PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE

D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

ORSAY

Année 1969/70

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE

D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

ORSAY

Année 1969/70

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

Table des Matières

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Exposé n° 1 du 3 novembre 1969.

-:-:-:-:-:-:-

STRUCTURE DES ANNEAUX NOETHERIENS A GAUCHE D'EXPOSANT DEUX.

par L. LESIEUR

-:-:-:-:-:-:-

1. Un anneau noethérien, supposé commutatif et unitaire est un anneau qui vérifie la condition de chaîne ascendants finiepour les idéaux ; toute suite d'idéaux strictement croissante est nécessairement finie.

Exemple : $K[X_1, \ldots, X_n]$ (Théorème de la base finie de Hilbert).

Dans le cas général abstrait, la théorie des idéaux dans ces anneaux, et en particulier celle des idéaux primaires, a été développée par E. NOETHER, d'où leur nom. Dans le cas d'un anneau non commutatif, je dirai noethérien pour noethérien à gauche, c'est-à-dire que l'anneau vérifie la condition de chaîne finie pour les idéaux à gauche. On pourrait tout aussi bien supposer l'anneau noethérien à droite pour obtenir les résultats symétriques : c'est ce qu'on fait en général dans la littérature anglo-américaine. Dans le cas non commutatif, la théorie des idéaux primaire s n'est plus suffisante comme dans le cas commutatif, et diverses généralisations ont été données pour rendre compte de cette situation plus complexe : idéaux tertiaires (Lesieur et Croisot), idéaux isotypiques (Matlis, Gabriel). Mais ce n'est pas mon sujet d'aujourd'hui où je voudrais exposer comment on peut obtenir les anneaux noethériens les plus généraux à partir d'anneaux noethériens particuliers : les anneaux noethériens semi-premiers.

2. Anneaux noethériens semi-premiers.

L'anneau A est dit semi-premier si l'on a :

$aAa = 0 \implies a = 0$

Il est premier si l'on a :

$aAb = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$

Dans le cas commutatif, ces notions se réduisent respectivement à celles d'anneau réduit ($a^2 = 0 \implies a = 0$) et d'anneau intègre, c'est-à-dire sans diviseurs de zéro non nuls ($ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$).

Ils sont bien connus, même dans le cas non commutatif ; GOLDIE, 1960, semi-prime rings with maximum condition ; LESIEUR et CROISOT (1959) : Anneaux noethériens à gauche premiers. On sait en particulier que tout anneau noethérien semi-premier possède un anneau de fractions semi-simple (isomorphe à un anneau composé direct d'un nombre fini d'anneaux de matrices carrées sur des corps) ; tout anneau noethérien premier possède un anneau de fractions simple (isomorphe à un anneau de matrices carrées sur un corps). C'est le théorème connu de Goldie. Dans le cas commutatif, ce n'est pas autre chose que l'existence du corps des fractions (ou corps des quotients) pour le cas intègre ; dans le cas non commutatif, c'est un résultat beaucoup plus profond car il assure à la fois l'existence de l'anneau de fractions, ce qui n'a pas toujours lieu pour un anneau quelconque, et il en donne la nature. Il s'agit ici d'un anneau de fractions F au sens classique, c'est-à-dire qui vérifie les propriétés suivantes :

1°) L'anneau A est plongé dans F.

2°) Tout élément régulier de A est inversible dans F.

3°) Tout élément $\xi \in F$ se met sous la forme

$$\xi = c^{-1}a \quad (c, \; a \in A, \; c \text{ régulier}).$$

J'appelle régulier un élément qui n'est ni diviseur de zéro à droite ($xc = 0 \implies x = 0$), ni diviseur de zéro à gauche ($cx = 0 \implies x = 0$).

Je reviendrai plus loin sur certaines propriétés des anneaux noethériens semi-premiers. Je voudrais aborder maintenant le passage des anneaux noethériens semi-premiers aux anneaux noethériens les plus généraux. L'une des notions nécessaires est la notion connue de radical.

3. Radical d'un anneau noethérien.

Si l'anneau A est commutatif, son radical (on dit aussi racine si l'on ne veut pas confondre avec d'autres notions de radical comme celle de radical de Jacobson) est l'ensemble des éléments nilpotents (a est nilpotent s'il existe un entier n tel que $a^n = 0$). C'est un idéal $\mathcal{R}$ de A qui vérifie $\mathcal{R}^m = 0$ pour un certain entier m lorsque l'anneau est noethérien. Si m = 1 on a $\mathcal{R} = 0$, l'anneau est réduit et réciproquement, un anneau réduit est un anneau de radical nul. Lorsque $m \neq 1$, on suppose $\mathcal{R}^{m-1} \neq 0$ en choisissant m minimum ; m s'appelle l'exposant de l'anneau A. Dans tous les cas, l'anneau quotient $A/\mathcal{R}$ est un anneau réduit qui sera désigné par K.

Si l'anneau A n'est pas commutatif, son radical est le plus grand idéal bilatère nilpotent. Il existe donc un entier minimum positif m tel que $\mathcal{R}^m = 0$; on l'appelle l'exposant de A et l'anneau quotient $A/\mathcal{R}$ est un anneau noethérien semi-premier qui sera désigné par K.

En résumé, nous avons associé à un anneau noethérien quelconque A un anneau noethérien semi-premier K qui est l'anneau quotient $A/\mathcal{R}$ de A par le radical de A. C'est à partir de $\mathcal{R}$ et de cet anneau noethérien semi-premier K que nous voulons reconstruire l'anneau A lui-même.

4. Structure d'un anneau noethérien d'exposant 2.

Si l'anneau A est d'exposant 1, on a $\mathcal{R} = 0$ et A = K est un anneau noethérien semi-premier.

Nous allons donc étudier les anneaux noethériens d'exposant égal à 2, pour lesquels on a par définition :

$$\mathcal{R} \neq 0 \ ; \qquad \mathcal{R}^2 = 0 \ ; \qquad A/\mathcal{R} = K \text{ semi-premier.}$$

L'étude du cas général pourrait se faire par récurrence sur l'exposant m ; nous ne présenterons ici que le cas m = 2.

Comme $\mathcal{R}^2 = 0$, $\mathcal{R}$ est muni d'une structure de bi-module M avec K comme anneau d'opérateurs. (On définit kx, $k \in K$, $x \in \mathcal{R}$, par le produit ax, où a est un élément quelconque de A ayant pour classe k modulo $\mathcal{R}$; on définit de même xk par le produit xa). Les idéaux de A contenus dans $\mathcal{R}$ sont les K sous-modules à gauche de M, de sorte que M vérifie la condition de chaîne ascendante pour les sous-modules à gauche ou, ce qui revient au même, M est un K-module à gauche de type fini. Nous avons donc pour commencer notre construction :

K : anneau noethérien semi-premier

M : K-bimodule de type fini à gauche.

Le passage de (K, M) à l'anneau M peut se faire par une méthode empruntée à la cohomologie des groupes. Il s'agit de trouver un anneau A qui soit une extension de M telle que l'anneau quotient de A par M soit isomirphe à l'anneau K. De tels problèmes d'extensions de groupes, ou d'anneaux, ou d'algèbres, ont été considérés par Eilenberg et Mac-Lane, Hochschild, Shukla (1961). Ils font intervenir le second groupe de cohomologie $^2(K, M)$. Je peux donner une idée de la solution dans notre problème particulier.

Pour chaque classe $k \in A/\mathcal{R}$, choisissons un représentant $u_k \in A$. Le produit $u_k\, u_{k'}$ appartient à la classe de k k' ; il est donc congru à $u_{kk'}$ modulo $\mathcal{R}$ et l'on a :

$$\boxed{\gamma_1\,(k,k') = u_{kk'} - u_k\, u_{k'} \in M}$$

La fonction γ_1 est alors une application de $K \times K$ dans M qui, en vertu de l'associativité dans A, vérifie la propriété suivante :

$$\gamma_1\,(k', k'') - \gamma_1\,(kk', k'') + \gamma_1\,(k, k', k'') - \gamma_1\,(k, k')\,k'' = 0$$

De même, en posant :

$$\boxed{\gamma_2(k, k') = u_k + u_{k'} - u_{k+k'}}$$

on définit une fonction $\gamma_2 : K{\times}K \to M$, qui en vertu de la commutativité et de l'associativité de l'addition, vérifie les propriétés suivantes :

$\gamma_2(k, k') = \gamma_2(k', k)$

$\gamma_2(k', k'') - \gamma_2(k + k', k'') + \gamma_2(k, k'+k'') - \gamma_2(k, k') = 0$

Enfin, la distributivité dans l'anneau se traduit par :

$\gamma_2(kk', kk'') - k\,\gamma_2(k', k'') = \gamma_1(k, k') + \gamma_1(k,k'') - \gamma_1(k, k'+ k'')$

$\gamma_2(k'k, k''k) - \gamma_2(k', k'')\,k = \gamma_1(k', k) + \gamma_1(k'',k) - \gamma_1(k'+ k'', k)$

De plus, on peut prendre $u_0 = 0$, ce qui donne :

$\gamma_2(k, 0) = \gamma_2(0, k') = 0$

On voit donc que le couple de fonctions $g = (\gamma_1, \gamma_2)$ constitue un 2-cocycle au sens de la définition suivante :

Définition 1.

On appelle 2-cocycle défini sur (K, M) un couple $g = (\gamma_1, \gamma_2)$ de fonctions $\gamma_1 : K\times K \to M$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$(\mathrm{I})\quad \boxed{\begin{array}{l}
k\gamma_1(k', k'') - \gamma_1(kk',k'') + \gamma_1(k, k'k'') - \gamma_1(k, k')k'' = 0 \\
\gamma_2(k',k'') - \gamma_2(k+k', k'') + \gamma_2(k,k'+k'') - \gamma_2(k,k') = 0 \\
\gamma_2(k, k') = \gamma_2(k', k) \\
\gamma_2(kk', kk'') - k\gamma_2(k', k'') = \gamma_1(k, k') + \gamma_1(k, k'') - \gamma_1(k, k'+k'') \\
\gamma_2(k'k, k''k) - \gamma_2(k', k'')k = \gamma_1(k',k) + \gamma_1(k'',k) - \gamma_1(k'+k'', k) \\
\gamma_2(k, 0) = \gamma_2(0, k') = 0
\end{array}}$$

De ces formules résulte : $\gamma_1(k, 0) = \gamma_1(0,k') = 0$

Le 2-cocycle est dit normalisé si l'on a : $\gamma_1(1, 1) = 0$

ce qui entraîne $\gamma_1(1,k') = \gamma_1(k, 1) = 0$

et peut être obtenu en choisissant $u_1 = 1$

On définit une bijection entre l'anneau A et l'ensemble produit $M \times K$ par :

$a \to (m, k)$ avec $k =$ classe de a mod $\mathcal{R} \in k$

$m = a - u_k \in M$

L'addition et la multiplication sont alors définies dans $M \times K$ par les formules :

$$\text{(II)} \quad \boxed{\begin{aligned} &(m, k) + (m', k') = (m + m' + \gamma_2(k,k'), k + k') \\ &(m,k)\ (m',k') = (mk',km' - \gamma_1(k,k'), kk') \end{aligned}}$$

L'anneau A est donc isomorphe à l'ensemble $M \times K$, où l'addition et la multiplication sont définies par les formules II et où $g = (\gamma_1, \gamma_2)$ est un 2-cocycle normalisé.

Réciproquement, prenons l'ensemble $M \times K$ et un 2-cocycle normalisé quelconque $g = (\gamma_1, \gamma_2)$. Les formules II lui donnent une structure d'anneau et cet anneau est noethérien d'exposant deux.

A quelle condition les deux anneaux obtenus par deux cocycles $g = (\gamma_1, \gamma_2)$ et $g' = (\gamma_1', \gamma_2')$ sont-ils isomorphes ?

Cela revient a changer de représentants u_k donc à poser :

$$u_k = u'_k + f(k) \qquad f(k) \in M.$$

On a alors d'après les formules de définition de $\gamma_1(k, k')$ et $\gamma_2(k, k')$:

$$\gamma_1(k, k') = \gamma_1'(k, k') - \gamma_1(k, k')$$

$$\gamma_2(k,k') = \gamma_2'(k, k') - \gamma_2(k, k')$$

avec :

$$\text{(III)} \quad \boxed{\begin{aligned} &\gamma_1(k, k') = k\ f(k') - f(kk') + f(k)k' \\ &\gamma_2(k,k') = f(k + k') - f(k) - f(k') \end{aligned}}$$

et $f(1) = 0$, $f(0) = 0$.

Les fonctions γ_1, γ_1' et γ_2, γ_2' diffèrent donc d'un 2-cobord au sens de la définition suivante :

Définition 2.

Un 2-cobord est un couple $\delta f = (\gamma_1, \gamma_2)$ d'applications $\gamma_i : K \times K \to M$

définies au moyen d'une application $f : K \to M$ telle que $f(0) = 0$ par les formules III.

Le 2-cobord est <u>normalisé</u> si l'on a $f(1) = 0$

Un 2-cobord est un 2-cocycle et les 2-cobords forment un sous-groupe additif B du groupe additif C des 2-cocycles. Le groupe quotient C/B s'appelle le second groupe de cohomologie $H^2(M, K)$.

Ainsi :

<u>Les anneaux obtenus par deux cocycles g et g' sont isomorphes si et seulement si ces deux cocycles sont congrus modulo un 2-cobord, c'est-à-dire si ils définissent un même élément $\xi \in H^2(M, K)$.</u>

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de structure d'un anneau noethérien quelconque.

<u>Théorème</u>.

<u>Tout anneau noethérien d'exposant deux est isomorphe à un anneau (K, M, ξ) obtenu de la façon suivante</u> :

K : <u>anneau noethérien semi-premier</u>.

M : <u>K bi-module non nul de type fini à gauche</u>.

ξ : <u>élément du groupe de cohomologie $H^2(M, K)$</u>.

<u>L'anneau est l'ensemble $M \times K$ muni de la structure additive et multiplicative définie par les formules (II), où (γ_1, γ_2) est un 2-cocycle normalisé représentant la classe ξ.</u>

Ce théorème est bien un théorème de structure en ce sens qu'il satisfait aux trois conditions suffisantes :

1°) Tout anneau noethérien d'exposant 2 est susceptible de la génération (K, M, ξ) indiquée par ce théorème.

2°) Quels que soient (K, M, ξ) ayant les propriétés énoncées dans le théorème, on abtient un anneau noethérien d'exposant deux. Autrement dit, les éléments (K, M, ξ) de cette génération sont quelconques.

3°) Cette génération est canonique, c'est-à-dire que les générateurs (K, M, ξ) correspondant à un même anneau sont bien déterminés : l'anneau K est isomorphe à $A/\mathcal{R}$; le module M est isomorphe à $\mathcal{R}$ considéré comme $A/\mathcal{R}$ module, et l'élément $\xi \in H^2(M, K)$ est, comme on l'a vu plus haut, un élément bien déterminé du groupe de cohomologie.

Enfin, il y a lieu de remarquer que les données (K, M) peuvent être prises arbitrairement car on a toujours l'élément $\xi = 0$ du groupe de cohomologie qui correspond au choix $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ des deux fonctions. Un certain nombre d'exemples correspondent à ce choix particulier, cf. [3], § 7, exemples 1 et 2.

Il est intéressant de regarder sur la génération du théorème de structure comment s'obtiennent des classes d'anneaux noethériens importantes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

5. Certaines classes d'anneaux noethériens (d'exposant 2).

1° Les anneaux commutatifs noethériens.

K est commutatif noethérien, donc noethérien réduit.

M est un K-module à gauche de type fini, que l'on peut considérer comme K-module à droite en posant $mk = km$ $(m \in M, k \in K)$.

Le 2-cocycle (γ_1, γ_2) qui définit ξ est tel que la fonction γ_1 soit symétrique :

$$\gamma_1(k,k') = \gamma_1(k', k).$$

2° Les anneaux artiniens.

K est artinien semi-premier, donc semi-simple d'après le théorème d'Artin-Wedderburn.

M est un K-bi-module de type fini à gauche (donc un K module à gauche semi-simple de longueur finie).

Aucune condition n'est imposée au 2-cocycle (γ_1, γ_2).

3° Les anneaux artiniens locaux.

Cf [4] où ces anneaux ont été étudiés sous le nom d'anneaux artiniens primaires et [5], où M. Hacque a introduit la notion de 2-cocycle pour remplacer les conditions un peu différentes données dans [4].

K est un corps.

M est un espace vectoriel de dimension finie à gauche sur K, et en même temps un espace vectoriel à droite sur K.

Aucune condition sur le 2-cocycle (γ_1, γ_2).

4° Les anneaux co-irréductibles noethériens.

Conditions laissées comme problème au lecteur.

etc ... (par exemple caractériser les J-anneaux ou anneaux de Johnson à idéal singulier nul)

6. Eléménts réguliers à droite dans un anneau noethérien.

Dans un anneau noethérien demi-premier K (cf § 2) les éléments réguliers à droite sont ceux qui sont réguliers à droite modulo les idéaux premiers minimaux de K (qui sont en nombre fini).

C'est un problème difficile, mais non sans espoir de solution, que de déterminer les éléments réguliers à droite d'un anneau noethérien quelconque. On sait le faire dans le cas commutatif : ce sont les éléments qui n'appartiennent pas à Ass (A), c'est-à-dire la réunion d'un nombre fini d'idéaux premiers de A. Dans le cas non commutatif, on peut conjecturer qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers $\mathcal{P}_i$ tels que les éléments réguliers à droite de l'anneau sont ceux qui sont réguliers modulo tous ces $\mathcal{P}_i$.

On dispose pour cette étude d'une condition nécessaire qui résulte d'un théorème de Djabali-Goldie : [6] et [7].

<u>Théorème</u>.(Djabali - Goldie)

<u>Tout élément régulier à droite de l'anneau noethérien A est régulier modulo $\mathcal{R}$.</u>

Dans la génération (K, M, ξ) du théorème de structure, cette propriété se traduit par la propriété suivante :

Si l'élément (m, k) est régulier à droite dans l'anneau A, k est régulier dans K.

(Il est d'ailleurs possible de donner une 3ème démonstration de ce théorème s'appuyant directement sur le théorème de structure, mais cette démonstration est assez proche de celle de Goldie). On peut aussi caractériser complètement un élément régulier à droite (m, k) au moyen de la propriété suivante de k :

Théorème.

Pour que l'élément (m, k) soit régulier à droite dans A, il faut et il suffit que k soit régulier à droite dans K et qu'il n'existe aucun élément $m \neq 0$ tel que $mk = 0$.

Mais ce n'est pas là un bon théorème car il ne résout pas la conjecture indiquée plus haut et ne donne même pas le résultat connu du cas commutatif. Il reste donc à perfectionner les conditions nécessaires et suffisantes sous une autre forme (c'est un problème auquel je m'attaque à mes rares moments de loisir). Je signale aussi d'autres problèmes ouverts qui sont reliés :

Problèmes (1) Si c est diviseur de zéro à droite dans A, λc est-il diviseur de zéro à droite dans A pour tout $\lambda \in A$ (c'est vrai dans le cas semi-premier, et aussi dans le cas commutatif).

(2) Si A est noethérien et si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux idéaux premiers de A tels que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$, un élément c régulier modulo $\mathcal{P}$ est-il régulier modulo $\mathcal{P}'$? (évident si A est commutatif puisque les éléments réguliers modulo $\mathcal{P}$ sont ceux qui n'appartiennent pas à $\mathcal{P}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDIE A.W. Semi-prime rings with maximum condition (Proc. London Math. Soc., 10 (1960) p.p. 201-220).

[2] LESIEUR L. et CROISOT R. Sur les anneaux premiers noethériens à gauche (Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 76 (1959), p.p. 161-183.

[3] LESIEUR L. Anneaux noethériens à gauche complètement primaires et anneaux co-irreductibles (Journ. für die reine und ang. Math. zum Krull 70è Geburtstag, 1969).

[4] LESIEUR L. Structure des anneaux artiniens locaux (Séminaire Alg. et théorie des nombres, Paris, 1967-68).

[5] HACQUE M. Remarques sur les anneaux artiniens locaux (Séminaire Alg. non commutative, Orsay, 1969).

[6] DJABALI M. Sur les éléments réguliers d'un anneau noethérien à gauche (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967 p. 493-495).

[7] GOLDIE A.W. The transfer ideal (Séminaire Alg. non commutative, Orsay, 1967-68, Conf. n° 19).

[8] S. EILENBERG and S. MAC LANE Cohomology theory in abstract groups I and II (Annals of Math. 48 (1947) p. 51-78 et 326-341.

[9] SHUKLA U. Cohomologie des algèbres associatives (Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t. 78, 1961, p. 163-209).

[10] HOCHSCHILD G. On the cohomology groups of an associative algebra (Annals of Maths. 46, 1945, p. 58-67).

[11] MAC LANE S. Homology (Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 114, 1967).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 2 du 17 novembre 1969

-:-:-:-:-:-:-

- ANNEAUX DE GROUPES -

par P. RIBENBOIM

d'après T. GULLIKSEN, P. RIBENBOIM et T.M. VISWANATHAN

rédigée par M. VIEL.

-:-:-:-:-:-:-:-

Introduction : Dans cet exposé, A sera un anneau commutatif unitaire dont on note l'unité "1" . G sera un groupe dont on note l'élément neutre "e" . On notera $A[G]$ l'anneau de groupe.

- Dans une première partie on examinera le radical Jacobson et le radical premier de $A[G]$ et on cherchera à déterminer quand l'anneau $A[G]$ est local.
- Puis on établira quelques théorèmes de structure de $A[G]$.
- Enfin on se posera le problème d'isomorphisme pour les anneaux de groupes.

Rappelons d'abord quelques définitions et propriétés des anneaux de groupes.

Définition : On appelle application d'augmentation de $A[G]$ et on note ε l'application suivante : $\varepsilon : A[G] \mapsto A$

$$\varepsilon(\Sigma a_g g) = \Sigma a_g$$

Cette application est un homomorphisme d'anneaux surjectifs dont le noyau est l'idéal bilatère engendré par les éléments $e-g$ (quand g parcourt G).

Si A est un corps, alors $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est un idéal maximal de $A[G]$.

<u>Propriétés</u> : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux et $\prod_{i \in I} A_i$ leur produit cartésien ; alors :

1) $(\prod_{i \in I} A_i)[G]$ est isomorphe à $\prod_{i \in I} A_i[G]$ par l'isomorphisme σ défini de la façon suivante :

$$\sigma(\sum_{g \in G} a_g g) = (\sum_{g \in G} (a_g)_i g)_{i \in I}$$ où a_g est un élément de $\prod_{i \in I} A_i$ et $(a_g)_i$ sa projection dans A_i .

2) Soient G' et G'' deux groupes abéliens ; on a l'isomorphisme $A[G' \times G''] \cong (A[G'])[G'']$ par l'application :

$$\rho(\sum_{g',g''} a_{(g',g'')}(g',g'')) = \sum_{g'' \in G''} (\sum_{g' \in G'} a_{(g',g'')} g')g''$$

Cette propriété peut être utilisée plusieurs fois pour ramener les démonstrations relatives à des groupes abéliens finis au cas de groupes cycliques finis.

3) Etant donnés $\theta : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux,

$u : G \mapsto G'$ un homomorphisme de groupes,

on peut définir un homomorphisme d'anneaux τ de $A[G] \mapsto A'[G']$ comme suit :

$$\tau(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} \theta(a_g)\ u(g) .$$

I. - Radical de Jacobson et Radical premier de $A[G]$.

Notations : Soit R un anneau ; on notera $J\mathcal{R}(R)$ son radical de Jacobson

$\mathcal{P}\mathcal{R}(R)$ son radical premier

$\overline{\mathcal{P}}$ = l'ensemble des idéaux premiers de $A[G]$

$\mathcal{P}$ = ensemble des idéaux premiers de A

$\overline{\mathcal{M}}$ = ensemble des idéaux à gauche maximaux de $A[G]$

$\mathcal{M}$ = ensemble des idéaux maximaux de A

J = ensemble des idéaux de A .

On notera "res" l'application de restriction qui a un idéal de $A[G]$ associe son intersection avec A .

Propriété : P idéal bilatère de R est premier s'il satisfait à l'une des deux propriétés équivalentes :

(1) Soient J et J' deux idéaux bilatères tels que $JJ' \subseteq P$ alors J ou J' est contenu dans P .

(2) $R-P$ est semi-multiplicative, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (a,b) \in R-P \; , \quad \exists x \in R \; , \quad axb \in R-P \; .$$

Proposition 1 : (a) $\operatorname{res}(\overline{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$

et

(b) $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{res}(\overline{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{P}$

(a) Démonstration : $*$ $\operatorname{res}\overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$

Montrons que si $\overline{P}$ est un idéal premier de $A[G]$ alors $\overline{P} \cap A$ est un idéal premier de A . Soient $a, b \in A$, $a, b \notin \overline{P}$. $\overline{P}$ étant premier il existe

$x = \sum_{g \in G} c_g g \in A[G]$ tel que $a \times b = \sum_{g \in G} (ac_g b)g$ n'appartienne pas à $\overline{P}$.
Comme $\overline{P} \supseteq P[G]$ (où $P = \overline{P} \cap A$) il existe g élément de G tel que $ac_g b$ n'appartienne pas à P (sinon $a \times b$ appartiendrait à $P[G]$. Ceci montre que P est un idéal premier de A.

<u>$* \mathcal{P} \subset \mathrm{res}(\overline{\mathcal{P}})$</u> . Soit P un idéal premier de A, et soit $S = \{ag \mid a \in A, \ a \notin P, \ g \in G\}$ S est une partie semi-multiplicative, car si ag et bh appartiennent à S, a et b n'appartenant pas à P, soit x tel que axb n'appartienne pas à P alors $(ag)(xe)(bh) = (acb)gh$ appartient à S.

De plus $P[G]$ $S = \emptyset$. L'axiome de Zorn permet d'affirmer qu'il existe un idéal bilatère $\overline{P}$ de $A[G]$ maximal parmi les idéaux vérifiant $\overline{P} \cap S = \emptyset$ et $P[G] \subseteq \overline{P}$. Montrons que cet idéal est premier. Si J et J' sont des idéaux bilatères tels que $J.J' \subseteq \overline{P}$ $J \not\subseteq \overline{P}$ et $J' \not\subseteq \overline{P}$ alors $\overline{P} \neq J+\overline{P}$ et $\overline{P} \neq J'+\overline{P}$; $\overline{P}$ étant maximal pour la propriété ci-dessus, il existe x et x' de S tel que $x \in J+\overline{P}$, $x' \in J'+\overline{P}$. Soit y de $A[G]$ tel que $xyx' \in S$ alors $x(yx') \in (J+\overline{P})(J'+\overline{P}) \subseteq J.J' + J.\overline{P} + \overline{P}.J' + \overline{P}^2 \subseteq \overline{P}$, ce qui contredit $\overline{P} \cap S = \emptyset$.
Donc $\overline{P}$ est un idéal premier.

Or $\overline{P} \cap S = \emptyset$ donc $P \supseteq \overline{P} \cap A \supseteq P[G] \cap A = P$.
Ce qui entraîne le résultat.

(b) <u>$* \mathcal{M} \subseteq \mathrm{res}(C\,\overline{\mathcal{M}})$</u> . Soit $M \in \mathcal{M}$, considérons l'idéal bilatère propre $M[G]$ de $A[G]$. Soit $\overline{M}$ idéal à gauche maximal de $A[G]$ tel que $M[G] \subseteq \overline{M}$. Alors $A \neq \overline{M} \cap A \supseteq M[G] \cap A = M$, M étant maximal, on a nécessairement $\overline{M} \cap A = M$.

$*$ <u>$\mathrm{res}(\mathcal{M}) \subseteq P$</u> . Considérons $\bar{M}$ idéal à gauche maximal de $A[G]$. Soient $a, b \in A$, $ab \in \bar{M} \cap A$ $a \notin \bar{M}$. Comme $K = A[G]/\bar{M}$ est un $A[G]$ module à gauche simple, $\alpha = a + \bar{M} \neq 0$ est un générateur de K , c'est-à-dire $A[G]a = K$. En particulier, il existe x de $A[G]$ tel que $x\alpha = 1 + \bar{M}$ d'où $xa - 1 \in \bar{M}$. Ce qui entraîne $xab - b \in \bar{M}b = b\bar{M} \subseteq \bar{M}$ et puisque $ab \in \bar{M}$ on en déduit que $b \in \bar{M}$. Ceci prouve que $\bar{M} \cap A$ est un idéal premier de A .

On peut en déduire les résultats connus par ailleurs :

<u>Corollaires</u> : $\mathcal{PR}(A[G]) \cap A = \mathcal{PR}(A)$

$J\,\mathcal{R}(A[G]) \cap A \subseteq J\mathcal{R}(A)$.

En général la seconde inclusion n'est pas une égalité. Par exemple soit A un anneau principal de valuation, $M = At$, $K = A[\frac{1}{t}]$ $G = C_\infty = \{g^n | n \in \mathbf{Z}\}$. On considère l'application suivante $\sigma : A[C_\infty] \longmapsto K = A[\frac{1}{t}]$; $\sigma|A$ est l'identité et $\sigma(g) = t$ et σ est un homomorphisme, c'est-à-dire

$\sigma(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n g^n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n t^n$; $\mathrm{Ker}\,\sigma = \bar{M}$ idéal maximal, $\bar{M} \cap A = 0$ donc $J\mathcal{R}(A[G]) \cap A = 0$ tandis que $J\mathcal{R}(A) = M$.

Ceci conduit à chercher sous quelles conditions on aura l'égalité. On sait déjà que si A est artinien on a l'égalité car le radical de Jacobson est aussi le radical premier.

<u>Définition</u> : Soit G un groupe, H un sous-groupe de G . On dira que (G, H) satisfait <u>la propriété de Burnside</u> si pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout n-uple g_1 , g_n de G , le sous-groupe H a un index fini dans le sous-groupe engendré par H $\{g_1, \ldots, g_n\}$.

Si $H = \{e\}$ on dira que G satisfait la propriété de Burnside.

Si G est un groupe abélien et si chaque élément de G a une puissance dans H alors (G, H) satisfait la propriété de Burnside.

Il est clair que les groupes qui vérifient la propriété de Burnside sont ceux pour lesquels la réponse au problème de Burnside est affirmative, c'est-à-dire G n'étant pas abélien le sous-groupe engendré par $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est fini, ce qui, on le sait, n'est pas toujours le cas.

<u>Théorème 1</u> : Soit H un sous-groupe du centre de G tel que (G, H) vérifie la propriété de Burnside. Si M est un idéal maximal à gauche de $A[G]$, alors $\bar{M} \cap A[H]$ est un idéal maximal de $A[H]$.

De cela, on déduit que si G vérifie la propriété de Burnside $J\mathcal{R}(A[G]) \cap A = J\mathcal{R}(A)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\bar{M}$ idéal maximal à gauche de $K[G]$, $K = A[G]/\bar{M}$ est un $A[G]$ module à gauche simple. Soit $R = A[H]/\bar{M} \cap A[H]$; il faut montrer que R est un $A[H]$ module simple ce qui est équivalent à montrer que pour tout α de R non nul on a $A[H]\alpha = R$.

Soient donc α non nul élément de R, et a élément de $A[H]$ tel que $a + \bar{M} = \alpha$. Puisque H est contenu dans le centre de G, a appartient au centre de $A[G]$.

Puisque K est simple $A[G]\alpha = K$, donc il existe x de $A[G]$ tel que $x\alpha = 1 + \bar{M}$. Il suffit maintenant de trouver un élément $x' \in A[H]$ tel que $x' = x(\bar{M})$; en effet on aura alors $x' = x + Z$ où $Z \in \bar{M}$ d'où $x'\alpha = (x + Z)(a + \bar{M}) = xa + Za + \bar{M} = xa + \bar{M} = x\alpha = 1 + \bar{M}$ car $Za = aZ \in \bar{M}$, ce qui entraînera $A[H]\alpha = R$.

On a $x = \sum_{i=1}^{s} a_i g_i$; soit H' le sous-groupe engendré par $H \cup \{g_1 \dots g_s\}$. Par hypothèse $H' = He \cup H_{h'_1} \cup \dots \cup H_{h'_n}$ décomposition de H' en sous-ensembles à gauche disjoints modulo H . Puisque x, xh'_1 , xh'_n sont des éléments de $A[H']$, on peut écrire :

$$xe = \sum_{i=0}^{n} a_i^o h'_i$$

$$xh'_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i^1 h'_i \qquad\qquad (h'_o = e)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$xh'_n = \sum_{i=0}^{n} a_i^n h'_i$$

où les a_i^j sont des éléments de $A[H]$. On en déduit les relations suivantes :

$$(a_o^o - x)e + a_1^o h'_1 + \dots + a_n^o h'_n = 0$$

$$a_o^1 e + (a_1^1 - x)h'_1 + \dots + a_n^1 h'_n = 0$$

$$a_o^n e + a_1^n h'_1 + \dots + (a_n^n - x)h'_n = 0$$

Système d'équations linéaires sur l'anneau $A[H']$ dont les coefficients sont permutables deux à deux puisque $A[H]$ est contenu dans le centre de $A[G]$. On peut considérer le déterminant d de la matrice des coefficients. Soit C_j^i le cofacteur de l'élément en position (i, j) , c'est un polynôme en x à coefficients dans $A[H]$. Si on multiplie par la matrice des cofacteurs on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o^o & C_o^1 & \dots & C_o^n \\ C_1^o & C_1^1 & \dots & C_1^n \\ \vdots & & & \\ C_n^o & C_n^1 & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o^o - x & a_1^o & \dots & a_n^o \\ a_o^1 & a_1^1 - X & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_o^n & a_1^n & \dots & a_n^n - X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ h'_1 \\ \vdots \\ h'_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ h'_1 \\ h'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} de \\ dh'_1 \\ \vdots \\ dh'_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que $d = 0$, ce qui s'exprime en développant la matrice par une relation $x^{n+1} + b_1 x^n + \ldots + b_{n+1} = 0$ où les $b_i \in A[H]$. On multiplie par a^n et en remarquant que a est dans le centre de $A[G]$

$x(xa^n) = -[b_1(xa)^n + b_2 a(xa)^{n-1} + \qquad + b_{n+1}a^n]$.

Soit $x' = -(b_1 + b_2 a + \ldots + b_{n+1}a^n] \in A[H]$ puisque $xa \equiv 1\ (\bar{M})$ on en déduit que $x \equiv x'\ (\bar{M})$ ce qui achève la démonstration.

<u>Conséquence</u> : si G vérifie la propriété de Burnside

$J\mathcal{R}(A[G]) \cap A = J\mathcal{R}(A)$.

On se pose maintenant le problème de savoir quand l'application de restriction $\bar{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$ est injective.

On rappelle que si P est un idéal premier de l'anneau R alors $R/_P$ a pour caractéristique 0 ou un nombre premier.

<u>Théorème 2</u> : <u>Hypothèses</u> : il existe un nombre p, premier tel que tout élément de G a pour ordre une puissance de p.

Soit $\bar{I}$ un idéal bilatère de $A[G]$ et $I = \bar{I} \cap A$ tels que

i) A/I a pour caractéristique p

ii) $A[G]/\bar{I}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul.

Conclusion : $\bar{I} = \varepsilon^{-1}(I)$, (où ε est l'application d'augmentation) en particulier si $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ sont des idéaux premiers de $A[G]$ distincts et vérifiant i) et ii) alors $\bar{P} \cap A \neq \bar{P}' \cap A$.

Démonstration : on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A[G] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A[G]/\bar{I} \\ A \arrow[r, "\theta"'] & A/I \end{tikzcd}$$

où σ est l'homomorphisme canonique et θ sa restriction à A .

Ce que l'on veut montrer c'est $\operatorname{Ker} \sigma = \varepsilon^{-1}(\operatorname{Ker} \theta) = \operatorname{Ker}(\theta \circ \varepsilon)$; pour cela il suffit de montrer que $\sigma = \theta \circ \varepsilon$.

Soient $x = \sum_{i=1}^{s} a_i g_i \in A[G]$ et $\ell \geqslant 1$ tel que $g_i^{p^\ell} = e$ quelque soit i de 1 à s , on a :

$$1 = \sigma(e) = \sigma(g_i^{p^\ell} = \sigma(g_i)^{p^\ell} .$$

Or $A[G]/\bar{I}$ a pour caractéristique p donc

$0 = \sigma(g_i)^{p^\ell} - 1 = (\sigma g_i) - 1)^{p^\ell}$ et par hypothèse $\sigma(g_i) = 1$ pour tout i puisque $A[G]/\bar{I}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul. Cela entraîne

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^{s} \theta(a_i).\sigma(g_i) = \sum_{i=1}^{s} \theta(a_i) = \theta(\sum_{i=1}^{s} a_i) = \theta \circ \varepsilon(x) .$$

Corollaire 1 : Supposons qu'il existe p premier tel que tout élément de G a pour ordre une puissance de p . Si $A[G]/\bar{P}$ a pour caractéristique p et n'a pas d'éléments nilpotents non nuls quelque soit l'idéal premier $\bar{P}$ de $A[G]$, alors l'application res : $\bar{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$ est une bijection.

Corollaire 2 : Si A a un seul idéal maximal M et si A/M a pour caractéristique p non nul, si G est un groupe abélien dont tous les éléments ont pour ordre une puissance de p, alors $A[G]$ a un seul idéal maximal. De plus si A est anneau local (noethérien) et G un groupe fini alors $A[G]$ est un anneau local.

En effet soit $\bar{M}$ un idéal maximal de $A[G]$. Comme G est un groupe de torsion abélien, le théorème 1 s'applique et $\bar{M} \cap A$ est un idéal maximal donc $\bar{M} \cap A = M$ et $A/\bar{M} \cap A$ a pour caractéristique p. Du théorème 2 on déduit que $\bar{M} = \varepsilon^{-1}(\bar{M} \cap A) = \varepsilon^{-1}(M)$, ce qui montre que $A[G]$ n'a qu'un idéal maximal.

La seconde assertion est évidente en remarquant que si A est noethérien et G fini, $A[G]$ est noethérien.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque.

Théorème 3 : Soit G un groupe abélien $\neq \{e\}$. Il y a équivalence entre les deux propriétés

1) $A[G]$ a un seul idéal maximal

2) i) A a un seul idéal maximal M

ii) A/M a pour caractéristique $p \neq 0$

iii) Chaque élément de G a pour ordre une puissance de p.

$2 \Rightarrow 1$ vient d'être montré.

Puisque $A \cong A[G]/_{Ker(\varepsilon)}$ A a un seul idéal maximal M.

Soit c l'exposant caractéristique de A/M : $c = 1$ quand car $(A/M) = 0$.
$c = p$ quand car $(A/M) = p \neq 0$.

Montrons par l'absurde que tout élément de G a pour ordre une puissance de c . Ce qui montrera iii) et ii) (puisque $G \neq \{e\}$) .

Supposons qu'il existe g tel que l'ordre de g ne soit pas une puissance de c . Soit $O(g) = \infty$ · Soit $O(g) < \infty$.

Dans ce dernier cas $O(g) = q$ premier et différent de c . Dans le premier cas on prend q premier quelconque différent de c . Traitons les deux cas ensemble.

Soit T le groupe multiplicatif de toutes les racines de l'unité de $\bar{k}$ clôture algébrique de k .

Soit C le sous-groupe cyclique de G engendré par g .

Soit ρ_0 l'homomorphisme : $C \to T$ défini par $\rho_0(g) = \alpha$ où α est une racine $q^{\text{ième}}$ primitive de l'unité $(\alpha \neq 1)$.

Puisque T est divisible, on peut prolonger ρ_0 en un homomorphisme $\rho : G \to T$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dr, "\rho"] & \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[u, "\rho_0"] \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Soit $D = \rho(G)$; considérons le corps $K[D]$.

On peut maintenant exhiber deux idéaux maximaux distincts de $A[G]$.

D'abord soit $\theta : A \to A/M = k$ l'homomorphisme canonique $M' = \mathrm{Ker}(\theta \circ \varepsilon)$

$= \varepsilon^{-1}(M)$ est un idéal maximal de $A[G]$.

D'autre part soit $\nu : A[G] \to K[D]$ définie par

$\nu(\sum_{h \in G} a_h h) = \sum_{h \in G} \theta(a_h).\rho(h)$; ν est un homomorphisme sur $k[D]$ dont le noyau N est un idéal maximal de $A[G]$.

Or $N \neq M'$ car $e - g \in M'$ tandis que $e - g \notin N$ car $\nu(e-g) = 1 - \alpha \neq 0$. On aboutit à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

Dans un second paragraphe on va indiquer quelques théorèmes de structure pour les anneaux de groupe commutatif.

II. - Théorèmes de structure.

Théorème 4 : Soit G un groupe abélien, A un anneau commutatif, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) G est fini, A est un anneau noethérien semi-local et complet.

2) $A[G]$ est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux noethériens locaux complets.

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$ G fini, A noethérien alors $A[G]$ est un anneau noethérien. Démontrons d'abord un lemme.

Lemme : Si G est un groupe abélien fini, pour tout idéal maximal M de A il existe un nombre fini d'idéaux maximaux de $A[G]$ tels que $\bar{M} \cap A = M$.

En effet $A[G]/_{A[G]M}$ est une algèbre de dimension finie sur A/M ; c'est donc un anneau artinien et il n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Par conséquent il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux $\bar{M}_i$ de $A[G]$ tels que $\bar{M}_i \cap A = M$.

Ce lemme et le théorème 1 entraînent que, puisque A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, $A[G]$ aussi. D'où l'on déduit que $A[G]$ est semi-local. Soit $J = \mathfrak{R}J(A)$. A est un espace de Haussdorff dans la topologie J.adique. $A[G]$ est un A-module de dimension finie donc $A[G]$ est un espace de Haussdorff dans la topologie $J[G]$ adique. On en déduit que $A[G]$ est complet dans la topologie $J[G]$ adique [cft. Nagata, Local Rings, Interscien. Publishers New York 1962] .

Soit $\bar{J} = \mathfrak{R}J(A[G])$, $J[G] \subseteq \bar{J}$. On va démontrer qu'il existe $r \geqslant 1$ tel que $\bar{J}^r \subseteq J[G]$ ce qui montrera que la topologie $J[G]$ adique coïncide avec la topologie naturelle $\bar{J}$ adique et que $A[G]$ est un anneau semi-local et complet.

Puisque A est un anneau semi-local A/J est artinien ; comme $A[G]/_{J[G]}$ est un module de dimension finie sur A/J , c'est un anneau artinien ; donc son radical de Jacobson $\bar{J}/J[G]$ est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $r \geqslant 1$ tel que $\bar{J}^r \subseteq J[G]$. On en déduit [Cft Nagata p. 56] que $A[G]$ est le produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux locaux complets, qui sont noethériens puisque $A[G]$ l'est.

$2 \Rightarrow 1$ Il est clair que $A[G]$ est noethérien. Puisque $A \simeq A[G]/_{Ker(\varepsilon)}$, A est aussi noethérien. On en déduit [Cft Ribenboim P. Rings and Modules

Intersience Publishers New York 1969 p. 139] que G est un groupe de type fini. Si G n'est pas fini $G = C_\infty \times G'$, il y a donc un homomorphisme d'anneaux surjectifs $A[G] \to A[C_\infty]$. On va montrer que $A[C_\infty]$ est une infinité d'idéaux maximaux, ce qui entraînera la même propriété pour $A[G]$, en contradiction avec l'hypothèse.

Quelque soit q premier différent de la caractéristique de $k = A/M$ soit α_q une racine primitive $q^{\text{ième}}$ de l'unité sur k. Soit g un générateur de C_∞, on définit un homomorphisme d'anneaux surjectifs comme suit :

$$\sigma_q : A[C_\infty] \to k(\alpha_q)$$
$$\sigma_q(g) = \alpha_q$$

et σ_q prolonge l'homomorphisme canonique $A \to A/M = k$. D'où $\mathrm{Ker}(\sigma_q) = \overline{M}_q$ est un idéal maximal de $A[G]$. Si $q \neq q'$, $\overline{M}_q \neq \overline{M}'_q$; sinon il existe un isomorphisme $\rho : K(\alpha_q) \to k(\alpha_{q'})$ tel que $\sigma_{q'} = \rho \circ \sigma_q$; en particulier on doit avoir $\rho(\alpha_q) = \alpha_{q'}$, ce qui est impossible. Donc G est fini. $A[G]$ étant semi-local, A l'est aussi (car $\mathcal{M} \leqslant \mathrm{res}(\overline{\mathcal{M}})$). Il faut alors montrer que A est complet.

Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de Cauchy d'éléments de A ; $(a_n e)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de $A[G]$ dans la topologie $J[G]$.adique, qui coïncide avec la topologie J.adique. Puisque $A[G]$ est complet, il existe x de $A[G]$ tel que $x = \lim_{n \to \infty} a_n e$. D'où, pour chaque $m \geqslant 1$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x - a_n e \in J^m[G]$, ce qui entraîne $\varepsilon(x) - a_n = \varepsilon(X - a_n e) \in J^m$; ceci montre que $\varepsilon(X) = \lim_{n \to \infty} a_n$ donc A est complet.

Corollaire : Soit G un groupe abélien. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) G est un groupe fini et A est un anneau artinien
2) $A[G]$ est isomorphe au produit artésien d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens
3) $A[G]$ est un anneau artinien.

$1 \Rightarrow 2$ G fini et A artinien entraînent que $A[G]$ est artinien donc il n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, c'est-à-dire que $A[G]$ est un anneau artinien semi-local. Par conséquent il est complet dans la topologie $\mathfrak{J}$.adique (qui est la topologie discrète puisque $\mathfrak{J}$ est nilpotent) donc $A[G]$ est isomorphe au produit d'un nombre fini d'anneaux complets locaux artiniens (image homomorphe d'anneau artinien par la projection).

$2 \Rightarrow 2$ C'est évident.

$3 \Rightarrow 1$ Se déduit du théorème de Connell [Cft Ribenboim cité ci-dessus page 150].

Dans le cas de corps, on obtient des précisions supplémentaires qui contiennent le théorème de Maschke dans le cas des groupes abéliens.

Théorèmes : Soit K un corps, G un groupe abélien fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) L'ordre de G et l'exposant caractéristique de K sont premiers.

2) $K[G]$ est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'extensions cyclotomiques de K.

3) $K[G]$ est semi-simple.

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$ On suppose d'abord que G est un groupe cyclique, d'ordre n. $K[G] \cong K[X]/(X^n-1)$. Soient $X^n-1 = P_1 \ldots P_m$ la décomposition de X^n-1 en facteurs irréductibles sur K. Ils sont distincts puisque l'ordre de G est premier avec l'exposant caractéristique de K. Comme $(X^n-1) = \bigcap_{i=1}^{m} (P_i)$ on déduit du théorème chinois que

$k[G] \cong K[X]/(X^n-1) \cong \prod_{i=1}^{m} K[X]/(P_i) \cong \prod_{i=1}^{m} K[\alpha_i]$ où tout α_i est une racine de P_i donc une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Revenons au cas général. G est produit cartésien de groupes cycliques, $G = G_1 \times \quad \times G_r$. Puisque $K[G] \cong K[G_1 \times \quad \times G_{r-1}][G_r]$, on démontre la propriété par récurrence. Supposons que $K[G_1 \times \quad \times G_{r-1}]$ soit isomorphe à $K_1 \times \quad \times K_t$ où K_i est extension cyclotomique de K. Alors $K[G] \cong [K_1 \times \quad \times K_t)[G_r] \cong K_1[G] \times \quad \times K_t[G_r]$ et $K_i[G_r]$ est isomorphe au produit cartésien d'extensions cyclotomiques de K_i ; donc de K.

$2 \Rightarrow 3$ Evident.

$3 \Rightarrow 1$ Supposons que la caractéristique de K est un diviseur premier de n ordre de G. Soit C un p.groupe cyclique non trivial qui est facteur direct de G. Il existe un homomorphisme d'anneaux X de $K[G]$ sur $K[C]$ donc $K[C]$ est semi-simple. Etant commutatif, $K[C]$ est produit d'un nombre fini de corps. D'autre part à cause du corollaire 2 du théorème 2 $K[G]$

est un anneau local par conséquent $K[C]$ est un corps.

Soit g un générateur de C, soit p son ordre. On a $K[C] \cong K[X]/(X^{p^\ell}-1)$ et l'idéal $(X^{p^\ell}-1)$ est maximal, $X^{p^\ell}-1$ serait donc un polynôme irréductible sur K ce qui n'est possible que si $\ell = 0$ car $X^{p^\ell} - 1 = (X-1)^{p^\ell}$. On en déduit que C est le groupe trivial contrairement à l'hypothèse.

III. - Problèmes d'isomorphismes.

Soient G, H des groupes abéliens finis, et A un anneau commutatif ; on suppose que $A[G]$ et $A[H]$ sont isomorphes. Le problème est de déterminer sous quelles conditions on peut conclure que G est isomorphe à H.

Lorsque $A = \mathbb{C}$ on peut prendre G, H deux groupes abéliens non isomorphes de même ordre n. Alors $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[H]$ sont tous deux isomorphes au produit direct de n copies de $\mathbb{C}$. Il faut donc donner des conditions supplémentaires.

Théorème : Soit G un groupe abélien fini, soient $p_1, \ldots, p_s$ les diviseurs premiers de l'ordre de G. Soit H un groupe quelconque. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $G \cong H$.

2) Pour tout corps K $K[G] \cong K[H]$.

3) Pour tout corps K algébriquement clos dont la caractéristique divise l'ordre de G $k[G] \cong K[H]$.

4) Pour tout corps K algébriquement clos $K[G] \cong K[H]$.

5) Il existe s corps $K_1, \ldots, K_s$ algébriquement clos tels que car $(K_i) = p_i$ et $K_i[G] \cong K_i[H]$.

6) Il existe des corps $K_1, \ldots, K_s$ tels que car $(K_i) = p_i$ et $K_i[H] \cong K_i[G]$.

7) Il existe des corps finis $K_1, \ldots, K_s$ tels que car $(K_i) = p_i$ et $K_i[G] \cong K_i[H]$.

8) $F_{p_i}[G] \cong F_{p_i}[H]$.

9) $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[H]$.

10) $A[G] \cong A[H]$ où A l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres algébriques.

11) Il existe des anneaux d'intégrité $A_1, \ldots, A_s$ tels que car $(A_i) = p_i$ et $A_i[G] \cong A_i[H]$.

12) Il existe un anneau A tel que p_i ne soit pas inversible dans A et $A[G] \cong A[H]$.

On a les implications évidentes $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$

$1 \Rightarrow 8 \Rightarrow 7 \Rightarrow 6$

$1 \Rightarrow 9$

Il reste seulement à démontrer $9 \Rightarrow 10 \Rightarrow 11 \Rightarrow 12 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$.

$9 \Rightarrow 10$ $\quad A[G] \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H] \cong A[H]$.

$10 \Rightarrow 11$ Pour chaque i de 1 à s on choisit un idéal premier P_i de A tel que $P_i \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}p_i$; $A_i = A/P_i$ a pour caractéristique p_i et

$A_i[G] \cong A_i \underset{A}{\otimes} A[G] \cong A_i \underset{A}{\otimes} A[H] \cong A_i[H]$.

11 $\Longrightarrow$ 12 On prend $A = A_1 \times \quad \times A_s$; chaque p_i n'est pas inversible dans A et $A[G] \cong \prod_{i=1}^{s} A_i[G] \cong \prod_{i=1}^{s} A_i[H] \cong A[H]$.

12 $\Longrightarrow$ 6 Pour chaque i de 1 à s l'idéal Ap_i est distinct de A ; donc il existe un idéal maximal M_i contenant Ap_i ; soit $K_i = A/M_i$, car $(K_i) = p_i$. Puisque $A[G] \cong A[H]$ $K_i[G] \cong K_i \underset{A}{\otimes} A[G] \cong K_i \underset{A}{\otimes} A[H] \cong K_i[H]$.

Pour démontrer l'implication $6 \Longrightarrow 1$ on a besoin de certains résultats préliminaires.

<u>Lemme 1</u> : Soient K un corps de caractéristique p , G un groupe abélien d'ordre n multiple de p .

$G \cong G_p \times G'$ où G_p est le p.sous-groupe de Sylow de G et G' a un ordre non divisible par p ; soit p^ℓ l'exposant de G_p . Alors

i) si $x \in J = J\,\mathcal{R}(K[G]$ $\quad X^{p^\ell} = 0$.

ii) il existe $X \in J$ tel que $x^{p^{\ell-1}} \neq 0$.

De plus J est le noyau de l'application d'augmentation

$\varepsilon' : (K[G'])[G_p]) \to K[G']$.

<u>Démonstration</u> : $K[G] \cong (K[G'])[G_p]$

$K[G'] \cong K_1 \times \quad \times K_s$ où $K_i = K[\alpha_i]$ et α_i est une racine de l'unité (Th. 5).

