UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

203

Sur la condition de Carleson dans la boule unité de C^m

Anna Maria Mantero

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

Sur la condition de Carleson dans la boule unité de C^m

Anna Maria Mantero

INTRODUCTION.

Soit D le disque unité de $\mathbb{C}$ et λ la mesure de Lebesgue sur le bord ∂D de D. Soit $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans D. On rappelle que pour $0 < p < \infty$, $H^p(D)$ est l'adhérence de $H^\infty(D)$ dans $L^p(\lambda)$.

Soit alors $\{z_j \; ; \; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans D ; L. Carleson [1], pour résoudre un problème d'interpolation associé à $H^\infty(D)$ a démontré et utilisé le théorème suivant :

THEOREME. *Soit $\{z_j \; ; \; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans D. Alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes* :

(a) *Il existe une constante c_p positive, $0 < p < \infty$, telle que pour toute fonction $f \in H^p(D)$ on a*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |f(z_j)|^p (1 - |z_j|^2) \leq c_p \|f\|_{H^p}.$$

(b)
$$\sup_k \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq k}} \frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - z_j \bar{z}_k|^2} < +\infty.$$

On va généraliser ce théorème au cas de la boule unité B de $\mathbb{C}^m$. Définissant les $H^p(B)$, $0 < p < \infty$ de manière analogue, on va démontrer le théorème suivant :

THEOREME. Soit $\{z_j; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans B. Alors (a) et (b) sont équivalents :

(a). Il existe une constante $c_p > 0$, $0 < p < \infty$ telle que pour toute fonction $f \in H^p(B)$ on ait

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |f(z_j)|^p (1-|z_j|^2)^m \leq c_p \|f\|_{H^p(B)}$$

(b) $$\sup_k \sum_{j\in\mathbb{N}}^{j\neq k} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\langle z_j, z_k\rangle|^2} \right)^m < +\infty .$$

Utilisant le théorème de Hörmander [2], il suffit de démontrer que la mesure

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{z_j} (1-|z_j|^2)^m \tag{1}$$

où δ_{z_j} est la masse de Dirac au point z_j, est une mesure de Carleson si et seulement si la condition (b) est satisfaite.

§1. NOTATIONS.

1. On appelle λ la mesure de Lebesgue normalisée sur le bord ∂B de B et, si E est un ensemble mesurable de ∂B, on notera $|E| = \lambda(E)$ sa mesure.

2. A chaque z dans B on associe l'ensemble suivant, pour une constante c fixée :

$$E_z^c = \{\zeta \in \partial B : |1-\langle z,\zeta\rangle| \leq c(1-|z|^2)\}.$$

On remarque que $|E_z^c|$ est équivalente à $(1-|z|^2)^m$, l'équivalence étant uniforme en z.

On utilisera les propriétés suivantes des ensembles $\{E_z^c ; z\in B\}$. [2].

(i) Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que si $E_z^c \cap E_{z'}^c \neq \emptyset$ et $|z| \geq |z'|$, alors $E_{C_1 z}^c \supset E_{z'}^c$ avec $z, z' \in B$.

(ii) Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $z \in B$ on ait :

$$|E_{C_1 z}^c| \leq C_2 |E_z^c|.$$

3. Soit $\{z_j ; j\in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans B. On dira que la mesure μ associée par (1) est une mesure de Carleson si pour tout $c > 0$ suffisamment grand, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout z dans B, on ait :

$$\mu(E_z^c) \leq K |E_z^c|.$$

On voit facilement que cela équivaut à : il existe $K > 0$ tel que pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$ on ait [3]:

$$\sum_{j\in J} |E_{z_j}^c| \leq K \Big| \bigcup_{j\in J} E_{z_j}^c \Big|.$$

§ 2. PREUVE DU THEOREME.

(a) $\Rightarrow$ (b). D'après le théorème de Hörmander [2], μ est une mesure de Carleson Donc on a, pour $c > 0$ suffisamment grand, qu'il existe une constante positive K telle que, pour tout J fini

$$\sum_{j\in J} |E_{z_j}^c| \leq K \Big| \bigcup_{j\in J} E_{z_j}^c \Big|. \tag{2}$$

