0}^{\dim K} (-1)^i \alpha_i$$

où α_i est le nombre de i-simplexes de $K - L$.

Application 5.23.

Soit S un n-simplexe. On a les résultats suivants :

$$H_q(S\ ,\ \dot{S}) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathbf{Z} & q = n \end{cases}$$

$$H_q(\dot{S}) = \begin{cases} Z & q = n-1 \quad \text{ou} \quad q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

On a $\bar{C}_q(S) = \bar{C}_q(\dot{S})$ si $q \neq n$

donc $\bar{C}_q(S)/\ \bar{C}_q(\dot{S}) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathbf{Z} & q = n \end{cases}$

donc $\tilde{H}_q(S,\dot{S}) = H_q(S,\dot{S}) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathbf{Z} & q = n \end{cases}$

Comme $\tilde{H}(S) = 0$ d'après 5.15 , de la suite d'homologie réduite

$$\to \tilde{H}_q(S) = 0 \to H_q(S,\dot{S}) \to \tilde{H}_{q-1}(\dot{S}) \to \tilde{H}_{q-1}(S) = 0$$

(le lecteur vérifiera qu'une augmentation n'affecte pas l'homologie relative)

on déduit :

$$\tilde{H}_{q-1}(\dot{S}) \approx H_q(S,\dot{S})$$

ce qui nous donne le second résultat.

Définition (suite de Mayer-Vietoris) 5.24.

Nous allons construire des suites exactes de complexes de chaînes qui nous donneront de puissants moyens de calculer l'homologie à partir d'homologie déjà connues.

Etant donnés des sous-complexes C' et C'' d'un complexe de chaîne et les transformations de chaînes :

$$i : C' \cap C'' \to C' \oplus C''$$

$$j : C' \oplus C'' \to C' \oplus C''$$

définies par : $i(c) = (c, -c)$ et $j(c', c'') = c' + c''$

on a la petite suite exacte :

$$0 \to C' \cap C'' \xrightarrow{i} C' \oplus C'' \xrightarrow{j} (C' + C'') \to 0$$

à laquelle correspond la suite exacte d'homologie :

$$\to H_q(C' \cap C'') \xrightarrow{i_*} H_q(C') \oplus H_q(C'') \xrightarrow{j_*} H_q(C' + C'') \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(C' \cap C'')$$

appelée suite de Mayer-Vietoris des sous-complexes C' et C''.

<u>Proposition 5.25.</u>

a) Etant donné un complexe simplicial K et deux sous-complexes K_1 et K_2, on a la suite de Mayer-Viétoris :

$$\to H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{j_*} H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2)$$

b) Si le complexe est augmenté, on a la suite de Mayer-Vietoris réduite de K_1 et K_2, dès que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$

$$\to \tilde{H}_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(K_1) \oplus \tilde{H}_q(K_2) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{d_*} \tilde{H}_{q-1}(K_1 \cap K_2)$$

c) Etant données deux paires simpliciales * (K_1, L_1) et (K_2, L_2) dans K, on a la suite de Mayer-Vietoris relative de (K_1, L_1) et

---

* voir définition en 5.26.

(K_2 , L_2)

$$\to H_q(K_1 \cap K_2 , L_1 \cap L_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K_1 , L_1) \oplus H_q(K_2 , L_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$H_q(K_1 \cup K_2 , L_1 \cup L_2) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2 , L_1 \cap L_2) \to$$

Preuve :

a) On a $\quad C(K_1 \cap K_2) = C(K_1) \cap C(K_2)$

$\qquad C(K_1 \cup K_2) = C(K_1) + C(K_2)$

Soit : $\quad i_1 : K_1 \cap K_2 \subset K_1 \quad ; \quad i_2 : K_1 \cap K_2 \subset K_2$

$\qquad j_1 : K_1 \subset K_1 \cup K_2 \quad ; \quad j_2 : K_2 \subset K_1 \cup K_2$

On a la suite exacte :

(1) $\quad 0 \to C(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} C(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{j} C(K_1 \cup K_2) \to 0$

où : $i(c) = (C(i_1)c, - C(i_2)c)$; $j(c_1,c_2) = C(j_1)c_1 + C(j_2)c_2$

il suffit d'en prendre la suite de Mayer-Vietoris.

En particulier : $i_*(z) = (i_{1*}z , - i_{2*}z)$; $j_*(z_1,z_2) = j_{1*} z_1 + j_{2*}z_2$

où $\quad z \in H(K_1 \cap K_2)$, $z_1 \in H(K_1)$, $z_2 \in H(K_2)$

b) La condition $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ est evidemment nécessaire pour parler de $\tilde{H}(K_1 \cap K_2)$.

Mais alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & C_o(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{i} & C_o(K_1) \oplus C_o(K_2) & \xrightarrow{j} & C_o(K_1 \cup K_2) & \to 0 \\
& \downarrow \varepsilon & & \downarrow (\varepsilon, \varepsilon) & & \downarrow \varepsilon & \\
0 \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z} & \to 0
\end{array}$$

où $\alpha(n) = (n, -n)$; $\beta(n, m) = n + m$

qui vous permet de prolonger (1) en

(2) $0 \to \tilde{C}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \tilde{C}(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{j} \tilde{C}(K_1 \cup K_2) \to 0$

c) Le lecteur montrera à titre d'exercice que si on a les suites exactes de groupes : $0 \to C_1 \xrightarrow{\alpha} C_2 \xrightarrow{\beta} C_3 \to 0$ et $0 \to C'_1 \xrightarrow{\alpha|C'_1} C'_2 \xrightarrow{\beta|C'_2} C'_3 \to 0$ avec $C'_1 \subset C_1$, $C'_2 \subset C_2$ $C'_3 \subset C_3$, on a la suite exacte :

$$0 \to C_1/C'_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} C_2/C'_2 \xrightarrow{\bar{\beta}} C_3/C'_3 \to 0$$

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ désignant les homomorphismes induits par α et β . Ici on écrit la suite exacte (1) pour K_1 et K_2 puis pour L_1 et L_2 on en déduit la suite exacte :

(3) $$0 \to C(K_1 \cap K_2)/C(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{\bar{i}} C(K_1)/C(L_1) \oplus C(K_2)/C(L_2) \xrightarrow{\bar{j}} C(K_1 \cup K_2)/C(L_1 \cup L_2) \to 0$$

dont il suffit de prendre la suite de Mayer-Viétoris.

Définition 5.26 (excision).

Etant donné un complexe simplicial K et des paires simpliciales (K_1 , L_1)

et (K_2,L_2) (une paire simpliciale est un couple de sous-complexes (K',L') où $i : L' \subset K'$ est une application simpliciale), l'inclusion

$$(K_1 , L_1) \subset (K_2 , L_2)$$

est appelée excision si $K_1 - L_1 = K_2 - L_2$.

Théorème 5.27.

Une excision i entre paires simpliciales (K_1 , L_1) (K_2 , L_2) induit un isomorphisme de leurs groupes d'homologie relative

$$i_* : H(K_1 , L_1) \approx H(K_2 , L_2)$$

Preuve :

Puisque i est une excision : $K_2 = K_1 \cup L_2$; $L_1 = K_1 \cap L_2$

D'après 4.3 on a :

$$C(K_1)/C(L_1) \approx [C(K_1) + C(L_2)]/C(L_2) = C(K_2)/C(L_2)$$

Remarque 5.28.

Tout ce que nous avons dit concernant les suites de Mayer-Vietoris et l'excision fut fait sur les chaines ordonnées. Il est clair, je pense, qu'on aurait pu aussi bien prendre les chaînes orientées.

Définition (Γ_* , Sd) 5.29.

a) Etant donnée une transformation acyclique $\Gamma : K \to C$ on sait d'après 5.12 qu'il lui correspond une transformation de chaînes $\tau : C(K) \to C$

algébrique et de support dans Γ , unique à une homotopie près.

On définit donc $\Gamma_* : H(K) \to H(C)$

comme l'homomorphisme induit par τ

$$\Gamma_* = \tau_*$$

Remarque : on laisse au lecteur le soin de définir de même

$$\Gamma^* : H^*(K) \to H^*(C)$$

b) Etant donné un complexe simplicial K , nous noterons K^n la subdivision barycentrique d'ordre n

$$K^n = sd^n K$$

c) Soit Sd la transformation acyclique

$$Sd : K \to C(K^1)$$

définie par : $Sd(S) = C(Sds)$

(elle est acyclique d'après 5.9 puisque $SdS = b(S) * Sd\dot{S}$) .

Proposition 5.30.

Etant donné un complexe simplicial K , Sd induit un isomorphisme de groupes d'homologie

$$Sd_* : H(K) \approx H(K^1)$$

Preuve :

On définit la transformation acyclique Γ par :

$$\Gamma(S^1) = C(S) \qquad S^1 \in K^1 \;,, \quad S = \inf(S' | S' \in K \;, \quad S^1 \subset S')$$

(S est toujours bien défini car $\{S' | S^1 \subset S'\}$ est fini, non vide et réticulé).

Soit τ une transformation de chaînes : $C(K) \to C(K^1)$ ayant son support dans Sd et algébrique, et $\bar{\tau} : C(K^1) \to C(K)$ vérifiant les mêmes propriétés pour Γ

1) $\bar{\tau}\tau \simeq Id_{C(K)}$:

$\tau(S) \in C(Sds)$ donc $\tau(S) = \Sigma\, n_i \sigma_i$ où les σ_i sont des simplexes ordonnés de Sds

$$\bar{\tau}\tau(s) = \bar{\tau}(\Sigma n_i \sigma_i) = \Sigma\, n_i \bar{\tau}(\sigma_i)$$

Or $\bar{\tau}(\sigma_i) \in C(\Gamma(\sigma_i)) \subset C(S)$ (car $\Gamma(\sigma_i) \leqslant S$)

donc $\bar{\tau}\tau(S) \in C(S)$

$\bar{\tau}\tau$ et $Id_{C(K)}$ ayant tous deux leurs supports dans la transformation acyclique de $K; \gamma : S \to C(S)$, et étant algébriques vérifient d'après 5.12

$$\bar{\tau}\tau \simeq Id_{C(K)}$$

2) $\tau\bar{\tau} \simeq Id_{C(K^1)}$

Soit $\bar{\gamma}$ la transformation acyclique de K^1 : $\bar{\gamma} : S^1 \to C(sdS)$ où $s = \inf\{S' | S' \in K \;, \; S^1 \subset S'\}$

$\tau\bar{\tau}$ et $Id_{C(K^1)}$ ont leur support dans $\bar{\gamma}$ et sont algébriques.

D'après 5.12

$$\tau\bar{\tau} \simeq Id_{C(K^1)}$$

On en déduit donc :

$$sd_*\Gamma_* = Id_{H(K^1)} \quad ; \quad \Gamma_* sd_* = Id_{H(K)}$$

Corollaire 5.31.

Pour le complexe simplicial K , on a aussi les isomorphismes

$$Sd_*^n : H(K) \approx H(K^n)$$

$$Sd_*^n : H(K \; ; \; G) \approx H(K^n \; ; \; G)$$

$$Sd_*^n : H^*(K \; ; \; G) \approx H^*(K^n \; ; \; G)$$

Lemme 5.32.

Nous avons montré en 3.52 que si K est un complexe simplicial , et $i : |K^1| \subset |K|$, il existe une approximation simpliciale de i

$$\lambda : K^1 \to K$$

λ est algébrique et a son support dans la transformation acyclique de K^1
$\Gamma : S^1 \to C(S)$ $\qquad S = \inf\{S' | S' \in K \; , \; S^1 \subset S'\}$

En particulier $\lambda_* = \Gamma_*$.

Théorème 5.33.

Etant donnés deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 , et une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$

A l'approximation simpliciale $\varphi : K_1^n \to K_2$, on associe l'homomorphisme :

$$\varphi_* Sd_*^n : H(K_1) \to H(K_2)$$

Cet homomorphisme (défini pour toute f d'après 3.43) ne dépend que de f et on le note f_* .

Preuve :

Soient deux approximations simpliciales $\varphi : K_1^n \to K_2$ et $\psi : K_1^m \to K_2$

1) $m = n$. D'après 3.47 φ et ψ sont contigues d'après 5.14

$$\varphi_* = \psi_*$$

2) $m > n$

Soit $\lambda : K_1^m$ une approximation simpliciale de $i : |K_1^m| \subset |K_1^n|$

$\varphi\lambda : K_1^m \to K_2$ est approximation simpliciale de $f_i = f$

donc $(\varphi\lambda)_* = \psi_*$ d'après 1)

$\psi_* = \varphi_*\lambda_*$; $\lambda_* Sd_*^{m-n} = Id_{H(K_1^n)}$ d'après 5.31 et 5.32.

donc $\psi_* Sd_*^m = \varphi_*(\lambda_* Sd_*^{m-n})\, Sd_*^n = \varphi_*\, Sd_*^n = f_*$.

Corollaire 5.34.

La correspondance $f \to f_*$ est fonctorielle covariante

i.e. : . $Id_{|K|*} = Id_{H(K)}$

. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

et vérifie la propriété suivante :

$$f \simeq g \Longrightarrow f_* = g_*$$

Preuve :

a) La correspondance des Id est évidente

Soient $|K_1| \xrightarrow{g} |K_2| \xrightarrow{f} |K_3|$ f,g continues

Soit $\varphi : K_2^n \to K_3$ une approximation simpliciale de f et $\psi : K_1^m \to K_2^n$ une approximation simpliciale de g soit enfin $\lambda : K_2^n \to K_2$ une approximation simpliciale de $i_2 : |K_2^n| \subset |K_2|$

On a $$g_* = (\lambda\psi)_* \, Sd_*^m = \lambda_*\psi_* \, Sd_*^m$$

$$f_* = \varphi_* \, Sd_*^n$$

$$f_* o \, g_* = \varphi_* \, o \, (Sd_*^n \, o \, \lambda_*) \, o \, \psi_* \, o \, Sd_*^m = \varphi_* \, o \, \psi_* \, o \, Sd_*^m = (\varphi \, o \, \psi)_* o \, Sd_*^m$$

(d'après 5.32)

donc $$f_* \, o \, g_* = (fog)_*$$

b) Soient $f,g : |K_1| \to |K_2|$ $f \simeq g$

D'après 3.48 il existe des approximations simpliciales φ, de f et ψ, de g $\varphi, \psi : K_1^n \to K_2$ dans une même classe de contiguité. Le résultat suit donc 5.14.

<u>Corollaire 5.35.</u>

Si deux complexes K_1 et K_2 ont des espaces de même type d'homotopie ; alors

$$H(K_1) \approx H(K_2)$$

<u>Preuve :</u>

Il existe f,g $|K_1| \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} |K_2|$ telles que $f \, o \, g \simeq Id_{|K_2|}$ $g \, o \, f \simeq Id_{|K_1|}$. On applique donc 5.34.

Définition 5.36.

Pour un polyèdre X, il existe une traingulation (K,f). On définit son homologie par :

$$H(X) = H(K)$$

Cette définition est bonne car deux triangulations sont homéomorphes donc du même type d'homotopie ; cependant $H(X)$ n'est défini qu'à un isomorphisme près.

Application 5.37.

$$H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \quad \text{ou} \quad q = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 5.38.

S^{n-1} n'est pas un rétract de D^n.