On considère l'isomorphisme $\theta : K[G] \longmapsto \prod_{i=1}^{s} K_i[G_p]$

$K[G] \cong (K[G'])[G_p] \cong (K_1 \times \quad \times K_s)[G_p] \cong \prod_{i=1}^{s} K_i[G_p]$

$K_i[G_p]$ est un anneau local (Cor. 2, Th. 2) ; soit $\bar{M}_i$ son idéal maximal. Soit N_i l'idéal maximal de $K[G]$ tel que

$$\theta(N_i) = K_1[G_p] \times \quad \times \bar{M}_i \times \quad \times K_S[G_p]$$

Alors $x \in J = \bigcap_{i=1}^{s} N_i$ est équivalent à $x_i \in \bar{M}_i$ où $\theta(x) = (x_1, \quad , x_s)$. Posons $x_i = \sum_{h \in G_p} a_{ih} h$ où $a_{ij} \in K_i$, on a $x_i \in \bar{M}_i$ si et seulement si $\sum_{h \in G_p} a_{ih} = 0$ [(Th. 2) appliqué à $K_i[G_p]$] . Puisque car $(K) = p$ et $h^{p^\ell} = e$ pour tout h de G_p, on en déduit $X_i^{p^\ell} = (\sum_{h \in G_p} a_{ih}^{p^\ell})e = (\sum_{h \in G_p} a_{ih})^{p^\ell} e$

Donc si $x \in J$, $x_i^{p^\ell} = 0$ pour tout i ce qui entraîne $x^{p^\ell} = 0$.

Il existe h de G_p tel que $h^{p^{\ell-1}} \neq e$ (puisque p^ℓ est l'exposant de G_p). Soit $X = e-h$, $\theta(x) = (e-h, \ldots, e-h)$ c'est-à-dire $X_i = e-h$. Donc $X \in J$. Mais $X_i^{p^{\ell-1}} = e-h^{p^{\ell-1}} \neq 0$ donc $X^{p^{\ell-1}} \neq 0$.

On a déjà dit que $x \in J$ si et seulement si $\Sigma a_i h = 0$ ce qui signifie que $\varepsilon'(X) = 0$.

De ce résultat on déduit le lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soit G un groupe abélien fini, soit H un groupe. Soient p un diviseur premier de l'ordre de G, et K un corps de caractéristique p. Si les algèbres $K[G]$ et $K[H]$ sont isomorphes alors H est un groupe abélien fini. Posons $G \cong G_p \times G'$ $H \cong H_p \times H'$ où G_p et H_p sont les p sous-groupes de Sylov de G et H et G' et H' ont des ordres non multiples de p, alors $G_p \cong H_p$ et $K[G'] \cong K[H']$.

Puisque $K[G]$ est un anneau abélien H doit être abélien, donc G et H ont même ordre qui est la dimension des espaces vectoriels $K[G]$ et $K[H]$. On en déduit que G_p et H_p ont même ordre et de même $\# G' = \# H'$.

Soient $p^{m_1} \geqslant p^{m_2} \geqslant \ldots \geqslant p^{m_s} > 0$ et $p^{\ell_1} \geqslant p^{\ell_2} \geqslant \ldots \geqslant p^{\ell_r} > 0$ les diviseurs élémentaires de H_p et G_p respectivement. Remarquons que p^{ℓ_1}, p^{m_1} sont aussi les exposants de ces groupes. $K[G] \cong K[H]$ ces anneaux ont des radicaux de Jacobson isomorphes ; du lemme 1 on déduit que $p^{\ell_1} = p^{m_1}$

Maintenant on montre que $\ell_2 = m_2$.

Supposons $\ell_2 \leqslant m_2$; soit $\sigma : K[G] \to K[H]$ l'isomorphisme donné par hypothèse. Définissons $\theta_G : K[G] \to K[G]$

$$\theta_G(X) = X^{p^{\ell_2}} \; ;$$

Puisque car $(K) = p$, θ_G est un homomorphisme d'anneaux. Son image est $K^{p^{\ell_2}}[G^{p^{\ell_2}}] \cong K^{p^{p_2}}[G_p^{p^{\ell_2}} \times G^1]$ et son noyau est $\mathrm{Ker}\ \theta_G = \{x | x \in K[G] , x^{p^{\ell_2}} = 0\}$. On définit de façon analogue θ_H.

On en déduit $\sigma(\mathrm{Ker}\ \theta_G) = \mathrm{Ker}(\theta_H)$ et σ induit un homomorphisme de la $K^{p^{\ell_2}}$-algèbre $K^{p^{\ell_2}}[G^{p^{\ell_2}}]$ sur $K^{p^{\ell_2}}[H^{p^{\ell_2}}]$. En considérant σ^{-1} on voit que les $K^{p^{\ell_2}}$-algèbres :

$$K^{p^{\ell_2}}[G^{p^{\ell_2}}] \cong K^{p^{\ell_2}}[G^{p^{\ell_2}} \times G^1]$$

$$K^{p^{\ell_2}}[H^{p^{\ell_2}}] \cong K^{p^{\ell_2}}[H^{p^{\ell_2}} \times H^1]$$ sont isomorphes.

Elles ont donc même dimension.

Donc $\# (G^{p^{\ell_2}} \times G^1) = \# (H^{p^{\ell_2}} \times H^1)$ or $\# G^{p^{\ell_2}} = p^{\ell_1 - \ell_2}$ tandis que $\# H_p^{p^{\ell_2}} = p^{(\ell_1-\ell_2) + (m_2-\ell_2)}$; on conclue que $\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - \ell_2 + m_2 - \ell_2$ et $\ell_2 = m_2$. De proche en proche, si $r < s$ on a $l_i = m_i$ ($i = 1, \ldots, r$). Puisque $\# G_p = \# H_p$ on a nécessairement $r = s$. Donc, G_p et H_p qui ont les mêmes diviseurs élémentaires sont isomorphes.

A cause du lemme 1 le radical de Jacobson J_G de $K[G] \cong (K[G'])[G_p]$ est le noyau de $\varepsilon' : (K[G'])[G_p] \to K[G']$. De même pour J_H . Mais puisque $K[G]$ et $K[H]$ sont artiniens, leurs radicaux de Jacobson sont l'ensemble des nilpotents ; d'où on déduit que l'isomorphisme $\sigma : K[G] \to K[H]$ est tel que $\sigma(J_G) = J_H$. Donc σ induit un isomorphisme entre les Kalgabres $K[G']$ et $K[H']$.

On peut alors démontrer

$6 \Longrightarrow 1$ A cause du lemme 2 H est un groupe abélien de même ordre que G les p_i-groupes de Sylov de G et de H sont isomorphes donc $G \cong H$.

-:-:-:-:-:-:-

- BIBLIOGRAPHIE -

P. RIBENBOIM, T. GULLIKSEN and T. M. VISWANATHAN : An elementary note on group rings, Queen's University at Kingston, J. für die reine und angew. Mathemat. (KRULL'S BAND), 1970.

ALGEGRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 3 du 24 novembre 1969.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX DE BAER.

Par A. CAILLEAU

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

I. Anneaux à idéal singulier nul.

A désigne un anneau unitaire non nécessairement commutatif ; les modules considérés sont des A-modules à gauche unitaires.

Rappelons qu'un sous-module N d'un module M est essentiel dans M si on a la relation :

$$x \in M, \ Ax \cap N=0 \implies x=0$$

En particulier, un idéal à gauche I de A est essentiel dans A si le A-module à gauche I est essentiel dans le A-module à gauche A_s (i.e. A considéré comme A-module à gauche).

Définition I :

On appelle sous-module singulier d'un module M le sous-module J(M) de M constitué des éléments x de M dont l'annulateur Ann x dans A est un idéal à gauche essentiel dans A.

Rappelons le résultat suivant (cf. [I] et [3]).

Théorème II. :

Soit E un A-module injectif ; désignons par B l'anneau des endomorphismes de E et par R le radical de Jacobson de B ; alors :

(i) R est l'ensemble des endomorphismes φ de E tels que Ker φ soit un sous-module essentiel de E.

(ii) B/R est un anneau régulier auto-injectif à droite.

En particulier si $J(E) = 0$, on montre aisément que R est nul, et alors B est un anneau régulier auto-injectif à droite. Appliquons ce résultat à la situation suivante : Soit A un anneau à idéal singulier nul (i.e. $J(A_s) = 0$), alors $E(A)$ est à sous-module singulier nul et $B = \mathrm{End}\ (E(A))$ est un anneau régulier auto-injectif à droite. On peut construire une application de $E(A)$ dans B de la façon suivante : Soit x un élément de $E(A)$; l'application de A dans $E(A)$: $a \to ax$ se prolonge de manière unique en un endomorphisme $\varphi(x)$ de $E(A)$.

On peut montrer que :

(i) φ est une bijection de $E(A)$ sur B.

(ii) la restriction de φ à A est un endomorphisme d'anneaux de A dans $\overset{o}{B}$ (l'anneau opposé à B) ; $\overset{o}{B}$ est alors un A-module à gauche.

(iii) φ est un isomorphisme de A-modules à gauche ; $\overset{o}{B}$ est alors un A-module à gauche injectif et la restriction de φ à A est un monomorphisme essentiel. On en déduit que $\overset{o}{B}$ est l'enveloppe injective de A. D'où le résultat :

<u>Théorème III</u> :

Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul ; l'enveloppe injective à gauche de A est un anneau régulier auto-injectif à gauche.

On en déduit aisément les corollaires suivants :

<u>Corollaire IV</u> :

Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul ; si B est un sur-anneau de A auto-injectif à gauche, et tel que A soit un sous-A-module à gauche essentiel de B, alors $B=E(A)$.

Corollaire V :

Soient A un anneau et B un sur-anneau de A régulier auto-injectif à gauche, tel que A soit un sous-A-module à gauche essentiel de B ; alors B=E(A).

Considérons un anneau A à idéal singulier à gauche nul et désignons par $\hat{A}$ l'enveloppe injective de A. Si e est un idempotent de A, $\hat{A}e$ est un A-module à gauche à sous-module singulier nul et $End_A(\hat{A}e)$ est donc un anneau régulier auto-injectif à droite. Or l'application :

$$\varphi \to \varphi(e)e$$

réalise un isomorphisme d'anneaux entre $End_A(\hat{A}e)$ et $e\hat{A}e$. On en déduit que $e\hat{A}e$ est régulier auto-injectif à gauche. Si de plus A est semi-premier (i.E. sans idéaux nilpotents non nuls), eAe est un sous-eAe module à gauche essentiel de $e\hat{A}e$: Soit exe un élément non nul de $e\hat{A}e$; il existe un idéal à gauche J essentiel dans A tel que Jexe soit un idéal non nul de A ; or on a $eJexe \neq 0$ (puisque sinon $(Jexe)^2 = 0$ et par suite Jexe = 0), et l'on peut donc trouver $a \in A$ tel que eae.exe soit un élément non nul de eAe. En appliquant le corollaire V, on a :

Proposition VI :

Soit A un anneau semi-premier à idéal à gauche nul et soit $\hat{A} = E(A)$ alors si e est un idempotent de A, $e\hat{A}e$ est l'enveloppe injective du $e\hat{A}e$-module à gauche eAe.

Exemples d'anneaux à idéal singulier à gauche nul :

- Anneaux noethériens à gauche semi-premiers.
- Anneaux réguliers.
- Anneaux réduits : A est un anneau réduit s'il ne contient pas d'éléments nilpotents non nuls ; on a alors dans A la relation :

$$ax=0 \implies xaxa=0 \implies (xa)^2=0 \implies xa=0$$

et Annx est un bilatère pour tout $x \in A$. Si $ax \in$ Annx on a $ax^2=0$ et par suite $xax=0$, d'où $(ax)^2=0$, soit $ax=0$. On en déduit : $Ax \cap \text{Ann}x=0$

et pour tout $x \neq 0$, Ann$x$ n'est pas essentiel dans A.

Si A est commutatif on a la réciproque suivante :

si A est un anneau commutatif, A est un anneau réduit, si, et seulement si $J(A)=0$.

En effet soit x un élément non nul de A tel que $x^2=0$; si K est un complément de Ax dans A, on a $(Ax \oplus K)x=0$, et il en résulte que Ann$x$ est essentiel dans A.

II. Anneaux de Baer.

Les anneaux de Baer ont été étudiés par Kaplansky, pour les démonstrations on pourra se reporter à [2].

Définition VII :

Un anneau de Baer est un anneau A dans lequel l'annulateur à gauche (ou à droite, c'est équivalent) de tout sous-ensemble non vide est facteur direct.

Exemples :

Un anneau intègre est un anneau de Baer.

Un anneau régulier auto-injectif à gauche (resp. à droite) est un anneau de Baer.

Soit un tel anneau ; si S est un sous-ensemble non vide de A, on a

$$\text{Ann } S = \bigcap (\text{Ann } x_i,\ x_i \in S) = \bigcap Ae_i, \text{ où pour tout } x_i \ ;\ Ae_i = \text{Ann } x_i.$$

$\bigcap Ae_i$, intersection de sous-modules injectifs de A régulier auto-injectif à gauche, est un idéal injectif de A, et c'est donc un facteur direct de A.

Proposition VIII :

Soit A un anneau de Baer ; le treillis des facteurs directs à gauche (resp. à droite) de A est complet.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'idempotents de A, l'annulateur à droite de l'ensemble de e_i peut s'écrire $(I-e)A$, où e est un idempotent de A. On contrôle aisément que $Ae = \sup.(Ae_i,\ i \in I)$. D'autre part $\bigcap Ae_i$ est l'annulateur à gauche de l'ensemble $(1-e_i)_{i \in I}$, et est donc égal à un facteur direct Af de A.

Corollaire IX :

Le treillis des idempotents centraux de A est complet. On ordonne les idempotents centraux de A par la relation :

$$h < k \iff Ah \subset Ak \iff h=hk.$$

On remarque que si S est une partie du centre de A, l'annulateur à gauche (resp. à droite) de S est engendré par un idempotent central. Si donc $(h_i)_{i\in I}$, est une famille d'idempotents centraux de A, on a sup. $(Ah_i,\ i\in I)=Ah$ (resp. inf. $(Ah_i,\ i\in I)=Ak$) où h(resp. k) est un idempotent central de A.

Classification des Anneaux de Baer : A désigne un anneau unitaire,

Définition X :

Un idempotent e de A est dit fidèle si la relation eh=e où h est un idempotent central de A, entraîne h=I.

Ceci équivaut à dire que e n'appartient à aucun facteur direct bilatère de A autre que A.

Définition XI :

Un idempotent e de A est dit abélien si les idempotents de l'anneau eAe commutent.

Il en résulte alors que les idempotents de eAe sont centraux.

Soit A un anneau régulier et soit e un idempotent de A ; considérons les assertions suivantes :

(i) e est un idempotent abélien de A.

(ii) eAe est un anneau réduit.

(iii) dans l'anneau eAe, on a la relation : $eAex \cap eAey = 0 \implies xy=0$.

Alors (i) ==> (ii) et (i) ==> (iii) (en fait on peut montrer l'équivalence des trois assertions).

(i) ==> (ii) Posons eAe = C, C est un anneau régulier dont les idempotents sont centraux. Soit $x \in C$; on a Cx = Ch où h est un idempotent central de C et par suite Ann x = C (I-h), ce qui entraîne $Cx \cap \text{Ann } x = 0$.

(i) ==> (iii) Tous les idéaux de l'anneau régulier C sont bilatères, par suite pour $x \in C$ et $y \in C$, on a $xy \in Cx \cap Cy$, d'où le résultat.

Définition XII :

Un idempotent e de A est dit fini si dans l'anneau eAe on a la relation : $xy=e \Longrightarrow yx=e$

Lemme XIII :

Un idempotent e de A est fini, si et seulement si A e n'est isomorphe à aucun facteur direct propre.

En effet, soit Af un idempotent de Ae. Considérons un isomorphisme φ de Ae sur Af et posons $\varphi(e)=x$, $\varphi^{-1}(f)=y$; on a exeye=e et eyexe=ef, et par suite si e est abélien, ef=e, d'où Ae=Af. Réciproquement si e n'est pas abélien on peut trouver exe, eye avec exeye=e, eyexe=f$\neq$e ; f est alors un idempotent de Ae tel que Af soit un facteur direct propre de Ae isomorphe à Ae.

Définitions XIV :

Un anneau de Baer est dit :

de type I, s'il contient un idempotent abélien fidèle,

de type II, s'il contient un idempotent fini fidèle, et s'il ne contient pas d'idempotents abéliens non nuls,

de type III, s'il ne contient pas d'idempotents finis non nuls,

fini, si 1 est idempotent fini de A,

purement infini, si les seuls idempotents finis centraux de A sont 0 et 1.

Remarque : Les types I, II et III s'excluent mutuellement, on peut en effet montrer que tout idempotent abélien est fini.

Théorème XV : ([2] théorème 12) : Soit A un anneau de Baer ; alors A se met de façon unique sous la forme d'un produit d'anneaux de Baer :

$$A = A_{I_{fin}} \times A_{I_\infty} \times A_{II_{fin}} \times A_{II_\infty} \times A_{III}, \text{ avec,}$$

$A_{I_{fin}}$ de type fini, A_{I_∞} de type I purement infini ; $A_{II_{fin}}$ de type II fini, A_{II_∞} de type II et purement infini, A_{III} de type III.

On montre d'abord qu'il existe dans A un plus grand idempotent central h tel que Ah (qui est un anneau de Baer) soit de type I, h est tel que A(1-h) ne contienne pas d'idempotents abéliens non nuls ; on considère une famille maximale d'idempotents centraux orthogonaux $(h_i)_{i\in I}$, h=sup $(h_i, i\in I)$ possède alors la propriété De la même façon il existe dans A un plus grand idempotent central k tel que Ak contienne un idempotent fini fidèle, k est tel que A(I-k) ne contienne pas d'idempotents finis non nuls. Ceci permet de décomposer A(1-k) en un produit $A_{II} \times A_{III}$

d'anneau de Baer de types respectifs II et III, et par suite A en un produit $A_I \times A_{II} \times A_{III}$, d'anneaux de types respectifs I, II, III. L'unicité des idempotents h et k introduits plus haut montre que cette décomposition est elle-même unique. On conclut en montrant que tout anneau de Baer A possède un plus grand idempotent central l tel que A(1-l) ne contienne pas d'idempotents centraux non triviaux ; ce résultat appliqué à A_I et A_{II} permet d'achever la démonstration du théorème.

Proposition XVI :

Soit A un anneau ; considérons les propriétés suivantes :

(i) A contient un idempotent abélien (resp. fini) fidèle. f.

(ii) Pour tout idempotent non nul e de A, Ae contient un idempotent abélien (resp. fini) non nul.

Alors (ii) ===> (i), et si de plus A est tel que tout idéal à gauche de A contienne un idempotent non nul (i) <===> (ii).

(ii) ===> (i). Soit h le plus grand idempotent central de A tel que Ah contienne un idempotent abélien (resp. fini) fidèle (cf. démonstration du théorème 15). On sait que A(I-h) ne contient pas d'idempotents abéliens (resp. finis) non nuls. On a donc 1-h = 0, soit h = 1.

(i) ===> (ii). Soit e un idempotent non nul de A ; on a $fAe \neq 0$ (sinon on aurait f = fk, en désignant par k l'idempotent central de A tel que Ak = Ann Ae, et f ne serait pas fidèle puisque $k \neq 1$). Ceci entraîne que l'on peut trouver un homomorphisme non nul de Af dans Ae : $f \to fae$. Afae est isomorphe au facteur direct $Ag = Af \cap \text{Ann } fae$, et par suite End(Afae) est isomorphe à $\text{End}(Ag) \subset \text{End}(Af) = f\mathring{A}f$ Soit e' un idempotent non nul de Afae ; End(Ae') est un sous-anneau de End(Afae), et e'Ae' est donc isomorphe à un sous-anneau de fAf. Il en résulte que si f est abélien (resp. fini) il en est de même de e'.

Soit A un anneau de Baer ; l'idéal singulier à gauche de A est nul et en vertu du théorème III, l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A est un anneau régulier auto-injectif à gauche, c'est donc un anneau de Baer. On peut se poser le problème de savoir si A étant d'un type donné, $\hat{A}$ est du même type. En général la réponse est négative ; nous le montrons en donnant un exemple dû à J. E. ROOS :

Soit A un anneau intègre, les seuls idempotents de A étant 0 et 1, A est de type I. Si A vérifie la condition de Ore (i.e. $x \in A$, $y \in A$, $Ax \cap Ay = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$), A admet un corps de fractions à gauche qui coïncide avec $\hat{A}$, et $\hat{A}$ est de type I. Supposons que A ne vérifie pas la condition de Ore, ce ci signifie que 0 n'est pas $\bigcap$-irréductible dans A, et donc que A ne contient pas d'idéaux à gauche co-irréductibles (Ax co-irréductible $\Longrightarrow$ Ann x $\bigcap$-irréductible $\Longrightarrow$ 0 co-irréductible).

Remarquons que $\hat{A}$ ne contenant pas d'idempotents centraux autres que 0 ou 1, est nécessairement de l'un des types I, II, ou III.

Supposons que $\hat{A}$ contienne un idempotent abélien non nul e. $\hat{A}e \bigcap A$ n'étant pas co-irréductible, on peut trouver x et y non nuls dans $\hat{A}e \bigcap A$ tels que $Ax \bigcap Ay = 0$. On a $e\hat{A}ex \bigcap e\hat{A}ey = 0$ ce qui entraîne, en vertu d'une remarque antérieure $exeye = exy = 0$, soit $(xy)^2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Supposons que $\hat{A}$ contienne un idempotent fini non nul e. Soit x un élément non nul de $\hat{A}e \bigcap A$, et soient y et z deux éléments non nuls de Ax vérifiant $Ay \bigcap Az = 0$. A étant intègre Ax est isomorphe à Ay, et si l'on désigne par $\hat{A}f$ et $\hat{A}g$ (f et g étant idempotents) les enveloppes injectives de Ax et Ay, $\hat{A}f$ est isomorphe à $\hat{A}g$ qui en est un facteur direct propre. f n'est donc pas un idempotent fini, ce qui est contraire au fait que l'on ait $fAf \subset eAe$ et e fini.

<u>En conclusion</u> : $\hat{A}$ est de type III alors que A est de type I.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. E. JOHNSON et E. T. WONG ; Quasi-Injective Modules and Irreducible Rings (J. London Math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-268).

[2] I. KAPLANSKY.; Rings of Operators (Benjamin, 1968).

[3] G. RENAULT ; Anneau Associé à un Module Injectif. (Bull. Sc. Math. 92, p. 52-58, 1968).

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 4 du 1er décembre 1969

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SUR L'ENVELOPPE INJECTIVE DES ANNEAUX SEMI-PREMIERS A IDEAL SINGULIER NUL.

Par Guy RENAULT.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Les diverses notions utilisées dans cet exposé ont été introduites dans [1]. Les résultats qui suivent se trouvent dans [2],(cf également [4]).

I - Préliminaires :

On appelle anneau fortement régulier [II], tout anneau A régulier et réduit ; les idempotents de A sont alors centraux et tous les idéaux sont bilatères. Nous allons donner diverses caractérisations des anneaux fortement réguliers.

Proposition 0.1.

Pour un anneau régulier A, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) A est fortement régulier.

(ii) Quels que soient x et y éléments de A, la relation $Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$.

(iii) Quels que soient e et f idempotents de A, la relation $Ae \cap Af = 0$ entraîne $ef = 0$.

(iiii) Les idempotents de A commutent.

(i) ⟹ (ii) les idéaux de A étant bilatères, xy appartient à l'intersection $Ax \cap Ay$, et par suite $xy = 0$.

(ii) ⟹ (iii) évident.

(iii) $\Longrightarrow$ (iiii) on vérifie sans peine que si deux idempotents de A engendrent le même idéal à gauche, ils sont égaux. Soient e et f deux idempotents de A ; on pose

$Ae \cap Af = Ag \qquad Ae = Ag \oplus Ah \qquad Af = Ag \oplus Ak$

où g, h et k sont des idempotents de A. La remarque ci-dessus montre que $e = g+h$, $f = g+k$, ce qui entraîne $ef = fe = g$.

(iiii) $\Longrightarrow$ (i) le treillis des idéaux à gauche principaux de A est distributif et l'assertion du théorème 1.1. de [II].

On a d'autre part le résultat suivant [1].

<u>Proposition 0.2</u>.

Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul ; si e est un idempotent de A, $e\hat{A}e$ est l'enveloppe injective du eAe-module eAe.

II - <u>Enveloppes injectives de type I</u>.

Dans ce paragraphe, A désignera un anneau unitaire à idéal singulier à gauche nul, dont l'enveloppe injective sera notée $\hat{A}$.

On dira qu'un idéal à gauche X de A vérifie la condition (C) si :

(C) Pour tout couple (x,y) d'éléments de X la relation $Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$.

<u>Proposition 1.1</u>.

Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul ; pour tout idempotent e de $\hat{A}$, considérons les propriétés suivantes :

(i) e est un idempotent abélien de $\hat{A}$.

(ii) si X et Y sont deux idéaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ et vérifiant $X \cap Y = 0$, on a $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0$.

(iii) $\hat{A}e \cap A$ vérifie la condition (C).

(iiii) $\hat{A}e \cap A$ est extension essentielle d'un idéal à gauche I de A vérifiant la condition (C).

Alors on a les implications : (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iiii) , et si de plus A est semi-premier, les quatre propriétés sont équivalentes.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) si X et Y sont deux idéaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ leurs enveloppes injectives $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ peuvent se mettre sous la forme $\hat{X} = \hat{A}f$, $\hat{Y} = \hat{A}g$, où f et g dont deux idempotents de $\hat{A}e$. De l'hypothèse $X \cap Y = 0$ on déduit $\hat{A}f \cap \hat{A}g = (0)$. Il en résulte que, si a est un élément de $\hat{A}$ on a, en posant $B = e\hat{A}e$, $Baf \cap Bg = 0$; ceci entraîne, compte tenu du fait que l'anneau B est fortement régulier, $ag\hat{a}f \neq 0$ (proposition 0.1. (ii)), et à fortiori $g(egaf) = gaf = 0$. Le $\hat{A}$-module $\mathrm{Hom}(\hat{A}f, \hat{A}g)$ égal à $g\hat{A}f$ est donc nul, et par suite $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ est nul.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) soient f et g deux idempotents de l'anneau $B = e\hat{A}e$ tels que $Bf \cap Bg = 0$; nous allons montrer que $gf = 0$, ce qui permettra de conclure en vertu de la proposition 0.1. (propriété (iii)). L'hypothèse $Bf \cap Bg = 0$ entraîne $\hat{A}f \cap \hat{A}g = 0$; s'il existait un homomorphisme non nul de $\hat{A}f$ dans $\hat{A}g$, on pourrait trouver deux idéaux X et Y de A, inclus dans $\hat{A}f$ et $\hat{A}g$ respectivement et tels que φ induise un homomorphisme non nul de X dans Y, X et Y vérifiant les hypothèses du (ii) et $\mathrm{Hom}(X,Y) \neq 0$. Ceci étant impossible on a $g\hat{A}f = \mathrm{Hom}(\hat{A}f, \hat{A}g) = 0$ d'où $gf = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Si x et y sont deux éléments de $\hat{A}e \cap A$ tels que $Ax \cap Ay = 0$ on a $\mathrm{Hom}(Ax, Ay) = 0$, ce qui implique $xy = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iiii) évident.

Supposons maintenant l'anneau A semi-premier et montrons l'implication ;

(iiii) $\Longrightarrow$ (ii). Soient X et Y deux idéaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ et tels que $X \cap Y = 0$. Considérons un homomorphisme φ de X dans Y, soit x un élément de $X \cap I$ dont l'image $y = \varphi(x)$ soit dans $Y \cap I$. Pour tout élément a de A on a $Ay \cap A\,ex = 0$ soit, en vertu de (C), $y\,ax = 0$; d'autre part l'annulateur de x étant inclus dans l'annulateur de y on a, d'après ce qui précède, $yAy = 0$, soit $(Ay)^2 = 0$, et comme A est semi-premier $y = 0$. On a donc montré que $\varphi(X \cap I) \cap I = 0$, d'où $\varphi(X \cap I) = 0$ soit enfin $\varphi(X) = 0$ puisque A est à idéal singulier à gauche nul.

<u>Théorème 1.2.</u>

Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul ; considérons les deux propriétés suivantes :

(i) $\hat{A}$ est de type I

(ii) Tout idéal à gauche non nul X de A, contient un idéal à gauche non nul Y vérifiant la condition (C).

Alors on a l'implication : (i) $\Longrightarrow$ (ii).

et si de plus A est semi-premier les deux propriétés sont équivalentes.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) il suffit de démontrer l'assertion dans le cas où X est un idéal à gauche compmément dans A. X se met alors sous la forme $\hat{A}f \cap A$ où f est un idempotent de $\hat{A}$. $\hat{A}$ étant de type I, l'idéal $\hat{A}f$ contient un idempotent abélien non nul e (théorème 1 de [9]) et d'après la proposition 1.1., $y = \hat{A}e \cap A$ vérifie la condition (C).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) pour démontrer que $\hat{A}$ est de type I, il suffit de vérifier que pour tout idempotent f de $\hat{A}$, il existe un idempotent non nul e contenu dans $\hat{A}f$ [7]. $X = \hat{A}f \cap A$ est un idéal à gauche complément dans A qui par hypothèse contient un idéal à gauche Y non nul vérifiant (C). Si $\hat{A}e$ est l'enveloppe injective de Y, $\hat{A}e \cap A$ est extension essentielle de l'idéal à gauche Y de A vérifiant (C) et d'après la proposition 1.1. e est un idempotent abélien de $\hat{A}$.

Proposition 1.3.

Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul tel que $\hat{A}$ soit de type I ; alors A ne contient pas de nilidéal non nul.

Supposons en effet que X soit un nilidéal non nul de A, l'enveloppe injective de X contient un idempotent abélien non nul e. $Y = \hat{A}e \cap X$ est un nilidéal non nul ; les éléments de eYe sont des éléments nilpotents de l'anneau réduit $e\hat{A}e$ (prop. 0.1) on a donc eYe=0, soit $(Ye)^2=Y^2=0$, et par conséquent Y=0 ce qui est impossible. Nous dirons qu'un anneau A vérifie la propriété P si tout idéal à gauche complément non nul contient un idempotent différent de zéro.

On rappelle qu'un anneau de Zorn A [5] est un anneau tel que tout idéal à gauche (ou à droite, c'est équivalent), qui n'est pas un nilidéal contient un idempotent non nul. Le radical de Jacobson R de A est le plus grand nilidéal de A, et dire que R est nul équivaut à dire que tout idéal à gauche non nul contient un idempotent différent de zéro et dans ce cas A est un anneau à idéal singulier à gauche (resp. à droite) nul.

Lemme 1.4.

Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P ; alors :

(i) Si e est un idempotent de A, eAe est un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P.

(ii) Si e est un idempotent abélien de A, e est un idempotent abélien de $\hat{A}$.

(i) on montre facilement que si I et J sont deux idéaux à gauche de $\hat{A}$, I essentiel dans J alors eJe est extension essentielle de eIe et les idéaux compléments dans eAe sont de la forme eKe, où K est un idéal complément à gauche dans A.

(ii) compte-tenu de la proposition 1.1., il suffit de démontrer que si A est un anneau semi-premier, à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P, et dont les idempotents sont centraux, alors il vérifie la condition (C). Soient X un idéal à gauche de A et K un idéal à gauche complément relatif de X dans A. La propriété P entraîne que K est extension essentielle d'une somme directe $S = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$ où les e_i sont des idempotents de A. Les idempotents e_i étant centraux on a pour tout $i \in I$, $e_iX = 0$, et par suite $(\bigoplus_{i \in I} Ae_i)X = 0$;

on en déduit $SX = 0$ puisque A est à idéal singulier à gauche nul. Pour conclure, il suffit de remarquer que si x et y sastifont à $Ax \cap Ay = 0$, tout complément K relatif de Ay contenant x, vérifie $Ky = 0$.

Théorème 1.5.

Pour un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul et satisfaisant à la propriété P les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout idéal complément à gauche non nul contient un idempotent abélien différent de zéro.

(ii) $\hat{A}$ est de type I.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit f un idempotent non nul de $\hat{A}$. $\hat{A}f \cap A$ est un idéal à gauche complément dans A qui contient un idempotent abélien e non nul. Le lemme 1.4. montre que e est un idempotent abélien de $\hat{A}$ et tout idéal à gauche non nul de $\hat{A}$ contient un idempotent abélien différent de zéro, $\hat{A}$ est donc de type I. [7]

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

Soit X un idéal complément à gauche dans A, avec X non nul. Il existe un idempotent f de A tel que $X = \hat{A}f \cap A$; soit e un idempotent abélien $\hat{A}$ contenu dans X et non nul. $\hat{A}e \cap A$ est un idéal à gauche complément contenant un idempotent non nul g et g est un idempotent abélien de A contenu dans X.

En particulier, ce théorème caractérise les anneaux de Zorn sans nilidéal non nul, dont l'enveloppe injective est de type I.

Corollaire 1.6.

Soit A un anneau de Zorn dont le radical de Jacobson est nul ; alors si A est un anneau de Baer, dire que A est de type I équivaut à dire que $\hat{A}$ est de type I.

Exemple :

Soit A un anneau dont le radical de Jacobson est nul ; si le socle gauche de A est essentiel dans A alors A est un anneau de Zorn dont l'enveloppe injective est de type I.

Remarque :

Il existe des anneaux de Baer A de type I, dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ est de type I, bien que A ne soit pas semi-premier :

Soit A l'anneau des matrices M triangulaires avec

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$$ a, b, c élément d'un corps K.

A est de type I, $\hat{A}$ est semi-simple et l'idéal bilatère ensemble des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix}$$

est nilpotent.

On a de façon plus générale le résultat suivant :

Proposition 1.7.

Soit A un anneau de Baer extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à gauche co-irréductibles, alors A et $\hat{A}$ sont de type I.

Rappelons qu'un module est dit co-irréductible si son enveloppe injective est indécomposable. On sait [3] que $\hat{A}$ est produit d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels, donc est de type I.

Montrons maintenant que A est de type I. Soit h un idempotent central de A tel que b = Ah ne contienne aucun idempotent abélien ; l'anneau B vérifie les mêmes conditions que A, il suffit donc pour démontrer la propriété, de prouver qu'un anneau de Baer non nul B extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à gauche co-irréductibles, contient un idempotent abélien différent de zéro.

Soit Bx, x ≠ 0, un idéal à gauche co-irréductible de B ; et soit Be l'annulateur à gauche de x, où e est un idempotent de B. B(1-e) est un idéal à gauche co-irréductible de B, dont l'enveloppe injective $\hat{B}(1-e)$ est un idéal simple de $\hat{B}$. (1-e) B(1-e), sous-anneau du corps (1-e) $\hat{B}$(1-e), est intègre, et (1-e) est donc abléien.

II - Enveloppes injectives des anneaux réduits.

Dans les démonstrations, la propriété suivante sera fréquemment utilisée.

Si x est un élément d'un anneau réduit A, la relation ax = 0 entraîne xa = 0 et l'annulateur de x est un idéal bilatère noté Ann x ; de plus la relation

$A x \cap \mathrm{Ann}(x) = 0$ montre que A est un anneau à idéal singulier nul.

Théorème 2.1

Pour un anneau réduit A, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\hat{A}$ est de type I.
(ii) La relation $Ax \cap Ay = 0$, où x et y sont deux éléments de A, entraîne $xy = 0$.
(iii) $\hat{A}$ est fortement régulier.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soient x et y deux éléments non nuls de A satisfaisant à $Ax \cap Ay = 0$
pour tout élément u de A on a : $A\,x\,u\,x \cap A\,y\,u\,x = 0$,
en effet la relation $a\,y\,u\,x = b\,y\,u\,x$,
entraîne la suite d'implications suivantes :

$$(ay - bx)u\,x = 0 \Longrightarrow u\,x(ay - bx) = 0 \Longrightarrow u\,x\,a\,y = u\,x\,b\,x \Longrightarrow u\,x\,a\,y = 0 \Longrightarrow ay\,u\,x = $$

Par suite, si $A\,u\,x$ vérifie la condition (C), on a
$(y\,u\,x)(x\,u\,x) = 0 \Longrightarrow y(u\,x^2)^2 = 0 \Longrightarrow (u\,x^2)\,y\,(u\,x^2) = 0$,
d'où $y\,u\,x^2 = 0$, on en déduit $u\,x\,y\,u\,x = 0$, soit finalement $u\,xy = 0$.

Le théorème 1.2. montre que Ax est extension essentielle d'une somme directe $S = \bigoplus_{i \in I} A\,u_i x$, d'idéaux $A\,u_i\,x$ vérifiant la condition (C).
Ce qui précède entraîne :

$$u_i\,xy = 0, \text{ quel que soit } i \in I, \text{ d'où } Sy = 0$$

A étant un anneau à idéal singulier à gauche nul, y qui annule S, annule toute extension essentielle de S, donc Ax. D'où finalement $xy = 0$, ce qui achève la démonstration.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) C'est une conséquence facile des propositions 1.1 et 0.1
L'équivalence des assertions (ii) et (iii) a été démontrée dans [8].

(iii) $\Longrightarrow$ (i) évident.

On rappelle qu'un anneau de Baer est de type III, s'il ne contient d'idempotents finis non nuls.

Théorème 2.2.

Soit A un anneau réduit; l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A se décompose de façon unique en produit de deux anneaux $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ où $\hat{A}_1$ (resp. $\hat{A}_2$) est un anneau fortement régulier injectif (resp. un anneau régulier auto-injectif à gauche de type III).

D'après Kaplansky [7], il existe un idempotent central h de $\hat{A}$ où $\hat{A}h$ est de type I et où $\hat{A}(1-h)$ ne contient pas d'idempotents abéliens non nuls.

Pour démontrer le théorème il suffit de prouver qu'il n'existe pas d'idempotents finis non nuls dans $\hat{A}(1-h)$.

Supposons que f soit un idempotent fini non nul de $\hat{A}(1-h)$; $\hat{A}f$ ne contient pas d'idempotents abéliens non nuls, et il existe donc, d'après la proposition 1.1, deux éléments x et y de $X = \hat{A}f \cap A$ satisfaisant à

$Ax \cap Ay = 0$, $yx \neq 0$

La démonstration de l'implication (i) ===> (ii) du théorème 2.1. montre que l'on a $Ax^2 \cap Ayx = 0$ et Ax^2 n'est pas un sous-module essentiel de Ax. Or, A étant un anneau réduit $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(x^2)$ et les modules Ax et Ax^2 sont isomorphes. On en déduit que l'enveloppe injective de Ax est isomorphe à un de ses facteurs directs propres, ce qui contredit le fait que f soit un idempotent fini.

Pour terminer la démonstration, il faut prouver que l'anneau $\hat{A}h$ est réduit. La démonstration de l'assertion (i) ===> (ii) du théorème 2.1. se transporte sans aucun changement et elle montre que dans l'idéal $\hat{A}h \cap A$ de A la relation $Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$, les propositions 1.1. et 0.1. montrent que h est un idempotent abélien, et que $\hat{A}h$ est réduit.

<u>Corollaire 2.3.</u> [10]

Soit A un anneau intègre, si A admet un corps des fractions à gauche K, alors $\hat{A} = K$, sinon $\hat{A}$ est de type III.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CAILLEAU : Anneaux Baer, exposé n° 3, Séminaire d'Algèbre non commutative 1969-70.

[2] A. CAILLEAU et G. RENAULT : Sur l'enveloppe injective des Anneaux semi-premiers à idéal singulier nul (à paraître J. of Algebra).

[3] A. CAILLEAU : Anneau associé à un module riche en co-irréductibles. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264 (1967) (p. 1040-1042).

[4] A. CAILLEAU et G. RENAULT : Sur l'enveloppe injective des anneaux de Baer. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969) (p. 1381-1383).

[5] N. JACOBSON : Structure of rings. Amer. Math. Soc. Publ. Vol. 37, Providence (1956).

[6] JOHNSON (R. E.) et WONG (E. T.) : Self-injective rings, Canad. Math. Bull., Vol. 2 (1959), p. 167-174.

[7] I. KAPLANSKY : Rings of Operators. Benjamin (1968).

[8] G. RENAULT : Anneaux réduits non commutatifs : J. Math. pures et Appl. 4 (1967), p. 203-214.

[9] J. E. ROOS : Reports fo the Midwest category Seminar (Springer) Berlin (1967) p. 156-181.

[10] J. E. ROOS : Sur l'anneau maximal de fractions de Aw*. Algèbres et des anneaux de Baer. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266 (1968), p. 120-123.

[11] Y. UTUMI : On rings of which any one sided quotient rings are two-sided. Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), p. 141-147.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 5 du 8 décembre 1969.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX SEMI-PARFAITS.

Par J.Y. CHAMARD

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Dans tout ce qui suit, les anneaux sont unitaires, les modules sont des A-modules à gauche, et R désigne le radical de Jacobson de A.

Nous nous proposons d'étudier les anneaux semi-parfaits, introduits par Bass dans [1], et qui soht les anneaux tels que tout module de type fini à gauche ou à droite possède une douverture projective. Nous donnons diverses caractérisations et propriétés de ces anneaux aux paragraphes 2 et 3. Deux hypothèses supplémentaires, l'auto injectivité à gauche de l'anneau, ou le fait que $2(R)$ soit un idéal essentiel (ces deux hypothèses étant vérifiées dans le cas d'un anneau presque frobénusien à gauche) sont alors faites, respectivement aux paragraphes 4 et 5, ce qui permet d'avoir un certain nombre d'autres résultats.

Plan.

Nous donnons ici les démonstrations des résultats publiés dans une note au compte-rendu de l'Académie des Sciences [11].

§1 - SOUS-MODULES SUPERFLUS, RADICAUX ET COUVERTURES PROJECTIVES.

Définition 1.1.

Un sous-module N d'un module M est dit superflu dans M si la condition

$$N + X = M \quad , \quad \text{avec} \quad X \subset M$$

entraîne $X = M$.

- On vérifie facilement les propriétés suivantes :

1- Soit $N \subset T \subset M$;

. T superflu dans $M \Longrightarrow N$ superflu dans M .

. N superflu dans $T \Longrightarrow N$ superflu dans M .

. T superflu dans $M \Longrightarrow T/N$ superflu dans M/N.

2- Si des sous-modules $(N_i)_{i=1\ldots n}$ de M sont superflus dans M, il en est de même pour $\sum_{i=1}^{n} N_i$ (ceci est en général faux lorsque la somme est infinie).

Définition 1.2.

Soit M un A-module, et $(M_i)_{i \in I}$ la famille (éventuellement vide) des sous-modules maximaux de M ; on appelle radical de M, et on note $R(M)$, le sous-module

$$R(M) = \bigcap_{i \in I} M_i$$

Si l'ensemble I est vide, on prend $R(M)=M$. On note $R=R(A)$.

.../...

Proposition 1.3.

Soit M un A-module

1°) $RM \subset R(M)$

2°) Si M est projectif, $RM=R(M)\neq M$

-Démonstration.

1°) Soit N un sous-module maximal de M ; M/N étant simple, $R.(M/N)=0$, donc $RM\subset N$.

2°) Voir [1] proposition 2.7.

Corollaire.

Si P est un module projectif, RP ne contient aucun facteur direct de P.

-Démonstration.

Soit $P=Q\oplus L$, et supposons $Q\subset RP$.

$RP=RQ\oplus RL$ et

$Q=RP\cap Q= RQ\oplus (RL\cap Q)$ (modulari

$\quad = RQ$

Q étant projectif, on en déduit $Q=$

Proposition 1.4.

$R(M)$ est la somme des sous-modules superflus de M

-Démonstration.

Pour tout sous-module superflu S de M et tout sous-module maximal M_o de M, $S+M_o\neq M$ implique $S\subset M_o$; tout superflu est donc contenu dans $R(M)$.

Réciproquement, si x n'appartient pas à la somme des sous-modules superflus de M, Ax ne peut être superflu dans M ; il existe donc un sous-module propre N de M tel que

$$M=N+Ax.$$

.../...

M/N étant monogène, N est contenu dans un sous-module maximal M_o, qui vérifie donc $M=M_o + Ax$ ce qui prouve que x n'appartient pas à M_o, donc n'appartient pas à $R(M)$.

Remarque : cette proposition admet une proposition "duale" :

L'intersection des sous-modules essentiels de M est égale à la somme des sous-modules minimaux de M (i.e. au socle de M).

Lemme 1.5 (Théorème de Krull).

Si M est un A-module non nul de type fini, tout sous-module propre de M est contenu dans un sous-module maximal.

- Démonstration.

Soit $M=\sum_{i=1}^{n} Ax_i$.

$N \neq M$ implique l'existence d'un indice i_o tel que $x_{i_o} \notin N$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-modules de M contenant N et ne contenant pas x_{i_o} ; $\mathcal{F}$ est inductive non vide, donc contient un élément maximal M_o, qui est en fait un sous-module maximal de M, et qui contient N par construction.

Proposition 1.6.

Pour tout A-module M de type fini, $R(M)$ est le plus grand sous-module superflu de M.

-Démonstration.

On a vu (proposition 1.4) de tout sous-module superflu de M est contenu dans $R(M)$, il suffit donc de prouver que $R(M)$ est superflu dans M.

Soit donc $X \subset M$ tel que $M=R(M) + X$ (1)

si $X \neq M$, il est contenu (lemme 1.5) dans un sous-module maximal M_o ; or $R(M) \subset M_o$, et l'égalité (1) est impossible.

On a donc $M=X$, et $R(M)$ est superflu dans M.

.../...

Définition 1.7.

Un épimorphisme $M \xrightarrow{p} M' \longrightarrow 0$ est dit minimal si Ker p est superflu dans M ; on vérifie facilement que cette condition est équivalente à la suivante :

$\forall N \subset M$, $p(N)=M'$ implique $N=M$.

On appelle couverture projective d'un module M un épimorphisme minimal p d'un module projectif P sur M.

Proposition 1.8.

Soit $P(M) \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$ est une couverture projective de M, et si $P \xrightarrow{p'} M \longrightarrow 0$ est un épimorphisme de P dans M, il existe un épimorphisme f de P sur P(M), tel que $pof=p'$.

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "p'"] \arrow[dll, dashed, "f"'] & \\ P(M) \arrow[rr, "p"] \arrow[urr, dashed, "q"] & & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cet épimorphisme admet une section q, telle que

$P=\mathrm{Im}\, q \oplus \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, p'$ et $\mathrm{Ker}\, p' \cap \mathrm{Im}\, q$ superflu dans Im q .

-Démonstration.

L'existence d'un morphisme f tel que $pof=p'$ est assurée par le fait que P est projectif. On a alors :

$pof(P)=M=p(M)$, ce qui implique $f(P)=P(M)$ puisque p est minimal. P(M) étant projectif, il existe un morphisme

$$\begin{tikzcd} & & P(M) \arrow[d, "1"] \arrow[dll, dashed, "q"'] & \\ P \arrow[rr, "f"] & & P(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

q de P(M) dans P tel que $foq=1_{P(M)}$.

On vérifie facilement qu'alors $P=\mathrm{Im} q \oplus \mathrm{Ker}\, f$, et Ker f est évidemment contenu dans Ker p'.

Ker p étant superflu dans P(M), q(Ker p) est superflu dans Im q, et $p=p'oq$ implique $q(\mathrm{Ker}\, p)= \mathrm{Ker}\, p' \cap \mathrm{Im} q$.

.../...

Théorème 1.9.

Deux couvertures projectives d'un même module sont isomorphes.

-Démonstration.

Soient P_1 et P_2 deux couvertures projectives de M ; le raisonnement précédent prouve l'existence d'un épimorphisme f de P_1 sur P_2 tel que $p_2 \circ f = p_1$, et d'un monomorphisme g de P_2 dans P_1 tel que $f \circ g = 1_{P_2}$ (g est une rétraction de f)

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[d, "p_2"] \arrow[dl, bend left, "g"] & \\
P_1 \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "p_1"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On a donc $p_2 = p_1 \circ g$, d'où $p_1\left[g(P_2)\right] = p_2(P_2) = M = p_1(P_1)$; p_1 étant minimal, il s'en suit que $g(P_2) = P_1$, et donc g est un isomorphisme.

Proposition 1.10.

Soit $M \xrightarrow{p} M' \longrightarrow 0$ un épimorphisme minimal, et $P \xrightarrow{\pi} M' \longrightarrow 0$ une couverture projective de M'.

Tout morphisme π' de P dans M tel que $p \circ \pi' = \pi$ est une couverture projective de M.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\pi'"'] & \\
M \arrow[r, "p"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

-Démonstration.

L'existence de π' est assurée par le fait que P est projectif ; $\left[\pi'(P)\right] = M' = p(M)$ entraîne que p est surjectif ; en outre $\mathrm{Ker}\ \pi' \subset \mathrm{Ker}\ \pi$ superflu dans P prouve que π' est un épimorphisme minimal.

Proposition 1.11.

Soit P un module projectif ; les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. P/RP possède une couverture projective.

2. RP est superflu dans P.

-Démonstration.

$2 \Rightarrow 1$ est trivial.

.../...

$1 \Rightarrow 2$

Soit $Q \xrightarrow{p} P/RP \longrightarrow 0$ une couverture projective de P, et soit π l'épimorphisme canonique de P sur P/RP ; P étant projectif, il existe un morphisme g tel que $p \circ g = \pi$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\pi"] & \\ Q \arrow[r, "p"] & P/RP \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Soit $K = \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} \pi = RP$. On sait, d'après la proposition 1.8, que K est facteur direct de P ; le corollaire de la proposition 1.3 implique alors que $K=0$, $K \subset$ donc que g est un isomorphisme.

Il en résulte que $RP = g^{-1}(\operatorname{Ker} \pi)$ est superflu dans P.

§2 - CARACTERISATION DES ANNEAUX SEMI-PARFAITS.

Définition 2.1.

On dit qu'un module M est local s'il possède un seul sous-module maximal (qui sera alors $R(M)$.) ; ceci équivaut au fait que tout sous-module propre de M soit superflu dans M.
Un tel module est nécessairement monogène

Proposition 2.2.

Tout module injectif indécomposable projectif est local.

- Démonstration.

Voir [4] corollaire 2.5. et [7] lemme 3.

Lemme 2.3.

Toute couverture projective d'un module à gauche simple S est isomorphe à un facteur direct local Ae de A.

-Démonstration

S étant monogène, il existe un épimorphisme $A \longrightarrow S \longrightarrow 0$, donc (proposition 1.8.), toute couverture projective de S est isomorphe à un facteur direct Ae de A.
Soit $Ae \xrightarrow{p} S \longrightarrow 0$ une telle couverture projective.

$Re \subset \operatorname{Ker} p$ car $\operatorname{Ker} p$ est maximal ; $\operatorname{Ker} p \subset Re$ car $\operatorname{Ker} p$ est superflu (proposition 1.3.)

Donc $\operatorname{Ker} p = Re$ est maximal dans Ae ; c'est alors le plus grand sous-module de Ae, qui est ainsi un module local.

Théorème 2.4.

Soit $M = \bigoplus_{i \in I} M_i = N \oplus N'$, où les M_i sont de type dénombrable, tels que $\mathcal{E}nd_A(M_i)$ soit un anneau local.

Il existe $J \subset I$ tel que N soit isomorphe à $\bigoplus_{i \in J} M_i$.

-Démonstration.

Voir [10] théorème 1

.../...

Lemme 2.5.

L'anneau des endomorphismes d'un module projectif local est local.

-Démonstration.

Il suffit de remarquer que tout endomorphisme surjectif d'un projectif local est un automorphisme.

Remarque 2.6.

Tout module projectif local est isomorphe à un Ae , où e est un idempotent de A .

On démontre qu'un facteur direct Ae de A est local si et seulement si $\mathcal{E}nd\,(Ae) = eAe$ est un anneau local.

Théorème 2.7.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A .

1 Tout A-module à gauche de type fini possède une couverture projective.

2 Tout A-module à gauche simple possède une couverture projective.

3 $A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$, où les Ae_i sont locaux.

4 Tout A-module à gauche projectif est somme directe de projectifs locaux.

5 (i) $A/_R$ est semi-simple

(ii) Tout idempotent de $A/_R$ se relève en un idempotent ~~de~~

-Remarque.

La condition 5 étant symétrique, les conditions 1 à 4 sont équivalentes aux conditions 1' à 4' , où l'on remplace "gauche" par "droite".

Un anneau vérifiant les conditions précédentes sera dit semi-parfait.

.../...

-Démonstration du théorème.

1 ==> 2 trivial

2 ==> 3

Tout A-module simple S possède une couverture projective locale Ae , donc est isomorphe à $Ae/_{Re} = \bar{A} . \bar{e}$

Tout $A/_R$ -module simple est donc projectif, ce qui implique la semi-simplicité de $A/_R$.

Soit $A/_R = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, soit Ae_i une couverture projective de S_i , et soit $P = \prod_{i=1}^{n} Ae_i$.

P et A étant deux couvertures projectives de $A/_R$, le théorème 1.9. prouve que A est isomorphe à P .

3 ==> 4

Tout A-module libre est somme directe de projectifs locaux ; le théorème 2.4 et le lemme 2.5 prouvent qu'il en est de même pour tout module projectif.

4 ==> 5

(i) Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ locaux $A/_R = \sum_{i=1}^{n} Ae_i/_{Re_i}$ est semi-simple, en outre, R étant superflu dans A , on a

$$\bar{A} = A/_R = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i/_{Re_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{A}\,\bar{e_i}$$

(ii) Soit $\bar{e}$ un idempotent de $A/_R$; il existe des sous-ensembles I et J de $[1, \ldots, n]$ tels que

$$\bar{A}\,\bar{e} = \bigoplus_{i \in I} \bar{A}\,\overline{e_i}$$

et

$$\bar{A}\,(\bar{1} - \bar{e}) = \bigoplus_{j \in J} \bar{A}\,\overline{e_j}$$

Soient $P_1 = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$, $P_2 = \bigoplus_{j \in J} Ae_j$, et $P = P_1 \times P_2$.

