UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n°76 7412

PROPRIETES TOPOLOGIQUES CONSTRUCTIVES DES ESPACES DE FONCTIONS PRESQUE PERIODIQUES

par M. MARGENSTERN

Publication mathématique d'Orsay.

INTRODUCTION.

La plupart des espaces fonctionnels de l'analyse classique sont, dans le cas métrisable, des espaces séparables. Le plus souvent, les espaces fonctionnels métriques séparables possèdent une suite dense ayant de "bonnes propriétés", en particulier des propriétés constructives. C'est ce qui permet de construire, en analyse constructive, des analogues constructifs de ces espaces fonctionnels. La méthode consiste à construire un espace métrique à partir de la suite dense du "prototype" classique de l'espace considéré, puis à le compléter par un procédé qui, formellement, rappelle le procédé classique de complétion d'un espace métrique par les suites de Cauchy. C'est ce complété constructif qu'on interprète comme l'analogue constructif de l'espace fonctionnel envisagé et qu'on utilise pour étudier les propriétés constructives de l'espace. Il importe de souligner que cette méthode ne constitue pas en fait un simple décalque de la situation classique. Dans presque tous les cas concrets, un même espace classique peut-être défini de diverses manières dont on établit classiquement l'équivalence. Constructivement, ces diverses approches peuvent être, et sont le plus souvent, non équivalentes. Il s'ouvre ainsi un éventail de possibilités qui va en s'élargissant au fur et à mesure que les notions mises en oeuvre deviennent plus complexes. Trouver un "chemin intéressant" dans le dédale des constructions possibles n'est pas chose aisée.

Les espaces métriques constructifs <u>séparables</u> ont des propriétés particulières sans équivalent dans l'analyse classique. Ainsi, tous ces espaces possèdent la propriété que tout opérateur du complété de l'espace dans un espace métrique est continu en chaque point où il est défini (voir [35] , [20] , [28]). Cette propriété, appelée <u>propriété de continuité</u>, est elle-même liée à des propriétés constructives de séparation d'ensembles disjoints.

La situation, dans le cas des espaces topologiques constructifs non-séparables est beaucoup plus complexe que dans le cas des espaces séparables et bien moins connue. La technique mise en oeuvre dans ce travail dans le cas d'espaces non-séparables particuliers, les espaces de fonctions presque périodiques, permet de donner quelques résultats sur le cas "non-séparable" dont on reparlera plus loin.

Les espaces de fonctions presque périodiques jouent un grand rôle en analyse classique et ils constituent un exemple important d'espaces fonctionnels métriques non-séparables. On ne trouve jusqu'ici, aucune trace, dans la littérature d'une tentative de "constructivisation" de ces espaces.

Dans ce travail se trouve esquissée une approche d'une théorie constructive des espaces de fonctions presque-périodiques. A partir de propriétés constructives déjà connues concernant la presque périodicité des polynômes trigonométriques (voir [11]) on obtient une démonstration simplifiée d'une version constructive comme d'un théorème du type de Kronecker au sens de [14] (voir le paragfaphe 4.2 du chapitre I). Un renforcement, en un certain sens de ce théorème du type de Kronecker (dans sa version constructive) permet de construire, par un procédé de complétion, proche dans sa forme du procédé traditionnel, des analogues constructifs des divers espaces de fonctions presque-périodiques généralisées de l'analyse classique : espace des fonctions uniformes presque-périodiques, espaces de Stépanhoff, de Weyl, de Bésicovitch (voir [1], [3],[9]) (ce procédé de complétion ainsi que les constructions préalables qui le justifient font l'objet du chapitre III). Le cas des fonctions analytiques de la variable complexe n'est pas examiné dans ce travail.

Dans l'étude des propriétés des espaces constructifs ainsi obtenus l'accent est porté essentiellement sur les propriétés topologiques. Ces espaces sont non-séparables. Ils constituent des exemples d'une classe d'espaces topologiques constructifs, plus large que la classe des espaces métriques complets séparables, classe introduite dans ce travail avec la notion de séparabilité vague locale. (voir le paragraphe 1 du chapitre II). Une des propriétés les plus marquantes des espaces topologiques localement vaguement séparables réside dans la propriété de continuité d'une large classe d'opérateurs de ces espaces dans certains espaces topologiques, en particulier des fonctions numériques définies sur ces espaces (paragraphe 1 du chapitre II). L'existence des analogues constructifs des espaces de fonctions presque-périodiques construits ici montre que la classe des espaces topologiques localement vaguement séparables contient des espaces dont certaines propriétés topologiques sont contradictoires. Ainsi, pour les analogues constructifs des espaces de Weyl et des espaces de Bésicovitch, la propriété de continuité se réduit à une propriété de constance des fonctions numériques définies sur l'espace (voir le paragraphe 3 du chapitre IV). Pour les analogues des autres espaces, l'ensemble des fonctions numériques est au contraire assez riche pour permettre d'établir une propriété de séparation constructive d'un point d'une boule fermée (voir le paragraphe 4 du chapitre IV).

Les propriétés établies dans le travail présent conduisent à un certain nombre de remarques tant au sujet des espaces constructifs de fonctions presque-périodiques qu'au sujet des espaces non-séparables. Sur le premier-point, les propriétés établies permettent d'expliquer les propriétés déjà connues au sujet des polynômes trigonométriques : l'impossibilité de définir les coefficients de Fourier et l'impossibilité de définir la norme constructivement. Elles mettent également en lumière le fait que les généralisations successives de la notion de fonction presque périodique, généralisation de Stépanhoff, puis de Weyl, puis de Bésicovitch n'ont pas la même signification du point de vue constructif que du point de vue classique et, malgré le théorème de constance des fonctions numériques sur les analogues constructifs des espaces de Weyl et de Bésicovitch, il doit être possible de développer une théorie proprement constructive des fonctions presque-périodiques contenant au moins la généralisation de Stépanhoff. Sur le second point concernant les espaces constructifs non-séparables, l'étude faite présentement fait apparaître quelques particularités de cette situation comme par exemple le rapport entre non-séparabilité et non-métrisabilité (voir le paragraphe 2 du chapitre II) et donne une technique permettant d'étudier certaines propriétés topologiques d'une classe d'espaces non-séparables, pour la première fois semble-t-il. Un résultat important réside dans le fait que la propriété de continuité n'est pas une conséquence de la séparabilité de l'espace de départ.

Ce travail se place du point de vue de l'école constructiviste de Léningrad dont les particularités sont brièvement indiquées au début du premier chapitre. L'école de Léningrad se situe dans le prolongement des travaux de A.A. Markov dont elle se sépare au niveau de l'interprétation sémantique de l'implication (voir [27] et [6]). Le lecteur familiarisé avec un point de vue constructif établi à partir des fonctions récursives ou des machines, retrouvera le principe de ce constructivisme dans celui de A.A. Markov (l'intuitionnisme introduisant certaines notions plus larges de construction).

Ce travail prolonge et approfondit notablement l'étude exposée dans [24] réalisée, en partie, au cours d'un stage que j'ai effectué à l'Institut Stéklov de Léningrad dans l'équipe du professeur Chanine.

Je suis très reconnaissant à M. Reznikoff d'avoir bien voulu prendre la direction des recherches que j'ai commencées à Léningrad et d'avoir grandement contribué par son attention et ses conseils éclairés à l'avancement de mon travail.

Je remercie le professeur Demazure et le professeur Kahane de m'avoir fait l'honneur, le premier d'être membre du Jury , le second de le présider.

Je dois au professeur Kahane une aide et un soutien continus tout au long de la réalisation de ce travail, notamment à son début. Je dois également au professeur Nicolaï Alexandrovitch Chanine une direction sûre et efficace après avoir guidé mes premiers pas dans cette voie. Qu'ils trouvent tous deux ici l'expression de toute ma gratitude.

Enfin je tiens à remercier particulièrement mon ami Victor Pétrovitch Tchernov dont l'aide m'a toujours été très précieuse.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 1.

PRELIMINAIRES.

1. La mathématique constructive selon l'école de Léningrad.

Les théories mathématiques développées par l'école constructiviste de Léningrad sont caractérisées par les traits suivants (cf. [4], [7], [27], [17]) :

1. Les seuls objets d'études sont les objets constructifs auxquels on peut appliquer l'abstraction de la réalisabilité potentielle et elle seule : l'abstraction de la réalisabilité potentielle consiste à ne considérer que l'application de processus finis aux objets constructifs en ignorant les limitations dans le temps et l'espace que comporte la réalisation pratique d'un tel processus. Ainsi l'infini n'apparaît en mathématique constructive que sous la forme d'infini potentiel.

2. La notion intuitive d' "effectivité" est identifiée, dans la théorie , à une notion précise d'algorithme, en l'occurence, la notion d'algorithme normal de A.A. Markov, ou toute autre notion équivalente.

3. Une interprétation particulière des assertions mathématiques ainsi qu'une logique particulière sont mises en oeuvre pour rester dans le cadre des objets constructifs et de l'abstraction de la réalisabilité potentielle.

La notion d'objet constructif constitue une notion primitive. Ces objets se construisent selon des règles définies à partir d' objets élémentaires qui ne sont pas modifiés par le processus de construction. Dans les théories mathématiques développées dans cet esprit, les objets constructifs se présentent comme des mots dans un certain alphabet (toujours fini).

La notion précise d'algorithme prise ici n'est pas pertinente. Ce qui est pertinent, c'est de prendre une notion de procédé constructif, que ce soit celle de fonction récursive, de machine de Turing, de calcul de Post, etc... qui toutes, comme on sait, sont équivalentes (voir [8], [16], [15], [37]). Le principe général d'équivalence de tous les procédés constructifs est énoncé dans la thèse de Church. Pour la classe des algorithmes normaux, il s'agit du principe de normalisation de A.A. Markov. Dans ce travail, techniquement parlant, on utilise la notion d'algorithme normal donnée dans [25]. Le lecteur qui n'est pas familiarisé avec cette notion peut considérer, d'après ce qu'on vient de dire, que les algorithmes utilisés sont des machines de Turing (ou donnés par des fonctions semi-récursives), ce qui lui permettra de saisir les raisonnements fondés sur les mécanismes de l'éxécution du travail d'un algorithme.

Pour la mise en oeuvre de l'interprétation constructive des énoncés et leur traitement par la logique constructive, on utilise un langage formel, adapté à la théorie développée. Le point de départ est constitué par un alphabet fini (qui dépend de la théorie mathématique traitée) sur lequel on définit les mots (assemblages quelconques de lettres). On définit les variables, les termes, les formules élémentaires du langage (dans lesquelles entrent les aspects mathématiques de la théorie considérée), puis les formules, qui sont les mots "bien formés" d'une sorte d'alphabet élargi. On donne enfin des axiomes (logiques et mathématiques) et les règles de déduction permettant de formuler, de proche en proche, les théorèmes de la théorie.

Les axiomes logiques utilisés sont ceux du calcul propositionnel et du calcul des prédicats intuitionnistes (cf. par exemple [12]) avec le principe de Markov exposé plus loin. Les règles de déduction sont celles que l'on trouve par exemple dans [10] .

L'interprétation constructive des énoncés (cf. [4]) se caractérise par une interprétation radicalement différente de l'interprétation traditionnelle de certains symboles logiques ; par exemple le symbole de disjonction $\vee$ et le quantificateur existentiel $\exists$ (pour d'autres auteurs, l'implication $\supset$, la négation $\neg$ etc...). Sur la base d'une formalisation complète des énoncés (dont on peut en fait se passer dans la plupart des cas), cette interprétation conduit à une réduction des formules du langage en deux classes : la classe des formules normales qui, par définition ne contiennent pas les symboles $\vee$ ou $\exists$ et la classe des formules complètement régulières qui, par définition, sont de la forme $\exists S \mathbb{A}$, où $\mathbb{A}$ est une formule normale et S une suite de variables. Les formules qui se réduisent à une formule complètement régulière posent ce qu'on appelle un problème constructif. Démontrer la formule initiale revient à démontrer sa réduction qui est de la frome $\exists S\mathbb{A}$, ce qui consiste à construire un objet S pour lequel la relation $\mathbb{A}$ est satisfaite et à démontrer que S vérifie $\mathbb{A}$.

En ce qui concerne la disjonction, une démonstration de $A \vee B$ doit donner soit une démonstration de A , soit une démonstration de B . Ainsi une démonstration constructive de $A \vee B$ doit indiquer laquelle de ces deux assertions est vraie. De la même façon, $\exists x\ A$ signifie qu'on dispose d'une construction d'un objet x vérifiant la propriété A et d'une démonstration de ce fait.

On peut illustrer cette interprétation sur la formule $\forall x \exists y\, A(x,y)$ où A est une formule normale, x et y des variables pour représenter les mots d'un alphabet donné. L'interprétation constructive réduit cette formule à la formule $\exists f\ \forall x\, A_1(x,f(x))$ où f est une variable pour représenter les algorithmes sur l'alphabet de x et $A_1(x,f(x))$ la formule $!f(x)\ \&\ A(x,f(x))$, où $!f(x)$ signifie que l'algorithme f est applicable au mot x, c'est-à-dire que le processus d'éxécution du travail de l'algorithme s'achève quand on applique l'algorithme à x. Cette interprétation s'explique par le fait que le rejet de l'infini actuel empêche de considérer toutes les valeurs possibles de x pour démontrer $\exists y A(x,y)$. De telle sorte que la seule possibilité est de trouver un procédé général, ne dépendant pas des valeurs concrètes de x qui permette de construire, à partir d'un x quelconque un y tel que $A(x,y)$ soit vraie.

Dans la suite. il apparaîtra des formules d'un type plus complexe que celui qui vient d'être décrit. En effet, les variables que l'on rencontrera ne seront pas toujours des variables de base, c'est-à-dire représentant tous les mots (ou algorithmes) dans un alphabet. On aura affaire à des variables restreintes, c'est-à-dire assujetties à ne prendre pour valeurs que les éléments d'un certain ensemble de mots. En logique constructive, un ensemble est la donnée d'une formule à un paramètre, c'est-à-dire une variable libre, les éléments étant les valeurs possibles du paramètre. Donc une formule $\forall \bar{x} \exists \bar{y}\, A(\bar{x},\bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des variables restreintes est une abréviation de la formule $\forall x(E_1(x) \supset \exists y(E_2(y)\ \&\ A(x,y)))$ où x et y sont les variables de base associées à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ respectivement, E_1 et E_2 définissant le domaine des variables $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Pratiquement, on sera en définitive conduit à n'interpréter des formules que du type donné dans le tableau ci-dessous (cf. [17]) :

Formule

(1) $\forall x \exists y A(x,y)$

(2) $\forall x(A_1(x) \supset \exists y A_2(x,y))$

(3) $\forall x(\exists y A_1(x,y) \supset \exists z A_2(x,z))$

(4) $\forall x(A_1(x) \vee A_2(x))$

(5) $\forall x(A_1(x) \supset (A_2(x) \vee A_3(x)))$

(6) $\forall x(\exists y A_1(x,y) \supset (A_2(x) \vee A_3(x)))$

Réduction

(1) $\exists f \forall x(!f(x) \& A(x,f(x)))$

(2) $\exists f \forall x(A_1(x) \supset !f(x) \& A_2(x,f(x)))$,

(3) $\exists f \forall xy(A_1(x,y) \supset !f(x*y) \& A_2(x,f(x*y)))$

(4) $\exists f \forall x(!f(x) \& (f(x) \doteq \Lambda \supset A_1(x)) \& (f(x) \not\doteq \Lambda \supset A_2(x)))$

(5) $\exists f \forall x(A_1(x) \supset !f(x) \& (f(x) \doteq \Lambda \supset A_2(x)) \& (f(x) \not\doteq \Lambda \supset A_3(x)))$

(6) $\exists f \forall xy(A_1(x,y) \supset !f(x * y) \& (f(x*y) \doteq \Lambda \supset A_2(x)) \&$

$\& (f(x*y) \not\doteq \Lambda \supset A_3(x)))$

Dans ce tableau, les formules A, A_1, A_2 et A_3 sont supposées normales, x,y et z des variables de base et f désigne les algorithmes sur l'alphabet de x (on peut supposer que x,y et z représentent les mots d'un même alphabet.

Il ressort de ce tableau que si $\bar{x}$ est une variable restreinte, l'interprétation d'une formule $\forall \bar{x} \exists \bar{y} A(\bar{x},\bar{y})$ et $\forall \bar{x}(A_1(\bar{x}) \vee A_2(\bar{x}))$ est la même que l'interprétation des formules $\forall x \exists y\, A(x,y)$ et $\forall x(A_1(x) \vee A_2(x))$ avec x variable de base quand $\bar{x}$ prend ses valeurs dans un ensemble défini par une formule normale.

On remarque que la définition de la notion constructive d'ensemble permet de considérer un ensemble comme un objet constructif et de le traîter comme tel.

Les notations adoptées suivent, dans l'ensemble, les notations des travaux cités et sont explicitées à chaque fois. On suppose admises la notion constructive de nombre réel exposée par exemple dans [5] et la notion de fonction de la variable réelle (cf. [5] ou [26]).

2. Le principe de Markov.

Soit $\mathfrak{A}$ un algorithme sur un alphabet A et P un mot dans A. Le principe de Markov s'énonce :

(1) Pour tout mot P dans A $\neg\neg!\mathfrak{A}(P) \supset !\mathfrak{A}(P)$.

Intuitivement, si le processus d'application de l'algorithme $\mathfrak{A}$ au mot P ne peut se prolonger indéfiniment, ce propessus s'arrêtera effectivement et le résultat de l'application de l'algorithme $\mathfrak{A}$ au mot P s'obtient en effectuant pas à pas le processus jusqu'à son achèvement.

Le principe de Markov est équivalent à la formule :

(2) $(\forall n\,(F(n) \vee \neg F(n)) \supset (\neg\neg\exists n\, F(n) \supset \exists n\, F(n)))$

où F est une formule contenant une occurence libre de la variable n représentant les entiers naturels.

Le principe de Markov est indépendant des axiomes du calcul des prédicats intuitionniste (voir [12]) comme cela est établi dans [18]. En même temps, il est compatible avec ces axiomes (voir [19]) au sens défini dans [34].

La formule (2) est quelque fois appelée principe du choix constructif. Par la suite on appellera principe de Markov l'une ou l'autre des assertions exprimées par (1) et (2).

Un corollaire immédiat du principe de Markov est :

(3) "Soit $\mathfrak{A}$ un algorithme sur l'alphabet des entiers maturels. On a :

$$\neg\neg\exists n\,!\,(\mathfrak{A}(n)) \supset \exists n\,!\,\mathfrak{A}(n) \text{"}$$

Un autre corollaire est donné par :

(4) "Soit f une fonction réelle de la variable réelle x et A un prédicat à une place de paramètre x, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x_1 x_2 (x_1 = x_2 \,\&\, A(x_1) \supset A(x_2))$

(ii) $\forall x \varphi ((\forall n \; \neg A(\varphi(n)) \,\&\, x \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n)) \supset \neg A(x))$

(iii) on peut construire un algorithme H sur l'alphabet des nombres réels tel que $\forall x (A(x) \equiv \, ! \, H(x))$.

Alors $\neg\neg \exists x \, A(f(x)) \supset \exists x \, A(f(x))$ ".

La propriété (4) est un corollaire de (3), de la continuité des fonctions réelles de la variable réelle sur leur domaine de définition et de la densité des rationnels dans les réels. Dans la suite, on appellera "principe du choix constructif" l'une ou l'autre des propriétés (3) et (4).

Un corollaire important du principe de Markov est l'énoncé suivant (cf. [17]) :

(5) " Soit $\mathcal{K}$ un ensemble énumérable de mots dans un alphabet A . dont le complémentaire $\overline{\mathcal{K}}$ n'est pas énumérable. Soit $\mathcal{K}_1$ un ensemble énumérable de mots dans A contenant $\overline{\mathcal{K}}$. Alors on peut construire un mot P dans A appartenant à $\mathcal{K}$ et à $\mathcal{K}_1$ ".