Preuve : Par l'absurbe.

$$r : D^n \to S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} D^n \qquad ri = 1$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & & H_{n-1}(D^n) \arrow[dl, "r_*"] \\ & H_{n-1}(S^{n-1}) & \end{tikzcd}$$

Or $\mathrm{Id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ne peut se factoriser par $H_{n-1}(D^n) = 0$

Théorème 5.39.

Si $m \neq n$ $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas du même type d'homtopie (et à fortiori ne sont pas homéomorphes).

Preuve : Par l'absurde

Si $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ étaient du même type d'homotopie, il en serait le même de leurs compactifiés d'Alexandroff S^m et S^n

or $\tilde{H}_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ et $\tilde{H}_n(S^m) = 0$

COMPLEMENTS ALGEBRIQUES.

Définition (cône d'applications). 5.40.

a) Soit une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$. Le cône d'application de τ est le complexe de chaînes $\bar{C} = \{\bar{C}_q , \bar{d}_q\}$ défini par :

$$\bar{C}_q = C_{q-1} \oplus C'_q$$

et $$\bar{d}_q(c,c') = (-d_{q-1}(c) \quad , \tau(c) + d'_q(c'))$$

b) Le lecteur vérifiera qu'on défini bien un complexe de chaînes qui est libre dès que C et C' le sont

Théorème 5.41.

Une transformation de chaînes est une équivalence de chaînes si et seulement si son cône d'application est contractile.

Preuve :

a) Si $\tau : C \to C'$ est une équivalence, il existe τ', D, D' tels que

$\tau' : C' \to C$, $D : \tau'\tau \simeq 1_C$; $D' : \tau\tau' \simeq 1_{C'}$

Soit $\bar{D} = \bar{C} \to \bar{C}$ défini par $\bar{D}(c,c')$ où

$$c_1 = D(c) + \tau' D' \tau(c) - \tau'\tau D(c) + \tau'(c')$$

$$c_2 = D'\tau(c) - D'D'\tau(c) - D'(c')$$

En effectuant les calculs on obtient $\bar{d}\bar{D} + \bar{D}\bar{d} = Id_{\bar{C}}$

donc $\bar{D} : Id_{\bar{C}} \simeq 0_C$

b) Soit D une contraction de C et définissons à priori D, D', τ' par les équations

$$(\tau'(c') \, , \, - D'(c')) = \bar{D}(o,c')$$

$$(D(c) \, , \qquad\qquad) = \bar{D}(c,o)$$

Il est immédiat de vérifier qu'on a : $\tau' : C' \to c$ de degré 0, $0 : C \to C$ de degré 1 , $D' : C' \to C'$ de degré 1 (tous étant homomorphismes puisque ce sont des coordonnées de $\bar{D}(0,.)$ ou $\bar{D}(.,0)$ qui en sont)

1) τ' est une transformation de chaînes :

car $(\tau' d' c', - D' d' c') = \bar{D}(o,d'c') = \bar{D}\bar{d}(o,c')$

or $\bar{D}\bar{d}(o,c') + \bar{d}\bar{D}(o,c') = (o,c')$

donc $\bar{D}\bar{d}(o,c') = (o,c') - (-d\tau'c' \, , \, \tau\tau'(c') - d'D'c')$

$\tau' d' = d\tau'$

2) $D' : \tau\tau \simeq Id_{C'}$.

L'équation ci-dessus nous donne par sa seconde coordonnée

$$- D'd'c' = c' - \tau\tau'(c') + d'D'c'$$

$$\text{ou} \qquad d'D' + D'd' = Id_{C'} - \tau\tau'$$

3) $D : \tau\tau \simeq Id_C$

on a $\bar{D}\bar{d} + \bar{d}\bar{D} = Id_{\bar{C}}$

donc $\bar{D}(-dc, \tau(c)) + \bar{d}(D(c), \ ) = (c,0)$ (en $(c,0)$)

En prenant la première coordonnée et en faisant : $(-dc \quad \tau(c)) = (dc,0)+(0,\tau(c))$

$$- Ddc + \tau'\tau(c) - dD(c) = c$$

$$\text{ou} \qquad Dd + dD = \tau'\tau - Idc$$

Corollaire 5.42.

Une transformation de chaînes entre complexes libres est une équivalence si et seulement si son cylindre d'application est acyclique.

Preuve : Combinez 4.44 et le théorème précédent.

Proposition 5.43.

Etant donnée une petite suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

a) C' est acyclique si et seulement si $\beta_* : H(C) \approx H(C'')$

b) C est acyclique si et seulement si $d_* : H(C'') \approx H(C')$

c) C'' est acyclique si et seulement si $\alpha_* : H(C') \approx H(C)$

d) Si deux quelconques des complexes sont acycliques, il en est de même du troisième.

<u>Preuve</u> : conséquence immédiate de la suite exacte d'homologie.

<u>Lemme 5.44.</u>

Soit une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$ et soit $\bar{C}$ le cylindre d'application de τ

On a la suite exacte :

$$\to H_q(C) \xrightarrow{\tau_*} H_q(C') \to H_q(\bar{C}) \to H_{q-1}(C) \to$$

<u>Preuve</u> :

Soit $\alpha : C' \to \bar{C}$ définie par $\alpha(c') = (o, c')$. Cette transformation de chaînes fait de C' un sous-complexe de $\bar{C}$ et comme $\bar{C}_q = C_{q-1} + C'_q$, on a

$$\bar{C}_q / C'_q \approx C_{q-1}$$

L'opérateur bord de ce quotient, induit par $\bar{d}$, correspond par l'isomorphisme à $-d$ sur C (donc $H_{q+1}(\bar{C}, C') \approx H_q(C)$) . On obtient donc la suite exacte comme suite exacte d'homologie de

$$0 \to C' \to \bar{C} \to \bar{C}/C' \to 0$$

après avoir remplacé $H_{q+1}(\bar{C}, C') \approx H_q(C)$

Il reste à vérifier que l'on obtient τ_* comme homomorphisme de connection, ce qui est laissé au lecteur.

Théorème 5.45.

Si C et C' sont des complexes de chaînes libres, une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$ est une équivalence de chaînes si et seulement si

$$\tau_* : H(C) \approx H(C')$$

Preuve : D'après 5.42 τ est équivalence si et seulement si C est acyclique ; et ceci équivaut d'après 5.43 et 5.44 à τ_* isomorphisme.

HOMOLOGIE SINGULIERE.

Définition 5.46.

a) On se place sur l'espace métrique $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit p_i le point :

$$p_i = (0,0,\ldots, 1_i , 0,\ldots 0,\ldots)$$

On appelle simplexe standard de dimension q de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le simplexe Δ^q engendré par $(p_0 , p_1 ,\ldots, p_q)$.

b) Soit $e^i_{q+1} : \Delta^q \to \Delta^{q+1}$ l'application linéaire définie sur les sommets par

$$e^i_{q+1}(p_j) = \begin{cases} p_j & j < i \\ p_{j+1} & j \geq i \end{cases}$$

Plus simplement $e^i_{q+1}(\Delta_q)$ est la face de Δ^{q+1} opposée à p_i, soit

$$|\langle p_0 , p_1 ,\ldots, \hat{p}_i ,\ldots p_q \rangle|$$

c) On vérifiera la relation évidente pour $0 \leqslant j < i \leqslant q+1$

$$e^{i}_{q+2}\, e^{j}_{q+1} = e^{j}_{q+2}\, e^{i-1}_{q+1}$$

Définition (Simplexe singulier) 5.47.

Soit un espace topologique X

a) Un q-simplexe $(q \geqslant 0)$ singulier σ de X est une application continue

$$\sigma : \Delta^{q} \to X$$

b) Si $q > 0$ et $0 < i < q$, on appelle $i^{\text{ième}}$- face de σ, le $(q-1)$ simplexe singulier noté $\sigma^{(i)}$ et défini par :

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^{i}_{q} : \Delta^{q-1} \to X$$

Proposition 5.48.

Si $q > 1$ et $0 \leqslant i < j \leqslant q$, alors $(\sigma^{(i)})^{(j)} - (\sigma^{(j)})^{(i-1)}$

Définition (homologie singulière) 5.49.

a) le complexe de chaînes singulier de l'espace topologique X est défini par $\Delta(X) = \{\Delta_{q}(X)\ ,\ d_{q}\}$

où $\Delta_{q}(X) = 0$ si $q < 0$, et $\Delta_{q}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les q-simplexes singuliers de X si $q \geqslant 0$

et $d_{q}(\sigma) = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^{i} \sigma^{(i)}$

b) A chaque application continue $f : X \to Y$, on associe la transformation de chaînes

$$\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$$

définie par $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ pour tout q-simplexe σ et la correspondance est fonctorielle covariante

i.e. $$\Delta(Id_X) = Id_{\Delta(X)}$$

$$\Delta(f o g) = \Delta(f) \circ \Delta(g)$$

c) L'homologie de $\Delta(X)$ est appelée homologie singulière de l'espace X , et notée

$$H(X) = H(\Delta(X))$$

d) A chaque application continue $f : X \to Y$ correspond l'homomorphisme

$$f_*(= \Delta(f)_*) : H(X) \to H(Y)$$

et la correspondance est fonctorielle covariante

i.e. $$(Id_X)_* = Id_{H(X)}$$

$$(f o g)_* = f_* \circ g_*$$

e) Soit A un sous-espace de X et $i: A \subset X$ alors $\Delta(i) : \Delta(A) \to \Delta(X)$ est un monomorphisme qui nous permet d'identifier $\Delta(A)$ à un sous-complexe de $\Delta(X)$.

Cas particulier 5.50.

$$X = \{x_o\}$$

Dans ce cas $H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q\neq 0 \end{cases}$

Preuve :

$\Delta_q(X) \approx \mathbb{Z}$ pour tout q

$d\sigma = \Sigma\ (-1)^i\ \sigma^{(i)}$

d est l'homomorphisme nul : $\Delta_{2q+1} \to \Delta_{2q}$ et un isomorphisme :

$\Delta_{2q} \to \Delta_{2q-1}$

(tous les simplexes sont identiques donc il suffit de compter $d\sigma$ avec

$\sigma^{(i)} = \sigma^{(0)}$ pour tout i

on a donc soit $d\sigma = 0$, soit $d\sigma = \sigma^{(o)}$) .

L'homologie est donc facile à calculer.

Lemme 5.52.

Le complexe de chaînes singulier est un complexe de chaînes augmenté. L'augmentation ε est définie par $\varepsilon(\sigma) = 1$ pour tout 0 simplexe σ

Lemme 5.53.

Si X est un sous-espace d'un espace euclidien, étoilé autour de x_o , alors $\Delta(X)$ est un complexe de chaînes augmenté acyclique.

Preuve : On suppose sans restriction que x_o est l'origine 0 . Définissons un homomorphisme :

$$\tau : \mathbb{Z} \to \Delta_0(X)$$

par : $\tau(1) = \sigma_o$ où $\sigma_o : \Delta^o \to X$ $\sigma_o(\rho_o) = 0$

et vérifions que τ est inverse de la transformation $\varepsilon : \Delta(X) \to Z$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Delta_q(X) & \to & \cdots & \to & \Delta_1(X) & \to & \Delta_o(X) & \to & 0 \\
\downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow \varepsilon & & \\
0 & \longrightarrow & & & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

1) $\varepsilon \circ \tau = Id_{\mathbf{Z}}$

2) Soit $D : \Delta(X) \to \Delta(X)$

défini par :

$$\sigma : \Delta^q \to X \Longrightarrow D\sigma : \Delta^{q+1} \to X \qquad \text{tel que}$$

$D(\sigma)\ (tp_o + (1 - t)\alpha) = (1 - t)\ \sigma(\alpha) \qquad \alpha = p_1, p_2, \ldots, p_{q+1}\ ;\ t \in I$

On vérifiera que pour :

$q > 0 : (D(\sigma))^{(0)} = \sigma \ ; \quad (D(\sigma))^{(i+1)} = D(\sigma^{(i)}) \qquad 0 \leqslant i \leqslant q$

$q = 0 \quad : \quad (D(\sigma))^{(1)} = \tau(1) \quad (D(\sigma))^{(0)} = \sigma$

donc $dD + Dd = Id_{\Delta(X)} - \tau \circ \varepsilon$

et $D : \tau \circ \varepsilon \simeq Id_{\Delta(X)}$.

Nous allons développer une théorie des transformations acycliques analogue à celle utilisée pour montrer l'invariance par homotopie pour les complexes simpliciaux. Comme on s'en doute ceci peut être relié par une théorie commune, celle des modèles acycliques, que le lecteur avide d'abstraction pourra rechercher dans un ouvrage spécialisé (Spanier par exemple).

Définitions (transformations acycliques) 5.54.

Soit un espace topologique X .

a) Une transformation acyclique $\Gamma : (X) \to C$ où C est un complexe de chaînes augmenté, est la donnée pour chaque q-simplexe singulier σ d'un sous-complexe de C : $\Gamma(\sigma)$ qui vérifie :

- $\Gamma(\sigma)$ est augmenté et acyclique.
- pour $0 < i < q$ il existe une transformation de chaînes algébrique :

$$\eta_i^q : \Gamma(\sigma^i) \to \Gamma(\sigma)$$

- pour $0 \leqslant j < i \leqslant q$ on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma[(\sigma^{(j)})^{(i-1)}] \arrow[r, "\eta_{i-1}^{q-1}"] \arrow[d, "\eta_j^{q-1}"] & \Gamma(\sigma^{(j)}) \arrow[d, "\eta_j^q"] \\
\Gamma[\sigma^{(i)}] \arrow[r, "\eta_i^q"] & \Gamma(\sigma)
\end{tikzcd}$$

b) Une transformation de chaînes $\tau : \Delta(X) \to C$ a son support dans Γ , si pour tout q-simplexe singulièr σ

$$\tau(\sigma) \in \Gamma(\sigma)$$

et si elle vérifie :

- pour $q = 0$ le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\Delta_o(X) \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau_o"] & \\
C_o \arrow[r, "\varepsilon'"'] & Z
\end{tikzcd}$$

• pour $q > 0$

$$\tau \dot{d}(\sigma) = d\tau(\sigma) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i \ \eta_i^q \ \tau(\sigma^{(i)})$$

Intuitivement, on a introduit η_i^q afin d' "emboiter" le complexe $\Gamma(\sigma^{(i)})$ dans $\Gamma(\sigma)$; la dernière condition demande simplement que cet " emboitement" commute avec l'opérateur bord.

c) Une homotopie (entre chaînes) $D : \tau \simeq \tau'$ portée par Γ est une application de degré 1

$$D : \Delta_q(X) \to C_{q+1}$$

qui à chaque q-simplexe σ associe une chaîne

$$D(\sigma) \in \Gamma(\sigma)$$

telle que

$$dD(\sigma) + Dd(\sigma) = dD(\sigma) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} (-1)^i \ \eta_i^q \ D(\sigma^{(i)}) = \tau(\sigma) - \tau'(\sigma) \quad .$$

En reprenant l'idée intuitive donnée ci-dessus, on voit que D doit commuter avec les "emboitements"

Théorème 5.55.

Etant donnés un espace topologique X , un complexe de chaînes augmenté C , et une transformation acyclique

$$\Gamma : X \to C$$

Alors il existe une transformation de chaînes

$$\tau : \Delta(X) \to C$$

unique à une homotopie près, telle que son support soit dans Γ .

Preuve : identique à celle de 5.12.

Définition (Γ_*) 5.56.