P_1 (respectivement P_2) étant une couverture projective de $\overline{Ae}$ (respectivement de $\bar{A}\,(\bar{1} - \bar{e})$) , il existe d'après le théorème 1.9

un isomorphisme π de $P_1 \times P_2$ tel que $p \circ \pi = p_1 \times p_2$ (où p_1 et p_2 sont les épimorphismes minimaux de P_1 et P_2 sur $\overline{A}\overline{e}$ et $A(1 - e)$ respectivement)

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \times P_2 \arrow[dl, dashed, "\pi"'] \arrow[d, "p_1 \times p_1"] & \\
A \arrow[r, "p"] & \overline{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit f l'idempotent de A tel que

$$\pi(P_1) = Af \quad ; \qquad \pi(P_2) = A(1 - f)$$

On a $\overline{A}\overline{f} = p\,(Af)\; p \circ \pi(P_1) = p_1(P_1) = \overline{A}\overline{e}$;

de même $\overline{A}\,(\overline{1} - \overline{f}) = \overline{A}\,(\overline{1} - \overline{e})$;

l'unicité de la décomposition de $\overline{1}$ sur $\overline{A}\overline{e} \oplus \overline{A}\,(\overline{1} - \overline{e})$ prouve que $\overline{e} = \overline{f}$.

$5 \Longrightarrow 1$

$A/_R$ est semi-simple, donc somme de modules simples $(S_i)_{i=1\ldots n}$, qui sont isomorphes à des $\overline{A}\,\overline{e_i}$ d'après (ii) , où les e_i sont des idempotents de A .

Soit M un module de type fini ; M est isomorphisme à un quotient $P/_N$ d'un module libre de type fini P .

$P/_N \longrightarrow P/_{RP+N} \longrightarrow 0$ est un épimorphisme minimal, et $P/_{RP+N}$ est semi-simple, donc somme de simples $(S_j)_{j=1\ldots p}$ isomorphes à certains des S_i .

On peut alors construire une injection σ de $[1, \ldots, p]$ dans $[1, \ldots, n]^p$ telle que chaque S_j soit isomorphe à $\overline{A}\,\overline{e}_{\sigma(j)}$.

$$Q = \prod_{j \in J} Ae_{\sigma(j)} \qquad P/_{RP+N} = Q/_{RQ} \longrightarrow 0 \text{ est une}$$

couverture projective de $P/_{RP+N}$ (puisque RQ est superflu dans Q en vertu de la proposition 1.4), donc (proposition 1.10), c'est une couverture projective de M .

Exemples d'anneaux semi-parfaits.

1. Tout anneau artinien à droite ou à gauche (R est en effet nilpotent, donc nul, et on sait [5] proposition 1 page 72, que les idempotents se relèvent modulo un nil idéal) ; plus généralement, et pour la même raison, tout anneau semi-primaire ($A/_R$ semi-simple + R nilpotent) est semi-parfait.

2. Soit E un A-module injectif de dimension finie ;
Alors $\mathcal{A} = \mathrm{End}_A(E)$ est semi-parfait ; en effet : $\mathcal{A}/_{\mathcal{R}}$ est semi-simple d'après [6] théorème 2.2, et les idempotents de $\mathcal{A}/_{\mathcal{R}}$ se relèvent en des idempotents de $\mathcal{A}$ d'après [3] ,théorème 5.6.

3. Si P est un module projectif, somme directe de projectifs locaux, $\mathcal{A} = \mathcal{E}nd_A(P)$ est semi-parfait.

-Démonstration

-On démontre tout d'abord que

$\mathcal{A}/_{\mathcal{R}}$ est isomorphe à $\mathcal{E}nd_A\,(P/_{RP})$, c'est à dire à l'anneau des endomorphismes d'un module semi-simple de type fini, il en résulte que $\mathcal{A}/_{\mathcal{R}}$ est semi-simple.

. Soit alors $\overline{\alpha}$ un idempotent de $\mathcal{E}nd_A\,(P/_{RP})$, et soit $Q = P/_{RP}$.

$$Q = \overline{\alpha}(Q) \oplus (\overline{1} - \overline{\alpha})\,(Q) = Q_1 \oplus Q_2.$$

Q_1 et Q_2 étant des quotients de P , ils admettent des couvertures projectives P_1 et P_2 , et la démonstration se termine ~~pour~~ comme pour 4 ==> 5 du théorème 2.7 .

§ 3 - PROPRIETES DES ANNEAUX SEMI-PARFAITS

Proposition 3 . 1.

Tout quotient d'un anneau semi-parfait par un idéal bilatère est un anneau semi-parfait.

- Démonstration

Soit S un A/I - module à gauche simple; S est un A-module simple, donc il existe un facteur direct local Ae de A tel que S soit isomorphe à Ae/Re.

$$I \cdot S = 0 \quad \text{implique} \quad I \cdot Ae = Ie \subset Re \;;$$

on peut donc définir un épimorphisme

$$Ae/Ie \longrightarrow Ae/Re \longrightarrow 0 ,$$

et $Ae/Ie = A/I.\,\bar{e}$ est un facteur direct de A/I, donc est un A/I-module projectif.

En outre, Ae étant local, il en est de même pour Ae/Ie, ce qui prouve que S possède une A/I-couverture projective.

Proposition 3 . 2.

Soit A un anneau semi-parfait, et soient P et Q deux A-module projectifs. P est alors isomorphe à Q si et seulement si P/RP est isomorphe à Q/RQ.

- Démonstration

La condition est évidemment nécessaire.

Soient donc $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ et $Q = \bigoplus_{j \in J} Q_j$

(les $(P_i$ et les Q_j étant locaux) tels que P/RP soit isomorphe à Q/RQ.

$$P/RP = \sum_{i \in I} P_{i/RP_i} \quad \text{est semi-simple} \;;$$

démontrons que cette somme est directe. La propriété étant de caractère fini, il suffit de la prouver lorsque I est fini; or ceci résulte alors de ce que $R\,P$ est superflu dans P.

$$\bigoplus_{i \in I} P_{i/RP_i} \quad \text{est donc isomorphe à} \quad \bigoplus_{j \in J} Q_{j/R\,Q_j} \;;$$

il existe une bijection σ de I sur J tel que $P_{i/R\,P_i}$ soit isomorphe à $Q_{\sigma(i)/R\,Q_{\sigma(i)}}$

ceci entraîne que P_i est isomorphe à $Q_{\sigma(i)}$, puisque ces deux modules sont des couvertures de $P_{i/R\,P_i}$; ce raisonnement étant vrai pour tout indice i, P est isomorphe à Q

.../...

Définition 3. 3.

Un A-module G est dit générateur de $|\mathrm{Mod}\, A_s$ si tout A-module à gauche M est quotient d'un $G^{(I)}$.

On démontre ([2] , proposition 1-16) qu'un module projectif P est un générateur si et seulement si tout A-module à gauche simple est un quotient de P.

Proposition 3. 4.

Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ un anneau <u>semi-parfait</u> ;

Soit $I \subset [1, \ldots, n]$ tel que chaque $(Ae_j)_{j = 1 \ldots n}$ soit isomorphe à un et à un seul $(Ae_i)_{i=1\ldots n}$;

soit $G_o = \bigoplus_{i=1} Ae_i$.

Un A-module projectif P est <u>générateur</u> de $|\mathrm{Mod}\, A_s$ si et seulement si G_o est isomorphe à un <u>facteur direct</u> de P.

- Démonstration

$A/R = \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{A}\,\bar{e}_i$ étant semi-simple, tout A-module simple est isomorphe à l'un des $\bar{A}\,\bar{e}_i$, donc est quotient de G_o ; G_o étant projectif, c'est donc un générateur de $|\mathrm{Mod}\, A_s$, et tout module contenant G_o comme facteur direct est encore générateur.

Réciproquement, soit P un module projectif, d'après le théorème 2.7, P est somme directe de modules $(P_j)_{j \in J}$ isomorphes aux $(Ae_i)_{i \in I}$; en outre, si on suppose que P est générateur de $|\mathrm{Mod}\, A_s$, tout simple $(Ae_i/Re_i)_{i \in I}$ est isomorphe à un quotient de P ; il en résulte que chaque Ae_i, $i \in I$, est isomorphe à l'un des P_j ; les $(Ae_i)_{i \in I}$ étant par hypothèse 2 à 2 non isomorphes, G_o est isomorphe à un facteur direct de P.

Théorème 3. 5.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

.../...

① A est <u>semi-parfait</u>.

② Pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A, **il existe un <u>idempotent</u> e** et un idéal $\mathfrak{b}$ <u>contenu dans $R(1-e)$</u> tels que :

$$\mathfrak{a} = Ae \oplus \mathfrak{b}$$

③ Pour tout idéal à gauche <u>maximal</u> $\mathfrak{m}$ de A, il existe un idempotent e et un idéal $\mathfrak{b}$ contenu dans R tels que :

$$\mathfrak{m} = Ae \oplus \mathfrak{b}$$

- <u>Démonstration</u> :

1 ====> 2 Soit $A\mathcal{E}$ une couverture projective de $A/\mathfrak{a}$; il existe un épimorphisme scindé f de A sur $A\mathcal{E}$ (proposition 1-8) qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "q"] \arrow[dl, dashed, shift right, "f"'] \\ A\mathcal{E} \arrow[r, "p"] \arrow[ur, dashed, shift right, "g"'] & A/\mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

Soit $\operatorname{Ker} f = Ae$;

$Ae = \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(p\circ f) = \operatorname{Ker} q = \mathfrak{a}$.

$A = Ae \oplus A(1-e)$ implique

$\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{a} = Ae \oplus (A(1-e) \cap \mathfrak{a})$;

Posons $\mathfrak{b} = A(1-e) \cap \mathfrak{a}$

$q(\mathfrak{a}) = 0$ entraîne $q(\mathfrak{b}) = 0 = p \circ f(\mathfrak{b})$,

d'où $f(\mathfrak{b}) \subset \operatorname{Ker} p$ est superflu dans $A\mathcal{E}$, et donc $g\circ f(\mathfrak{b})$ est superflu dans A.

Mais $\mathfrak{b} \cap \operatorname{Ker} f = 0$ implique que $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $g\circ f(\mathfrak{b})$, donc est également superflu dans A ; il en résulte que $\mathfrak{b}$ est contenu dans $A(1-e) \cap R = R(1-e)$.

.../...

2 ====> 3 Trivial

3 ====> 1

Soit S un A-module simple ; il est isomorphe à un $A/\mathfrak{m}$, avec $\mathfrak{m} = Ae \oplus \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \subset R$.

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}e \oplus \mathfrak{b}(1-e) \quad \text{implique}$$

$$0 = \mathfrak{b} \cap Ae = \mathfrak{b}e \oplus [\mathfrak{b}(1-e) \cap Ae] \ ;$$

On a donc $\mathfrak{b}e = 0$, d'où $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(1-e) \subset R(1-e)$; et la maximalité de $\mathfrak{m}$ implique $\mathfrak{b} = R(1-e)$.

On a alors $A/\mathfrak{m} \simeq A(1-e)/R(1-e) = Af/Rf$,

en posant $f = 1-e$.

Rf est superflu dans Af, et donc $Af \longrightarrow A/\mathfrak{m} = S \longrightarrow 0$

est une couverture projective de S.

Il en résulte que l'anneau A est semi-parfait.

Remarque.

On démontre sans difficulté que, si A est semi-parfait, et si P est un A-module projectif de type fini il existe, pour tout sous-module M de P, un facteur direct Q de P et un sous-module N de RL (où $P = Q \oplus L$) tels que

$$M = Q \oplus N ,$$

Lemme 3. 6.

Si e et f sont deux idempotents d'un anneau A tels que

$$Ae + Af = A \qquad \text{et} \qquad Ae \cap Af = R,$$

on a $A = Ae \oplus Af$

- Démonstration :

Soit p la restriction à Af de la projection canonique de A sur A/Ae.

$$\operatorname{Ker} p = Ae \cap Af \subset Rf ,$$

.../...

donc $Af \xrightarrow{p} A/Ae \longrightarrow 0$ est une couverture projective de Af.

A/Ae étant projectif, p est un isomorphisme, et

$$Ae \cap Af = \mathrm{Ker}\ p = 0.$$

Théorème 3. 7.

Soit A un anneau semi-parfait ; pour tout idempotent $\bar{a}$ de A/R; il existe un idempotent e de A, contenu dans $A\,a$, tel que $\bar{e} = \bar{a}$

- Démonstration.

Il existe, d'après le théorème 3-5, des idempotents f et g de A tels que

$$Aa = Af \oplus \mathfrak{a}\ , \qquad \mathfrak{a} \subset R\ (1-f)$$
$$A\ (1-a) = Ag \oplus \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{b} \subset R\ (1-g)\ .$$

On a donc $Af + Ag = A$;
en outre $\bar{A}\,\bar{f} \cap \bar{A}\,\bar{g} = 0$ entraîne $Af \cap Ag \subset R$;
le lemme 3-6 montre que $A = Af \oplus Ag$.

Soit e l'idempotent de A tel que

$$Af = Ae \quad \text{et} \quad Ag = A\ (1-e)\ ;$$

$\bar{A}\,\bar{a} = \bar{A}\,\bar{e}$ et $\bar{A}\,(\bar{1} - \bar{a}) = \bar{A}\,(\ - \bar{e})$ implique $\bar{a} = \bar{e}$.

Corollaire 3. 8.

Un idéal à gauche (ou à droite) $\mathfrak{a}$ d'un anneau semi-parfait est contenu dans R si et seulement s'il ne contient aucun idempotent non nul.

§ 4 - ANNEAUX SEMI-PARFAITS INJECTIFS

Définition 4 . 1 .

On dit qu'un module M est complètement décomposable s'il est somme directe d'injectifs indécomposables.

On vérifie qu'un module injectif de dimension finie est complètement décomposable ;
Un anneau est noethérien à gauche si et seulement si tout A-module à gauche injectif est complètement décomposable ([9] théorèmes 4 . 2 . et 4 . 3)

Proposition 4 . 2 .

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A .

1. A est semi-parfait, auto injectif à gauche.
2. A_S est injectif de dimension finie.
3. A_s est complètement décomposable.
4. A_s est injectif et A/R est semi-simple.
5. Tout A-module à gauche projectif est complètement décomposable.

- Démonstration

1 => 1 évident

2 => 3 évident

3 => 4

A est somme directe (finie) d'injectifs indécomposables Ae_i ; d'après la proposition 2 . 2 , ces Ae_i sont locaux, donc A/R est semi-simple.

4 => 3

es idempotents de A/R se relèvent d'après [3] théorème 5 . 6 .

3 => 5 Résulte du théorème 2 . 4

5 => 1 est évident.

.../...

Proposition 4 . 3 .

Tout élément régulier à gauche d'un anneau semi-parfait injectif à gauche est inversible.

- Démonstration

Soit $s \in A$ tel que $e(s) = 0$, et soit $\varphi \in \mathcal{E}nd\,(A)$ défini par $\varphi\,(a) = as$;

φ étant un monomorphisme de A, $\varphi\,(A)$ est injectif, donc facteur direct de A_S :

$$A_S = \varphi\,(A_S) \oplus \mathfrak{a}.$$

Or dim A_S est finie, et dim A_S = dim $\varphi\,(A_S)$; on a donc $\mathfrak{a} = 0$, et φ est un isomorphisme, c'est à dire que s est inversible.

Proposition 4 . 4 .

Soit A un anneau semi-parfait injectif à gauche, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux à gauche de A et e un idempotent de A tels que

$$\mathfrak{a} = Ae \oplus \mathfrak{b} .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathfrak{b} \subset R$
2. Ae est un injectif maximal contenu dans $\mathfrak{a}$.

- Démonstration :

1 => 2

Soit $Ae \subset Af \subset \mathfrak{a}$:

$$Af = Af \cap (Ae \oplus \mathfrak{b}) = Ae \oplus (\mathfrak{b} \cap Af) ;$$

Af étant facteur direct de A , il en est de même pour $\mathfrak{b} \cap Af$, qui est en outre contenu dans R . On a donc $\mathfrak{b} \cap Af = 0$,

d'où $Ae = Af$

.../...

2 => 1

On ~~peut~~ décomposer $\mathfrak{b}$, d'après le théorème 3 . 5 , en

$$\mathfrak{b} = Af \oplus C \quad , \quad C \subset R .$$

On a donc $\mathfrak{a} = Ae \oplus Af \oplus C$.

Or $Ae \oplus Af$ est injectif ; la maximalité de Ae implique que $f = 0$, d'où $\mathfrak{b} \subset R$.

<u>Proposition 4 . 5 .</u>

On reprend les notations de la proposition 3 . 4 .

Les <u>générateurs</u> de $\mathbb{I}\mathrm{Mod}\, A_S$, pour un <u>anneau semi-parfait injectif</u> A , sont les <u>modules contenant G_σ</u> .

- <u>Démonstration</u> :

Remarquons que G_o est ici injectif, et donc que tout module M contenant G_o le contient comme facteur direct, ce qui prouve qu'alors M est un générateur.

Réciproquement, soit M un générateur de $\mathbb{I}\mathrm{Mod}\, A_S$; il existe, pour tout $i \in I$, un morphisme f de M dans Ae_i tel que $p_i \circ f_i \neq 0$, p_i étant la surjection canonique de Ae_i sur Ae_i/Re_i .

On a donc $p_i\,(f_i(M)\,) = p_i\,(Ae_i)$, ce qui implique $f_i(M) = Ae_i$, puisque p_i est un épimorphisme minimal.

f_i est alors surjectif, donc admet une rétraction puisque Ae_i est projectif ; chaque $(Ae_i)_{i \in I}$ est ainsi isomorphe à un facteur direct M_i de M . La famille des $(M_i)_{i \in I}$ est indépendante, car les $(Ae_i)_{i \in I}$ sont injectifs indécomposables 2 à 2 non isomorphes.

.../...

Proposition 4. 6.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A .

① A admet un anneau total de fractions à gauche semi-parfait injectif.

② (i) $\dim A_S < \infty$

(ii) $\forall x \in E(A)$, $\exists$ s régulier dans A, tel que $sx \in A$.

- Démonstration : voir [12]

-:-:-:-:-:-:-:-

§5 - ANNEAUX SEMI-PARFAITS DE SOCLE GAUCHE ESSENTIEL A DROITE.

Théorème 5.1.

Si A est semi-parfait, et si son socle gauche est essentiel dans A_d, alors tout A-module à gauche simple est isomorphe à un idéal.

-Démonstration.

Soit $S \simeq A/m$ un idéal à gauche simple ; il existe d'après le théorème 3.5 un idempotent e de A et un idéal $\mathfrak{b}$ tels que

$m = Ae \oplus \mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{b} = R(1-e)$; on a donc $Z(m) = (1-e)A \cap Z(\mathfrak{b})$, et $\mathfrak{b} \subset R$ implique $Z(R) \subset Z(\mathfrak{b})$. Or $R.S(A_s) = 0$ entraîne $S(A_s) \subset Z(R)$, et l'hypothèse faite sur le socle prouve que $Z(R)$ est un idéal à droite essentiel : $Z(m)$ est donc non nul. Soit alors $a \in A$ tel que $ma = 0$, $a \neq 0$. $l(a) = m$ entraîne que A/m est isomorphe à Aa, donc que S est isomorphe à un idéal de A.

Définition 5.2.

Si M est un A-module (à gauche ou à droite, on note $M^* = Hom(M,A)$. soit δ_M l'homorphisme canonique de M dans M^{**} défini par :

$\forall f \in M^*, \quad \delta_M(x)[f] = f(x)$.

On dit que M est sans torsion (respectivement réflexif) si δ_M est un monomorphisme (respectivement un isomorphisme).

Proposition 5.3.

Si A est un anneau tel que tout A-module à droite simple soit isomorphe à un idéal, toute suite exacte

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow F$$

où P est un A-module à gauche projectif de type fini et où F est un module à gauche sans torsion, est scindée.

Démonstration : Voir [2]

Corollaire 5.4.

A est un anneau semi-parfait de socle droit essentiel à gauche, tout sous-module projectif de type fini de tout A-module à gauche sans torsion

.../...

est facteur direct.

En particulier, sous les hypothèses précédentes, tout sous-module projectif de type fini d'un module projectif P est facteur direct de P.

Proposition 5.5.

Soit A un anneau semi-parfait de socle gauche essentiel à droite ; pour tout idéal à droite D, il existe un idempotent e de A tel que $Zl(D)$ soit essentiel dans eA.

-Démonstration.

Soit $l(D)=Af \oplus \mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{b} \subset R$; $Zl(D)=(1-f)A \cap Z(\mathfrak{b})$ et $Z(\mathfrak{b})$ est essentiel dans A_d, donc $(1-f)A$ est essentiel dans $Zl(D)$.

Proposition 5.6.

Sous les hypothèses précédentes, $R=lZ(R)$.

-Démonstration.

On a toujours $R \subset lZ(R)$; pour obtenir l'autre inclusion il suffit (corollaire 3.8) de prouver que $lZ(R)$ ne contient aucun idempotent non nul :

Or $Ae \subset lZ(R)$ implique $Z(R) \subset (1-e)A$, et l'essentialité de $Z(R)$ dans A_d entraîne $1-e=1$, d'où $e=0$.

§6 - ANNEAUX PARFAITS A GAUCHE.

Définition 6.1.

Un idéal I est dit T-nilpotent à gauche si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, il existe un entier n_0 tel que

$$a_1 . a_2 \dots a_{n_0} = 0 .$$

Un tel idéal est évidemment un nil-idéal ; tout idéal nilpotent est T-nilpotent à droite et à gauche.

Théorème 6.2.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour le radical R d'un anneau A :

① R est T-nilpotent à gauche.

② Pour tout A-module à gauche non nul M, RM est superflu dans M.

③ $R^{(\mathbb{N})}$ est superflu dans $A^{(\mathbb{N})}$.

-Démonstration.

1 ==> 2 Il suffit de prouver, que pour tout $M\neq 0$, $RM\neq M$; en effet, s'il en est ainsi, soit $X\subset M$ tel que $RM+X=M$, et soit p la projection de M sur M/X ; $p(M)=p(RM)=R.p(M)$ entraîne $p(M)=0$, d'où $M=X$.

Supposons donc qu'un module non nul M vérifie l'égalité $M=RM$, et soit $x\neq 0$ un élément de M.

$$x=\sum_{i=1}^{n_1} Z_{1,i}\, x_i$$

il existe un indice i_0 tel que $Z_{i_0}\, x_{i_0}\neq 0$; soit $a_1=Z_{i_0}$ et soit

$$x_{i_0}=\sum_{j=1}^{n_2} Z_{2,j}\, x_j$$; il existe j_0 tel que $a_1\, Z_{j_0}\, x_{j_0}\neq 0$, et on

pose $a_2=Z_{j_0}$. En itérant ce processus, on fait apparaître une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de R qui contredit la T-nilpotence à gauche de R.

.../...

2 ==> 3 est trivial.

3 ==> 1 soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de R, soit $L=A^{(\mathbb{N})}=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Ae_n$,

et soit $G=\sum_{n\in\mathbb{N}} A(e_n-a_n\, e_{n+1}) \subset L$.

On vérifie que $G+RL=L$; RL étant superflu dans L par hypothèse, on a donc $G=L$.

Ceci implique

$$e_1=\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i\ (e_i-a_i\, e_{i+1})$$

$$=\lambda_1\ e_1+\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i-\lambda_{i-1}\ a_{i-1})\ e_i-\lambda_n\, a_n\, e_{n+1}\ .$$

L'unicité de la décomposition entraîne alors

$\lambda_1=1$ $\qquad\qquad \lambda_2=a_1$

$\lambda_n=a_1.a_2\ldots\ a_{n-1}$

$\lambda_n\, a_n=0=a_1\ldots\ a_n$

R est donc T-nilpotent à gauche.

Théorème 6.3.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (i) A/R est semi-simple
   (ii) R est T-nilpotent à gauche.

2. Tout A-module à gauche possède une couverture projective.

3. Tout A-module à gauche semi-simple possède une couverture projective.

.../...

-Démonstration.

1 $\Rightarrow$ 2

Soit $M \neq 0$: M/RM est semi-simple, soit $M/RM = \bigoplus_{i \in I} S_i$; A étant semi-parfait, chaque S_i possède une couverture projective P_i, soit $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$. RP étant superflu dans P d'après le théorème 6.2, P est une vouverture projective de M/RM.

Soit π un morphisme de P dans M tel que $q \circ \pi = p$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p"] & \\ M \arrow[r, "q"] & M/RM \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La proposition 1-10 prouve que π est une couverture projective de M.

2 $\Rightarrow$ 3 est trivial

3 $\Rightarrow$ 1. A est semi-parfait, donc A/R est semi-simple : $A^{(\mathbb{N})}/R^{(\mathbb{N})}$ est alors semi-simple, donc admet une couverture projective. La proposition 1.11 entraîne que $R^{(\mathbb{N})}$ est superflu dans $A^{(\mathbb{N})}$, donc que R est T-nilpotent à gauche d'après le théorème 6.2.

Remarque : Un anneau est semi-parfait à gauche si et seulement si tout A-module à gauche de type dénombrable possède une couverture projective ; en effet, s'il en est ainsi, $A_s^{(\mathbb{N})}/R^{(\mathbb{N})}$ possède une couverture projective, et $R^{(\mathbb{N})}$ est alors superflu dans $A_s^{(\mathbb{N})}$, ce qui implique que R est T-nilpotent à gauche ; A étant en outre semi-parfait, le théorème précédent donne le résultat.

Nota : Nous ne faisons pas ici une étude complète des anneaux parfaits à gauche; on trouvera dans [1] et dans [8] les diverses caractérisations de ces anneaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS. Finistic homological dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans Amer. Math. Soc. 95 (1960). 466-488.

[2] J.Y. CHAMARD. Anneaux presque frobeniusiens à gauche. Séminaire d'algèbre non commutative. Orsay 1960-70.

[3] C. FAITH. Lectures on injective modules and quotient rings. Sringer 1967. Lecture notes in mathematics vol 49.

[4] C. FAITH et E. WALKER. Direct. sum representations of injective modules. I. of Algebra 5 (1967) 203-221.

[5] J. LAMBEK. Lectures on rings and modules. 1966.

[6] L. LESIEUR et R. CROISOT. Coeur d'un module. Jour. de Math. 42 (1963) 367-407.

[7] B. OSOFSKY. A generalisation of Q.F. rings. J. of Algebra 4 (1966) 373-387

[8] G. RENAULT. Anneaux parfaits. Séminaire Dubreuil (Paris) 1967/68.

[9] Séminaire d'algèbre de Poitiers. 1966-67. Modules injectifs.

[10] R.B. WARFIELD. A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules. Proc. Amer. Math.Soc. 22(1969) 460-465.

[11] J.Y. CHAMARD. Anneaux semi-parfaits et presque frobeniusiens. C.R. de l'Académie des Sciences t.269. p. 556-559.

[12] Mewborn et Winton - Orders in selfinjective semi-perfect rings J of Algebra 13 (1969) - Septembre 1969 -

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 6 du 15 décembre 1969

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX PRESQUE FROBENIUSIENS A GAUCHE.

Par J.Y. CHAMARD

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Nous introduisons dans un premier paragraphe les notions de générateurs et de cogénérateurs dans une catégorie de module, et donnons diverses caractérisations (non originales) de ces propriétés.

Nous étudions ensuite au § 2 les anneaux tels que tout A-module à gauche simple soit isomorphe à un idéal, puis les anneaux cogénérateurs, qui en sont un cas particulier, au § 3.

Le paragraphe 4 est consacré à l'étude des anneaux presque forbeniusiens à gauche, pour lesquels certains résultats de [2] permettent d'obtenir des propriétés nouvelles, et permettent aussi des démonstrations rapides de certains théorèmes connus.

Au paragraphe 5 nous étudions des anneaux encore plus particuliers, qui sont "tout proches" des anneaux quasi-frobeniusiens : ce sont les anneaux presque frobeniusiens à gauche et parfiats à droite, que nous appelons semi-frobeniusiens à gauche.

L'essentiel des résultats exposés ici proviennent de B. OSOFSKY [10], G. AZUMAYA [13], T. KATO [6], SUGANO [11], Y. UTUMI [12] et J.Y. CHAMARD [3].

__Plan.__

§ 1 - GENERATEURS ET COGENERATEURS

Catégorie $\mathbb{M}od\ A_S$:

C'est la catégorie dont les objets sont les A-modules à gauche, et dont les morphismes sont les morphismes de A-modules à gauche.

Générateur de $\mathbb{M}od\ A_S$:

Définition 1 . 1.

On dit qu'un A-module à gauche G **est** un générateur de $\mathbb{M}od\ A_S$ si, pour tout couple (M,N) de A-modules à gauche, et pour tout morphisme non nul f de M dans N, il existe un morphisme g de G dans M tel que $f \circ g \neq 0$.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

Définition 1 . 2.

Un A-module à gauche C est dit cogénérateur de $\mathbb{M}od\ A_S$ si C'est un générateur de la catégorie duale $(\mathbb{M}od\ A)^*$: c'est à dire que pour tout morphisme non nul d'un module M dans un module N, il existe un morphisme g de N dans C tel que $g \circ f \neq 0$.

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} C\ .$$

Proposition 1 . 3.

Soit C un A-module ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1. C est un cogénérateur de $\mathbb{M}od\ A_S$
2. Pour tout M, et tout sous-module non nul N de M, il existe $f \in \mathrm{Hom}(M, C)$ tel que $f(N) \neq 0$.
3. Pour tout A-module à gauche M, il existe un ensemble I et une injection $0 \longrightarrow M \longrightarrow C^I$

.../...

- Démonstration :

. $1 \Rightarrow 2$

Soit i l'injection de N dans M ; il existe $f \in \mathrm{Hom}(M, C)$ tel que $f \circ i \neq 0$, c'est à dire tel que $f(N) \neq 0$.

. $2 \Rightarrow 3$

Soit $I = \mathrm{Hom}(M, C)$ et soit θ le morphisme de M dans C^I défini par :

$$\theta(x) = (f(x))_{f \in I}$$

Si $x \neq 0$, le module Ax est non nul, et il existe donc $f_o \in I$ tel que $f_o(Ax) = Af_o(x) \neq 0$; ceci prouve que θ est un injectif. Le fait que θ soit un morphisme est trivial.

. $3 \Rightarrow 1$

Soient M et N deux modules, et $f \neq 0$ un élément de $\mathrm{Hom}(M, N)$; soit $g = \prod_{i \in I} g_i$ un monomorphisme de M dans C^I, dont l'existence est assurée par l'hypothèse (2).

$g \circ f = \prod_{i \in I} (g_i \circ f)$ est alors non nul, ce qui prouve l'existence d'un morphisme g_{io} de N dans C tel que $g_{io} \circ f \neq 0$.

Proposition 1 . 4 .

Soit G un A-module ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) G est générateur de $\mathbb{M}\mathrm{od}\ A$.

(2) Pour tout M et tout sous-module propre N de M, il existe $f \in \mathrm{Hom}(G, M)$ tel que $f(G) \not\subset N$.

(3) Pour tout M, il existe un ensemble I et un épimorphisme :

$$G^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(on note $G^{(I)}$ la somme directe d'une famille $(G_i)_{i \in I}$ de A-modules tous isomorphes à G).

.../...

- Démonstration : Il suffit de dualiser la démonstration de la proposition 1. 4.

Corollaire 1 . 5 .

Un A-module G est un générateur de Mod A si et seulement si A est quotient d'un G^n .

- Démonstration :

Condition nécessaire : D'après la proposition 1 . 4, il existe un épimorphisme $G^{(I)} \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$;
Soit $x \in G^{(I)}$ tel que $p(x) = 1$. x se décompose sur un nombre fini de $(G_i)_{i \in I}$, soient $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$, et il existe donc un épimorphisme de G^n sur A .

Condition suffisante :

Soit M un A-module ; il existe un ensemble J et un épimorphisme

$$A^{(J)} \xrightarrow{q} M \longrightarrow 0 \quad ;$$

soit p l'épimorphisme de G^n sur A . $p^{(J)}$ est un épimorphisme de $\left[G^n\right]^{(J)}$ sur $A^{(J)}$ qui, composé avec q , donne un épimorphisme de $G^{(I)}$ sur M , avec $I = [1, \ldots, n] \times J$.

Corollaire 1 . 6 .

Tout module libre est un générateur.

Proposition 1 . 7 .

Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de modules.

(i) si M' est cogénérateur, il en est de même pour M .

(ii) si M" est générateur, il en est de même pour M .

- Démonstration :

(i) se déduit de la proposition 1 . 3 .

(ii) se déduit du corollaire 1 . 5 .

.../...

Théorème 1 . 8 .

Soit C un A-module ; les assertions suivantes sont équivalentes ;

① C est un cogénérateur de Mod A

② C contient une enveloppe injective de tout type de module simple.

Notation : Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des types de modules simples, et $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un ensemble de représentants de $\mathcal{T}$. On note C_o le module défini à un isomorphisme près par

$$\boxed{C_o = \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} E(S_t)}$$

(où E (N) désigne une enveloppe injective de N ~~voir [ ] pour la définition~~) .

- sous ces notations, la condition ② s'écrit :

② Il existe $0 \longrightarrow C_o \longrightarrow C$

- Démonstration du théorème 1 . 8 . :

1 => 2

Soit S un A-module simple, et considérons le diagramme

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} E(S) \dashrightarrow^{f} C.$$

où i est l'injection canonique de S dans E(S), et f un morphisme de E(S) dans C tel que $f \circ i \neq 0$ (dont l'existence est assurée par l'hypothèse ①) .

$\mathrm{Ker}\,(f \circ i) = \mathrm{Ker}\, f \cap S \neq S$, donc $\mathrm{Ker}\, f \cap S = 0$.

E(S) étant extension essentielle de S , il s'en suit que $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap E(S) = 0$, c'est à dire que f est injectif.

2 => 1 Soient M et N deux modules, et $f \neq 0$ un morphisme de M dans N.

$f \neq o$ implique l'existence de $x \in M$ tel que $f(x) \neq 0$.

Soit $\mathfrak{a} = \ell(x) = \{ a \in A \ / \ ax = 0 \}$.

$x \neq 0$ implique $\mathfrak{a} \neq A$; il existe donc un idéal maximal m de A contenant A.

.../...

Soit $S = A/_{m}$, et considérons la surjection canonique

$$Af(x) \xrightarrow{\simeq} A/_{\mathfrak{a}} \xrightarrow{\theta} A/_{m} = S \longrightarrow 0$$

Soit $E(S)$ une enveloppe injective de S contenue dans C , et soit g le prolongement de θ à N.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Af(x) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"] & N \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E(S) & \end{tikzcd}$$

g est un morphisme de N dans C , qui est tel que $g \circ f(x) \neq 0$, donc tel que $g \circ f \neq 0$.

Corollaire 1 . 9 .

Il existe, à un isomorphisme près, un plus petit cogénérateur, qui est C_0 .

|Mod A possède toujours un cogénérateur injectif, $E(C_0)$. Par contre nous verrons au § 2 que l'existence d'un cogénérateur projectif n'est pas assurée.

Module fidèle : on dit qu'un A-module à gauche M est fidèle si

$$\ell(M) = \{a \in A \;/\; \forall m \in M \;, am = 0\}$$

est nul.

Proposition 1 . 10 .

Soit M un A-module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

① M est fidèle

② Il existe un ensemble I et une injection $0 \longrightarrow A \longrightarrow M^I$.

- Démonstration :

$1 \Longrightarrow 2$

Soit $I = M$, et $\theta \in \mathrm{Hom}(A, M^I)$ défini par $\theta(a) = (am)_{m \in I}$.

$\theta(a) = 0$ si et seulement si $a \in \ell(M)$, donc si et seulement si $a = 0$. θ est ainsi un monomorphisme.

$2 \Longrightarrow 1$

étant contenu dans M^I , on a $\ell(M^I) \subset \ell(A) = 0$.

.../...

Or on voit facilement que $\ell(M^I) = \ell(M)$; il en résulte de M est fidèle.

Corollaire 1 . 11 .

Tout cogénérateur est fidèle.

- Démonstration : ce résultat se déduit trivialement des propositions 1 . 3 . et 1 . 10 .

Remarque : Nous étudierons au § 2 les anneaux caractérisés par le fait que tout module fidèle est cogénérateur.

Proposition 1 . 12 .

Tout générateur est fidèle.

- Démonstration :

On sait que, si G est générateur, il existe $G^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$; on a donc $\ell(G) = \ell(G^n) \subset \ell(A) = 0$, ce qui prouve que G est fidèle.

Remarque : Nous étudierons au paragraphe , les anneaux caractérisés par le fait que tout fidèle est générateur.

Proposition 1 . 13 .

Soit C un A-module, et I un ensemble quelconque ; les propositions suivantes sont équivalentes :

1. C est cogénérateur.
2. $C^{(I)}$ est cogénérateur.
3. C^I est cogénérateur.

- Démonstration :

1 => 2 => 3 résulte de la proposition 1 . 7 . et de ce que $C \subset C^{(I)} \subset C^I$.

3 => 1

Pour tout A-module simple S, il existe une injection f de $E(S)$ dans C^I ; soit en outre p_i le projection de C^I sur C, définie par $p_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$

et posons $f_i = p_i \circ f$.

.../...

$\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} p_i = 0$ entraine $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = 0$;

Il en résulte l'existence d'un indice i_0 tel que $\operatorname{Ker} f_{i_0} = 0$, car si

$\operatorname{Ker} f_i \neq 0$ pour tout i , S étant essentiel dans $E(S)$, on aurait

$\operatorname{Ker} f_i \cap S \neq 0$, c'est à dire $S \subset \operatorname{Ker} f_i$ pour tout i, d'où finalement $S \subset \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i$.

f_{i_0} est donc une injection de $E(S)$ dans C . Ce raisonnement étant valable pour tout simple S , il en résulte que C est cogénérateur de Mod A (théorème 1 . 8) .

Proposition 1 . 14 .

Soit E un A-module injectif ; E est un cogénérateur de Mod A si et seulement si, pour tout simple S , il existe un monomorphisme

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E$$

- Démonstration : Evidente d'après le théorème 3 . 8 . et les propriétés des enveloppes injectives.

Nous allons démontrer maintenant la propriété duale de la propriété précédente (alors que le théorème dual du théorème 3 . 8 . est faux en général).

Lemme 1 . 15 .

Un A-module G est un générateur de Mod A si et seulement si

$$A = \sum_{f \in \operatorname{Hom}(G,A)} f(G)$$

- Démonstration :

. La condition est nécessaire car, si G est générateur, A est quotient d'un G^n (corollaire 1 . 5 .) . Il existe donc des $(f_i)_{i=1 \dots n} \in \operatorname{Hom}(G,A)$ tels que $A = \sum_{i=1}^{n} f_i(G)$.

. La condition est suffisante, car, en posant $I = \operatorname{Hom}(G , A)$, il existe

$$G^{(I)} \xrightarrow{\Theta} A \longrightarrow 0$$

défini par $\Theta((x_f)_{f \in I}) = \sum_{f \in I} f(x)$.

.../...

Proposition 1 . 16 .

Soit P un module projectif ; les assertions suivantes sont équivalentes :

① P est un générateur de Mod A .

② Tout A-module simple S est un quotient de P .

- Démonstration :

1 $\Longrightarrow$ 2

Il suffit de considérer

$$P \xrightarrow{f} S \xrightarrow{1} S$$

$f \circ 1 \neq 0$ implique $f \neq 0$, et donc $f(P) = S$

(remarquons que ceci est vrai sans l'hypothèse projectif).

2 $\Longrightarrow$ 1

Supposons que P ne soit pas générateur ; d'après le lemme 1 . 15 , il existe un idéal maximal m de A tel que $\sum_{f \in \mathrm{Hom}(p,A)} f(p) \subset m$.

Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "p"] & \\ A \arrow[r, "q"] & A/m \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où l'existence de p est assurée par l'hypothèse ② , et l'existence de f par le fait que P est projectif.

$f(P) \subset m$ implique que $p(P) = q \circ f(P) = 0$, ce qui est impossible.

P est donc générateur.

-:-:-:-:-:-:-:-

§2 - S-ANNEAUX A GAUCHE ET DUALITE.

Définition 2.1.

On dit qu'un anneau A est un S-anneau à gauche si tout A-module à gauche simple est isomorphe à un idéal.

Proposition 2.2.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

1. A est un S-anneau à gauche
2. Pour tout idéal à gauche propre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ est non nul.
3. Pour tout idéal à gauche maximal m, $m = l\mathfrak{r}(m)$.

-Démonstration.

1 ⟹ 3

Si m est maximal, A/m est simple, donc isomorphe par hypothèse à un idéal Aa de A ; on a donc $m = l(a)$, d'où $\mathfrak{r}(m) \neq 0$, ce qui implique que $l\mathfrak{r}(m) \neq A$; puisque $l\mathfrak{r}(m)$ contient m qui est maximal, il y a égalité.

3 ⟹ 2

$\mathfrak{a}$ est contenu dans un maximal m, donc $\mathfrak{r}(m)$, non nul d'après 3, est contenu dans $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

2 ⟹ 1

Soit A/m un A-module à gauche simple ; $\mathfrak{r}(m) \neq 0$ implique l'existence d'un élément a de A tel que $ma = 0$, ce qui entraîne que $m = l(a)$, donc que A/m est isomorphe à Aa.

Définitions 2.3.

On appelle idéal à gauche singulier d'un anneau A, et on note $j(A_s)$, l'ensemble des éléments a de A dont l'annulateur à gauche $l(a)$ est essentiel dans A.

On dit qu'un anneau est réduit s'il ne contient aucun élément nilpotent non nul.

Proposition 2.4.

(i) Tout S-anneau à gauche semi-premier est semi-simple.

(ii) Tout S-anneau à gauche réduit est semi-simple.

(iii) Tout S-anneau à gauche dont l'idéal à gauche singulier est nul, est semi-simple.

-Démonstration.

(i) Si A est semi-premier, tout idéal à gauche simple de A est facteur direct de A, donc projectif. ~~A vérifiant (P)~~, Il en résulte que tout A-module à gauche simple est projectif. Le résultat se déduit alors de la proposition 3.

(ii) [9]. Soit m un idéal à gauche maximal ; d'après la proposition 2.2 il existe $a \in A$ tel que $l(a) = m$.

Si $A a \cap l(a) \neq 0$, on aurait $A a \subset l(a)$ (puisque $A a$ est simple), donc $a^2 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que A est réduit.

On a donc $A a \cap l(a) = 0$, d'où $A = m \oplus A a$. Tout idéal à gauche maximal étant facteur direct, A est semi-simple.

(iii) Soit m un idéal à gauche maximal de A ; A/m est isomorphe à $A a$, avec $a \in A$.

Si m est essentiel dans A, on voit facilement que le sous-module singulier de A/m est A/m, donc que le sous-module singulier de $A a$ est $A a$, ce qui entrainerait $a = 0$. Puisque ceci est impossible, m est facteur direct de A, donc A est semi-simple.

Remarque :

On peut démontrer que tout A-module à gauche simple dont le sous-module singulier est nul, est isomorphe à un idéal de A.

Définition 2.5.

Soit X un sous-ensemble de M, et Y un sous-ensemble de M^* ; on pose $r^*(X) = \{f \in M^* \ ; \ f(X) = 0\}$ et $l^*(Y) = \{x \in M \ ; \ \forall f \in Y, \ f(x) = 0\}$.

$r^*(X)$ est $l^*(Y)$ sont des sous-modules respectifs de M^* et de M ; si $M = A$, on retrouve les notions habituelles d'annulateurs à droite et à gauche.

.../...

On a $X \subset 1^* \mathfrak{Z}^*(X)$, $\mathfrak{Z}^*(X)=\mathfrak{Z}^*\, 1^*\, \mathfrak{Z}^*(X)$

et $Y \subset \mathfrak{Z}^*\, 1^*(Y)$, $1^*(Y)=1^*\, \mathfrak{Z}^*\, 1^*(Y)$.

<u>Définition 2.6</u>.

Soit $M \xrightarrow{\delta_M} M^{**}$ le morphisme défini par $\delta_M(x)\,(f)=f(x)$.

On dit que M est <u>sans torsion</u> si δ_M est <u>injectif</u>, et que M est <u>réflexif</u> si δ_M est <u>bijectif</u>.

<u>Proposition 2.7</u>.

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un module M :

① M est <u>sans torsion</u>

② Il existe un ensemble I et un <u>monomorphisme</u>

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^I$$

-<u>Démonstration</u>.

1 ==> 2

On prend $I=\mathrm{Hom}\,(M,A)=M^*$ et on définit $M \xrightarrow{\theta} A^I$ par $\theta\,(x)=(f(x))_{x \in M^*}$;

est un monomorphisme

2 ==> 1

Soit $x=(x_i)_{i \in I} \neq 0$; il existe un indice j tel que $x_j \neq 0$; soit p_j la projection de A^I sur A de noyau $\prod_{i \neq j} A_i$.

On a $p_j \circ \theta\,(x) \neq 0$.

<u>Lemme 2.8</u>.

Soit N un sous-module d'un module M ;

$\mathrm{Ker}\,(\delta_{M/N})=1^*\, \mathfrak{Z}^*(N)/N$

-<u>Démonstration</u>. Soit $\bar{x}$ un élément de M/N. $\delta_{M/N}(\bar{x})=0$ équivaut à ce que $f(\bar{x})=0$ pour tout f de $(M/N)^*$, c'est-à-dire à ce que $g(N)=0$ implique $g(x)=0$ pour tout g de M^* ; $g(N)=0$ équivaut au fait que g appartienne à $\mathfrak{Z}^*(N)$; on a donc $\delta_{M/N}(\bar{x})=0$ si

.../...

et seulement si $g(x)=0$ pour tout $g\in \mathfrak{Z}^*(N)$, c'est-à-dire si et seulement si x appartient à $1^*\mathfrak{Z}^*(N)$.

Proposition 2.9.

Soit A un anneau.

(i) Tout A-module à gauche M est sans torsion si et seulement si tout $1^*\mathfrak{Z}^*(N)=N$ pour tout sous-module N de tout module M.

(ii) Tout A-module à gauche de type fini est sans torsion si et seulement si la même propriété est vraie pour tout A-module à gauche M de type fini.

(iii) Tout A-module à gauche monogène est sans torsion si et seulement si $\mathfrak{a}=1\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$ pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$.

(iv) Tout A-module à gauche simple est sans torsion si et seulement si A est un S-anneau à gauche.

Les démonstrations sont évidentes.

Lemme 2.10.

Pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$, $(A/\mathfrak{a})^*$ est isomorphe à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$.

-Démonstration.

Soit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{a}, A)$ le morphisme défini par

$\theta\,(a)\,(\bar{x})= x.a$

est évidemment injectif, et si f est un élément quelconque de $(A/\mathfrak{a})^*$, on vérifie que $f=\theta\,(f(\bar{1}))$.

Corollaire 2.11.

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

1. A est un S-anneau à gauche.

2. Pour tout A-module à gauche M de type fini, M^* est non nul.

-Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$ M étant de type fini, il possède ([2] lemme 1.5) un sous-module maximal N_o. M/N_o est isomorphe à un idéal de A, et

.../...

le composé de la surjection canonique de M sur M/N_0 avec cet isomorphisme est un élément non nul de M^*.

2 ==> 1

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche propre de A ;

$Z(\mathfrak{a})=(A/\mathfrak{a})^*$ est non nul, donc (proposition 2.2) A est un S-anneau à gauche.

Proposition 2.12.

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

1. A est un S-anneau à gauche.
2. Pour tout A-module à gauche M, non nul, $\mathrm{Hom}(M, E(A)) \neq 0$.
3. Le dual de tout A-module à gauche simple est non nul -

-Démonstration.

1 ==> 2 Soit $M \neq 0$, et soit N un sous-module de type fini de M ; il existe d'après le corollaire 2.11 un morphisme non nul f de N dans A, donc de N dans $E(A)$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & E(A) & \end{tikzcd}$$

et f se prolonge en un morphisme non nul g de M dans $E(A)$.

2 ==> 3 Soit S un A-module à gauche simple, et soit f un élément non nul de S dans $E(A)$; f est nécessairement un monomorphisme, et $f(S) \cap A \neq 0$ entraîne que $f(S)$ est contenu dans A, donc que $S^* \neq 0$

3 ==> 1 . Soit m un idéal à gauche maximal ; $Z(m)=(A/m)^* \neq 0$ entraîne (proposition 2.2) que A est un S-anneau à gauche.

Proposition 2.13.

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

1. A est un S-anneau à gauche.
2. $E(A)$ est un cogénérateur.

.../...

③ Tout A-module à gauche fidèle injectif est un cogénérateur.

-Démonstration.

1 <==> 2 est trivial

3 ==> 2 est évident

1 ==> 3

Soit E un injectif fidèle et S un A-module simple ; S est isomorphe à un idéal à gauche Aa ; $SE \neq 0$ entraîne l'existence d'un élément x de E tel que $ax \neq 0$.

Soit alors f le morphisme de S dans E défini par $f(a) = ax$; $f \neq 0$ entraîne que f est un monomorphisme, et donc (proposition 1.14) E est un cogénérateur.

Remarque

On peut démontrer ([8] théorème 1) qu'un anneau artinien à droite et à gauche est un S-anneau à gauche si et seulement si tout A-module à droite fidèle projectif est un générateur.

Proposition 2.14.

Soit P un module projectif de type fini.

(i) P^* est projectif de type fini.

(ii) P est réflexif.

-Démonstration.

A étant réflexif, il en est de même pour tout module libre de type fini ; soit $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$ une suite exacte, où P est projectif de type fini et F libre de type fini ; la suite étant scindée, il en est de même pour $0 \longrightarrow P^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathfrak{a}^* \longrightarrow 0$, ce qui prouve que P^* est projectif de type fini.

En outre, tout facteur direct d'un réflexif étant réflexif, P est réflexif.

.../...

Proposition 2.15.

Soit A un S-anneau à droite ; toute suite exacte de A-modules à gauche

$0 \longrightarrow P \longrightarrow M$

où P est projectif de type fini et où M est sans torsion, est scindée.

-Démonstration.

Soit $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} M$, où P est projectif de type fini et où M est sans torsion ; la suite $M^* \xrightarrow{i^*} P^* \longrightarrow N = P^*/\mathrm{Im}\, i^* \longrightarrow 0$ est exacte, et, P^* étant de type fini d'après la proposition 2.14, il en est de même pour N. Le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & P^{**} & \xrightarrow{i^{**}} & M^{**} \\
 & & & & \downarrow S_P^{-1} & & \uparrow S_M \\
 & & 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{i} & M \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & & & 0 & & 0
\end{array}$$

i^{**} est composé de 3 monomorphismes, on a $N^* = \mathrm{Ker}\, i^{**} = 0$.

N est un A-module à droite de type fini ; si $N \neq 0$, N possède un sous-module maximal N_o ([2] lemme 1.5) : N/N_o est alors un A-module à droite simple, donc isomorphe à un idéal de A, et il existe un morphisme non nul de N dans A. Ceci est impossible puisque $N^* = 0$, et donc $N = 0$.

$M^* \longrightarrow P^* \longrightarrow 0$ est alors exacte ; P^* est projectif d'après la proposition 2.14, donc cette suite est donc scindée, ce qui implique que $0 \longrightarrow P^{**} \longrightarrow M^{**}$ l'est aussi. P étant isomorphe à P^{**}, et M étant sans torsion, il en résulte que $0 \longrightarrow P \longrightarrow M$ est scindée.

Remarque.

BASS démontre l'équivalence des conditions suivantes ([1] , théorème 5.4)

① Toute suite exacte $0 \longrightarrow P \longrightarrow Q$, où P et Q sont des A-modules à gauche projectifs, et où P est de type fini, est scindée.

② Pour tout idéal à droite propre de type fini D, $l(D) \neq 0$.

§ 3 - ANNEAUX COGENERATEURS A GAUCHE

Théorème 2.1.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

① A_s est cogénérateur de Mod A

② Il y a identité entre A-modules à gauche fidèles et cogénérateurs.

③ Il existe un cogénérateur projectif.

- Démonstration

1 ⇒ 2

Soit F un A-module fidèle ; d'après la proposition 1.10 , il existe une injection de A dans F^I ; pour tout A-module M , il existe en outre une injection de M dans A^{J_M} . Il en résulte pour tout M, une injection de M dans $F^{J_M \times I}$, ce qui prouve que F est cogénérateur.

2 ⇒ 1 ⇒ 3 est trivial.

3 ⇒ 1 Soit P un cogénérateur projectif ; P est facteur direct d'un libre L , qui est cogénérateur d'après la proposition 1.7. Mais $L = A^{(I)}$, et donc A est cogéné- d'après la proposition 1.13.

- Remarque

Tout anneau cogénérateur à gauche est évidemment un S-anneau à gauche.

Proposition 3.2.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

① A est cogénérateur à gauche

② Tout A-module à gauche est sans torsion

③ Le module C_o est sans torsion

④ Mod A_s possède un cogénérateur sans torsion

- Démonstration

1 ⇒ 2 Se déduit des propositions 1.3. et 2.5.