En effet, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_1$ est énumérable. On sait qu'on peut construire un algorithme φ énumérant $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_1$ et tel que $\forall n (!\varphi(n+1) \supset !\varphi(n))$ (cf. [35]) . Si $\neg !\varphi(0)$, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_1$ est vide et donc, $\mathcal{K}_1 = \overline{\mathcal{K}}$. Or $\overline{\mathcal{K}}$ n'est pas énumérable. Donc $\neg\neg !\varphi(0)$, c'est-à-dire $!\varphi(0)$ en vertu du principe de Markov . ∎

Dans la suite, on appellera la propriété (5) "principe de prise" . On donnera plus loin d'autres formulations de ce principe dans le cadre de certains espaces topologiques constructifs.

3. Quelques notions de topologie constructive.

On rappelle qu'un ensemble de mots est la donnée d'un prédicat à un paramètre, la variable correspondante étant une variable représentant les mots dans l'alphabet où on les écrit. Dans certains cas, il peut être plus simple de définir un ensemble à l'aide d'un schéma inductif. C'est ce qui sera alors fait. On dira souvent "ensemble" au lieu d' "ensemble de mots".

Une <u>relation d'égalité</u> sur un ensemble est une relation binaire, réflexive, symétrique et transitive. On appellera <u>espace</u> tout couple constitué par un ensemble et une relation d'égalité sur cet ensemble. La relation d'égalité sera notée $=$ si aucune ambiguité n'est possible dans le contexte où elle se trouve. L'ensemble sur lequel est définie la relation d'égalité est aussi appelé <u>support</u> de l'espace. Les éléments du support sont encore appelés <u>points</u> de l'espace.

Soient E_1 et E_2 deux espaces, c'est-à-dire $E_1 = \langle F_1, =_1 \rangle$ et $E_2 = \langle F_2, =_2 \rangle$ où F_1 et F_2 désignent, respectivement le support de E_1 et celui de E_2. Soit Φ un algorithme sur l'alphabet de E_1. On dit que Φ <u>est une application de E_1 dans E_2</u> si :

$$\forall X^1 (!\Phi(X^1) \supset \Phi(X^1) \in F_2) \;\&\; \forall X_1^1 X_2^1 \left((X_1^1 \underset{1}{=} X_2^1 \;\&\; !\,\Phi(X_1^1)) \supset \right.$$

$$\left. \supset (!\Phi(X_2^1) \;\&\; \Phi(X_1^1) \underset{2}{=} \Phi(X_2^1)) \right) \quad ,$$

où X^1 représente les éléments de F_1.

Le plus souvent, les définitions topologiques constructives consistent en une certaine traduction des définitions classiques. On procède de la façon suivante : on écrit la définition classique considérée dans un langage formel, ce qui conduit à une formule $\mathbb{F}$. On remplace tous les termes de $\mathbb{F}$

par des analogues constructifs des objets classiques représentés par ces termes. On peut traduire la formule F_1 ainsi obtenue de deux façons. Une première traduction consiste à appliquer à la formule F_1 l'interprétation constructive décrite au paragraphe 1 du chapitre I (p.11). Une autre traduction consiste à appliquer cette même interprétation à la formule F_1 en considérant les variables de F_1 liées par un quantificateur universel comme des variables de base. Lorsque ces variables sont restreintes à un ensemble défini par une formule normale (voir paragraphe 1 du chapitre I), ces deux interprétations coïncident. On remarque ainsi qu'à une même définition classique peuvent correspondre plusieurs interprétations constructives. Dans la suite, on explicitera dans chaque cas la traduction adoptée.

3.1. Espaces métriques constructifs.

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de mots dans un alphabet A. On appelle <u>métrique</u> sur $\mathcal{M}$ un algorithme ρ transformant tout couple d'éléments X et Y de $\mathcal{M}$ en réel non négatif tel que :

(i) $\forall X \ \rho(X \square X) = 0$

(ii) $\forall XYZ \ \ \rho(X \square Z) \leq \rho(X \square Z) + \rho(Y \square Z)$

où X, Y, Z sont des variables représentant les éléments de $\mathcal{M}$.

Le couple $\langle \mathcal{M}, \rho \rangle$ est appelé <u>espace métrique constructif</u> ou, simplement, <u>espace métrique</u> (voir [5] et [21], [28]). Conformément à la convention utilisée ici, il convient de donner un sens au mot "espace". On définit une relation d'égalité $=$ sur $\mathcal{M}$ par :

$$X \underset{\mathcal{M}}{=} Y \rightleftarrows \rho(X \square Y) = 0 .$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit bien d'une relation d'égalité sur $\mathcal{M}$.

Lorsqu'on parlera des points de l'espace métrique, il s'agira donc des points de l'espace $\langle \mathcal{M}, \underset{\mathcal{M}}{=} \rangle$. On définit, comme dans l'analyse classique, les notions de boule ouverte et de boule fermée, de densité, de convergence, de complétude. Ces notions doivent être interprétées constructivement. Ainsi la boule de centre X et de rayon 2^{-n} est le mot $X * n$, la boule fermée correspondante le mot $X ** n$; un point Y appartient à la boule $X * n$ (resp. $X**n$) si on a $\rho(X \square Y) < 2^{-n}$ (resp. $\rho(X\ Y) \leqslant 2^{-n}$). Une suite de points de $\mathcal{M}$, Φ, (c'est-à-dire un ensemble énumérable de points de $\mathcal{M}$) est dense dans $\mathcal{M}$ si on peut construire un algorithme f qui transforme toute boule $X * n$ en un point Y appartenant à la suite et à la boule $X * n$. Dana le cas où $\mathcal{M}$ est défini par une formule normale, ceci est équivalent à la formule : $\forall Xn\ \exists m(\Phi(m) \in X * n)$. Une suite Φ de points de $\mathcal{M}$ converge vers le point X de $\mathcal{M}$ si tous les points de la suite se trouvent, à partir d'un certain rang, dans une boule centrée en X donnée arbitrairement. C'est-à-dire qu'on peut construire un algorithme Ψ transformant toute boule $X * n$ en un entier naturel m tel que pour tout entier k, si $k \geqslant m$, alors $\Psi(k) \in X * n$.

Une suite Φ de points de $\mathcal{M}$ est appelée suite de Cauchy si, à partir d'un certain rang, la distance mutuelle entre deux points de la suite est inférieure à une valeur donnée arbitrairement, c'est-à-dire si on peut construire un algorithme Ψ, appelé régulateur de convergence de la suite Φ, transformant tout entier n en un entier m tel que pour tout p et q on ait : $p,q \geqslant m \supset \rho(\Phi(p) \square \Phi(q)) < 2^{-n}$. Une suite de Cauchy est dite convergente si on peut construire un point X de $\mathcal{M}$ vers lequel la suite converge. Un espace métrique est dit complet si on peut construire un algorithme, appelé algorithme de passage à la limite, qui transforme tout couple $\langle \Phi,\Psi \rangle$ où Φ est une suite de Cauchy de points de l'espace et

Ψ un régulateur de convergence de la suite Φ en un point X de l'espace vers lequel la suite Φ converge.

Dans le cadre d'un espace métrique complet on peut formuler le principe de prise de la façon suivante :

" Soit $\langle \mathcal{M}, \rho \rangle$ un espace métrique complet et f une application de $\mathcal{M}$ dans l'espace réduit à un point. Soit X un point du domaine de définition de f et Φ une suite de points de $\mathcal{M}$ qui converge vers X. On peut alors construire un entier n tel que $\Phi(n)$ appartienne au domaine de définition de f ".

En effet, on procède de la façon suivante : soit $\mathcal{K}$ un ensemble énumérable d'entiers dont le complémentaire ne soit pas énumérable, défini par la formule $n \in \mathcal{K} \leftrightarrows\ !\,U(n * n)$ où U est un algorithme universel associé à un codage fixé des schèmes des algorithmes dans l'extension standard de l'alphabet A (où est défini $\mathcal{M}$) par des entiers naturels. On construit un algorithme W tel que $W(n * m)$ soit le mot vide si le travail de l'algorithme U appliqué à $n * n$ est achevé à la $m^{\text{ième}}$ étape ou avant, et soit un mot différent du vide dans le cas contraire. On pose alors :

$$h(n,k) \simeq \begin{cases} X * k & \text{si } \forall j \, (1 \leq j \leq k \supset W(n * j) \not\equiv \Lambda) \\ \Phi(\Psi(T(n))) * k & \text{si } \exists j \, (1 \leq j \leq k \;\&\; W(n * j) \equiv \Lambda) \end{cases}$$

où Ψ est l'algorithme associé à Φ par la définition de la convergence de Φ vers X et T est défini par $T(n) \simeq \mu\, j(W(n * j) \equiv \Lambda)$. Soit $\mathbb{L}$ un algorithme de passage à la limite dans $\mathcal{M}$. Si $\tilde{h}_n$, désigne la fonction qui à k associe $h(n,k)$, on pose : $g(n) \simeq f(\mathbb{L}(pr_1(\tilde{h}_n)))$ où $pr_1(\tilde{h}_n)(k) = pr_1(h(n,k))$ est la première composante du mot $A_1 * B_1$ défini par $h(n,k)$. Alors si $n \in \bar{\mathcal{K}}$, pour tout k $h(n,k) = X * k$ et donc $\mathbb{L}(pr_1(\tilde{h}_n)) = X$

et, comme f est une application, on a donc $!g(n)$. Par conséquent $\mathrm{Dom}\ g \supseteq \overline{\mathcal{K}}$. D'après le principe de prise, $\mathrm{Dom}\ g$ contient un élément de $\mathcal{K}$ soit n_o . Mais alors $\mathbb{L}(pr_1(\widetilde{h_{n_o}})) =_{\mathcal{M}} \Phi(\Psi(T(n_o)))$ et donc, si $m_o = \Psi(T(n_o))$, on a $!f(\Phi(m_o))$, ce qu'il fallait démontrer . •

3.2. Espaces topologiques constructifs.

Soit $\mathcal{M}$ un espace et I un ensemble. Soit B une partie du produit direct de $I \times \mathcal{M}$. Par la suite, on utilisera la lettre X , éventuellement indexée, en qualité de variable des éléments de $\mathcal{M}$ et la lettre i, éventuellement indéxée, en qualité de variable des éléments de I . Si $i \in I$, on note $(B)_i$ l'ensemble des X de $\mathcal{M}$ tels que $\langle i,X \rangle \in B$. Pour tout i de I, $(B)_i$ est une <u>partie fidèle</u> de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire $\forall X_1 X_2 i(X_1 \in (B)_i \& X_1 = X_2 \supset X_2 \in (B)_i)$, où $=$ est la relation d'égalité définie sur le support de $\mathcal{M}$. On dit alors que $\langle I,B \rangle$ est une <u>famille de parties fidèles de $\mathcal{M}$</u> ou encore, une <u>famille de parties de $\mathcal{M}$</u>.

Soit $\langle I,B \rangle$ une famille de parties fidèles de $\mathcal{M}$. On définit, pour $X \in \mathcal{M}$ fixé, I_X comme l'ensemble des i de I pour lesquels $X \in (B)_i$. On dit que la famille $\langle I,B \rangle$ est une <u>base de topologie</u> sur si la famille $\langle I,B \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall i \exists X (X \in (B)_i)$

(ii) $\forall X \exists i (X \in (B)_i)$

(iii) $\forall X_1 i_1 i_2 (i_1 \in I_{X_1} \& i_2 \in I_{X_1} \supset \exists i_3 (i_3 \in I_{X_1} \& \forall X_2 (X_2 \in (B)_{i_3} \supset$
$$\supset (X_2 \in (B)_{i_1} \& X_2 \in (B)_{i_2})))) .$$

On dit alors qu'un ensemble E de points de $\mathcal{M}$ est ouvert si $\forall X(X \in \supset \exists i(i \in I_X \& (B)_i \subset E))$. Si $X \in (B)_i$, $(B)_i$ est appelé voisinage de base d'indice i du point X ou encore, voisinage de X . Cette définition d'un espace topologique ne diffère de celle de [30] que par la présentation.

On dit qu'une suite Φ de points de $\mathcal{M}$ converge vers le point X de $\mathcal{M}$ si on peut construire un algorithme Ψ transformant tout voisinage $(B)_i$ de X (c'est-à-dire tout indice i tel que $X \in (B)_i$) en un entier n tel que pour tout entier m, si $m \geqslant n$, alors $\Phi(m) \in (B)_i$. On notera $\Phi(n) \to X$ dans $\mathcal{M}$ ou encore $X \lim\limits_{n\to+\infty} {}_{\langle I,B\rangle} \Phi(n)$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{M}_1$ de points de $\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{M}$ si on peut construire un algorithme Φ qui transforme tout mot $X \square i$ pour lequel $X \in (B)_i$ en un élément $\Phi(X \square i)$ tel que $\Phi(X \square i) \in (B)_i$ et $\Phi(X \square i) \in \mathcal{M}_1$.

Un espace topologique est séparable si on peut y construire une suite dense d'éléments. On dit qu'un espace topologique $\langle \mathcal{M}, \langle I,B\rangle\rangle$ est T'-séparé si : $\forall X_1X_2 i(X_1 \in (B)_i \equiv X_2 \in (B)_i) \supset X_1 = X_2)$ et qu'il est T-séparé si : $\forall X_1X_2(X_1 \neq X_2 \supset \exists_i(X_1 \in (B)_i \,\&\, \neg(X_2 \in (B)_i)))$. Si on pose $X_1 \underset{\langle I,B\rangle}{=} X_2$ quand $\forall i(X_1 \in (B)_i \equiv X_2 \in (B)_i)$, alors l'espace est T'-séparé si et seulement si la relation $\underset{\langle I,B\rangle}{==}$ coïncide avec $=$; la relation d'égalité définie sur le support de $\mathcal{M}$.

Soient $\langle \mathcal{M}_1, \langle I_1,B_1\rangle\rangle$ et $\langle \mathcal{M}_2, \langle I_2,B_2\rangle\rangle$ deux espaces topologiques, et f une application de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_2$. On dit que f est continue au point X^1 où f est définie si $\forall i_2(f(X^1) \in (B_2)_{i_2} \supset$ $\exists i_1(X^1 \in (B_1)_{i_1} \,\&\, \forall X_1^1((X_1^1 \in (B_1)_{i_1} \,\&\, !f(X_1^1)) \supset f(X_1^1) \in (B_2)_{i_2})))$ où X^1 représente les points de $\mathcal{M}_1$. On dit que f admet une discontinuité constructive au point X^1 où f est définie si on peut construire un voisinage $(B_2)_{i_2}$ de $f(X^1)$ et une suite Φ de points de $\mathcal{M}_1$ telle que $(\forall n(!f(\Phi_n) \;\&\; \neg\,(f(\Phi_n) \in (B_2)i_2)) \;\&\; X^1 \lim\limits_{n\to+\infty} {}_{\langle I_1,B_1\rangle}\, \Phi_n)$. On dit que f <u>est non discontinue au point X^1</u> où elle est définie si elle n'admet pas de discontinuité constructive en ce point.

Soit $\mathfrak{M}$ un espace et $\langle I_1,B_1\rangle$ et $\langle I_2,B_2\rangle$ deux bases de topologies sur $\mathfrak{M}$. On dit que la topologie $\langle I_1,B_1\rangle$ est <u>plus fine</u> que la topologie $\langle I_2,B_2\rangle$ si l'application identique sur $\mathfrak{M}$ considérée comme application de $\langle \mathfrak{M}, \langle I_1,B_1\rangle\rangle$ dans $\langle \mathfrak{M},\langle I_2,B_2$ est continue en chaque point, ce qu'on notera $\langle \mathfrak{M} \langle I_1,B_1\rangle\rangle \hookrightarrow \langle \mathfrak{M}, \langle I_2,B_2\rangle\rangle$ les topologies $\langle I_1,B_1$ et $\langle I_2,B_2\rangle$ sont dites <u>équivalentes</u> si $\langle \mathfrak{M}, \langle I_1,B_1\rangle\rangle \hookrightarrow \langle \mathfrak{M}, I_2,B_2\rangle\rangle$ et $\langle \mathfrak{M}, \langle I_2,B_2\rangle\rangle \hookrightarrow \langle \mathfrak{M}, \langle I_1,B_1\rangle\rangle$ sont toutes deux vraies.

Un exemple important d'espaces topologiques est fourni par les espaces uniformes. On appelle <u>espace uniforme constructif</u> tout couple de la forme $\langle \mathfrak{M}), S\rangle$ où $\mathfrak{M}$ est un espace et S un prédicat à trois places défini sur une partie de $\mathbb{Z} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ tels que

(i) $\forall mX\; S(m,X,X)$

(ii) $\forall X_1X_2X_3X_4m(X_1 = X_3 \;\&\; X_2 = X_4 \;\&\; S(m,X_1,X_2) \supset S(m,X_3,X_4))$

(iii) $\forall X_1X_2\, m(S(m,X_1,X_2) \supset S(m,X_2, X_1))$

(iv) $\forall X_1X_2m(S(m+1, X_1,X_2) \supset S(m, X_1.X_2))$

(v) $\forall X_1X_2X_3m(S(m+1, X_1, X_2) \;\&\; S(m+1, X_2,X_3) \supset S(m, X_1, X_3))$.

Comme cela est établi dans [33], on montre aisément que la définition "classique" d'un espace uniforme constructif (cf. [29]) peut se ramener à celle-ci. En posant I égal à l'ensemble des couples $\langle X,m\rangle$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathfrak{M}$ et B l'ensemble du produit $I \times \mathfrak{M}$ défini par $\langle\langle X_1, m_1\rangle, X_2\rangle \in B \equiv S(m_1, X_1, X_2)$, on remarque que $\langle \mathfrak{M}, \langle I,B\rangle\rangle$ est un espace topologique : c'est de cet espace qu'il s'agit lorsqu'on étudie les propriétés topologiques d'un espace uniforme.

Un espace uniforme est <u>métrisable</u> si (cf. [29]) on peut construire une application ρ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dans l'espace des réels non négatifs qui soit une métrique sur $\mathcal{M}$ et telle que l'on ait :

$$\text{(vi)} \quad \forall m_1 \exists m_2 \forall X_1 X_2 (S(m_2, X_1, X_2) \supset \rho(X_1, X_2) < 2^{-m_1})$$

$$\text{(vii)} \quad \forall m_1 \exists m_2 \forall X_1 X_2 (\rho(X_1, X_2) < 2^{-m_2} \supset S(m_1, X_1, X_2)) .$$

On définit la complétude d'un espace uniforme comme on l'a fait pour un espace métrique.

3.3. Espaces topologiques gerbés.

Soit $\mathcal{M}$ un espace et $\langle I,B\rangle$ une famille de parties fidèles de $\mathcal{M}$. Comme précédemment, on utilisera la lettre X, éventuellement indexée, en qualité de variable des points de $\mathcal{M}$ et la lettre i, en qualité de variable des éléments de I.

Une relation binaire σ sur I est appelée <u>relation de succession indiciaire</u> si elle est transitive et si $i_1 \, \sigma \, i_2 \supset ((B)_{i_1} \subset (B)_{i_2})$

Soit σ une relation de succession indiciaire. Une suite α d'éléments de I est appelée <u>σ-suite</u> si $\forall n(\alpha(n+1) \sigma \alpha(n))$. La suite α est dite <u>σ-fondamentale pour le point X</u> si α est une σ-suite et si $\forall n(X \in (B)_{\alpha(n)}) \,\&\, \forall i(X \in (B)_i \supset \exists n(\alpha(n) \sigma i))$. On dit que la suite α est <u>σ-fondamentale</u> si on peut construire un point X de $\mathcal{M}$ pour lequel elle soit σ-fondamentale.