Fixons k. On définit B_k^c :

$$B_k^c = \{z\in B : |1 - \langle z, z_k\rangle| \leq c(1 - |z_k|^2)\}.$$

La condition (2) entraîne que pour $J = \{j \in \mathbb{N} \ ; \ z_j \in B_k^c\}$ on a :

$$\sum_{j \in J} (1 - |z_j|^2)^m \leq K(1 - |z_k|^2)^m .$$

Donc

$$\sum_{j \in J} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1 - \langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m \leq \sum_{j \in J} \left(\frac{1-|z_j|^2}{1 - |z_k|^2} \right)^m \leq K.$$

Supposons maintenant que $z_j \notin B_k^c$. On définit pour $i \in \mathbb{N}$, $B_i = B_k^{2^i c}$. En explicitant les calculs on obtient :

$$\sum_{z_j \notin B_k} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{z_j \in B_{i+1} \setminus B_i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-|z_k|^2)^m}{\left[2^i c(1-|z_k|^2)\right]^{2m}} \sum_{z_j \in B_{i+1} \setminus B_i} (1 - |z_j|^2)^m$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{c^{2m}} \frac{1}{2^{2im}(1-|z_k|^2)^m} (2^{i+1})^m c^m (1 - |z_k|^2)^m =$$

$$= \frac{1}{c^m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m}{2^{im}} < +\infty.$$

Donc (b) est prouvé.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fixons la constante c. Pour prouver cette implication on considère un ensemble fini J d'entiers positifs. Sans perte de généralité, on peut supposer que $J = \{1, 2, \ldots, N\}$ et que les ensembles $\{E_{z_j}^c \ ; \ j \in J\}$ sont numérotés selon leur mesure décroissante

$$|E_{z_1}^c| \geq |E_{z_2}^c| \geq \ldots \geq |E_{z_N}^c|.$$

1. On fait d'abord l'hypothèse supplémentaire que tout ensemble $E_{z_j}^c$ est contenu dans l'ensemble $E_{z_1}^c$. Dans ce cas, on obtient que :

$$+\infty > \sup_{k} \sum_{j\neq k} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\langle z_j,z_k\rangle|^2}\right)^m \geq$$

$$\geq \sum_{j\in J}^{j\neq 1} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\langle z_j\,,\,z_1\rangle|^2}\right)^m \geq$$

$$\geq \frac{1}{c^{2m}} \sum_{j\in J}^{j\neq 1} \left(\frac{1-|z_j|^2}{1-|z_1|^2}\right)^m .$$

Donc
$$\sum_{j\in J}^{j\neq 1} (1-|z_j|^2)^m \leq K(1-|z_1|^2)^m .$$

2. On revient au cas général. Soit $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, $1 \leq n \leq N$ une partition de J ainsi déterminée :

$$I_1 = \left\{ j\in J \;:\; E^c_{z_1} \cap E^c_{z_j} \neq \phi \right\}.$$

Si $I_1 = J$ on s'arrête. Sinon, on appelle r_2 le plus petit entier dans J qui n'est pas dans I_1. Et on pose ensuite :

$$I_2 = \left\{ j\in J\setminus I_1 \;:\; E^c_{z_{r_2}} \cap E^c_{z_j} \neq \phi \right\}$$

$$I_n = \left\{ j\in J\setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i \;:\; E^c_{z_{r_n}} \cap E^c_{z_j} \neq \phi \right\}.$$

Considérons les points suivants : $\left\{ Z_i = C_1\, z_{r_i}\,;\; 1 \leq i \leq n \right\}$ où C_1 est donné par la condition (i) de 2, page. 3 . C'est-à-dire C_1 est choisi de façon que tous les ensembles $E^c_{z_j}$ soient contenus dans $E^c_{Z_i}$ pour $j\in I_i$. De plus, il vient

$$\text{(3)} \qquad \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j\in J}^{j\neq i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|Z_i|^2)}{|1-\langle z_j,Z_i\rangle|^2}\right)^m < +\infty.$$

En effet
$$\sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j\in J}^{j\neq i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)\,(1-|Z_i|^2)}{|1-\langle z_j,Z_i\rangle|^2}\right)^m \leqslant$$

$$\leq \sup_i \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in J}} 2^{2m} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|Z_i|^2)}{|1-\langle z_j, z_{r_i}\rangle|^2} \right)^m \leq$$

$$\leq C_2\, 2^{2m} \sup_i \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in J}} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_{r_i}|^2)}{|1-\langle z_j, z_{r_i}\rangle|^2} \right)^m < +\infty .$$

Considérons alors $\sum_{j\in J} |E^c_{z_j}|$. Ceci s'écrit

$$\sum_{j\in J} |E^c_{z_j}| = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{j\in I_i} |E^c_{z_j}| .$$