2 ⇒ 3 est trivial

3 ⇒ 4 est trivial

4 ⇒ 1 Soit C un cogénérateur sans torsion. C est contenu dans un A^I (propo-

.../...

sition 2.4), donc A^I est cogénérateur (corollaire 1.9), ce qui entraîne qu'il en est de même pour A (proposition 1.13).

Théorème 3.3.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

1. A est cogénérateur à gauche
2. Pour tout A-module à gauche M, et tout sous-module N de M,

$$l^* \mathfrak{r}^* (N) = N$$

- Démonstration

Se déduit immédiatement des propositions 2.2. et 3.2.

Corollaire 3.4.

Si A est cogénérateur à gauche, on a, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} = l\, \mathfrak{r} (\mathfrak{a})$$

Proposition 3.5.

Si A est cogénérateur à gauche, et si D est un idéal à droite maximal tel que $l(D)$ soit non nul, alors $l(D)$ est simple.

- Démonstration

Soit a un élément non nul de $l(D)$; $aD = 0$ implique $D = \mathfrak{r}(a)$, d'où

$$l(D) = l\, \mathfrak{r}(a) = l\, \mathfrak{r}(Aa) = Aa$$

d'après le corollaire 3.4. , ce qui prouve que $l(D)$ est simple.

Proposition 3.6.

Si A est un anneau auto-injectif à gauche, $\mathfrak{r}\, l(D) = D$ pour tout idéal à droite de type fini D.

- Démonstration

[14]

Proposition 3.7.

Si A est cogénérateur à gauche, et si l'idéal aA est simple, alors Aa est simple.

- Démonstration

Soit b un élément non nul de Aa. $Ab \subset Aa$ entraîne $\mathfrak{r}(a) \subset \mathfrak{r}(b) \neq A$, d'où $\mathfrak{r}(a) = \mathfrak{r}(b)$, et finalement

$$Aa = l\, \mathfrak{r}(Aa) = l\, \mathfrak{r}(a) = l\, \mathfrak{r}(b) = l\, \mathfrak{r}(Ab) = Ab .$$

.../...

Corollaire 3.8.

Si A est cogénérateur à gauche, le socle droit de A est contenu dans le socle gauche de A .

- Démonstration

Soit $S(A_d) = \sum_{i \in I} a_i A$;

pour tout $i \in I$, Aa_i est simple, donc est contenu dans $S(A_S)$; on a donc

$$\forall\, i , \quad a_i \in S(A_S) ,$$

et le socle gauche étant un idéal bilatère, on en déduit que $S(A_d) \subset S(A_s)$.

Lemme 3.9.

Soit Aa un idéal à gauche simple d'un anneau A , tel que Aa possède une enveloppe injective contenue dans A , aA est simple et c'est le socle de $\mathcal{Z}\, l(a)$.

- Démonstration

Soit b un élément non nul de $\mathcal{Z}\, l(a)$; $l(a) \subset l(b) \neq 0$ entraîne $l(a) = l(b)$, et l'application f de Ab dans Aa définie par $f(\lambda b) = a$ est un isomorphisme puisque $Aa \subset E(Aa) \subset A$, f est la multiplication à droite par un élément y_o de A ; on a donc $f(b) = a = by_o$, ce qui prouve que $aA \subset bA$.

Il en résulte que aA est simple, et que $\mathcal{Z}\, l(a)$ est une extension essentielle de aA .

Corollaire 3.10.

Si A est un anneau cogénérateur et injectif à gauche, $\mathcal{Z}(m)$ est un idéal à droite simple pour tout idéal à gauche maximal m .

- Démonstration

A étant cogénérateur à gauche, il existe un élément a de A tel que $A/_m$ soit isomorphe à Aa , c'est-à-dire tel que $m = l(a)$. A_s étant injectif, le lemme 3.9. prouve que aA est simple ; on a, d'après la proposition 3.6. ,

$$\mathcal{Z}(m) = \mathcal{Z}\, l(a) = \mathcal{Z}\, l(aA) = aA .$$

Proposition 3.11; [11]

Le socle droit d'un anneau cogénérateur à gauche est essentiel dans A_d .

.../...

- Démonstration

Soit aA un idéal à droite non nul ; $l(a)$ est contenu dans un idéal à gauche maximal m, et, A étant cogénérateur à gauche, $A/_m$ est isomorphe à un idéal à gauche simple Ab tel que Ab possède une enveloppe injective contenue dans A.

Soit p la surjection canonique de $A/_{l(a)}$ sur $A/_m$;

$$Aa \xrightarrow[\sim]{\alpha} A/_{l(a)} \xrightarrow{p} A/_m \xrightarrow[\sim]{\beta} Ab \xhookrightarrow{i} E(Ab) \subset A \ .$$

$\varphi = i \circ \beta \circ p \circ \alpha$ est la multiplication à droite par un élément y_0 de A ; on a donc

$$\varphi(a) = b = ay_0$$

ce qui prouve que bA est contenu dans aA ; en outre le lemme 3.9. prouve que bA est simple.

Corollaire 3.12.

Le socle droit d'un anneau cogénérateur à gauche est le plus petit sous-module essentiel de A_d .

- Démonstration

Elle résulte trivialement de la proposition suivante, appliquée au cas où $M = A_d$.

Proposition 3.13.

Pour tout A-module M , le socle de M est l'intersection des sous-modules essentiels de M .

- Démonstration

Tout sous-module essentiel de M contenant tout sous-module simple de M , le socle de M est évidemment contenu dans l'intersection des essentiels.

Réciproquement, soit M_0 l'intersection des essentiels, et soit N un sous-module de M_0 . Prenons un complément K de N dans M ; $N \oplus K$ étant essentiel dans M , il contient N_0 , et on a alors :

$$N_0 = (N \oplus K) \cap N_0) = N \oplus (K \cap N_0) \quad ,$$

ce qui prouve que tout sous-module de N_0 est facteur direct de N_0 , donc que N_0 est semi-simple.

.../...

Théorème 3.14.

Soit A un anneau cogénérateur et auto-injectif à gauche.

(i) Pour tout élément a de A, Aa est simple si et seulement si aA est simple.

(ii) La correspondance $Aa \longrightarrow aA$ établit une bijection entre l'ensemble des types de A-modules à gauche simples et l'ensemble des types d'idéaux à droite simples.

- Démonstration

(i) Se déduit de la proposition 3.7. et du lemme 3.9.

(ii) A_S étant cogénérateur à gauche, tout A-module à gauche simple est isomorphe à un idéal.

Supposons que Aa_1 et Aa_2 soient des idéaux à gauche simples isomorphes, et soit f un isomorphisme de Aa_1 sur Aa_2

Posons $a'_2 = \lambda a_2 = f(a_1)$

On a $l(a_1) = l(a'_2)$

d'où $$a_1A = \mathfrak{r}l(a_1A) = \mathfrak{r}l(a_1) = \mathfrak{r}l(a'_2) = \mathfrak{r}l(a'_2A) = a'_2A$$

c'est-à-dire $$a_1A = \lambda a_2A$$

Mais $a_2A \xrightarrow{g} \lambda a_2A$ défini par $g(a_2) = \lambda a_2$ est un morphisme surjectif non nul, donc un isomorphisme, entre a_2A et λa_2A ; il en résulte que a_1A est isomorphe à a_2A .

Le même raisonnement (utilisant cette fois l'égalité $l\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ pour les idéaux à gauche) prouve que si a_1A et a_2A sont simples isomorphes, Aa et Aa_2 sont isomorphes.

Corollaire 3.15.

Le socle gauche et le socle droit d'un anneau cogénérateur injectif à gauche coïncident.

Proposition 3.16.

Tout anneau commutatif cogénérateur est auto-injectif.

- Démonstration

A étant cogénérateur, il contient C_o ; en outre C_o est fidèle (corollaire 1.11), donc $\mathrm{Ann}\, C_o = 0$. Mais $C_o = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, C_o)$ (corollaire 3.4.) d'où $C_o = A$.

.../...

Il en résulte que C_o est somme directe finie d'injectifs indécomposables, donc est injectif.

- Remarque :

Cette propriété n'est pas vraie en général lorsque A n'est pas commutatif (contre exemple dans [10]).

§4 - ANNEAUX PRESQUE FROBENIUSIENS A GAUCHE

Proposition 4.1.

Soit A un anneau auto-injectif à gauche, de socle gauche $\bigoplus_{i \in I} S_i$ essentiel dans A_s. Soit $J \subset I$ tel que tous les $(S_j)_{j \in J}$ soient de types distincts; et que chaque $(S_i)_{i \in I}$ soit isomorphe à l'un des $(S_j)_{j \in J}$.

On pose $F_o = \bigoplus_{j \in J} E(S_j)$, idéal à gauche de A.

Les assertions suivantes sont alors équivalentes, pour un A - module F :

1) F est fidèle.

2) F_o est isomorphe à un sous-module de F.

Démonstration :

Démontrons tout d'abord que F_o est fidèle : il suffit pour cela de prouver que, pour tout i de I, $S_i F_o \neq 0$; Or par hypothèse S_i est isomorphe à l'un des S_j ; il existe donc un monomorphisme $0 \longrightarrow S_i \xrightarrow{\theta} E(S_j)$, qui est en fait la multiplication à droite par un élément y_o de $E(S_j)$:

$$\theta(S_i) = S_i\, y_o \neq 0$$

donc $S_i F_o \neq 0$.

2 $\Longrightarrow$ 1 s'en déduit aussitôt.

1 $\Longrightarrow$ 2

F étant fidèle, $S_j F \neq 0$ pour tout j de J ; il existe donc $x_j \in F$ tel que $S_j x_j \neq 0$. Soit alors $E(S_j) \xrightarrow{\theta_j} F$ défini par $\theta_j(a) = a\, x_j$; $\theta_j \neq 0$ et S_j simple impliquent que $\operatorname{Ker} \theta_j \cap S_j = 0$, donc que θ_j est un monomorphisme. On en déduit alors (puisque la famille des $[\theta_j(S_j)]_{j \in J}$ est indépendante) un monomorphisme de F_o dans F.

Remarque :

Le théorème précédent reste valable si l'on suppose seulement que

.../...

le socle gauche de A est essentiel dans A, et que $E(A)$ est projectif.

En effet, en conservant les notations précédentes, on construit une famille $E(S_j)$ d'enveloppes injectives des S_j contenues dans $E(A)$; les modules $E(S_j)$ étant injectifs indécomposables et projectifs, on sait qu'ils sont isomorphes à des facteurs directs $A e_j$ de l'anneau ; on démontre comme précédemment que la famille des $(A e_j)_{j \in J}$ est indépendante, et l'on pose $F_o = \bigoplus_{j \in J} A e_j$, idéal à gauche de A.

La suite de la démonstration se reproduit sans changement.

Théorème 4.2.

Soit A un anneau quelconque, et soit C_o la somme directe des enveloppes injectives des types de simples à gauche ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (i) A est cogénérateur à gauche
   (ii) A/R est semi-simple

2. (i) A est cogénérateur à gauche
   (ii) dim (A_s) est finie

3. (i) A est cogénérateur à gauche
   (ii) Il n'existe qu'un nombre fini de types de A-modules à gauche simples.

4. (i) A est cogénérateur à gauche
   (ii) C_o est injectif

5. C_o est un générateur

6. (i) A_s est injectif
   (ii) A/R est semi-simple
   (iii) $S(A_s)$ est essentiel dans A_s.

7. (i) A_s est injectif
   (ii) A/R est semi-simple.

.../...

(iii) $S(A_s)$ est essentiel dans A_d .

8 Il y a identité entre A-modules à gauche générateurs et fidèles.

9 Il y a identité entre A-modules à gauche générateurs et co-générateurs.

Démonstration :

1 ou 2 $\Longrightarrow$ 3 trivial

3 $\Longrightarrow$ 4 trivial

4 $\Longrightarrow$ 5 soit $C_o = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$

C_o est facteur direct de A , donc card $I < \infty$; soit $n =$ card I . Il existe alors n types de A-modules à gauche simples ; les $\left(E(S_i)/RE(S_i)\right)_{i=1\ldots n}$ étant simples ([2] , proposition 2.2) et 2 à 2 non isomorphes (d'après [2] , théorème 1.9), tout A - module à gauche simple est isomorphe à l'un des $E(S_i)/RE(S_i)$, donc à un quotient de C_o .

C_o étant projectif, la proposition 1.16 prouve que C_o est un générateur de $\mathbb{M}$od A_s .

5 $\Longrightarrow$ 6

A est facteur direct d'un $C_o^{\,n}$ (corollaire 1.5), donc est somme directe finie d'injectifs indécomposables $E(S_i)$, $i=1 \ldots n$ Les 3 propriétés de 6 s'en déduisent aussitôt.

6 $\Longrightarrow$ 8

Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} A\, e_i$; A est à la fois semi-parfait injectif, et de socle gauche essentiel dans A_s . Les idéaux G_o et F_o , construits respectivement en [2] proposition 4.5 et à la proposition 4.5 sont alors égaux, ce qui prouve qu'il y a identités entre génératuers et fidèles, qui sont, à un isomorphisme près, les modules contenant G_o ; 7 est donc prouvé.

Notons $G_o = F_o = \bigoplus_{i=1}^{p} A\, e_i$, $p \leq n$; A/R étant semi-simple,

.../...

tout A - module à gauche simple est isomorphe à l'un des $\left(A\, e_i / R e_i\right)_{i=1\ldots p}$, et il y a ainsi p types de simples à gauche,

Or les $(S_i)_{i=1\ldots p}$ sont des idéaux à gauche simples 2 à 2 non isomorphes.

Tout A - module à gauche simple est donc isomorphe à l'un des S_i, ce qui prouve que $C_o = G_o = F_o$.

6 ===> 9

6 ===> 1

6 ===> 2 sont alors évidents

8 ===> 5 est trivial

9 ===> 8

L'anneau A est cogénérateur de Mod A_s ; il résulte du théorème 2.1 que tout fidèle est cogénérateur donc, d'après (9) , est générateur.

6 ===> 7

On sait que A est cogénérateur à gauche, puisque 6 ===> 1 , donc que $S(A_d)$ est essentiel dans A_d (proposition 2.14) ; comme $S(A_d)$ est contenu dans $S(A_s)$ (corollaire 2.11) le socle gauche est bien un idéal à droite essentiel.

7 ===> 1

L'anneau A est semi-parfait d'après [2] proposition 4.2 , et il contient tous les types de modules simples à gauche d'après [2] théorème 5.1 ; A_s étant injectif, A est cogénérateur à gauche, et A/R est semi-simple puisque A est semi-parfait.

Définition.

Un anneau vérifiant les conditions précédentes est appelé presque frobeniusien à gauche ; la question de savoir si tout anneau presque frobenuisien à gauche (noté P.F. à gauche) est également P.F. à droite est ouverte.

Proposition 4.3.

Un anneau cogénérateur à gauche et noethérien à droite ou à gauche

.../...

est Q.F.

-Démonstration :

- Si A est noethérien à gauche, A est P.F. à gauche d'après la condition ② du théorème précédent, donc c'est un anneau noethérien et injectif à gauche, ce qui implique ([4]) qu'il est Q.F.

- Si A est noethérien à droite il est artinien à gauche d'après le corollaire 3-4 donc noethérien à gauche, et on est ramené au cas précédent.

Proposition 4.4.

Soit A un anneau P.F. à gauche.

(i) $S(A_s) = S(A_d)$, et cet idéal est essentiel dans A_s et dans A_d, noté $\mathcal{S}$.

(ii) Tout idéal à droite ou à gauche simple est isomorphe à un idéal.

(iii) $R = r\ell(R) = \ell r(R) = \ell(\mathcal{S}) = r(\mathcal{S})$.

(iv) $\mathcal{S} = \ell(R) = r(R)$

(v) $R = j(A_s) = j(A_d)$ (idéaux singuliers à gauche et à droite de A).

Démonstration :

(i) L'égalité des socles résulte du corollaire 3.15 et l'essentialité résulte du théorème 4.2 et de la proposition 3.11 .

(ii) Résulte du théorème 3.14 et de la définition d'un cogénérateur.

(iii) La proposition 5.8 de [2] prouve que $R = r\ell(R) = \ell r(R)$.
En outre, A contenant tous les types de simples à droite et à gauche, $R = \ell(\mathcal{S}) = r(\mathcal{S})$.

(iv) $\ell(R) = \ell r(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ d'après le corollaire 3.4 ; $\mathcal{S}$ étant de plus un idéal à droite de type fini (Corollaire ~~proposition~~ 4.6), on a

$$r(R) = r\ell(\mathcal{S}) = \mathcal{S}.$$

(v) $R = j(A_s)$ puisque A_s est injectif ([ ]) ; soit d'autre part

.../...

a un élément de R ; $r(R) = \mathscr{J} \subset r(a)$ implique que $r(a)$ est essentiel dans A_d , donc que a appartient à $j(A_d)$. Réciproquement, $j(A_d)$ ne contenant aucun idempotent non nul, le corollaire 3.8 de [2] prouve que $j(A_d)$ est contenu dans R .

Proposition 4.5.

Soit e un idempotent d'un anneau P.F. à gauche ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Ae est co-irréductible.
2. e est primitif.
3. eA est co-irréductible.

-Démonstration

1 $\Longleftrightarrow$ 2 puisque A_s est injectif

3 $\Longrightarrow$ 2 est toujours vraie

2 $\Longrightarrow$ 3

e étant primitif et A semi-parfait, il existe des idempotents primitifs orthogonaux $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$ et que $e_1 = e$ (on obtient ces e_i en décomposant $A(1-e)$ en somme directe de locaux). On a alors

$$(e\,A) = \bigoplus_{i=2}^{n} A\,e_i \subset R\,e \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{n} A\,e_i\right) = \mathfrak{m} \ ;$$

$\mathfrak{m}$ étant maximal, $r(m)$ est simple d'après le corollaire 3.10 .

Or $r(m) = r(Re) \cap eA = r(R) \cap eA = \mathscr{J} \cap eA = e\,\mathscr{J}$.

$\mathscr{J}$ étant essentiel dans A_d , $e\,\mathscr{J}$ est essentiel dans eA , donc eA est extension essentielle d'un simple.

Corollaire 4.6.

Un anneau P.F. à gauche est de dimension finie à droite et à gauche et ces dimensions sont égales.

-Démonstration.

Il suffit de décomposer A en $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A\,e_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} e_i\,A$ locaux,

.../...

et d'appliquer la proposition précédente.

Proposition 4.6.

Soit A un anneau P.F. à gauche ; pour tout idéal à droite D, $r\ell(D)$ est essentiel dans un facteur direct eA ; en outre, si D est contenu dans un facteur direct fA, on peut choisir e dans fA.

-Démonstration.

On fait la démonstration dans le cas où $D \subset fA$ (il suffit de prendre $f = 1$ dans le premier cas).

$A(1-f) = \ell(fA) \subset \ell(D)$, donc $r\ell(D) \subset r(Af) = fA$.

$A(1-f)$ est facteur direct de $\ell(D)$: soit

$$\ell(D) = A(1-f) \oplus \mathcal{C}$$

A étant semi-parfait, on peut décomposer $\mathcal{C}$ en

$$\mathcal{C} = Ag \oplus \mathfrak{b} \quad , \qquad \text{avec } \mathfrak{b} \subset R .$$

$A(1-f) \oplus Ag$ est injectif donc est facteur direct de A : soit

$$A(1-f) \oplus Ag = A(1-e)$$

On a alors $\quad \ell(D) = A(1-e) \oplus \mathfrak{b}$

d'où $\quad r\ell(D) = eA \cap r(\mathfrak{b})$

avec $\quad \mathcal{S} = r(R) \subset r(\mathfrak{b})$

$\mathcal{S}$ étant essentiel dans A_d, $r\ell(D)$ est essentiel dans eA ; en outre

$A(1-f) \subset A(1-e)$ implique $eA \subset fA$, c'est-à-dire que e appartient à fA.

Remarque:

Cette démonstration reste valable dans le cas où A est semi-parfait de socle droit essentiel à gauche, en remarquant que dans ce cas, d'après le théorème 5.5 de [2], $A(1-f) \oplus Ag$ est encore facteur direct de A.

.../...

Corollaire 4.8.

Soit A un anneau P.F. à gauche de socle $\mathcal{S}$; les idéaux à gauche (respectivement à droite) simples de A sont tous les idéaux $\mathcal{S}e$ (respectivement $e\mathcal{S}$), où e est un idempotent primitif de A .

-Démonstration.

A gauche : Soit S un idéal à gauche simple ; $E(S) = Ae$, où e est primitif, et $S = Ae \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}e$; réciproquement, si e est primitif, $\mathcal{S}e = Ae \cap \mathcal{S}$ est simple, puisque Ae est co-irréductible de socle essentiel.

-Même démonstration à droite, puisque tout idéal à droite simple a A est égal à $r\ell(aA)$ (proposition 3.6) donc est essentiel dans un eA d'après la proposition 4.6.

Théorème 3.9.

Tout anneau cogénérateur à droite et injectif à gauche est P.F. à droite et à gauche.

-Démonstration.

Démontrons que A/R est semi-simple ; A contenant par hypothèse les enveloppes injectives de tous les types de simples à droite, il suffit, d'après le théorème 2.7 de [2] , de démontrer que tout idéal à droite simple aA possédant une enveloppe injective contenue dans A possède une couverture projective.

Pour un tel aA , l'idéal Aa est simple d'après la proposition 3.7 ; soit Ae une enveloppe injective de Aa . Ae est local ([2] lemme 2.3), donc $\bar{A}\bar{e}$ est simple ; $\bar{e}\bar{A}$ l'est aussi puisque $\bar{A}$ est semi-premier, et $Aa \subset Ae$ implique $r(e) \subset r\,a$; On peut donc définir un morphisme non nul p de eA dans aA en posant

$$p\,(e\lambda) = a\lambda .$$

eA étant local, $\text{Ker}\, p \subset eR$, donc est superflu dans eA , ce qui prouve que

$$eA \xrightarrow{p} aA \longrightarrow 0$$

.../...

est une couverture projective de aA .

Théorème 3.10.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

1 (i) A est cogénérateur à gauche

(ii) A est un S - anneau à droite.

2 A est P.F. à gauche.

-Démonstration

2 ===> 1 a déjà été fait (proposition 3.4)

1 ===> 2 Démontrons que A/R est semi-simple ; il suffit pour cela ([2] théorème 2.7) de prouver que tout A - module à droite simple possède une couverture projective ; soit donc S un simple à droite, qui est isomorphe par hypothèse à un idéal aA ; la proposition 2.10 pour que Aa est simple ; en outre Aa est isomorphe à un Ab qui possède une enveloppe injective contenue dans A . Soit f un isomorphisme de Aa sur Ab , et soit $c = f(a)$; on a $Ab = Ac$

$$\text{et} \quad Aa \xrightarrow{f} Ac \hookrightarrow E(Ac) \subset A$$

prouve l'existence d'un y_o dans A tel que $f(a) = c = ay_o$.

On a donc $cA \subset aA$, ce qui implique l'égalité puisque aA est simple et c non nul.

Soit alors $E(Ac) = Ae$.

$Ac \subset Ae$ implique $r(e) \subset r(c)$, et on en déduit comme au théorème précédent que eA est une couverture projective de $cA = aA$

Corollaire 4.11.

Un anneau cogénérateur à droite et à gauche est P.F. à droite et à gauche (ce qui généralise au cas non commutatif la proposition 3.16).

Corollaire 4.12.

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

1 A est P.F. à gauche

2 (i) $E(A)$ est sans torsion

(ii) A est un S - anneau à droite et à gauche.

-Démonstration.

1 ===> 2 Résulte du corollaire des propositions 3.2 et 3.4.

2 ===> 1 E(A) est cogénérateur à gauche ; le théorème 4.10 permet de conclure.

Théorème 4.13.

Un anneau A est P.F. à gauche si et seulement s'il est cogénérateur et injectif à gauche.

-Démonstration.

[10] théorème 1.

Théorème 4.14.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A .

① Tout quotient et tout sous-module d'un module réflexif est réfléxif.

② Tout A -module à droite de type fini et tout A - module à gauche de type fini est réflexif.

③ Tout A - module à gauche monogène et tout A -module à droite monogène est réflexif.

④ A est P.F. à gauche et à droite.

-Démonstration

1 ===> 2 Car A_s et A_d sont réfléxifs

2 ===> 3 Trivial

3 ===> 4

- A est auto injectif à droite:

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A ; la suite $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{i} A_s \xrightarrow{i} A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$ est exacte, donc il en est de même pour

$$0 \longrightarrow (A/\mathfrak{a})^* \xrightarrow{i^*} A^* = A_d \xrightarrow{i^*} \mathfrak{a}^* \ ;$$

..../...

en outre on sait que $(A/\mathfrak{a})^*$ est isomorphe à $r(\mathfrak{a})$.

Soit $C=A_d/r(\mathfrak{a})$, qui est réflexif par hypothèse.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^* \arrow[r, "i^{**}"] & A^{**} \arrow[r, "j^{**}"] & (A/\mathfrak{a})^{**} \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "i"] \arrow[u, dashed, "\alpha"'] & A \arrow[r, "j"] \arrow[u, "\beta"'] & A/\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] & 0
\end{tikzcd}$$

β et γ sont des isomorphismes, donc j^{**} est surjectif ; on sait qu'il existe alors un isomorphisme α de $\mathfrak{a}$ sur C^* rendant le diagramme commutatif.

$\mathfrak{a}^*$ est ainsi isomorphe à C^{**}, donc à C, et le morphisme canonique de $\mathrm{Hom}(A_s, A_s) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, A_s)$ est surjectif, ce qui prouve (condition de Baer) que A_s est injectif.

- Une démonstration analogue prouve que A_d est injectif.
- A contient tous les types de simples à droite et à gauche .

Pour tout idéal à gauche non nul $\mathfrak{a}$, $r(\mathfrak{a})$ est isomorphe à $\mathfrak{a}^*$, donc est non nul puisqu'il en est de même pour $\mathfrak{a}^{**}$; on démontre de même que $l(D)\neq 0$ pour tout idéal à droite $D\neq 0$.

La proposition 2-2 permet de conclure.

4 $\Longrightarrow$ 1

Soit M un A-module à gauche réflexif, et N un sous-module de M.

A_s et A_d étant injectifs, la suite

$0 \longrightarrow N^{**} \longrightarrow M^{**} \longrightarrow (M/N)^{**} \longrightarrow 0$ est exacte ; N et M/N étant sans torsion puisque A_s est cogénérateur (corollaire de la proposition 2.4), on a le diagramme commutatif suivant

.../...

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\delta_N"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\delta_M"'] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{M/N}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que $\delta_{M/N}$ est surjectif, donc qu'il en est de même pour δ_N . Même démonstration à droite.

§5 - ANNEAUX SEMI-FROBENIUSIENS A GAUCHE

Théorème 5.1. -

Soit A un anneau parfait à droite ; les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. A est cogénérateur à gauche.
2. A est auto-injectif à gauche.
3. Tout A-module à gauche injectif indécomposable est projectif.
4. Tout A-module à gauche projectif indécomposable est injectif.
5. A est presque frobeniusien à gauche.

Un tel anneau sera dit semi-frobéniusien à gauche (noté S.F. à gauche).

-Démonstration.

Remarquons tout d'abord que, A étant parfait à droite, tout A-module à gauche non nul contient un simple ; en particulier le socle gauche de A est essentiel dans A_S. En outre, A/R est semi-simple.

1 ou 2 ==> 5 se déduit alors immédiatement du théorème 4.2.

5 ==> 1 et 5 ==> 2 est trivial

1 ==> 3

Tout injectif indécomposable est enveloppe injective d'un simple, donc isomorphe à un facteur direct de A.

3 ==> 1.

Soit S un simple ; E(S) est injectif indécomposable et projectif, donc (prop.2.2. de [2]) monogène ; la suite $A \longrightarrow E(S) \longrightarrow 0$ est alors scindée, et E(S) est isomorphe à un facteur direct de A.

5 ==> 4

Tout projectif indécomposable étant isomorphe à un facteur direct (local) de A (Théorème 2.7 de [2]) et A étant auto-injectif, la propriété est bien vérifiée.

4 ==> 2

A est semi-parfait, donc somme directe finie de projectifs indécomposable ; ceci entraîne que A_s est injectif.

.../...

Théorème 5.2.

Si A est S.F. à gauche, tout A-module à gauche injectif de type fini est projectif.

Ce théorème va résulter de deux lemmes:

Lemme 5.3. ([1])

Soit F un A-module injectif et P un A-module projectif ; tout épimorphisme p de F sur une enveloppe injective de P

$$F \xrightarrow{p} E(P) \longrightarrow 0$$

est scindé.

-Démonstration.

Soit $Q=p^{-1}(F)$, et soit π la restriction de p à Q ;

la suite $Q \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ est exacte, donc scindée ; soit g une section de π , et soit $K=\mathrm{Ker}\ \pi$ et $P'=\mathrm{Im}\ g$; la restriction de p à P' est un isomorphisme de P' sur P ; en outre $K=\mathrm{Ker}\ p$.

P étant essentiel dans E(P), on vérifie facilement que $Q=p^{-1}(P)$ est essentiel dans $F=p^{-1}(E(P))$; on a donc $F=E(K) \oplus E(P')$.

$\mathrm{Ker}\ p \cap P'=0$ implique que la restriction de p à E(P') est injective, ce qui entraîne que $p(E(P'))=E(P)$.

Soit maintenant x un élément de E(K) ; il existe y dans E(P') tel que $p(x)=p(y)$, c'est-à-dire tel que $x-y$ appartienne à $K \subset E(K)$. Il en résulte que y appartient à $E(K) \cap E(P)=0$, donc que $p(x)=0$, ce qui implique que $E(K)=K$ est un facteur direct de Q.

Si on note h l'inverse de l'isomorphisme $p/E(P'))$on en déduit que $F=\mathrm{Ker}\ p \oplus \mathrm{Im}\ h$.

Proposition 5.4.

Si A est S.F. à gauche, toute suite exacte $F \longrightarrow E \longrightarrow 0$ où E et F sont des A-modules à gauche injectifs est scindée.

-Démonstration.

Le socle $\bigoplus_{i\in I} S_i$ de E est essentiel dans E, et $P= \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ est

.../...

projectif d'après le théorème 5.1. ; puisque $E(P)=E$, la suite exacte $F \longrightarrow E \longrightarrow 0$ est scindée d'après le lemme 5.2.

<u>Corollaire 5.5.</u>

Tout module à gauche de <u>dimension injective finie</u> sur un anneau <u>S.F. à gauche</u> est <u>injectif</u>.

<u>Démonstration du théorème 5.2.</u>

Soit $E=\sum_{i=1}^{n} A x_i$ un module injectif, et soit P une couverture projective de E ; on vérifie facilement que P est de type fini, donc somme directe finie de projectifs indécomposables ; le théorème 5.1 prouve que P est injectif, donc (proposition 5.4), la suite $P \longrightarrow E \longrightarrow 0$ est scindée, ce qui prouve que E est projectif.

<u>Remarque.</u>

La condition duale "tout projectif de type fini" est équivalente à l'auto-injectivité de A_S.

<u>Proposition 5.6.</u>

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

① A est <u>S.F. à gauche</u>

② (i) A est <u>cogénérateur à gauche</u>

(ii) Les $\mathfrak{Z}(a)$, $a \in A$, vérifient <u>la condition de chaîne ascendante</u>.

-<u>Démonstration.</u>

1 ==> 2

(i) est évident

(ii) A étant parfait à droite, les idéaux à gauche monogènes vérifient la condition de chaîne descendante.

Soit alors une suite croissante d'annulateurs

$\mathfrak{Z}(a_1) \subset \mathfrak{Z}(a_2) \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{Z}(a_n) \subset \ldots$

.../...

On a $l\mathfrak{r}(a_n)=l\mathfrak{r}(Aa_n)=Aa_n$ d'après le corollaire 3.4. ; il en résulte qu'il existe un entier n pour lequel on a $Aa_n=Aa_{n+1}=\dots$, ce qui implique que la suite dont on est parti est stationnaire.

2 ==> 1 .

Il suffit, d'après le théorème 5.1., de prouver que A est parfait à droite, ce qui se démontre exactement comme ci-dessus.

-Remarque.

On peut remplacer la condition (2) (ii) précédente par la condition de chaîne ascendante sur les $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ décrit l'ensemble des idéaux à gauche de type fini de A.

<u>Proposition 5.7</u>.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

(1) A <u>est Q.F</u>.

(2) (i) A est <u>cogénérateur à gauche</u>

(ii) Les $l(X)$, $X \subset A$, vérifient <u>la condition de chaîne ascendante</u>.

(3) (i) A est <u>cogénérateur à gauche</u>.

(ii) Les $\mathfrak{r}(X)$, $X \subset A$, vérifient la <u>condition de chaîne ascendante</u>.

-Démonstration.

1 ==> 2 et 1 ==> 3 sont triviaux.

2 ==> 1

A étant cogénérateur, tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ est un annulateur à gauche ($\mathfrak{a}= l(X)$, avec $X=\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$) ; A est donc noethérien à gauche, et la proposition 4.3 permet de conclure.

3 ==> 1

La condition de chaîne ascendante sur les $\mathfrak{r}(X)$ est équivalente à la condition de chaîne descendante sur les $l(X)$; pour les mêmes raisons que précédemment, A est artinien à gauche, donc Q-F.

.../...

Proposition 5.8.

Les propriétés suiva ntes sont équivalentes pour un anneau A, de socle gauche $\mathcal{S}$

① A est Q.F.

② (i) A est S.F. à gauche

(ii) $\dim\ (A/\mathcal{S})_s < \infty$

-Démonstration.

1 ==> 2

(i) est trivial

(ii) A étant Q.F.

$A/\mathcal{S}$ est contenu dans $A^{(I)}$; mais puisque $A/\mathcal{S}$ est monogène, on peut supposer que I est fini.

$\dim A_s$ finie entraîne $\dim_A A^n$ finie, et donc il en est de même pour $A/\mathcal{S}$.

2 ==> 1

$E(A/\mathcal{S})$ est un module injectif de dimension finie, donc est somme directe finie d'injectifs indécomposables $(E_i)_{i=1\ldots n}$; A étant S.F. à gauche, les E_i sont projectifs (Théorème 5.1.), donc $E(A/\mathcal{S})$ est projectif, donc contenu dans un $A^{(I)}$; il existe alors un entier p tel que $A/\mathcal{S}$ soit contenu dans A^p.

Soit $\bar{1} = (a_1, \ldots, a_p)$

$$\mathcal{S} = l(\bar{1}) = l\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A\right)$$

$$r(\mathcal{S}) = rl\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i A \quad \text{puisque } A_s \text{ est injectif.}$$

Mais on sait (proposition 4.4.) que $R = r(\mathcal{S})$, et R est donc de type fini à droite. La proposition résulte alors de la proposition 5.9, et du fait que tout anneau injectif à gauche, artinien à droite est Q.F. ([4]).

.../...

Proposition 5.9.

Soit A un anneau parfait à droite ou à gauche ; les assertions suivantes sont équivalentes :

① A est artinien à gauche.

② R est de type fini à gauche.

-Démonstration [10] lemme 11.

Théorème 5.10.

Si A est S.F. à gauche, il y a identité entre modules projectifs et modules complètement décomposables (i.e. sommes directes d'injectifs indécomposables).

-Démonstration.

Que tout projectif soit complètement décomposable résulte de [2] proposition 4.2 ; la réciproque résulte du théorème 5.1.

Corollaire 5.11.

Si A est S.F. à gauche, tout facteur direct d'un module complètement décomposable est complètement décomposable.

On a ainsi un exemple d'anneau pour lequel le problème de Matlis ([7]) est résolu par l'affirmative.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS. Finistic homological dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans Amer. Math. Soc. 95 (1960). 466-488.

[2] J.Y. CHAMARD. Anneaux semi-parfaits. Séminaire d'algèbre non commutative. Orsay 1969-1970.

[3] J.Y. CHAMARD. Anneaux semi-parfaits et presque frobeniusiens. C.R. de L'Académie des Sciences t. 269. p. 556-559.

[4] C. FAITH. Rings with ascending condition on annihilators. Nagoya Math. J. 27 (1966). 179-191.

[5] C. FAITH § E. WALKER. Direct. sum representations of injective modules. I. of Algebra 5 (1967) 203-221.

[6] T. KATO. Torsionless modules. Tôhoku Math. J. 20 (1968) 234-243.

[7] E. MATLIS. Injective modules over noetherian rings. Pacific J. Math 8 (1958) 511-528.

[8] K. MORITA. On S. rings in the sens of kash. Nagoya Math. J. 27 (1966). 687-695.

[9] C. NITA. Sur les anneaux A, tels que tout A-module simple soit isommorphe à un idéal. C.R. Acad. Sc. Paris t. 268. p.88-91.

[10] B. OSOFOKY. A generalization of Q.F. rings. J. of Algebra 4 (1966)373-38

[11] K. SUGANO. A note on Azumaya's theorem. Osaka J. Math. 4 (1967) 157-160.

[12] Y. UTUMI. Self injective rings. J. of algebra 6(1967) 56-64.

[13] G. AZUMAYA. Completely faithful modules and self injective rings - Nagoya Math. J. 27 (1966) 697-708

[14] Y. Utumi - On continuous rings and self injective rings. Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965) 168-173 .

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Exposé n° 7

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Lundi 5 janvier 1970

Théories de torsion par B. LEMONNIER.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

§ 1. On appelle théorie de torsion dans la catégorie des A-modules un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de deux classes de A-modules qui satisfait à l'un des systèmes d'hypothèses I, II ou III (voir [2]) de la

Proposition 1 sont équivalents :

I 1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$ 2) $0 \longrightarrow M \longrightarrow F$ exacte et $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow M \in \mathcal{F}$
3) $\mathcal{T} \ni T \longrightarrow M \longrightarrow 0$ exacte $\Longrightarrow M \in \mathcal{T}$ 4) Pour tout A-module M il existe un sous-module $\mathcal{T}(M)$ tel que $\mathcal{T}(M) \in \mathcal{T}$ et $M/\mathcal{T}(M) \in \mathcal{F}$.

II 5) $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ sont stables par isomorphismes et $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$, $T \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$. Et 4).

III $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ sont deux classes complètes pour la relation d'orthogonalité $\mathrm{Hom}(T,F) = 0$.

Démonstration.

I $\Longrightarrow$ II ; la stabilité par isomorphisme provient de 2) pour $\mathcal{F}$ et de 3) pour $\mathcal{T}$. Si $h : T \longrightarrow F$, $h(T) \in \mathcal{T}$ par 3), $\in \mathcal{F}$ par 2) donc $h = 0$ par 1).

II $\Longrightarrow$ III $0 \longrightarrow \mathcal{T}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathcal{T}(M) \longrightarrow 0$ étant la suite exacte définie par 4) ; si $\mathrm{Hom}(M,F) = 0$ $\forall F \in \mathcal{F}$, $M \longrightarrow M/\mathcal{T}(M)$ est nul donc

$M \in \mathcal{T}$, si Hom $(T, M) = 0 \ \forall T \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}(M) \longrightarrow M$ est nul donc $\mathcal{T}(M) = 0$ et $M \in \mathcal{F}$.

III $\Longrightarrow$ I ; 1) est évident. 2) $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \in \mathcal{F}$ exacte et Hom $(T, F) = 0 \ \forall T \Longrightarrow$ Hom $(T, M) = 0 \ \forall T$ et $M \in \mathcal{F}$ par "complétude". 3) preuve analogue. Pour vérifier 4) remarquer d'abord que si $T_i \in \mathcal{T}$, l'isomorphisme Hom $(\oplus T_i, F) \simeq \Pi$ Hom (T_i, F) montre que Hom $(\oplus T_i, F) = 0$: $\mathcal{T}$ est stable par passage aux sommes directes ; ensuite $\mathcal{T}$ est stable par extension : si $0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow M \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$ est exacte où T_1 et $T_2 \in \mathcal{T}$ alors $M \in \mathcal{T}$ en effet $0 \longrightarrow$ Hom $(T_2, F) \longrightarrow$ Hom $(M, F) \longrightarrow$ Hom (T_1, F) est exacte, Hom $(T_1, F) = 0$, Hom $(T_2, F) = 0$ donc Hom $(M, F) = 0$ et $M \in \mathcal{T}$.

Soit M, A-module ; soit $\{M_i\}$ l'ensemble de tous les sous-modules de M qui $\in \mathcal{T}$ (il y a au moins 0), soit $\mathcal{T}(M) = \Sigma M_i$. L'épimorphisme $\mathcal{T} \ni \oplus M_i \longrightarrow \Sigma M_i = \mathcal{T}(M)$ montre (3) que $\mathcal{T}(M) \in \mathcal{T}$. De plus si $h \in$ Hom $(T, M/\mathcal{T}(M))$, Imh $= M_0/\mathcal{T}(M)$ où $\mathcal{T}(M) \subseteq M_0 \subseteq M$; Imh $\in \mathcal{T}$ donc (entension) $M_0 \in \mathcal{T}$ et, par construction de $\mathcal{T}(M)$, $M_0 = \mathcal{T}(M)$ et $h = 0$. Ainsi $M/\mathcal{T}(M) \in \mathcal{F}$.

Conséquence de III : <u>fabrication des théories de torsion</u>.

Pour $\mathcal{C}$ classe de A-modules, posons ${}^{\perp}\mathcal{C} = \{M \mid \text{Hom}(M, C) = 0 \ \forall C \in \mathcal{C}\}$ et symétriquement $\mathcal{C}^{\perp}$. Les deux couples ${}^{\perp}\mathcal{C}, ({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp}$ et ${}^{\perp}(\mathcal{C}^{\perp}), \mathcal{C}^{\perp}$ sont des théories de torsion parcequ'ils vérifient III.

Exemple : prendre $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \mid p \text{ premier}\}$ alors on voit que

${}^{\perp}\mathcal{P}$ est la classe des groupes (abéliens) divisibles,

$\mathcal{P}^{\perp}$ est la classe des groupes sans torsion,

$({}^{\perp}\mathcal{P})^{\perp}$ est la classes des groupes réduits (sans sous-groupes divisibles)

${}^{\perp}(\mathcal{P}^{\perp})$ est la classe des groupes de torsion.

Proposition 2 Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion,

a) $\mathcal{T}$ est stable par quotient, extension et somme directe;

b) $\mathcal{F}$ est stable par $\subseteq$, extension et produit.

On appellera classe de torsion (resp. classe libre) une classe vérifiant a) (resp. b)).

Démonstration :

a) a été prouvé dans III $\Longrightarrow$ I de P1.

b) $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$ exacte $\Longrightarrow$ $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(T, F_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(T, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(T, F_2)$ exacte donc $\mathrm{Hom}\,(T, M) = 0$ et $M \in \mathcal{F}$; $\mathrm{Hom}\,(T, \Pi F_i) \simeq \Pi\, \mathrm{Hom}\,(T, F_i) = 0$ donc $\mathcal{F}$ est stable par Π.

Remarque :

"stable par $\subseteq$ " signifie 2) de I.

Proposition 2'

a) si $\mathcal{T}$ est une classe de torsion il existe une et une seule classe $\mathcal{F}$ telle que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ soit théorie de torsion et $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp}$.

b) si $\mathcal{F}$ est une classe libre, il existe une classe unique $\mathcal{T}$ telle que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ soit théorie de torsion et $\mathcal{T} = {}^{\perp}\mathcal{F}$.

Démonstration :

a) si $\mathcal{F}$ existe, nécessairement d'après III $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp}$. On vérifie que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\perp})$ est théorie de torsion au moyen de II, pour 4) la preuve a été donnée dans III $\Longrightarrow$ I.

b) nécessairement $\mathcal{T} = {}^{\perp}\mathcal{F}$. $({}^{\perp}\mathcal{F}, \mathcal{F})$ vérifie II ; seul 4) n'est pas évident.

Etant donné M, soit $\{M_i\}$ l'ensemble de tous les sous-modules M_i de M tels que

$M/M_i \in \mathcal{F}$; $M_0 = \bigcap M_i$; M/M_0 est plongeable dans $\Pi M/M_I$ donc $M/M_0 \in \mathcal{F}$. Montrons que $M_0 \in {}^{\perp}\mathcal{F}$; $h : M_0 \longrightarrow F \Longrightarrow M_0/\mathrm{Kerh} \in \mathcal{F}$ mais $0 \longrightarrow M_0/\mathrm{Kerh} \longrightarrow M/\mathrm{Kerh} \longrightarrow M/M_0 \longrightarrow 0$ montre (extension) que $M/\mathrm{Kerh} \in \mathcal{F}$ donc (construction de M_0) $\mathrm{Kerh} = M_0$ et $h = 0$.

On a aussi démontré la

Proposition 2"

$\mathcal{T}(M)$ est le plus petit des sous-modules M' de M tels que $M/M' \in \mathcal{F}$;

$\mathcal{T}(M)$ est le plus grand des sous-modules M" de M tels que $M'' \in \mathcal{T}$. Notamment $\mathcal{T}(A)$ est un idéal bilatère.

§ 2 Théories de torsion héréditaires.

Ainsi nommées quand $\mathcal{T}$ est stable par $\subseteq$.

Remarque :

Il y a identité entre les sous-catégories localisante de mod A et les classes de torsion $\mathcal{T}$ héréditaires.

Proposition 3

Pour une théorie de torsion $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ sont équivalentes (voir [4]) :

a) $\mathcal{T}$ est héréditaire ;

b) $\mathcal{F}$ est stable par $E(\cdot)$ (passage à une enveloppe injective) ;

c) il existe deux modules X_0, Y_0, Y_0 injectif, tels que $\mathcal{T} = {}^{\perp}\{Y_0\}$ et $\mathcal{F} = \{X_0\}^{\perp}$.

Démonstration :

a) $\Longrightarrow$ b) Pour $F \in \mathcal{F}$ soit $h \in \mathrm{Hom}\,(T, E(F))$; $\mathrm{Imh} \in \mathcal{T}$ par 3) donc $\mathrm{Imh} \cap F \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$

par a) et par 2). Ainsi $\operatorname{Im} h = 0$.

b) $\Longrightarrow$ a) si $0 \longrightarrow M \longrightarrow T \in \mathcal{T}$ est exacte, $\operatorname{Hom}(T, E(F)) = 0 \Longrightarrow$ $\operatorname{Hom}(M, E(F)) = 0 \Longrightarrow \operatorname{Hom}(M, F) = 0 \Longrightarrow M \in \mathcal{T}$.

(a,b) $\Longrightarrow$ c) soit $\{X_\alpha\}$ l'ensemble des modules cycliques appartenant à $\mathcal{T}$ (un par classe d'osomorphisme) alors $X_0 = \oplus X_\alpha \in \mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{F} \subseteq \{X_0\}^{\perp}$. Si $M \notin \mathcal{F}$, $\operatorname{Hom}(T, M) \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha$ tel que $\operatorname{Hom}(X_\alpha, M) \neq 0$ et $M \notin \{X_0\}^{\perp}$. Ainsi $\mathcal{F} = \{X_0\}^{\perp}$.

Soit $\{X_\beta\}$ l'ensemble des modules cycliques appartenant à $\mathcal{F}$ (un par classe d'isomorphisme), $E(\Pi X_\beta) = Y_0 \in \mathcal{F}$ par b) donc $\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp}\{Y_0\}$. Si $M \notin \mathcal{T}$, $\operatorname{Hom}(M, F) \neq 0$ ($\exists\, F \in \mathcal{F}$) donc il existe $M_0 \subseteq M$ tel que $\operatorname{Hom}(M_0, X_\beta) \neq 0$ pour un certain β donc $\operatorname{Hom}(M_0, Y_0) \neq 0$ et (Y_0 est injectif) $\operatorname{Hom}(M, Y_0) \neq 0$ ainsi $M \notin {}^{\perp}\{Y_0\}$.

Ainsi toute sous-catégorie localisante de mod A a pour objets les modules d'une classe ${}^{\perp}\{Y_0\}$ où Y_0 est injectif.

c $\Longrightarrow$ a est immédiat.

§ 3 Classes à la fois libres et de torsion.

Etant donné une classe $\mathcal{C}$ on notera $\Phi(\mathcal{C})$ l'ensemble des idéaux à gauche L de A tels que $A/L \in \mathcal{C}$.

Remarque 1

Si $\mathcal{C}$ est une classe de torsion héréditaire alors $M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow 0 : m \in \Phi(\mathcal{C})$ $\forall m \in M$.

Remarque 2

Si I est un idéal à gauche idempotent alors $\underset{\text{mod}A}{0 \,/\, I} = \{I\}^{\perp}$.

Proposition 4

Pour une classe de torsion $\mathcal{C}$ héréditaire s'équivalent :

a) $\mathcal{C}$ est stable par Π,

b) $\Phi(\mathcal{C})$ est un filtre avec plus petit élément,

c) il existe I idéal à gauche idempotent tel que $\mathcal{C} = \{I\}^{\perp}$,

d) il existe I idéal à gauche idempotent tel que $\mathcal{C} = 0 \,/\, I$.

a) $\Longrightarrow$ b) $\mathcal{C}$ est une classe libre donc $({}^{\perp}\mathcal{C}, \mathcal{C})$ est une théorie de torsion,

$\{L \mid A/L \in \mathcal{C}\}$ admet (P. 2") un plus petit élément $I = ({}^{\perp}\mathcal{C})(A)$. Enfin $L \supset I \Longrightarrow \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{L} \longrightarrow 0$ exacte donc $\frac{A}{L} \in \mathcal{C}$ et $L \in \Phi(\mathcal{C})$. Ainsi $\Phi(\mathcal{C})$ est l'ensemble des idéaux à gauche qui contiennent I.

b $\Longrightarrow$ (d = c) Soit $I = \min(\Phi(\mathcal{C}))$. D'après R. 1 $M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow IM = 0$ donc $I/_{I^2} \in \mathcal{C}$, mais $0 \longrightarrow I/_{I^2} \longrightarrow A/_{I^2} \longrightarrow A/_{I} \longrightarrow 0$ étant exacte c'est que $A/_{I^2} \in \mathcal{C}$ donc $I^2 = I$.

d) $\Longrightarrow$ a) est immédiat.

§ 3 Théorie de torsion de Goldie.

Soit $\mathcal{F}$ la classe des A-modules M à sous-module singulier $J(M)$ nul ; $\mathcal{F}$ est stable par passage aux sous-modules, aux produits directs, aux enveloppes injectives et par extension. $\mathcal{F}$ définit donc une théorie de torsion $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, où

$\mathcal{G} = {}^{\perp}\mathcal{F}$, qui sera héréditaire. $\mathcal{G} = \{M \mid J(M) < M\}$, en effet

si $J(M) < \dot{M}$ et $h : M \longrightarrow F \in \mathcal{F} \Longrightarrow h : M/J(M) \longrightarrow F \Longrightarrow h = 0 \Longrightarrow h = 0$;

si $J(M) \not< M$, il existe K tel que $J(M) \oplus K \subseteq M$, $K \in \mathcal{F}$, l'identité $K \longrightarrow K$, se prolonge en un homomorphisme non nul $M \longrightarrow E(K)$ or $E(K) \in \mathcal{F}$, donc $M \not\in {}^{\perp}\mathcal{F}$.

Remarquer que $\mathcal{G}$ est aussi la plus petite des classes de torsion qui contiennent les quotients M/N où N essentiel dans M. P.2" montre que $\mathcal{G}(M)$ est l'extension essentielle maximale de $J(M)$ dans M.

Lemme 1 $\Phi(\mathcal{G}) = \{L \subseteq {}_A A \mid L + J({}_A A) < {}_A A\}$.

Pour $\supseteq$, on a la suite exacte dont les termes extrêmes appartiennent à $\mathcal{G}$:

$$0 \longrightarrow \frac{J(A)}{L \cap J(A)} \simeq \frac{L + J(A)}{L} \longrightarrow \frac{A}{L} \longrightarrow \frac{A}{L + J(A)} \longrightarrow 0, \text{ donc } L \in \Phi(\mathcal{G}) :$$

Pour $\subseteq$, si $L + J(A) \not<$ il existe K idéal à gauche non nul tel que $K \cap [L + J(A)] = 0$;

K est plongeable dans $\frac{A}{L + J(A)}$ lui même image homomorphe de $\frac{A}{L}$, puisque $K \in \mathcal{F}$ on conclut $\frac{A}{L} \in \mathcal{G}$.

Lemme 2 Tout idéal à gauche simple U appartenant à $\mathcal{F}$ est contenu dans tout $L \in \Phi(\mathcal{G})$.

Sinon on aurait pour un certain L $\frac{A}{L} \in \mathcal{G}$ et $U \cap L = 0$ mais $U \simeq \frac{U \oplus L}{L} \subset \frac{A}{L}$ contredisant $U \in \mathcal{F}$.

I Cas où $\mathcal{G}$ est stable par produit (c'est-à-dire classe libre).

Proposition 5 sont équivalentes (voir [6])

1) $\mathcal{G}$ est stable par passage aux produits directs ;

2) $\Phi(\mathcal{G})$ a un plus petit élément ;

3) $A > \mathcal{G}(A) \oplus S$ où S est semi-simple comme idéal à gauche;

4) $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow$ le socle de F est non nul;

5) tout idéal à gauche L appartenant à $\mathcal{F}$ a un socle non nul.