On désigne par Θ l'ensemble des σ-suites. La lettre θ, éventuellement indexée, représente la variable des éléments de Θ. On définit sur Θ deux relations binaires $\bar{\sigma}$ et $=_\sigma$ par : $\theta_1 \bar{\sigma} \, \theta_2$ si et seulement si $\forall n \exists m(\theta_1(m) \, \sigma \, \theta_2(n))$ et $\theta_1 =_\sigma \theta_2$ si et seulement si $\theta_1 \bar{\sigma} \, \theta_2 \,\&\, \theta_2 \, \bar{\sigma} \, \theta_1$.

La relation

$\overline{\ }_{\sigma}$ est transitive et la relation $=$ une relation d'égalité sur θ. On note $\theta^{=}$ l'espace $\langle \theta, \underset{\sigma}{=} \rangle$, Γ l'ensemble des suites σ-fondamentales et $\Gamma^{=}$ l'espace $\langle \Gamma, \underset{\sigma}{=} \rangle$.

Définition.- On appelle espace topologique gerbé un 6-uplet de la forme $\langle \mathcal{M}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ où $\mathcal{M}$ est un espace, $\langle I,B \rangle$ une famille de parties fidèles de $\mathcal{M}$, σ une relation de succession indiciaire, $\mathcal{O}$ une application de $\mathcal{M}$ dans $\Gamma^{=}$ partout définie, $\mathcal{L}$ une application de $\Gamma^{=}$ dans $\mathcal{M}$ partout définie, telles que pour tout X, $\mathcal{O}(X)$ soit une suite σ - fondamentale pour X et $\mathcal{L}(\mathcal{O}(X)) = X$ (pour la relation d'égalité de $\mathcal{M}$) ".

L'espace $\mathcal{M}$ est appelé le fondement de l'espace topologique gerbé. On observe que la famille $\langle I,B \rangle$ est la base d'une topologie de l'espace topologique gerbé, et qu'une suite σ-fondamentale pour X converge vers le point X. Lorsqu'on parlera de la topologie de l'espace $\langle \mathcal{M}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$, on aura en vue l'espace topologique $\langle \mathcal{M}, \langle I,B \rangle \rangle$. Le triplet $\langle \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ est appelé structure gerbée de l'espace.

On remarque que la classe des espaces métriques complets entre dans la classe des espaces topologiques gerbés. Dans cette classe entre également la classe des espaces uniformes complets (cf. [29]), et, en particulier, celle des espaces vectoriels topologiques constructifs localement convexes (cf. [31]).

On appelle partie d'appui de $\mathcal{M}$ le domaine de définition d'une application de $\mathcal{M}$ dans l'ensemble réduit à un élément (cf. [32]).

Dans le cadre des espaces topologiques gerbés on a aussi un principe de prise analogue à ce qui a été énoncé pour les espaces métriques complets :

"Soit $\langle \mathcal{M}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ un espace topologique gerbé et $\mathcal{G}$ une partie d'appui de $\mathcal{M}$. Soit $X \in \mathcal{G}$ et Φ une suite de points de $\mathcal{M}$ convergeant vers X. Alors on peut construire un entier n tel que $\Phi(n) \in \mathcal{G}$".

La démonstration est identique à celle que l'on a donné dans le cas des espaces métriques complets. Il suffit de remplacer $X * k$ et $\Phi(\Psi(T(n)))*k$ respectivement par $\mathcal{O}(X)(k)$ et $\mathcal{T}(\Phi(\Psi(T(n))))(k)$ dans la définition de $h(n,k)$ et $\mathbb{L}$ par $\mathcal{L}$ qui joue un rôle d'un algorithme de passage à la limite.

Un sous-ensemble E du support de $\mathcal{M}$ est dit <u>non vide</u> si $\neg\neg\, \exists X(X \in E)$ et <u>habité</u> si $\exists X(X \in E)$.

Soit A une partie fidèle de $\mathcal{M}$ et $\langle K, \mathcal{D} \rangle$ une famille de parties fidèles de $\mathcal{M}$. On dit que A est <u>$\langle K,D \rangle$-traçable</u> si, quel que soit $\varkappa$ dans K, si $A \cap (\mathcal{D})_\varkappa$ est non vide, alors $A \cap (\mathcal{D})_\varkappa$ est habité.

Soit maintenant $\langle \mathcal{N}, T \rangle$ un espace topologique. On dit que cet espace est M-régulier si, quel que soit le point Y de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de base de Y, on peut construire des parties d'appui E_1 et E_2 de $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{N} \setminus E_2 \subset \mathcal{V}$ et E_1 sépare Y de E_2, c'est-à-dire $Y \in E_1$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Un exemple important d'espace topologique M-régulier est constitué par la classe des espaces métriques.

On dit qu'un espace topologique $\langle \mathcal{N}, T \rangle$ a sa topologie M-majorée si quelque soit le point Y de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de base du point Y, on peut construire une partie d'appui E de $\mathcal{N}$ telle que $(Y \in E \,\&\, (E \subset \mathcal{V}))$.

Le principe de prise est à la base de la démonstration des théorèmes suivants :

Théorème 1.- (Tchernov (cf.[32])) ."Soit $\langle \mathfrak{M}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ un espace topologique gerbé dont toutes les parties d'appui sont $\langle I,B \rangle$-traçables. Soit $\langle \mathfrak{N}, T \rangle$ un espace topologique M-régulier. Alors toute application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est continue en chaque point où elle est définie.

Théorème 2.- (Tchernov (cf. [32])). "Soit $\langle \mathfrak{N}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ un espace topologique gerbé et $\langle \mathfrak{N}, T \rangle$ un espace topologique dont la topologie est M-majorée. Alors toute application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est non discontinue en chaque point où elle est définie".

4. Préliminaires sur les polynômes trigonométriques.

4.1. L'espace des polynômes trigonométriques (cf. [24]).

Définition.- On appelle polynôme trigonométrique toute suite finie de la forme $\alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q$ où $\alpha_1 ,\ldots, \alpha_q$ sont des nombres complexes (constructifs); et $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ des nombres réels (constructifs) et $\tau,*$ des symboles de séparation.

On désigne par E^o l'ensemble des polynômes trigonométriques. On utilisera les lettres P et Π , éventuellement indexées, pour représenter les variables des éléments de E^o . Si P s'écrit $\alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots *\alpha_q\tau\lambda_q$, qu'on écrira encore $\underset{k=1}{\overset{q}{\times}} \alpha_k\tau\lambda_k$, $\alpha_1 ,\ldots, \alpha_q$ sont appelés coefficients du polynôme trigonométrique P (on dira "du polynôme P" si aucune confusion n'est à craindre) et $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ ses fréquences.

On définit une relation d'égalité sur E^o de la façon suivante : au polynôme trigonométrique P , on associe la fonction Φ_P de la variable réelle x par la formule $\Phi_P(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{i\lambda_k x}$ où $\alpha_1 ,\ldots, \alpha_k$ sont les coefficients du polynôme P et $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ ses fréquences.

On posera $P_1 \underset{E}{=} P_2$ si et seulement si $\forall x(\Phi_{P_1}(x) = \Phi_{P_2}(x))$.

On désigne par E l'espace $\langle E^o, \underset{E}{=} \rangle$.

On définit des opérations sur E de la façon suivante :

$P_1 + P_2$ représente le mot $P_1 * P_2$;

si $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_1\tau\lambda_q$ et μ est un nombre complexe, alors μP est le mot $\mu\alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots *\mu\alpha_q\tau\lambda_q$;

Si $P_1 = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q$ et $P_2 = \beta_1\tau\mu_1 * \ldots * \beta_s\tau\mu_s$, $P_1\,P_2$

est le mot $\mathop{\huge\times}\limits_{k=1,j=1}^{q\quad s} \alpha_k\beta_j\tau(\lambda_k + \mu_j)$.

On vérifie aisèment que ces opérations sont stables par rapport à l'égalité dans E qui devient ainsi un espace vectoriel.

On sera amené à distinguer, par la suite, quelques classes particulières de polynômes trigonométriques.

Soit $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots *\alpha_q\tau\lambda_q$ un polynôme trigonométrique.

On dit que ses fréquences sont <u>localisées</u> si

$$\forall jk \quad (1 \leqslant j,k \leqslant q \supset \lambda_j = \lambda_k \vee \lambda_j \neq \lambda_k) ,$$

qu'elles sont <u>séparées</u> si

$$\forall jk(1 \leqslant j,k \leqslant q \quad \& \quad j \neq k \supset \lambda_j \neq \lambda_k) .$$

On dit que le polynôme P est <u>rationnel</u> si ses fréquences, ainsi que les parties réelles et imaginaires de ses coefficients sont des nombres rationnels.

Un polynôme rationnel a ses fréquences localisées ainsi qu'un polynôme à fréquences séparées. On dira qu'un polynôme est <u>propre</u> si c'est le polynôme $0 \tau 0$ ou si ses fréquences sont séparées et les coefficients correspondants non nuls. On établit sans difficulté que deux polynômes propres sont égaux (au sens de $\underset{E}{=}$) si et seulement si leurs coefficients et leurs fréquences correspondantes sont égaux. Il est clair qu'il n'existe pas d'algorithme transformant tout polynôme en un polynôme propre qui lui soit égal. En effet, à l'aide d'un tel algorithme on construirait un algorithme permettant de distinguer, parmi les nombres réels, ceux qui ne sont pas nuls. Cependant, pour chaque polynôme trigonométrique P il n'est pas vrai qu'il n'existe pas de polynôme propre qui lui soit égal.

L'ensemble des polynômes rationnels, qui est évidemment énumérable, est désigné par la lettre $\mathcal{C}^0$. on utilisera la lettre Q, éventuellement indexée, en qualité de variable des polynômes rationnels.

4.2. Propriétés de presque-périodicité des polynômes trigonométriques.

Soit f une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x. Soit ε un réel positif. Suivant la terminologie de l'analyse classique (cf. [17],[18] et [19]) on dit que le réel ζ est une ε-presque-période de f si $\forall x(|f(x+\zeta) - f(x)| < \varepsilon)$. On dit qu'un ensemble S de nombres réels est relativement dense si on peut construire un réel positif L, appelé intervalle d'inclusion, tel que l'intersection de S avec tout intervalle de longueur L soit habitée.

On dit que la fonction f est presque périodique si pour tout ε positif, l'ensemble de ses ε-presque-périodes est relativement dense. Ce qui peut encore s'écrire :

$$(1)\quad \forall\varepsilon\,(\varepsilon > 0 \supset \exists L(L > 0 \quad \forall x\, \exists\zeta\ (x < \zeta < x + L \ \&\ \forall x_1(|f(x_1+\zeta) - f(x_1)| < \varepsilon\ )))).$$

Par abus de langage, on dira qu'un polynôme trigonométrique P est presque-périodique si la fonction Φ_P l'est.

Lemme 1.- (cf.[11]) ." Soit f une fonction complexe de la variable réelle x. On suppose f uniformément continue sur la droite réelle et presque périodique. Si on pose $\sigma_n = \sup\limits_{|x|\leq n} |f(x)|$, la suite des σ_n est une suite de Cauchy et, par conséquent, converge vers un nombre σ qui est la borne supérieure des $|f(x)|$ pour x parcourant la droite réelle".

Démonstration. (cf.[11]) Soit ε un réel positif. Soit L un intervalle d'inclusion associé à f et $\varepsilon/2$ au moyen de (1). On peut construire un entier N, tel que $N \geqslant L$ et un réel y tel que $|y| \leqslant n$ où $n \geqslant N$ et $|f(y) - \sigma_n| < \varepsilon/2$ par définition de σ_n. On peut alors construire un réel ζ avec $|\zeta - y| < \frac{N}{2}$ tel que, en vertu de (1) on ait $\forall x_1 (|f(x_1 + \zeta) - f(x_1)| < \varepsilon/2)$. Si $x = y - \zeta$, alors $|x| < \frac{N}{2}$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. En particulier $|f(x)| > |f(y)| - \varepsilon/2$, et donc $\sigma_N > \sigma_n - \varepsilon$. Comme $n \geqslant N$, $\sigma_N \leqslant \sigma_n$ d'où $|\sigma_N - \sigma_n| < \varepsilon$. ∎

Lemme 2.- (cf. [1])". Soit f une fonction complexe de la variable réelle x. On suppose f uniformément continue sur la droite réelle et f presque périodique. Si on pose $\mathcal{M}_\ell(f) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(t)\,dt$ pour ℓ réel positif, on peut construire un réel λ tel que $\lambda = \lim_{\ell \to +\infty} \mathcal{M}_\ell(f)$ qui est appelé moyenne de la fonction f sur la droite réelle et qu'on note $\mathcal{M}(f)$".

Démonstration. (cf.[1]). Soit ε fixé. D'après le lemme 1, on peut construire un réel M tel que $\forall x\, (|f(x)| \leqslant M)$. Soit L un intervalle d'inclusion pour f et $\frac{\varepsilon}{8M}$, c'est-à-dire

$$(2) \quad \forall x\, \exists \zeta (x < \zeta < x + L \;\; \& \;\; \forall x_1 (|f(x_1 + \zeta) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{8M})).$$

On a : $\frac{1}{m\ell_0} \int_0^{m\ell_0} f(t)dt = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\ell_0} \int_{k\ell_0}^{(k+1)\ell_0} f(t)dt$ où $\ell_0 > 0$ est fixé.

Or, $\int_{k\ell_o}^{(k+1)\ell_o} f(t)dt = \int_{k\ell_o-\zeta_k}^{(k+1)\ell_o-\zeta_k} f(t+\zeta_k)dt$ où ζ_k provient de (2)

avec $k\ell_o < \zeta_k < k\ell_o + L$.

On peut écrire $\int_{k\ell_o-\zeta_k}^{(k+1)\ell_o-\zeta_k} f(t+\zeta_k)dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ où

$I_1 = \int_o^{\ell_o} f(t)dt$, $I_2 = \int_o^{\ell_o} (f(t+\zeta_k) - f(t))dt$, $I_3 = \int_{k\ell_o-\zeta_k}^{o} f(t+\zeta_k)dt$

et $I_4 = \int_{\ell_o}^{(k+1)\ell_o-\zeta_k} f(t+\zeta_k)dt$.

Comme $k\ell_o < \zeta_k < k\ell_o + L$, on a $k\ell_o - \zeta_k < 0$ et $(k+1)\ell_o - \zeta_k < \ell_o$.

Par ailleurs. $0 - (k\ell_o - \zeta_k) = \zeta_k - k\ell_o < L$ et $\ell_o - ((k+1)\ell_o - \zeta_k) = \zeta_k - k\ell_o < L$. Donc $|I_3| \leqslant ML$ et $|I_4| \leqslant ML$. En vertu de (2) on a $|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}\ell_o$. Donc $\left|\int_{k\ell_o}^{(k+1)\ell_o} f(t) - \int_o^{\ell_o} f(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon\ell_o}{8} + 2\,ML$ d'où l'on tire :

(3) $\left|\frac{1}{m\ell_o}\int_o^{m\ell_o} f(t)dt - \frac{1}{\ell_o}\int_o^{\ell_o} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{8} + 2M\frac{L}{\ell_o}$.

Soit $\ell_o = \frac{16ML}{\varepsilon}$ et $\ell \geqslant \ell_o$. De (3) on tire

(4) $\left|\frac{1}{m\ell}\int_o^{m\ell} f(t)dt - \frac{1}{\ell}\int_o^{\ell} f(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.

Soit ℓ_1 , un réel positif. On peut alors construire un entier m_1 tel que

(5) $m_1\ell < \ell_1 < (m_1+2)\ell$ avec $\ell \geqslant \ell_o$, ℓ fixé.

Alors, $\left|\frac{1}{\ell_1}\int_0^{\ell_1} f(t)dt - \frac{1}{m_1\ell}\int_0^{m_1\ell} f(t)dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{\ell_1}\int_0^{m_1\ell} f(t)dt -\right.$

$$\left. - \frac{1}{m_1\ell}\int_0^{m_1\ell} f(t)dt\right| + \left|\frac{1}{\ell_1}\int_{m_1\ell}^{\ell_1} f(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4ML}{\ell_1} < 4\frac{M}{m_1}$$

Donc si on prend $\ell_1, \ell_2 \geqslant \ell_0$, on a pour m_1 , m_2 associés à ℓ_1 ; ℓ_2 et ℓ_0 par (5) :

$$(6) \quad \left|\frac{1}{\ell_1}\int_0^{\ell_1} f(t)dt - \frac{1}{\ell_2}\int_0^{\ell_2} f(t)dt\right| < \frac{8M}{\min(m_1,m_2)}$$

De la relation (6) on tire la conclusion du lemme ☒.

Dans [11] Gilson donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme trigonométrique à fréquences séparées soit presque-périodique. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait la propriété suivante ; si $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ désignent les fréquences du polynôme P , on doit avoir $\forall r_1 \dots r_1 (r_1\lambda_1 + \dots + r_q\lambda_q = 0 \vee r_1\lambda_1 + \dots r_q\lambda_q \neq 0)$ où $r_1, \dots, r_q$ sont des nombres rationnels.

En modifiant légèrement légèrement la terminologie de [11] , on dira que la suite finie des $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ est <u>rationnellement discrète</u> si

$$\forall m_1, \dots, m_q (m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q = 0 \vee m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q \neq 0) ,$$

où $m_1, \dots, m_q$ désignent des entiers relatifs..

On va donner une autre démonstration que dans [11] de la suffisance et la discrétude rationnelle pour la presque périodicité des polynômes trigonométriques, démonstration qui sera reprise plus tard pour établir d'autres propriétés.

Suivant [11], on dira que les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont <u>en phase</u> si, pour tout ε positif, on peut construire un réel positif L appelé <u>intervalle d'inclusion</u> tel que l'intersection avec tout intervalle ouvert de longueur L de l'ensemble des ζ pour lesquels on peut construire des entiers relatifs $p_1 \ldots p_q$ tels que $|\lambda_k \zeta - 2\pi p_k| < \varepsilon$ pour $k = 1, \ldots, q$ soit habitée, c'est-à-dire si :

$$(7)\ \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \exists L(L > 0 \,\&\, \forall x\ \exists \zeta p_1 \ldots p_q(x < \zeta < x + L$$

$$\& \quad \forall k\,(1 \leqslant k \leqslant q \supset |\lambda_k \zeta - 2\pi p_k| < \varepsilon)))).$$

<u>Lemme 3.</u>- (cf. [11]). " Soit L un intervalle d'inclusion relatif aux nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $\varepsilon(\varepsilon > 0)$. Soit λ_{k+1} tel que $v\lambda_{k+1} = s_1\lambda_1 + \ldots + s_k\lambda_k$ où $v, s_1, \ldots, s_k$ sont des entiers relatifs, $v > 0$. Alors vL est un intervalle d'inclusion relatif aux nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ et εC où $C = v + |s_1| + \ldots + |s_k|$."

<u>Démonstration.</u> (cf. [11]). Si $\zeta \in]x, x + L[$ et vérifie $|\lambda_j - 2\Pi p_j| < \varepsilon$ pour $j = 1, \ldots, k$, alors $|v\lambda_j\zeta - 2\pi v p_j| < \varepsilon v \leqslant \varepsilon C$ pour $j = 1, \ldots, k$ et $|v\,\lambda_{k+1}\zeta - 2\Pi \sum_{j=1}^{k} s_j p_j| < \varepsilon C$.