Une transformation acyclique $\Gamma : X \to C$ induit un homomorphisme

$$\Gamma_* : H(X) \to H(C)$$

défini par $\tau_* = \Gamma_*$

τ désignant la transformation de chaînes induite par Γ .

Théorème 5.57.

Etant donnés un espace X et les applications continues : h_o , $h_1 : X \to X \times I$ définies par :

$$h_o(x) = (x,o) \quad ; \quad h_1(x) = (x,1)$$

Ces applications induisent des transformations de chaînes homotopes

$$\Delta(h_o) \simeq \Delta(h_1) : \Delta(X) \to \Delta(X \times I)$$

Preuve :

1) Définissons une transformation acyclique Γ

$$\Gamma : X \to \Delta(X \times I)$$

Etant donné un q-simplexe σ , il induit l'application :

$$(\sigma,i) : \Delta^q \times I \to X \times I$$

donc le transformation de chaînes :

$$\Delta(\sigma,i) : \Delta(\Delta^q \times I) \to \Delta(X \times I)$$

Soit $\Gamma(\sigma) = \Delta(\sigma,i)\ [\Delta(\Delta^q \times I)]$

Le complexe $\Delta(\Delta^q \times I)$ est augmenté et acyclique d'après 5.53. Il en est donc de même de son image par $\Delta(\sigma,i)$ (la vérifiaction est facile). On définit η_i^q sur les générateurs $\Delta(\sigma^{(i)},i)(\omega)$ de $\Gamma(\sigma^{(i)})$, où $\omega : \Delta^p \to \Delta^q \times I$ [$\omega = (\omega_1 , \omega_2)$ en prenant les coordonnées] par

$$\eta_i^q[\Delta(\sigma^{(i)},i)\ (\omega_1 , \omega_2)] = \Delta(\sigma,i)\ [e_i^q\ \omega_1 , \omega_2]$$

le lecteur vérifiera que η_i^q vérifie les conditions requises.

2) Montrons que $\Delta(h_o)$ et $\Delta(h_1)$ ont leur support dans Γ :

$$\Delta(h_o)\ \sigma = h_o\sigma = (\sigma,0)$$

$$\Delta(h_1)\ \sigma = h_1\sigma = (\sigma,1)$$

Ces deux quantités sont dans $\Gamma(\sigma)$ car

$$(\sigma,0) = \Delta(\sigma,i)\ (Id_{\Delta^q} , 0)$$

$$(\sigma,1) = \Delta(\sigma,i)\ (Id_{\Delta^q} , 1)$$

Comme $\Delta(h_o)$ et $\Delta(h_1)$ vérifient évidemment les deux conditions requises, elles ont leur support dans Γ et d'après 5.55

$$\Delta(h_o) \simeq \Delta(h_1)$$

Corollaire 5.58.

Si f_o , f_1 : $X \to Y$ sont deux applications continues homotopes, alors

$$\Delta(f_o) \simeq \Delta(f_1) : \Delta(X) \to \Delta(Y) \quad .$$

Preuve :

Soit $F : f_o \simeq f_1$.

Donc $f_o = Fh_o$; $f_1 = Fh_1$

et $\Delta(f_o) = \Delta(F)\ \Delta(h_o) \simeq \Delta(F)\ \ \Delta(h_1) = \Delta(f_1)$.

Définition (homologie relative) 5.59.

a) Une application entre paires : $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une application $f : X \to Y$ dont la restriction à A vérifie

$$f|A : A \to B$$

b) Deux applications continues f_o, f_1 : $(X,A) \to (Y,B)$ sont dites homotopes, F réalisant l'homotopie et sont notées

$$F : f_o \simeq f_1$$

s'il existe $F : (X,A) \times I \to (YB)$ continue telle que

$$F(x,0) = f_o(x)$$
$$F(x,1) = f_1(x)$$

(rappel ; $(X,A) \times I = (X \times I \ , \ A \times I)$)

c) Etant donnée une paire (X,A) on définit l'homologie relative de X modulo A comme

$$H(X,A) = H(\Delta(X)/\Delta A)$$

et

$$H(X,A \ ; \ G) = H(\Delta(X)/\Delta(A) \ ; \ G)$$

On remarquera qu'on peut comme en 5.17 identifier

$$H(X,\emptyset) \quad \text{avec} \quad H(X)$$

On remarquera de même que l'homotopie $F : f_0 \simeq f_1$ pour deux applications $f_0 \ , f_1 : (X,\emptyset) \to (Y,\emptyset)$ s'identifie de $f_0 \ , f_1 : X \to Y$.

d) Une application $f : (X,A) \to (Y,B)$ induit un homomorphisme

$$f_* : H(X,A) \to H(Y,B)$$

et la correspondance est fonctorielle covariante.

Théorème 5.60.

Si $f_0 \ , f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ sont hommtopes, alors

$$f_{0*} = f_{1*} : H(X,A) \to H(Y,B)$$

Preuve :

Soit $F : (X \times I \ , \ A \times I) \to (Y,B)$ réalisant l'homotopie.

Posons $\overline{h}_0 \ , \overline{h}_1 : (X,A) \to (X \times I \ , A \times I)$ définies par :

$$\bar{h}_o(x) = (x,o) \quad ; \quad \bar{h}_1(x) = (x,1)$$

et soit h_o , h_1 : $X \to X \times I$ définies en 5.57.

On a la diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \Delta(A) & \to & \Delta(X) & \to & \Delta(X)/\Delta(A) & \to & 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \Delta(h_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta(h_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta(h_i)} & & \\ 0 \to & \Delta(A \times I) & \to & \Delta(X \times I) & \to & \Delta(X \times I)/\Delta(A \times I) & \to & 0 \end{array}$$

qui nous permet de définir

$$\bar{D} : \Delta(\bar{h}_o) \simeq \Delta(\bar{h}_1)$$

par passage au quotient de $D : h_o \simeq h_1$

et

$$f_{o*} = F_*\bar{h}_{o*} \simeq F_*\bar{h}_{1*} = f_{1*}$$

<u>Remarque</u> : Cette propriété que le foncteur homologie ne dépend que des classes d'homotopies est l'une des plus importantes de la théorie de l'homologie.

<u>Définition (caractéristique d'Euler) 5.61.</u>

On suppose $H_i(X,A)$ de type fini pour tout i .

a) Le rang de $H_i(X,A)$ est appelé $i^{\text{ième}}$ nombre de Betti de (X,A) .
La torsion $\tau(H_i(X,A))$ peut (et de manière unique) être décomposée (d'après 4.14) en

$$\tau(H_i(X,A)) = \bigoplus_{o \leqslant i \leqslant k} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \qquad \text{avec : } n_i \text{ divise } n_{i+1} \text{ , pour tout } i.$$

La suite $(n_o, n_1, \dots, n_k)$ est appelée suite des $i^{\text{èmess}}$ coefficients de torsion de (X,A).

b) La caractéristique d'Euler de $H(X,A)$ est appelée caractéristique d'Euler de (X,A) et est notée

$$\chi(X,A) = \chi(H(X,A))$$

Remarque 5.62.

a) Δ^q est connexe par arcs, donc $\sigma(\Delta^q)$ aussi pour tout q-simplexe σ
Si $(X_j)_{j\in I}$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, alors

$$\Delta(X) = \bigoplus_{j\in I} \Delta(X_j)$$

b) L'ensemble $\{K_\alpha , i_{\alpha\beta}\}$ où K_α décrit l'ensemble des sous-espaces compacts de X, ordonnés par inclusion et où $i_{\alpha\beta} : K_\alpha \subset K_\beta$, forme un système inductif et on a

$$X = \varinjlim (K_\alpha ; i_{\alpha\beta})$$

Théorème 5.63.

a) L'homologie singulière d'un espace X est la somme directe de l'homologie de ses composantes connexes par arcs $(X_j)_{j\in J}$

$$H(X) = \bigoplus_{j\in J} H(X_j)$$

b) L'homologie singulière d'un espace X est isomorphe à la limite inductive de l'homologie singulière de ses sous-espaces compacts $(K_\alpha , i_{\alpha\beta})$

$$H(X) \approx \varinjlim \{H(K_\alpha) \ , \ i_{\alpha p *}\}$$

Preuve : conséquence immédiate de 4.33.

Lemme 5.64.

Si X est un espace topologique non vide et connexe par arcs alors

$$\tilde{H}_o(X) \approx Z$$

Preuve : Soit un point $x_o \in X$, et ω_x un chemin de x_o à x , pour tout $x \in X$. Comme Δ^1 est homéomorphe à I il existe un 1-simplexe σ_x (image de ω_x par l'homéomorphisme) tel que :

$\sigma_x^{(o)} = x$; $\sigma_x^{(1)} = x_o$ (en identifiant un o-simplexe avec son image).

Une chaîne de $\Delta_o(X)$ s'écrit $\Sigma n_x x$ où $n_x = 0$ sauf pour un nombre fini de points.

Si c'est un cycle , on a : $\varepsilon(\Sigma n_x x) = \Sigma n_x = 0$ mais alors c'est un bord car $d\Sigma n_x \sigma_x = \Sigma n_x x - \Sigma n_x x_o = \Sigma n_x x$

donc $\tilde{H}_o(X) = o$ ou $H_o(X) = \mathbb{Z}$.

Corollaire 5.65.

Pour tout espace topologique X , $H_o(X)$ est un groupe abélien libre, dont le rang est égal au nombre de composantes connexes par arcs non vides de X .

Preuve : évident d'après 5.63 et 5.64.

Définition (simplexe linéaire) 5.66.

a) Un simplexe singulier $\sigma : \Delta^q \to \Delta^n$ est dit affine si

$$\sigma(\Sigma\alpha_i\rho_i) = \Sigma\alpha_i\ \sigma(\rho_i) \quad \alpha_i \in I \quad , \quad \Sigma\alpha_i = 1$$

Si σ est affine, il en est de même de ses face $\sigma^{(i)}$. L'ensemble des simplexes linéaires dans Δ^n engendre un sous-complexe $\Delta'(\Delta'')$ de $\Delta(\Delta'')$. Un simplexe linéaire σ étant entièrement déterminé par les $\sigma(\rho_i)$, nous le noterons :

$$\sigma = (\sigma(\rho_o),\ldots,\sigma(p_q))$$

et on a : $d(x_o,\ldots, x_q) = \Sigma(-1)^i(x_o \ldots \hat{x}_i \ldots x_q)$.

b) Le barycentre $b(\Delta^n)$ nous permet de définir un homomorphisme de degré 1

$$\beta_n : \Delta'_q(\Delta^n) \rightarrow \Delta'_{q+1}(\Delta^n)$$

par : $$\beta_n(x_o ,\ldots, x_q) = (b(\Delta^n) , x_o ,\ldots, x_q)$$

<u>Lemme 5.67.</u>

La transformation de chaines $\varepsilon : \Delta'(\Delta^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ est une équivalence de chaînes et si $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \Delta'(\Delta^n)$ est la transformation de chaînes définie par : $\tau_o(1) = (b(\Delta^n))$

alors $$\varepsilon \circ \tau = Id_Z$$

$$\beta_n : \tau \circ \varepsilon \simeq Id_{\Delta'(\Delta^n)}$$

<u>Preuve :</u>

1) Il suffit de voir que $\varepsilon \circ \tau_o(1) = \varepsilon(b(\Delta^n)) = 1$

2) $$d\beta_n(x_o) = (x_o) - b(\Delta^n)$$

et $$d\beta_n(x_o\ldots x_q) + \beta_n d(x_o\ldots x_q) = (x_o,\ldots, x_q)$$

Définition (Sd) 5.68.

a) Etant donné un espace X , on définit la transformation de chaînes algébrique

$$Sd : \Delta(X) \to \Delta(X)$$

par induction

$$q = 0 \qquad Sd_o : \Delta_o(X) \to \Delta_o(X) \qquad Sd_o = Id_{\Delta_o(X)}$$

$q > o$

$$\begin{cases} Sd(\sigma) = \Delta(\sigma)(Sd(Id_{\Delta^q})) \\ Sd(Id_{\Delta^q}) = \beta_q(Sd(sd(d(Id_{\Delta^q}))) \end{cases}$$

b) On définit la déformation :

$$D : \Delta(X) \to \Delta(X)$$

par induction

$$q = 0 \qquad D_o : \Delta_o(X) \to \Delta_1(X) \qquad D_o = 0$$

$q > 0$

$$\begin{cases} D(\sigma) = \Delta(\sigma)(D(Id_{\Delta^q})) \\ D(Id_{\Delta^q}) = \beta_q[- Sd(Id_{\Delta^q}) + Id_{\Delta^q} - Dd(Id_{\Delta^q}))] \end{cases}$$

Lemme 5.69.

Soit $f : X \to Y$ continue. Alors on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \Delta(X) \arrow[r, "Sd"] \arrow[d, "\Delta(f)"] & \Delta(X) \arrow[d, "\Delta(f)"] \\ \Delta(Y) \arrow[r, "Sd"] & \Delta(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta(f) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Delta(f)"] & \Delta(X) \arrow[d, "\Delta(f)"] \\ \Delta(Y) \arrow[r, "D"] & \Delta(Y) \end{tikzcd}$$

Preuve :

$$\Delta(f)\ Sd(\sigma) = \Delta(f)\ \Delta(\sigma)\ Sd(Id_{\Delta^q}) = \Delta(f \circ \sigma)\ Ds(Id_{\Delta^q}) = Sd\ \Delta(f)(\sigma)$$

$$\Delta(f)\ D(\sigma) = \Delta(f)\ \Delta(\sigma)\ D(Id_{\Delta^q}) = \Delta(f \circ \sigma)\ D(Id_{\Delta^q}) = D\ \Delta(f)(\sigma)$$

Théorème 5.70.

Sous les hypothèses précédentes :

$$D : Sd \simeq Id_{\Delta(X)}$$

Preuve :

$q = 0$ $\qquad dD(\sigma) + Dd(\sigma) = o = \sigma - Sd\sigma$

$q > 0$

On veut prouver que : $dD(\sigma) + Dd(\sigma) = \sigma - Sd\sigma$

Donc en simplifiant que : $dD(Id_{\Delta^q}) + Dd(Id_{\Delta^q}) = Id_{\Delta^q} - SdId_{\Delta^q}$ car la première expression est obtenue à partir de la seconde en composant par $\Delta(\sigma)$.

Or $dD(Id_{\Delta^q}) + Dd(Id_{\Delta^q}) = d\beta_q(Id_{\Delta^q}) - d\beta_q - d\beta_q Dd(Id_{\Delta^q}) + DdId_{\Delta}$ d'après la définition de $D(Id_{\Delta^q})$

$$= d\beta_q(Id_{\Delta^q}) + \beta_{q-1} dDd(Id_{\Delta^q}) - d\beta_q Sd\ Id_{\Delta^q}$$

car $\quad d\beta_q + \beta_{q-1} d = Id_{\Delta'(\Delta^q)}$ $\quad$ d'après 5.67.

L'hypothèse d'induction appliquée à $dId_{\Delta^q} \in \Delta'_{q-1}(\Delta^q)$ donne

$$dDd\ Id_{\Delta^q} + DddId_{\Delta^q} = dId_{\Delta^q} - sd\ dId_{\Delta^q}$$

et $\beta_q(dDd\ Id_{\Delta^q}) = \beta_q dId_{\Delta^q} - \beta_q\ sd\ dId_{\Delta^q}$

Donc : $dD(Id_{\Delta^q}) + Dd(Id_{\Delta^q}) = d\beta_q\, Id_{\Delta^q} + \beta_q d(Id_{\Delta^q}) - \beta_q sdd(Id_{\Delta^q}) - d\beta_q Sd(Id_{\Delta^q})$

$$= Id_{\Delta^q} - sd(Id_{\Delta^q})$$

d'après 5.67 et la définition de $sd(Id_{\Delta^q})$.