$1 = 2$ (P. 4)

$2 \Longrightarrow 3$ $\Phi(\mathcal{G})$ admet un plus petit élément : $({}^{\perp}\mathcal{G})(A)$; $J(A) + ({}^{\perp}\mathcal{G})(A) < A$ d'après L. 1 ; $\mathcal{G}(A) \oplus ({}^{\perp}\mathcal{G})(A) < A$ puisque $\mathcal{G}$ et ${}^{\perp}\mathcal{G}$ sont héréditaires (remarquer que $\mathcal{G}$ est stable par passage aux enveloppes injectives et appliquer P. 3). Enfin $I < ({}^{\perp}\mathcal{G})(A)$ implique $I \in \Phi(\mathcal{G})$ (L. 1) donc $I = ({}^{\perp}\mathcal{G})(A)$. Ainsi $S = ({}^{\perp}\mathcal{G})(A)$ est un idéal bilatère, semi simple comme idéal à gauche.

$3 \Longrightarrow 4$ $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{G}(A)\, F = 0 \Longrightarrow S.F \neq 0 \Longrightarrow$ socle de $F \neq 0$

$4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 2$ Soit $I = \bigcap L$ où L décrit $\Phi(\mathcal{G})$. Si $J(A) + I \not< A \Longrightarrow \exists K$ tel que $K \cap [J(A) + I] = 0 \Longrightarrow K \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists U$ simple $\subseteq K$ par l'hypothèse 5).

Donc (L. 2) $U \subseteq I$, contradiction qui montre que $I \in \Phi(\mathcal{G})$.

Remarque :

Dans 3) S est unique ; S est aussi bilatère.

Il est immédiat qu'on a toujours ${}^{\perp}\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Pour avoir l'égalité, il faut que $\mathcal{F}$ soit stable par passage aux quotients, la proposition 6 montre entre autre que c'est suffisant.

II Cas où $\mathcal{F}$ est stable par passage aux quotients (c'est-à-dire classe de torsion)

Proposition 6 Pour un anneau A unitaire, sont équivalentes (voir [6] pour 4) = 5))

1) $\mathcal{F}$ est stable par quotient ;

2) $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow F$ est semi-simple ;

3) $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow F$ est injectif ;

4) $A = \mathcal{G}(A) \oplus S$, produit direct des anneaux $\mathcal{G}(A)$ et S, S anneau semi-simple ;

5) a) $\mathcal{G}$ est stable par produit,

b) le plus petit élément de $\Phi(\mathcal{G})$ est de type fini

c) A ne contient pas d'idéaux à gauche $\in \mathcal{F}$ et nilpotents.

1) $\Longrightarrow$ 4) Par 1) $\mathcal{F}$ est une classe de torsion, $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{G}(A)$ sont deux idéaux bilatères, leur intersection est nulle puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont héréditaires, $\mathcal{F}(A)$ est le plus grand idéal à gauche qui appartienne à $\mathcal{F}$, un complément de $\mathcal{G}(A)$ appartenant à $\mathcal{F}$ on en conclut $\mathcal{F}(A) \oplus \mathcal{G}(A) < A$; enfin $\dfrac{A}{(A) \oplus (A)} \in \mathcal{F}$ comme image homomorphe de $\dfrac{A}{\mathcal{G}(A)}$ et $\in \mathcal{G}$ par essentialité de $\mathcal{F}(A) \oplus \mathcal{G}(A)$ dans A. Donc $A = \mathcal{F}(A) \oplus \mathcal{G}(A)$; $\mathcal{F}(A)$ est semi-simple puisque dépourvu (par 1)) de sous module essentiel.

4) $\Longrightarrow$ 3) $F \in \mathcal{F}$ $F \subset M = \mathcal{G}(A) M \oplus SM$ or $\mathcal{G}(A) F = 0$ donc $F = SF$ ainsi $F \subseteq SM$: F est facteur direct dans SM (qui est semi-simple) donc dans M.

3) $\Longrightarrow$ 2) Tout sous-module de F appartient à $\mathcal{F}$ donc est facteur direct comme injectif.

2) $\Longrightarrow$ 1) est évident.

4) $\Longrightarrow$ 5) D'après L. 1 $S \in \Phi(\mathcal{G})$; D'après L. 2 $L \in \Phi(\mathcal{G}) \Longrightarrow S \subseteq L$. Donc S est le plus petit élément du filtre $\Phi(\mathcal{G})$, ce qui montre a) b). Si $I \in \mathcal{F}$, I idéal à gauche, $I = AI = SI \subseteq S$ donc $I^2 \neq 0$ puisque S est anneau semi-simple, d'où c).

5) $\Longrightarrow$ 4) Par a) et P. 5, $A > \mathcal{G}(A) \oplus S$ où ${}_AS$ est semi-simple ; b) équivaut à dire que $A/\mathcal{G}(A)$ est de dimension à gauche finie ;

c) équivaut à dire que $A/\mathcal{G}(A)$ est un anneau semi premier. La relation d'essentialité passe au quotient puisque $\mathcal{G}(A)$ est un complément dans ${}_AA$, donc $A/\mathcal{G}(A)$ est un anneau semi-premier à socle gauche essentiel et de dimension finie, il est donc semi-simple : si $\Pi : A \longrightarrow A/\mathcal{G}(A)$ on a

$\Pi(S) = \dfrac{A}{\mathcal{G}(A)}$ donc $\mathcal{G}(A) \oplus S = A$.

<u>III Cas où la classe des injectifs qui appartiennent à $\mathcal{F}$ est stable par passage aux sommes directes.</u>

<u>Lemme 3</u> :

Soient I un idéal bilatère de A, $B = A/I$ et X un A-module tel que $I.X = 0$.

Alors 1) $J({}_BX) \subseteq J({}_AX)$

2) Si ${}_AX$ est injectif, alors ${}_BX$ l'est aussi.

Soit $\Pi : A \longrightarrow B$; X est un B-module avec $\Pi(a).x = a.x$. Tout ${}_BM$ est un ${}_AM$ avec $a.m = \Pi(a)m$.

1) $\Pi \in \mathrm{Hom}\,({}_AA, {}_AB)$ et les sous-modules de ${}_AB$ sont les idéaux à gauche de B. Si $x \in J({}_BX)$ il existe $\Pi(G)$, $\Pi(G) < {}_BB$ avec $\Pi(G)x = 0$ et $G \supseteq I$.

$\Pi(G) < {}_BB \Longrightarrow \Pi(G) < {}_AB \Longrightarrow G = \Pi^{-1}\,\Pi\,\langle G\rangle < {}_AA$. Enfin $G.x = 0$.

2) Soit ${}_BN \subset {}_BM$ et $h \in \mathrm{Hom}_B(N,X)$, alors $h \in \mathrm{Hom}_A(N,X)$, h se prolonge

donc en $h \in Hom_A(M,X)$. Evidemment $h \in Hom_A(M,X)$.

Lemme 4 :

Soit $_BE$ injectif avec $J(_BE) = 0$. Supposons que $J(B) = 0$ et que S désigne l'anneau enveloppe injective injective de $_BB$ (S régulier, autoinjectif à gauche). Alors E admet une unique structure de S-module prolongeant sa structure de B-module.

A $e \in E$ on associe le B-homomorphisme $b \longrightarrow be$ de B dans E qui se prolonge en $g_e \in Hom_B(S, E)$ de manière unique. En posant $se = g_e(s)$, on vérifie que E est un S-module.

Lemme 5 :

Si $J(B) = 0$ où B est un anneau de dimension gauche finie alors S est anneau semi-simple.

Soit I idéal à gauche de S ; B étant de dimension gauche finie, S aussi ; donc $_SI$ est extension essentielle d'un $_SI'$ de type fini. I' est engendré par un idempotent puisque S est régulier donc injectif puisque $_SS$ est injectif. Donc $I = I'$. Ainsi I est facteur direct et S est anneau semi-simple.

Proposition 7 : Pour un anneau A sont équivalentes :

1) $A/\mathcal{G}(A)$ est de dimension gauche finie ;

2) tout E injectif avec $J(E) = 0$ se décompose ;

3) toute somme directe d'injectifs E_i avec $J(E_i) = 0$ est injective ;

4) les compléments dans ${}_A A$ qui contiennent $J(A)$ vérifient la condition maximale ;

5) $\Phi(\mathcal{G})$ contient une partie cofinale formée d'idéaux à gauche de type fini ;

6) il existe $C_1, \ldots\ldots, C_n$ idéaux à gauche coirréductibles tels que

$A > \mathcal{G}(A) \oplus C_1 \oplus \ldots\ldots \oplus C_n$.

1 $\Longrightarrow$ 2 ${}_A E \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{G}(A)\,E = 0$. Donc si $B = A/\mathcal{G}(A)$, E est un B-module, injectif d'après L. 3, et $J({}_B E) = 0$ d'après L. 3. Mais B satisfait aux hypothèses du lemme 5 S est donc semi-simple. E est un S-module d'après L. 4 ; donc ${}_S E = \oplus\, {}_S E_i$ où les ${}_S E_i$ sont simples. On en déduit ${}_B E = \oplus\, {}_B E_i$ où les ${}_B E_i$ sont injectifs (facteurs directs de ${}_B E$) et indecomposables. D'où 2).

2 $\Longrightarrow$ 3 Par 2) on peut supposer les E_i indécomposables, soit $Q = E(\oplus E_i)$. Par 2) $Q = \oplus Q_j$ où les Q_j sont indécomposables. D'après ([3]) il existe un automorphisme φ de Q et une bijective $i \longleftrightarrow j$ telle que $\varphi(Q_j) = E_i$ d'où $\varphi(Q) = Q = \oplus E_i$ ce qui montre 3).

3 $\Longrightarrow$ 4 Soit (C_n) une suite croissante de compléments dans ${}_A A$ contenant $J({}_A A)$; on vérifie que $J(A/C_n) = 0$.

Soit $C = \cup C_n$, les homomorphismes canoniques $C \longrightarrow E(\frac{C}{C_n}) = E_n$ définissent un homomorphisme $C \longrightarrow \oplus E_n = E$, $J(\frac{C}{C_n}) = 0$ donc $J(E_n) = 0$ donc E est injectif et on conclut comme dans ([1]) que la suite est constante à partir d'un certain rang (Si A non unitaire on utilise à la fin l'habituelle adjonction d'un élément neutre).

$4 \Longrightarrow 5$ Si $L \in \varphi(\mathcal{J})$ il existe $L_0 \subseteq L$ tel que $J(A) \oplus L_0 < A$ (il suffit de prendre un complément de $J(A) \cap L$ dans L). Si dim L_0 est finie la démonstration est achevée. Sinon L_0 contiendrait une somme directe infinie d'où on déduirait l'existence d'une suite strictement croissante infinie de compléments contenant $J(A)$ contredisant 4).

$5 \Longrightarrow 6$ Soit K un complément relatif à $J(A)$ dans A : $J(A) \oplus K < A$.

Soit $\oplus K_i < K$; $\oplus K_i \in \Phi(\mathcal{J})$ par L. 1 donc $\oplus K_i$ contiendrait I de type fini avec $I < \oplus K_i$, donc l'ensemble des i est fini. Ainsi ${}_A K$ est de dimension finie : $\exists\ C_1, \ldots, C_n$ coirréductibles tels que $C_1 \oplus \ldots \oplus C_n < K$ d'où 6).

$6 \Longrightarrow 1$ Soit $\pi : A \longrightarrow A/\mathcal{J}(A)$; puisque $\mathcal{J}(A)$ est un complément (voir [5]) $\pi(C_1) \oplus \ldots \oplus \pi(C_n) < \pi(A)$ et $\pi(C_i) \simeq C_i$ les $\pi(C_i)$ sont donc coirréductibles comme $A/\mathcal{J}(A)$-modules et $A/\mathcal{J}(A)$ est bien de dimension à gauche finie.

<u>Remarque</u> :

l'anneau semi-simple $S = E(A/\mathcal{J}(A))$ n'est autre que le localisé A de A.

REFERENCES

[1] CHASE, S. Direct product of modules (Trans. Amer. Math. Soc. 97 1960 457-473)

[2] DICKSON, S.E. A torsion theory for abelian categories (Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966) 223-235).

[3] FORT, J. Sommes directes de sous-modules coirréductibles d'un module (Math. Zeitschr 103 (1968) 363-388)

[4] JANS, J.P. Some aspects of torsion (Pacific J. of Math. 15 (1965) 1249-1259)

[5] RENAULT, G Etude des sous-modules compléments dans un module (Bull. Soc. Math. 1966 n° 1 Paris)

[6] TEPLY, M. Some aspects of Goldie's torsion theory (Pacific J. of Math. Vol 29 n° 2 (1969) 447-459)

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Conférence n° 9 du 19 janvier 1970.

ANNEAUX UNISERIELS.

par J. M. GOURSAUD

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Conférence non rédigée développant les résultats exposés dans l'article suivant :

J. M. GOURSAUD : Une caractérisation des anneaux unisériels (C.R. de l'Acad des Sciences de Paris, t. 270, févr. 1970, p. 364-367).

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 26 janvier 1970

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

QUELQUES PROPRIETES DES ANNEAUX A

TELS QUE LE SOUS-MODULE SINGULIER DE TOUT A-MODULE A DROITE M DE TYPE FINI

SOIT FACTEUR DIRECT DANS M.

par A. TRICOIRE.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

A désigne un anneau non nécessairement commutatif, unitaire, les modules considérés sont des A-modules à droite (sauf mention du contraire), unitaires.

Si M est un module, le sous-module singulier de M, noté $J(M)$, est l'ensemble des éléments de M dont l'annulateur est un idéal à droite essentiel dans A.

On désignera par $J(A)$ le sous-module singulier du A-module à droite A. Un module égal à son sous-module singulier sera appelé "module singulier", et un module dont le sous-module singulier est nul sera appelé "module non singulier".

Un anneau S contenant A est un anneau de quotient à droite de A si le A-module à droite A est essentiel dans le A-module S. Soit S un anneau de quotient à droi-

te de A, IS est un idéal à droite de S essentiel dans S, et si J est un idéal à droite de S essentiel dans S, $J \cap A$ est un idéal à droite de A essentiel dans A.
Il en résulte que si M est un A-module, on a :

$$J((M \otimes_A S)_A) = J((M \otimes_A S)_S) = J(M \otimes S)$$

Si A est un anneau tel que $J(A) = 0$, Q désignera l'anneau maximal de quotients à droite.

Théorème 1. [3].

Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) le sous-module singulier de tout module M de type fini est facteur direct de M.

(ii) $J(A) = 0$; $\operatorname{Ext}^1_A(M, S) = 0$ pour tout module M de type fini non singulier et tout module S singulier.

La démonstration du théorème 1, s'appuiera sur le lemme suivant :

Lemme [9].

Soient M et N deux modules sur un anneau A. Toute suite exacte $0 \to N \to X \to M \to 0$ est scindée si et seulement si $\operatorname{Ext}^1_A(M, N) = 0$.

(i) implique (ii). $J(A)$ ne peut contenir d'idempotent non nul, on a donc $J(A) = 0$.
Soient M un module de type fini non singulier et S un module singulier. Considérons une suite exacte $0 \to S \to X \to M \to 0$

On a $J(X) = S$ et il existe un sous-module de type fini B de X tel que $X = S+B$,

or $B = J(B) \oplus C$

on a donc $X = S \oplus C$ et $\operatorname{Ext}^1_A(M, S) = 0$

(ii) implique (i). Puisque $J(A) = 0$, le sous-module singulier de tout module M est un complément dans M. Donc pour tout module M on a $J(M/J(M)) = 0$ et par suite pour tout module M de type fini, la suite exacte

$$0 \to J(M) \to M \to M/J(M) \to 0$$

est scindée.

Corollaire.

Soit A un anneau commutatif vérifiant les conditions du théorème 1. Alors A est semi-héréditaire et tout module non singulier est plat.

Soit M un module non singulier de type fini. Soit C un Z-module injectif. Pour tout idéal I essentiel dans A, le A-module $\mathrm{Hom}_Z(A/I, C)$ est singulier.

On a donc :

$$\mathrm{Ext}_A^1 (M, \mathrm{Hom}_Z(A/I, C) = 0$$

or $\mathrm{Ext}_A^1 (M, \mathrm{Hom}_2(A/I, C)) = \mathrm{Hom}_Z (\mathrm{Tor}_1^A (A/I, M), C)$ [9]

il en résulte que $\mathrm{Tor}_1^A (A/I, M) = 0$ et par suite M est plat.

Tout module non singulier est donc plat, et A est semi-héréditaire (tout sous-module d'un A^I étant plat. [4]. Théorème 4.1).

Remarque 1.

On retrouve ainsi la caractérisation des anneaux de Prüfer due à Kaplansky. [5].

Remarque 2.

Soit A un anneau tel que $J(A) = 0$ et tel que tout module de type fini non singulier soit projectif. Le sous-module singulier de tout module de type fini M est alors facteur direct de M. (C'est le cas par exemple des anneaux semi-héréditaires à droite admettant un anneau total de fractions a gauche et à droite semi-simple. [8]. Théorème 6.1).

Théorème 2. [2]

Soit A un anneau régulier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est auto-injectif à droite,

(ii) tout module de type fini non singulier est projectif,

(iii) Q est un A-module projectif.

(i) implique (ii)

Soit M un module de type fini non singulier. La suite exacte

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

où F est un module libre de rang fini est scindée, donc M est projectif.

(ii) implique (iii).

A est semi-héréditaire à droite. Soit I un idéal à droite de type fini. On a $J(I \otimes Q) = \ker (I \otimes Q \to A \otimes Q)$. En effet, puisque $J(A \otimes Q) = 0$ on a $J(I \otimes Q) \subset \ker (I \otimes Q \to A \otimes Q)$;
maintenant, soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes q_i \in I \otimes Q$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i q_i = 0$,
$J = \{a \in A,\ q_i a \in A,\ i = 1 \dots n\}$ est un idéal à droite essentiel dans A,
donc $(\sum x_i \otimes q_i)a = (\sum x_i q_i a \otimes 1) = 0$ pour tout $a \in J$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes q_i \in J(I \otimes Q)$.

D'autre part, I étant projectif, $I \otimes Q$ est projectif donc sous-module d'un Q-module libre de rang fini et par suite $J(I \otimes Q) = 0$.
Il en résulte que le A-module à gauche Q est plat.
Soit M un module de type fini non singulier. Considérant la suite exacte

$$0 \to K \to F \to M \to 0 \qquad (1)$$

où F est un module libre de rang fini, on définit la suite exacte

$$0 \to K \otimes Q \to F \otimes Q \to M \otimes Q \to 0 \qquad (2)$$

(1) étant une suite scindée, (2) est une suite scindée et par suite $J(M \otimes Q) = 0$.
Il en résulte que $J(Q \otimes Q) = 0$. En effet soit $\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i \in J(Q \otimes Q)$,
posons $M = \sum_{i=1}^{n} p_i A$, M est un module de type fini non singulier et
$\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i \in J(M \otimes Q) = 0$.

Soit $q \in Q$, $I_q = \{a \in A,\ qa \in A\}$ est un idéal à droite essentiel dans A isomorphe au module K intervenant dans la suite exacte :

$$0 \to K \xrightarrow{i} F \to qA + A \to 0$$

F étant un module libre de rang 2.

$qA + A$ étant un module projectif, la suite exacte

$$0 \to K \otimes Q \xrightarrow{i^*} F \otimes Q \to (qA + A) \otimes Q \to 0$$

est scindée et $i^* (K \otimes Q)$ est un Q-module de type fini dont un système générateur est du type $\{x_i \otimes 1,\ x_i \in K,\ i = 1 \dots n\}$.
Le sous-module $\sum_{i=1}^{n} x_i A$ de K est essentiel dans K. En effet, soit $k \in K$, on a $k \otimes 1 \neq 0$ dans $F \otimes Q$ et

$$k \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes 1) q_i$$

Il existe $t \in A$ tel que $(k \otimes 1)t \neq 0$ et $q_i\, t \in A$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$.

On a alors

$$(kt - \sum_{i=1}^{n} x_i\, q_i\, t) \otimes 1 = 0$$

soit $$kt = \sum_{i=1}^{n} x_i\, q_i\, t$$

On en déduit qu'il existe un idéal à droite de type fini essentiel dans I_q. A étant régulier, on a $I_q = A$ et par suite $Q = A$.

(iii) implique (i). Tout sous-module de type fini d'un module projectif P sur un anneau régulier est facteur direct de P. Il en résulte, que A, sous-module de type fini du A-module projectif Q est facteur direct de Q. Donc $A = Q$.

Théorème 3.

Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes ;

(i) $J(A) = 0$ et tout A-module de type fini non singulier est projectif.

(ii) A est semi-héréditaire, à droite, Q est un A-module plat et $J(Q \otimes Q) = 0$.

(i) implique (ii). A est semi-héréditaire à droite, Q étant limite inductive de ses sous-modules de type fini est plat et $J(Q \otimes Q) = 0$ (démonstration analogue à celle du théorème 2 dans "(ii) implique (iii)").

(iii) implique (i). A étant semi-héréditaire à droite, on a $J(A) = 0$.
Soit M un module non singulier de type fini. $M \otimes Q$ est alors un Q-module de type fini non singulier donc projectif (Théorème 2). L'application canonique

$$M \otimes A \to M \otimes Q$$

est une injection puisque $J(M) = 0$ ([7]. Proposition 2.2.). M est donc un sous-module de $M \otimes Q$ qui est lui-même sous-module d'un Q-module libre de rang fini F. F étant un A-module plat, M est un A-module plat puisque A est semi-héréditaire à droite. (En effet dire que A est semi-héréditaire à droite équivaut à dire que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$ pour $n > 1$, pour tout module à droite M et tout module à gauche N. Soit P un A-module plat et R un sous-module de P. A partir de la suite exacte

$$0 \to R \to P \to P/A \to 0$$

on construit la suite exacte

$$\to \mathrm{Tor}_2^A(P/R, X) \to \mathrm{Tor}_1^A(R, X) \to \mathrm{Tor}_1^A(P, X) \to \mathrm{Tor}_1^A(P/R, X) \to R \otimes X \to P \otimes X \to P/R \otimes X \to 0$$

dans laquelle : $\mathrm{Tor}_1^A(P, X) = 0$ puisque P est plat

$\mathrm{Tor}_2^A(P/R, X) = 0$ puisque A est semi-héréditaire à droite

on en déduit $\mathrm{Tor}_1^A(R, X) = 0$ c'est-à-dire que R est plat

M étant un module plat et $M \otimes Q$ un Q-module projectif, on en déduit que M est projectif.

En effet, considérons la suite exacte

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

où F est un module libre de rang fini.

On en déduit la suite exacte

$$0 \to K \otimes Q \to F \otimes Q \to M \otimes Q \to 0$$

qui est scindée.

Il en résulte (comme dans la démonstration (ii) implique (iii) du théorème 2) qu'il existe un sous-module L de K, de type fini et essentiel dans K.

Or d'après ([4] prop. 2.2.), il existe un homomorphisme

$$\theta : F \to K$$

qui est l'identité sur L. θ est alors l'identité sur K et la suite $0 \to K \to F \to M$ est scindée.

Corollaire.

Soit A un anneau commutatif vérifiant les conditions équivalentes du théorème 3. Si S désigne l'anneau total de fractions de A, on a S = Q.

Le A-module $N = \sum_{i=1}^{n} x_i A$ est essentiel dans le A-module M et $N \otimes_A S = M$. M étant projectif, est facteur direct d'un A-module libre F de rang fini, $N \oplus P = F$.

Il en résulte que $M \oplus (P \otimes_A S) = F \otimes_A S$, et M est projectif.

A étant héréditaire, S est régulier d'après le théorème 2, S est auto-injectif.

S est donc l'enveloppe injective de A.

BIBLIOGRAPHIE

1 CATEFORIS — Flat Regular Quotient Rings
Trans. Amer. Math. Soc. (April 1969)

2 CATEFORIS — On Regular Self Injective Rings
Pacific Journal of Math., Vol. 30, nº 1 (1969)

3 CATEFORIS et SANDOMIERSKI — The Singular Sub-module Splits off
J. of Algebra, 10, (1968)

4 CHASE — Direct Product of Modules
Trans. Amer. Math. Soc., 97, (1960)

5 KAPLANSKY — A characterization of Prüfer Rings
J. Indian Math. Soc., 24, (1960)

6 SANDOMIERSKI — Non Singular Rings
Proc. Amer. Math. Soc., 19, (1968)

7 SANDOMIERSKI — Semi-simple maximal Quotient Rings
Trans. Amer. Math. Soc., 128, (1967)

8 LEVY — Torsion Free and Divisible Modules over non Integral Domain
Canadian J. of Math., 15, (1), (1963)

9 CARTAN et EILENBERG — Homological Algebra
Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey,(1956)

Conférence n° 11 du 2 février 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-

LA PROPRIETE DE RANG INVARIANT

Pàr M. BESSON

d'après P. M. COHN [3].

-:-:-:-:-:-:-:-

A désigne un anneau. Les A-modules considérés sont des A-modules à gauche et les isomorphismes des isomorphismes de A-module à gauche, sauf indication contraire.

§ 1. Définition.

Si M est un A-module libre de base $(e_i)_{i \in I}$, le rang de M relativement à cette base est par définition le cardinal de I. Si le rang de M est indépendant de la base choisie, on dira que M a un rang invariant.

Définition.

Un anneau A a la propriété de rang invariant, s'il vérifie la condition :

I Tout A-module libre a un rang invariant.

Proposition 1.

A a la propriété de rang invariant si et seulement si il vérifie la condition :

I' $A^n \simeq A^m \Longrightarrow n = m$

L'équivalence des conditions I et I' résulte du fait que pour tout anneau

A, un A-module libre admettant une base infinie a un rang invariant ([1] §1 n°12 corollaire 2). Il existe des anneaux possédant la propriété de rang invariant, les corps par exemple, ainsi que des anneaux ne possédant pas cette propriété, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple d'anneau n'ayant pas la propriété de rang invariant.

Soit G un groupe abélien libre de base $(e_n)_{n \in N}$. L'anneau A des endomorphismes de G satisfait $A \simeq A^2$.

On définit en effet un isomorphisme φ de A dans A^2 en posant, si f est un endomorphisme du groupe G, $\varphi(f) = (f_1, f_2)$ où f_1 et f_2 sont les endomorphismes de G définies par : $f_1(e_n) = f(e_{2n})$ $f_2(e_n) = f(e_{2n+1})$.

Plus généralement, l'anneau $A = \mathrm{Hom}_K(M,M)$ où M est un K-module libre de base infinie (indixée par I), satisfait $A \simeq A^2$. En effet, I étant infini, il existe une bijection de I dans I + I qui permet de construire comme précédemment un isomorphisme de A dans A^2.

§ 2. Introduction de propriétés plus fortes. Expressions équivalentes.

Considérons les propriétés suivantes d'un anneau A.

II Si un A-module libre ~~de rang~~ n a un système générateur de m éléments, alors, $m \geqslant n$.

III Si un A-module libre de rang n a un système générateur de n éléments, ce système est libre.

Proposition 2.1.

On a les implications : III ==> II ==> I

III ==> II.

Si un A-module libre M de rang n admet un système générateur $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ avec $m<n$, en ajoutant f_1 (n-m) fois à ce système, nous obtenons unsystème générateur non libre, de n éléments, ce qui contredit III.

II ==> I.

Si l'on suppose $A^n \simeq A^m$, la propriété II entraîne $n \geqslant m$ et $m \geqslant n$.

Proposition 2.2.

Les propriétés I, II, III, sont respectivement équivalentes à :

I' $A^m \simeq A^n$ ==> $m = n$ quels que soient $m, n \in N$

II' $A^m \simeq A^n \oplus K$ (K A-module) ==> $m \geqslant n$ quels que soient $m, n \in N$

III' $A^n \simeq A^n \oplus K$ (K A-module) ==> $K = 0$ quel que soit $n \in N$

Nous avons obtenu I <==> I'. Démontrons II <==> II'.

II' ==> II

Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système générateur de M, mosule libre de rangnn. Soit K le noyau de la surjection $s : A^m \dashrightarrow M$ définie par $s(e_i) = f_i$ ((e_i) est la base canonique de A^m). M est libre, donc projectif, et, par suite, nous obtenons $A^m \simeq M \oplus K$ ou encore, comme le rang de M est n, $A^m \simeq A^n \oplus K$. D'après II', nous avons $m \geqslant n$.

II ==> II'

Supposons $A^m \simeq A^n \oplus K$. Soient f l'isomorphisme $A^m \dashrightarrow A^n \oplus K$ et p la projection $A^n \oplus K \dashrightarrow A^n$.

$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ étant la base canonique de A^m, posons $f_i = \text{pof}\,(e_i)$. L'homomorphisme pof : $A^m \dashrightarrow A^n$ est surjectif. $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est donc un système générateur de A^n. D'après II, nous avons $m \geqslant n$.

La démonstration de III <==> III' est analogue.

Dans ce qui suit, les anneaux A, considérés seront supposés unitaires et les homomorphismes d'anneaux seront supposés tels que $f(1) = 1$.

Introduisons les conditions suivantes :

(α_{nm}) Il existe B, matrice $m \times n$, et C, matrice $n \times m$, à coefficients dans A telles que $BC = I_m$ et $CB = I_n$

(β_{nm}) Il existe B, matrice $m \times n$ et C matrice $n \times m$ à coefficients dans A telles que $CB = I_n$.

(γ_n) Il existe B et C, matrices $n \times n$, à coefficients dans A telles que $BC = I_m$ et $CB \neq I_n$

Proposition 2.3.

Les propriétés I, II, III sont respectivement équivalentes à

I" $\alpha_{nm} \Longrightarrow m = n$ quels que soient $m, n \in N$

II" $\beta_{nm} \Longrightarrow m \geqslant n$ quels que soient $m, n \in N$

III" γ_n est faux quel que soit $n \in N$

Ces équivalences résultent du lemme suivant :

Lemme. Soient $f_1, \ldots, f_m$ appartenant à un module libre de base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit B la matrice $m \times n$ dont la $j^{\text{ième}}$ ligne est constituée par les coordonnées de f_j dans la base (e_i). Alors :

(1) $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est un système générateur si et seulement si il existe C matrice $n \times m$ telle que $CB = I_m$

(2) $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est une base si et seulement si il existe C matrice $n \times m$ telle que $CB = I_n$ et $BC = I_m$.

Démonstration du lemme.

(1) Pour que (f_j) soit un système générateur, il faut et il suffit que $e_1, \ldots, e_n$ appartiennent au sous-module engendré par $f_1, \ldots, f_m$. C'est-à-dire qu'il existe une matrice $C = (c_{ij})$ telle que

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

c'est-à-dire telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} e_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_{jk} e_k$$

ou encore, puisque $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base :

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_{jk} = \delta_{ik} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad 1 \leqslant k \leqslant m$$

(2) D'après (1), si $(f_j)_{1 < j < m}$ est une base et si C est la matrice introduite

précédemment, nous obtenons $CB = I_n$ et en échangeant les rôles des bases (e_i) et (f_j), $BC = I_m$.

Réciproquement, supposons l'existence d'une matrice C telle que $BC = I_n$ et $CB = I_m$. D'après (1), (f_j) est un système générateur. Démontrons que (f_j) est un système libre. Supposons : $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j = 0$ c'est-à-dire $\sum_{j,i} \lambda_j b_{ji} e_i = 0$. Il en résulte $\sum \lambda_j b_{ji} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ce système s'écrit, sous forme matricielle : $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) B = (0, \ldots, 0)$. En multipliant à gauche par C les deux membres de cette égalité nous obtenons

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (0, \ldots, 0) C = (0, \ldots, 0)$ donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$

§ 3. Anneaux satisfaisant la propriété III.

Proposition 3.1.

La classe des anneaux satisfaisant III contient les anneaux

(1) commutatifs ;

(2) noethériens à gauche. (en particulier les corps, les anneaux artiniens à gauche) ;

(3) semi-firs.

Démonstration.

(1) Supposons A commutatif. On définit $\det B$ pout toute matrice B de $M_n(A)$. Vérifions III"

Soient $B, C \in M_n(A)$ telles que $BC = I_n$. Alors $\det B$ est inversible dans A. Donc B est une matrice inversible, et nécessairement $B^{-1} = C$. Par suite $CB = I_n$

Remarque.

La théorie des déterminants permet dans le cas des anneaux commutatifs de démontrer directement la propriété de rang invariant ([6] p. 307 théorème 7).

(2) Supposons A noethérien à gauche. (pas nécessairement unitaire). Vérifions III'.

De l'hypothèse $A^n \simeq A^n \oplus K$, nous déduisons un endomorphisme surjectif de A^n

en composant l'isomorphisme $f : A^n \to A^n \oplus K$ et la projection $p : A^n \oplus K \to A^n$. A^n étant un module noethérien, cet endomorphisme est injectif. Donc p est injectif. Par suite $K = 0$.

(3) Rappelons qu'un fir [respectivement semi-fir] à gauche est un anneau ayant la propriété de rang invariant, où tout idéal [respectivement idéal de type fini] à gauche est libre.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme : Si A est semi-fir, tout sous module N de type fini d'un A-module libre est libre.

En effet, N est somme directe de modules isomorphes à des idéaux de type fini de A. ([4] ou Cartan-Eilenberg "Homological Algebra" chap 1 anneaux semi-héréditaires proposition 6.1).

De ce lemme, nous déduisons que A satisfait III', si A est un semi-fir. Supposons $A^n \simeq A^n \oplus K$. K est un sous-module de type dini de A^n, donc est libre d'après le lemme, et de rang fini k. Nous avons $A^n \simeq A^{n+k}$. D'où : $k = 0$ (d'après I') c'est-à-dire $K = 0$.

Remarque.

L'algèbre de groupe d'un groupe libre sur un corps commutatif est un fir. [4], donc satisfait III. D'après [3] un résultat recoupant celui-là a été démontré par Kaplansky : l'algèbre de groupe d'un groupe quelconque sur un corps de caractéristique nulle satisfait III ; le cas d'un corps de caractéristique non nulle n'est pas résolu.

La proposition suivante permet certaines généralisations des exemples de la proposition 3.1.

Proposition 3.2.

La classe des anneaux satisfaisant III est stable pour :

(1) le passage à l'anneau opposé

(2) le passage à un sous-anneau

(3) les limites projectives et inductives.

Démonstration.

(1) Cela résulte de la symétrie droite-gauche de III' (Il en est de même pour II", I")

(2) Démontrons plus généralement la propriété suivante :

Lemme : S'il existe un monomorphisme d'un anneau A dans un anneau A' satisfaisant III, alors A satisfait III.

Utilisons III". Soient B, C $\in M_n(A)$ avec $BC = I_n$. Posons $B' = (f(b_{ij}))$ $C' = (f(c_{ij}))$. Nous avons $B'C' = I_n$, donc $C'B' = I_n$. C'est-à-dire $f(\sum_k c_{ik}b_{kj}-\delta_{ij}) = 0$ pour tout i, j. Comme f est injective, nous en déduisons $CB = I_n$.

Remarque.

Pour les conditions I et II, l'hypothèse f injectif n'est pas nécessaire et nous avons :

S'il existe un homomorphisme de A dans A', anneau satisfaisant I (resp. II), alors A satisfait I (resp. II).

(3) Limites projectives.

Soit (A, f_λ) la limite projective du système projectif $(A_\lambda, f_{\lambda\mu})$, les A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ étant des anneaux satisfaisant III".

Soient B, C $\in M_n(A)$ avec $BC = I_n$. Posons $B^\lambda = (f_\lambda(b_{ij}))$ $C^\lambda = (f_\lambda(c_{ij}))$. Alors $B^\lambda C^\lambda = I_n$. D'où $C^\lambda B^\lambda = I_n$. C'est-à-dire : $f_\lambda(\sum_k c_{ik}b_{kj}-\delta_{ij}) = 0$ $\forall i,j,\lambda$. Or un élément x de A est nul si et seulement si $f_\lambda(x) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Noums obtenons donc $CB = I_n$.

Pour les limites onductives, la démonstration est analogue. [3]

§ 4. Anneaux ne satisfaisant pas III.

Parmi ceux-ci, nous distinguerons plusieurs classes et nous montrerons qu'elles sont distinctes et non vides par des exemples pris parmi les anneaux $U_{mn}(K)$ et $V_{mn}(K)$ définis ainsi :

K étant un anneau commutatif unitaire, $U_{mn}(K)$ est l'algèbre sur K engendrée par les symboles b_{ij}, c_{ji} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ avec les relations

(1) $\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\, b_{kj} = \delta_{ij}$ $(i,j = 1, \ldots n)$;

$V_{mn}(K)$ est l'algèbre sur K engendrée par les symboles b_{ij}, c_{ij} $(i = 1, .. m,\ j = 1 .. n)$ avec les relations (1) et les relations : (2) $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj} = \delta_{ij}$ $(i,j = 1 \ldots m)$

En considérant les matrices $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$, on remarque que $V_{mn}(K)$ satisfait la condition α_{nm} et $U_{mn}(K)$ la condition β_{nm}.

<u>Remarque</u>.

L'anneau $A = V_{nkn}(K)$ satisfait α_{nkn} c'est-à-dire $A^n \simeq A^{kn}$.
Par suite $M_n(A) \simeq M_{kn}(A) \simeq M_n(A^k)$.
Supposons $n>1$, $k>1$. Alors A est intègre (théorème 3.2.2). Comme $A' = A^k$ ne l'est pas nous obtenons un exemple d'anneaux A et A' non isomorphes dont les anneaux d'endomorphismes $M_n(A)$, $M_n(A')$ sont isomorphes - ce qui, d'après [3], répond à une question posée par Kaplansky.

Donnons d'abord une classification des anneaux ne satisfaisant pas III, en énonçant les résultats fournis par les exemples, puis des indications sur les critères et les méthodes de démonstrations utilisés.

<u>A) Classification.</u>

1) <u>Anneaux ne satisfaisant pas la propriété I.</u>

Si A n'a pas la propriété de rang invariant, il existe deux entiers distincts n et m tels que $A^n \simeq A^m$ (c'est-à-dire tels que l'on ait α_{nm}).
Les couples (p, q), $p \neq q$, tels que $A^p \simeq A^q$ ne sont pas quelconques, ainsi que le montre la proposition suivante :

Proposition A.1.

Si A n'a pas la propriété de rang invariant, il existe deux entiers strictement positifs, h et k, tels que l'on ait

$A^p \simeq A^q$ si et seulement si $p = q$ ou $(p,q \geqslant h$ et $p-q \in kZ)$

Démonstration :

En posant : $p \approx q$ si et seulement si $A^p \simeq A^q$, on définit une congruence du semi-groupe cyclique N^*. Si A ne satisfait pas I, le semi-groupe quotient est un semi-groupe cyclique fini. Son indice h et sa période k sont les entiers cherchés. ([2] p. 20 théorème 1.9).

Définition.

Soit A un anneau n'ayant pas la propriété de rang invariant. Soient h et k les entiers définis précédemment. On dit que le type_I de A est (h, k).

Dans l'exemple du § 1, le type_I de l'anneau A considéré est (1,1).

Proposition.

Pour tout (h, k), il existe un anneau de type_I égal à (h, k) : l'anneau $V_{h\ h+k}(Z)$.

2) Anneaux satisfaisant I et non II.

Si A est un anneau ne satisfaisant pas II, il existe, d'après II", deux entiers m et n, avec $m < n$ et β_{nm}.

Définition.

Soit A un anneau ne satisfaisant pas II. Posons $(h, k) = \inf\{(p, q) | p < q ; \beta_{qp}\}$ dans $N \times N$ ordonné lexicographiquement. On dit que le type_{II} de A est (h, k).

Proposition.

Il existe des anneaux satisfaisant II et non I : les anneaux $U_{mn}(K)$ avec K corps de caractéristique nulle et $m < n$. Le type_{II} de $U_{mn}(K)$ est (m, k) avec $k \leqslant n$.

3) Anneaux satisfaisant II et non III.

Si A est un anneau ne satisfaisant pas III, il existe, d'après III", un entier n tel que l'on ait γ_n.

Définition.

Soit A un anneau ne satisfaisant pas III. Posons $n = \inf\{p \mid \gamma_p\}$. On dit que le type_{III} de A est n.

Proposition.

Il existe pour tout $n \in N$ un anneau satisfaisant II et non III, de type_{III} égal à n : $U_{nn}(K)$, où K est un corps.

B) Méthodes utilisées.

1) Trace.

Définition.

A étant un anneau et C le sous groupe additif engendré par $\{xy-yx \mid x,y \in A\}$, la trace d'une matrice $B \in M_n(A)$, notée tr B, est la classe de $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ dans le groupe additif A/C.

Pour n = 1, on identifie les éléments de A aux matrices 1×1 correspondantes.

Proposition.B.1.

Soient B et C deux matrices respectivement $m \times n$ et $n \times m$. Alors tr BC = tr CB.

En effet, nous avons $\sum_{k=1}^{n} (b_{ik}c_{ki} - c_{ik}b_{ki}) \in C$.

Corollaire. B.1.

(1) Si tr1 a un ordre infini dans le groupe A/C, A a la propriété de

rang invariant.

(2) Si A satisfait α_{nm}, $n > m$) l'ordre de tr 1 divise n-m.

En effet α_{nm} entraîne $trI_n = trI_m$ c'est-à-dire $(n-m)tr1 = 0$

Théorème B.1.

Si K est un anneau de caractéristique nulle, l'ordre de tr 1 est infini pour l'anneau $U_{mn}(K)$, égal à n-m pour l'anneau $V_{mn}(K)$ $(m<n)$.

La démonstration utilise des réductions à une forme normale des mots de $U_{mn}(K)$, $V_{mn}(K)$, puis de leurs traces. [3]

2) Nombre de dépendance.

Définitions et rappels.

Soit A un anneau muni d'une fistration croissante c'est-à-dire d'une fonction $v : A \to N \cup \{-\infty\}$ satisfaisant.

$v(0) = -\infty$ $\qquad v(x) \geqslant 0$ si $x \neq 0$,

$v(x+y) \leqslant \max(v(x), v(y))$,

$v(xy) \leqslant v(x) + v(y)$

On dit que A vérifie un algorithme faible à n termes (AF_n) à gauche si pour tout $m \leqslant n$, quels que soient les éléments $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$, tels que $v(a_1) \leqslant \ldots \leqslant v(a_m)$ et $v(\Sigma b_i \; a_i) < v(b_1) + v(a_1) = \ldots = v(b_m + v(a_m)$ on a : $a_m = 0$ ou il existe $c_1, \ldots, c_{m-1}$ tels que : $v(a_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_i \; a_i) < v(a_m)$ et $v(c_i) + v(a_i) \leqslant v(a_m)$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$.

On démontre que A vérifie AF_n à gauche si et seulement si A vérifie AF_n à droite. [5]

Le nombre de dépendance $\lambda_v(A)$ de A pour la filtration v est le plus petit entier n tel que A ne vérifie pas AF_n ($\lambda_v(A)$ est fini ou non).

Le nombre de dépendance $\lambda(A)$ d'un anneau A quelconque est défini par : $\lambda(A) = \sup\{\lambda_v(A) | \; v \text{ filtration sur } A\}$.

(Tout anneau peut être muni d'une filtration, par exemple : $v(0) = -\infty$ $v(x) = 0$ si $x \neq 0$).

On remarque que dans le cas d'un anneau satisfaisant la condition de Ore ($Aa \cap Ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$) les seules valeurs possibles pour λ sont $1, 2, +\infty$ car $AF_2 \Longrightarrow AF_n$ pour tout n.

Proposition B.2.

Un anneau A tel que $\lambda(A) > 1$ est intègre.

Démonstration.

En effet si $\lambda(A) > 1$ il existe une filtration v telle que : $\lambda_v(A) > 1$

Supposons $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Alors $v(ab) < v(a) + v(b)$. Ceci entraîne d'après AF_1 : $b = 0$, ce qui est impossible.

Théorème B.2.1.

Soit A un anneau tel que $\lambda(A) > n$. Alors :

(1) Tout idéal à gauche de A engendré par n éléments est libre

(2) A satisfait les propriétés

$$I_n \quad R^h \simeq R^k \Longrightarrow h = k \qquad \text{pour tout } h \leqslant n$$

$$II_n \quad R^h \simeq R^h \oplus K \Longrightarrow h \geqslant k \qquad \text{pour tout } h \leqslant n$$

$$III_n \quad R^h \simeq R^h \oplus K \Longrightarrow K = 0 \qquad \text{pour tout } h \leqslant n$$

Démonstration.

(1) Soit v une filtration telle que : $\lambda_v(A) > n$. Soit I un idéal à gauche de A engendré par n éléments. Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ (avec $m \leqslant n$ et $a_i \neq 0$ $1 \leqslant i \leqslant m$) un système générateur de I tel que $\Sigma\, v(a_i)$ soit minimum.

Si (a_i) n'est pas un système libre, il existe $x_1, \dots, x_m$ non tous nuls tels que $\Sigma x_i a_i = 0$. Alors : $v(\Sigma x_i a_i) < \max(v(x_i) + v(a_i))$

En ne gardant que les éléments a_{i_k} tels que $v(x_{i_k}) + v(a_{i_k}) = \max(v(x_i) + v(a_i))$ nous obtenons

$$v(\Sigma x_{i_k} a_{i_k}) < v(x_{i_0}) + v(a_{i_0}) = \dots = v(x_{i_p}) + v(a_{i_p}) \qquad p \leqslant m$$

Supposons $v(x_{i_0}) < \ldots < v(x_{i_p})$. Alors, d'après AF_n, il existe $c_1, \ldots, c_{m-1}$ tels que $v(a_{i_p} - \sum_{k=1}^{p-1} c_k\, a_{i_k}) < v(a_{i_p})$.

En remplaçant dans $\{a_1, \ldots, a_m\}$ l'élément a_{i_p} par $a_{i_p} - \Sigma\, c_k a_{i_k}$, nous obtenons un système générateur (a_i') de I tel que : $\Sigma\, v(a_i') < \Sigma\, v(a_i)$, ce qui est impossible. Le système (a_i) est donc une base de I.

(2) Nous avons les implications : $III_n \Longrightarrow II_n \Longrightarrow I_n$. Il suffit de démontrer III_n c'est-à-dire : pour tout $h < n$, γ_h est faux. Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme.</u>

<u>Supposons $\lambda(A) > h$. Soient B, $C \in M_h(A)$ telles que $BC = I_h$. Il existe $P \in M_h(A)$, inversible, telle que $C' = CP$ et $B' = P^{-1}B$ soient de la forme (α_{ij}) avec $\alpha_{1j} = 0$ si $j \neq 1$.</u>

<u>Démonstration</u> :

Nous avons $\Sigma c_{1j} b_{j2} = 0$. Supposons qu'il existe au moins 2 indices j distincts tels que $c_{1j} \neq 0$. D'après AF_n à droite, on peut en remplaçant l'un des c_{ij}, soit c_{ij_0} par une combinaison des autres, $\Sigma\, c_{1j} d_j$, diminuer $\Sigma\, v(c_{1j})$. Les éléments c'_{1j} ainsi obtenus constituent la première ligne de la matrice

$$c \times \prod_{j \neq j_0} B_j \qquad \text{avec } B_j(dj) = I_h + d_j\, e_{jj_0}.$$

Les matrices B_j étant inversibles nous obtenons, en répétant cette opération un nombre fini de fois, une matrice $C' = CP$ de la forme voulue, c'est-à-dire

$C' = (c'_{ij})$ avec $c_{1j} = 0$ si $j \neq 1$.

$B' = P^{-1}\, C = (b'_{ij})$ est de la mêmeforme. En effet, de $B'C' = I_h$, nous déduisons

$$c'_{11} b'_{11} = 1 \qquad \text{d'où } b'_{11} \neq 0$$

$$c'_{11} b'_{1j} = o \qquad \text{d'où } b_{1j} = 0 \qquad \text{si } j \neq 1$$

Démonstration de III_n

Supposons qu'il existe $k \leqslant n$ avec γ_k. Prenons k minimal. Il existe alors deux matrices B, C $\in M_k(A)$ avec $CB = I_k$ $BC \neq I_k$. D'après le lemme précédent, on peut supposer :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \ldots 0 \\ b_n & B_1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \ldots 0 \\ c_n & C_1 \end{pmatrix}$$

On a $C_1B_1 = I_{h-1}$ et $c_1b_1 = 1$

Comme k est minimal on en déduit $B_1C_1 = I_{k-1}$.

Comme A est intègre ($\lambda(A) > 1$), $c_1b_1 = 1$ entraîne $b_1c_1 = 1$. Par suite $BC = I_k$, ce qui est impossible.

Corollaire.

Soit A un anneau tel que $\lambda(A) = m$.

Si A est un anneau de type_I (h, k), de type_{II} (h,k), ou de type_{III} h, alors on a $h \geqslant m$.

Théorème B2.2

Si K est un corps, le nombre de dépendance des anneaux $U_{mn}(K)$ et $V_{mn}(K)$ ($m \leqslant n$) est m.

La démonstration se trouve dans [3].

Pour montrer $\lambda(A) \leqslant m$, on utilise la notion de $G\,E_n$-anneau (anneau tel que toute matrice inversible de $M_n(A)$ soit produit de matrices diagonales inversibles et de matrices de la forme $I_n + a\,e_{ij}$).

Pour montrer $\lambda(A) \geqslant m$, on définit une filtration sur $U_{mn}(K)$ et $V_{mn}(K)$ en prenant le degré en a_{ij}, b_{ji} des éléments de ces anneaux, mis sous une forme [illegible]male, et on démontre AF_n.

Remarque.

(1) Le théorème B.2.2 montre que pour tout n, il existe un anneau dont le nombre de dépendance est n.

(2) Rappelons la définition suivante :

Un m-fir (à gauche) est un anneau où tout idéal à gauche engendré par m générateur est libre de rang invariant. (la notion de m-fir, ainsi que celle de semi-fir, est symétrique à droite et à gauche d'après [4] théorème 2.6).

Un anneau de nombre de dépendance m est un (m-1)-fir d'après le théorème B.2.1.

Remarquons que pour tout m, il existe un (n-1)-fir qui n'est pas un m-fir : $U_{mn}(K)$, où K est un corps et m<n. C'est en effet un (m-1)fir puisque son nombre de dépendance est m. Ce n'est pas un m-fir d'après α_{nm}.

C) Justification des résultats de A.

Proposition.

— (1) $V_{mn}(Z)$ (m<n) ne satisfait pas I. Son type_I est (m,n)

— (2) U_{mn} (K) (K corps de caractéristique nulle, m<n) satisfait I et non II. Son type_{II} est (m,k) avec k⩽n.

— (3) $U_{nn}(K)$ satisfait II et non III. Son type_{III} est n.

Démonstration.

— (1) $V_{mn}(Z)$ ne satisfait pas I puisque l'on a α_{mn} (m<n). Soit(h,k) son type_I. D'après α_{mn}, nous avons h⩽m et k divise n-m. D'après $\alpha_{h\ h+k}$, l'ordre de tr1 étant n-m (théorème B.1), n-m divise k (corollaire B.1). Donc k = n-m.

$V_{mn}(Q)$ est aussi un anneau ne satisfaisant pas I. (d'après α_{mn}, m<n). Soit (h', k') son type_I. Comme il existe un homomorphisme d'anneaux $V_{mn}(Z) \to V_{mn}(Q)$, et d'après la remarque de la proposition 3.2, on a h'<h, or h'>m (corollaire B.2 et théorème B.2.2.).

Finalement on obtient (h,k) = (n,m).

— (2) Pour l'anneau $U_{mn}(K)$, l'ordre de tr1 est infini (théorème B1). $U_{mn}(K)$ satisfait donc I.

Cet anneau ne satisfait pas II, puisque l'on a β_{mn}, avec $m<n$. Soit (h,k) son type$_{II}$. Alors $h\leq m$.

Le nombre de dépendance de $U_{mn}(K)$ étant m, on a aussi $h\geq m$.(Corollaire B2) Par suite $(h,k) = (m,k)$ et, d'après $\beta_{mn}(m<n)$, on a $k\leq n$.

<u>Remarque</u> : On peut se demander si le type$_{II}$ de $U_{mn}(K)$ n'est pas exactement (m,n).

— (3) Montrons que $U_{nn}(K)$ satisfait II.

Pour cela, considérons T_n, K-algèbre engendrée par les symboles b_{ij}, c_{ij} $(1\leq i,j\leq n)$ avec les relations $b_{ij}\, c_{kl} = c_{kl}\, b_{ij}$ $\quad \sum_{k=1}^{h} c_{jk}\, b_{ki} = \delta_{ji}$

T_n, anneau commutatif, satisfait II. Commr il existe un homomorphisme d'anneaux $U_{nn}(K) \to T_n$, l'anneau $U_{nn}(K)$ satisfait II. (Remarque de la proposition 3.2)

D'après γ_n, $U_{nn}(K)$ ne satisfait pas III. Soit h son type$_{III}$. Nous avons $h\leq n$. Le nombre de dépendance de $U_{nn}(K)$ étant m (théorème B.2.2), nous avons aussi $h\geq n$ (corollaire B.2). D'où $h = n$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki Algèbre - chapitre 2.

[2] A.H. Clifford - G.B. Preston - The algebraic theory of semi groups I.

[3] P.M. Cohn - Some Remarks on the Invariant Basis Property (Topology Vol 5 p 215-228 1966).

[4] P.M. Cohn - Free Ideal Rings (Journal of Algebra 1 p 47-69 1964).

[5] P.M. Cohn - On a Generalization of the Euclidean Algorithm (Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 1961 p 18-30).