En modifiant légèrement la démonstration d'un théorème du type de Kronecker qui figure dans [14] (Appendice V, §1) on peut énoncer :

Lemme 4.-"Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des nombres réels non nuls et N un entier positif. On suppose que pour tous entiers $m_1, \dots, m_q$ avec $|m_j| \leqslant N+1$ pour $j = 1, \dots, q$, on a $(m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q = 0 \supset m_1 = \dots = m_q = 0)$.
On peut alors construire un réel positif L tel que pour tout x on puisse construire un réel ζ et des entiers $p_1, \dots, p_q$ tels que

$$x < \zeta < x + L \ \& \ \forall j (1 \leqslant j \leqslant q \supset |\lambda_j\zeta - 2\pi p_j| < 4 \sqrt{\frac{q+1}{N}}) \text{."}$$

Démonstration. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ des nombres complexes non nuls. On va tout d'abord établir que l'on peut construire un réel L tel que pour tout intervalle I de la forme $[x, x+L]$ on ait

(8) $\sup\limits_{t \in I} |1 + \Phi_p(t)| > (1 - \frac{1}{N})(1 + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_q|)$ où $P = \sum\limits_{k=1}^{q} \alpha_k \tau\lambda_k$.

Soit alors $K_N(t) = 1 + 2(1 - \frac{1}{N+1}) \cos t + \dots + 2(1 - \frac{N}{N+1}) \cos Nt$ et

$R^*(t) = \prod\limits_{j=1}^{q} K_N(\lambda_j t + \varphi_j)$ où φ_j provient de $\alpha_j = |\alpha_j| e^{i\varphi j} (\alpha_j \neq 0)$. On remarque que $\forall t (R^*(t) \geqslant 0)$ et que les fréquences de $R^*(t)$ sont de la forme $m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q$ avec $|m_j| \leqslant N$ pour $j = 1, \dots, q$. D'après l'hypothèse, on ne rencontre qu'une fois les nombres $0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ parmi ces fréquences. Si f est une fonction uniformément continue sur $[x, x+L] = I$, on pose $\mathcal{M}_I(f) = \frac{1}{L} \int_I f(t)dt$. Alors :

$$\mathcal{M}_I(R^*(1 + \Phi_p)) = (1 - \theta_0 \frac{2(N+1)^q}{2Lh}) + (1 - \frac{1}{N+1})(|\alpha_1| + \dots + k_q)$$
$$(1 - \theta_1 \frac{2(N+1)^q}{2Lh})$$

où h est le plus petit des nombres $|m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q|$ pour

$|m_j| \leqslant N+1$ et m_j non tous nuls et $|\theta_0|, |\theta_1| \leqslant 1$. Donc, on peut fixer L assez grand pour que $(1 - \frac{2(N+1)^q}{2L\,h})(1 - \frac{1}{N+1}) > (1 - \frac{1}{N})$. Dans ces conditions, $1 - \frac{2(N+1)^q}{2Lh} + (1 - \frac{1}{N+1})(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_q|)(1 - \frac{2(N+1)^q}{2Lh}) \leqslant$

$\leqslant |\mathcal{M}_{\mathbb{I}}(R^*(1+\Phi_p))| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{I}} |1+\Phi_p(t)| \cdot \mathcal{M}_{\mathbb{I}}(R^*)$ puisque $R^* \geqslant 0$.

. Par ailleurs, $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}(R^*) =$

$1 - \theta_2 \frac{2(N+1)^q}{2L}$ avec $|\theta_2| \leqslant 1$, d'où

$$\sup_{t\in\mathbb{I}} |1+\Phi_p(t)| \cdot \mathcal{M}_{\mathbb{I}}(R^*) \leqslant (1 + \frac{2(N+1)^q}{2L}) \sup_{t\in\mathbb{I}} |1+\Phi_p(t)|.$$

Il en résulte que (8) est vraie pour L assez grand, L ne dépendant que de N, h et $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_q|$.

Fixons $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 1$. Si P désigne le polynôme $1\tau\lambda_1 * \dots * 1\tau\lambda_q$, la formule (8) devient :

$$\sup_{t\in\mathbb{I}} |1+\Phi_p(t)| > (1 - \frac{1}{N})(q+1).$$

D'après le principe du choix constructif, en parcourant les rationnels de $]x, x+L[$ on peut calculer un ζ tel que $x < \zeta < x+L$ & $|1+\Phi_p(\zeta)| > (1-\frac{1}{N})(q+1)$. Alors $1+\Phi_p(\zeta) = e^{i\gamma}(q+1-\eta)$ où $0 \leqslant \eta \leqslant \frac{q+1}{N}$. D'où $|1+\Phi_p(\zeta)| = e^{i\gamma_0} + \dots + e^{i\gamma_q}$ où $\gamma_0 = -\gamma$ et

$\gamma_j = \lambda_j\zeta - \gamma$ pour $j = 1, \dots, q$. Soit k_0 avec $0 \leqslant k_0 \leqslant q$ tel que $|e^{i\gamma_{k_0}} - 1| \geqslant \sqrt{\frac{q+1}{N}}$. Alors $|e^{i\gamma k_0} - 1| > \sqrt{2\frac{q+1}{N}}$ et donc

$|\sum_{k\neq k_0} e^{i\gamma_k}| > q - \eta + \frac{q+1}{N} > q$ ce qui est impossible. Donc

$$\forall k(0 \leqslant k \leqslant q \supset |e^{i\gamma k} - 1| < 2\sqrt{\tfrac{q+1}{N}}) .$$

On peut donc construire des entiers $p'_0 ,\ldots, p'_q$ tels que

$|\gamma_k - 2\pi p'_k| < 2\sqrt{\frac{q+1}{N}}$. Alors si $p_j = p'_j - p'_0$ $(j = 1,\ldots,q)$ on a

$|\lambda_j\zeta - 2\pi p_j| < 4 \sqrt{\frac{q+1}{N}}$. □

En reprenant l'idée générale de la démonstration faite dans [11] et en s'appuyant sur les lemmes 3 et 4, on obtient :

Lemme 5.- "Une condition suffisante pour que les nombres réels $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ soient en phase est qu'ils soient rationnellement discrets".

Démonstration. Si les nombres $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ sont rationnellement discrets ils sont en particulier localisés et localisés aussi par rapport à 0 . On peut donc supposer qu'ils ne sont pas nuls. On définit un algorithme dont le travail est fractionné en étapes du type suivant :

- à l'étape k , on dispose d'un nombre c_{k-1} et de la suite $\mu_1 ,\ldots, \mu_{q-k+1}$ de nombres réels rationnellement discrète ; l'algorithme construit un entier N tel que $4\sqrt{\frac{q+1}{N}} < c_{k-1}$; puis l'algorithme cherche parmi les $m_1\mu_1 + \ldots + m_{q-k+1} \mu_{q-k+1}$ avec $|m_j| \leqslant N + 1$ et m_j non tous nuls si une de ces combinaisons est nulle.

- si aucune de ces combinaisons n'est nulle, l'algorithme calcule un L donné par le lemme 4 et donne le schéma de calcul de ζ et des p_j tels que $| \mu_j\zeta - 2\pi p_j| < c_{k-1}$, et il termine son travail à cette étape ;

- si une des combinaisons est nulle, il prend la première qu'il rencontre qui s'écrira, par exemple, $v\mu_{j_0} = \sum_{j\neq j_0} s_j\mu_j$ avec $v > 0$ et v, s_j entiers relatifs vérifiant

$v, |s_j| \leqslant N+1$; l'algorithme passe alors à l'étape $k+1$ avec le nombre $c_k = \frac{c_{k-1}}{v+\Sigma|s_j|}$ et la suite obtenue à partir de la suite $\mu_1,\dots,\mu_{q-k+1}$ à laquelle on aura retranché μ_{j_o} .

Il est clair que le travail de l'algorithme s'arrête à une étape k avec $1 \leqslant k \leqslant q-1$ sur une application du lemme 4 à la suite $\mu_1,\dots,\mu_{q-k+1}$, car le lemme 4 s'applique évidemment au cas d'un nombre μ_1 .

La recherche d'un intervalle d'inclusion relatif à $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ et ε, $\varepsilon > 0$ donné s'effectue comme suit : à la première étape , on applique l'algorithme décrit ci-dessus avec $c_o = \varepsilon$ et la suite $\lambda_1,\dots,\lambda_q$, puis on attend que l'algorithme achève son travail. On obtient alors une sous-suite des $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ que l'on peut, après une éventuelle rénumérotation des λ_j noter $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, une suite de nombres $c_o,\dots,c_j$ (avec $k+j = q+1$) et d'entiers $v^{(j_1)}, s_1^{(j_1)},\dots,s_k^{(j_1)}$ de telle sorte que $v_j\lambda_{k+1} = \sum_{h=1}^{k} s_h^{(j)}\lambda_h$, $v_{j-1}\lambda_{k+2} = \sum_{h=1}^{k+1} s_h^{(j-1)}\lambda_h$, etc... et que $c_{j_1} = \dfrac{c_{j_1-1}}{v^{(j_1)} + |s_1^{(j_1)}|+\dots+|s_k^{(j_1)}|}$. On applique alors le lemme 3 successivement aux suites $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+2}$, etc... jusqu'à retrouver la suite $\lambda_1,\dots,\lambda_q$. La relation entre les c_{k_1} permet de trouver, à partir de l'intervalle d'inclusion associé à $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ et c_j , un intervalle d'inclusion associé à $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ et ε . D'où le lemme □.

Il résulte très facilement de là qu'un polynôme trigonométrique dont la suite des fréquences est rationnellement discrète est presque-périodique.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des nombres réels. L'ensemble des entiers relatifs $m_1, \dots, m_q$ tels que $m_1\lambda_1 + \dots + m_q\lambda_q = 0$ est un groupe qu'on appellera <u>groupe engendré par les $\lambda_1, \dots, \lambda_q$</u>. Si les $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les fréquences du polynôme P, on appellera aussi ce groupe, <u>groupe engendré par les fréquences du polynôme P</u>.

Soient $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$ $(1 \leqslant s \leqslant q)$ des éléments du groupe Γ engendré par les $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. On dira que les $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$ forment une <u>base de Γ</u> si pour tout élément g de Γ, on peut trouver des entiers relatifs $g_1, \dots, g_s$ tels que $g = g_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + g_s \mathfrak{a}_s$ et si $g_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + g_s \mathfrak{a}_s = 0 \supset g_1 = \dots = g = 0$. Chacun des $\mathfrak{a}_j$ peut s'écrire

$$\underbrace{a_{j1}, \dots a_{jq_j}, 0, \dots, 0}_{q \text{ nombres}} \quad \text{avec } a_{jq_j} \neq 0 .$$

On dira que les $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$ forment une <u>base régulière de Γ</u> s'ils forment une base et si $q_1 < \dots < q_s$.

<u>Lemme 6.</u>- "Si on peut construire une base régulière du groupe engendré par les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, la suite de ces nombres est rationnellement discrète".

<u>Démonstration.</u> Si $g \in \Gamma$ où Γ est le groupe engendré par les $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ de base régulière $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$, alors on doit trouver des $g_1, \dots, g_s$ tels que $g = g_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + g_s \mathfrak{a}_s$. Or, si on écrit

$$\mathfrak{a}_j = \underbrace{a_{j1}, \dots, a_{jq_j}, 0, \dots, 0}_{q \text{ nombres}} \quad \text{avec } a_{jq_j} \neq 0$$

on sait que $q_1 < \dots < q_s$.

Donc si $g = \gamma_1, \dots, \gamma_q$ nécessairement $\gamma_{q_{s-1}+1} = g_s \mathfrak{a}_{sq_{s-1}+1}, \dots, \gamma_{q_s} = g_s a_{sq_s}$ et $\gamma_{q_s+1} = \dots = \gamma_q = 0$. Alors $g - g_s \mathfrak{a}_s$ se trouve dans le sous-groupe de Γ engendré par $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{s-1}$ puisque $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{s-1}$

est une base. Donc g_s est le quotient commun des $\gamma_{q_{s-1}+1}, \ldots, \gamma_{q_s}$ par les $a_{sq_{s-1}+1}, \ldots, a_{sq_s}$. En recommençant avec $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}_{s-1}$ on constate le caractère décidable de l'appartenance d'un élément $m_1, \ldots, m_q$ à Γ.

Du fait que $\neg \forall x(x = 0 \vee x \neq 0)$, il est clair qu'on ne peut pas construire d'algorithme transformant une suite finie de nombres réels en une base régulière du groupe qu'elle engendre. Cependant on a :

<u>Lemme 7.</u>- "Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ une suite finie de nombres réels. Il n'est pas vrai qu'on ne puisse pas construire une base régulière du groupe engendré par les $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ".

<u>Démonstration.</u> On suit la démonstration classique (cf., par exemple, [22]). On introduit pour cela les groupes Γ_h obtenus à partir du groupe Γ engendré par les $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ en prenant les éléments de Γ dont les composantes d'indice supérieur à h sont nulles. Ainsi $\Gamma_o = \{0\}$ et $\Gamma_q = \Gamma$.

Considérons, pour h fixé, $h \leq q - 1$, J l'ensemble des entiers relatifs a pour lesquels on puisse construire des entiers $m_1, \ldots, m_h$ tels que $\underbrace{m_1, \ldots, m_h, a, 0, \ldots, 0}_{q \text{ nombres}} \in \Gamma$ ou encore, $m_1, \ldots m_h, a \in \Gamma_{h+1}$

J est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs. Si $J = \{0\}$, $\Gamma_{h+1} = \Gamma_h$. On suppose $J \neq \{0\}$, c'est-à-dire $J \setminus \{0\}$ non vide. Cela équivaut à $\neg\neg \exists a(a \in J \;\&\; a \neq 0)$ (a est une variable parcourant les entiers relatifs). On suppose $J \setminus \{0\}$ habité, c'est-à-dire $\exists a(a \in J \& a \neq 0)$.

On peut supposer $a > 0$. Considérons les entiers $1,\dots,j,\dots a$. On a $\neg\neg(j \in J \vee j \notin J)$, et donc $\neg\neg \mathop{\&}\limits_{j=1}^{a} (j \in J \vee j \notin J)$. Si on suppose $\mathop{\&}\limits_{j=1}^{a} (j \in J \vee j \notin J)$ on obtient que le plus petit entier positif qui appartient à J (et qui donc est plus petit ou égal à a) divise tout élément de J. On a donc :

(9) $\neg\neg \exists a\, (a \geq 0 \,\&\, \forall a_1 \in J \equiv a|a_1))$ où $a|a_1$ signifie a divise a_1.

Le cas $J = \{0\}$ correspond à $a = 0$. On suppose maintenant $\exists a\, (a \geq 0 \,\&\, \forall a_1 (a_1 \in J \equiv a|a_1))$. Si $a = 0$, $J = \{0\}$ et donc $\Gamma_{h+1} = \Gamma_h$. Sinon, on peut construire des entiers relatifs $m_1^o,\dots, m_h^o$ tels que $m_1^o,\dots, m_k^o\,, a \in \Gamma_{h+1}$. Si $m_1,\dots,m_{h+1} \in \Gamma_{h+1}$ avec $m_{h+1} \neq 0$, alors $a|m_{h+1}$. Donc $m_{h+1} = ad$ avec d entier naturel. Alors $m_1 - m_1^o d\,,\dots, m_h - m_h^o d \in \Gamma_h$. On suppose que Γ_h admet une base régulière $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_s$. On pose alors $\mathfrak{a}_{s+1} = m_1^o\,,\dots, m_h^o, a$. Alors $\mathfrak{a}_1\,,\dots, \mathfrak{a}_{s+1}$ est une base régulière de Γ_{h+1} : $\mathfrak{a}_1\,,\dots, \mathfrak{a}_{s+1}$ est générateur d'après ce qui précède. Si $g_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + g_{s+1}\, \mathfrak{a}_{s+1} = 0$, $g_{s+1} = 0$ puisque $a \neq 0$.

On se retrouve alors avec $g_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + g_s \mathfrak{a}_s = 0$ d'où $g_1 = \dots = g_1 = 0$ ($\mathfrak{a}_1\,,\dots, \mathfrak{a}_s$ est une base de Γ_h).

Il résulte donc de (9) que si on peut construire une base régulière de Γ_h, on ne peut pas ne pas construire une base régulière de Γ_{h+1}. Donc, comme $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$, si on ne peut pas ne pas construire une base régulière de Γ_h, on ne peut pas ne pas construire une base régulière

Comme $\Gamma_o = \{0\}$, on obtient par récurrence que $\Gamma_q = \Gamma$ ne peut pas ne pas avoir de base régulière $\blacksquare$.

<u>Corollaire.</u>- "Soit P un polynôme trigonométrique. Alors on a :

$$(10)\ \neg\neg\, \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \supset \exists L\, (L > 0 \,\&\, \forall x\, \exists \zeta (x < \zeta < x + L \,\&\, \forall x_1 |\Phi_P(x_1 + \zeta) - \Phi_P(x_1)| < \varepsilon))))\text{"}.$$

CHAPITRE II.

ESPACES LOCALEMENT VAGUEMENT SEPARABLES.

1. Définition et propriété de la séparabilité vague locale.

Soit $\mathfrak{M}^0$ un ensemble, $\underset{1}{=}$ et $\underset{2}{=}$ des relations d'égalité sur $\mathfrak{M}^0$, T_1 et T_2 des bases de topologies associées, respectivement, aux espaces $\langle \mathfrak{M}^0, \underset{1}{=}\rangle$ et $\langle \mathfrak{M}^0, \underset{2}{=}\rangle$. On utilisera la lettre X, éventuellement indexée, pour représenter les éléments de $\mathfrak{M}^0$. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de $\mathfrak{M}^0$ avec $A_1 \subset A_2$. On dira que la topologie T_1 <u>absorbe vaguement la topologie</u> T_2 (ou que la topologie T_2 est <u>vaguement absorbée</u> par la topologie T_1) dans A_2 par rapport à A_1 si on a :

(1) $\forall X(X \in A_2 \supset \neg\neg \exists X_1 \Phi(X_1 \underset{1}{=} X \,\&\, \forall k(\Phi(k) : A_1) \,\&\, X_1 \lim_{k\to+\infty} {}_{T_2}\, \Phi(k)))$.

où Φ désigne les suites d'éléments de $\mathfrak{M}^0$.

Soit $\mathcal{H} = \langle \mathfrak{M}, I, B, \sigma, \vartheta, \mathcal{L}\rangle$ un espace topologique gerbé et $i \in I$. On dira que $\mathcal{H}$ <u>est vaguement séparable dans</u> $(B)_i$ si on peut construire un espace topologique gerbé $\mathcal{H}_1$ et une application Ψ de $\mathcal{H}_1$ dans $(B)_i$ tels que

(i) $\Psi(\mathcal{H}_1)$ soit dense dans $(B)_i$

(ii) on puisse construire un ensemble énumérable $\mathcal{E}$ de points de $\mathcal{H}_1$ tel que la topologie induite sur $\mathcal{H}_1$ par l'application Ψ absorbe vaguement la topologie de $\mathcal{H}_1$ dans le fondement de $\mathcal{H}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$.

On dit qu'un espace topologique gerbé est <u>localement vaguement séparable</u>

s'il est vaguement séparable dans chaque élément de la base de la topologie. (cf. [24]) .

On remarque qu'un espace topologique gerbé séparable dont les éléments de la base de la topologie sont des parties d'appui, ce qui est le cas d'un espace métrique complet séparable, est un espace localement vaguement séparable. De même, si pour tout élément de la base de la topologie de l'espace topologique gerbé $\mathfrak{X}$ on peut construire un espace topologique gerbé séparable $\mathfrak{X}_1$ et une application de $\mathfrak{X}_1$ dans cet élément de la base de la topologie de $\mathfrak{X}$ tels que l'image de $\mathfrak{X}_1$ par cette application soit dense dans cet élément de la base de la topologie, alors $\mathfrak{X}$ est un espace localement vaguement séparable.

Dans la suite on s'appuiera sur le théorème suivant :

<u>Théorème 3.</u>- (cf. [24]). "Soit $\mathfrak{X}$ un espace localement vaguement séparable et $\langle \mathfrak{N}, T \rangle$ un espace topologique M-régulier. Alors toute application de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{N}$ est continue en chaque point où elle est définie".