Ce qui achève la démonstration.

Définition (maille) 5.71.

Lorsque X est un espace métrique, on définit la maille d'une chaîne $C \in \Delta_q(X)$ par

$$c = \Sigma\, n_\sigma \sigma$$

$$\text{maille}(c) = \sup\{\text{diam } \sigma(\Delta^q) \mid n_\sigma \neq 0\}$$

On remarquera l'analogie avec la maille d'un complexe simplicial.

Lemme 5.72.

Δ^n est un espace métrique (muni de la métrique **d**' induite par celle de R^N) et on a la relation

$$\text{maille}(Sdc) \leqslant \frac{q}{q+1}\ \text{maille}(c)$$

pour toute chaîne $c \in \Delta'_q(\Delta^n)$

Preuve :

Il suffit bien sûr de se restreindre au cas ou C est un q-simplexe σ, affine.

Par une preuve analogue à 3.31 , le lecteur montrera que si $\sigma = (x_0, \ldots, x_q)$ et $b(\sigma) = \Sigma \frac{x_i}{q+1}$

on a

$$d(b(\sigma) , \Sigma\, t_i x_i) < \frac{q}{q+1} \text{ maille } (\sigma)$$

pour toute combinaison convexe des x_i $(\Sigma t_i = 1 \;, t_i \geqslant 0)$.

D'après 5.71 la maille de $Sd\sigma$ est obtenue soit entre deux points de $Sd(d\sigma)$, soit entre $b(\sigma)$ et un de ces points. Donc :

$$\text{maille } (Sd\sigma) < \sup(\frac{q}{q+1} \text{ maille}(\sigma) \;, \text{maille}(Sd(d\sigma))$$

$$= \frac{q}{q+1} \text{ maille}(\sigma)$$

en supposant par induction que : maille $Sd(d\sigma) \leqslant \frac{q-1}{q}$ maille$(d\sigma)$

donc $Sd(d\sigma) \leqslant \frac{q}{q+1}$ maille(σ)

<u>Définition (Sd^m) 5.73.</u>

On définit les transformations de chaînes algébriques itérées de Sd par :

$$Sd^m : \Delta(X) \to \Delta(X)$$

$$Sd^1 = Sd \qquad \text{et} \qquad Sd^m = Sd(Sd^{m-1}) \qquad m > 1$$

<u>Corollaire 5.74.</u>

Pour tout $c \in \Delta'_q(\Delta^n)$

$$\text{maille}(Sd^m(c)) \leqslant (\frac{q}{q+1})^m \text{ maille}(c)$$

<u>Définition ($\Delta(U)$) 5.75.</u>

a) Soit un espace topologique X et $U = \{A\}$ une collection de parties de X.

On appelle $\Delta(U)$ le sous-complexe engendré par les simplexes $\sigma : \Delta^q \to X$

tels qu'il existe $A \in U$ et

$$\sigma(\Delta^q) \subset A$$

On a effectivement un sous-complexe de $\Delta(X)$ car

$$\sigma(\Delta^q) \subset A \implies \sigma^{(i)}(\Delta^{q-1}) \subset A$$

b) $$\begin{cases} Sd\Delta(U) \subset \Delta(U) \\ D\Delta(U) \subset \Delta(U) \end{cases}$$

Lemme 5.76.

Soit $U = \{A\}$ une collection de parties de l'espace X tel que $U = \{\text{int } A\}$ soit un recouvrement de X.

Alors pour chaque q-simplexe σ de X, il existe $m \geqslant 0$, noté $m(\sigma)$, tel que $Sd^m(\sigma) \in \Delta(U)$.

Preuve :

$$\sigma :: \Delta^q \to X$$

$\{\sigma^{-1}(\text{int } A) | A \in U\}$ est un recouvrement ouvert de Δ^q, compact, auquel correspond donc un nombre de Lebesgue λ (cf. 3.43).

$$m(\sigma) = \inf\{m \mid (\tfrac{q}{q+1})^m \text{ idam } \Delta^q \leqslant \lambda\}$$

D'après 5.74, maille $(Sd^{m(\sigma)}(Id_{\Delta^q}) \leqslant \lambda$

Donc chaque simplexe de $Sd^{m(\sigma)}(Id_{\Delta^q})$ a son image dans un $\sigma^{-1}(\text{int}A)$ et $Sd^m(\sigma) = \Delta(\sigma)\ Sd^m(Id_{\Delta^q}) \in \Delta(U)$

Théorème 5.77.

Soit $U = \{A\}$ un recouvrement de X tel que $U = \{\text{int } A\}$ soit aussi un recouvrement de X. Alors l'inclusion :

$$i : \Delta(U) \subset \Delta(X)$$

est une équivalence de chaînes.

Preuve :

On remarquera d'abord :

$$m(\sigma) = 0 \iff \sigma \in \Delta(U)$$

$$m(\sigma^{(i)}) \leqslant m(\sigma)$$

Définissons $\overline{D} : \Delta(X) \to \Delta(X)$ par

$$\overline{D}(\sigma) = \sum_{0<j<m(\sigma)-1} DSd^{j}(\sigma) \quad (\sigma \text{ q-simplexe})$$

$$D(\sigma) = 0 \iff \sigma \in \Delta(U)$$

et

$$d\overline{D}(\sigma) + \overline{D}d(\sigma) = dD\Big(\sum_{0\leqslant j\leqslant m(\sigma)-1} sd^{j}(\sigma)\Big) + \sum_{0\leqslant i\leqslant q} (-1)^{i}\, D \sum_{0\leqslant j\leqslant m(\sigma^{(i)})-1} sd^{j}(\sigma^{i})$$

or $dD + Dd = Id_{\Delta(X)} - Sd$

$$dD(\sigma) + Dd(\sigma) = \Sigma\, Sd^{j}(\sigma) - \Sigma\, Sd^{j+1}(\sigma) - \Sigma\, Dsd^{j}(d\sigma) + \sum_{i} (-1)^{i} \sum_{j} Dsd^{j}(\sigma^{i})$$

$$= \sigma - Sd^{m(\sigma)}(\sigma) - \sum_{0<i<q} (-1)^{i} \sum_{m(\sigma^{i})<j<m(\sigma)-1} Dsd^{j}(\sigma^{i})$$

Posons $\tau(\sigma) = -d\overline{D}(\sigma) - \overline{D}d(\sigma) + \sigma$

Le calcul précédent montre que $\tau(\sigma) \in \Delta(U)$ pour tout simplexe de X. On définit donc une transformation de chaînes algébrique :

$$\tau : \Delta(X) \to \Delta(U)$$

qui vérifie :

$$\tau \circ i = Id_{\Delta(U)}$$

$$\overline{D} : i \circ \tau \sim Id_{\Delta(X)}$$

<u>Théorème (excision) 5.78.</u>

Soit un espace X et $U \subset A \subset X$ tel que

$$U \subset int(A)$$

Alors l'inclusion : $(X - U\ ,\ A - U) \subset (X,A)$ induit un isomorphisme sur l'homologie singulière.

<u>Preuve</u> :

On a : $int(X - U) \supset X - \overline{U} \supset X - intA$

Soit $U = \{X - U\ ,A\}$. Alors $int(X - U) \quad intA = X$ et on applique 5.77.

$$\Delta(U) = \Delta(X - U) + \Delta(A) \subset \Delta(X)$$

est une équivalence de chaînes.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta(X-U)/\Delta[A \cap (X-U)] \arrow[rr, "\Delta(j)"] \arrow[dr, "i"'] & & \Delta(X)/\Delta(A) \\
& \Delta(A) + \Delta(X-U)/\Delta(U) \arrow[ur, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

où $j : (A,A \quad (X-U)) \hookrightarrow (X,X-U)$

i, i' étant induit par des inclusions.

D'après l'exactitude de la suite d'homologie et le lemme des cinq, l'équivalence $\Delta(X-U) + \Delta(A) \subset \Delta(X)$ induit un isomorphisme i'_*

i est un isomorphisme d'après 4.3 , donc i_* aussi et

$$j_* : H(X - U, A - U) \approx H(X,A)$$

Définition (couple excisif) 5.79.

a) Nous dirons qu'un couple (X_1,X_2) de parties de X est excisif si l'inclusion de chaînes

$$\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$$

induit un isomorphisme de groupes d'homologie.

En particulier si $X_1 \cup X_2 = \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_1 \cup \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_2$, le couple (X_1,X_2) est excisif comme on le voit en appliquant 5.77 au recouvrement $\{X_1, X_2\}$ de $X_1 \cup X_2$.

b) Nous dirons que le couple de paires $\{(X_1, A_1) (X_2, A_2)\}$ est excisif si (X_1,X_2) et (A_1, A_2) sont deux couples excisifs.

Proposition (suites de Mayer-Viétoris) 5.80.

a) Etant donné un couple excisif (X_1,X_2) on a la suite exacte de Mayer-Viétoris :

$$\to H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

où

$$i_*(z) = (i_{1*}z, -i_{2*}z) \quad ; \quad j_*(z_1, z_2) = j_{1*}z_1 + j_{2*}z_2$$

pour $\quad z \in H(X_1 \cap X_2)\ ,\ z_1 \in H(X_1)\ ,\ z_2 \in H(X_2)$

b) Si de plus $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, on a la même suite en homologie réduite

$$\to \tilde{H}_q(X_1\ X_2) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{d_*} \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

c) Etant donné un couple de paires excisifs $\{(X_1,A_1),(X_2,A_2)\}$ on a la suite exacte relative de Mayer-Vietoris :

$$\xrightarrow{d_*} H_q(X_1 \cap X_2\ ,\ A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1,A_1) \oplus H_q(X_2,A_2) \xrightarrow{j_*}$$

$$H_q(X_1 \cup X_2\ ,\ A_1 \cup X_2) \xrightarrow{d_*}$$

<u>Preuve</u> :

a) On a toujours $\quad \Delta(X_1 \cap X_2) = \Delta(X_1) \cap \Delta(X_2)$

et le couple étant excisif : $H(X_1 \cup X_2) \approx H(\Delta(X_1) + \Delta(X_2))$.

Il suffit donc de prendre la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte (cf. 5.24).

$$0 \to \Delta(X_1 \cap X_2) \to \Delta(X_1) \oplus \Delta(X_2) \to \Delta(X_1) + \Delta(X_2) \to 0$$

b) se traîte de même en prolongeant comme en 5.25.

c) Il suffit pour compléter ce qui précède de voir que :

$$\Delta(X_1) + \Delta(X_2)/\Delta(A_1)+\Delta(A_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)/\Delta(A_1 \cup A_2)$$

induit un isomorphisme en homologie. Or c'est une conséquence du lemme des cinq puisque le résultat est vrai pour :

$$\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$$

$$\Delta(A_1) + \Delta(A_2) \subset \Delta(A_1 \cup A_2)$$

Il suffit donc de prendre la suite exacte d'homplogie associée à

$$0 \to \Delta(X_1 \cap X_2)/\Delta(A_1 \cap A_2) \to \Delta(X_1)/\Delta(A_1) \oplus \Delta(X_2)/\Delta(A_2) \to$$

$$\Delta(X_1) + \Delta(X_2)/\Delta(A_1) + \Delta(A_2) \to 0$$

qui est exacte d'après 5.25.

Application 5.81.

Pour $n \geqslant 0$

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \quad \text{ou} \quad q=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Soient p et p' les pôles Nord et Sud de S^n

$S^n - \{p\}$ et $S^n - \{p'\}$ sont contractiles donc

$$\tilde{H}(S^n - \{p\}) = \tilde{H}(S^n - \{p'\}) = 0$$

$(S^n - \{p\}\ ,\ S^n - \{p'\})$ est un couple excisif puisque formé de deux ouverts ;

on applique la suite de Mayer-Vietoris correspondante, ce qui donne :

$$d_* : \tilde{H}_q(S^n) \approx \tilde{H}_{q-1}(S^n - \{p,p'\})$$

Or $(S^n - \{p,p'\})$ a le type d'homotopie de S^{n-1} (en déformant le long des méridiens, on trouve que S^{n-1} est un rétract de déformation fort de $(S^n - \{p,p'\}))$

Donc $\tilde{H}_q(S^n) \approx \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$

Or $S^o = \{-1,1\}$ et $\tilde{H}_q(S^o) = \begin{cases} Z & q=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et par induction $H_q(S^n) = \begin{cases} Z & q=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et le résultat s'ensuit :

Lemme 5.82.

Si K_1 est un sous-complexe d'un complexe simplicial K et S un simplexe de K tel que $|K_1| \cap |S| = |\dot{S}|$

alors $(|K_1|, |S|)$ est un couple excisif.

Preuve :

Soit $x_o \in \langle S \rangle - X_1 = |K_1| \cup (|S| - \{x_o\})$ a le type d'homotopie de $|K_1|$ puisque $|K_1|$ en est un rétract de déformation.

Posons $V = |S| - \{x_o\}$. Alors $X_1 = |K_1| \cup V$, $X_1 \cap |S| = V$

D'après 4.3.

$$\Delta(X_1) + \Delta|S|_{/\Delta(A_1)} \approx \Delta|S|_{/\Delta(V)}$$

et

$$H|K_1| + \Delta|S|_{/\Delta(K_1)} \approx \Delta|S|_{/\Delta|\dot{S}|}$$

Par application du lemme des cinq

$$H(\Delta|S|_{/\Delta(V)}) \approx H(\Delta|S|_{/\Delta|S|})$$

car $|S|$ est un rétract de déformation de V .

On définit : $H(\Delta|K_1| + \Delta|S|/_{\Delta|K_1|}) \sim H(\Delta(X_1) + \Delta|S|/_{\Delta(X_1)})$

Une seconde application du lemme des cinq à

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \Delta X_1 & \hookrightarrow & \Delta(X_1) + \Delta(|S|) & \longrightarrow & \Delta(X_1) + \Delta|S|/_{\Delta(X_1)} & \longrightarrow & 0 \\
\cap & & \cap & & \cap & & \\
0 \to \Delta X_1 & \hookrightarrow & \Delta(X_1 \cup |S|) & \longrightarrow & \Delta(X_1 \cup |S|)/_{\Delta(X_1)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne

$$H(\Delta(X_1) + \Delta|S|/_{\Delta(X_1)}) \approx H(\Delta(|K_1| \cup S)/_{\Delta(X_1)})$$

car le couple $(X_1, |S|)$ est excisif d'après 5.79 , et que

$$X_1 \cup |S| = |K_1| \cup |S|$$

donc $\quad H(\Delta|K_1| + \Delta|S|/_{\Delta|K_1|}) \approx H(|K_1| \cup S , X_1)$

Une troisième application du lemme des cinq donne

$$H(|K_1| \cup |S| , X_1) \approx H(|K_1| \cup |S| , |K_1|)$$

car $|K_1|$ est un rétract de déformation fort de X_1 et une quatrième application

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_q(|K_1|) & \to & H_q(\Delta|K_1| + \Delta|S|) & \to & H_q(\Delta|K_1| + \Delta|S|/_{\Delta|K_1|}) & \to \\
\downarrow s & & \downarrow & & \downarrow s & \\
\to H_q(|K_1|) & \to & H_q(|K_1| \cup |S|) & \to & H_q(K_1 \cup |S| , |K_1|) & \to
\end{array}$$

permet d'affirmer que la flèche centrale est un isomorphisme, donc que $(|K_1| , |S|)$ est excisif.