[6] S.Mac Lane - G. Birkhoff Algebra.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence nº 12 du 16 février 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

ORDRE ET GROUPES DE VALUATIONS EN GEOMETRIE PLANE.

Par G. PICKERT

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Dans un plan affiné, non nécessairement arguésien, on peut introduire un concept d'ordre en supposant dans chaque droite une relation d'ordre ($<$) linéaire, telle que chaque projection parallèle d'une droite sur une autre soit monotone. Dans un plan ~~affine~~ ainsi ordonné, on ne s'intéresse qu'aux propriétés qui sont invariantes si l'on substitue aux relations d'ordre de certaines droites la relation d'ordre inverse. C'est pourquoi il est préférable de représenter l'ordre du plan par l'application suivante :

$$\omega : \mathcal{C} = \{(P, d, Q) | P, Q \notin d\} \longrightarrow \{-1, +1\}$$

(1) définie par :

$$(\omega(P, d, Q) = -1 \Longleftrightarrow \exists\, R | (\{R\} = PQ \quad d) \wedge (P<R<Q \vee Q<R<P).$$

(P, Q, R ... désignant des points ; d ... des droites ; PQ désigne la droite joignant les deux points P, Q) si P et Q sont distincts.

Propriétés de ω.

Cette fonction ω a les propriétés suivantes :

(M) "Multiplicativité" : $P, Q, R \notin d \Longrightarrow \omega(P, d, Q)\ \omega(Q, d, R) = \omega(P, d, R)$

(I) "Incidence" : $d \cap e \subset PQ \neq d, e \Longrightarrow \omega(P, d, Q) = \omega(P, e, Q)$

(P) "Parallélite" : $PQ \cap d = \emptyset \Longrightarrow \omega(P, d, Q) = 1$

(L) "Linéarité" : $A \in a \wedge B \in b \wedge C \in c \wedge AB = BC = AC \neq a, b, c$

$$\Longrightarrow |\{(A, b, C), (B, a, B)\} \quad \omega^{-1}\{-1\}| = 1$$

($|M|$ désignant le nom bre d'éléments de l'ensemble fini M ; l'assertion de (L) signifie qu'une et une seule des trois égalités $\omega(A, b, C) = -1$ $\omega(B, c, A) = -1$, $\omega(C, a, B) = -1$ est vérifiée)

Inversement on peut démontrer que pour toute application ω de $\mathcal{C}$ sur $\{-1, +1\}$ qui vérifie les propriétés (M, I, P, L) il existe des relations d'ordre ($<$) dans les droites, pour lesquelles toutes les projections parallèles sont monotones et qui vérifient (1).

La propriété (L) étant la plus restrictive, Sperner (1949) généralisant le concept d'ordre appelle fonction d'ordre du plan toute application ω de $\mathcal{C}$ sur $\{-1, +1\}$ ayant les propriétés (M, P, I).

Dans cette définition, Junkers (1964, Dissertation Hamburg pas encore publié ; Math Zeitsch 93, 216-240, 1966) a substitué à $\{-1, +1\}$ un groupe G quelconque, noté multiplicativement, 1 désignant l'élément neutre.

Suivant ce processus, nous nommons G-fonction d'ordre toute application de $\mathcal{C}$ sur G ayant les propriétés (M, P, I).

Les fonctions d'ordre de Sperner sont alors les $\{-1, +1\}$ - fonctions d'ordre ou les fonctions d'ordre à deux valeurs.

Au lieu de supposer que ω est surjective, il suffit (à cause de M, P, I) de faire l'hypothèse

(2) $G = \langle \omega\, \mathcal{C} \rangle$

ce qui signifie : G est engendré par les $\omega(P\ d\ Q)$

En introduisant pour tout triplet (P, d, e) tel que

(3) $[P \in e \wedge P \notin d \wedge d \neq e]$

$$G_{P,\, d,\, e} = \{\omega(P,\, d,\, Q) \mid Q \in e \wedge Q \notin d\}$$

nous avons le résultat suivant plus fort que la surjectivité de ω :

(4) $G = G_{P,\, d,\, e}$

résultant aussitôt des deux assertions suivantes

(5) $G_{P,\, d,\, e} = G_{P',\, d',\, e'}$

(6) $G_{P,d\,,e}$ est un sous groupe de G.

(Dans (4.5.6) nous supposons naturellement que les conditions (3) sont vérifiées par P, d, e et P', d', e').

Pour la démonstration de (5) nous introduisons oo' où $\{o\} = d \cap e$ $\{o'\} = d' \cap e'$ et rappelons, que par deux projections parallèles successives on peut appliquer o, P sur o', P'. Ainsi il suffit de considérer le cas où il existe une droite o passant par o, o' et parallèle à une droite passant par P, P'. Introduisant le point Q', situé sur e' et sur la parallèle à o menée par Q et utilisant (M I P) nous avons

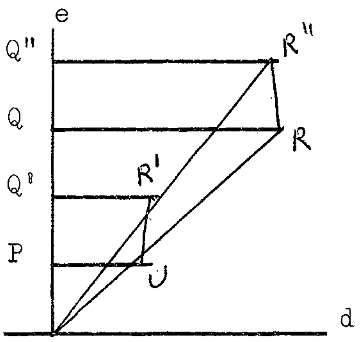
(6)' $\omega(P,\, d,\, Q) = \omega(P,\, o,\, Q) = \omega(P',\, o,\, P)\, \omega(P,\, o,\, Q)\, \omega(Q,\, o,\, Q')$

$$= \omega(P',\, o,\, Q') = \omega(P',\, d',\, Q')$$

c'est-à-dire (5).

Pour démontrer (6), il faut multiplier $\omega(P,\, d,\, Q')$ par $\omega(P,\, d,\, Q')$ ($Q,\, Q' \in e$; $Q,\, Q' \neq 0$). Mais (M) ne s'applique pas aussitôt; il faut d'abord transformer $\omega(P,\, d,\, Q)$ en $\omega(Q',\, d,\, Q'')$ avec un certain point Q'', pour obtenir grâce à (M) l'équation désirée.

(7) $\omega(P, d, Q'') = \omega(P, d, Q')\ \omega(P, d, Q)$



Pour construire Q" on choisit une droite PU parallèle à d ($U \notin e, d$), on détermine : R appartenant à OU par QR parallèle à d ; R' comme point d'intersection des parallèles à d, e menées respectivement par Q', U ; R" comme point d'intersection de OR' avec la parallèle à e menée par R et finalement Q" appartenant à e par Q"R" parallèle à d.

En utilisant (P, M, I) le calcul donne alors :

$$\begin{aligned}
\omega(P, d, Q) &= \omega(U, d, P)\ \omega(P, d, Q)\ \omega(Q, d, R) \\
&= \omega(U, d, R) = \omega(U, e, R) \\
&= \omega(R', e, U)\ \omega(U, e, R)\ \omega(R, e, R'') \\
&= \omega(R', e, R'') = \omega(R', d, R'') \\
&= \omega(Q, d, R')\ \omega(R', d, R'')\ \omega(R'', d, Q'') \\
&= \omega(Q, d, Q'')
\end{aligned}$$

A l'aide de cette relation et de (M) nous obtenons (7). La construction de Q" montre aussitôt qu'il y a pour chaque $Q(\neq O)$ un point Q' tel que $Q'' = P$.
A cause de cela et du fait que $\omega(PdQ) = 1$ (déduit de (M)), on voit que l'inverse de chaque élément de G_{Pde} est dans G_{Pde}. Cette propriété et (7) démontrent (4).

La construction de Q" est identique à celle du produit dans un système de coordonnées ; si on prend d et e comme axes, U comme point unité et les points de e comme éléments du corps ternaire (voir p. ex Picker, Projektive Ebenen ; les notations sont OU, OV, E au lieu de d, e, U). Ainsi définissant (pour un système de coordonnées donné) l'application χ de la boucle multiplicative $e = \{o\}$ du corps ternaire par

(8) $\chi(X) = \omega(P, d, X)$ si $o \neq X \in e$

l'équation (7) s'écrit simplement :

(7)' $\chi(Q'Q) = \chi(Q')\ \chi(Q)$

Grace à (8) et (6') cet homomorphisme détermine déjà ω.

[Voir Sperner, Math. Ann. 121, 107-130, 1949 pour le cas $G = \{-1, +1\}$ et pour le cas général, mais avec une définition un peu différente ($f(X)$ au lieu de $\chi(X)^{-1}$) Petit Math. Zeitschsift 110 223-256 1969].

En résumé.

Un système de coordonnées étant choisi, les G fonctions d'ordre sont par (8) en correspondance biunivoque avec certains homomorphismes de la boucle multiplicative du corps ternaire (relatif au système de coordonnées) sur le groupe G.

Avant de chercher les connections entre les G-fonctions d'ordre de Junkers et les G-mesures de Petit (voir Math Zeitschsift 110, 223-256 1969) nous voulons faire quelques remarques sur une généralisation d'un problème de R. Baer (non publié) qui traite non d'un plan affine adonné mais seulement d'une $\{-1, +1\}$-fonction d'ordre ω dans un plan affine.

On introduit les demi-plans $\{X | \omega(P, d, X) = 1\}$ (pour $P \notin d$, la droite d étant déterminée de façon unique par le demi-plan comme son bord), et les demi-droites comme intersections non vides d'une droite (leur support) avec un demi-plan.

Alors un drapeau est un couple (demi-droite, demi-plan) le support de l'une étant le bord de l'autre. Avec Baer, nous supposons qu'il existe un groupe Γ de collinéations du plan, conservant ω (c'est-à-dire :

$\forall_{\gamma \in \Gamma} \qquad \forall_{P, Q \notin d} \qquad \omega(\gamma(P), \gamma(d), \gamma(Q)) = \omega(P, d, Q))$ strictement transitif sur l'ensemble des drapeaux (pour chaque couple $(\mathfrak{D}\ \mathfrak{D}')$ de drapeaux il existe un seul élément de Γ, transformant $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}'$).

De cette hypothèse on déduit les propriétés suivantes (comme Baer l'a fait déjà dans le cas d'un plan ordonné) :

Pour tout point P, il y a dans Γ une involution σ_P, laissant fixes toutes les droites passant par P et transformant en son opposé chaque demi plan dont le bord contient P.

Pour toute droite d, il y a dans Γ une involution σ_d laissant fixes chaque point de d et tout faisceau de parallèles, et transformant en son opposé le demi plan de bord d.

Par conséquent le plan est un plan de translation et pour toutes droites d et e on a :

$\sigma_d(e) = e \Longleftrightarrow \sigma_d\ \sigma_e\ \sigma_d = \sigma_e \Longleftrightarrow \sigma_d\ \sigma_e = \sigma_e\ \sigma_d \Longleftrightarrow \sigma_e(d) = d.$

Acause de cela, la relation $\perp$ définie par

$d \perp e \Longleftrightarrow \sigma_d\ \sigma_e = \sigma_e\ \sigma_d$ possède les propriétés usuelles d'une relation d'orthogonalité :

$\forall_{P,d}\ \exists e\ P \in e \perp d,$

$d \perp e \Longrightarrow e \perp d \quad \wedge \quad d \neq e,$

$d \perp e \Longrightarrow (d' \perp e \Longleftrightarrow d' \parallel d).$

Si on choisit un système de coordonnées avec des droites d et e orthogonales comme axes, la collineation σ_d est représentée en coordonnées par :

$(X, Y) \longrightarrow (X, aY)$ où l'élément a du corps ternaire (qui est un quasi corps grâce au fait qu'il s'agit d'un plan de translation) satisfait aux conditions :

$a(Y + Z) = aY + aZ$; $a(YZ) = (aY)Z$; $a(aY) = Y$.

D'où l'on déduit (grace à la commutativité de l'addition)

$a(aY + Y) = Y + aY = aY + Y$

$aY = -Y \quad a = -1$

$(-1)Y = -Y = Y(-1)$

Si l'on tient compte de (8), (7)', de la définition des demi-plans et du fait que σ_d transforme le point $P = 1$ en $Q = -1$ (chaque point de l'axe e est par définition identique à sa deuxième coordonnée) on obtient le résultat :

(9) $\chi(-1) = -1$

pour l'homomorphisme χ de la boucle multiplicative sur le groupe $\{1 ; -1\}$, qui détermine la $\{1 ; -1\}$ -fonction d'ordre ω. A l'aide de (9) et du fait que les translations conservent ω, nous pouvons démontrer une condition ayant les mêmes hypothèses que (L) mais dont l'assertion est plus faible :

$\omega(A,b,C)\ \omega(B,c,A)\ \omega(C,a,B) = -1$

La démonstration est faite en posant $A = P$, $b = d$, $B = 0$ et en calculant alors

$\chi(A, b, C) = \chi(C)$

$\chi(B, c, A) = \chi(-C)\ \chi(1-C) = \chi(-1)\ \chi(C)\ \chi(1-C)$

$\chi(C, a, B) = \chi(C-1)\ \chi(-1) = \chi(1-C)$

d'où avec (9)

$\chi(A, b, C)\ \chi(B, c, A)\ \chi(C, a, B) = \chi(-1) = -1$

Il est bien connu que cette condition permet d'orienter le plan relatif à ω : On peut partager les drapeaux en deux classes avec les propriétés usuelles de l'orientation gauche ou droite. [Voir L. Lesieur Jour. Math. pures et appliquées 37 245-264 1958 et E. Glock Math Zeitchsift <u>78</u> ; 319-360 1962 où au lieu des drapeaux on se sert des triplets de points non alignés.]

On constate alors que chaque σ_p conserve l'orientation tnadis que chaque σ_d transforme l'une des deux classes de drapeaux en l'autre.

Le problème est alors de savoir si on peut démontrer sous les hypothèses faites, l'implication

(10) $P \in d, d', d'' \Longrightarrow \exists_e\ \sigma_d \sigma_{d'} \sigma_{d''} = \sigma_e$

A l'aide de (10) et des connaissances déjà acquises sur les σ_d on démontre facilement l'équivalence ("théorème des trois symétries") :

$$d \,||\, d' \,||\, d'' \nparallel \vee \exists_P \;\; P \in d, d', d'' \iff \exists_e \;\; \sigma_d \sigma_{d'} \sigma_{d''} = \sigma_e,$$

et grace aux résultats de Bachmann et Diller [voir par exemple BEHNKE, BACHMANN, FLADT, SUSS "Grundzüge der Mathematik" vol II A chap 4)]. On sait alors qu'il sagit d'un plan sur un corps commutatif ayant un élément h non carré, tel que deux droites orthogonales sont parallèles respectivement aux axes des coordonnées ou ont des équations $Y = uX + v$, $Y = u'X + v'$ avec $uu' = h$. Mais (10) n'étant pas démontré, il n'est pas sûr que les hypothèses faites suffisent pour arriver à la description donnée des plans affines considérés.

A cause de (M) on peut définir pour toute G-fonction d'ordre ω une application ρ de l'ensemble

$$J' = \{(P, R, Q) \mid PR = RQ\}$$

sur G par

(11) $R \in d \neq PR = RQ \implies \rho(P,R,Q) = \omega(P,d,Q)$.

Nous appelons G-rapport une application cnstruite de cette façon, parce qu'il s'agit d'une généralisation du rapport (d'un triplet de points alignés) dans le plan sur un corps, G étant dans ce cas le groupe multiplicatif du corps. Les G-supports sont caractérisés comme les applications ρ de J' sur G ($G = \langle \rho J' \rangle$ implique déjà la subjectivité) satisfaisant aux condition suivantes :

(M*) $OP = OQ = OR \implies \rho(P,O,Q)\,\rho(Q,O,R) = \rho(P,O,R)$; (P*), si Π est la projection parallèle de la droite $PR = RQ$, alors $\rho(P,R,Q) = \rho(\Pi(P),\Pi(R),\Pi(Q))$.

Les propriétés (M,I,P) et (11) impliquent aussitôt (M*,P*). Inversement il faut définir pour une application ρ de J' sur G, ayant les propriétés (M*,P*), une G-fonction d'ordre ω pour laquelle (11) est vrai. Pour obtenir (11) et (P), il faut définir ω par

$$(12)\quad \omega(P,d,Q) = \begin{cases} \rho(P,R,Q) & \text{si } \{R\} = PQ \;\; d \text{ et } P,Q \notin d \\ & \text{si } P = Q \notin d \text{ ou } PQ \;\; d = \emptyset. \end{cases}$$

Alors les conditions (11), (P,I) sont finalement satisfaites (même sans M^*, P^*). Dans la démonstration suivante de (M) on peut restreindre (P^*) au cas particulier

(P_0^*) $PR = RQ \neq PR' = R'Q' \quad RR' \not\parallel QQ' \Longrightarrow \rho(P,R,Q) = \rho(P',R',Q')$, ce qui démontre en même temps, que les conditions (M^*, P^*) sont équivalentes à (M^*, P_0^*).

Pour des points P,Q,R alignés (M) est triviale à cause de (2) et (M^*). Pour des P,Q,R non alignés il suffit de considérer les deux cas (i) $d \parallel QR$, (ii) $d \not\parallel PQ, QR, RP$ parce que les cas $d \parallel RP$ et $d \parallel PQ$ sont facilement ramenés à (i) par une permutation cyclique de $\{P,Q,R\}$, qui ne change pas l'assertion de (M) à cause de l'équation

$\omega(P,d,Q)^{-1} = \omega(Q,d,P)$ (si $P,Q \notin d$), impliquée par (2) et (M^*). Dans le cas (i) nous avons $\omega(Q,d,R) = 1$ à cause de (2), $\rho(P,R',Q) = \rho(P,Q',R)$ pour $\{R'\} = d \cap PQ$, $\{Q'\} = d \cap PR$ à cause de (P_0^*) et alors $\omega(P,d,Q) = \omega(P,d,R)$ (2).

Dans le cas (ii) nous mettons

$\{R'\} = d \cap PQ$, $\{Q'\} = d \cap RP$, $\{P'\} = d \cap QR$, $P'' \in QR$, $PP'' \parallel Q'R'$

et obtenons à cause de (M^*, P^*)

$$\rho(P,R',Q)\ \rho(Q,P',R) = \rho(P'',P',Q)\ \rho(Q,P',R) = \rho(P'',P',R) = \rho(P,Q',R)$$

et par conséquent l'assertion de (M).

Pour un G-rapport ρ les conditions suivantes sont équivalentes :

(13) $\forall_{P,Q,R}(\rho(P,R,Q) = 1 \Longrightarrow P = Q$

(14) $\forall_{P,Q,R,R'}(P \neq Q \wedge \rho(P,R,Q) = \rho(P,R',Q) \Longrightarrow R = R')$, sauf si $G = \{1\}$ et si l'ordre du plan (c'est-à-dire le nombre des points d'une droite) est égal à 3 (en ce cas (13) est trivialement faux, mais (14) vrai).

La démonstration de (13) $\Longrightarrow$ (14) est faite avec un point **auxiliaire** $R'' \notin PR$: on construit les points Q'', Q' de la façon suivante : $Q'' \in PR''$, $QQ'' \parallel RR''$, $Q' \in PR$, $Q'Q'' \parallel R'R''$, et le calcul donne grâce à (M^*, P^*) et l'hypothèse de (14)

$$\rho(P,R',Q) = \rho(P,R,Q) = \rho(P,R'',Q'') = \rho(P,R',Q'),$$

$$\rho(Q,R',Q') = \rho(Q,R',P)\ \rho(P,R',Q') = \rho(P,R',Q)^{-1}\ \rho(P,R',Q') = 1$$

ce qui entraîne $Q = Q'$ à cause de (13) et alors $R = R'$.

Si l'ordre du plan est 2, alors (13) est satisfaite strictement. Si le plan a l'ordre 3 et s'il y existe des points P, Q, R ayant les propriétés $\rho(P,R,Q) = 1$ (qu'implique déjà $P \neq R \neq Q$) et $P \neq Q$, on a $G_{P,d,PR} = \{1\}$ pour une droite $d \neq PR$ contenant R et alors $G \{1\}$ à cause de (4).

Par conséquent, nous pourrons supposer pour la démonstration de (14) $\Longrightarrow$ (13) (le cas exceptionnel, mentionné en haut étant exclus) que l'ordre du plan est au moins 4. Il existe donc sur la droite $PR = RQ$ (dans l'hypothèse de (13)) un point $O \neq P,Q,R$, et avec au point auxiliaire $Q' \notin PR$ on construit les points R'', R' de la façon suivante :

$R'' \in OQ''$, $RR''//QQ''$, $R' \in OQ$, $R'R''//PQ''$.

En se servant de (M^*, P^*) et $\rho(P,R,Q) = 1$, on en déduit

$\rho(O,R,P) = \rho(O,R,Q)\ \rho(P,R,Q)^{-1} = \rho(O,R,Q) = \rho(O,R'',Q'') = \rho(O,R',P)$,

d'où $R = R'$ à cause de (14) et alors $P = Q$.

En tenant compte de (11) on peut reformuler (14) de la manière suivante :

$(14') \ \forall_{P,Q,d,e} (P \neq Q \quad \omega(P,d,Q) = \omega(P,e,Q) \Longrightarrow PQ \cap d \cap d' \neq \emptyset)$.

Junkers a nommé cette propriété l'inverse de (I) (Archives de Math <u>20</u> 214 ... 218 1969), il l'a utilisée pour caractériser les plans projectifs arguésiens (naturellement sans la condition (P) pour ω).

On voit aussitôt que (13) est équivalent à l'injectivité de tous les homomorphismes χ donnés par (8) et à cause de (5) déjà à l'injectivité d'un des χ. D'après les résultats de Petit (Math Zeitschrifr <u>110</u>, 223-256, 1969) cette injectivité est équivalente au théorème de Desargues. Mais on peut aussi démontrer directement (c'est-à-dire sans utiliser χ) que le plan affine satisfait à la condition (13) si et seulement si le plan est arguésien (résultat de Junkers, pas encore publié).

Alors nous voulons introduire pour chaque G-rapport ρ une G-mesure au sens de Petit (publication déjà citée), c'est-à-dire une application μ de l'ensemble.

$Q = \{(A,B,C,D) \mid AB//CD\}$ sur G ($G = \langle \mu Q \rangle$ implique déjà la surjectivité) ayant les propriétés (M_2^*), (M_4^*), $(M_5^*)'$ formulées par Petit (il écrit $\overline{AB}/\overline{CD}$ comme abbréviations de $\mu(A,B,C,D)$ et désigne l'élément neutre de G par e, au lieu de 1 ici).

Si $AB \neq CD$ (// AB), il est naturel de définir

(15) $\mu(A,B,C,D) = \rho(B^*,C,D)$, où B^* est déterminé par $BB^*//AC$, $B^* \in CD$, d'autre part on veut que (pour CB = CD).

(16) $\mu(C,B,C,D) = \rho(B,C,D)$.

Mais que faire, si $AB = CD$, $A \neq C$?

D'après Junkers (pas encore publié) on généralise les définitions (15), (16) en considérant des produits Π de projections parallèles :

(17) $\Pi(A) = C \wedge \Pi(B) \in CD \Longrightarrow \mu(A,B,C,D) = \rho(\Pi(B),C,D)$.

Mais alors il faut démontrer que $\rho(\Pi(B),c,D)$ est déterminé uniquement par A,B,C,D sous les conditions $\Pi(A) = C$, $\Pi(B) \in CD$; car si le plan n'est pas un plan de translations, $\Pi(B)$ ne doit pas être déterminé par ces conditions. C'est ainsi que nous avons besoin de

(18) $\rho(\Pi(B),C,D) = \rho(\Pi'(B),C,D)$

pour tous les produits Π, Π' de projections parallèles sous l'hypothèse

(19) $AB//CD \;\wedge\; \Pi(A) = C = \Pi'(A) \;\wedge\; \Pi(B), \Pi'(B) \in CD$.

A cause de (M^*) (8) est équivalent à

(20) $\rho(\Pi(B),C,\Pi'(B)) = 1$.

Pour démontrer cela, Junkers a prolongé ω au plan projectif en conservant les propriétés (M,I) et l'ensemble des images G. Soit J le point impropre (point à l'infini) commun à AB et CD soient X,Y deux points du plan affine alignés avec J et X',Y' leurs images, aussi alignés avec J, par une projection parallèle (facteur de Π ou Π'). De (P) nous avons $\omega(Y,XX',Y') = 1$ et alors de (M). On déduit

$\omega(J,XX',Y) = \omega(J,XX',Y')$.

A cause de (I) on peut ici substituer à XX' une droite quelconque d_X passant par X resp. $d_{X'}$ passant par X', mais pas par J.

$\omega(J,d_X,Y) = \omega(J,d_X,Y')$.

Par récurrence on déduit de cela

$\omega(J,d_A,B) = \omega(J,d_C,\Pi(B)$

mais aussi naturellement

$\omega(J,d_A,B) = \omega(J,d_C,\Pi'(B))$,

d'où à cause de (M) nous obtenons (20).

Remarquons que pour la démonstration de (20) ce n'est pas nécessaire de prolonger ω au plan projectif. Il nous faut seulement introduire une fonction ω', définie pour les couples non-incidents (P,d), ayant la propriété

(21) $P,Q \notin d \Longrightarrow \omega'(P,d)\ \omega'(Q,d)^{-1} = \omega(P,d,Q)$.

(c'est fait facilement comme cela : on choisit pour chaque droite d un point $P_d \notin d$ et on définit $\omega'(P,d) = \omega(P,d,P_d)$, et (ce qui constitue la difficulté de la démonstration) pour un faisceau $\mathcal{F}$ de parallèles (//AB dans la démonstration de (20)) donné une application ω_0 de l'ensemble des droites dans G, ayant la propriété

(12) $\{R\} = d \cap e \ \wedge \ d,e \neq PR \in \mathcal{F} \Longrightarrow \omega_0(d)\ \omega'(P,d)^{-1} = \omega_0(e) = \omega'(P,e)^{-1}$.

Alors (avec les notations de la démonstration de (20), déjà faite) on a

$\omega_0(d_X)\ \omega'(Y,d_X)^{-1} = \omega_0(XX')\ \omega'(Y,XX')^{-1} = \omega_0(XX')\ \omega'(Y',XX')^{-1} = \omega_0(d_y)\ \omega'(Y',d_Y)^{-1}$

et par récurrence

$\omega_0(d_A)\ \omega'(B,d_A)^{-1} = \omega_0(d_C)\ \omega'(\Pi(B),d_C)^{-1} = \omega_0(d_C)\ \omega'(\Pi'(B),d_C)^{-1}$,

ce qui donne aussitôt

$\omega'(\Pi(B),d_C) = \omega'(\Pi'(B),d_C)$

et d'après (21) c'est déjà (20). Mais, bien sur, cette démonstration n'est motivée que si l'on pense au prolongement de ω au plan projectif :

$\omega(J,d,P) = \omega_0(d)\ \omega'(P,d)^{-1}$.

La multiplicité (M_2^*) se démontre facilement, si on considère pour AB//CD//EF des projections parallèles Π,Π' avec les propriétés

$\Pi(A) = C$, $\Pi(B) \in CD$, $\Pi'(C) = E$, $\Pi'(D) \in EF$,

et si 'lon utilise (7) et (P^*,M^*) :

$$\mu(A,B,C,D)\ \mu(C,D,E,F) = \rho(\Pi(B),C,D)\ \rho(\Pi'(D),E,F) = \rho((\Pi' \circ \Pi)(B),\Pi'(C),\Pi'(D)\ \rho(\Pi'(D),E,F)$$
$$= \rho((\Pi' \circ \Pi)(B),E,F) = \mu(A,B,E,F),$$

parce que $(\Pi' \circ \Pi)(A) = E$, $(\Pi' \circ \Pi)(B) \in EF$.

(M_4^*) se déduit de (15) pour $B^* = D$, parce que l'on a $\rho(D,C,D) = 1$ à cause de (M^*).

Enfin (M_5^*) est une conséquence de (16) et (P^*).

Inversement on voit facilement dans les résultats de Petit, que chaque G-mesure μ définit par (16) un G-rapport. C'est ainsi que les trois concepts G-fonction d'ordre, G-rapport, G-mesure sont finalement équivalents. Nous proposons de nommer d'une façon neutre tous ces concepts G-valuations et le groupe G un groupe de valuation du plan, s'il existe une G-fonction d'ordre (G-rapport, G-mesure) pour le plan.

Pour caractériser les groupes de valuation d'un plan affine nous construisons un groupe de valuation universel, c'est-à-dire un groupe de valuations, dont tous les groupes de valuation du plan sont des images homomorphes. Une telle construction a déjà été faite par R. NETZSCH (pas encoce publié) pour les valuations des treillio L'idée est de commencer avec le groupe libre engendré par l'ensemble des objets géométriques, qui est le domaine des valuations. Mais il estplus facile ici de n'utiliser aucun des ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, Q mais l'ensemble des couples de points différents :

$$\mathcal{L} = \langle \{(R,P) \mid R \neq P\} \rangle$$

soit le groupe libre engendré par cet ensemble. Nous voulons alors factoriser un G-rapport ρ quelconque de façon qu'un des deux facteurs soit un homomorphisme de $\mathcal{L}$ sur G. Dans ce but nous introduisons l'application $q : \mathcal{T}' \to \mathcal{L}$ définie par

(22) $PR = RQ \Longrightarrow q(P,R,Q) = (R,P)\ (R,Q)^{-1}$.

Grâce qu fait que dans $\mathcal{L}$

$$(R,P)\ (R,Q)^{-1} = (R',P')\ (R',Q')^{-1} \Longrightarrow (P = P' \wedge Q = Q' \wedge R = R') \vee (P = Q \wedge P' = Q')$$

nous pouvons introduire une application : $\psi : q\tilde{\mathcal{L}}' \to G$ par

(23) $RP = RQ \Longrightarrow \psi((R,P)(R,Q)^{-1}) = \rho(P,R,Q)$.

Alors on choisit pour chaque couple (R,d) avec $R \in d$ un point $Q_{R,d} \in RP$ et on prolonge ψ (nous conservons la notation) à un homomorphisme de $\mathcal{L}$ par la définition

(24) $R \neq P \Longrightarrow \psi(R,P) = \rho(P,R,Q_R,RP)$ pour les ψ-valeurs des générateurs de $\mathcal{L}$; c'est à cause de (M^*) et du fait que ψ soit un homomorphisme, que (24) implique (23).

Alors (22), (23) donnent

(25) $\rho = \psi \circ q$.

D'après (P^*) tous les éléments

$q(P,R,Q)\ q(P',R',Q')^{-1} = (RP)\ (R,Q)^{-1}(R',Q')\ (R',P')^{-1}$

de $\mathcal{L}$, pour lesquels P',R',Q' sont les images des P,R,Q dans une projection parallèle, sont contenus dans le noyau $\mathcal{N}_\psi$ de ψ, et c'est ainsi que nous formons le plus petit sous-groupe normal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{L}$, qui contient tous ces éléments :

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_\psi.$$

De cela résulte l'existence d'un homomorphisme φ de $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, qui factorise ψ, l'autre facteur étant l'homomorphisme canonique $\varkappa_{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}/\mathcal{N}$:

$$\psi = \varphi \circ \varkappa_{\mathcal{N}}.$$

Avec (25) cette équation donne

(26) $\rho = \varphi \circ (\varkappa_{\mathcal{N}} \circ q)$,

et nous démontrons facilement, que $\mathcal{V} = \mathcal{L}/\mathcal{N}$ a la propriété désirée d'un groupe de valuations universel :(i) $\rho^* = \varkappa_{\mathcal{N}} \circ q$ est un $\mathcal{V}$-rapport, parce que (M^*) est une conséquence immédiate de (22), et (P^*) se déduit des définitions de $\mathcal{N}$ et $\varkappa_{\mathcal{N}}$.

(ii) Pour chaque G-rapport ρ il y a un homomorphisme φ de $\mathcal{V}$ sur G ayant d'après (26) la propriété $\rho = \varphi \circ \rho^*$.

Des résultats de Petit (publication citée) démontrent que $\mathcal{V}$ est déjà déterminé par l'extension du plan affine au plan projectif et d'autre part ne change pas si on applique une dualité au planprojectif.

Le groupe de valuation $\mathcal{V}$ est image homomorphe de chaque boucle B multiplicatif (relatif à un système de coordonnées) et d'autre part chaque groupe de valuations G du plan est image homomorphe de $\mathcal{V}$. Si le plan a l'ordre fini n, on a card B = n-1 et ainsi :

$$n-1 \geqq \text{card} \quad \geqq \text{card } G.$$

Pour un plan arguésien il existe (voir p....) un groupe de valuation G ayant n-1 éléments, ce qui donne card $\mathcal{V}$ = n-1.

Inversement dans le cas card $\mathcal{V}$ = n-1 l'homomorphisme χ de B sur $\mathcal{V}$, déterminé par un $\mathcal{V}$-support doit être un isomomorphisme et le plan arguésien. Ainsi nous sommes arrivés qu théorème :

Un plan affine d'ordre fini n est arguésien, si et seulement si n-1 est l'ordre du groupe de valuations.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 14 du 3 mars 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

REMARQUES SUR UNE CLASSE DE STRUCTURES GEOMETRIQUES FINIES.

Par G. PICKERT.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Dans le Bulletin de l'A.P.M., n° 260 (1968), p. 32, on trouve la question suivante :

24 participants d'une réunion veulent dîner 8 jours ensemble, par tables de 4 personnes.

Peut-on faire un arrangement tel que chaque personne rencontre chaque autre personne au moins une fois à la même table ?

Il s'agit ici de trouver une configuration tactique de certaines propriétés que nous préciserons. Nous ne pouvons pas résoudre le problème d'existence d'une telle configuration, mais nous considérerons une classe, à laquelle la configuration donnée doit appartenir.

Une configuration tactique (au sens de MOORE) est un ensemble de v éléments (nommés points) avec un ensemble de b sous-ensembles (nommés blocs), chaque bloc ayant E éléments et chaque point étant élément de r blocs.

Dans les applications en statistique, on groupe les variétés, qui sont les objets de l'expérience considérée, en blocs, chaque variété étant en r exemplaires ;

c'est l'origine du choix des lettres v,b,r. Nous nous servirons des lettres p,q, p',q', pour les points, des lettres B,B' pour les blocs.
Le décompte de $\{(p,B) \mid p \in B\}$ de deux façons différentes donne l'équation de R.A. FISCHER (1940).

(1) $$r\,v = k\,b.$$

Dans notre problème des 24 personnes, nous avons $v = 24$, $k = 4$, $r = 8$ et ainsi d'après (1) $b = 48$. Nous pourrions calculer ce nombre naturellement aussi sans utiliser (1) : $24/4 = 6$ est le nombre de tables chaque jour et ainsi $b = 8 \times 6$.
Ce calcul est possible, parce que dans notre problème la configuration doit posséder une relation de parallélité, c'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des blocs, dont chaque classe d'équivalence est une partition de l'ensemble des points : Deux tables (plus exactement ensembles de 4 personnes à une table) sont parallèles, si elles appartiennent au même jour; s'il y a une relation d'équivalence dans une configuration tactique, s étant le nombre des blocs dans une classe d'équivalence, on a

(2) $$v = k\,s\ ,\ b = r\,s\ ,$$

parce que chaque point appartient à exactement un bloc de chaque classe d'équivalence et ainsi r est le nombre de ces classes. Avec (2), on peut démontrer (1) encore une fois.
Pour exprimer la dernière condition de notre problème, (chaque paire de personnes doit se rencontrer au moins une fois), nous introduisons $p \neq q$

$$[p,q] = \text{card}\ \{B \mid p,q \in B\},$$

et alors, cette condition s'écrit

(3) $$p \neq q \Longrightarrow [p,q] \geqq 1.$$

Pour une configuration tactique quelconque le décompte de

$$\{(q,B) \mid p,q \in B \wedge p \neq q\}$$

de deux façons différentes donne (voir p.e. P. DEMBROWSKI, Finite Geometries)

(4) $$r\ (k-1) = \sum_{q(\neq p)} [p,q].$$

Pour une configuration tactique ayant la propriété (3), l'équation (4) donne l'inégalité

(5) $$r\ (k-1) \geqq v-1$$

Tandis que pour les plans affines finis, les plans projectifs finis (les droites étant prises comme blocs) et les Stéiner-systèmes de triplets (voir DEMBROWSKI, Finite Geometries, ou RYSER, Mathématiques combinatoires) on a ici une égalité (et inversement l'égalité dans (5) implique l'égalité dans (3)), dans notre problème, nous avons

(6) $$r\ (k-1) = v.$$

Ainsi nous considérerons ici seulement des configurations tactiques ayant les propriétés (3) et (6), sans répéter ces conditions chaque fois. Si la configuration possède une relation de parallèlité, (2), (6) donnent

$$k\ s = r\ (k-1),$$

d'où on déduit l'existence d'un nombre naturel t (= 2 dans notre problème des 24 personnes). avec

(7) $$r = t\ k\ ,\ s = t(k-1)\ ,\ v = t\ k(k-1)\ ,\ b = t^2\ k(k-1).$$

Mais dans la suite nous ne supposons pas l'existence d'une relation de parallélité.

De (3), (5), (6), on déduit que, pour chaque p il existe un point p' et un seul ayant la propriété

(8) $\quad p \neq p' \quad \wedge [p,p'] = 2,$

tandis que

(8') $\quad q \neq p,p' \implies [p,q] = 1$

Dans la suite p' désigne toujours le point déterminé par p et la condition (8). A cause de (8) l'application $p \rightarrow p'$ est une involution de l'ensemble des points sans point fixe, ce qui donne

(9) $\quad v \equiv 0 \mod. 2.$

Les nombres v,b,k,r sont naturellement supposés $\neq 0$ et on a $v \geqq k$.
L'existence de blocs différents ayant en commun des points p,p' avec (8) donne $k \geqq 3$, $r \geqq 2$.
A cause de (1) et (6), on peut exclure les valeurs 2 et 4 pour v. Pour v = 6 d'après (6) il n'existe que les deux possibilités

(i) $\quad k = 4, \quad r = 2, \quad b = 3,$

(ii) $\quad k = r = 3, \quad b = 6.$

Nous démontrerons que dans chaque cas il existe (à un isomorphisme près) une et une seule configuration.
En utilisant pour $B \neq B'$, l'expression

$$[B,B'] = \text{card } (B \cap B'),$$

nous arrivons au dual de (4) :

(10) $$k\,(r-1) = \sum_{B'(\neq B)} [B,B']$$

Pour les [B,B'] on a

(11) $\quad B \neq B' \implies [B,B'] \leqq 2,$

parce que $p,q,r \in B \cap B'$, $B \neq B'$ et $p \neq q,r$ donnent d'après (8), (8') $q = p' = r$.

Avec les expressions

$$d_B = \text{card}\ \{B' \mid [B,B'] = 2\}$$

$$zB = \text{card}\ \{B' \mid B \quad B' = \emptyset\}.$$

(10) et (11) donnent

(12) $$k\ (r-1) = b-1 + d_B - z_B$$

En décomptant de deux façons

$$\{(p,B) \mid p \in B \wedge p' \notin B\}$$

p' étant le point déterminé par (8), on arrive à

$$v\ (r-2) = \sum_B (k - 2\ d_B)$$

et à cause de (1) à

(13) $$\sum_B d_B = v$$

A partir de (12), (1), (6) on calcule facilement

(14) $$d_B = \frac{r-k}{k}\ (r + k - rk) + z_B + 1.$$

Pour $r = k$ cela donne $d_B \geq 1$ et parce qu'on a alors d'après (1) aussi $b = v$, à cause de (13) on en déduit $d_B = 1$ et $z_B = 0$, c'est-à-dire :

Proposition 1. Si $r = k$, l'intersection de deux blocs est toujours non-vide, et pour chaque bloc B il existe un bloc et un seul ayant deux points en commun avec B.

C'est-à-dire nous avons le dual complet des propriétés (3), (8), (8').
A cause de cela nous parlons dans le cas $r = k$ de configurations <u>symétriques</u>.

Parce que $r = k$ implique $z_B = 0$, il n'y a pas de relation de parallélité dans ce cas, c'est-à-dire dans (7) t doit être ≥ 2.

Pour $r > k$ (14) ne donne pas de renseignement supplémentaire sur d_B.
Mais pour $r < k$, on arrive à $d_B > 1$, c'est-à-dire $d_B \geq 2$, et d'après (13) cela donne $v \geq 2b$ et $v = 2b \Longrightarrow d_B = 2$, $z_B = 0$.

A cause de cela nous pouvons construire une et une seule configuration du type (i).

En notant les 6 points $1,2,3,1',2',3'$, les primes ayant le même sens qu'en (8) et (8'), un bloc doit être $\{1,1', 2,2'\}$, un autre $\{1,1', 3,3'\}$, et alors nous n'avons que la possibilité $\{2,2', 3,3'\}$ pour le troisième. On peut représenter cette configuration par trois cercles dans le plan euclidien se coupant deux à deux en deux points.

Pour construire des configurations symétriques nous démontrons d'abord

Proposition 2. Dans une configuration symétrique il existe pour chaque point p une bijection σ_p de l'ensemble des blocs contenant p, mais pas p' sur l'ensemble des blocs contenant p', mais pas p déterminée par

(15) $$p \in B \wedge p' \notin B \Longrightarrow [B,\sigma_p(B)] = 2$$

(15') $$p \in B \wedge p' \notin B \wedge B \neq B' \neq \sigma_p(B) \Longrightarrow [B,B'] = 1.$$

Pour la démonstration nous considérons l'ensemble P_p de tous les points, qui n'appartiennent pas à un bloc contenant les deux points p,p' :

(16) $$\text{card } P_p = v - (2k-2) = k^2 - 3k + 2.$$

Pour $q \in P_p$ le bloc contenant p,q est déterminé de façon unique ; nous le notons pq. Alors $q \to (qp,qp')$ est une application de P_p sur un ensemble de $(k-2)^2$ couples de blocs, mais à cause de (16), elle n'est pas injective. Si $q_1,q_2 \in P_p$, $q_1 \neq q_2$ et $B = q_1p = q_2p$, $B' = q_1p' = q_2p'$, alors B' est déjà déterminé par B comme le seul bloc tel que $[B,B'] = 2$ d'après la proposition 1, ainsi q_3 est déterminé par q_1, c'est-à-dire l'image réciproque d'un couple (B,B') contient au plus deux points. Mais à cause de (16) et de l'égalité $(k^2 - 3k + 2) - (k-2)^2 = k - 2$ il y a exactement $k - 2$ couples (B,B'), dont l'image réciproque contient deux points, c'est-à-dire $[B,B'] = 2$. Nous avons déjà vu que dans ce cas B détermine B' et réciproquement. Parce qu'il y a exactement $k-2$ blocs contenant p, mais pas p', la proposition est démontrée.

Comme corollaire nous démontrons

(17) $\{p,p'\} = B \cap B' \wedge q \in B \Longrightarrow q' \in B'$,

ce qui implique, que $p \to p'$ est un automorphisme de la configuration. Si au contraire sous l'hypothèse de (17), $q' \notin B'$, on a $q \neq p,p'$ et ainsi (parce que $d_B = 1$) $q' \notin B$, c'est-à-dire $q' \in P_p$. Chacun des deux blocs contenant q,q' ne contient pas p, parce qu'alors à cause de $q' \notin B$, $q \in B$ on aurait deux blocs contenant p,q, ce qui est impossible parce que $q \neq p'$. Nous avons aussi $p \in P_{q'}$, et (15) peut être appliqué deux fois au bloc pq' :

$$[pq', \sigma_p(pq')] = 2 = [pq', \sigma_{q'}(p,q')]$$

d'où à cause de $d_{pq'} = 1$, on conclut

$$\sigma_p(pq') = \sigma_{q'}(pq').$$

Mais ce bloc ayant les points p',q ($\neq p,p'$) doit être le bloc $p'q = B$ et donc contenir p, c'est impossible pour $\sigma_p(pq')$.

Grâce à la proposition 2 et au corollaire (17) on voit facilement, que dans le cas $k = 3$, c'est-à-dire pour le type (ii), en notant les points $1,2,3,1',2',3'$, les blocs sont à une permutation de $\{1,2,3\}$ près,

$\{1,1',2\}$, $\{1,1',2'\}$, $\{2,2',3\}$, $\{2,2',3'\}$, $\{3,3',1\}$, $\{3,3',1'\}$.

Dans le cas $k = 4$, en notant les points $1,2,3,4$, $1',2',3',4'$, et en appliquant la proposition 2 et (17) avec $p = 1$, nous obtenons, à une permutation de $\{1,2,3,4\}$ près les blocs

$\{1,1',2,3\}$, $\{1,1',2',3'\}$, $\{4,4',1,6'\}$, $\{4,4',1',6\}$, $\{5,5',1,6\}$, $\{5,5',1',6'\}$.

Il nous faut encore constituer les blocs contenant $2,2'$ resp. $3,3'$ resp. $6,6'$, et nous avons à notre disposition les points $4,4',5,5',6,6'$ dans les deux premiers cas et seulement les points $2,2',3,3'$ dans le dernier.

C'est ainsi qu'il faut admettre comme blocs les ensembles

$\{6,6',2,3'\}$, $\{6,6',2',3\}$,

ce qui exclut l'usage de 6,6' dans les deux premiers cas.

A un échange de 2,3 près, qui ne change pas les blocs déjà construits, on doit ainsi admettre les quatre blocs

$\{2,2',4,5'\}$, $\{2,2',4',5\}$, $\{3,3',4,5\}$, $\{3,3',4',5'\}$.

La structure de cette configuration devient plus claire, si on remarque que pour chacun des quadruples

(6,1,2,3), (2,3,4,5), (4,5,6,1), on peut construire 4 blocs de la même façon :

$\{6,6',2,3'\}$, $\{6,6',2',3\}$, $\{1,1',2,3\}$, $\{1,1',2',3'\}$;

$\{2,2',4,5'\}$, $\{2,2',4',5\}$, $\{3,3',4,5\}$, $\{3,3',4',5'\}$;

$\{4,4',6,1'\}$, $\{4,4',6',1\}$, $\{5,5',6,1\}$, $\{5,5',6',1'\}$.

Dans les configurations symétriques et aussi dans le type (i) (réalisé par trois cercles se coupant deux à deux en des points différents) d_B a la même valeur pour tous les blocs. Mais la réciproque est vraie aussi :

Proposition 3. Si d_B a la même valeur pour tous les blocs B, la configuration est symétrique ($d = 1$) ou $k = 4$, $r = 2$, ($d = 2$).

Pour la démonstration nous mettons $d = d_B$ pour tous les blocs B et déduisons de (13) et (1)

(18) $$v = db \ , \quad k = dr.$$

Alors (14), (18), (6) et $z_B \geq 0$ donnent l'inégalité

(19) $$\frac{d-1}{d^2}(d^2 - k^2 + k(d+1)) \geq 0.$$

L'ensemble des nombres réels $\{x \mid d^2 - x^2 + x(d+1) \geq 0\}$ est un intervalle contenant 0. C'est ainsi que de $k \geq 2d$ (conséquence de (8), (8')), (19) et

$d^2 - (2d)^2 + 2d(d+1) = d(2-d)$

on déduit $1 < d \Longrightarrow d = 2$.

Mais pour $d = 2$ la plus grande valeur de k, pour laquelle on a (19), est 4, et d'autre part nous avons $k \geq 2d = 4$, ce qui donne $k = 4$ et, d'après (18), $r = 2$.

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 15 du 6 avril 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-

DIMENSIONS DES ANNEAUX ET ENSEMBLES ORDONNES

d'après Gabriel-Rentschler.

par G. RENAULT.

-:-:-:-:-:-:-:-

Si A est un anneau commutatif, on appelle dimension de Krull de A, (dim A) la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de A. Les deux théorèmes suivants qui illustrent cette notion sont particulièrement importants.

Théorème 0.1.

Soient A un anneau semi-local noethérien de radical R, d(A) le degré du polynôme de Hilbert-Samuel ; soit d'autre part s(A) la borne inférieure des entiers n tels qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de R pour lesquels $A/(x_1,\dots,x_n)$ soit de longueur finie.

Alors on a : $\dim A = d(A) = s(A)$

Théorème 0.2.

Soit $A = K[x_1, \dots, x_n]$ un anneau de polynômes sur un corps K.

Alors : $\dim A = n$

Le but du travail de Gabriel-Rentschler est d'étendre notamment la théorie de la dimension au cas d'un anneau non commutatif.

I - Déviation - Dimension de Krull.

Soit E un ensemble ordonné. Si a, b $\in$ E, [a,b] désignera l'ensemble des éléments x de E tels que $a < x < b$. E sera dit artinien si toute suite décroissante de E est stationnaire, discret si $a < b$ implique $a = b$.

A chaque ensemble ordonné E on associe une quantité dev E (déviation de E) qui est, soit un entier naturel, soit l'un des symbôles $-\infty$, $+\infty$. On pose :

dev $E = -\infty$ lorsque E est discret.

dev $E < 0$ lorsque E est artinien.

Supposons déterminés les ensembles ordonnés F tels que dev $F < n-1$. Si E est un ensemble ordonné on pose :

dev $E < n$, lorsque toute suite décroissante $a_1 > a_2 > \dots$ de E telle que l'on ait :

(1) dev $[a_{i+1}, a_i] \nless n-1$ pour tout i, est finie.

On pose enfin dev $E = +\infty$ lorsque, pour tout n, dev $E \nless n$.

La condition (1) ci-dessus est équivalente à la condition suivante. Il n'existe pas de suite infinie décroissante $a_1 > a_2, \dots$ telle que l'on ait dev$[a_{i+1}, a_i] > n-1$ pour tout i.

Exemples :

dev $E = 0$: E est un ensemble artinien non discret.

dev $Z = 1$: on a de façon immédiate dev $Z < 1$ et Z n'est ni artinien ni discret.

dev $Q = +\infty$: supposons dev $Q < n$.

Pour toute suite infinie décroissante $a_1 > a_2 > \dots$, il existe un entier i tel que dev$[a_{i+1}, a_i] < n-1$. On itère et on se ramène au cas dev$[a_{i+1}, a_i] < 0$ ce qui est faux car $[a_{i+1}, a_i]$ n'est pas artinien.

Définition 1.

Si M est un module à gauche sur un anneau A, on note dev M ou K dim.M(dimension de Krull de M), la déviation des sous-modules de M ordonnés par inclusion.

II - Propriétés de la déviation et de la dimension de Krull.

Proposition 2.

Soient E et F deux ensembles ordonnés, f une application croissante de E dans F, r un entier naturel tels que :

$$a < b \Longrightarrow \text{dev}[f(a), f(b)] > r$$

alors

$$\text{dev } E < \text{dev } F - r$$

Supposons qu'il existe une suite infinie d'éléments de E

$a_1 > a_2 > \ldots$

telle que :

$$\text{dev}[a_{i+1}, a_i] > \text{dev } F - r \qquad i \in N$$

On a alors :

$$\text{dev}[f(a_{i+1}), f(a_i)] > \text{dev } F \qquad i \in N \qquad (1)$$

Sinon il existe un indice i tel que :

$$\text{dev}[f(a_{i+1}), f(a_i)] < \text{dev } F$$

On applique l'hypothèse de récurrence à

$E' = [a_{i+1}, a_i]$

$F' = [f(a_{i+1}), f(a_i)]$

On a donc dev $E' <$ dev $F' - r <$ dev $F - r$, ce qui contredit notre hypothèse.

Considérons la suite décroissante infinie, (car f est strictement croissante).

$$f(a_i) > f(a_i) > \ldots\ldots$$

On a d'après (1) : $\text{dev}[f(a_{i+1}), f(a_i)] > \text{dev } F$, ce qui contredit la définition de dev F.

Corollaire 3.

Si N est un sous-module d'un module M on a :

K dim N < K dim M

K dim M/N < K dim M

Définition 4.

Si A est un anneau, on désigne par dim A, la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux bilatères premiers de A.

Proposition 5.

Soit A un anneau noethérien à gauche. Alors dim A < dev A = (K dim A). Soit $I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n$ une chaîne d'idéaux premiers de A ; on va démontrer que n < dev A.

Pour cela il suffit de prouver les relations :

$$\text{dev } A/I_0 > \text{dev } A/I_1 > \ldots\ldots$$

Car, d'après le corollaire 3, on sait déjà que dev A > dev A/I_0. Ce sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme.

Soient B une anneau premier noethérien à gauche, P un idéal bilatère premier non nul de B.

Alors

$$\text{dev } B > \text{dev } B/P.$$

P est un idéal essentiel à gauche et d'après le théorème de Goldie, P contient un élément s non diviseur de zéro, on a la suite strictement décroissante :

$$B \supset Bs \supset Bs^2 \supset \ldots.$$

De plus on a :

$$Bs^{n+1} \subset Ps^n$$

et la surjection :

$$Bs^n/Bs^{n+1} \longrightarrow Bs^n/Ps^n$$

Bs^n/Ps^n est isomorphe à B/P, d'après le corollaire 3, on a :

$$\text{dev } Bs^n/Bs^{n+1} > \text{dev } B/P$$

d'où, par définition,

$$\text{dev } B > \text{dev } B/P$$

Proposition 6.

Soient E et F deux ensembles ordonnés non vides. Alors

$$\text{dev } E \times F = \text{Sup } (\text{dev} E, \text{dev } F) = s$$

1) $\text{dev } E \times F > s$

Soit $f \in E$ $\qquad E \times \{f\} \subset E \times F$

et par suite $\text{dev } E < \text{dev } E \times F$; de même $\text{dev } F < \text{dev } E \times F$.