<u>Démonstration</u> (cf. [24]). soit $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{M}, I, B, \sigma, \sigma, \mathcal{L} \rangle$. D'après le théorème 1 , il suffit de montrer que toute partie d'appui de $\mathfrak{M}$ est $\langle I,B \rangle$ - traçable.

Soit $\mathcal{G}$ une partie d'appui de $\mathfrak{M}$ et $i \in I$. On suppose que l'on a

(2) $\exists X(X \in \mathcal{G} \cap (B)_i)$.

où X , éventuellement indexée, est utilisée en qualité de variable des points de $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathfrak{X}_1$ et Ψ l'espace topologique gerbé et l'application provenant de la définition de la séparabilité vague locale.

Soit θ une suite de points de $\mathcal{X}_1$ telle que $\Psi \circ \theta$ converge vers le point X. D'après le principe de prise, on peut construire un entier n_o tel que $\Psi\circ\theta(n_o) \in \mathcal{G}$. Donc de (2) on tire :

(3) $\exists Y(Y \in \mathcal{X}_1 \,\&\, (\Psi(Y) \in \mathcal{G} \cap (B)_i))$,

où Y est une variable pour les points de $\mathcal{X}_1$.

On suppose qu'on peut construire un point Y_1 et une suite Φ de points de $\mathcal{E}$ telle que :

(i) $\Psi(Y_1) = \Psi(Y)$ (égalité par rapport à la relation induite par Ψ)

(ii) $Y_1 \lim\limits_{k\to+\infty} {}_{\mathcal{X}_1} \Phi(k)$

Comme Ψ est une application de $\mathcal{X}_1$ dans $\mathcal{X}$, $\Psi^{-1}(\mathcal{G})$ est une partie d'appui de $\mathcal{X}_1$. Comme $Y_1 \in \Psi^{-1}(\mathcal{G})$ et que $Y_1 \lim\limits_{k\to+\infty} {}_{\mathcal{X}_1} \Phi(k)$, on déduit du principe de prise qu'on peut construire un entier k_o tel que $\Psi(\Phi(k_o)) \in \mathcal{G} \cap (B)_i$. Donc, si on peut construire Y_1 et Φ vérifiant (i) et (ii) on a :

(4) $\exists Z(Z \in \mathcal{E} \,\&\, (\Psi(Z) \in \mathcal{G} \cap (B)_i))$,

où Z est une variable pour les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$. La formule (4) équivaut à la formule

(5) $\exists Z(Z \in \mathcal{E} \,\&\, !\mathfrak{G} \circ \Psi(Z))$,

où $\mathfrak{G}$ est l'algorithme définissant $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{X}$ est un espace localement vaguement séparable, il résulte donc des hypothèses faites que

(6) $\neg\neg \exists Z(Z \in \mathcal{E} \,\&\, !\, \mathfrak{G} \circ \Psi(Z))$.

Mais la formule $Z \in \mathfrak{G} \,\&\, !\,\mathbb{G} \circ \Psi(Z)$ est équivalente à une formule du type $!\mathbb{K}(Z)$ pour un certain algorithme $\mathbb{K}$. Il résulte donc du principe du choix constructif que les formules (5) et (6) sont équivalentes.

On a vu plus haut que (6) est une conséquence de (1). Donc de l'hypothèse $\mathcal{Y} \cap (B)_i \neq \emptyset$ découle la formule (6). Comme (5) et (6) sont équivalentes, on a :

$$\neg\neg\, \exists X (X \in \mathcal{Y} \cap (B)_i \supset \exists Z (Z \in \mathfrak{G} \;\&\; \Psi(Z) \in \mathcal{Y} \cap (B)_i)$$

ce qui établit la $\langle I,B \rangle$ - traçabilité de l'ensemble $\mathcal{Y}$ qui est une partie d'appui. ▨

2. Quelques remarques sur la non-séparabilité et la non-métrisabilité.

On a vu au paragraphe I.2. la définition d'un espace topologique séparé et celle d'un espace uniforme.

On dira qu'un espace topologique $\langle \mathcal{M}, \langle I,B \rangle\rangle$ est <u>non-séparable</u> si pour toute suite Φ de points de $\mathcal{M}$ on peut construire un point X de $\mathcal{M}$ et un élément i de I tel que $X \in (B)_i \,\&\, \forall n(\Phi(n) \notin (B)_i)$.

Un espace uniforme est dit <u>suffisamment non-séparable</u> si on peut construire une famille $\{X_\lambda\}$ de points de $\mathcal{M}$ paramétrée par les nombres réels telle que :

$$\forall \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 = \lambda_2 \supset X_{\lambda_1} = X_{\lambda_2}) \,\&\, \exists m \,\forall \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 \neq \lambda_2 \supset \neg\, S(m, X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}))\,.$$

On a :

<u>Lemme 8</u>.- "Un espace uniforme suffisamment non-séparable n'est pas métrisable.

<u>Démonstration</u>. Supposons qu'il existe une métrique ρ sur $\mathcal{M}$ définissant une topologie équivalente à celle de S. En vertu de la relation (I.2(vii)) on peut construire un entier m tel que $\forall X_1X_2(\neg\, S(n,X_1,X_2) \supset$ $\supset \rho(X_1, X_2) \geqslant 2^{-m})$, où n provient de la définition de la non-sépaabilité suffisante.

On définit alors une fonction Ψ de la variable réelle λ à valeurs réelles par $\Psi(\lambda) \simeq \rho(X_\lambda, X_{-\lambda})$. Ψ est bien une foncton, car $\lambda_1 = \lambda_2 \supset \Psi(\lambda_1) = \Psi(\lambda_2)$. Il est par ailleurs bien clair que pour $\lambda = 0$, $\Psi(\lambda) = 0$ et que si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -\lambda$ et donc, on a $\neg\, S(n, X_\lambda, X_{-\lambda})$, d'où $\Psi(\lambda) \geqslant 2^{-m}$. La fonction Ψ admet donc unediscontinuité constructive en 0, ce qui est impossible (cf.[26]). ∎

On sait d'après [33] qu'un espace uniforme complet peut être doté d'une structure topologique gerbée ne modifiant pas sa topologie (à équivalence près).

On a :

<u>Lemme 9.</u>- "Soit $\mathcal{X} = \langle \mathcal{M}, I, B, \sigma, \mathcal{O}, \mathcal{L} \rangle$ un espace topologique gerbé tel que $\langle I,B\rangle$ définisse une structure uniforme sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire I de la forme $\mathbb{Z} \times \mathcal{M}$ et B défini par $\langle\langle m,X\rangle, X_1\rangle \in B \equiv S(m,X,X_1)$ où S définit une structure uniforme sur $\mathcal{M}$). On suppose qu'on peut construire une suite φ d'éléments de I telle que, $(B)_{\varphi(n)} \subset (B)_{\varphi(n+1)}$ et $\mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B)_{\varphi(n)}$. On suppose également que pour chaque n, on peut construire un espace topologique gerbé séparable $\mathcal{X}_1$, une application Ψ de $\mathcal{X}_1$ dans $(B)_{\varphi(n)}$ et un ensemble énumérable $\mathcal{E}$ de points de $\mathcal{X}_1$, dense dans $\mathcal{X}_1$, tels que $\Psi(\mathcal{X}_1)$ soit dense dans $(B)_{\varphi(n)}$ et que la topologie induite sur $\mathcal{E}$ par Ψ soit métrisable. Alors, si l'espace $\mathcal{X}$ est suffisamment non-séparable, sa topologie n'est pas M-majorée ; si la topologie de $\mathcal{X}$ est M-majorée, alors $\mathcal{X}$ est séparable".

<u>Démonstration.</u> On suppose tout d'abord $\mathcal{X}$ suffisamment non séparable. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels. On peut construire un entier k tel que $X_{\lambda_i} \in (B)_{\varphi(k)}$ pour $i = 1,2$ puisque $\mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B)_{\varphi(n)}$. D'après la définition de la famille $\{X_\lambda\}$, on peut construire un entier n_o tel que $\forall\lambda\lambda'(\lambda \neq \lambda' \supset \neg\, S(n_o, X_\lambda, X_{\lambda'}))$. Comme la topologie induite par Ψ sur $\mathcal{E}$ est métrisable, on a donc une application métrique ρ telle que :

$$\forall n\, \exists m\, \forall Z_1 Z_2 (S(m,\Psi(Z_1), \Psi(Z_2)) \supset \rho(Z_1 \square Z_2) < 2^{-n}) \quad \text{et}$$

$\forall n \exists m \forall Z_1 Z_2 (\rho(Z_1 \sqcap Z_2) < 2^{-m} \supset S(n, \Psi(Z_1), \Psi(Z_2)))$, où Z avec ou sans indice est utilisée en qualité de variable des éléments de $\mathcal{E}$. D'après l'interprétation constructive des formules, on peut construire deux algorithmes f et g tels que

(1) $\forall n\, Z_1 Z_2 (S(f(n), \Psi(Z_1), \Psi(Z_2)) \supset \rho(Z_1 \sqcap Z_2) < 2^{-n})$.

(2) $\forall n\, Z_1 Z_2 (\rho(Z_1 \sqcap Z_2) < 2^{-g(n)} \supset S(n, \Psi(Z_1), \Psi(Z_2)))$.

On note $\mathcal{V}_i$ le voisinage de $X_{\lambda_i}(B)_{\langle m_o, X_{\lambda_i} \rangle}$ où $m_o = f(g(n_o+1)+1)+1$.

On observe que si $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ représentent le même ensemble de points de $\mathcal{M}$. Soit E_i une partie d'appui de $\mathcal{M}$ telle que $X_{\lambda_i} \in E_i$ & $E_i \subset \mathcal{V}_i$. On sait que si la topologie de $\mathcal{M}$ est M-majorée, on peut construire de tels E_i. Comme $\Psi(\mathcal{X}_1)$ est dense dans $(B)_{\varphi(k)}$, on peut construire un point Y_i de $\mathcal{X}_1$ tel que $\Psi(Y_i) \in E_i$ en vertu du principe de prise. Or, $\Psi^{-1}(E_i)$ est une partie d'appui de $\mathcal{X}_1$. Comme $Y_i \in \Psi^{-1}(E_i)$ et que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{X}_1$, on peut donc construire un élément Z_i de $\mathcal{E}$ tel que $\Psi(Z_i) \in E_i$, toujours en vertu du principe de prise.

Etudions alors $\rho(Z_1 \sqcap Z_2)$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $X_{\lambda_1} = X_{\lambda_2}$ et donc, comme on a $S(m_o, X_{\lambda_1}, \Psi(Z_1))$ puisque $Z_i \in E_i$, on a $S(f(g(n_o+1)), \Psi(Z_1), \Psi(Z_2))$ d'où l'on tire $\rho(Z_1 \sqcap Z_2) < 2^{-[g(n_o+1)+1]}$ d'après (1).

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $X_{\lambda_1} \neq X_{\lambda_2}$. Comme on peut supposer f et g strictement croissantes et $f(n) > n$ et $g(n) > n$ pour tout n, on a donc $\neg S(n_o + 1, \Psi(Z_1), \Psi(Z_2))$ d'où l'on tire $\rho(Z_1 \sqcap Z_2) \geqslant 2^{-g(n_o+1)}$ d'après (2) et donc $\rho(Z_1 \sqcap Z_2) > 2^{-[g(n_o+1)+1]}$. Donc, on a construit un entier

p_o tel que $\lambda_1 = \lambda_2 \supset \rho(Z_1 \square Z_2) < 2^{-p_o}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \supset \rho(Z_1 \square Z_2) > 2^{-p_o}$.

Donc, pour tout entier n on a construit une métrique ρ_n sur $\mathcal{E}_n$, un entier p_n et un algorithme $\mathbb{K}_n$ tels que :

$$\forall\lambda(\lambda \in (B)_{\varphi(n)} \supset !\ \mathbb{K}_n(\lambda) \,\&\, \mathbb{K}_n(\lambda) \in \mathcal{E}_n) \,\&\, \forall\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 \in (B)_{\varphi(n)} \,\&$$

$$\& \,\lambda_2 \in (B)_{\varphi(n)} \supset (!\mathbb{K}_n(\lambda_1) \,\&\, !\mathbb{K}_n(\lambda_2) \,\&\, \mathbb{K}_n(\lambda_1) \in \mathcal{E}_n \,\&\, \mathbb{K}_n(\lambda_2) \in \mathcal{E}_n \,\&\, (\lambda_1 = \lambda_2 \supset$$

$$\supset \rho(\mathbb{K}(\lambda_1) \square \mathbb{K}(\lambda_2)) < 2^{-p_n}) \,\&\, (\lambda_1 \neq \lambda_2 \supset \rho(\mathbb{K}_n(\lambda_1) \square \mathbb{K}_n(\lambda_2)) > 2^{-p_n}))) .$$

Il en résulte qu'on peut construire un algorithme Δ tel que :

$$\forall\lambda_1\lambda_2(!\ \Delta(\lambda_1,\lambda_2) \,\&\, (\Delta(\lambda_1,\lambda_2) \doteq \Lambda \supset \lambda_1 = \lambda_2) \,\&\, (\Delta(\lambda_1,\lambda_2) \not\doteq \Lambda \supset \lambda_1 \neq \lambda_2))$$

ce qui est impossible d'après [36].

On suppose maintenant que l'espace $\mathfrak{X}$ a sa topologie M-majorée. La construction précédente montre que dans chacun des $(B)_{\varphi(n)}$, l'ensemble des $\Psi(Z)$ où Z parcourt $\mathcal{E}$, qui est énumérable, est dense dans $(B)_{\varphi(n)}$. Comme une réunion (constructive, ce qui est le cas ici) d'ensembles énumérables est énumérable , on a le résultat cherché ∎.

CHAPITRE 3.

CONSTRUCTIONS.

1. Suite de polynômes rationnels associés à un polynôme trigonométrique.

1.1. Soit F une suite de fonctions presque-périodiques, c'est-à-dire un algorithme transformant tout couple $n * x$ où n est un entier naturel et x un nombre réel en un nombre complexe, tel que pour chaque n, l'algorithme F_n soit une fonction de la variable réelle x qui soit presque périodique. On dit que la suite F est également ε-presque-périodique si on peut construire un nombre réel positif L appelé intervalle d'inclusion commun aux F_n pour ε tel que

$$(1) \quad \forall n x \exists \zeta \, (x < \zeta < x + L \;\&\; \forall x_1 (|F_n(x_1 + \zeta) - F_n((x_1)) < \varepsilon)).$$

On dit que la suite F de fonctions presque périodiques est relativement également presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire un entier m_o tel que la suite des F_m pour $m \geqslant m_o$ soit également ε-presque périodique. On a :

Lemme 10.- "Soit F une suite relativement également presque périodique de fonctions presque-périodiques uniformément continues. On pose

$$\sigma_{n,m} = \sup_{|x| \leqslant n} |F_m(x)| \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_\ell(F_m) = \frac{1}{\ell}\int_o^\ell F_m(t)dt$$ où ℓ est un nombre réel positif. On a :

(2) $\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \exists Nm_0 \forall nm \quad (n \geqslant N \,\&\, m \geqslant m_0 \supset |\sigma_{n,m} - \sigma_{N,m}| < \varepsilon))$

(3) $\forall\varepsilon\ (\varepsilon > 0 \supset \exists \ell_0 m_0 \forall \ell m\ (\ell \geqslant \ell_0 \ \&\ m \geqslant m_0 \supset |\ \mathcal{M}_\ell(F_m) - \mathcal{M}_{\ell_0}(F_m)|<\varepsilon))$".

<u>Démonstration</u>. On considère d'abord la première assertion.

Soit ε fixé, $\varepsilon > 0$. On peut construire un entier m_0 tel qu'on puisse construire un intervalle d'inclusion L commun aux F_m pour $m \geqslant m_0$ et pour $\varepsilon/2$, c'est-à-dire :

(4) $\forall mx(m \geqslant m_0 \supset \exists\zeta(x < \zeta < \quad x + L \ \&\ \forall x_1(|F_m(x_1+\zeta) - F_m(x_1)| < \varepsilon/2)))$.

Si on remplace L par L_1 avec $L_1 \geqslant L$ dans (4), la formule reste valable. On peut donc y remplacer L par N avec $N \geqslant L$ et N entier, un tel entier étant réalisable. D'après la démonstration du lemme 1, pour chaque m avec $m \geqslant m_0$, pour $n \geqslant N$ $|\sigma_{N,m} - \sigma_{n,m}| < \varepsilon$ car N est un intervalle d'inclusion pour F_m et $\varepsilon/2$. D'où la formule (2).

Pour la seconde assertion : soit ε fixé, $\varepsilon > 0$. On tire de (2) qu'on peut construire un réel positif M_1 tel que $\forall mx(|F_m(x)| \leqslant M_1)$; il suffit pour cela de passer à la limite suivant n dans (2) et de fixer ε et m, comme on le fait pour montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. Dans la démonstration du lemme 2, on remarque que la formule (I;4;3) reste vraie si on y remplace M par M_1 et si on prend pour L un intervalle d'inclusion commun aux F_m pour $m \geqslant m_0$ et pour $\frac{\varepsilon}{8M_1}$. Donc, si on prend $\ell_0 = \frac{16M_1L}{\varepsilon}$, la formule (I ; 4 ; 3) est vraie pour chaque F_m avec $m \geqslant m_0$; il en est de même de la formule (I ; 4 ; 4) et des suivantes. d'où l'assertion (3) annoncée. ∎

On a vu au paragraphe 4 du chapitre I la définition de la notion d'intervalle d'inclusion relatif à des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ et ε avec $\varepsilon > 0$.

On dit que la suite Λ de q-uplets de nombres réels est ε-équiphasée, où $\varepsilon > 0$ est fixé, si on peut construire un intervalle d'inclusion L avec $L > 0$ tel que

$$\forall m x \exists \zeta p_1 \ldots p_q (x < \zeta < x + L \;\&\; \forall k (1 \leqslant k \leqslant q \supset |\lambda_k^{(m)} \zeta - 2\pi\rho_k| < \varepsilon))$$

où $\lambda_k^{(m)} = pr_k \Lambda_m$.

On dit que la suite Λ de q-uplets de nombres réels est relativement équiphasée si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire un entier m_o tel que la suite des Λ_m pour $m \geqslant m_o$ soit ε-équiphasée.

On remarque que si les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont en phase, tout polynôme $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$ est presque-périodique, car

$$|\Phi_P(x + \zeta) - \Phi_P(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{q} |\alpha_k| |\lambda_k \zeta - 2\pi p_k|$$

De cette remarque on déduit :

<u>Lemme 11</u>.- "Soit Λ une suite de q-uplets de nombres réels relativement équiphasée. Soit Π une suite de polynômes trigonométriques telle que Λ_m soit la suite des fréquences du polynôme Π_m et telle qu'on puisse construire un réel $M > 0$ pour lequel, si $\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_q^{(m)}$ sont les coefficients du polynôme Π_m on ait $|\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{(m)}| \leqslant M$. Alors la suite des fonctions preqque-périodiques uniformément continues Φ_{Π_m} est relativement également presque-périodique".