Remarque : Les applications ne portent pas de nom car il est bien entendu qu'à chaque fois ce sont celles induites par les inclusions naturelles.

Définition 5.83.

On définit la transformation de chaînes

$$\nu : C(K) \to \Delta(|K|)$$

pour le complexe simplicial K, en associant au complexe ordonnée $(p_o,\dots,p_q)$ le q-simplexe affine $(p_o,\dots,p_q)$.

Lemme 5.84.

Pour un simplexe X, ν induit un isomorphisme du groupe d'homologie ordonnée de S dans le groupe d'homologie singulière de $|S|$.

Preuve : On sait que $\tilde{H}(S) = 0 = \tilde{H}(|S|)$

Il suffit donc de voir que sous l'isomorphisme 4.38 ν_{o*} se réduit à un isomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Or c'est $Id_{\mathbb{Z}}$

Théorème 5.85.

Etant donnée une paire simpliciale (K,L) la transformation de chaînes ν induit un isomorphisme de l'homologie ordonnée de (K,L) et de l'homologie singulière de $(|K|,|L|)$

$$\nu_* : H(K,L) \approx H(|K|,|L|)$$

Preuve :

1) Résolvons le problème pour un complexe K, tout d'abord. Nous allons

procéder par induction sur le nombre n de simplexes de K .

$n = 0$ $K = S$ où S est un 0-simplexe. Le résultat suit 5.84.

$n > 0$ Supposons que ν_* est un isomorphisme pour tout complexe à moins de n simplexes.

Soit S un simplexe de K de dimension maximale $K - \langle S \rangle = L$ est un sous-complexe de K à $(n-1)$ simplexes

Donc $\nu_* : H(L) \approx H(|L|)$

$\nu_* : H(\dot{S}) \approx H(|\dot{S}|)$

D'après 5.84. $\nu_* : H(S) \approx H(|S|)$

Il reste à appliquer la suite de Mayer-Vietoris de $(|L|),|S|)$ (qui est un couple excisif d'après 5.82) en homologie ordonnée et en homologie singulière

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to & H_q(\dot{S}) & \to & H_q(S) \oplus H_q(L) & \to & H_q(K) & \to & H_{q+1}(\dot{S}) & \to \\
& S \downarrow \nu_* & & S \downarrow \nu_* & & \downarrow \nu_* & & S \downarrow \nu_* & \\
\to & H_q(|S|) & \to & H_q(|S|) \oplus H_q(|L|) & \to & H_q(|K|) & \to & H_{q+1}(|\dot{S}|) &
\end{array}$$

et le résultat est une conséquence du lemme des cinq.

2) Le résultat général suit 1) par nouvelle application du lemme des cinq.

<u>Théorème 5.86.</u>

Pour toute paire simpliciale (K,L) , ν est une équivalence de chaînes

$$\nu : C(K)/_{C(L)} \to \Delta(|K|)/_{\Delta(|K|)}$$

<u>Preuve</u> : C'est ici que nous utilisons le puissant théorème 5.45.

Remarque 5.87.

a) Le lecteur pourra démontrer que pour un complexe simplicial connexe

$$H_1(K) \approx \Pi_1(|K|),p_o)/[\Pi_1,\Pi_1]$$

où $[\Pi_1 , \Pi_1]$ est le commutateur de $\Pi_1(|K|,p_o)$
(un élément de $\Pi_1(|K|), p_o)$ est la classe d'un chemin d'arête auquel on fait correspondre la somme de ses arêtes dans $H_1(K)$, et cette correspondance a pour noyau $[\Pi_1,\Pi_1]$) .

b) Le même résultat est vrai pour un espace connexe par arcs X

$$H_1(X) \approx \Pi_1(X,x_o)/[\Pi_1 , \Pi_1]$$

mais la démonstration est considérablement plus compliquée (isomorphisme de Hurewicz).

CARACTERISATION AXIOMATIQUE DE L'HOMOLOGIE ET DE LA COHOMOLOGIE.

Nous allons, pour terminer le chapitre, donner une caractéristation axiomatique d'une théorie de l'homologie créée par Eclenberg et Steenrod.
Ce recueil d'axiomes correspond aux théorème précédemment démontrés en ce qu'ils sont la matière minimale capable de démontrer toutes les autres propriétés. Leur importance tient donc au fait qu'ils constituent la connaissance élémentaire exigible pour utiliser ce puissant outil de l'homologie.

Axiomes d'une théorie de l'homologie 5.88.

Une théorie de l'homologie (H,d) à coefficients G est un foncteur covariant H de la catégorie des paires topologiques dans la catégorie des groupes gradués i.e. : . Pour toute paire (X,A) $H(X,A)$ est un groupe gradué

$$H(X,A) = \bigoplus_{q\in \mathbb{Z}} H_q(X,A)$$

. Pour toute $f : (X,A) \to (Y,B)$ continue, il existe un homomorphisme $H(f)$

$$H(f) : H(X,A) \to H(Y,B)$$

qui vérifie $\begin{cases} H(Id_{(X,A)}) = Id_{H(X,A)} \\ H(fog) = H(f) \circ H(g) \end{cases}$

et en un homomorphisme d de degré -1 :

$$d(X,A) : H(X,A) \to H(A)$$

tel que . $d_q(X,A) : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$

. $d(YB)\ H(f) = H(f|A)\ d(XA)$

pour toute $f : (X,A) \to (Y,B)$ continue et sous l'isomorphisme : $A = (A,\emptyset)$. Le couple (Hd) étant astreint à vérifier les axiomes suivants :

a) <u>Axiome d'homotopie</u> :

Si f_o , f_1 : $(X;A) \to (Y,B)$ sont homotopes

$$H(f_o) = H(f_1) : H(X,A) \to H(Y,B)$$

b) <u>Axiome d'exactitude</u>.

Pour toute paire (X,A) , i et j désignant les inclusions

$$i : A \subset X \quad ; \; j : X \subset (X,A)$$

on a la suite exacte :

$$\xrightarrow{d_{q+1}(X,A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{d_q(X,A)} H_{q-1}(A) \to$$

c) Axiome d'excision.

Pour toute paire (X,A) si U est un ouvert de X tel que $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$, alors l'injection

$$j : (X - U , A - U) \to (X,A)$$

induit un isomorphisme :

$$H(j) : H(X - U , A - U) \approx H(X,A)$$

d) Axiome de dimension.

Pour tout espace P réduit à un point

$$H_q(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \\ G & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

Nous avons remarqué en 4.56 qu'une transformation très simple existe entre complexes de chaînes et complexe de cochaînes. On aurait donc pu établir de façon similaire toutes les propriétés d'une théorie de la cohomologie. L'importance de la cohomologie que le lecteur a pu percevoir au chapitre IV, par l'application du foncteur Hom, ne tardera pas à se faire connaître davantage s'il veut pousser un peu l'étude homologique.

Nous allons donc terminer en énonçant les axiomes d'une théorie de la cohomologie.

Axiomes d'une théorie de la cohomologie 5.89.

Une théorie de la cohomologie à coefficients G , (H^*,d^*) consiste en un foncteur contravariant H^* de la catégorie des paires topologiques, dans la catégorie des groupes gradués i.e. : . Pour toute paire (X,A) , $H^*(X,A)$ est un groupe gradué

$$H^*(X,A) = \{H^q(X,A)\}$$

. Pour toute $f : (X,A) \to (Y,B)$ continue, il existe un homomorphisme

$$H^*(f) : H^*(Y,B) \to H^*(X,A)$$

qui vérifie :

$$\begin{cases} H^*(Id_{(X,A)}) = Id_{H^*(X,A)} \\ H^*(fog) = H^*(f) \circ H^*(f) \end{cases}$$

et en un homomorphisme d^* de degré 1

$$d^*(XA) : H^*(A) \to H^*(X,A)$$

tel que :

$$\begin{cases} d^q(XA) : H^q(A) \to H^{q+1}(X,A) \\ d^q(X,A)\, H^*(f(A)) = H^*(f) d^q(Y,B) \end{cases}$$

Le couple (H^*,d^*) étant astreint à vérifier les axiomes suivants :

a) <u>Axiome d'homotopie</u> :

Si $f_o,f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ sont homotopes $H^*(f_o) = H^*(f_1) : H^*(Y,B) \to H^*(X,A)$

b) <u>Axiome d'exactitude</u> :

Pour toute paire (X,A) , i et j désignant les inclusions $i = A \subset X$;

$j : X \subset (X,A)$, on a la suite exacte :

$$\xrightarrow{d^*} H^q(X,A) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A) \xrightarrow{d^*(X,A)} H^{q+1}(X,A) \to$$

c) <u>Axiome d'excision</u> :

Pour toute paire (X,A) , si U est un ouvert de X tel que $U \subset \text{int } A$, l'inclusion $j : (X-U,\ A-U) \to (X,A)$

induit un isomorphisme

$$H^*(j) : H^*(X,A) \approx H^*(X-U,\ A-U)$$

d) <u>Axiome de dimension</u> :

Pour tout espace P réduit à un point

$$H_q(P) = \begin{cases} G & q = o \\ 0 & q \neq o \end{cases}$$

<u>Remarque 5.90.</u>

a) l'homologie singulière constitue une théorie de l'homologie (avec coefficents $\mathbb{Z}$; ou G en prenant $H(X,A\ ;\ G)$

b) la cohomologie singulière de (X,A) à valeurs dans G définie comme la cohomologie du complexe de cochaines

$$\mathrm{Hom}\ (\Delta(X)_{/\Delta(A)}\ ;\ G)$$

est une théorie de la cohomologie à coefficients G .

-::-::-

CHAPITRE VI.

HOMOLOGIE : APPLICATIONS.

THEOREME du POINT FIXE. DEGRE TOPOLOGIQUE.

6.1. Lemme.

Soit une paire (X, A) où A est un rétract de X.

Alors $$H(X) = H(A) \oplus H(X, A) .$$

Preuve : $i : A \subset X \qquad j : X \subset (X, A)$.

On a par hypothèse $ri = Id_A$ donc $r_* i_* = Id_{H(A)}$. Utilisons la suite d'homologie

$$\longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{d_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{d_*} H_q(X, A) \xrightarrow{d_*}$$

i_* est injectif et $\mathrm{Im} d_* = \mathrm{Ker}\, i_* = 0$.

On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{d_*} 0$$

et le résultat est évident d'après 4.4. car $r_* i_* = Id_{H(A)}$.

6.2. Théorème.

S^n n'est jamais un retract de D^{n+1}.

Preuve :

Sinon $$\tilde{H}(D^{n+1}) = \tilde{H}(S^n) \oplus H(D^{n+1}, S^n)$$

or $$\tilde{H}(D^{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{H}(S^n \neq 0.$$

6.3. Corollaire. (Théorème du point fixe de Brouwer).

Toute application continue $f : D^n \longrightarrow D^n$ a un point fixe.

Preuve :

On a vu au chapitre I.

S^n rétract de $D^{n+1} \Longleftrightarrow$ Il existe $f : D^{n+1} \longrightarrow D^{n+1}$ continu sans point fixe.

Nous allons maintenant étendre cette étude aux polyèdres compacts.

6.4. Définition (nombre de Lefschetz).

Etant donnée une application continue $f : X \longrightarrow X$, l'espace X étant supposé avoir une homologie de type fini (cf. 4.79, 4.80), on définit le nombre de Lefschetz de f, par :

$$\lambda(f) = \mathrm{Tr}(f_*)$$

$\lambda(f)$ est un nombre entier (pourquoi ?)

6.5. Remarques :

a) Si f et g sont homotopes $\lambda(f) = \lambda(g)$,

b) Si f est une application constante $\lambda(f) = 1$,

c) $\lambda(Id_X) = \chi(X)$.

Preuve :

a) $f_* = g_*$

b) Soit $(X_j)_{j \in I}$ les composantes par arcs de X

$$f(x) = x_o \qquad x \in X \quad \text{où} \quad x_o \in X_o$$

En dimension 0 : $H_o(X) \approx \mathbb{Z}^J$ et $f_{*_o} : \mathbb{Z}^J \longrightarrow \mathbb{Z}^J$ a pour matrice dans la base canonique $(a_{i_j})_{j,j \in J}$ telle que : $a_{11} = 1$, $a_{ij} = 0$ sinon

$$\mathrm{Tr}\, f_{*_o} = 1$$

Pour $n \neq 0$ $f_{*_n} : H_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ $\mathrm{Im} f_{*_n} = 0$

$$\mathrm{Tr}\, f_{*_n} = 0$$

$$\lambda(f) = \sum (-1)^i\, \mathrm{Tr}\, f_{*_n} = 1$$

c) évident d'après la définition (cf. 4.20) car b_n est $\mathrm{Tr}\, f_{*_n}$ en représentant Id_* par la matrice unité.

6.6. Théorème du point fixe de Lefschetz.

Soit un polyèdre compact X et une application continue $f : X \longrightarrow X$. Si $\lambda(f) \neq 0$, f a un point fixe.

<u>Preuve</u> :

On peut se restreindre à $X = |K|$ où K est un complexe simplicial. Nous allons supposer que f n'a pas de point fixe et nous prouverons qu'alors $\lambda(f) = 0$ comme $|K|$ est compact, il existe $a > 0$ tel que

$$d(x, f(x)) \geq a \qquad x \in |K|$$

(sinon on aurait (x_n) telle que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$ dont il suffirait d'extraire une sous suite x_{n_j} telle que (x_{n_j}) et $(f(x_{n_j}))$ convergent ; mais alors le point de convergence $x \in |K|$ vérifierait $f(x) = x$).

Soit K' une subdivision de K telle que :

$$\text{maille } (K') < \frac{a}{3}$$

et K'^n une subdivision barycentrique de K' telle qu'il existe une approximation simpliciale

$$\varphi : K'^n \longrightarrow K'$$

de
$$f : |K'^n| \longrightarrow |K'|$$

Comme $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont dans un même simplexe (par définition de φ), on a

$$d(\varphi(x), f(x)) < \frac{a}{3} \qquad (x \in |K|).$$

On en déduit

$$|\varphi(S)| \cap |S| = \emptyset \qquad (S \in K^n)$$

car sinon, on aurait $x = \varphi(y)$ et

$$d(y, f(y)) \leq d(x, y) + d(\varphi(y), f(y)) < \frac{2a}{3}$$

Le théorème 5.33. nous a permis de définir f_* par $f_* = \varphi_* \, Sd_*^n$.

Posons $\tilde{\varphi}_* = Sd_*^n \; \varphi_* : H(k'^n) \to H(K'^n)$ et soit τ la transformation de chaînes

$$\begin{tikzcd} H_m(K') \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "Sd_*^n"'] & H_m(K') \arrow[d, "Sd_*^n"] \\ H_m(K'^n) \arrow[ur, "\varphi_*"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}_*"] & H_m(K'^n) \end{tikzcd}$$

$$\tau : C(K') \longrightarrow C(K'^n)$$

définie au théorème 5.12 pour la transformation acyclique Sd^n.

On a :

$$\tau C(\varphi) : C(K'^n) \longrightarrow C(K'^n)$$

et $\quad \bar{\varphi}_* = [\tau (C \varphi)]_*$.