2) $\text{dev } E \times F < s$

Sinon il existe une suite infinie : $(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > \ldots\ldots$

telle que $\text{dev}[(a_{i+1}, b_{i+1}), (a_i, b_i)] > s$, $i \in N$

soit :

$$\text{dev}([a_{i+1}, a_i] \times [b_{i+1}, b_i]) > s$$

On en déduit

$$\text{dev}[a_{i+1}, a_i] \text{ ou } \text{dev}[b_{i+1}, b_i] > s \qquad (2)$$

(il suffit de procéder par récurrence sur s).

La relation (2) a lieu une infinité de fois ce qui contredit la définition de s.

Proposition 7.

Soit N un sous-module d'un module M.

Alors dev M = sup(dev N, dev M/N) = s.

Compte tenu du corollaire 3, il suffit de prouver que dev M < s.

Soit E (resp. F) le treillis des sous-modules de N (resp. M/N).

A tout sous-module M' de M on fait correspondre le couple $\left(M' \cap N, \frac{M'+N}{N} = \frac{M'}{M' \cap N}\right)$ élément de E × F. Si T est le treillis des sous-ensembles de M on a :

dev T < dev (E × F)

soit

$$\text{dev } M < s$$

Corollaire 8.

Soit M un A-module de type fini ; alors dev M < dev A. Si de plus M est fidèle et A commutatif dev M = dev A.

on a la suite exacte

$$A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

la proposition 7 entraîne dev M < dev A^n = dev A (proposition 6).

si M est fidèle et A commutatif on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M^n$$

et dev A < dev M^n = dev M.

Notations :

Soit E un ensemble ordonné. On pose : $S_c(E)$: ensemble des suites $(e_1, \dots, e_n, \dots)$ telles que e_n soit constant pour n grand, ordonné par :

$$(e_i) < (f_i) \Longleftrightarrow e_i < f_i \quad \forall i \in N.$$

$C_r(E)$: le sous-ensemble de $S_c(E)$ constitué des suites croissantes.

On notera b/a l'intervalle [a, b].

Proposition 9.

$$\text{dev } C_r(E) = \text{dev } S_c(E) = 1 + \text{dev } E$$

- dev $C_r(E)$ < dev $S_c(E)$: évident.
- dev $S_c(E)$ < 1 + dev E :

Soit $a^1 > a^2 > \dots$ une suite infinie de suites stationnaires avec $a^i = a^i_1, a^i_2, a^i_3, \dots, a^i_\infty, \dots$

avec a^i_∞ terme constant à partir d'un certain rang et telle que dev $a^i/a^{i+1} > 1 +$ dev E $i \in N$.

$$a^i/a^{i+1} = a^i_1/a^{i+1}_1 \times \dots \times a^i_{j-1}/a^{i+1}_{j-1} \times S_c\,(a^i_\infty/a^{i+1}_\infty)$$

D'autre part dev $a_\infty^i/a_\infty^{i+1}$ < dev E pour i assez grand. Par récurrence sur dev E on en déduit :

$$\text{dev } S_c\ (a_\infty^i/a_\infty^{i+1}) < 1 + \text{dev } (a_\infty^i/a_\infty^{i+1}) < 1 + \text{dev } E$$

et par suite (proposition 6) :

$$\text{dev } (a^i/a^{i+1}) < 1 + \text{dev } E$$ d'où la contradiction.

- 1 + dev E < dev $C_r(E)$.

Notons que la propriété est triviale si E est artinien. On supposera donc dev E > 1.

Lemme.

Soit E un ensemble ordonné non artinien. Il existe une suite infinie décroissante (e_i) telle que $\text{dev}^{e_i/e_{i+1}} = \text{dev } E - 1$.

Il suffit en fait de démontrer qu'il existe une suite infinie (e_i) telle que $\text{dev}^{e_i/e_{i+1}} = \text{dev} - 1$. Sinon il n'existerait pas de suite décroissante infinie (e_i) telle que $\text{dev}^{e_i/e_{i+1}} > \text{dev } E - 2$, ce qui contredirait la définition de dev E.

Soit donc (e_i) une telle suite et posons : $a^i = (e_i, \ldots, e_i, \ldots)$ C'est un élément de $C_r(E)$ et dans $C_r(E)$ on a :

$$\text{dev } a^i/a^{i+1} = \text{dev } C_r\ (e_i/e_{i+1})$$

par récurrence on en déduit :

$$\text{dev } C_r\ (e_i/e_{i+1}) > 1 + \text{dev } (e_i/e_{i+1}) > \text{dev } E$$

Soit dev a^i/a^{i+1} > dev E et 1 + dev E < dev a(E)

Corollaire 10.

Si A est un anneau noethérien à gauche : dev A[X] = dev A + 1

- dev A[X] > dev A + 1.

Posons B = A[X]. On a la suite décroissante : $B \supset BX \supset BX^2 \supset \ldots$

$$\text{dev } \frac{BX^n}{BX^{n+1}} = \text{dev } A.$$

- dev A[X] < dev A + 1

Soit I un idéal à gauche de A[X]. On pose $a_n(I)$ = {coefficients des polynômes de degré n appartenant à I} $\cup$ {0}.

$a_n(I)$ est un idéal à gauche de A. Les $a_n(I)$ forment une suite croissante stationnaire. L'application $I \longrightarrow \{a_n(I)\}_n$ est une application strictement croissante de l'ensemble des idéaux à gauche de A dans $C_r(A)$.

d'où : dev A[X] < dev $C_r(A)$ = 1 + dev A (proposition 9).

En particulier si K est un corps dev $K[x_1, \ldots, x_n] = n$

III - Dimension des anneaux locaux.

A désignera un anneau local noethérien commutatif dont la dimension de Krull sera notée dim A = (borne supérieure des lognueurs des chaînes d'idéaux premiers de A).

Proposition 11.

Soit A un anneau local noethérien commutatif.

Alors dim A = dev A = s(A).

On reprend les notations de l'introduction.

* $s(A) < \dim A$.

Soient M l'idéal maximal de A ; $(O_i)_{1<i<n}$ les idéaux premiers minimaux de A. Si a est un élément de $M - \bigcup_{i=1}^{u} P_i$,

on a

$$\dim A > 1 + \dim A/(a) \quad (\text{si } M = \bigcup_{i=1}^{u} P_i, \text{ A est artinien}).$$

Une récurrence facile permet de prouver l'inégalité

* dim A < dev A.

résulte de la proposition 5.

* dev A < s(A).

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un idéal de A tel que $n = s(A)$

$s(A/(a_1)) = s(A) - 1$ par définition.

Par récurrence sur s(A) on en déduit

$$\text{dev } A/(a_1) < s(A/a_1) < s(A) - 1$$

Il suffit donc de prouver que dev $A/a_1) > \text{dev } A - 1$.

Lemme 13.

Si $a \neq 0 \in M$, alors dev A < dev A/(a) + 1

$$A \supset a\, A \supset \ldots \supset a^n\, A = F_n \supset \ldots$$

Tout idéal de A est fermé pour la topologie a-adique. On définit une application strictement croissante de l'ensemble des idéaux de A, dans l'ensemble des idéaux homogènes de $G_r(A)$:

$$a \longrightarrow G_r(a) = \bigoplus_n \frac{a\ F_n}{a\ F_{n-1}} = \bigoplus_n \frac{a\quad F_n + F_{n-1}}{F_{n-1}}$$

(l'application est strictement croissante $I < J$; $G_r(I) = G_r(J) \Longrightarrow I+F_n = J+F_n$ $\forall_n$; tout idéal fermé par la topologie a-adique $\bar{I} = \bigcap_n (I+F_n) = J = \bigcap_n (J+F_n)$).

Et par suite dev $A <$ dev $G_r(A)$. Si b est la classe de a-modulo a^2A, $G_r(A)$ est un (A/a) module monogène engendré par b d'où :

$$\text{dev } G_r(\bar{A}) < \text{dev } (A/a)[X] = \text{dev } (X/a) + 1 \qquad \text{(Proposition 10)}$$

Corollaire 14.

Soit A un anneau commutatif noethérien.

Alors dim A = dev A.

Proposition 15.

Soit A un anneau muni d'une filtration croissante (F_n) telle que $\bigcup_n F_n = A$. Si tout idéal à gauche est fermé pour la topologie linéaire définie par la filtration, alors K dim $A <$ dev $G_r(A)$.

En fait K dim $A <$ dev F, où F désigne l'ensemble des idéaux à gauche homogènes de $Gr(A)$. La démonstration est analogue à celle du lemme 13.

Corollaire 16.

Soient g une algèbre de Lie de dimension n sur un corps k, U (g) son algèbre enveloppante.

Alors dim U (g) $<$ n.

U (g) est un anneau filtré et le gradué associé est l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$.

$$\text{dev } U(g) < \text{dev } k[X_1, \ldots, X_n] = n.$$

La proposition 5 entraîne l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

P. GABRIEL et R. RENTSCHLER : Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C.-R. Acad. Sc. Paris, t. 26 J (1967), p. 712-715.

Pour la théorie de la dimension dans le cas classique.

J.P. SERRE : Algèbre locale. Multiplicités. Lectures notes in Mathematics, Springer Verlag n° 11.

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 16 du 13 avril 1970

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SUR LES CATEGORIES A INVOLUTION. APPLICATIONS.

par J. LEVY-BRÜHL.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

I - Préliminaires :

On appelle catégorie à involution une catégorie E vérifiant les conditions suivantes :

i) Pour tout couple d'objets (A,B) de E, l'ensemble des morphismes Hom(A,B) de source A et ce but B est ordonné par une relation d'ordre $\leqslant$, compatible avec le produit.

ii) Il existe un anti-endomorphisme φ, involutif et isotone qui applique $a = BaA \in Hom(A,B)$ sur $a^{0} = Aa^{0}B$. On a donc :

$$(a^{o})^{o} = a \ ; \ (ab)^{o} = b^{o}a^{o} \ ; \ a \leqslant b \Longrightarrow a^{o} \leqslant b^{o}.$$

Un endomorphisme $a = AaA$ est dit entier si $a \leqslant A$ (identifié à l'identité de A).

Un morphisme BaA est dit injectif à gauche, ($a \in IG$) si $aa^{o} \leqslant B$.

" " " " " surjectif à droite, ($a \in SD$) si $aa^{o} \geqslant B$.

" " " " " injectif à droite, ($a \in ID$) su $a^{o}a \leqslant A$.

" " " " " surjectif à gauche, ($a \in SG$) si $a^{o}a \geqslant A$.

Les applications : c'est-à-dire les morphismes injectifs à gauche et surjectifs à gauche forment une sous catégorie E' de E. L'intérêt des catégories à involution est qu'elles se prêtent à un calcul formel simple, (le signe ^{o} jouant le rôle de l'exposant $(^{-1})$), et que de nombreux exemples de catégories (catégorie des ensembles catégories exactes [1], [2], catégorie des groupes, catégories abéliennes etc ...) sont isomorphes à la sous catégorie E' des applications d'une catégorie à involution.

II - Image entière et noyau entier :

Si F est la classe des morphismes entiers, symétriques (ie, $u = u^o$), idempotents de E, nous supposerons qu'il existe une application I de $\bar{E}$ dans F vérifiant les axiomes :

IMi) Si $a = BaA$, $I(a) \in F$, $I(a) \lessdot B$.

IMii) $a < b \Longrightarrow I(a) \lessdot I(b)$.

IMiii) $I(ab) = I(a.I(b))$.

IMiiii) $I(a) \lessdot I(b) \Longrightarrow a \lessdot bb^o a$.

Nou supposerons de plus qu'il existe un élément minimum $w(A)$ parmi les endomorphismes d'un objet A de E, (Axiome Ki), et poserons si $a = BaA$, $K(a) = I(a^o w(B))$. Nous admettrons dans ce qui suit l'axiome Kii "Kii"
$K(a) < K(b) \Longleftrightarrow ba^o a < b$.

L'image entière de a est $I(a)$, le noyau entier de a est $K(a)$. On voit sans peine que si $I(a) = i^o i$, où i^o est une injection ($i^o \in IG \cap SG \cap ID$), et si $K(a) = j^o j$, les monomorphismes i^o et j^o de E' sont les images et noyaux au sens classique de a, si $a \in E'$.
Si $a = baA$, $b = CbB$, on dit que (a,b) est exact si $I(a) = K(b)$.

Remarque :

Les exemples donnés à la fin du (1) vérifient IMi à iv et Ki; les catégories des groupes, exactes, abéliennes peuvent être immergés dans une catégorie E vérifiant Kii". Les axiomes donnés par Puppe et Mac-Lane [1], [3] ne sont pas applicables à la catégorie des ensembles.

III- Etude d'un diagramme Δ.

Soit le diagramme Δ dans une catégorie E à involution vérifiant IMi à iv et Ki, Kii". On suppose :

i) a, a', a'', tous éléments de $ID \cap SG$;

ii) b, b', b'' éléments de $IG \cap SD$;

iii) les colonnes exactes.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "a'^{o}fa"] \arrow[d, "a"'] & {} \arrow[r, "a''^{o}f'a'"] \arrow[d, "a'"'] & {} \arrow[d, "a''"] \\
4 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] & 5 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "d'"'] & 6 \arrow[d, "d''"] \\
7 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & 8 \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "b'"'] & 9 \arrow[d, "b''"] \\
10 \arrow[r, "b'gb^{o}"'] & 11 \arrow[r, "b''g'b'^{o}"'] & 12
\end{tikzcd}$$

Nous aurons à faire usage des formules suivantes :

(F) $a = BaA \in ID \Longleftrightarrow K(a) = w(A)$; $a \in SD \Longleftrightarrow I(a) = B$.
$K(a^{o}a) = K(a)$; $I(aa^{o}) = I(a)$; $K(ba) = I(a^{o}K(b))$.

Proposition I.

a) $I(gd) \leqslant I(d') \Longrightarrow b'gb^{o} \in IG$;

b) $K(d) \leqslant K(d'f) \Longrightarrow a'^{o}fa \in SG$;

c) $K(d') \leqslant K(d''f') \Longrightarrow a''^{o}f'a' = SG$

d) $I(g'd') \leqslant I(d'') \Longrightarrow b''g'^{o} \in IG$.

Démonstration.

La symétrie S du rectangle de gauche par rapport à son centre, définie par $S(X) = 12 - X$ est ce qu'on appelle une 3-dualité de ce rectangle, (c'est-à-dire que les hypothèses faites sont de la forme $x \leqslant y$ et $S(y^{o}) \leqslant S(x^{o})$). Dans une telle 3-dualité $x \in ID \Longleftrightarrow S(x^{o}) \in SD$, $I(x) \leqslant I(y) \Longleftrightarrow K(S(y^{o})) \leqslant K(S(x^{o}))$ $I(x) \leqslant K(y) \Longleftrightarrow I(S(y^{o}) \leqslant K(S(x^{o}))$. Or les hypothèses (i, ii, iii) sont de la forme : $a = (41) \in ID \cap SG$ et $S(a^{o}) = (11,8) = b' \in IG \cap SD$;
$a' = (52) \in ID \cap SG$ et $S(a'^{o}) = (10,7) = b \in IG \cap SD$;
$I(a) = K(d) \Longleftrightarrow I(41) = K(74)$ et $I(S(d^{o})) = K(S(a^{o})) \Longleftrightarrow I(85) = K(11,8)$
$I(d) = K(b) \Longleftrightarrow I(74) = K(10.7)$ et $I(52) = K(85)$

a) $K(bg^{o}b'^{o}) = I(b'g\,K(b)) = I(b'gd) = I(b'd') = I(b'.K(b')) = K(b'b'^{o}) = K(b'^{o})$
Donc $b'gb^{o} \in IG$.

b) Par la 3-dualité S, $I(87.74) \leqslant I(85)$ devient $K(74) \leqslant K(85.54)$ ou $K(d) \leqslant K(d'f)$, et la conclusion dera donc $S(11.10) = (1,2) \in SG$.

c) d) La symétrie de Δ par rapport à son centre définie par $T(X) = 13-X$ est encore une 3-dualité pour les hypothèses (i, ii, iii); et dans cette 3-dualité a) donne c) et b) donne d).

Proposition II.

a) Si (f,f') est exact, on a $I(a'^{o}fa) \leqslant K(a''^{o}f'a')$

b) Si $g \in ID$ et $gd = d'f$, on a $I(a'^{o}fa) = I(a'^{o}f)$

c) Si, en plus des hypothèses de (a,b), on suppose :

$K(a''^{o}) \leqslant K(a'^{o}f'^{o})$), alors $(a'^{o}fa,\ a''^{o}f'a')$ est exact.

Démonstration.

a) $I(a'^{o}fa) \leqslant I(a'^{o}f) = I(a'^{o}.K(f')) = K(f'a') \leqslant K(a''^{o}f'a')$

b) $I(a'^{o}fa) = I(a'^{o}f.K(d)) = I(a'^{o}f.K(d'f) = I(a'^{o}f.I(f^{o}.K(d')) = I(a'^{o}ff^{o}a')$

$= I(a'^{o}f).$

c) $K(a''^{o}f'a') = I(a'^{o}f'^{o}.K(a''^{o}) \leqslant I(a'^{o}f'^{o}.K(a'^{o}f'^{o}) = K(f'a').$

Donc $K(a''^{o}f'a') = K(f'a') = O(a'^{o}f) = I(a'^{o}fa)$

Par la 3-dualité T, du rectangle Δ, on a :

Proposition III.

a) Si $(g,\ g')$ est exact, $I(b'gb^{o}) \leqslant K(b''gb'^{o})$

b) Si $f' \in SD$, $d''f' = g''d'$, alors $K(b''g'b'^{o}) = K(g'b'^{o})$.

c) Si en plus des hypothèses de a) et b), on suppose que $I(b^{o}) \leqslant I(g^{o}b'^{o})$, alors $(b'\ gb,\ b''g'b'^{o})$ est exacte.

On appelle morphisme de connection de Δ, le morphisme $x = bg^{o}d'f'^{o}a''$.

Proposition IV.

a) Si $gd = d'f$, et (f,f') exact, alors $(a''^{o}f'a',\ x)$ est exact.

a*) Si $d''f' = g'd'$ et (g,g') exact, alors $(x, b'gb^{o})$ est exact.

b) Si $I(g^{o}d') \leqslant I(b^{o})$, $g'd' = d''f'$, $f' \in SD$, alors $x \in SG$.

b*) Si $K(a''^{o}) \leqslant K(d'f'^{o})$, $gd = d'f$, $g \in ID$, alors $x \in IG$.

Démonstration.

a) $K(x) = K(bg^{o}d'f'^{o}a'') = I(a''^{o}f'd'^{o}gd) = I(a''^{o}f'd'^{o}d'f) = I(a''^{o}f'd'^{o}d'\ K(f'))$

$= K(f'd'^{o}d'f'^{o}a'') = I(a''.K(d'f'^{o}) = K(d'f'^{o}a'') = I(a''^{o}f'.K(d')) = I(a''^{o}f'a').$

b) $I(x^{o}) = I(a''^{o}f'd'^{o}gb^{o}) > I(a''^{o}f'd'^{o}g) = I(a''^{o}f'd'^{o}K(g') = K(g'd'f'^{o}a'')$

$= K(d''f'f'^{o}a'') = I(a''^{o}f'f'^{o}.K(d'')) = I(a''^{o}f') = I(a''^{o}) = (3),$

Donc $x \in SG$.

Les propirétés a* et b* se déduisent de a) et b) à l'aide de T.

Un endomorphisme $d = AdA$ est dit un bord si $I(d) \leqslant K(d)$, et h est dit une homologie pour d, si $h = HhA \in IG \cap SD$, avec $K(h) = I(d)$, $I(h^{o}) = K(d)$.

On vérifie que si E' est une catégorie à morphismes nuls, d est un bord si et seulement si $d^2 = 0$.

Application I.

Si dans le diagramme Δ, on fait $f = g$, $f' = g'$, $b = a^o = h$, $b' = a'^o = h'$, $b'' = a''^o = h''$, alors h, h', h'' sont des homologies pour d, d', d'' qui sont alors des bords.

Si $fd = d'f$, alors $a'^o fa$ est une application ; si $f \in ID$, $f' \in SD$ et (f,f') exact, $fd = d'f$, $f'd' = d''f'$ on est dans les conditions d'application des propositions III et IV (Théorème de la suite exacte d'homologie).

Application II.

On suppose que dans le diagramme Δ: (f,f') et (g,g') sont exacts, $gd = d'f$, $g'd' = d''f'$, et que a,a',a'' sont des injections telles que $aa^o = K(d)$, $a'a'^o = K(d')$, $a''a''^o = K(d'')$ et b, b', b'' des surjections telles que $K(b) = I(d)$, $K(b') = I(d')$ $K(b'') = I(d'')$.

Dans ces conditions :

a) $f \in IG \Longrightarrow a'^o fa \in IG$; $g \in SG \Longrightarrow b'gb^o \in SG$.

b) les propositions I, II, III sont applicables.

c) si $f \in E'$, $d \in IG$, $g \in IG$, $d' \in SG$, on a $K(d')fK(d) = fK(d)$ et $a'^o fa$ est le seul morphisme y vérifiant $a'y = fa$.

c*) si $g \in SG$, $b'gb^o$ est le seul morphisme y vérifiant $yb = b'g$. L'application II reçoit le nom de Lemme Ker Coker ou du serpent.

Démonstration.

a) $a'^o fa$ est injectif à gauche, car il en est ainsi de ses trois facteurs.

b) Comme $gd = d'f$, on a $I(gd) = I(d'f) \leqslant I(d')$ et on peut appliquer le proposition (I,a). De même (I,b), (I,c), (I,d) par les bijections S et T de Δ.

Comme $a''^o \in ID$, on est dans les conditions de la proposition (II,c), et comme $b^o \in SD$, on a $I(g^o d') \leqslant I(b^o)$, ce qui nous place dans les conditions de la proposition IV.

c) Il existe un quotient à droite de fa par a', si et seulement si $a'a'^o fa = fa$ ou $K(d') fK(d) = fK(d)$. Si f est une application, $a'^o fa$ est une application.

Mais $I(d'f.K(d) = I[gd, K(d)] = w(8)$ car $g \in I(G)$, et par suite, comme $d' \in SG$, $I[f.K(d)] \leqslant K(d')$.

Donc $I f(K(d)) \leqslant I\,K(d') \implies f\,K(d) \leqslant K(d')^2 f.K(d) = K(d')f.K(d)$.

On a l'inclusion duale, car $K(d')$ est entier.

c*) On a $I(d'f) \leqslant I(d') \implies I(gd) \leqslant I(d') = K(b') \implies I(g.K(b)) \leqslant K(b')$
$\implies K(bg^0) \leqslant K(b')$.

Par suite d'après Kii", $b'gb^0bg^0 \leqslant b'$ et $b'gb^0bg^0g \leqslant b'g$.

Comme $g \in \hat{S}G$, $b'gb^0b \leqslant b'g$ et l'inclusion duale car $h \in SG$.

D'où $b'g = b'gb^0b$, et $b'g = yb$ a une solution unique.

Application III.

Dans la catégorie E' des applications de E, supposée à morphismes nuls, on considère le diagramme Δ, où a, a', a" sont nuls et ou les trois colonnes et les deuxième et troisième lignes supérieures sont exactes courtes.

Dans ces conditions, la quatrième ligne est exacte courte.

Démonstration.

On est dans les conditions de l'application II.

Il suffit de prouver que $b'gb^0 \in ID$.

Mais $I(a) = K(b'gb^0) = I(bg^0d'f'^0a'') = I(bg^0d'.I(f'^0a'')) = I(bg^0d'.I(f'^0.K(d''))$
$= I(bg^0d'.K(d''f')) = I(bg^0d'.K(f)) = I(bg^0d'f) = I(bg^0gd) = I(bg^0gK(b))$
$= K(bg^0gb^0) = K(gb^0) = K(b^0) = w(10)$.

D'autre part $b''g'b'^0$ est surjectif à droite, car il en est ainsi de ses 3 facteurs, ce qui prouve le Lemme 3X3.

BIBLIOGRAPHIE

1 - PUPPE D : Korrespondenzen in Abeeschen Kategorien. Math. Ann. 1962, p. 1-32.

2 - PUPPE-BRINKMAN : Lectures Notes, Springer t. 96, 1969.

3 - LEVY-BRUHL J : Introduction aux Structures algébriques. Dunon 1968.

ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 17 du 20 avril 1970

-:-:-:-:-:-:-:-:-

PLANS D'EXPERIENCE EN ALGEBRE COMBINATOIRE.

Par G. HEUZE.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Exposé non rédigé.

BIBLIOGRAPHIE.

P. DEMBOWSKI : Finite Geometries, (Springer, Berlin, 1968).

M. HALL : Combinatorial theory (Blaisdell, 1967).

G. HEUZE : Contribution à l'étude des schémas d'association (Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 1966).

H. RYSER : Combinatorial Mathematics (1963), ou Mathématiques Combinatoires (traduction française, Paris, 1968).

A signaler également : Journées d'Algèbre Géométrique d'Orléans (1970) ; (conférences de G. HEUZE, R. GUERIN, L. LESIEUR, J. C. PETIT).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 18 du 27 avril 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX PREMIERS DE DIMENSION DE KRULL EGALE A 1.

D'après G. MICHLER [7].

Par M. DJABALI.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

I - Notations et définitions.

Précisons d'abord que tous les anneaux considérés sont des anneaux unitaires. Si A est un anneau, nous noterons A_A (resp. ${}_A A$) la structure de A-module à droite (resp. de A-module à gauche) définie sur A.

Pour la notion de dimension de Krull d'un module M, notée K-dim M, nous renvoyons à l'exposé de G. RENAULT [9] d'après P. GABRIEL et R. RENTSCHLER [2]. Rappelons que cette notion généralise la notion classique de dimension de Krull d'un anneau commutatif.

Si A est un anneau nous dirons que A est de dimension de Krull égale à n, et nous écrirons K-dim A = n, si K-dim A_A = K-dim ${}_A A = n$.

Rappelons aussi la notion de dimension de Goldie d'un module M [4]. Nous dirons qu'un module M est de dimension de Goldie finie et nous écrirons G-dim $M < +\infty$ si toute somme directe de sous-modules non nuls de M possède un nombre fini de composantes. Plus précisément, nous écrirons G-dim $M = n$ s'il existe dans M n sous-modules coirréductibles $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tels que la somme $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ soit directe et soit un sous-module essentiel de M.

II - Dimension de Krull et condition artinienne "restreinte".

Lemme 2.1 : Soit A un anneau premier.

(I) Si K-dim $A_A < +\infty$ on a G-dim $A_A < +\infty$.

(II) Si pour tout idéal à droite essentiel E de A on a K-dim $A/E = 0$ alors l'inégalité G-dim $A_A < +\infty$ entraîne l'inégalité K-dim $A_A \leqslant 1$.

(I) est conséquence d'un résultat de B. LEMONNIER [5] qui dit que tout module de dimension de Krull finie est également de dimension de Goldie finie.

(II) Montrons que K-dim $A_A \leqslant 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que K-dim $A_A > 1$. Cela veut dire qu'il existe une suite strictement décroissante d'idéaux à droite $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ tels que pour tout i on ait K-dim $X_i/X_{i+1} > 0$. Mais A_A étant de dimension finie il en est de même pour tout idéal à droite. Comme $X_{i+1} \subsetneq X_i$ on peut écrire G-dim $X_{i+1} \leqslant$ G-dim X_i. Il existe donc un entier s tel que G-dim X_s = G-dim X_{s+1}. Mais on sait que cette égalité est équivalente au fait que X_{s+1} soit essentiel dans X_s. Alors si C est un idéal à droite complément de X_{s+1}, $X_{s+1} \oplus C$ est un idéal à droite essentiel de A. On a donc K-dim $A/X_{s+1} \oplus C = 0$. On en déduit que K-dim $X_s \oplus C/X_{s+1} \oplus C = 0$. On doit donc avoir K-dim $X_s/X_{s+1} = 0$ et on arrive ainsi à une contradiction.

Définition : Nous dirons qu'un anneau est essentiellement borné à droite (resp.

à gauche) si tout idéal à droite (resp. à gauche) contient un idéal bilatère non nul.

Nous dirons qu'un anneau est essentiellement borné s'il l'est à droite et à gauche.

Exemple : soit A un anneau premier dont les éléments vérifient une identité polynomiale non triviale. D'après un résultat de S. A. AMITSUR [1] A est essentiellement borné.

Théorème 2.2 : Soit A un anneau premier essentiellement borné à droite. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(I) $K\text{-dim}\, A_A = 1$

(II) A est noethérien à droite, n'est pas artinien à droite et pour tout idéal premier non nul P de A, A/P est un anneau simple

(III) A est noethérien à droite, n'est pas artinien à droite et pour tout idéal bilatère non nul B de A, A/B est un anneau artinien à droite.

Montrons que (II) $\Longrightarrow$ (III). Cette démonstration est due à A. ORNSTEIN [8]. Soit B un idéal bilatère non nul de A. Les idéaux premiers de l'anneau $\bar{A} = A/B$ sont de la forme $\bar{P} = P/B$ où P est un idéal premier de A contenant B. $\bar{A}$ étant noethérien à droite on peut écrire $\bar{0} = \bar{P}_1 \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ où $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ sont des idéaux premiers de $\bar{A}$. Ceci dit nous allons montrer que $\bar{A}_{\bar{A}}$ est de longueur finie. Cette démonstration est une transposition de la démonstration bien connue qui montre qu'un anneau artinien unitaire est noethérien. Nous pouvons écrire : $\bar{A} \supset \bar{P}_1 \supset \bar{P}_1\bar{P}_2 \supset \ldots \supset \bar{P}_1\bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n = 0$ Posons $M_K = \bar{P}_1\bar{P}_2 \ldots \bar{P}_{K-1}/\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_K$. M_K est un $\bar{A}/\bar{P}_K$ module à droite. Or $\bar{A}/\bar{P}_K$ étant isomorphe à A/P_K est un anneau simple. Ainsi M_K est $\bar{A}/\bar{P}_K$ module semi-simple et donc un $\bar{A}$ module semi-simple. Comme de plus M_K est un module noethérien on voit que M_K est un module de longueur finie. On en déduit que $\bar{A}_{\bar{A}}$ est de longueur finie.

Montrons que (III) $\Longrightarrow$ (I). Ceci est une conséquence du lemme 2.1. En effet, si

E est un idéal à droite essenteil de A, E contient un idéal bilatère non nul B. A/B étant artinien à droite on en déduit immédiatement que K-dim A/E = 0. Alors le lemme 2.1 peut s'appliquer et on a K-dim $A_A \leq 1$. Comme A n'est pas artinien à droite on a K-dim $A_A = 1$.

Montrons maintenant que (I) ===> (III). Commençons par montrer que l'idéal singulier à droite de A est nul. Considérons donc $J(A_A)$. Rappelons que $J(A_A) = \{x, 0 \cdot^{\cdot} x$ est un idéal à droite essentiel de $A\}$. Mais si $0 \cdot^{\cdot} x$ est essentiel dans A, $0 \cdot^{\cdot} x$ contient un idéal bilatère non nul B. Alors xB = 0. Comme A est premier cela entraîne que x = 0.

Remarquons maintenant que G-dim $A_A < +\infty$ (lemme 2.1). On sait que si $J(A_A) = 0$ les annulateurs à droite sont des compléments : si en plus G-dim $A_A < +\infty$, ces annulateurs vérifient la condition maximale [4]. Donc nous pouvons appliquer à l'anneau A le théorème de Goldie.

Montrons alors que si B est un idéal bilatère non nul de A, A/B est un anneau artinien à droite. A étant premier B est un idéal à droite essentiel de A_A. D'après [4] B contient un élément régulier c. Nous supposons naturellement que $B \neq A$ et donc que $c^A \neq A$. Dans ces conditions les idéaux de la forme c^nA forment une suite strictement décroissante. Comme K-dim $A_A = 1$, il existe un entier h tel que K-dim $c^hA/c^{h+1}A = 0$. Comme C est un élément régulier $c^hA/c^{h+1}A$ est isomorphe à A/cA : ainsi A/cA est un A module à droite artinien ce qui implique que A/B est un anneau artinien à droite.

Montrons maintenant que A est noethérien à droite. Il suffit de montrer que tout idéal à droite à droite est engendré par un nombre fini d'éléments. Remarquons que si X est un idéal quelconque nous pouvons considérer un complément C de X. Si nous savons que tout idéal à droite essentiel est de type fini nous pouvons affirmer que X est de type fini. En effet en projetant un système de générateurs de $X \oplus C$ sur X, on obtient un système de générateurs de X. Soit donc E un idéal à droite essentiel. E contient un élément régulier c et $c\,A$ est aussi essentiel dans A [4]. Alors $c\,A$ contient un idéal bilatère non nul B. Nous venons de voir que A/B était artinien à droite. Comme c'est un anneau unitaire nous en déduisons qu'il est aussi noethérien à droite. Alors E/B est engendré par un nombre fini d'éléments. Cela revient à dire qu'il existe des éléments $e_1, e_2, \dots, e_n$ de E tels que $E = e_1 A + e_2 A + \dots + e_n A + B$ et donc à fortiori $E = e_1 A + \dots + e_n A + c\,A$.

III - Les théorèmes de Krull et Akizuki.

Définition : Soit A un anneau premier noethérien à droite et à gauche et soit Q son anneau de fractions. Nous appellerons "sur-anneau" de A un anneau A' tel que $A \subset A' \subset Q$ avec $A' \neq Q$.

Rappelons que d'après [3] A possède un anneau de fractions (à droite et à gauche) Q qui est un anneau simple. Rappelons aussi que d'après le théorème 2.2 un anneau premier essentiellement borné et de dimension de Krull égale à 1 est noethérien à gauche et à droite.

Lemme 3.1 : Soit A un anneau essentiellement borné et de dimension de Krull égale à 1. Soit A' un "sur-anneau" de A. Si E' est un idéal à droite essentiel de A' A'/E' est un A-module à droite de longueur finie.

On sait que A' en tant que A-module à droite est une extension essentielle de A. On voit que si $E = E' \cap A$, E est un idéal à droite essentiel de A. D'après [3] E contient un élément régulier a. Posons $A_i = a^i A' \cap A$. Les A_i forment donc une suite décroissante d'idéaux à droite de A. D'autre part $a\,A$ est essentiel dans A[3]. Donc $a\,A$ contient un idéal bilarère non nul B. D'après le théorème 2.2 A/B est artinien à droite. Donc A/aA est un A-module à droite artinien. Ceci nous permet d'affirmer qu'il existe un entier n tel que $aA + A_i = aA + A_n$ pour tout i supérieur ou égal à n. Remarquons que $a^{-n} A_n + aA' \subset A'$. Nous allons montrer que $a^{-n} A_n + a A' = A'$.

Supposons $a^{-n} A_n + a A' \neq A'$. Il existe alors un élément b de A' qui n'appartient pas à $a^{-n} A_n + aA'$. Comme Q est un anneau de fractions à gauche de A, on peut écrire $b = c^{-1}d$, c étant un élément régulier de A. Alors Ac est un idéal à gauche essentiel de A : il contient donc un idéal bilatère non nul D de A. D'après le théorème 2.2 A/D est artinien à droite. Il existe donc un entier k tel que $a^k A+D = a^i A+D$, $\forall$ i>k. On en déduit immédiatement que $a^k A+Ac = a^{k+1} A+Ac$. Ainsi il existe deux éléments u et v de A tels que $a^k = a^{k+1} u+vc$. Nous pouvons alors écrire $a^kb = a^{k+1} ub+w$. Si nous posons $b_1 = ub$ nous voyons que $b_1 \in A'$. D'autre part $w \in a^k A' \cap A$, c'est-à-dire que $w \in A_k$. Alors, nous avons $b = ab_1 + a^{-k} w \in aA' + a^{-k}A_k$. Soit K le plus petit des entiers k tels que $b \in aA' + a^{-k} Ak$. Si l'on avait $K \leq n$, on en déduirait que $b \in aA' + a^{-n} A_n$. En effet $a^{-K}A_K = a^{-n}[a^{n-K}(a^KA' \cap A)] \subset a^{-n}A' \cap A)$. Comme $a^nA' \cap A$ est par définition A_n on voit que l'on aurait dans ces conditions $b \in aA + a^{-n}An$ ce qui est exclu. Nous pouvons donc affirmer que $K > n$.
Nous avons alors $aA + A_n = aA + A_K = aA + A_{K+1}$. D'après la définition de K nous pouvons écrire $b = ab'_1 + a^{-K}w'$, $b'_1 \in A'$, $w' \in A_K$. Alors $w' \in aA + A_{K+1}$ et on peut écrire une égalité de la forme
$a^kb - a^{K+1}b'_1 = a^{K+1}b''_2 + aa'$, $a' \in A$. Posons $b_2 = b'_1 + b'_2$. Alors $a^K(b-ab_2) = aa'$, d'où $a^1 = a^{K-1}(b-ab_2) \in A \cap a^{K-1} A^1 = A_{K-1}$. Mais alors on a $b \in aA' + a^{-(K-1)}A_{K-1}$. On aboutit ainsi à une contradiction. On a donc bien comme annoncé $A' = a^{-n}A_n + aA'$. Nous pouvons donc écrire $A'/aA' \simeq a^{-n}A_n/a^{-n}A_n \cap A'$. D'après le théorème 2.2., nous savons que A est nothérien à droite. A_n étant un idéal à droite de A est un A-module à droite noethérien. Il en est de même pour $a^{-n}A_n$. Donc nous voyons que A'/aA' est un A-module à droite noethérien. Puisque $aA' \subset E'$, nous

en concluons que A'/E' est également un A-module à droite noethérien. D'autre part puisque a est régulier on a : $a^{-n}A_n/a^{-n}A_n \cap A' \simeq A_n/A_n \cap a^{n+1}A' = A_n/A_{n+1}$.
Comme $a^{n+1} \in A_{n+1}$ et que a^{n+1} est un élément régulier, nous voyons que A_{n+1} est un idéal à droite essentiel de A. Puisque A_{n+1} contient un diéal bilatère non nul nous pouvons conclure en utilisant le théorème 2.2 que A_n/A_{n+1} est un A-module à droite artinien. Ainsi A'/aA' est aussi un A-module artinien. C'est donc bien un module de longueur finie.

<u>Théorème 3.2.</u> : Soit A un anneau premier essentiellement borné et de dimension de Krull égale à 1. Si A' est un "sur-anneau" de A, A' est un anneau noethérien à gauche et à droite de dimension de Krull égale à 1.
On a donc $A \subset A' \subset Q$, $A' \neq Q$. Ainsi on peut considérer Q comme un anneau de fractions de A'. D'après [3] nous pouvons dire que G-dim $A'_{A'} < +\infty$. D'autre part si E' est un idéal à droite essentiel de A', on sait d'après le lemme 3.1. que A'/E' est un A-module à droite artinien. C'est donc à fortiori un A'-module à droite artinien. Donc nous pouvons appliquer le lemme 2.1. et nous voyons que K-dim $A'_{A'} \leqslant 1$. Mais A' ne peut être artinein à droite, sinon tout élément régulier de A serait inversible dans A' et l'on aurait $A' = Q$. Donc K-dim $A'_{A'} = 1$. Symétriquement on a K-dim ${}_{A'}A' = 1$. Donc K-dim $A' = 1$.

La démosntration que établit que A' est noethérien à droite ressemble à celle qui établit que A est noethérien à droite dans l'implication (I) $\Longrightarrow$ (III) du théorème 2.2. Il suffit de montrer que tout idéal à droite essentiel E' de A' est engendré par un nombre fini d'éléments. A' possédant Q comme anneau de fractions E' contient un élément régulier c' de A' (cf[3]). L'idéal c'A' est essentiel dans A' et donc d'après le lemme 3.1. $A'/c'A'$ est un A-module à droite noethérien. Donc $A'/c'A'$ est un A'-module à droite noethérien. Cela entraîne qu'il existe des éléments $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ de E' tels que.

$$E' = e'_1A' + e'_2A' + \ldots = e'_nA' + c'A'.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S.A. Amitsur, Prime rings having polynomials identities with arbitrary coefficients, Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967), p. 470-486.

[2] P. Gabriel et R. Rentschler, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C.R. Acad. Sc. Paris, 265 (1967), p. 712-715.

[3] A.W. Goldie, The structure of prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc. 10 (1960), p.589-608.

[4] A.W. Goldie, Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc. 10 (1960), p. 201-220.

[5] B. Lemonnier, Quelques applications de la notion de dimension de Krull, Seminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1969-70.

[6] L. Lesieur et R. Croisot, Algèbre noethérienne non commutative, Memorial Sc. Math., fasc. CLIV, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[7] G. Michler, Primringe mit Krull-Dimension Eins, J. für die reine und angwandte Math. (1970), p. 366-381

[8] A. Ornstein, Rings with restricted minimum condition, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), p. 1145-1150.

[9] G. Renault, Dimension de Krull des anneaux et ensembles ordonnés, Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1969-70.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 19 du 4 mai 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX PREMIERS DE DIMENSION DE KRULL EGALE A 1.

d'après G. MICHLER (suite).

Par M. DJABALI.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

IV - Dimension de Krull des anneaux héréditaires.

D'après un résultat de AUSLANDER et BUCHSBAUM, si A est un anneau commutatif noethérien tel que gl-dim A = n, alors K-dim A = n. On sait que ce résultat n'est plus vrai pour un anneau non commutatif [7]. Dans ce paragraphe on va montrer que si A est un anneau noethérien à droite et à gauche, héréditaire à droite et à gauche (donc de dimension globale inférieure ou égale à 1) et si de plus A est semi-local alors K-dim A $\leqslant$ 1.

Définition : Soit A un anneau et soit R son radical de Jacobson. On dit que A est semi-local si R est intersection d'un nombre fini d'idéaux bilatères maximaux.

Lemme 4.1 : Soit A, un anneau premier, semi-local et de dimension de Krull égale à 1. A est essentiellement borné, si et seulement si A n'est pas quasi-simple.

D'après le théorème 2.2, on sait que A est noethérien à gauche et à droite. Si A n'est pas quasi-simple, son radical de Jacobson R n'est pas nul. En effet les idéaux bilatères maximaux de A ne sont pas nuls. Ce sont donc des idéaux (à droite) essentiels. Or une intersection finie d'idéaux essentiels est un idéal non nul.

Supposons donc que A ne soit pas quasi-simple. Soit E un idéal à droite essentiel. Posons $X_p = E + R^p$. Les X_p forment donc une suite décroissante d'idéaux à droite. D'autre part E contient un élément régulier c de A. Nous supposons naturellement que E n'est pas égal à A et donc que $cA \neq A$. Alors les idéaux $c^n A$ forment une suite strictement décroissante d'idéaux à droite. Come K-dim $A_A = 1$, il existe un entier h tel que K-dim $c^h A/c^{h+1} A = 0$. Comme $c^h A/c^{h+1} A \simeq A/cA$, on en déduit que A/cA est un A-module à droite artinien. Comme les idéaux X_p sont tous compris entre A et cA, on en déduit qu'il existe un entier k tel que $X_k = X_{k+1}$. Alors $E + R^k = E + R^{k+1}$. On vérifie immédiatement que $E + R^k = E + (E+R^k)R$. Le lemme de Nakayama nous montre alors que $E + R^k = E$. Ceci prouve que $R^k \subset E$. Comme A est premier, on a $R^k \neq 0$. On voit bien que E contient un idéal bilatère non nul.

Réciproquement supposons que A soit essentiellement borné. Si tout idéal à droite ou à gauche essentiel est égal à A, cela veut dire en particulier que pour tout élément régulier c, $cA = Ac = A$. Donc tout élément régulier est inversible dans A. A est égal à son anneau de fractions (à gauche et à droite). Donc A est un anneau simple et l'on a K-dim A = 0. Ceci est exclu. On voit donc que A possède des idéaux bilatères propres non nuls et on en déduit que A n'est pas quasi-simple.

Définition : Soit A un anneau possédant un anneau de fractions (à droite) Q. On appelle idéal fractionnaire à droite de Q un sous ensemble I de Q qui vérifie les conditions suivantes :

(I) $I A = I$

(II) I contient un élément régulier de Q.

(III) il existe un élément régulier c de Q tel que $c I \subset A$.

Définition : Soit A un anneau possédant un anneau de fractions (à droite) Q. Nous dirons qu'un idéal bilatère B de A est inversible (dans Q) s'il existe un idéal fractionnaire bilatère B' tle que $B'B = BB' = A$.

Définition : Nous dirons qu'un anneau A est héréditaire (à droite) si tout idéal à droite de A est un A-module à droite projectif.

Dans toute la suite, les termes noethérien, artinien ou héréditaire employés sans autre précision voudront dire nothérien, artinien ou héréditaire à droite et à gauche.

Lemme 4.2 : Soit A un anneau premier, noethérien et héréditaire. Soit M un idéal bilatère de A maximal. Si M est inversible dans l'anneau de fractions de A, A/M est un anneau simple.

A/M étant un anneau premier, il suffit de montrer que A/M est un anneau artinien à droite. Soit donc $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ une suite décroissante d'idéaux à droite qui tous contiennent M. Posons

$X_i' = \{x \in Q,\ x X_i \subset A\}$. Il est clair que X_i' est un idéal fractionnaire à gauche de Q qui contient A. Alors on a les inclusions

$$M \subset X_i' M \subset X_i' X_i \subset A.$$

On voit immédiatement que $X_i' M$ et $X_i' X_i$ sont des idéaux bilatères de A. On a donc ou bien $X_i' M = M$ ou bien $X_i' X_i = A$. Appelons M' l'inverse de M. Si l'on a $X_i' M = M$, on en déduit en multipliant à droite cette égalité par M' que $X_i' = A$ et donc que $X_i' X_i = A$. Eliminons le cas où pour un certain i $X_i = M$, cas dans lequel le résultat est tout de suite prouvé. Il reste alors que pour tout i $X'_i X_i = A$.

De plus, on voit que $X'_1 \subset X'_2 \subset \ldots \subset X'_i \subset \ldots \subset M'$.

Alors, $MX'_1 \subset MX'_2 \subset \ldots \subset MX'_i \subset \ldots \subset MM' = A$.

Pour tout i MX'_i est un idéal à gauche de A. A étant noethérien, il existe un entier s tel que $MX'_s = MX'_i$, $\forall i \geqslant s$.

Comme M est inversible, on en déduit que

$$X'_s = X'_i, \ \forall i \geqslant s.$$

Alors

$$A = X'_s X_s = X'_{s+1} X_s$$

Rappelons que M qui est un idéal bilatère non nul de A, contient un élément régulier c. Donc $X'_{s+1} . c \subset A$. Cela nous permet d'affirmer que en tant que module à gauche X'_{s+1} est isomorphe à un idéal à gauche de A. Comme A est héréditaire, X'_{s+1} est un A-module à gauche projectif. D'après le lemme 3.8 de [9], il existe des éléments $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ de X'_{s+1} et des éléments $x_1, \ldots, x_k$ de X_{s+1} tels que $1 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + x_k\beta_k$.

On voit donc que $1 \in X_{s+1} X'_{s+1}$. Alors, on peut écrire

$$X_{s+1} = X_{s+1} A = X_{s+1} X'_{s+1} X_s \supset X_s.$$

On a donc

$$X_{s+1} = X_s.$$

On verrait ainsi que

$$X_i = X_s, \ \forall i \geqslant s.$$

Lemme 4.3 ; Soit A un anneau premier, semi-local, héréditaire et noethérien. Alors les propositions suivantes sont équivalentes

(I) les idéaux bilatères maximaux de A sont inversibles dans l'anneau de fractions Q de A.

(II) A est un anneau principal à droite et à gauche essentiellement borné.

Montrons que (II) implique (I). Si M est un idéal bilatère non nul, M est un idéal à droite (ou à gauche) essentiel. Tout élément qui engendre M comme idéal à droite (resp. comme idéal à gauche) est un élément régulier de A. Donc d'après les résultats de [6] chap. 3, on peut écrire : $M = cA = Ac$. De plus c est inversible dans Q et l'on a $c^{-1}A = Ac^{-1}$. Donc si l'on pose $M' = c^{-1}A$, M' est un idéal fractionnaire de Q et on a $M'M = MM' = A$.

Montrons maintenant que (I) implique (II). Soient $M_1, M_2, \dots, M_n$ les idéaux bilatères maximaux de A. On a $R = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$. Comme chaque idéal M_i est inversible dans Q, on a $M_i M_j = M_j M_i = M_i \cap M_j$ (cf. [6] chap. 6). Alors $R = M_1 . M_2 \dots M_n$. On en déduit que R est inversible. D'autre part $A/R \simeq A/M_1 \oplus A/M_2 \oplus \dots \oplus A/M_n$, puisque les M_i sont maximaux.

Comme d'après le lemme 4.2 A/M_i est un anneau simple, on voit que A/R est un anneau semi-simple.

Maintenant toujours en appliquant les résultats de [6] chap. 6, nous pouvons encore écrire

$$A/R^2 = A/M_1^2 \oplus \dots \oplus A/M_n^2$$

A/M_1^2 est un anneau dont le radical de Jacobson est M_1/M_1^2. Comme c'est un anneau noethérien et que $A/M_1^2 \;/\; M_1/M_1^2 \simeq A/M_1$ est un anneau simple, nous voyons que A/M_1^2 est un anneau artinien. Soit X un idéal à droite de A tel que $M_1^2 \subset X \subset M_1$ avec $M_1^2 \neq X$. Posons $C = XM_1'$, M_1' étant l'inverse de M_1. On a alors $X = CM_1$. Alors d'après le th. 2.3 de [6] p. 128, on voit que A/M_1^2 est un anneau principal à droite et à gauche. On en déduit que A/R^2 est un anneau principal à gauche et à droite. On verrait de la même manière que pour tout entier p, A/R^p est un anneau principal à droite et à gauche. Nous allons montrer qu'il en est de même pour A.

Considérons d'abord le cas d'un idéal à gauche X tel que pour un certain entier p, $R^p \subset X$. L'anneau A/R^{p+1} étant principal, nous pouvons dire qu'il existe $x_p \in X$ tel que : $X = Ax_p + R^{p+1}$. Maintenant nous voyons que $R^{p+1} \subset RX$. Donc nous pouvons écrire $X = Ax_p + RX$. Le lemme de Nakayama nous montre que $X = Ax_p$ et donc que X est monogène. Ceci dit pour montrer qu'un idéal à gauche quelconque X est monogène, il suffit de montrer que tout idéal à gauche essentiel est monogène. En effet si X est un idéal et si C est un complément de X, $X \oplus C$ étant principal X le sera aussi. Soit donc X un idéal à gauche essentiel. Nous venons de voir que pour tout entier P l'idéal $X + R^p$ était principal. Nous poserons donc : $X + R^p = A\, y_p$. X étant essentiel dans A contient un élément régulier c : nous écrirons $c = \alpha_p\, y_p$. Remarquons que c étant régulier l'annulateur à gauche de α_p doit être nul. Maintenant puisque $A\, y_{p+1} \subset A\, y_p$ nous pouvons écrire : $y_{p+1} = \beta_p\, y_p$. Les éléments y_p sont des éléments réguliers puisqu'ils engendrent des idéaux essentiels. Dans ces conditions nous avons : $c = \alpha_{p+1}\, y_{p+1} = \alpha_{p+1}\, \beta_p\, y_p$ $y_p = \alpha_p\, y_p$. Donc $\alpha_{p+1}\, \beta_p = \alpha_p$. On voit donc que $\alpha_p\, A \subset \alpha_{p+1}\, A$. A étant noethérien à droite il existe un entier q tel que $\alpha_q\, A = \alpha_{q+1}\, A$. On peut alors écrire $\alpha_{q+1} = \alpha_q\, \gamma_q$. Mais α_q étant régulier à droite est régulier (cf. [2]). On en déduit que $\gamma_q\, \beta_q = 1$ et donc que $y_q \in A\, y_{q+1}$. Ainsi $X + R^q = X + R^{q+1}$. On peut écrire $X + R^q = X + R(X+R^q)$. En utilisant encore une fois le lemme de Nakayama, on voit que $X + R^q = X$. Ceci prouve d'une part que X est monogène et d'autre part que $R^q \subset X$. Ainsi X est essentiellement borné.

Remarque : La démonstration de ce lemme telle qu'elle a été établie par G. Michler consistait à montrer que l'anneau $\hat{A} = \varprojlim A/R^p$ était un anneau principal. Celle que nous donnons montre qu'un anneau noethérien premier (ou semi-premier) tel que pour tout entier p, $p \geqslant 1$, A/R^p soit un anneau principal à gauche est également principal à gauche.

Lemme 4.4 : Soit A un anneau noethérien, premier, semi-local et héréditaire. Supposons que A possède k idéaux bilatères maximaux. Soit P un idéal bilatère maximal idempotent. Considérons l'anneau $T = \mathrm{End}_A(P)$ où P est considéré comme un A-module à droite. Alors T est un anneau noethérien, premier, semi-local et héréditaire. De plus T possède $k-1$ idéaux bilatères maximaux.