On a :

Lemme 12.- "Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des nombres réels pour lesquels on puisse construire une base régulière du groupe qu'ils engendrent. On peut alors construire une suite Λ de q-uplets de nombres réels relativement équiphasée telle que :

$$\forall n(\Lambda_{2n} = \lambda_1 * \ldots * \lambda_q) \,\&\, \forall nk(1 \leqslant k \leqslant q \supset \mathrm{pr}_k \Lambda_{2n+1} \in \mathbb{Q})$$

où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels et telle que :

$$\forall k(1 \leqslant k \leqslant q \supset \lambda_k \lim_{n \to +\infty} \mathrm{pr}_k \Lambda_n) \quad ".$$

Démonstration. De la démonstration du lemme 4, il résulte que l'intervalle d'inclusion L associée aux $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ et $4\sqrt{\frac{q+1}{N}}$ ne dépend pas des $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ dans la mesure où reste vérifiée l'hypothèse

$$\forall m_1 \ldots m_q (\forall j(1 \leqslant j \leqslant q \supset |m_j| \leqslant N+1) \,\&\, m_1\lambda_1 + \ldots + m_q\lambda_q = 0 \supset$$

$$\supset m_1 = \ldots = m_q = 0)$$

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ une base régulière du groupe engendré par les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. On a $\alpha_j = \underbrace{b_1^{(j)}, \ldots, b_{q_j}^{(j)}, 0, 0, \ldots, 0}_{q \text{ nombres}}$ avec $b_h^{(j)}$ entiers relatifs,

$b_{q_j}^{(j)} \neq 0$ et $q_1 < \ldots < q_s$. Les nombres $\lambda_{q_1}, \ldots, \lambda_{q_s}$ dépendent linéairement sur les rationnels des autres nombres de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. En renumérotant au besoin ces nombres, on peut supposer que $\lambda_{q_1} = \lambda_1, \ldots, \lambda_{q_s} = \lambda_s$ et on obtient $\lambda_i = \sum_{j=1}^{q-s} C_{ij}\,\lambda_{s+j}$ $\quad i = 1, \ldots, s$ avec C_{ij} rationnels.

On pose alors :

$$(5)\qquad \begin{cases} \ell_{s+j}^{(n)} = \widetilde{(\lambda_{s+j})}_n & j = 1,\ldots,q-s \\ \ell_i^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{q-s} c_{ij}\ell_{s+j} & i = 1,\ldots,s \end{cases}$$

On a alors :

$$(6)\qquad \forall m_1 \ldots m_q(m_1\lambda_1 + \ldots + m_q\lambda_q = 0 \supset \forall n(m_1\ell_1^{(n)} + \ldots + m_q\ell_q^{(n)} = 0)) ,$$

car d'après (5) $\mathfrak{a}_1 ,\ldots, \mathfrak{a}_s$ appartiennent, pour chaque n , au groupe engendré par les nombres $\ell_1^{(n)} ,\ldots, \ell_q^{(n)}$.

On définit la suite cherchée par :

$$\Lambda_{2n} = \lambda_1 * \ldots * \lambda_q \quad \text{et} \quad \Lambda_{2n+1} = \ell_1^{(n)} * \ldots * \ell_q^{(n)} .$$

D'après (5), il est clair que

$$(7)\qquad \forall k(1 \leqslant k \leqslant q \supset \lambda_k \lim_{n\to+\infty} \mathrm{pr}_k\ \Lambda_n) .$$

Il reste à montrer que la suite Λ est relativement équiphasée.

D'après le lemme 6, pour chaque n , la suite des nombres Λ_n est rationnellement discrète. Examinons l'application de l'algorithme décrit dans la démonstration du lemme 5 à la suite $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$. Soit ε fixé et soit k le numéro de l'étape à laquelle le travail de l'algorithme s'achève par une application du lemme 4 à la suite $\mu_1 ,\ldots, \mu_h$ qui est une sous-suite de $\lambda_1 ,\ldots, \lambda_q$ obtenue par k extractions successives d'un des λ_i restant à chaque fois. Considérons les nombres $\ell'^{(n)}_1 ,\ldots, \ell'^{(n)}_h$ définis par : si μ_j est de la forme λ_{h_j} avec $1 \leqslant h_j \leqslant q$, alors $\ell_j'^{(n)} = \ell_{h_j}^{(n)}$. On a construit un entier N tel que $\sqrt{\frac{q+1}{N}} < c_{k-1}$

(cf. démonstration du lemme 5). Comme le lemme 4 s'applique à la suite $\mu_1, \dots, \mu_h$ avec N on a

$$\forall m_1 \dots m_h ((|m_1| \leqslant N+1 \,\&\, \dots \,\&\, |m_h| \leqslant N+1 \,\&\, m_1\mu_1 + \dots + m_h\mu_h = 0) \supset$$

$$\supset m_1 = \dots = m_h = 0)$$

Un intervalle d'inclusion L associé aux $\mu_1, \dots, \mu_h$ et à c_{k-1} est alors défini par

$$(1 - \frac{(N+1)^q}{Lh_o})(1 - \frac{1}{N+1}) > 1 - \frac{1}{N} \quad \text{où } 0 < h_o < \min\{|m_1\mu_1 + \dots + m_h\mu_h| \;;$$

$$|m_1| \leqslant N+1 \,\&\, \dots \,\&\, |m_h| \leqslant N+1 \,\&\, |m_1| + \dots + |m_h| \neq 0\}.$$

D'après (7) on peut construire un entier n_o tel que pour $n \geqslant n_o$ on ait $\min\{|m_1\ell_1'^{(n)} + \dots + m_h\ell_h'^{(n)}| \,;\, |m_1| \leqslant N+1 \,\&\, \dots \,\&\, |m_h| \leqslant N+1 \,\&\, |m_1| + \dots + |m_h| \neq 0\} > h_o$.

Donc le lemme 4 s'applique également à la suite $\ell_1'^{(n)}, \dots, \ell_h'^{(n)}$ et à c_{k-1} pour $n \geqslant n_o$, avec le même N. Donc on a un intervalle d'inclusion commun à $\ell_1'^{(n)}, \dots, \ell_h'^{(n)}$ (pour $n \geqslant n_o$) et $\mu_1, \dots, \mu_h$ relatif à c_{k-1}. On a vu, dans la démonstration du lemme 5 qu'on "remonte" à la suite $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ par application itérée du lemme 3. En vertu de (6), le lemme (3) s'applique aux mêmes combinaisons linéaires sur les rationnels quand on "remonte" de la suite $\ell_1'^{(n)}, \dots, \ell_h'^{(n)}$ à la suite $\ell_1^{(n)}, \dots, \ell_q^{(n)}$. Donc les intervalles d'inclusions obtenus à chaque application du lemme 3 restent des intervalles d'inclusion pour la suite correspondante quand $n \geqslant n_0$. Il en résulte que la suite des Λ_n pour $n \geqslant 2n_0$ est ε-équiphasée. Donc la suite Λ est relativement équiphasée ∎.

Corollaire 1.- " Soit $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$ un polynôme trigonométrique pour lequel on puisse construire une base régulière du groupe engendré par ses fréquences. On peut alors construire une suite $\mathcal{R}$ de polynômes rationnels ayant tous exactement q fréquences et q coefficients telle que si F est la suite de fonctions définies par les conditions $F_{2n} = \Phi_{\mathcal{R}_n}$ et $F_{2n+1} = \Phi_P$, la suite F soit une suite relativement également presque-périodique de fonctions presque-périodiques uniformément continues. De plus, si on écrit

$\mathcal{R}_n = a_1^{(n)} \tau \ell_1^{(n)} * \ldots * a_q^{(n)} \tau \ell_q^{(n)}$ on a

$$\forall k (1 \leqslant k \leqslant q \supset \alpha_k \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} \;\&\; \lambda_k \lim_{n\to\infty} \ell_k^{(n)})$$ ".

Démonstration. A la suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des fréquences du polynôme P, on associe la suite Λ construite au lemme 12. Si z est un nombre complexe avec $z = x + iy$, on pose $\hat{z}_n = \underline{x}(\delta(n+1)) + i\underline{y}(\delta(n+1))$ où $\delta(n) \simeq \max(\overline{x}(n), \overline{y}(n))$. On pose alors $a_k^{(n)} = (\widehat{\alpha_k})_n$. Si $M = (\sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|) + 1$, il est clair qu'on peut supposer $\forall n (\sum_{k=1}^{q} |a_k^{(n)}| \leqslant M)$.

On pose $\mathcal{R}_n = a_1^{(n)} \tau \ell_1^{(n)} * \ldots * a_q^{(n)} \tau \ell_q^{(n)}$ où $\ell_1^{(n)} * \ldots * \ell_q^{(n)} = \Lambda_{2n+1}$.

Le corollaire résulte du lemme 11 et du lemme 12 ∎.

On dit qu'une suite F de fonctions presque périodiques uniformément continues converge <u>étroitement</u> vers la fonction presque périodique uniformément continue f si

(i) la suite $F^{(1)}$ définie par $F^{(1)}_{2n} = f$; et $F^{(1)}_{2n+1} = F_n$ est relativement également presque périodique.

(ii) sur chaque intervalle $[-n,+n]$, la suite F converge uniformément vers la fonction f.

On note la convergence étroite $f \; e\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n$.

Soit f une fonction uniformément continue. On appelle <u>module de continuité uniforme de f</u> tout algorithme ω transformant tout réel positif ε en un réel positif η tel que $\forall x_1 x_2 (|x_1 - x_2| < \eta \supset |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$. Si ω est un module de continuité uniforme de f on notera cette relation $\underline{CU}(\omega,f)$.

Soit f une fonction presque périodique. On appelle <u>module de presque-périodicité de f</u> tout algorithme φ transformant tout réel positif en un réel positif et tout couple $x * y$ où x est un réel et y un réel positif en un réel, tel que $\forall \varepsilon\, x(\varepsilon > 0 \supset (!\ \varphi(\varepsilon)\ \&\ \ !\varphi(x * \varepsilon)\ \&\ x<\varphi(x*\varepsilon)<x+\varphi(\varepsilon)\ \&$ $\&\ \forall x_1 (\ |f(x_1 + \varphi(x * \varepsilon)) - f(x_1)\ | < \varepsilon)))$. Dans cette formule, correspondant à $(I\ ;\ 4\ ;\ 2\ ;\ (1))$, les deux algorithmes provenant de l'interprétation constructive de $(I\ ;\ 4\ ;\ 2\ ;\ (1))$ ont été condensés en un seul. Si φ est un module de presque périodicité de f, on note cette relation $\underline{PP}(\varphi,f)$.

On appelle <u>chiffre complet de fonction presque-périodique uniformément continue</u> en abrégé <u>chiffre complet de fonction u.p.p.</u>, tout triplet de la forme $\langle f,\omega,\varphi \rangle$ où f est une fonction presque-périodique uniformément continue, ω un module de continuité uniforme de f et φ un module de presque périodicité de f. On dit que le chiffre $\langle f,\omega,\varphi \rangle$ est un chiffre complet de la fonction f .

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme transformant tout chiffre complet de fonction u.p.p. en un nombre réel. On dit que $\mathcal{A}$ est <u>étroitement s-continu en</u> <u>$\langle f,\omega,\varphi \rangle$</u> , chiffre complets de fonctions u.p.p. si, pour toute suite $\mathcal{T}$ de chiffres complets de fonctions u.p.p. où la suite $pr_1 \circ \mathcal{T}$ converge étroitement vers f on a $\mathcal{A}(\langle f,\omega,\varphi\rangle) \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}(\mathcal{T}_n)$.

On remarque sans difficulté qu'on peut construire un algorithme transformant toute paire d'un polynôme trigonométrique P dont les fréquences sont relativement discrètes et d'un algorithme déterminant la discrétude rationnelle de ces fréquences en un chiffre complet de la fonction Φ_P . En particulier, on peut construire un algorithme $\mathcal{B}_1$ transformant tout polynôme rationnel Q en un chiffre complet de la fonction Φ_Q .

Du lemme 12 et de son corollaire 1 on tire :

<u>Corollaire 2.</u>- "Soit $\mathcal{A}$ un algorithme transformant tout chiffre complet de fonction u.p.p. en nombre réel, étroitement s-continu en chaque chiffre complet de fonction u.p.p. Alors on a :

$$\forall P \neg\neg \exists x\, \mathcal{Q} \forall \omega\varphi (\underline{CU}(\omega,\Phi_P) \& \underline{PP}(\varphi,\Phi_P) \supset \Phi_P \operatorname*{e-lim}_{n\to+\infty} \Phi_{\mathcal{Q}_n} \& \operatorname*{xlim}_{n\to+\infty} \mathcal{A}(B(\mathcal{Q}_n)))$$

où $\mathcal{Q}$ désigne les suites de polynômes rationnels".

<u>Démonstration.</u> Supposons qu'on puisse construire une base régulière du groupe engendré par les fréquences du polynôme P fixé. P étant un polynôme trigonométrique, on construit aisément un module de continuité uniforme de Φ_P . A partir de la base régulière du groupe engendré par les fréquences de P on peut, en vertu des lemmes 5 et 6 construire un module de presque-périodicité de Φ_P . Soient ω et φ de tels modules. Alors si

$x = \mathcal{A}(\langle \Phi_{\mathcal{P}}, \omega, \varphi \rangle)$ et $\mathcal{Q}$ est la suite du corollaire 1 du lemme 12, on a $\Phi_{\mathcal{P}}$ $\underset{n\to+\infty}{\text{e-lim}}$ $\Phi_{\mathcal{Q}_n}$ et $x \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{Q}_n))$. En effet, la première assertion résulte de ce que, en vertu du corollaire 1 du lemme 12, la convergence uniforme des $\Phi_{\mathcal{Q}_m}$ vers $\Phi_{\mathcal{P}}$ sur $[-n, +n]$ découle de la condition $\forall k(1 \leqslant k \leqslant q \supset \alpha_k \lim_{n\to+\infty} a_k^{(m)} \,\&\, \lambda_k \lim_{n\to+\infty} \ell_k^{(m)})$ où α_k, $a_k^{(m)}$ sont les coefficients respectivement de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}_m$ et λ_k, $\ell_k^{(m)}$ respectivement, les fréquences correspondantes. D'après l'hypothèse de continuité de $\mathcal{A}$, la seconde assertion est bien claire. Par définition de la convergence étroite et de la s-continuité, les relations obtenues ne dépendent pas de ω et φ pourvu que l'on ait $CU(\omega, \Phi_{\mathcal{P}})$ et $\underline{PP}(\varphi, \Phi_{\mathcal{P}})$ ∎.

1.2. Soit $\mathbb{N}_q$ l'ensemble des entiers naturels de 1 à q. On appelle <u>partie de $\mathbb{N}_q$</u> le mot vide ou tout mot H de la forme $a_1 * \ldots * a_r$ où $1 \leqslant r \leqslant q$, $a_j \in \mathbb{N}_q$ et $a_1 < \ldots < a_r$. Si H_1 et H_2 sont les parties de $\mathbb{N}_q$ on définit $H_1 \cap H_2$ et $H_1 \cup H_2$ comme des parties de $\mathbb{N}_q$. Si $H_1 \cap H_2$ est le mot vide, on écrit $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. On définit de même $H_1 \subset H_2$. Si H est une partie non vide, c'est-à-dire différente du mot vide, on note $H \neq \emptyset$.

Soit H une partie non vide de $\mathbb{N}_q$. On peut écrire $H = a_1 * \ldots * a_r$. On pose alors <u>déb</u> $H = a_1$. Il est clair qu'on peut construire un algorithme transformant en <u>déb</u> H toute partie non vide de $\mathbb{N}_q$ (on prend une notation des entiers où zéro n'est pas noté par le mot vide).

On appelle <u>partition de $\mathbb{N}_q$</u> tout mot $\mathcal{P}$ de la forme $H_1 ** \ldots ** H_s$ où les H_j sont des parties de $\mathbb{N}_q$ vérifiant les conditions :

(i) $1 \leqslant s \leqslant q$

(ii) $\bigcup_{j=1}^{s} H_j = 1 * \ldots * q$

(iii) $\forall jk(1 \leq j < k \leq s \supset H_j \cap H_k = \emptyset)$

(iv) $\underline{\text{déb}}\ H_1 < \ldots < \underline{\text{déb}}\ H_s$

On pose $s = \deg \mathcal{P}$ et $H_j = pr_j \mathcal{P}$ en convenant que pour $j > \deg \mathcal{P}$, $pr_j \mathcal{P} \mathrel{\bar{=}} \Lambda$.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux partitions de $\mathbb{N}_q$. On dit que $\mathcal{P}_1$ est <u>plus fine</u> que $\mathcal{P}_2$, et on note $\mathcal{P}_1 \geqslant \mathcal{P}_2$ si $\forall j\ \exists k(pr_j\ \mathcal{P}_1 \subset pr_k\ \mathcal{P}_2)$. On obtient ainsi un ordre sur les partitions de $\mathbb{N}_q$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des nombres réels donnés dans cet ordre. Soit δ un algorithme tel que $\forall k(\delta(k) = \max(\widehat{\lambda_1}(k+1), \ldots, \widehat{\lambda_q}(k+1)))$. Alors δ est un régulateur de convergence commun ux nombres λ_k et $|\lambda_j - \lambda_k|$. Si ξ désigne un des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, n pose $\tilde{\xi}_n = \xi(\delta(n+1))$.

On peut construire un algorithme W, tel que si ξ_1 et ξ_2 désignent deux nombres parmi les $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, on ait :

$$W(\xi_1 \square \xi_2 \square n) \mathrel{\bar{\neq}} \Lambda \quad \text{si} \quad |\tilde{\xi}_{1n} - \tilde{\xi}_{2n}| \leq 2^{-n}$$

$$W(\xi_1 \square \xi_2 \square n) \mathrel{\bar{=}} \Lambda \quad \text{si} \quad |\tilde{\xi}_{1n} - \tilde{\xi}_{2n}| > 2^{-n}$$

D'après la définition de δ on a :

(8) $\forall jkn\ (W(\lambda_j \square \lambda_k \square n) \mathrel{\bar{=}} \Lambda \supset W(\lambda_j \square \lambda_k \square n+1) \mathrel{\bar{=}} \Lambda)$

(9) $\forall jk((\forall n(W(\lambda_j \square \lambda_k \square n) \mathrel{\bar{\neq}} \Lambda) \equiv \lambda_j = \lambda_k) \& (\exists n(W(\lambda_j \square \lambda_k \square n) \mathrel{\bar{=}} \Lambda) \equiv \lambda_j \neq \lambda_k))$.

On définit sur $\mathbb{N}_q$ une relation d'équivalence par :

si $a,b \in \mathbb{N}_q$ $a \underset{(n)}{\sim} b = \exists\, a_1 \ldots a_p (2 \leqslant p \leqslant q \,\&\, a_1 = a \,\&\, a_p = b \,\&\, \forall j$ $(1 \leqslant j \leqslant p-1 \supset \mathbb{W}(\lambda_{a_j} \sqcap \lambda_{a_{j+1}} \sqcap n) \neq \Lambda))$.

Il est clair que la relation est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. On appelle n-chaîne allant de a à b une suite $a_1, \ldots, a_p$ d'éléments de $\mathbb{N}_q$ tels que $a_1 = n$ et $a_p = b$ et $\mathbb{W}(\lambda_{a_j} \sqcap \lambda_{a_{j+1}} \sqcap n) \neq \Lambda$ pour $j = 1, \ldots, p-1$, p étant quelconque. Supposons que $a_i = a_j$ avec $i < j$. Alors la suite $a_1, \ldots, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_p$ est encore une n-chaîne allant de a à b. Donc si on peut joindre a à b par une n-chaîne, on peut les joindre par une n-chaîne dont les éléments sont deux à deux distincts et qui a donc au plus q éléments. Ce qui démontre que la relation $a \underset{(n)}{\sim} b$ est transitive.

Cette relation d'équivalence est décidable et définit ainsi une partition de $\mathbb{N}_q$ que l'on représentera par $\mathcal{P}(n ; \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ ou simplement $\mathcal{P}_n$ si aucune confusion n'est à craindre. On peut construire un algorithme Φ tel que $\forall nk(k \in pr_{\Phi(k \sqcap n)} \mathcal{P}_n)$. On a :

(10) $\forall n\, (\mathcal{P}_{n+1} \geqslant \mathcal{P}_n)$.