On sait donc que la transformation de chaînes $\tau C(\varphi)$ a une trace nulle ; car pour tout simplexe ordonné σ $\tau C(\varphi)(\sigma)$ est une chaîne ordonnée qui ne contient pas σ puisque $C(\varphi)(\sigma)$ est disjointe de σ . Donc d'après 4.80

$$\operatorname{Tr} \bar{\varphi}_* = \operatorname{Tr}(\tau \circ C(\varphi)) = 0 .$$

Or 5.31 nous permet d'identifier $H(K')$ et $H(K'^n)$ par Sd_*^n

$$\lambda(f) = \operatorname{Tr}(f_*) = \operatorname{Tr}(Sd_*^n \bar{\varphi}_* Sd_*^{n-1}) = \operatorname{Tr} \bar{\varphi}_* = 0$$

car d'après 4.75 la trace n'est pas affectée par un isomorphisme.

6.7. Corollaire (Téorème de point fixe de Brouwer généralisé).

Toute application continue d'un polyèdre compact contractile dans lui-même a un point fixe.

Preuve :

Comme X est contractile $\lambda(f) = 1$ car $f \simeq C^{te}$.

Remarque :

Le résultat est faux pour un polyèdre non compact (translations dans $\mathbb{R}^n$).

6.8. Définition (degré de f).

Etant donnée une application continue $f : S^n$ —— S^n elle induit

$$f_{*_n} : \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z} .$$

On appelle degré de f, l'unique entier

$$\deg f = \operatorname{Tr} f_{*_n} .$$

C'est-à-dire le seul entier qui vérifie :

$$f_*(z) = (\deg f) . z \qquad (z \in \tilde{H}_n(S^n)).$$

6.9. Remarques :

a) Si $f \simeq g$ $\deg f = \deg g$

b) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$

c) L'application antipodale λ de S^n vérifie : $\deg \lambda = (-1)^{n+1}$

d) On a toujours la relation : $\lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f$.

6.10. Corollaire.

Pour n pair, il n'existe pas d'application continue $f : S^n \longrightarrow S^n$ telle que x et $f(x)$ soient orthogonaux (pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^{n+1}$) pour tout x.

Preuve : par l'absurde.

Soit une telle f. Alors on définit $H : f \simeq Id_{S^n}$ par :

$$F(x, t) = \frac{(1-t)\, f(x) + tx}{\|(1-t)\, f(x) + tx\|}$$

car la condition d'orthogonalité implique :

$$\|(1-t)\, f(x) + tx\|^2 = (1-t)^2 + t^2 \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in I$$

Donc $\lambda(f) = \lambda(Id_{S^n}) = 1 + (-1)^n = 2$

et d'après 6.6 f a un point fixe $f(x_0) = x_0$ ce qui est en contracdiction avec le fait que $f(x_0)$ est orthogonal à x_0.

6.11. Définition et proposition.

a) Un champ de vecteurs tangents à S^n est une application continue

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

telle que x et $f(x)$ soient orthogonaux pour tout x.

b) Si n est pair 6.10. affirme qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangents à S^n qui ne s'annule pas (sinon : $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$, $\varphi : S^n \longrightarrow S^n$ et $\varphi(x)$ orthogonal à x, pour tout x).

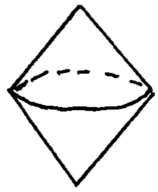
c) Si n est impair, un tel champ existe, par exemple :

$$f(x_1, \dots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1}) \qquad (n = 2m - 1)$$

6.12. Définition : (suspension).

a) Etant donné un espace topologique X, on définit la suspension de X par

$$S(X) = X \times I/R$$



où R est l'identification de tous les points $(x, 0)$ d'une part, de tous les points $(x, 1)$ d'autre part.

b) Etant donnée une application continue $f : X \longrightarrow X$, on définit la suspension de f par

$$S(f) : S(X) \longrightarrow S(X)$$
$$S(f)[z, t] = [f(z), t]$$

6.13. Lemme.

Pour $n \geq 0$ $S(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1}.

6.14. Théorème.

Soit une application continue $f : S^n \longrightarrow S^n$ telle que :

$$f(E^n_+) \subset E^n_+ \,; \quad f(E^n_-) \subset E^n_-$$
$$(E^n_+ = \{x \in S^n \mid x_n \geq 0 \,; \quad E^n_- = \{x \in S^n \mid x_n \leq 0\} .$$

Alors si $f' : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ désigne l'application induite par f sur son équateur :

$$\deg f = \deg f' .$$

Preuve :

$$S^n = E^n_+ \cup E^n_- \quad ; \qquad S^{n-1} = E^n_+ \cap E^n_- .$$

On peut trianguler S^n de telle manière que E^n_+ et E^n_- correspondent à des sous-complexes.

En effet S^{n-1} a pour triangulation $\dot{S}$ où S est un n-simplexe. On prend pour triangulation de E^n_+ et E^n_-, le joint du pôle nord e_+ et du pôle sud e_-

.../...

avec ce complexe.

Utilisons donc la suite de Mayer-Victoris de

$$C_+ = C(e_+ * \dot{S}) \quad ; \quad C_- = C(e_- * \dot{S})$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(S_n) \arrow[r, "\sim", "\phi"'] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f'_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r, "\sim", "\phi"'] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

car $H(C_+) = H(C_-) = 0$ car $|e_+ * \dot{S}|$ et $|e_- * \dot{S}|$ sont contractiles et

$$\deg f = Tr(f_{*n}) = Tr(\phi^{-1} f'_{*n} \phi) = Tr(f'_{*n}) = \deg f'.$$

6.15. <u>Corollaire</u>.

$$\deg S(f) = \deg f.$$

6.16. <u>Corollaire</u>.

Il existe des application $f : S^n \longrightarrow S^n$ de tous degrés.

Preuve :

$n = 1$ f définie par $f(z) = z^p$ est de degré p.

$n > 1$ On utilise 6.15. par induction.

<u>THEOREMES DE SEPARATION SUR</u> S^n.

6.17. <u>Lemme</u>.

Si A S^n est un plongement de I^k, $0 \leq k \leq n$.

Alors $$H(S^n - A) = 0.$$

<u>Preuve</u> : par induction sur k

$k = 0$ A est donc un point et $(S^n - A)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Donc $\tilde{H}(S^n - A) = 0$.

$k > 0$ Supposons le résultat vrai pour $k' < k$ et soit A un prolongement de $I^k = I^{k-1} \times I$ par

$$\phi : I^{k-1} \times I \longrightarrow A$$

Soient $A_1 = \phi(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$, $A'_1 = \phi(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$. Alors

$A = A_1 \cup A'_1$; $A_1 \cap A'_1 = \phi(I^{k-1} \times \frac{1}{2})$.

Donc $A_1 \cap A'_1$ est le plongement de I^{k-1} et par hypothèse $\tilde{H}(S^n - A_1 \cap A'_1) = 0$.

A_1 et A'_1 étant images de compacts sont fermés dans S^n (qui est séparée) et $(S^n - A_1, S^n - A'_1)$ est un couple d'ouverts donc excisif. Considérons leur suite de Mayer-Victoris réduite :

$$H_{q-1}(S^n - A_1 \cap A'_1) = 0 \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n - A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_q(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_q(S^n - A'_1) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n - A_1 \cap A'_1) = 0$$

$$\tilde{H}_q(S^n - A) \approx \tilde{H}_q(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_q(S^n - A'_1).$$

Soit $z \in \tilde{H}_q(S^n - A)$ non nul.

Par l'isomorphisme, il lui correspond soit $i_{1*}z$, soit $i'_{1*}z$ non nul. Soit par exemple $i_{1*} z \neq 0$.

On recommence avec A_1 au lieu de A. On obtient donc une suite d'ensembles emboités

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

telle que :

a) L'inclusion $i_j : S^n - A \subset S^n - A_j$ vérifie $i_{j*} z \neq 0$ dans $\tilde{H}_q(S^n - A_j)$

b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un plongement de I^{k-1}.

$(S^n - A_j, i_{jj'})$ où $i_{jj'} : S^n - A_j \subset S^n - A_{j'}$ est un système inductif et

$$\varinjlim (S^n - A_j, i_{jj'}) = (S^n - \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j).$$

En utilisant 4.33. et la condition b)

$$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\tilde{H}_q(S^n - A_j)\ i_{jj'*}) = \tilde{H}_q(S^n - \cap A_j) = 0$$

D'après la caractérisation 4.17. la condition a) est impossible car si $i_* z = 0$ dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\ (\tilde{H}_q(S^n - A_j)\ i_{jj'*})$, alors il existe m tel que $i_{m*}\ z = 0$ dans $\tilde{H}_q(S^n - A_m)$.

L'hypothèse qu'il existe $z \neq 0$ dans $H_q(S^n - A)$ est donc fausse et :

$$\tilde{H}_q(S^n - A) = 0$$

6.18. <u>Corollaire</u> (d'Alexandre)

Soit un sous-espace B de S^n, plongement de S^k pour $0 \leq k \leq n-1$.

Alors $$\tilde{H}_q(S^n - B) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - k - 1 \\ 0 & q \neq n - k - 1 \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : par induction sur k

$k = 0$ B consiste en un ensemble de deux points distincts $\{x_0, x_1\}$ et $S^n - B$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n - \{x_1\}$ donc à S^{n-1} et

$$\tilde{H}_q(S^n - B) \approx \begin{cases} Z & q = n-1 \\ 0 & q \neq n - 1 \end{cases}$$

k 0 Supposons le corollaire vrai pour $k' < k$, et B un plongement de S^k

$B = A_1 \cup A_2$ où A_1 et A_2 correspondent par le plongement à E^k_+ et E^k_-.

Alors A_1 et A_2 sont des plongements de I^k et $A_1 \cap A_2$ à S^{k-1}.

$(S^n - A_1, S^n - A_2)$ est un couple d'ouverts, donc excisif. Considérons sa suite de Mayer-Victoris réduite :

$$\longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_{q+1}(S^n - A_2) \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(S^n - (A_1 \cap A_2)) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n - B) \longrightarrow$$
$$\tilde{H}_q(S^n - A_1) \oplus \tilde{H}_q(S^n - A_2) \longrightarrow$$

D'après 6.17., aux extrémités les groupes sont nuls et

$$\tilde{H}_{q+1}(S^n - A_1 \cap A_2) \approx \tilde{H}_q(S^n - B).$$

Comme $A_1 \cap A_2$ est un plongement de S^{k-1}, on utilise l'hypothèse d'induction :

$$\tilde{H}_q(S^n - B) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & q+1 = n-k \\ 0 & q+1 \neq n-k \end{cases}$$

6.19. <u>Théorème</u> (de Jordan-Brouwer)

Un plongement ϕ de S^{n-1} dans S^n sépare S^n en deux composantes connexes dont $\phi\,(S^{n-1})$ est la frontière commune.

Preuve :

$\phi\,(S^{n-1})$ étant un plongement de S^{n-1}, d'après 6.18

$$\tilde{H}_0(S^n - \phi\,(S^{n-1})) = \mathbb{Z}$$

Donc $S^n - \phi\,(S^{n-1})$ possède deux composantes connexes par arcs U et V.

Or c'est un ouvert de S^n, donc un espace localement connexe par arcs. Posons $\phi\,(S^{n-1}) = B$

$$\overline{U} \cap \overline{V} \subset B \qquad\qquad x \in \overline{U} \cap \overline{V}$$

si $x \in S^n - B$ ouvert, il existe V_x voisinage ouvert de x, $V_x \subset S^n - B$, donc $V_x \subset U$ ou $V_x \subset V$, ce qui est contraire à l'hypothèse

$$B \subset \overline{U} \cap \overline{V} \qquad\qquad x \in B.$$

Soit V_x un voisinage de x dans S^n. $V_x \cap B$ est un voisinage de x dans B ; soit $A_x \subset V_x \cap B$ un voisinage de x homéomorphe à I^{n-1}, dans B

$$\tilde{H}(S^n - (B - A_x)) = 0 \quad \text{d'après } 6.17.$$

$S^n - (B - A_x)$ est connexe par arcs. Soient $p \in U$, $q \in V$ et w un chemin de p à q dans $S^n - (B - A_x)$. w rencontre nécessairement A_x (sinon il serait dans $S^n - B$ un chemin de p à q). Le point $w(t_0)$ où $t_0 = \inf \{t \in I \mid w(t) \notin U\}$ est dans $\overline{U}$, le point $w(t_1)$ où $t_1 = \sup \{t \in I \mid w(t) \notin V\}$ est dans $\overline{V}$.

Donc dans V_x, il existe $x_1 \in U$ et $x_1 \in V$ et $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$.

6.20. Théorème (d'invariance des ouverts de Brauwer).

Soit un ouvert U de S^n et un plongement $\phi : U \longrightarrow S^n$.

Alors $\phi(U) = V$ est aussi un ouvert de S^n. En particulier toute application bijective et continue de S^n dans S^n est un homéomorphisme.

Preuve :

Soit $y \in V$, et $x \in U$ tel que $y = h(x)$. Soit A un voisinage de x dans U homéomorphe à I^n. Soit B le bord de A ; B est homéomorphe à S^{n-1}

$$A' = h(A) \qquad B' = h(B).$$

D'après 6.17. $S^n - A'$ est connexe par arcs et d'après 6.19 $S^n - B'$ possède deux composantes connexes par arcs

$$S^n - B' = (S^n - A') \cup (A' - B').$$

Comme $(S^n - A')$ et $(A' - B')$ sont connexes, ce sont les composantes de $S^n - B'$.

$(A' - B')$ est donc ouvert dans S^n (car S^n est localement connexe par arcs) et $y \in A' - B' \subset V$.

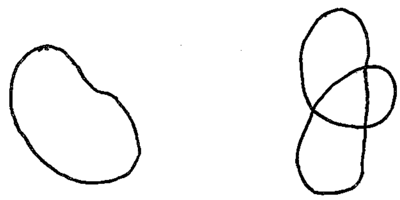
Donc V est voisinage de chacun de ses points.

6.21. Remarque.

On appelle noeud un plongement de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. On en déduit un plongement ϕ de S^1 dans S^3 en composant par $\mathbb{R}^3 \subset S^3$

$$H_q(S^3 - \phi(S^1)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \text{ ou } q = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc l'homologie ne permet pas de distinguer le noeuds par contre, on se rendra compte que $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \phi(S^1))$ distingue les deux noeuds ci - contre



DECOMPOSITION CELLULAIRE.

6.22. Définition (adjonction decellule)

On dit que l'espace X est obtenu par adjonction de n-cellules (e_j^n) au sous-espace fermé A $(n \geq 0)$ si les conditions suivantes sont réalisées :

a) Pour tout $j \in J_n$, e_j^n est un sous-espace de X

b) En posant $\mathring{e}_j^n = e_j^n \cap A$, pour $j \neq j'$

$$(e_j^n - \mathring{e}_j^n) \cap (e_{j'}^n - \mathring{e}_{j'}^n) = \emptyset$$

c) $X = A \cup (\bigcup_j e_j^n)$

d) Pour tout j, il existe une application :

$$f_j : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (e_j^n, \mathring{e}_j^n)$$

telle que $f_j(D^n) = e_j^n$ et que

$$f_j \mid (D^n - S^{n-1}) : (D^n - S^{n-1}) \longrightarrow (e_j^n - \mathring{e}_j^n)$$

soit un homéomorphisme.