Soient $M_1, M_2, \dots, M_k$ les idéaux bilatères maximaux de A. Supposons que l'on ait $P = M_1$. Montrons pour commencer que $PR = PM_2 \cap \dots \cap PM_k$. Comme P est un idéal à droite projectif de type fini il existe des éléments $x_1, \dots, x_s$ et des homomorphismes $\rho_1, \dots, \rho_s$ de P dans A tels que tout élément x de P s'écrive sous la forme : $x = x_1\,\rho_1(x) + \dots + x_s\,\rho_s(x)$. Si $x \in PM_2$, on voit facilement que $\rho_1(x), \dots, \rho_s(x)$ sont des éléments de M_2. Maintenant comme P est idempotent on voit que $\rho_1(x), \dots, \rho_s(x)$ sont des éléments de P. Ainsi on voit que si $x \in PM_2 \cap \dots \cap PM_k$, $\rho_1(x), \dots, \rho_s(n)$ sont des éléments de $P \cap M_2 \cap \dots \cap M_k$, c'est-à-dire des éléments de R. Ainsi on voit que $x \in PR$ d'où l'égalité annoncée. Remarquons que l'on a $A = M_2 + M_3 \cap \dots \cap M_k$ d'où $P \subset PM_2 + PM_3 \cap \dots \cap PM_k$ et des inclusions analogues en remplaçant M_2 par $M_3, \dots, M_k$. On déduit de tout ceci que $P/PR \simeq P/PM_2 \oplus \dots \oplus P/PM_k$ et donc que :

$$\mathrm{Hom}(P, P/PR) \simeq \mathrm{Hom}(P, P/PM_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hom}(P, P/PM_k).$$

Maintenant toujours parceque P est projectif, on voit facilement que

$$\mathrm{Hom}(P, P/PR) \simeq \mathrm{Hom}(P,P)/\mathrm{Hom}(P,PR)$$

Or d'après le corollaire 2,5 de [12] $\mathrm{Hom}(P,PR)$ est le radical de Jacobson de l'anneau $\mathrm{Hom}(P,P)$. Comme P estprojectif et possède un système de générateurs ayant s éléments, P est isomorphe (comme module à droite) à un sous-module facteur dans le module libre $A^s = A_A \oplus \dots \oplus A_A$ (s fois). Appelons A_s l'anneau des matrices carrées d'ordre s à coefficients dans A. P est isomorphe à un sous-module image de A^s par un idempotent e de A_s. En considérant A^s comme un A_s module à gauche on peut écrire : $P \simeq e\,A^s$ et aussi : $T \simeq e(A_s)e$. Si l'on pose $M_i^s = M_i \oplus \ldots \oplus M_i$ (s fois) on voit facilement que PM_i est isomorphe à e M_i^s. Nous appellerons $(M_i)_s$ l'idéal bilatère de A_s constitué par les matrices à coefficients dans M_i. Dans ces conditions on voit que $\mathrm{Hom}(e\,A^s, e\,A^s/e\,M_i^s)$ est isomorphe à $e(A_s)e/e(M_i)_s e$. Comme M_i est un idéal bilatère maximal de A, $e(M_i)_s e$ est un idéal bilatère maximal de $e(A_s)e$. Ainsi nous voyons que $\mathrm{Hom}(P,P/PM_i)$ est un anneau simple. On en déduit que le quotient de T par son radical de Jacobson est un anneau possédant k-1 idéaux bilatères maximaux dont l'intersection est nulle. Alors T est semi-local et possède k-1 idéaux bilatères maximaux.

D'autre part, nous pouvons dire d'après le lemme 1 de [5] que $T = \{x \in Q,\ xP \subset P\}$. Alors T est un anneau compris entre A et Q. T est donc un ordre de Q ce qui nous permet de dire que T est un anneau premier. D'après le lemme 4.4 de [11] T est un anneau noethérien et héréditaire.

Définition (cf. [11]) : Soit A un ordre dans Q. A est dit ordre d'Asano dans Q, si les idéaux bilatères fractionnaires de Q forment un groupe.

Définition (cf. [6]) : Soient A et A' deux ordres dans Q. A et A' sont dits équivalents s'il existe des éléments réguliers de Q q_1, q_2, q_3, q_4 tels que : $q_1\, A\, q_2 \subset A'$ et $q_3\, A'\, q_4 \subset A$.

Lemme 4.5 : Soit A un anneau premier semi-local, noethérien et héréditaire. Si A n'est pas quasi-simple A est un ordre essentiellement borné dans son anneau de fractions. De plus A est équivalent à un ordre d'Asano.

Si A ne possède qu'un seul idéal bilatère maximal non nul A est un ordre d'Asano essentiellement borné d'après la prop. 2.3. de [9].

Raisonnons par récurrence. Supposons le lemme vérifié pour tous les entiers inférieurs ou égaux à k-1. Supposons que A possède k idéaux bilatères maximaux $M_1, \ldots, M_k$. Si tous ces idéaux sont inversibles dans Q d'après le lemme 4.2., A est un anneau principal (à droite et à gauche) essentiellement borné. On en déduit facilement que tous les idéaux bilatères de A sont inversibles et que A est un ordre d'Asano.

Or le lemme 5 de [5] nous dit que tout idéal bilatère maximal de A est soit inversible, soit idempotent. Il ne nous reste donc plus qu'à examiner le cas où l'un au moins des M_i, par exemple M_1 est idempotent. Posons $M_1 = P$. D'après le lemme 4.4, on peut appliquer à T = End P, l'hypothèse de récurrence. On voit donc que T est un ordre dans Q qui est équivalent à un ordre d'Asano A'. Comme P contient un élément régulier c, on voit que $Tc \subset TP = P \subset A$. Donc T est équivalent à A. Ainsi A est équivalent à A'.

Montrons pour finir que A est essentiellement borné, à gauche par exemple. Soit E un idéal à gauche essentiel de A. E contient un élément régulier d. On voit facilement que P.d considéré comme idéal à gauche de A est essentiel dans A. En effet, il est isomorphe à P, donc de même dimension de Goldie que P. Mais P étant essentiel dans A a même dimension de Goldie que A. Ainsi P.d a même dimension que A, il est donc essentiel dans A. Mais comme T considéré comme A-module à gauche est une extension essentielle de A, on voit que P.d comme A-module à gauche est essentiel dans T. Mais comme T.P = P, on voit que P.d est un idéal à gauche de l'anneau T. C'est donc un idéal à gauche essentiel de T. Comme T est essentiellement borné, P.d contient un idéal bilatère non nul B de T. Mais B est aussi un idéal bilatère de A.

Théorème 4.6 : Soit A un anneau premier, semi-local, noethérien et héréditaire.

Alors :

a) si A n'est pas quasi-simple le radical de Jacobson R de A est inversible dans l'anneau de fractions Q de A.

b) A est de dimension de Krull inférieure ou égale à 1.

Si A est quasi-simple et si E est un idéal à droite essentiel, on a K-dim $A/E = 0$ d'après le théorème 4.3 de [11]. Donc d'après le lemme 2.1, on a K-dim $A_A \leqslant 1$.

Si A n'est pas quasi-simple, R n'est pas nul : nous avons déjà vu pourquoi. Supposons que A possède un seul idéal bilatère maximal. D'après le théorème 3.4 de [11] K-dim $A/E = 0$ pour tout idéal à droite essentiel E. Donc d'après le lemme 2.1., K-dim $A_A \leqslant 1$. Ainsi K-dim $A \leqslant 1$. De plus d'après la proposition 2.3 de [9], A est un ordre d'Asano dans Q. Ceci prouve que R est inversible dans Q.

Nous allons maintenant établir le théorème par récurrence sur l'entier k. Supposons le théorème vrai pour tous les entiers inférieurs ou égaux à $k-1$. Supposons que A possède k-idéaux bilatères maximaux $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

Si tous les idéaux M_i sont inversibles dans Q, le lemme 4.2 nous dit que A est un anneau principal à droite et à gauche : nous avons déjà vu qu'un tel anneau était un ordre d'Asano. Ainsi R est inversible. D'autre part si B est un idéal bilatère non nul, il est engendré (comme idéal à droite ou comme idéal à gauche) par un élément régulier. Donc en transposant des démonstrations classiques dans le cas des anneaux principaux intègres nous voyons que A/B est un anneau artinien. Alors le théorème 2.2. nous montre que K-dim $A \leqslant 1$.

Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où l'un au moins des idéaux M_i, par exemple M_1, n'est pas inversible. Posons $P = M_1$. Nous avons déjà vu que P était idempotent et que $T = \mathrm{End}(P)$ était un anneau premier semi-local, noethérien et héréditaire et que de plus T possédait $k-1$ idéaux bilatères maximaux. Ainsi, on a k-dim $T \leqslant 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Soit M un idéal bilatère maximal inversible. Posons $N = \bigcap M^h$. Nous allons montrer que $N = 0$. Supposons en effet que l'on ait $N \neq 0$. Comme M d'après le lemme 5 de [5] n'est pas idempotent nous avons $N \neq M$. Nous allons montrer que N est un idéal premier. Considérons deux idéaux bilatères X et Y de A tels que $XY \subset N$. Supposons que $X \not\subset N$. Donc il existe un entier p, $p \geqslant 0$, tel que $X \subset M^p$, $X \not\subset M^{p+1}$ (nous posons $M^0 = A$). Soit M' l'idéal inverse de M. Il est clair que $(M')^p X \subset A$ et que $(M')^p X \not\subset M$. Supposons qu'il existe un entier q tel que $Y \subset M^q$, $Y \not\subset M^{q+1}$. Nous pouvons dire également que $Y(M')^q \subset A$ et que $Y(M')^q \not\subset M$. En ecrivant que $XY \subset M^{p+q+1}$, on voit que $(M')^p X . Y(M')^q \subset M$. Comme M est premier on doit avoir $Y(M')^q \subset M$ et on aboutit ainsi à une contradiction. On en déduit que $Y \subset N$ et ainsi N est bien un idéal premier.

Maintenant comme P considéré comme idéal à droite est projectif, nous pouvons écrire comme dans la démonstration du lemme 4.4 : $T \simeq e(As)e$. Nous allons voir que $e(Ns)e$ est un idéal premier de $e(As)e$. En effet, il est facile de voir que Ns est un idéal premier de As. Soient X et Y deux idéaux bilatères de $e(As)e$ tels que $XY \subset e(Ns)e$. On remarque que $eXe = X$ et $eYe = Y$. Supposons que $X \not\subset e(Ns)e$. Alors on voit que $X \not\subset Ns$. Comme $XY \subset Ns$, on voit que $Y \subset Ns$ ce qui revient à dire que $Y \subset e(Ns)e$.

Nous allons montrer que $e(Ns)e = 0$. En effet si $e(Ns)e \neq 0$, comme K-dim $T \leqslant 1$, le théorème 2.2 nous dit que l'anneau $e(As)e/e(Ns)e$ est un anneau artinien. Comme c'est aussi un anneau premier c'est un anneau simple. Ceci prouve que $e(Ns)e$ est un idéal bilatère maximal de $e(As)e$. Nous en déduisons que $e(Ns)e = e(Ms)e$. Or si l'on a $e \notin Ns$ on a $Ns = Ms$: il suffit de se rappeler que $e(Ns)e$ est un idéal premier. Mais alors on aurait $M = N$ ce qui est exclu. Si l'on a $e \in Ns$, on a $e(As)e = e(Ns)e$ puisqu'alors l'idéal $e(Ns)e$ contient l'élément unité de l'anneau $e(As)e$. Mais alors on a $N = A$ ce qui est aussi exclu. Nous sommes donc obligés de supposer $e(Ns)e = 0$. Comme l'anneau As est un anneau premier nous en déduisons que $Ns = 0$ et donc que $N = 0$.

D'après le lemme 5 de [5], un idéal bilatère maximal est soit idempotent, soit inversible. Supposons alors que $M_1, M_2, \ldots, M_t$ soient idempotents et que $M_{t+1}, \ldots, M_k$ soient inversibles.
Posons $B = M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Comme les idéaux $M_{t+1}, \ldots, M_k$ sont inversibles on voit en appliquant les résultats de [6], chap. 6, que $M_u B = B.M_u$ pour tout entier u compris entre t+1 et k. On voit aussi que

$$R = M_1 \cap \ldots. \cap M_t \cap M_{t+1} \cap \ldots \cap M_k = B.M_{t+1}. \ldots. .M_k.$$

Pour $i = 1,2,\ldots,t$ posons : $T_i = \{x \in Q,\ xM_i \subset M_i\}$ et $S_i = \{y \in Q,\ M_i.y \subset M_i\}$. Comme nous l'avons déjà vu T_i est isomorphe à l'anneau $\mathrm{End}(M_i)$, M_i étant considéré comme un A-module à droite. D'autre part d'après le lemme 1.9 de [4] on a $T_i \neq S_i$.
Posons maintenant $C_i = \{z \in Q, z\ T_i \subset A\}$. Comme A, d'après le lemme 4.5, est essentiellement borné C_i est d'après le théorème 2 de [5] un idéal bilatère idempotent et on a $T_i = \{v \in Q,\ C_i v \subset C_i\}$. Or C_i est contenu dans un idéal bilatère maximal M_{k_i}. Si M_{k_i} n'était pas idempotent il serait inversible et on aurait $\bigcap (M_{k_i})^h = 0$. Mais comme C_i est idempotent on a $C_i = C_i^2 = \ldots = C_i^h$. Donc on a $C_i \subset \bigcap (M_{k_i})^h$ et on devrait alors avoir $C_i = 0$. Cela aurait pour conséquence que $T_i = Q$. Cela voudrait donc dire que pour tout élément q de Q, $qM_i \subset M_i$. Or M_i contient un élément régulier c_i. Si nous prenons $q = c_i^{-1}$ nous voyons que M_i devrait contenir l'élément unité de A, ce qui est exclu. Ainsi nous pouvons affirmer que M_{k_i} est idempotent. Ceci montre d'abord que $1 \leqslant k_i \leqslant t$. D'autre part d'après le lemme 3.3 de [10] et le théorème 2 de [5] A est un sous-anneau maximal de T_i. En appliquant le théorème 2 de [5] on voit que $C_i = M_{k_i}$ et donc que $T_i = S_{k_i}$. Nous venons ainsi de démontrer le résultat suivant : pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant t$, il existe un entier k_i, $1 \leqslant k_i \leqslant t$, tel que $C_i = S_{k_i}$.

D'autre part, si l'on avait $T_i = S_{k_i} = S_{k'_i}$ pour deux entiers k_i et k'_i différents nous pourrions affirmer en utilisant le théorème 2 de [5] que $M_{k'_i} = M_{k_i}$, c'est pourquoi nous pouvons dire que l'application $i \to k_i$ est une permutation de l'ensemble $\{1,2,\dots,t\}$. En utilisant la démonstration de la proposition 4.4 de [10] on voit que B est un idéal bilatère inversible de A. Ainsi a) est démontré.

Montrons amintenant que b) est bérifié. Soit $R(T)$ le radical de Jacobson de l'anneau $T = \mathrm{End}(M_1) = \mathrm{End}(P)$. Nous avons déjà vu que l'on avait $R(T) = \mathrm{Hom}(P,PR)$. On a ainsi $R(T).R \subset R(T).P \subset P.R$. Comme nous avons montré que R était inversible nous en déduisons que $R(T) \subset P$. Soit G l'un quelconque des idéaux $M_2, \dots, M_k$. Alors on a $P + G = A$ (rappelons que l'on a posé $P = M_1$). Donc :

$$R(T) \subset R(T).(P+G) \subset R(T).P + R(T).G \subset R+G = G.$$

Comme $R(T) \subset P$ on voit que $R(T) \subset R$. Dans la démonstration du point a), on avait montré que $C_1 = \{z\in Q,\ zT \subset A\}$ était un idéal bilatère maximal et idempotent. Si l'on avait $C_1 = M_1$ on aurait $S_1 = T$ ce qui est exclu comme nous l'avons vu. On a manifestement $C_1T = C_1$ et l'on en déduit que $C_1T \not\subset P$. Ainsi il existe un élément $d \in C_1$ tel que $d_1T \not\subset P$. Posons $\bar{T} = T/R(T)$, $\bar{A} = A/R(T)$, $\bar{P} = P/R(T)$. Soit $\bar{d}$ l'image canonique de d dans $\bar{A}$. On peut écrire :

$$\bar{d}.\bar{T} \subset \bar{A} \text{ et } \bar{d}.\bar{T} \not\subset \bar{P}.$$

Comme d'après a) K-dim $T \leqslant 1$, $\bar{T}$ est un anneau semi-simple (th. 2.2). Dans $\bar{T}$, l'idéal à droite $\bar{d}.\bar{T}$ est donc somme directe d'idéaux à droite simples : puisque $\bar{d}.\bar{T} \not\subset \bar{P}$ l'un au moins de ces idéaux n'est pas contenu dans $\bar{P}$. Cela revient à dire que $\bar{d}.\bar{T}$ contient un idempotent primitif $\bar{e}$ qui n'appartient pas à $\bar{P}$. Alors on a $\bar{e}.\bar{T} \subset \bar{A} \subset \bar{T}$. On en déduit que $\bar{e}.\bar{T}.\bar{e} = \bar{e}.\bar{A}.\bar{e}$. On sait que $\bar{e}.\bar{T}.\bar{e}$ est un corps. On en déduit que $\bar{e}.\bar{A}.\bar{e}$ est un corps non contenu dans $\bar{P}$. On voit alors facilement que le socle de l'anneau $\bar{A}/\bar{P}$ n'est pas nul et donc qu'en fait $\bar{A}/\bar{P}$ est un anneau simple : en effet dans un anneau semi-premier on vérifie facilement que tout idéal (à droite) simple est facteur direct et plus généralement en transposant la méthode employée dans le cas des anneaux réguliers on montre que toute somme directe finie d'idéaux simples est un idéal facteur direct. Ainsi un anneau noethérien à droite premier dont le socle n'est pas nul est égal à son socle.

Mais alors A/P qui est isomorphe à $\bar{A}/\bar{P}$ est un anneau simple. Ainsi nous venons de voir que A/M_1, A/M_2, ..., A/M_t sont des anneaux simples. Maintenant pour $t+1 \leqslant u \leqslant k$, l'anneau A/M_u est également un anneau simple : il suffit d'appliquer le lemme 4.2.

Soit D un idéal premier non nul de A. Nous allons montrer que D est un idéal bilatère maximal. Si tous les idéaux bilatères maximaux de A sont inversibles nous avons déjà remarqué que A/D était un anneau artinien, donc un anneau simple puisque c'est un anneau premier. Cela prouve le résultat. Supposons donc qu'il existe au moins un idéal bilatère maximal non inversible donc idempotent. Soit P cet idéal. Posons encore $T = \{x \in Q, xP \subset P\}$ et $C = \{v \in Q, vT \subset A\}$. On a déjà vu que C était un idéal bilatère maximal et idempotent de A et que l'on avait $C \neq P$. Donc en fait on peut toujours supposer que l'on a $M \neq P$. Comme on l'a vu à plusieurs reprises on peut écrire $T \simeq e(As)e$. L'anneau As étant premier on peut écrire $0 \neq e(Bs)e \subset e(Ms)e \subset e(As)e$: de plus les idéaux $e(Ms)e$ et $e(Bs)e$ sont des idéaux premiers de $e(As)e$. Mais d'après le lemme 4.4, on a K-dim $e(As)e \leqslant 1$. En appliquant le théorème 2.2, on voit que $e(Bs)e$ est égal à $e(Ms)e$. Comme on l'a déjà vu on a $e \notin e(Bs)e$ et cela permet de voir que $Bs = Ms$. Ainsi on a $B = M$.

L'anneau A étant noethérien, tout idéal premier non nul étant maximal et ainsi le quotient de A par tout idéal premier non nul étant artinien le théorème 2.2 nous montre que K-dim $A \leqslant 1$.

Théorème 4.7 : Soit A un anneau premier, semi-local, noethérien et héréditaire. Alors on a K-dim $A \leqslant 1$.

Supposons que A ne soit pas artinien. D'après le théorème 2.2 de [10] on a la situation suivante. Soit N le radical nilpotent de A. Alors on peut écrire $A = N + B$, B étant un sous-anneau de A semi-premier, semi local, noethérien et héréditaire. De plus on a $B \cap N = 0$ et A est un B-module à droite de type fini. Soit A_B la structure de B-module à droite définie sur A. D'après [1] on a $K\text{-dim } A_B \leqslant K\text{-dim } B_B$. Mais d'après le théorème 4.3. de [8] B est produit d'un nombre fini d'anneaux $B_1, B_2, \ldots, B_n$ où les B_i sont des anneaux premiers, semi-locaux, noethériens et héréditaires. D'après le théorème 4.6 on a $K\text{-dim } {B_i}_{B_i} \leqslant 1$. On a par exemple $B_1 \simeq B / B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$. On en déduit toujours d'après [1] que $K\text{-dim } B_B = \sup(K\text{-dim } {B_1}_{B_1}, K\text{-dim } B_2 \oplus \ldots \oplus B_n)$. On voit donc par récurrence que $K\text{-dim } B_B \leqslant 1$. On en déduit que $K\text{-dim } A_B \leqslant 1$. On en déduit aussitôt que $K\text{-dim } A_A \leqslant 1$.

V - Dimension de Krull et lemme d'Artin-Rees.

Lemme 5.1 : Soit A un anneau premier, semi-local, noethérien et héréditaire. Si R est le radical de Jacobson de A, on a $\bigcap R^p = 0$.

En effet, d'après le théorème 4.6., R est inversible. Soit R' son inverse. On a d'abord $R(\bigcap R^p) \subset (\bigcap R^p)$. Mais il est clair que l'on a également $R'(\bigcap R^p) \subset (\bigcap R^p)$ et donc que l'on a : $(\bigcap R^p) \subset R(\bigcap R^p)$. On a donc l'égalité $R(\bigcap R^p) = (\bigcap R^p)$. Le lemme de Nakayama nous montre donc que $\bigcap R^p = 0$.

Théorème 5.2 : Soit A un anneau premier, semi-local, noethérien et héréditaire. Soit R le radical de Jacobson de A. Si X est un idéal à droite quelconque de A, il existe un entier $t > 0$ tel que : $X \cap R^n = (X \cap R^t)R^{n-t}$ pour tout entier $n \geqslant t$.

Précisons d'abord que nous posons $R^0 = A$. Nous allons donc démontrer ce théorème que l'on peut appeler théorème d'Artin-Rees. Soit X un idéal à droite et soit C un idéal à droite complément de X. Par application du lemme 4.5, nous savons que A est essentiellement borné : donc $X \oplus C$ contient un idéal bilatère non nul B. En appliquant les théorèmes 4.6. et 2.2., nous voyons que A/B est artinien. Mais l'image canonique de R dans A/B est un idéal dont tous les éléments sont quasi-réguliers. Or on sait que dans un anneau artinien un tel idéal est nilpotent. Cela revient à dire qu'il existe un entier $t \geqslant 0$, tel que : $R^t \subset B \subset X \oplus C$.

Pour chaque entier $n \geqslant t$ écrivons : $R^n = R^t . R^{n-t} = [(X \oplus C) \cap R^t].R^{n-t}$

Alors, nous avons : $X \cap R^n \subset [(X \oplus C) \cap R^t].R^{n-t}$.

Donc tout élément $x \in X \cap R^n$ peut se mettre sous la forme :

$$x = \Sigma(x_i + c_i)\, r_i,\ x_i \in X,\ c_i \in C,\ r_i \in R^{n-t}.$$

Or on a $x - \Sigma x_i r_i \in X$ et $\Sigma c_i r_i \in C$. Il est donc clair que l'on a $x - \Sigma x_i r_i = 0$ et donc $x \in X.R^{n-t}$.

Donc en fait, nous avons $X \cap R^n \subset X.R^{n-t}$.

Nous savons d'autre part que R est inversible. Ainsi si R' est l'inverse de R :

$$(X \cap R^n)\ (R')^{n-t} \subset X.$$

Mais on avait aussi $(X \cap R^n)\ (R')^{n-t} \subset (X \oplus C) \cap R^t$

On en déduit que : $(X \cap R^n)\ (R')^{n-t} \subset X \cap R^t$.

On a donc $X \cap R^n \subset (X \cap R^t).R^{n-t}$

D'autre part il est clair que : $(X \cap R^t).R^{n-t} \subset X \cap R^n$.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire : Tout idéal est fermé pour la topologie R-adique. Ce résultat est conséquence du théorème 5.3. de [3] qui dit que la proposition "tout idéal à droite est fermé" est équivalente à la proposition "pour tout idéal à droite le théorème d'Artin-Rees est vérifié".

BIBLIOGRAPHIE.

Cette bibliographie complète celle que nous donnons à la fin de la conférence n° 18 du même séminaire.

[1] P. GABRIEL et R. RENTSCHLER - Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C.R. Acad. Sc. Paris, 265, 1967, p. 712-715.

[2] A.W. GOLDIE : Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc., 10, 1960, p. 201-220.

[3] A.W. GOLDIE : Localisation in non commutative noetherian rings, J. of Algebra 5, 1967, p. 89-105.

[4] M. HARADA : Hereditary orders, Trans. Amer. Math. Soc., 107, 1963, p. 272-290.

[5] M. HARADA : On generalization of Asano's maximal orders in a ring, Osaka, J. of Math., 1, 1964, p. 61-68.

[6] N. JACOBSON : Theory of rings, Amer. Math. Soc. Surveys n° 2, New York, 1943.

[7] A.V. JATEGAOUKAR : A counter-example in ring theory and homological algebra, J. of Algebra, 12, 1969, p. 418-440.

[8] L. LEVY : Torsion-free and divisible modules over non-integral domains, Canada, J. of Math., 15, 1963, p. 132-151.

[9] G. MICHLER : Asano orders, Proc. London Math. Soc., 19, 1969, p. 421-443.

[10] G. MICHLER : Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings, J. of Algebra, 13, 1969, p. 327-344.

[11] J.C. ROBSON : Non commutative Dedekind rings, J. of Algebra, 9, 1968, p. 249-265.

[12] A. ROSENBERG and D. ZELINSKY : Annihilators, Portugaliae Math., 20, 1961, p. 53-65.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 20 du 11 mai 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SUR LES ANNEAUX TELS QUE TOUT MODULE SIMPLE SOIT INJECTIF

d'après J.H. COZZENS

par Guy RENAULT

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Définition :

Un anneau A est un V-anneau à droite s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Tout A-module simple à droite est injectif.

(ii) Tout idéal à droite est l'intersection des idéaux à droite maximaux qui le contiennent.

(iii) Le radical de tout module à droite est nul.

Les V-anneaux commutatifs sont les anneaux réguliers (ou absolument plats). (Théorème de Kaplansky) ; l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie est un anneau régulier, ce n'est pas un V-anneau à gauche. [5] [2].

J.H. COZZENS donne des exemples d'anneaux intègres principaux, quasi-simples qui sont des V-anneaux.

I. Rappel sur les anneaux de polynômes :

Soient K un corps (non nécessairement commutatif), D une dérivation de K, σ un isomorphisme de K dans K.

On définit l'anneau de polynômes $K[X, \sigma, D]$ de la façon suivante : c'est l'ensemble des polynômes formels $\sum_{0}^{n} a_i x^i$ muni de la relation :

$$Xa = \sigma(a)\, X + D(a).$$

$K[X, \sigma, D]$ est un anneau intègre, principal à gauche et à droite (car il existe une division euclidienne à gauche et à droite). [4].

On appelle Corps différentiel universel, un Corps de caractéristique 0 muni d'une dérivation D, tel que l'équation

$$P(x, D(x), \ldots, D^{(n)}(x)) = 0$$

admette une solution dans K, quel que soit le polynôme non constant $P(X)$, élément de $K[X_1, \ldots, X_n]$; de plus toute équation différentielle linéaire homogène en D a une solution non triviale. L'existence de tels corps est démontré dans [3].

II. Les exemples :

Exemple I.

Soit K un corps différentiel universel, muni d'une dérivation D. On pose

$$R = K[X, 1_K, D]$$

Théorème 1 :

L'anneau R vérifie les propriétés suivantes :

a) R est un anneau intègre principal à gauche et à droite.

b) R est un anneau quasi-simple.

c) R est un V-anneau à droite.

d) Il existe une seule classe de modules simples à droite.

La démonstration utilise les lemmes suivants :

Lemme 2 :

Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ un élément de R avec $a_n = 1$. Il existe alors des éléments α_i de K tels que $f = \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)$.

La démonstration se fait par récurrence sur le degré de f. On détermine des éléments $b_i = 2 \leqslant i \leqslant n$ et α tels que l'on ait :

$$f = (\underline{X}^{n-1} + b_2 \underline{X}^{n-2} + \dots + b_n)\ (X - \alpha).$$

En identifiant et en éliminant les $\underline{b_i}$, on obtient une équation du type

$$P(x, \underline{D}(x), \dots, \underline{D}^{(n)}(x) = 0.$$

Par hypothèse une telle équation admet une solution

Conséquences : les éléments irréductibles de R sont de degré 1 et les idéaux à droite maximaux sont de la forme $(X - \alpha)R$.

Lemme 3 :

Le module simple $V_\alpha = R\ /\ (X - \alpha)R$ est divisible (donc injectif) quel que soit $\alpha \in K$.

Compte tenu du lemme 2, pour montrer que V_α est divisible, il suffit de prouver que l'équation

$$* \qquad v = w(x - \beta) \qquad v \neq 0, \qquad v \in V_\alpha$$

admet une solution dans V_α.

Soit $f(X)$ un représentant de v modulo $(X - \alpha)R$.

$$f(X) = (X - \alpha)\, g(X) + h \qquad \text{avec } h \in K,\ h \neq 0.$$

La résolution de l'équation * résultera de la propriété suivante :

Soit $h \in K$, il existe deux éléments a, b de K tels que l'on ait :

$$** \qquad a(X - \beta) + (X - \alpha)\, b = h$$

a et b sont solutions des équations :

$$a+b = 0\ ;\ D(b) - b(\alpha+\beta) = h$$

Cette dernière équation admet une solution dans K qui est est un corps différentiel universel.

On a finalement $\quad f(X) \equiv h \equiv a(X - \beta) \quad (\text{mod } X - \alpha)$.

R étant un anneau principal, la divisibilité entraîne l'injectivité.

<u>Lemme 4</u> :(Faith)

Soit R un V-anneau à droite, noethérien à droite et premier. Alors R est quasi-simple.

Soit I un idéal bilatère propre de R d'après le théorème de Goldie I contient un élément non diviseur de zéro s. Si P est un idéal à dtoite maximal contenant I, le module injectif $V = R/P$ est divisible, d'où $V^s = V = 0$ et il y a contradiction.

Les assertions a), b), c) du théorème résultant de ce qui précède, démontrons d).

Soient α, β deux éléments distincts de K. Il existe deux éléments non nuls a, b de K tels que l'on ait :

$$a(X - \alpha) = (X - \beta)\bar{b}.$$

il suffit en effet de résoudre l'équation homogène

$$D(b) + b(\alpha - \beta) = 0$$

qui admet une solution b non triviale.

L'application de $R / (X - \alpha)R$ sur $R / (X - \beta)R$, définie par $r + (X - \alpha)R \longrightarrow a\,r + (X - \beta)R$, est l'isomorphisme cherché.

Exemple II.

Soient Ω la clôture algébrique $\mathbb{Z}/2.\mathbb{Z}$; ρ l'automorphisme $x \longrightarrow x^2$ de Ω. On considère l'anneau.

$$R = \Omega[X, \rho, 0].$$

R est un anneau intègre principal à gauche et à droite. Les seuls idéaux bilatères de R sont les idéaux engendrés par X^k $k \geqslant 0$. Cette propriété se vérifie de la façon suivante : soit I un idéal bilatère de R et P(X) un générateur de l'idéal à gauche I ; quel que soit $K \in \Omega$. Il existe $a \in \Omega$ tel que :

$$a\,P(X) = P(X)\,k.$$

en identifiant et en utilisant la relation $Xk = k^2X$, on montre facilement que $P(X) = X^k$ à un élément inversible près.

Si S est l'ensemble multiplicatif formé des X^k, $k > 0$, on considère l'anneau de quotients $R_S = S^{-1}R$. C'est l'ensemble des fractions rationnelles $\frac{P(X)}{X^k}$ muni des lois suivantes :

$$\frac{P(X)}{X^k} + \frac{Q(X)}{X^k} = \frac{P(X) + Q(X)}{X^k}$$

$$\frac{P(X)}{X^i} \times \frac{Q(X)}{X^j} = \frac{(\rho^j\,P(X)) \times Q(X)}{X^{i+j}}$$

(Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\qquad \rho^j\, P(X) = \sum_{k=0}^{n} \rho_j(a_k)\, X^k$)

R_S est un anneau principal à gauche et à droite quasi-simple.

Lemme 5 :

Soit $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un élémment de R, avec $a_n = 1$.
Il existe des éléments α_i de Ω tels que $f = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

On procède comme dans la démonstration du lemme 2, et on utilise le fait que Ω est algèbriquement clos.

Conséquences : Les idéaux à droite maximaux de R_S, sont les idéaux $(X - \alpha)R_S$, avec $\alpha \in \Omega - \{0\}$.

Lemme 6 :

Le module simple $V_\alpha = R_S/(X - \alpha)R_S$ est divisible (donc injectif). Quel que soit $\alpha \in \Omega - \{0\}$.

Soient h, β, α des éléments de Ω avec $\alpha \neq 0$. On a :

$$h = -a^2 X(X - \beta) + (X - \alpha)\left(aX - \frac{h}{\alpha}\right)$$

avec a racine de l'équation

$$a^2\, \beta^2 + a\, \alpha + \frac{h^2}{\alpha^2} = 0$$

En reprenant les mêmes considérations que dans le lemme 3, on montre que V_α est divisible, donc injectif, car R_S est principal.

De la même façon, on prouverait qu'il n'y a qu'une classe de modules simples.

En résumé :

Théorème 7 :

L'anneau R_S vérifie les conditions suivantes :

a) R_S est un anneau intègre principal à gauche à droite.

b) R_S est quasi-simple.

c) R_S est un V-anneau à droite.

d) Tous les modules à droite simples sont isomorphes.

III. Quelques conséquences :

Nous allons utiliser le travail de COZZENS pour éclairer certains problèmes posés :

Problème 1 : Caractériser les anneaux tels que tout module à droite quasi-injectif soit injectif.

Proposition 8 :

Soit A un anneau tel que tout module à droite quasi-injectif soit injectif. Alors A est un V-anneau noethérien à droite.

Cela résulte du fait que tout module semi-simple est injectif donc Σ-injectif. En utilisant [2] p. 130, il suffit donc de se limiter au cas où A est un V-anneau quasi-simple noethérien à droite. Les anneaux commutatifs solutions du problème 1 sont les anneaux semi-simples.

Problème 2 : Caractériser les anneaux A tels que pour tout module à droite M le sous-module singulier soit facteur direct de M.

Si A est commutatif, le problème est résolu : ce sont les anneaux réguliers A dont le socle S est essentiel et tels que A/S soit semi-simple [6].

Proposition 9 :

Soit A un anneau intègre principal à gauche et à droite, de corps de fractions K. Alors si A est un V-anneau à droite les modules à droite injectifs et indécomposables sont K et les modules simples.

Il est bien connu que si I est un idéal à droite non nul, le module A/I est artinien à droite, si I est de plus un idéal à droite $\bigcap$-irréductible A/I contient un module simple S qui est injectif et A/I = S d'où l'assertion.

<u>Corollaire 10</u> :

Un anneau intègre principal à gauche et à droite qui est de plus un V-anneau à droite est solution des problèmes 1 et 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.H. COZZENS : Homological properties of the rings of differentiel polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. Vol 76, nº 1 Janvier 1970.

[2] C. FAITH : Lectures on injectives modules and quotient rings, Springer-Verlag (1967)

[3] E.R. KOLCHINE : Galois Theory of differentials fields. Amer. J. Math. 75 (1953) 753-824.

[4] O. ORE : Theory of non-commutative polynomials.

[5] G. RENAULT : Seminaire d'algèbre non commutative. Orsay 1968-69 exposé nº 7

[6] F. SANDIMIERSKI - V.C CAFETORIS : The singular submodule splits, Off. J. of Algebra 10, 149-165 (1968).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 21 du 18 mai 1970.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

QUELQUES APPLICATIONS DE LA DIMENSION DE KRULL..

Par B. LEMONNIER

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

§ 1. Dimension de Krull et dimension de Goldie. (notées K-dim et G-dim) (cf. [1] et [6].

Si $M = \bigoplus_{1}^{n} S_i$ où les S_i sont simples, G-dim M = n et K-dim M = 0.

Si K est un corps commutatif et $A = K[X_1, \ldots, X_n]$, G-dim A = 1 et K-dim A = n. Dans le cas fini ces deux dimensions ne sont donc pas comparables sans hypothèses supplémentaires, mais on a la

Proposition 1. Pour un A-module M, G-dim M = ∞ implique K-dim M = $+\infty$.

Démonstration. Nous voulons montrer que tout module qui est somme directe d'une infinité de modules non nuls a une dimension de Krull > n pour tout entier n. C'est vrai pour n = 1. Supposons l'avoir montré pour n et soit $X = \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i$, $X_i \neq 0$.

Considérons une suite croissante de parties N_j de N telles que card $(N_{j+1} \setminus N_j) = \infty$;

par exemple on prendra N_0 ensemble des entiers impairs, $N_{j+1} \setminus N_j$ ensemble des entiers divisibles par 2^{j+1} et non par 2^{j+2}, $j > 0$. La suite des sous-modules $Y_j = \bigoplus_{i \notin N_j} X_i$ est strictement décroissante ; par hypothèse de récurrence K-dim $Y_j/Y_{j+1} > n$ donc K-dim $X > n+1$.

Exemple : Si Q désigne le corps des nombres rationnels, K-dim$_Z Q = +\infty$. En effet $Q/Z \simeq \bigoplus C(p^\infty)$, somme directe étendue aux entiers premiers p, $C(p^\infty)$ groupe quasi-cyclique relatif à p.

<u>Proposition 2.</u> Si A est un anneau tel que le groupe $(A,+)$ soit divisible, K-dim ${}_A A < +\infty$, A contienne un élément régulier à droite, alors A est unitaire.

Démonstration. Le groupe $(A,+)$ est sans torsion ; en effet si $na = 0$, $n \in N$, $a \in A$; d régulier à droite $\in nA$ donc $ad = 0$ et $a = 0$. Ainsi A est un Q espace vectoriel, ${}_A A_Q$ est un bimodule avec la propriété $\forall a \in A$, $(Aa)\, Q \subset Aa$. On en déduit que $I = \{q \in Q \mid dq \in Ad\}$ est un idéal de Q, donc $I = 0$ ou Q.

Si $I = 0$, le treillis des idéaux à gauche A compris entre Ad et $Ad + dQ$ est isomorphe au treillis des sous-groupes de Q ; puisque K-dim ${}_A A < +\infty$ et K-dim ${}_Z Q = +\infty$ c'est que $I \neq 0$. Donc $I = Q$: il existe $\varepsilon \in A$ tel que $d = d\,1 = \varepsilon d$, d'où $a\varepsilon = a$ $\forall a \in A$.

$A(\varepsilon a - a) = 0$, si $\varepsilon a - a \neq 0$ les idéaux à gauche A entre 0 et $(\varepsilon a - a)Q$ sont en bijection croissante avec les sous-groupes de Q, contredisant K-dim ${}_A A < +\infty$. Ainsi $\varepsilon a = a$; ε est élément neutre de A. (cf. [3]).

<u>Proposition 3</u>. Pour un anneau A unitaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est artinien à gauche ;

2) A est noethérien à gauche et tout A-module à gauche a une dimension de Krull égale à 0 ou $+\infty$;

3) énoncé 2) limité aux modules cycliques.

Démonstration 1 ==> 2, R radical de A est nilpotent, donc M étant un A-module donné il existe un plus petit n tel que $R^{n+1} M = 0$, les quotients de la suite $M \supset RM \supset \dots \supset R^{n+1} M = 0$ sont semi-simples ; s'ils sont tous de longueur finie K-dim M = 0, si l'un d'eux est de longueur infinie K-dim M = $+\infty$ (utiliser P. 1).

2 ==> 3, évident.

3 ==> 1, Si K-dim ${}_A A = +\infty$ (noter que ${}_A A$ est un module cyclique) il suffit de considérer un idéal à gauche I maximal pour la propriété K-dim $A/I = +\infty$ pour aboutir à une absurdité. Donc K-dim ${}_A A = 0$.

Considérons le procédé du à H. BASS qui, à un module M fait correspondre la suite $s_\alpha(M)$ suivante : $s_1(M)$ = socle de M ; $s_{\alpha+1}(M) / s_\alpha(M) = s_1(M/s_\alpha(M))$; $s_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} s_\beta(M)$ si α est un ordinal limite. M est dit d'élévation définie quand il existe un ordinal α pour lequel $s_\alpha(M) = M$. L'élévation de M, notée e(M), est le plus petit de ces α.

Lemme. Un module M est d'élévation définie si et seulement si tout quotient non nul de M a un socle non nul.

Démonstration. Le "si" est évident. Soit $N \subset M$, soit β le plus petit ordinal tel que $s_\beta(M) \not\subset N$ alors β n'est pas ordinal limite et $s_{\beta-1}(M) \subset N$, le noyau de l'épimorphisme canonique $M/s_{\beta-1}(M) \to M/N$ est N/M ; par construction de β le module semi-simple $s_\beta(M)/s_{\beta-1}(M)$ n'est pas annulé par cet épimorphisme, donc M/N a un socle non nul, ce qui démontre le "seulement si".

Lemme. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, $e(M)$ est définie si et seulement si $e(M')$ et $e(M'')$ sont définies.

Proposition 4. Si A est un anneau tel que, pour tout idéal à gauche I essentiel dans A, le module A/I soit artinien alors

1) $G\text{-dim}\ {}_A A < \infty \iff K\text{-dim}\ {}_A A = 1$;

2) tout module M extension essentielle de son sous-module singulier $J(M)$ est d'élévation définie (notée $e(M)$) ;

3) si de plus on suppose A noethérien à gauche, alors $e(M)$ définie implique $e(M) < \omega$ (M A-module à gauche, ω plus petit ordinal limite), $\bigcap_{n=1}^{\infty} R^n = 0$ où R désigne le radical de Jacobson de A, enfin les seuls injectifs indécomposables sont les enveloppes injectives de simples et les composantes de l'enveloppe injective de ${}_A A$.

Démonstration 1) $\Longleftarrow$ d'après P. 1 ; $\Longrightarrow$ exposé de M. DJABALI sur les résultats de MICHLER.

2) Il suffit de montrer que $J(M)$ et $M/J(M)$ sont d'élévations définies. Ce qui résulte du fait que si $0 \neq x$ est essentiel dans ${}_A A$, le module cyclique Ax est artinien.

3) Supposons $e(M) > \omega$: il existe $m \in M \setminus s_\omega(M)$. Puisque $s_{n+1}(M) / s_n(M) < M / s_n(M)$ la suite des idéaux à gauche $I_n = \{a \in A \mid am \in s_n(M)\}$ est strictement croissante. Ainsi ${}_A A$ noethérien exige $e(M) < \omega$.

Soit ${}_A S$ un A-module simple, $E(S)$ son enveloppe injective ; en utilisant 2) on voit que $e(E(S))$ est définie. Mais $R^n\, s_n(E(S)) = 0$ donc $\bigcap\limits_1^\infty R^n . E(S) = 0$. Puisque la somme directe des $E(S)$ étendue à l'ensemble des types de simples est un cogénérateur, elle est fidèle, d'où $\bigcap\limits^\infty R^n = 0$.

Enfin si ${}_A E$ est un injectif indécomposable ou bien $J(E) \neq 0$ et E contient un simple, ou bien $J(E) = 0$, pour $e \in E$, $e \neq 0$, il existe un idéal a gauche co-irréductible C tel que $(0 \cdot . e) \bigcap C = 0$ donc C plongeable dans E.

Exemple. Un anneau semi-premier, noethérien à gauche, de dimension de Krull à gauche égale à 1, vérifie les hypothèses précédentes. (Utiliser le théorème de Goldie).

§. 2. Anneaux intègres.

Proposition 5. Soit A un anneau, dont l'annulateur à droite n'est pas nul, tel que K-dim $A/I <$ K-dim ${}_A A$ pour tout idéal à gauche non nul, alors A est un domaine de Ore à gauche.

Démonstration. Supposons $a \neq 0$ alors $Aa \neq 0$ donc K-dim $A/Aa <$ K-dim ${}_A A$.
Si $0 \cdot . a \neq 0$, K-dim $Aa <$ K-dim A, ce qui contredit la première inégalité. Donc A est intègre. Enfin $I_1 \bigcap I_2 = 0$ avec I_1 et $I_2 \neq 0$ conduit aussi a une contradiction : puisque ${}_A A \to A/I_1 \oplus A/I_2$ on a K-dim ${}_A A <$ sup (K-dim A/I_1, K-dim A/I_2) $<$ K-dim ${}_A A$.

Proposition 6. Pour un anneau A dont l'annulateur à droite n'est pas nul et dont la K-dimension à gauche est n, A est intègre si et seulement si K-dim $A/I <$ K-dim $_A A$ pour tout I idéal à gauche $\neq 0$.

Démonstration. Soit $I \neq 0$ $r \in I$; $Ar^p/Ar^{p+1} \simeq A/Ar$ d'où K-dim $A/Ar < n$ et à fortiori K-dim $A/I < n$.

Proposition 7. Si un anneau contient une chaîne de n+1 idéaux complétement premiers ses dimensions de Krull à gauche et à droite sont $> n$.

Démonstration. Il suffit de se limiter à K-dim $A < +\infty$ et de vérifier que, si A est intègre et P un idéal complétement premier $\neq 0$, K-dim $A/P <$ K-dim A. (démonstration de T.6).

§ 3. Chaînes d'idéaux complétement premiers.

Théorème 8. Soit A un anneau noethérien à gauche, et unitaire, si tout idéal à gauche est bilatère alors 1° K-dim $_A A > n$ si et seulement si il existe une chaîne de n+1 idéaux complétement premiers ;

2° tout idéal premier est complétement premier.

Démonstration. 1° D'après P.7, il reste à prouver "seulement si".

Si K dim $_A A = +\infty$, soit I maximal pour la propriété K dim $A/I = +\infty$, A/I est intègre (P.5) ; il existe $I_n \supset I$ tel que K dim $A/I_n \geqslant n$, soit P_0 maximal parmi les I_n. Si K dim $A = m \geqslant n$ on prend P_0 maximal parmi les I tel que K dim $A/I = m$. Dans tous les cas P_0 est complétement premier et K dim $A/P_0 = m \geqslant n$. Considérant A/P_0, on est ramené à supposer A intègre. Alors K dim $A = m$ et T.6 montrent qu'il existe $I \neq 0$ tel que K dim $A/I = m-1$; soit P_1 maximal parmi ces I, P_1 est complétement premier et K dim $A/P_1 = m-1$. Le procédé se poursuit et donne la chaîne voulue.

2° Il suffit de montrer que si, en plus des hypothèses, A est premier alors A est intègre, c'est-à-dire (T.2.1 de [5]) réduit. Pour le voir remarquer que $(Aa)^n = Aa^n$.

Lemme 9. Si α est un ordinal non dénombrable, la déviation (c.f. [6]) de $[0,\alpha]$ muni de l'ordre opposé est infinie.

Démonstration. Soit ω_0 le plus petit ordinal limite ; définissons ω_n par récurrence : $\omega_n = \omega_{n-1} + \omega_{n-1} + \dots$; il est clair que la déviation de $[0,\omega_n]$ muni de l'ordre opposé est n+1 et que card ω_n est dénombrable. Donc $[0,\omega_n] \subset [0,\alpha]$ pour tout n.

Donnons un exemple montrant que les idéaux premiers d'un anneau noethérien à gauche peuvent ne pas vérifier la condition minimale.

Exemple. On définit les puissances transfinies à gauche d'un idéal I par $I^\beta = I.I^{\beta-1}$ si β non limite, $I^\beta = \bigcap_{\beta'<\beta} I^{\beta'}$ si β est limite. A.V. Jategaonkar donne dans [2] la construction, pour tout ordinal α, d'un anneau A unitaire, intègre, principal à gauche, dont les idéaux à gauche sont bilatères et totalement ordonnés et tel que $(R = \mathrm{Rad}\, A)$ $R^{\alpha} \neq 0$. La bijection décroissante $\beta \in [0,\alpha] \to R^{\beta}$ montre que, si card α est non dénombrable, on a K dim ${}_{A}A = +\infty$ (L. 9). Le treillis des idéaux étant totalement ordonné, il existe alors une suite infinie strictement décroissante d'idéaux complétement premiers (utiliser la condition noethérienne et T.8).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GOLDIE, A.W. Semi-prime rings with maximum doncition Proc. London Math. Soc. 10 1960 pp 201-220.

[2] JATEGAONKAR, A.V. A counter-example in ring theory and homological algebra Jour. of Algebra 12 pp 418-440 (1969).

[3] LEMONNIER, B. C.R. Acad. Sc. Paris t. 268 pp 1519-1522.

[4] ORNSTEIN, A.J. Rings with restricted minimum condition Proc. Amer. Math. Soc. 19 1968 1145-1150.

[5] RENAULT, G. Anneaux réduits non commutatifs Jour. Math. Pures et Appl. 46 1967 pp 203-214.

[6] RENTSCHLER, R. GABRIEL, P. Sur la dimension des anneaux et des ensembles ordonnés. C.R. Acad Sc. Paris t. 265 pp 712-715.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 22 du 25 mai 1970

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SOUS-ANNEAUX DE CERTAINS ANNEAUX ARTINIENS OU NOETHERIENS.

d'après David EISENBUND (1).

par Annie CAILLEAU

-:-:-:-:-:-:-:-:-

On montre que sous certaines conditions sur un anneau S, les propriétés pour S, d'être semi-simple, artinien ou noethérien se transportent à un sous-anneau R de S.

Dans ce qui suit, on considèrera deux anneaux unitaires R et S, tels que R soit un sous-anneau de S et tels que S soit un R-module à gauche engendré par un nombre fini n d'éléments qui commutent avec les éléments de R. Cette dernière condition se traduit par le fait qu'il existe un épimorphisme de R-bimodules de R^n sur S, et par suite pour tout R-module à gauche M un monomorphisme de R-modules à gauche de $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ sur $\mathrm{Hom}_R(R^n,M) \simeq M^n$.

Théorème 1.

Si Q est un R-module à gauche tel que $\mathrm{Hom}_R(S,Q)$ soit un S-module à gauche injectif, alors Q est injectif.

Soient E l'enveloppe injective de Q, u l'injection canonique de $\mathrm{Hom}_R(S,Q)$ dans $\mathrm{Hom}_R(S,E)$; on a lediagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(S,Q) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(S,E) \arrow[d] \\ Q^n \arrow[r, "i^n"] & E^n \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des monomorphismes, et où i est l'injection canonique de Q dans E. v étant un R-monomorphisme essentiel, il en est de même de u, u est donc un S-monomorphisme essentiel, et par suite un épimorphisme.

D'autre part, E étant injectif, le morphisme canonique φ de $\mathrm{Hom}_R(S,E)$ dans Hom(R,E) est surjectif, et la commutativité du diagramme.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(S,Q) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(S,E) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Hom}_R(R,Q) = Q \arrow[r, "i"] & \mathrm{Hom}_R(R,E) = E \end{tikzcd}$$

montre que i est surjectif, et par suite que Q = E.

Un anneau A semi-simple étant caractérisé par le fait que tout A-module à gauche est injectif, on déduit du théorème 1 le résultat suivant.

<u>Théorème 2.</u>

Si S est semi-simple, R est semi-simple.

Supposons maintenant que S soit noethérien à gauche et montrons qu'il en est de même de R ; il suffit de montrer que tout somme directe $\bigoplus_{k\in K} Q_k$ de R-modules injectifs Q_k est injective, or S étant de type fini on a

$$\mathrm{Hom}_R(S \oplus Q_k) \cong \bigoplus_k \mathrm{Hom}_R(S, Q_k)$$

et $\mathrm{Hom}_R(S, \bigoplus_k Q_k)$ est donc S-injectif comme somme directe de modules injectifs sur l'anneau noethérien S ($\mathrm{Hom}_R(S,Q_k)$ étant évidemment S-injectif). Il en résulte que $\bigoplus_k Q_k$ est un R-module injectif.. D'où le résultat.

Théorème 3.

Si S est noethérien à gauche (resp. à droite) R est noethérien à gauche (resp. à droite).

Montrons enfin que si S est artinien à gauche, R est artinien à gauche. Soit N le radical de Jacobson de S, S/N est un anneau semi-simple engendré sur le sous-anneau $R/R \cap N$ par un nombre fini d'éléments que commutent avec les éléments de $R/R \cap N$, donc (théorème 2), $R/R \cap N$ est semi-simple. Comme d'autre part R est noethérien à gauche (théorème 3) et $R \cap N$ nilpotent, R est artinien à gauche.

Théorème 4.

Si S est artinien à gauche (resp. à droite) R est artinien à gauche (resp. à droite).

En particulier si S est un module de type fini sur son centre Z et s'il est noethérien à gauche (resp . artinien à gauche), Z est noethérien (resp. artinien) et S est donc noethérien à droite (resp. artinien à droite), ceci d'après la réciproque évidente des théorèmes 3 et 4.

<u>Théorème 5</u>.

Un anneau S, de type fini sur son centre, noethérien (resp. artinien) à gauche, est noethérien (resp. artinien) à droite.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) David EISENBUND, Subrings of Artinian and Noetherian Rings, Math. Ann. 185, 247-249 (1970).