Il suffit de montrer :

(11) $\forall abn(a,b \in \mathbb{N}_q \supset (a \underset{(n+1)}{\sim} b \supset a \underset{(n)}{\sim} b))$

En effet, si la formule (11) est vraie, la classe d'équivalence de a de rang $n+1$ est contenue dans $pr_k \mathcal{P}_n$ où $k = \Phi(a \sqcap n)$, ce qui établit (10). On établit (11) comme suit : si $a \underset{(n+1)}{\sim} b$, on peut construire

$a_1, \dots, a_p$ avec $2 \leqslant p \leqslant q$, $a_1 = a, a_p = b$ et

$W(\lambda_{a_j} \sqcap \lambda_{a_{j+1}} \sqcap n+1) \not\doteq \Lambda$ pour $j = 1, \dots, p-1$. D'après (8)

$W(\lambda_{a_j} \sqcap \lambda_{a_{j+1}} \sqcap n) \not\doteq \Lambda$, d'où $a \underset{(n)}{\sim} b$.

On construit une suite $\mathcal{S}$ de q-uplets de nombres rationnels par :

$\forall n(\mathcal{S}(n;\lambda_1 * \dots * \lambda_q) = \ell_1^{(n)} * \dots * \ell_q^{(n)})$ où $\ell_j^{(n)} = [\widetilde{\lambda_{\psi(j \sqcap n)}}]_n$ avec

$\psi(j \sqcap n) = \underline{\text{déb}}\ pr_{\Phi(j \sqcap n)} \mathcal{P}_n$ où $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(n ; \lambda_1, \dots, \lambda_q)$. On a :

(12) $\forall k(1 \leqslant k \leqslant q \supset \lambda_k \lim\limits_{n \to +\infty} \ell_k^{(n)})$.

En effet, comme $k \underset{(n)}{\sim} \psi(k \sqcap n)$ on peut donc construire une n-chaîne $a_1, \dots, a_p$ allant de k à $\psi(k \sqcap n)$ avec $2 \leqslant p \leqslant q$. Donc

$$|(\widetilde{\lambda_k})_n - \ell_k^{(n)}| = |(\widetilde{\lambda_k})_n - [\widetilde{\lambda_{\psi(k \sqcap n)}}]_n| \leqslant (\widetilde{\lambda_{a_1}})_n - (\widetilde{\lambda_{a_2}})_n| +$$

$$+ \dots + |(\widetilde{\lambda_{a_{p-1}}})_n - (\widetilde{\lambda_{a_p}})_n| \leqslant q2^{-n}$$, d'où la formule (12) .

Soit P un polynôme trigonométrique, avec $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \dots * \alpha_q\tau\lambda_q$.
On définit une suite $\mathcal{Q}^P$ de polynômes rationnels, appelée <u>suite adjointe du polynôme P</u> , telle que $\mathcal{Q}^P_n = a_1^{(n)}\tau\ell_1^{(n)} * \dots * a_q^{(n)}\tau\ell_q^{(n)}$ avec

$a_k^{(n)} = \underbrace{\alpha_k}(\overset{\frown}{\alpha_k}(n+q+1))$ pour $k = 1, \dots, q$ et

$\ell_1^{(n)} * \dots * \ell_q^{(n)} = \mathcal{S}(n ; \lambda_1 * \dots * \lambda_q)$. Il est clair que $\alpha_k \lim\limits_{n \to +\infty} a_k^{(n)}$ et

$\lambda_k \lim\limits_{n \to +\infty} \ell_k^{(n)}$ pour $k = 1, \dots, q$. On notera $\ell_1^{(n)} * \dots * \ell_q^{(n)} = \mathcal{S}(n ; P)$.

On appellera <u>vecteur complexe</u> tout mot de la forme $z_1 *\ldots* z_p$ où les z_j sont des nombres complexes et p un entier naturel non nul. On utilisera la lettre $[z]$ pour représenter les vecteurs complexes. On définit la longueur d'un vecteur $[z] = z_1 *\ldots* z_p$ par $\ell\mathcal{R}(z_1 *\ldots* z_p) = p$ et ses composantes par $pr_j(z_1 *\ldots* z_p) = z_j$ pour $j = 1,\ldots,p$, étant entendu que si $j > p$, $pr_j(z_1 *\ldots* z_p) = *$. On dit que deux vecteurs complexes $[z]_1$ et $[z]_2$ sont égaux si $\ell\mathcal{R}[z]_1 = \ell\mathcal{R}[z]_2$ & & $\forall j(pr_j[z]_1 = pr_j[z]_2)$, ce qu'on notera $[z]_1 = [z]_2$.

On appelle fonction numérique sur les vecteurs complexes tout algorithme f transformant chaque vecteur complexe auquel il est applicable en nombre complexe et tel que

$$\forall [z]_1 [z]_2 ((!f([z]_1) \,\&\, [z]_1 = [z]_2) \supset (!f([z]_2) \,\&\, f([z]_1) = f([z]_2))) .$$

On dit que f est <u>partout définie</u> si $\forall [z]\,(!f([z]))$.

Soit f une fonction numérique sur les vecteurs complexes partout définie. Soit P un polynôme trigonométrique. On pose $[z](n,P) = a_1^{(n)} *\ldots* a_q^{(n)}$ où $a_1^{(n)},\ldots, a_q^{(n)}$ sont les coefficients du polynôme Q_n^{P}. On note encore $\mathcal{P}(n\,;\,P)$ la partition sur $\mathbb{N}_q$ définie par $\mathcal{P}(n\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_q)$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ sont, dans cet ordre, les fréquences du polynôme P. Si $[z]$ est un vecteur de longueur q et $\mathcal{P}$ une partition de $\mathbb{N}_q$, on pose $^{\mathcal{P}}[z] = \zeta_1 *\ldots* \zeta_p$ avec $p = \deg \mathcal{P}$ et

$$\zeta_j = \sum_{k \in pr_j \mathcal{P}} z_k \quad \text{où} \quad z_k = pr_k[z] .$$

On a :

Lemme 13.- "Soit f une fonction numérique sur les vecteurs complexes partout définie. On a :

$$\forall P \neg\neg\exists x(x \lim_{n\to+\infty} f(\mathcal{P}|(n\ ;\ P)[z](n,P)))\ .\ "$$

Démonstration. Soit $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q$ un polynôme trigonométrique fixé. Supposons que ses fréquences sont localisées. On définit une partition $\mathcal{P}^*$ sur $\mathbb{N}_q$ par la relation : $\forall\,(1 \leqslant j\ ,\ k \leqslant q \supset$ $\supset (j \underset{\mathcal{P}}{\sim} k \equiv \lambda_j = \lambda_k))$, où $j \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} k$ signifie que j et k appartiennent à une même partie de $\mathbb{N}_q$ définie par $\mathcal{P}^*$. Soit $[\alpha] = \alpha_1 * \ldots * \alpha_q$. On pose $x = f(\mathcal{P}[\alpha])$.

Soient k_1 et k_2 deux entiers tels que $1 \leqslant k_1\ ,\ k_2 \leqslant q$. Supposons $\neg(k_1 \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} k_2)$. Soit $n_{k_1k_2} = \mu_m(W(\lambda_{k_1} \square \lambda_{k_2} \square m) = \Lambda)$. D'après le principe de Markov on peut construire l'entier $n_{k_1k_2}$. Soit alors

$$N = \max\{\max\{n_{k_1k_2}\ ;\ k_1 \in pr_{j_1}\mathcal{P}^*,\ k_2 \in pr_{j_2}\mathcal{P}^*\}\ ;\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \deg \mathcal{P}^*\}$$

On a :

$$(13) \qquad \forall n\ (n \geqslant N \supset \mathcal{P}_n = \mathcal{P}^*)$$

où $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(n\ ;\ P)$. En effet, si $j_1 \not\underset{\mathcal{P}^*}{\sim} j_2$, alors $\forall n(W(\lambda_{j_1} \square \lambda_{j_2} \square n) \neq \Lambda$ et donc $\forall n(j_1 \underset{(n)}{\sim} j_2)$. Supposons $j_1 \underset{(n)}{\sim} j_2$ avec $n \geqslant N$. On peut construire des entiers $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{N}_q$ tels que $2 \leqslant p \leqslant q$, $j_1 = a_1$, $j_2 = a_p$ et pour $s = 1, \ldots, p-1$, $W(\lambda_{a_1} \square \lambda_{a_{s+1}} \square n) \neq \Lambda$. Par définition de N $\neg(k_1 \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} k_2) \supset$

$\supset (W(\lambda_{k_1} \sqcap \lambda_{k_2} \sqcap N) = \Lambda)$. Donc on a $a_s \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} a_{s+1}$, et par conséquent $j_1 \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} j_2$. D'où $j_1 \underset{(n)}{\sim} j_2 \equiv j_1 \underset{\mathcal{P}^*}{\sim} j_2$ pour $n \geqslant N$. Donc $\mathcal{P}(n\,;P) = \mathcal{P}^*$ pour $n \geqslant N$, d'où $n \geqslant N \supset f(^{\mathcal{P}(n\,;P)}[z](n,P)) = f(^{\mathcal{P}^*}[z](n,P))$. Il est clair que, par construction de $Q^{\mathbf{P}}$, $\forall_j (pr_j(^{\mathcal{P}^*}[\alpha] \lim\limits_{n\to+\infty} pr_j(^{\mathcal{P}^*}[z](n,P)))$.

Si on pose $p = \ell h^{\mathcal{P}^*}[\alpha]$ et si on considère la fonction f restreinte aux vecteurs complexes de longueur p, on a ainsi une fonction numérique sur l'espace métrique complet séparable $\mathbb{C}^p$ des vecteurs complexes de longueur p et donc, en vertu du théorème de Tseïtine (cf.[35]), la fonction f est continue sur $\mathbb{C}^p$ d'où l'on tire $f(^{\mathcal{P}^*}[\alpha]) \lim\limits_{n\to+\infty} f(^{\mathcal{P}^*}[z](n,P))$. D'où le lemme puisque les fréquences d'un polynôme ne peuvent pas ne pas être localisées.∎

2. Topologies sur l'espace des polynômes trigonométriques.

2.1. Soit P un polynôme trigonométrique On peut écrire $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \dots * \alpha_q\tau\lambda_q$. On pose, par analogie avec les vecteurs complexes, $\ell h(P) = q$ et pour $j = 1, \dots, \ell h(P)$, $pr_j^{(1)}P = \alpha_j$ et $pr_j^{(2)}P = \lambda_j$. On peut construire des algorithmes transformant tout polynôme P en, respectivement, $\ell h(P)$, $pr_j^{(1)}P$, $pr_j^{(2)}P$ avec la convention $pr_j^{(1)}P = pr_j^{(2)}P = *$ pour $j > \ell h(P)$. On définit une relation d'égalité sur E^0 par

$$P_1 \underset{e}{=} P_2 \equiv (\ell h(P_1) = \ell h(P_2) \,\&\, \forall j\, (pr_j^{(1)}P_1 = pr_j^{(1)}\, P_2 \,\&\, pr_j^{(2)}P_1 = pr_j^{(2)}\, P_2)) ,$$

l'égalité dans le membre de droite de la conjonction étant l'égalité sur les réels pour $pr^{(2)}$, sur les complexes pour $pr^{(1)}$ quand $1 \leqslant j \leqslant \ell h(P_1)$ et l'identité graphique pour $j > \ell h\, (P_1)$. On désigne par E^* l'espace $\langle E^0, \underset{e}{=} \rangle$. On définit la <u>différence dans E^*</u> de deux polynômes P_1 et P_2 de même longueur, c'est-à-dire avec $\ell h(P_1) = \ell h(P_2)$, notée $P_1 \nabla P_2$ par :

$$P_1 \nabla P_2 = \mathop{\times}_{j=1}^{\ell h(P_1)} (pr_j^{(1)}P_1 - pr_j^{(1)}P_2 \;\tau\; pr_j^{(2)}\, P_1 - pr_j^{(2)}\, P_2\;).$$

A tout polynôme trigonométrique P on associe le nombre

$$\| P \|_R = (\sum_{j=1}^{\ell h(P)} (| pr_j^{(1)}P|^2 + | pr_j^{(2)}P|^2))^{\frac{1}{2}} .$$

On peut construire des algorithmes transformant tout polynôme P en le nombre $\| P \|_R$ et tout couple de polynômes $P_1 \square P_2$ en le polynôme $P_1 \nabla P_2$. On considère donc dans E^* les polynômes comme des vecteurs complexes dont certaines composantes sont réelles et on leur associe leur norme euclidienne dans un espace $\mathbb{R}^p$ adéquat.

On désigne par I_R l'ensemble des couples $\langle P,m \rangle$ où P est un polynôme trigonométrique et m un entier relatif. On définit une partie R de $I_R \times E^*$ par :

$$<< P_1, m > , P_2 > \in R \equiv (\ell h(P_1) = \ell h(P_2) \,\&\, \| P_1 \nabla P_2 \|_R < 2^{-m}).$$

Il est clair que pour tout $< P, m > \in I_R$; $(R)_{<P,m>}$ est une partie fidèle de E^*. On définit une relation de succession indiciaire σ_R sur I_R par :

$$< P_1 , m_1 > \sigma_R < P_2 , m_2 > \equiv (\ell h(P_1) = \ell h(P_2) \,\&$$
$$\& \; \| P_1 \nabla P_2 \|_R + 2^{-m_1} < 2^{-m_2}) .$$

On définit un algorithme $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}(P)(n) = < P,n >$ pour tous P et n (n entier naturel). Soit α une σ_R-suite. Si on pose $P_n = pr_1\alpha(n)$, on a $\forall n(\ell h(P_n) = \ell h(P_o))$. Soit $q = \ell h(P_o)$. Si $m > n$, $\alpha(m)\sigma_R\,\alpha(n)$ et donc $\| P_m \nabla P_n \|_R + 2^{-m} < 2^{-n}$, c'est-à-dire $\| P_m \nabla P_n \| < 2^{-n} - 2^{-m} \leqslant 2^{-(n+1)}$. Comme $\| P_m \nabla P_n \|_R$ est la distance euclidienne entre les vecteurs P_m et P_n de $\mathbb{R}^{3q}$, il en résulte que la suite des P_n est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathbb{R}^{3q}$ qui, muni de la distance euclidienne est métrique complet. Soit $\mathcal{L}_q$ un algorithme de passage à la limite dans cet espace. Soit $P = \mathcal{L}_q(pr_1 o\ \alpha)$. Alors la suite α est σ_R-fondamentale pour le point P. On pose $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}_{\ell h(pr_1 \circ\ \alpha(o))}(pr_1\ o\ \alpha)$. Alors $\mathcal{L}$ est une application de l'espace des suites σ_R-fondamentales sur I_R (doté de la relation $=_{\sigma_R}$) dans E^* telle que $\forall P(\mathcal{L}(\mathcal{O}(P)) \underset{e}{=} P)$. $\mathcal{L}$ est bien une application en vertu de l'unicité, à égalité près, de la limite dans $\mathbb{R}^{3q}$. On a donc établi :

<u>Proposition 1</u>.-(cf.[16])". Le 6-uplet $<E^* , I_R , R , \sigma_R , \mathcal{O}, \mathcal{L}>$ est un espace topologique gerbé séparable".

La séparabilité découle de la densité de $\mathcal{E}^{o}$ dans l'espace ainsi construit et du caractère énumérable de $\mathcal{E}^{c}$.

Dans la suite, on désignera l'espace qui vient d'être construit par $E_{\mathbb{R}}$.

2.2. Dans toute la suite p désigne un nombre réel avec $p \geqslant 1$ et ℓ un nombre réel positif.

Soit P un polynôme trigonométrique, $\mathcal{Q}^{P}$ sa suite adjointe. On définit des fonctions numériques f_p et f_∞ sur les vecteurs complexes, partout définies, par :

$$f_p([z]) = \Big(\sum_{k=1}^{\ell h[z]} |pr_k[z]|^{p} \Big)^{1/p} \quad \text{et}$$

$$f_\infty([z]) = \max_{1 \leqslant j \leqslant \ell h[z]} |pr_j[z]| .$$

On pose $\sigma_n(P) = \sup_{|x| \leqslant n} |\Phi_p(x)|$, $\quad w_{\ell,p}(n,P) = \sup_{|x| \leqslant n} \{ \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} |\Phi_p(t)|^{p} dt \}$,

$$\vartheta_p(n,P) = f_p({}^{\mathcal{P}(n;p)}[z](n,P)) \quad \text{et} \quad \vartheta_\infty(n,P) = f_\infty({}^{\mathcal{P}(n;P)}[z](n,P)) .$$

Dans la suite, la lettre G désignera un des prédicats suivants :

$$U(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \,(x \lim_{n\to+\infty} \sigma_n(P) \,\&\, x \leqslant r)$$

$$S^{p}_{\ell}(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \,(x^{p} \lim_{n\to+\infty} w_{\ell,p}(n,P) \,\&\, x \leqslant r)$$

$$W_p(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \,(x^{p} \lim_{\ell\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} w_{\ell,p}(n,P) \,\&\, x \leqslant r)$$

$$B_p(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \,(x^{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi_p(t)|^{p}\, dt \,\&\, x \leqslant r)$$

$$N_p(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \; (x \lim_{n\to+\infty} \gamma_p(n,P) \;\&\; x \leq r)$$

$$N_\infty(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \; (x \lim_{n\to+\infty} \gamma_\infty(n,P) \;\&\; x \leq r)$$

où r désigne un nombre rationnel positif.

On remarque que G est de la forme

$$G(r,P) \equiv \neg\neg \exists x \; (G_1(x,P) \;\&\; x \leq r)$$

où G_1 est défini à partir des formules données ci-dessus.

On dit que le nombre réel λ est une <u>G-norme du polynôme P</u> si on a $G_1(\lambda,P)$. On remarque que si λ_1 est une G-norme du polynôme P et si λ_2 est égal à λ_1, alors λ_2 est une G-norme du polynôme P. Si λ_1 et λ_2 sont des G-normes du polynôme P, alors $\lambda_1=\lambda_2$.

On remarque que si G est un des prédicats U, S^p_ℓ, W_p ou B_p, on peut définir $G(r,P)$ dans le cas où on remplace P par une fonction uniformément continue f. La notion de <u>G-norme d'une fonction uniformément continue</u> se définit de la même manière que celle de G-norme d'un polynôme trigonométrique. On peut énoncer :

<u>Lemme 14.</u>- Soit G un des prédicats U, S^p_ℓ, W_p ou B_p. On peut construire un algorithme $\mathcal{a}_G$ applicable à tout chiffre complet de fonction u.p.p. et transformant chaque chiffre complet de fonction u.p.p. $\langle f,\omega,\varphi\rangle$ en un nombre réel λ qui soit une G-norme de la fonction presque périodique uniformément continue f, et tel que $\mathcal{a}_G$ soit étroitement s-continu en chaque chiffre complet de fonction u.p.p.".

Démonstration. On examine les différents cas :

1. Cas des prédicats U et S^p_ℓ . Le lemme 1 montre qu'on peut construire un algorithme $\mathfrak{A}_U$ applicable à tout chiffre complet $\langle f,\omega,\varphi \rangle$ de fonction presque périodique uniformément continue qu'il transforme en un réel λ tel que $G_1(\lambda,f)$. Soit $\mathcal{F}$ une suite de chiffres complets de fonctions u.p.p. telle que la suite $pr_1 \circ \mathcal{F}$ converge étroitement vers f . On pose $F_n = pr_1 \circ \mathcal{F}(n)$. Si $F^{(1)}$ désigne la suite associée à F dans la définition de la convergence étroite, on peut appliquer le lemme 10 à la suite $F^{(1)}$. Donc, si $\sigma_{n,m} = \sup\limits_{|x| \leqslant n} |F^{(1)}_m(x)|$, on a

$$(1) \qquad \forall \varepsilon\ \exists N m_0\ \forall n m\ (n \geqslant N \,\&\, m \geqslant m_0 \supset |\sigma'_{n,m} - \sigma_{N,m}| < \varepsilon)$$

On a $\mathfrak{A}_U\ (\mathcal{F}_m) \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_{n,2m+1}$. Donc $\forall m (m \geqslant m_0 \supset |\mathfrak{A}_U\ (\mathcal{F}_m) - \sigma_{N,2m+1}| < \varepsilon)$.