On note : $X = A \cup_{f_1} D^n \cup_{f_2} D^n \cup \dots \cup_{f_j} D^n \cup \dots$

6.23. Définition (complexes cellulaire).

Un complexe cellulaire est un espace topologique X muni d'une suite de sous-espaces (X_n) (squelettes de X) qui vérifie :

a) X_o est un ensemble de points

b) pour $n \geq 1$ X_n est obtenu à partir de X_{n-1} par adjonction de n-cellules (par les applications f_j^n)

c) $X = \bigcup_n X_n$

6.24. Définitions.

a) Un sous-complexe Y d'un complexe cellulaire X est un sous-espace $Y \subset X$, qui est un complexe cellulaire et tel que :

$$Y_n = Y \cap X_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

b) On appelle décomposition cellulaire d'un espace topologique X la donnée d'un structure de complexe cellulaire pour X.

c) Un complexe cellulaire est dit fini si X_o est fini et si

$$\left\{ e_j^n \mid j \in J_n, \ n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{est fini.}$$

Dans ce cas, il existe n tel que $X = X_n$ $(n = \dim X)$.

Remarque : $\left\{ e_j^n - \overset{\circ}{e}{}_j^n \mid j \in J_n, \ n \in \mathbb{N} \right\}$ est une partition de X.

6.25. Exemples de décompositions cellulaires.

<u>Exemple 1</u> : S^n

$X = S^n, \quad n \geq 1$.

Il suffit de prendre : $X_o = \ldots = X_{n-1} = x_o$ $\quad$ (x_o : point de S^n)

$$X_n = \{x_o\} \cup_{f_o} D^n$$

où $\quad f_o : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (D^n, \{x_o\})$

<u>Exemple 2</u> : D^n

Il est, je pense, évident à chacun que : $D_n = S^{n-1} \cup_{Id} D^n$. On obtient donc

$$D^n = \{x_o\} \cup_{f_o} D^{n-1} \cup_{Id} D^n.$$

<u>Exemple 3</u> : $P_n(\mathbb{R})$.

$P_n(\mathbb{R})$ est définie par le quotient de S^n par la relation antipodale R. Soit p_n la projection canonique

$$p_n : S^n \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$$

$n = 1 \qquad P_1(\mathbb{R}) = \{x_o\} \cup_{p_o} D^1$

$n > 1 \qquad P_n(\mathbb{R}) = P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{p_{n-1}} D^n$

Ces relations sont évidentes : la première identifie le bord S^o de D^1 à x_o et rappelle la relation connue : $P_1(\mathbb{R}) \approx S^1$; la seconde consiste à faire l'identification antipodale pour les points de S^n non situés sur son équateur d'abo

.../...

(ce qui donne un hémisphère ouvert donc homéomorphe à $\text{int}\ D^n$) puis l'identification sur l'équateur.

On obtient donc par induction, la décomposition :

$$P_n(\mathbb{R}) = \{x_o\} \cup_{p_o} D^1 \cup_{p_1} D^2 \cup \dots \cup_{p_{n-1}} D^n.$$

<u>Exemple 4</u> : $P_n(\mathbb{C})$

On définit de même $P_n(\mathbb{C})$ comme le quotient de $\sum^n$, sphère unité de l'espace $\mathbb{C}^{n+1}$ (muni de la norme, $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2$, où $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$) par la relation R :

$$z\ R\ z' \iff \exists\ \theta \in [0, 2\pi] \qquad z = e^{i\theta} z'$$

(De même que $P_n(\mathbb{R})$ peut aussi être défini comme l'ensemble des directions de droites de $\mathbb{R}^n$ muni d'une topologie convenable, $P_n(\mathbb{C})$ peut être considéré comme l'espace des directions de droites complexes muni d'une topologie).

Soit p_n la projection canonique

$$p_n : \sum^n \longrightarrow P_n(\mathbb{C}).$$

Or $\sum^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$.

En écrivant $\qquad z_j = u_j + iv_j$

$$\sum^n = \{(u_1, v_1, \dots, u_{n+1}, v_{n+1}) \mid |u_1|^2 + |v_1|^2 + \dots + |v_{n+1}|^2 = 1\}$$

Donc $\sum^n$ est homéomorphe à S^{2n+1}.

De même la boule unité B^n de $\mathbb{C}^n$ est homéomorphe à D^{2n}.

Après composition par l'homéomorphisme, on pose,

$$p'_n : S^{2n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{C}).$$

On a comme précédemment

$n = 0 \qquad P_o(\mathbb{C}) = \{x_o\}$

$n \geq 1 \qquad P_n(\mathbb{C}) = P_{n-1}(\mathbb{C}) \cup_{p'_{n-1}} D^{2n}$

Car on définit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "P'_{n-1}"'] & D^{2n} \arrow[d, "\phi_n"] \\ P_{n-1}(\mathbb{C}) \arrow[r, "i"] & P_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

où $i\,[(z_1,\dots,z_n)] = [(0, z_1,\dots,z_n)]$

$\phi_n(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n) = [(\sqrt{1-|z|^2}, u_1+iv_1,\dots,u_n+iv_n)]$

(avec $|z|^2 = |u_1+iv_1|^2 + \dots + |u_n+iv_n|^2$)

Alors $\phi_n : (D^{2n}, S^{2n-1}) \longrightarrow (P_n(\mathbb{C}), P_{n-1}(\mathbb{C}))$ vérifie :

$$\phi_n \,|(D^{2n} - S^{2n-1}) : (D^{2n} - S^{2n-1}) \longrightarrow P_n(\mathbb{C}) - P_{n-1}(\mathbb{C})$$

est un homéomorphisme (dont le lecteur trouvera la réciproque en remarquant qu'il existe pour tout élément de $P_n(\mathbb{C}) - P_{n-1}(\mathbb{C})$ un représentant dont la première coordonnée est réelle strictement positive).

On a donc défini par induction la décomposition :

$$P^n(\mathbb{C}) = \{x_o\} \cup_{p'_o} D^2 \cup \dots \cup_{p'_{n-1}} D^{2n}$$

<u>Exemple 5</u> : Complexe simplicial.

La suite des squelettes $K^{(i)}$ de K nous donne celle des squelettes $|K^{(i)}|$ pour la décomposition cellulaire. En effet on obtient $K^{(i)}$ à partir de $K^{(i-1)}$ en ajoutant les i-simplexes de K qui sont homéomorphes à D^i.

Exemple 6 : Variété orientable de dimension 2.

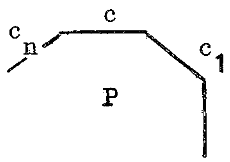
Nous avons vu au chapitre III qu'on les obtenait par identification sur les polygones à 4n arêtes ; et en ôtant l'intérieur de P, on obtient un bouquet B_{2n} de 2n cercles.

a_1 b_1 b_n a_1 P b_1

Alors la décomposition est la suivante :

$$M^2 = \{x_o\} \cup_{f_1} D^1 \cup \dots \cup_{f_{2n}} D^1 \cup_f D^2$$

où f_i identifie les deux points de S_o et f applique S^1 sur le bord de P.



<u>Exemple 7</u> : Variété non orientable de dimension 2.

C'est cette fois par identification sur un polygône P à $2n$ arêtes qu'on obtient ces variétés. Mais alors on ôte de même l'intérieur de P et on obtient un bouquet B_n de n cercles, donc la décomposition :

$$M^2 = \{x_0\} \cup_{f_1} D^1 \cup \ldots \cup_{f_n} D^1 \cup_f D^2$$

où f_i, f ont la même signification que dans l'exemple 6.

<u>6.26. Théorème.</u>

Si X est un complexe cellulaire de dimension finie. Alors :

$$H_q(X_n, X_{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\operatorname{card} J_n} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

(on rappelle qu'on a noté J_n l'ensemble d'indice des n-cellules)

Preuve :

Soit $p_j \in \operatorname{int} e_j^n$, $j \in J_n$ et $P = \{p_j \mid j \in J_n\}$. On voit que X_{n-1} est un rétract de déformation fort de $(X_n - P)$. L'inclusion : $X_{n-1} \subset X_n - P \subset X_n$ nous permet d'associer une suite exacte (cf. 4.65) donc une suite exacte d'homologie.

$$\longrightarrow H_q(X_n - P, X_{n-1}) = 0 \longrightarrow H_q(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_q(X_n, X_n - P) \longrightarrow$$
$$H_{q-1}(X_n - P, X_{n-1}) = 0$$

donc

$$H_q(X_n, X_{n-1}) \approx H_q(X_n, X_n - P).$$

Soit B_j, $j \in J_n$ une boule de centre p_j, homéomorphe à D^n et telle que $B_j \subset (e_j^n - \mathring{e}_j^n)$ et soit $U = X_n - \bigcup_{J_n} B_j$.

On peut appliquer le théorème d'excision (5.78) car $\overline{U} \subset \operatorname{int}(X_n - P)$ et

$$H_q(X_n, X_n - P) = H_q(X_n - U, X_n - P - U)$$
$$= H_q(\bigcup_{J_n} B_j, \bigcup_{J_n} (B_j - p_j)).$$

Or cette union est disjointe et d'après 5.62.

$$H_q(X_n, X_n - P) \approx \bigoplus_{j \in J_n} H_q(B_j, B_j - p_j)$$

Or d'après 5.23 (et une application facile du lemme des cinq)

$$H_q(B_j, B_j - p_j) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

ce qui achève la preuve.

6.27. Corollaire.

Pour un complexe cellulaire X de dimension finie, et un groupe G :

$$H_q(X_n, X_{n-1} \quad G) \approx \begin{cases} G^{\operatorname{card} J_n} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

$$H^q(X_n, X_{n-1} \; ; G) \approx \begin{cases} G^{\operatorname{card} J_n} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

Preuve :

On applique la formule des coefficients universels 4.68 et 4.72

$$H_q(X_n, X_{n-1} \; ; G) \approx H_q(X_n, X_{n-1}) \oplus G$$

$$H^q(X_n, X_{n-1} \; ; G) \approx \operatorname{Hom}(H_q(X_n, X_{n-1}), G)$$

car $H(X_n, X_{n-1})$ est libre.

6.28. Lemme.

Pour un complexe cellulaire X de dimension finie on a :

$$H_q(X_n \; ; G) = 0 \qquad \text{pour tout } q > n$$

$$H^q(X_n \; ; G) = 0$$

Preuve :

$n = 0$ Le résultat est vrai.

$n > 0$ Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. La suite d'homologie du couple excisif (X_n, X_{n-1}) donne :

$$\longrightarrow H_q(X_{n-1}) \longrightarrow H_q(X_n) \longrightarrow H_q(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow$$

Or par induction si $q > n$ $H_q(X_{n-1}) = 0$ et d'après 6.26 $H_q(X_n, X_{n-1}) = 0$.

Donc $H_q(X_n) = 0$.

On agit de même avec coefficients.

6.29. Lemme.

Pour un complexe cellulaire X de dimension finie l'homomorphisme naturel (induit par $X_n \subset X_{n+1}$)

$$i_* : H_q(X_n) \longrightarrow H_q(X_{n+1})$$

est un isomorphisme pour tout $q < n$.

Le même résultat est vrai pour :

$$i_* : H_q(X_n ; G) \longrightarrow H_q(X_{n+1} ; G)$$

$$i^* : H^q(X_{n+1} ; G) \longrightarrow H^q(X_n ; G).$$

<u>Preuve</u> :

Considérons la suite de Mayer-Victoris du couple (X_n, X_{n+1})

$$\rightarrow H_{q+1}(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow H_q(X_n) \longrightarrow H_q(X_{n+1}) \longrightarrow H_q(X_{n+1}, X_n).$$

Les deux groupes extrêmes sont nuls d'après 6.26 car

$$q \neq n+1 \quad \text{et} \quad q+1 \neq n+1.$$

6.30. <u>Corollaire</u>.

L'inclusion $i : X_{q+1} \subset X$ induit un isomorphisme

$$i_* : H_q(X_{q+1} ; G) \approx H_q(X, G)$$

$$i^* : H^q(X_{q+1} ; G) \approx H^q(X ; G)$$

<u>Preuve</u> :

D'après 6.29. :

$$H_q(X_{q+1}) \approx H_q(X_{q+2}) \approx \dots \approx H_q(X_{\dim X}) = H_q(X).$$

Nous avons donc les éléments nécessaires pour établir une récurrence et calculer ainsi par induction l'homologie des complexes cellulaires ... tous sauf le moyen pratique de calculer $H_{n-1}(X_n$ et $H_n(X_n)$.

Ce problème sera réglé si nous connaissons l'effet sur l'homologie de l'adjonction d'une n-cellule.

6.31. Théorème.

Soit un espace topologique X et un sous-espace fermé A tel que

$$X = A \cup_f D^n$$

Alors
$$\tilde{H}_{n-1}(X) \approx \tilde{H}_{n-1}(A) / f_* [H_{n-1}(S^{n-1})]$$

$$\tilde{H}_n(X) \approx \tilde{H}_n(A) \oplus \operatorname{Ker}[f_* | \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})]$$

<u>Preuve</u> :

L'application $f : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$ induit un homomorphisme des suites exactes d'homologie réduite

$$\begin{tikzcd}
0 = H_{n+1}(X,A) \arrow[r] & \tilde{H}_n(A) \arrow[r] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r, "d_*"] & \tilde{H}_{n-1}(A) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(X) \arrow[r] & H_{n-1}(X,A) \\
0 = H_{n+1}(D^n,S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \tilde{H}_n(S^{n-1}) = 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \tilde{H}_n(D^n) = 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & H_n(D^n,S^{n-1}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[u, "f_*"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u, "f_*"] & \tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0 \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

$f_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X, A)$ est un isomorphisme car $f \mid (D^n - S^{n-1})$ est un homéomorphisme.

<u>Remarque</u> :

f_* est un isomorphisme

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X, A)$$

car $f \mid (D^n - S^{n-1})$ est un homéomorphisme.

En effet, soit $B = \left\{x \in D^n \mid |x| > \frac{1}{2}\right\}$ et $C = \left\{x \in D^n \mid |x| > \frac{3}{4}\right\}$.

D'après le lemme des cinq

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_n(D^n, B)$$

car B est un voisinage de S^{n-1} est rétract de déformation (on dit parfois un collier de S^{n-1}).

Par excision de C $(\overline{C} \subset B)$

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_n(D^n, B) \approx H_n(D^n - C, B - C).$$

De même

$$H_n(X, A) \approx H_n(X, f(B)) \approx H_n(X - f(C), f(B) - f(C)).$$

Or f est un homéomorphisme sur $(D^n - C)$

$$f \mid D^n - C : (D^n - C, B - C) \longrightarrow (X-f(C), f(B) - f(C))$$

donc

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_n(D^n - C, B-C) \approx H_n(X - f(C), f(B) - f(C)) \approx H_n(X, A)$$

$$\tilde{H}_{n-1}(X) = \operatorname{coker} d_* = \tilde{H}_{n-1}(A)/_{\operatorname{Im} d_*} \approx H_{n-1}(A)/_{f_* \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})}$$

en composant par les deux isomorphismes.

D'autre part on extrait la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{n-1}(A)$$

$\operatorname{Ker} f_* \subset \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$ est libre, donc la suite

$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \operatorname{Ker} f_* \longrightarrow 0$ est scindable ce qui donne le second résultat.