Grâce à (1) et à la propriété (3), il existe K' avec

$$\sum_{j\in I_i} |E^c_{z_j}| \leq K' |E^c_{Z_i}| .$$

Mais la propriété (ii) de 2. entraîne que

$$\sum_{j\in I_i} |E^c_{z_j}| \leq K' C_2 |E^c_{z_{r_i}}| ,$$

d'où

$$\sum_{j\in J} |E^c_{z_j}| \leq K' C_2 \sum_{1\leq i\leq n} |E^c_{z_{r_i}}| .$$

Utilisant maintenant le fait que les $\left\{ E^c_{z_{r_i}} \right\}$ sont disjoints, on obtient :

$$\sum_{j\in J} |E^c_{z_j}| \leq K' C_2 \Big| \bigcup_{1\leq i\leq n} E^c_{z_{r_i}} \Big| .$$

Donc a fortiori :

$$\sum_{j\in J} |E^c_{z_j}| \leq K \Big| \bigcup_{j\in J} E^c_{z_j} \Big| .$$

Ce qui prouve (b).

§ 3. GENERALISATIONS.

Ce théorème se généralise aisément au cadre abstrait défini par Hörmander dans [2]. Les démonstrations consistant à se ramener à des mesures de Carleson et à appliquer le théorème de Hörmander [2].

1. Soit D un domaine de classe C^∞ borné dans $\mathbb{R}^n$. A chaque point $z\in D$ assez près du bord pour qu'il n'ait qu'une seule projection ζ sur ∂D, on associe l'ensemble, pour c fixé,

$$B(z,c) = E(\zeta\ , c\rho) \cap \partial D$$

où ρ est la distance euclidienne de z à ∂D et $E(\zeta\ , c\rho)$ est la boule euclidienne de centre ζ et de rayon $c\rho$. A tout couple (z,w) dans $D\times D$ on associe la "distance" :

$$\rho(z,w) = \inf_{t\in D} \left\{ |B(t,c)| \ ;\ B(z,c) \subset B(t,c) \text{ et } B(w,c) \subset B(t,c) \right\}.$$

Soit $P_z(\zeta)$ le noyau de Poisson de D associé à la mesure d'aire λ sur ∂D. La classe des intégrales de Poisson de fonctions de $L^p(\lambda)$, $1 < p < \infty$, sera notée $H^p(D)$. Si $\{z_j\ ;\ j\in\mathbb{N}\}$ est une suite dans D on peut énoncer le

THEOREME. Les deux conditions sont équivalentes :

(a) Il existe c_p, $1 < p < \infty$ tel que $\forall f \in H^p(D)$ on a

$$\sum_j |f(z_j)|^p . |B(z_j,c)| \leq c_p \|f\|_{H^p}$$

(b) $$\sup_k \sum_{j\neq k} \frac{|B(z_j,c)| . |B(z_k,c)|}{[\rho(z_j,z_k)]^2} < +\infty .$$

2. Soit D un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^m$. A chaque point $z \in D$ de projection ζ sur ∂D on associe

$$B(z,c) = E(\zeta\ , c\rho) \cap \partial D$$

avec ρ la distance euclidienne de z à ∂D et $E(\zeta\ , c\rho)$ la boule de Hörmander [2] de centre ζ et de rayon $c\rho$. A tout couple $(z,w) \in D \times D$ on associe la "distance" :

$$\rho(z,w) = \inf_{t \in D} \left\{ |B(t,c)| : B(z,c) \subset B(t,c) \quad \text{et} \quad B(w,c) \subset B(t,c) \right\}.$$

Soit λ la mesure de Lebesgue au bord de ∂D et $H^p(\lambda)$, $0 < p < \infty$ l'adhérence dans $L^p(\lambda)$ des fonctions analytiques et bornées dans D. On a alors :

THEOREME. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe c_p, $0 < p < \infty$ tel que $\forall f \in H^p(D)$ on ait

$$\sum_j |f(z_j)|^p . |B(z_j,c)| \leq c_p \|f\|_{H^p}.$$

(b) $$\sup_k \sum_{j \neq k} \frac{|B(z_j,c)| . |B(z_k,c)|}{[\rho(z_j,z_k)]^2} < +\infty.$$

Bibliographie

[1] CARLESON, L. An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).

[2] HÖRMANDER, L. L^p estimates for (pluri-)subharmonic functions. Math. Scand. 20 (1967).

[3] VAROPOULOS, N. Sur un problème d'interpolation. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972).