6.32. Corollaire.

Si $X = A \cup_{f_1} D^n \cup \ldots \cup_{f_q} D^n$.

Alors

$$\tilde{H}_n(X) \approx H_n(A) \oplus \operatorname{Ker} f_{1*} \mid \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} f_{q*} \mid \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$$

Preuve : Evidente.

6.33. Corollaire.

Soit B_n le bouquet de n cercles attachés en x_0 $H_1(B_n) \approx \mathbb{Z}^n$.

<u>Preuve</u> :

$$B_n = \{x_o\} \cup_{f_1} D' \cup \dots \cup_{f_n} D' \qquad \text{où} \qquad f_i : S^o \longrightarrow \{x_o\}$$

$$f_{i*} \mid \tilde{H}_o(S^o) : \tilde{H}_o(S^o) \approx \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}_o(\{x_o\}) = 0$$

donc
$$\operatorname{Ker} f_{i*} \mid \tilde{H}_o(S^o) \approx \mathbb{Z}$$

et le résultat suit 6.32.

6.34. Applications.

Nous allons calculer l'homologie des exemples 6.25.

a) Variété orientable de dimension 2.

$$M^2 = \{x_o\} \cup_{f_1} D^1 \cup \dots \cup_{f_{2n}} D^1 \cup_f D^2$$

où
$$M^2 = B_{2n} \cup_f D^2$$

$$f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(B_{2n})$$

Nous savons qu'un générateur de $H_1(S^1)$ est le simplexe σ qui à Δ^1 associe un "tour de cercle" $(\theta \longrightarrow e^{2\pi i\theta})$ donc

$$f_*(\sigma) = a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + = 0$$

et
$$\operatorname{Im} f_* \mid H_1(S^1) = 0 \qquad \operatorname{Ker} f_* \mid H_1(S^1) = H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} H_o(M^2) \approx \mathbb{Z} \\ H_1(M^2) \approx \mathbb{Z}^{2n} \\ H_2(M^2) \approx \mathbb{Z} \\ H_q(M^2) = 0 \qquad q \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

b) Variété non orientable de dimension 2.

On a de même
$$M^2 = B_n \cup_f D^2$$

$$f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(B_n)$$

$$f_*(\sigma) = 2(c_1 + \dots + c_n) \qquad (\sigma \text{ défini ci-dessus}).$$

Soit la base de $H_1(B^n) \approx \mathbb{Z}^n$: $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_1 + \dots + c_n)$.

Alors

$$H_1(B_n)/_{f_*|H_1(S^1)} = c_1\,\mathbb{Z} + \dots + c_{n-1}\,\mathbb{Z} + (c_1 + \dots + c_n)\,\mathbb{Z}/_{2(c_1+\dots+c_n)\mathbb{Z}}$$

$$\approx \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$$

et

$$\operatorname{Ker} f_* \mid H_1(S^1) = 0$$

$$\begin{cases} H_o(M^2) \approx \mathbb{Z} \\ H_1(M^2) \approx \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \\ H_q(M^2) \approx 0 \qquad q \neq 0,\ 1 \end{cases}$$

c) $P_n(R)$.

$$H_q(P_n(\mathbb{R})) = 0 \qquad q > n, \quad q < 0$$

$$H_q(P_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & 0 \leq q \leq n \quad q \text{ pair} \\ \mathbb{Z} & q = n \quad n \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & 0 < q < n \quad q \text{ impair.} \end{cases}$$

Par induction. C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons que

$$H_q(P_{2n}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & 0 < q < 2n \quad q \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_q(P_{2n-1}(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & 0 < q < 2n-2 \quad q \text{ impair} \\ \mathbb{Z} & q = 2n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$P_{2n+1}(\mathbb{R}) = P_{2n}(\mathbb{R}) \cup_{p_{2n}} D^{2n+1}.$$

Or

$$p_{2n\,*} : H_{2n}(S^{2n}) \approx \mathbb{Z} \longrightarrow H_{2n}(P_{2n}(\mathbb{R})) = 0$$

Donc

$$H_{2n}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \approx H_{2n}(P_{2n}(\mathbb{R})) = 0$$

$$H_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \approx \operatorname{Ker} p_{2n\,*} \approx \mathbb{Z}.$$

Ce qui donne le passage de (2n) à (2n+1)

$$H_q(P_{2n+1}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & 0 < q < 2n \quad q \text{ impair} \\ \mathbb{Z} & q = 2n+1 \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Il reste à voir ce qu'est l'homomorphisme :

$$P_{2n+1\,*} : H_{2n+1}(S^{2n+1}) \approx \mathbb{Z} \longrightarrow H_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \approx \mathbb{Z}$$

C'est la multiplication par 2, ce qui nous donne

$$H_{2n+1}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) \approx H_{2n+1}\left[P_{2n+1}(\mathbb{R})\right] / P_*\left[H_{2n+1}(S^{2n+1})\right] \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_{2n+2}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) \approx \operatorname{Ker} P_{2n+1\,*} = 0$$

Il ne nous reste donc plus qu'à justifier l'affirmation précédente au sujet de $p_{2n+1\,*}$, et pour cela nous allons employer une méthode qui pourra être reconduite chaque fois qu'on cherchera à calculer f_* pour employer 6.31.

$$p_{n+1} : S^{n+1} \longrightarrow P_{n+1}(\mathbb{R})$$

$S^n = E_+^n \cup E_-^n$ (cf. 6.14) et $P_{n+1}(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R}) \cup_{p_n} D^{n+1}$.

Nous allons considérer successivement ces restrictions

$$p_{n+1} : (E_+^{n+1}, S^n) \longrightarrow (P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R}))$$
$$p_{n+1} : (E_-^{n+1}, S^n) \longrightarrow (P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R}))$$

On définit les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(E_+^{n+1}, S^n) \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & (P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R})) \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\
(E_+^{n+1}/S^n, pt) \arrow[r, "\bar{p}_{n+1}", "\sim"'] & (P_{n+1}(\mathbb{R})/P_n(\mathbb{R}), pt) \\
(S^{n+1}, pt) \arrow[r, "Id"] \arrow[u, "\bar{f}^+", "\wr"'] & (S^{n+1}, pt) \arrow[u, "\bar{f}'", "\wr"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(E_-^{n+1}, B^n) \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & (P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R})) \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\
(E_-^{n+1}/S^n, pt) \arrow[r, "\bar{p}_{n+1}", "\sim"'] & (P_{n+1}(\mathbb{R})/P_n(\mathbb{R}), pt) \\
(S^{n+1}, pt) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[u, "\bar{f}^-", "\wr"'] & (S^{n+1}, pt) \arrow[u, "\bar{f}'", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Le passage au quotient est clair dans les deux cas $\bar{f}^+$, $\bar{f}^-$, $\bar{f}'$ s'obtiennent à partir de f^+, f^-, f' définis naturellement pour que : $E_+^{n+1} = S_n \cup_{f^+} D^{n+1}$, $E_-^{n+1} = S_n \cup_{f^-} D^{n+1}$ $P_{n+1}(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R}) \cup_{f'} D^{n+1}$ $(f' = p_n)$ par compactification.

Il est clair, je pense, que ces trois applications sont des homéomorphismes par le fait que f^+, f^-, f' soient des homéomorphismes relatifs (i.e. leur restriction à $D^{n+1} - S^n$ est un homéomorphisme).

On déduit donc les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(E_+^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{p_{n+1*}} & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R})) \\
\downarrow\wr & & \wr\downarrow \\
H_{n+1}(E_+^{n+1}/S^n, pt) & \xrightarrow[\sim]{\bar{p}_{n+1*}} & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R})/P_n(\mathbb{R}), pt) \\
\bar{f}_*^+ \uparrow\wr & & \bar{f}_*' \uparrow\wr \\
H_{n+1}(S^{n+1}, pt) & \xrightarrow{Id} & H_{n+1}(S^{n+1}, pt)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{P_{n+1*}} & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R})) \\
\downarrow\wr & & \wr\downarrow \\
H_{n+1}(E_-^{n+1}/S^n, pt) & \xrightarrow{P_{n+1*}} & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R})/P_n(\mathbb{R}); pt) \\
\bar{f}_*^- \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\
H_{n+1}(\delta^{n+1}, pt) & \xrightarrow{\lambda_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, pt)
\end{array}$$

Il reste cependant à justifier la commutativité dans les carrés inférieurs.

Or à $p_{n+1} \mid (E_+^{n+1} - S^n)$ et $p_{n+1} \mid (E_-^{n+1} - S^n)$ correspondent (par f^+, f^-, f') respectivement $Id_{S^{n+1}}$ et $\lambda_{S^{n+1}}$ (application antipodale) : $S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ (par construction de $P_{n+1}(\mathbb{R})$). Il suffit alors de completer ces applications dans le compactifié de D^{n+1}.

Choisissons un générateur 1 de $H_{n+1}(S^{n+1}, pt)$ $(\approx \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}))$. Il lui correspond donc par $\bar{f}_*^+$, $\bar{f}_*'$, $\bar{f}_*^-$ des générateurs $\bar{e}^+$, e', $\bar{e}^-$ dans

$$H_{n+1}(E_+^{n+1}/S^n, pt) \quad H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R})/P_n(\mathbb{R}), pt), \quad H_{n+1}(E_-^{n+1}/S^n, pt).$$

A chacun de ces générateurs correspond par les flèches un générateur : e^+, e', e^- dans $H_{n+1}(E_+^{n+1}, S^n)$, $H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R}))$ $H_{n+1}(E_-^{n+1}, S^n)$ (car $\bar{e}^+$ par exemple est une somme de simplexes $\bar{\sigma}$ de E_+^{n+1}/S^n à chacun desquels correspond un simplexe $\bar{\sigma}$ de E_+^{n+1}. Le bord de e^+, somme des σ, est dans S^n donc c'est un cycle

.../...

de $H_{n+1}(E_+^{n+1}, S^n)$; c'en est un générateur (sinon $\overline{e}^+$ n'en serait pas un).

L'application p_{n+1*} dans les deux cas est caractérisée par un entier a^+ ou a^- tel que

$$p_{n+1*}(e^+) = a^+ e' \quad ; \quad p_{n+1*}(e^-) = a^- e'.$$

Les seconds diagrammes montrent clairement que a^+ et a^- sont respectivement les degrés de Id et λ

$$a^+ = 1 \quad ; \quad a^- = (-1)^{n+2}.$$

Enfin, il nous reste à montrer qu'un générateur de $\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$ est $(e^+ + e^-)$.

Il est facile d'imaginer une triangulation de S^{n+1} symétrique par rapport à l'hyperplan $(x_n = 0)$. (Il suffit de prendre deux $(n+2)$ simplexes S_1 et S_2 (simpliciaux) et de les coller sur une face S^o).

Soit $\left\{\sum n_\sigma \sigma\right\} = e^+$ la génération de $H_{n+1}(E_+^{n+1}, S^n)$ ($\sum n_\sigma \sigma$ est la somme des faces non collées de S_1). Alors

$$d \sum n_\sigma \sigma \in H_n(S^n).$$

Soit γ la symétrie par rapport à l'hyperplan $(x_n = 0)$. Il est clair, je pense, que $\left\{\sum n_\sigma \gamma(\sigma)\right\} = e^-$ et que

$$d(\sum n_\sigma \gamma(\sigma)) = + d(\sum n_\sigma \sigma)$$

(sinon on écrit plus précisement : $e^+ = \left\{\sum_1^{n+3} (-1)^i S^i\right\}$ où (S^i) sont les faces de S_1).

Donc $e^+ + e^-$ a pour représentant $\sum n_\sigma (\sigma + \gamma\sigma)$ qui est un cycle de $H_{n+1}(S^{n+1})$ car

$$d \sum n_\sigma (\sigma - \gamma\sigma) = d \sum n_\sigma \sigma - d \sum n_\sigma \sigma = 0.$$

De plus c'en est un générateur (évident). Donc

$P_{n+1*} : H_{n+1}(S^{n+1}) \longrightarrow H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R}))$ est caractérisé par la donnée

$$P_{n+1*}(e^+ + e^-) = [1 + (-1)^{n+2}]\, e'.$$

Ou par isomorphisme canonique :

$$P_{n+1*} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$P_{n+1*}(1) = 1 + (-1)^{n+2}.$$

Ceci nous redonne le résultat évident : $P_{2n*}(1) = 0$ et celui, beaucoup moins évident que nous cherchions :

$$P_{2n+1\,*}(1) = 2.$$

Le lecteur démontrera à titre d'exercice le résultat suivant. Le procédé est encore le même, mais les calculs sont très simples. Enfin, tout ceci est donné dans le cadre de l'homologie, mais le lecteur pourra vérifier que la formule des coefficients universels et les théorèmes précédents lui permettent de calculer de même la cohomologie.

d) $P_n(\mathbb{C})$.

$$H_q(P_n(\mathbb{C})) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq q \leq 2n \quad q \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>HOMOLOGIE et COHOMOLOGIE</u>.

6.35. <u>Définition</u> (Variété).

Une variété topologique V de dimension n est un espace topologique tel que pour tout $x \in V$ il existe un voisinage V_x et une application φ_x qui est un homéomorphisme de V_x, soit avec $\mathbb{R}^n$, soit avec $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

L'ensemble $dV = \{x \in V \mid \varphi_x : V_x \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n_+\}$ est appelé bord de V.

Nous terminerons ce cours en donnant quelques importants théorèmes sans démonstrations.

6.36. <u>Théorème</u>.

Si X et Y sont deux complexes cellulaires, et si la cohomologie de X est sans torsion pour tout degré.

Alors

$$H^n(X \times Y \; ; \; G) \approx \bigoplus_{i+j=n} \left[H^i(X \; ; \; G) \oplus H^j(Y \; ; \; G)\right]$$

6.37. Définition (orientation).

a) Une orientation d'une variété V au point $x \in V$ est le choix d'un générateur de $H_n(V, V - \{x\}) \approx \mathbb{Z}$.

b) Une orientation de la variété V au voisinage de $x \in V$ est le choix d'un générateur de $H_n(V, V - V_x)$

(Il est clair, je pense que cette orientation ne dépend pas du choix de V_x pourvu qu'il soit homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou à $\mathbb{R}^n_+$).

c) On dit que la variété V est orientable, s'il existe un choix compatible d'orientation de chaque point.

i.e. Si $\mu(x)$ désigne cette orientation en x, et si x et y sont dans la même composante par arcs, quel que soit le chemin α de x à y et le recouvrement de ses points par des V_z, l'orientation induite en y par $\mu(x)$ est $\mu(y)$ (car $\mu(x)$ induit une orientation au voisinage de x).

6.38. Théorème.

Si V est orientable et compacte de dimension n, il existe une unique classe $\mu_V \in H_n(V)$ (classe fondamentale de V) telle qu'en tout point $x \in V$, l'inclusion $i : V \subset (V, V - \{x\})$ induise une orientation compatible $\mu(x) = i_{*n}(\mu_V)$.

6.39. Théorème de dualité de Poincaré.

a) Si V est une variété sans bord orientable et compacte de dimension n, il existe un isomorphisme :

$$H_q(V \; ; \; G) \approx H^{n-q}(V \; ; \; G)$$

b) Si V est une variété orientable et compacte de dimension n, on a les isomorphismes

$$H_q(V, dV \; ; \; G) \approx H^{n-q}(V \; ; \; G)$$

$$H_q(V \; ; \; G) \approx H^{n-q}(V, dV \; ; \; G).$$

-::-::-