Or, sur l'intervalle $[-N, +N]$, la suite F converge uniformément vers f, d'après la définition de la convergence étroite. Par ailleurs, si $\sigma_n = \sup\limits_{|x| \leqslant n} |f(x)|$, d'après la construction de $F^{(1)}$ on a

$\mathfrak{A}_U\,(\langle f,\omega,\varphi \rangle) \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$ car $\forall m\ (\sigma_n = \sigma_{n,2m})$ et donc on a

$|\mathfrak{A}_U\ (\langle f,\omega,\varphi \rangle) - \sigma_N| < \varepsilon$. Donc, comme $F^{(1)}_n$ converge uniformément vers f, on en conclut que $\mathfrak{A}_U(\langle f,\omega,\varphi \rangle) \lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{A}_U(\mathcal{F}_n)$.

Dans le cas du prédicat S^p_ℓ on remarque que si f est une fonction presque périodique uniformément continue, on peut construire un réel $M > 0$ tel que $\forall x\ (|f(x)| \leqslant M)$ et

(2) $\forall x_1 x_2 \; \| f(x_1)|^p - |f(x_2)|^p \,| \leqslant pM^{p-1} |f(x_1) - f(x_2)|$.

On pose $\omega_{\ell,p}(x,f) = \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} |f(t)|^p \, dt$. La fonction $\omega_{\ell,p}(\cdot,f)$ est une fonction presque périodique uniformément continue puisqu'on tire de (2) :

(3) $\forall x_1 x_2 (|\omega_{\ell,p}(x_1,f) - \omega_{\ell,p}(x_2,f)| \leqslant pM^{p-1} \frac{1}{\ell} \int_{x_1}^{x_1+\ell} |f(t)-f(t+x_1-x_2)| dt)$.

Donc, si $\langle f,\omega,\varphi \rangle$ est un chiffre complet de la fonction f, on construit aisément un chiffre complet de la fonction $\omega_{\ell,p}(\circ,f)$. Par conséquent, on déduit de (3) qu'à partir d'une suite $\mathcal{F}$ de chiffres complets de fonctions u.p.p. telle que $pr_1 \circ \mathcal{F}$ converge étroitement vers f, on construit aisément une suite $\Omega_{\ell,p}$ de chiffres complets de fonctions u.p.p. telle que $pr_1 \circ \Omega_{\ell,p}$ converge étroitement vers $\omega_{\ell,p}(\circ,f)$. Si $\mathcal{A}_{\ell,p}$ désigne un algorithme transformant $\mathcal{F}$ en $\Omega_{\ell,p}$ (c'est-à-dire toute suite de chiffres complets de fonctions u.p.p. f_n en une suite de chiffres complets des fonctions $\omega_{\ell,p}(\cdot,f_n)$), l'algorithme $\mathcal{A}_{S^p_\ell} = \mathcal{A}_U \circ \mathcal{A}_{\ell,p}$ est un algorithme répondant aux exigences du lemme dans le cas des prédicats S^p_ℓ .

2. <u>Cas du prédicat B_p</u> . La formule (2) montre qu'en utilisant l'assertion (3) du lemme 10 et le fait qu'on peut construire un algorithme transformant un chiffre complet d'une fonction u.p.p. f en un chiffre complet de la fonction $|f|^p$ qui reste une fonction presque périodique uniformément continue, on peut construire un algorithme $\mathcal{A}_{B_p}$ répondant aux conditions du lemme pour le cas du prédicat B_p .

3. <u>Cas du prédicat</u> W_p . On sait qu'on peut construire un réel positif M tel que $\forall mx \, (|F^{(1)}_m(x)| \leqslant M)$ où $F^{(1)}$ est associée à F . On a donc

$\forall mx\ (|F_m^{(1)}(x)|^p \leqslant M^p)$. Les majorations effectuées au lemme 2 montrent que si L est un intervalle d'inclusion commun aux $F_m^{(1)}$ pour $m \geqslant m_o$ et $\frac{\varepsilon}{8_p M^{p-1}}$, grâce à la formule (2), la fofmule (I ; 4 ; (3)) devient, en remplaçant l'intervalle $[0,\ell_o]$ nar $[x,x+\ell_o]$:

$$(4)\quad \forall mm_1\ (m > 0 \,\&\, m_1 \geqslant m_o \supset \Big| \frac{1}{m\ell}\int_x^{x+m\ell} |F_{m_1}^{(1)}(t)|^p\,dt - \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} |F_{m_1}^{(1)}(t)|^p\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + 2M^p\,\frac{L}{\ell}\ ) .$$

Donc si $\ell_o \doteq \frac{15M^pL}{\varepsilon}$ et $\ell \geqslant \ell_o$ on trouve

$$(5)\quad \forall mm_1(m > 0 \,\&\, m_1 \geqslant m_o \supset \Big| \frac{1}{m\ell}\int_x^{x+m\ell} |F_{m_1}^{(1)}(t)|^p\,dt - \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} |F_{m_1}^{(1)}(t)|^p dt\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ )$$

Comme la formule (5) est vraie pour tout x , on a :

$$(6)\quad \forall nmm_1(m > 0 \,\&\, m_1 \geqslant m_o \supset |w_{m\ell,p}(n,F_{m_1}^{(1)}) - w_{\ell,p}(n,F_{m_1}^{(1)})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ ) .$$

D'après le point 1 on sait que les nombres $w_{m\ell,p}(n,F_{m_1}^{(1)})$ et $w_{\ell,p}(n,F_{m_1}^{(1)})$ ont une limite (constructivement) quand n tend vers l'infini. On note $w_{m\ell,p}(F_{m_1}^{(1)})$ et $w_{\ell.p}(F_{m_1}^{(n)})$ ces limites respectives. On a :

$$(7)\quad \forall mm_1(m > 0 \,\&\, m_1 \geqslant m_o \supset |w_{m\ell,p}(F_{m_1}^{(1)}) - w_{\ell,p}(F_{m_1}^{(1)})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ ) .$$

Comme on le fait au lemme 2 , on en déduit, par l'intermédiaire de la formule (I ; 4 ; (5)) :

$$(8)\quad \exists \ell_0 m_0 \forall_m \ell_1 \ell_2 \,(m \geqslant m_0 \,\&\, \ell_1 > \ell_0 \,\&\, \ell_2 \geqslant \ell_0 \supset$$

$$\supset |w_{\ell_1,p}(F_m^{(1)}) - w_{\ell_2,p}(F_m^{(1)})| \leqslant \varepsilon) .$$

On remarque que pour chaque m, $F_m^{(1)}$ est une fonction presque périodique uniformément continue. Donc on peut construire, pour m fixé, un intervalle d'inclusion relatif à $F_m^{(1)}$ et $\frac{\varepsilon}{8pM^{p-1}}$ de sorte que la formule (8) est vraie aussi pour chaque m , mais alors le ℓ_0 de la nouvelle formule dépend de m . Ceci permet de montrer que pour chaque m , la limite des $w_{\ell,p}(F_m^{(1)})$ lorsque ℓ tend vers l'infini peut être construite. On vient donc de montrer qu'on peut construire un algorithme $\mathfrak{a}_{W_p}$, applicable à tout chiffre complet de fonction u.p.p. $\langle f,\omega,\varphi\rangle$, transformant $\langle f,\omega,\varphi\rangle$ en un réel λ qui soit une W_p-norme de f . Si on fait tendre ℓ_1 vers l'infini dans (8) on obtient $|\mathfrak{a}_{W_p}(\mathcal{F}_m) - w_{\ell_2,p}(F_{2m+1}^{(1)})| \leqslant \varepsilon$ et $|\mathfrak{a}_{W_p}(\langle f,\omega,\varphi\rangle) - w_{\ell_2,p}(F_{2m}^{(1)})| \leqslant \varepsilon$, où $F_{2m}^{(1)} = f$ et $\langle f,\omega,\varphi\rangle$ est un chiffre complet de f . Comme au point 1, la convergence uniforme des $F_m^{(1)}$ vers f permet de conclure que $\mathfrak{a}_{W_p}(\langle f,\omega,\varphi\rangle) \lim\limits_{m\to+\infty} \mathfrak{a}_{W_p}(\mathcal{F}_m)$. Ce qui achève la démonstration du lemme .

<u>Corollaire 1.</u>- "Pour chacun des prédicats G on a $\forall P\ \neg\neg\exists x G_1(x,P)$ ".

<u>Démonstration.</u> Pour les prédicats U, S_ℓ^p , W_p et B_p cela résulte du lemme 14 et du corollaire du lemme 7. Pour les prédicats N_p et N_∞ , cela résulte du lemme 13 et de la définition de ces prédicats ∎.

<u>Corollaire 2.</u>- "Pour chacun des prédicats G, on peut construire un algorithme $\mathfrak{A}^1_G$ applicable à tout polynôme rationnel et transformant les polynômes rationnels en nombres réels tels que $\forall Q\ G_1(\mathfrak{A}^1_G(Q),Q)$ ".

La démonstration résulte de ce qu'on peut construire un algorithme transformant tout polynôme rationnel Q en un chiffre complet de la fonction Φ_Q (voir paragraphe 1).

On définit des topologies sur l'espace des polynômes trigonométriques à l'aide des prédicats G de la façon suivante :

On désigne par I l'ensemble des couples de la forme $\langle P,r \rangle$ où P est un polynôme trigonométrique et r un rationnel positif. On définit une partie G^* de $I \times E$ par $\langle\langle P_o,r_o \rangle \in G^* \equiv G(r_o, P_1 - P_o)$. Il est clair que pour tout $\langle P,r \rangle \in I$, $(G^*)_{\langle P,r\rangle}$ est une partie fidèle de E ;
On conviendra de noter $(G^*)_r$ les voisinages de l'origine $(G^*)_{\langle 0,r\rangle}$.
Les voisinages de l'origine vérifient les axiomes d'une base de topologie d'un espace vectoriel topologique constructif localement convexe (cf.[31]) :

(i) $\forall r\ P_1P_2(P_1 \underset{E}{=} P_2\ \&\ P_1 \in (G^*)_r \supset P_2 \in (G^*)_r)$

(ii) $\forall r_1r_2\ \exists r_3\ \forall P(P \in (G^*)r_3 \supset P \in (G^*)_{r_1}\ \&\ P \in (G^*)_{r_2})$

(iii) $\forall r\ P_1P_2\ x_1x_2(|x_1| + |x_2| = 1\ \&\ P_1 \in (G^*)_r\ \&\ P_2 \in (G^*)_r \supset$

$$\supset x_1 P_1 + x_2P_2 \in (G^*)_r)$$

(iv) $\forall r\ P\ \exists x\ (x > o\ \&\ xP \in (G^*)_r)$

(v) $\forall r_1 \exists r_2 \ \forall P_1 P_2 (P_1 \in (G^\bullet)_{r_2} \ \& \ P_2 \in (G^\bullet)_{r_2} \supset P_1 + P_2 \in (G^\bullet)_{r_1})$.

L'axiome (iv), appelé axiome d'absorption est équivalent à la formule $\forall P \neg\neg \ \exists x \ (G_1(x,P))$. Il est donc vérifié en vertu du corollaire 1 du lemme 14. La vérification des axiomes (ii), (iii) et (v) en découle aussitôt. L'axiome (i) n'est autre chose que la fidèlité des voisinages. Comme $\forall P_1 P_2 r \ (P_2 \in (G^\bullet)_{\langle P_1 , r\rangle} \equiv P_2 - P_1 \in (G^\bullet)_r)$, on vérifie que l'espace $\langle E, \langle I,G \rangle\rangle$ est un espace topologique au sens défini plus haut. On notera cet espace E_G . On remarque sans difficulté que cet espace topologique étant un espace vectoriel topologique localement convexe, il est également un espace uniforme constructif.

3. Espaces constructifs de fonctions presque-périodiques : les espaces $\mathcal{E}_G$.

On établit sans difficulté qu'aucun des espaces E_G n'est complet au sens du paragraphe 3 du chapitre I . Considérons en effet la suite des polynômes $P_n = \frac{1}{1+n^2}\tau n$. On pose $\Pi_N = \sum_{n=o}^{N} P_n$. Pour chacun des prédicats G , on a $G(\frac{1}{1+n^2}, P_n)$ et donc la suite Π_n est une suite de Cauchy de points de l'espace uniforme E_G . Soit alors $P^{(1)}$ un polynôme propre et soient $\lambda_1,\ldots, \lambda_q$ ses fréquences. Soit λ un nombre réel tel que $\&_{j=1}^{q}(\lambda = \lambda_j \vee \lambda \neq \lambda_j)$. Alors la suite des nombres $\mathcal{M}_\ell(\Phi_{1\tau-\lambda}\, \Phi_{P(1)})$ converge vers un nombre noté $\mathcal{M}(\Phi_{1\tau-\lambda}\, \Phi_{P(1)})$. (cf. paragraphe 4 du chapitre I).

Il est clair que $\mathcal{M}(\Phi_{1\tau-\lambda}\, \Phi_{P}\,(1)) \neq 0 \equiv \exists\, j\ (1 \leqslant j \leqslant q\ \&\ \lambda = \lambda_j)$. Il est alors clair que si P est un polynôme propre, limite dans E_G de la suite Π_n , on a $\forall n\ (\mathcal{M}(\Phi_{1\tau-n}\, \Phi_P) = \frac{1}{1+n^2})$. Or un polynôme n'a qu'un nombre fini de fréquences. Comme tout polynôme ne peut pas ne pas avoir de polynôme propre qui lui soit égal dans E , il en résulte que la suite Π_n n'a pas de limite dans E_G .

Par ailleurs on a :

Lemme 15.- " Pour chacun des prédicats G , l'espace topologique E_G est T'-séparé ".

Démonstration. D'après les remarques faites au paragraphe 3 du chapitre I, il suffit de montrer : $\forall P\ (P \underset{E}{=} 0 \equiv \forall r(P \in (G^{\bullet})_r))$. L'implication de gauche à droite est évidente. Supposons $\forall r(P \in (G^{\bullet})_r)$. Soit Π un polynôme propre égal à P dans E pour lequel on puisse construire une base régulière du groupe engendré par ses fréquences. On peut donc, G étant fixé, construire une G-norme λ du polynôme P. D'après l'hypothèse on a donc $G_{T}(0,P)$. Pour les prédicats N_{∞} et N_{p}, il en résulte que $\Pi = 0\tau 0$ et donc que $P \underset{E}{=} 0$. Pour le prédicat U, on retombe sur la définition de $\underset{E}{=}$. Donc, pour le prédicat S^{p}_{ℓ}, il résulte que la fonction $\omega_{\ell,p}(\cdot,P)$ est identiquement nulle. Si on suppose $\neg(P \underset{E}{=} 0)$, en vertu du principe du choix constructif, on peut construire un réel x_{o} tel que $\Phi_{P}(x_{o}) \neq 0$. Toujours en vertu du principe du choix constructif, du fait que la propriété $x > 0$ est algorithmiquement vérifiable sur les nombres réels (cf. [35]), on peut construire un réel positif ε tel que $|\Phi_{P}(x_{o})| > \varepsilon$. Comme Π est presque périodique, on peut construire un intervalle d'inclusion L relatif à Φ_{Π} et $\varepsilon/2$, et on peut supposer $L > |x_{o}|$. Donc pour tout entier relatif k on peut construire une $\frac{\varepsilon}{2}$ - presque période de Φ_{Π}, ζ_{k}, telle que $(3k+1)L < \zeta_{k} < (3k+2)L$. Si on pose $y_{k} = x_{o} + \zeta_{k}$, on a $3kL < y_{k} < 3(k+1)L$ et $|\Phi_{\Pi}(y_{k})| > \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, Φ_{Π} est uniformément continue. On peut donc construire un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall yk(|y - y_{k}| \leqslant \alpha \supset |\Phi_{\Pi}(y) - \Phi_{\Pi}(y_{k})| < \frac{\varepsilon}{4}) \quad \text{d'où}$$

$\forall y y_{k}(|y - y_{k}| \leqslant \alpha \supset |\Phi_{\Pi}(y)| > \frac{\varepsilon}{4})$. Si ℓ est fixé, on a

$$\int_{y_{o}}^{y_{o}+\ell} |\Phi_{\Pi}(t)|^{p} dt = \int_{y_{o}}^{y_{o}+\ell} |\Phi_{P}(t)|^{p} dt \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{p} \min(\alpha,\ell) \quad \text{. D'où}$$

$\omega_{\ell,p}(y_{o},P) \geqslant \frac{\varepsilon^{p}}{4^{p}\ell} \min(\alpha,\ell) > 0$. Donc, dans le cas du prédicat S^{p}_{ℓ}, on déduit, comme Π ne peut pas ne pas être construit,

$$\neg(P \underset{E}{=} 0) \supset \neg\neg \exists r \ \neg(P \in (S^{p\bullet}_{\ell})r) \equiv \neg \forall r \neg\neg(P \in (S^{p\bullet}_{\ell})_{r})$$

Or, le prédicat S^p_ℓ est défini par une formule équivalente à sa double négation, d'où $\neg(P \underset{E}{=} 0) \supset \neg \forall r\, (P \in (S^{p*}_\ell)_r)$. Donc comme $P \underset{E}{=} 0$ est défini par une formule normale (équivalente à sa double négation), on a établit le lemme dans ce cas. Dans le cas des prédicats W_p et B_p, si on prend $\ell_m = 3mL$, on remarque que $\omega_{3mL,p}(x,P) \geqslant \frac{3m-2}{3mL} 2\alpha \frac{\varepsilon^p}{4^p}$, c'est-à-dire $\omega_{3mL,p}(x,P) \geqslant \frac{\alpha \cdot \varepsilon^p}{2 \cdot 4^p} > 0$. De la même façon

$$\frac{1}{6mL} \int_{-3mL}^{3mL} |\Phi_p(t)|^p dt \geqslant \frac{\alpha \cdot \varepsilon^p}{2 \cdot 4^p} > 0 \text{ . Il en résulte } \neg\, G(\frac{\alpha\varepsilon^p}{4^{p+1}}, P) \text{ avec}$$

$G = W_p$ ou B_p. Donc, comme Π ne peut pas ne pas être construit,

$\neg(P \underset{E}{=} 0) \supset \neg\neg \exists r\, \neg(P \in (G^\bullet)_r)$. Comme dans le cas de S^p_ℓ, le prédicat G est défini par une formule normale. D'où le résultat : $\forall r (P \in (G\ )_r \supset$ $\supset P \underset{E}{=} 0$ ∎.

On désignera par E^*_G le FR - complété de l'espace E_G, construit comme dans [14]. On utilisera la lettre K, éventuellement indexée, pour représenter les points de l'espace E^*_G. On rappelle que les points de E^*_G sont les FR- construits de E_G, c'est-à-dire que K est un mot de la forme $\in \mathcal{A}_1 \ni \lozenge \in \mathcal{A}_2 \ni$ où $\mathcal{A}_1$ est une suite de polynômes trigonométrique et $\mathcal{A}_2$ une suite d'entiers tels que :

$$\forall n\, m m_1 (m \geqslant \mathcal{A}_2(n) \supset G(2^{-n}, \mathcal{A}_1(m + m_1) - \mathcal{A}_1(m))) .$$

Suivant les notations de [5], on désignera par $\underbrace{K}$ l'algorithme $\mathcal{A}_1$, par $\widehat{K}$ l'algorithme $\mathcal{A}_2$ et on posera $\hat{K}_n = \underbrace{K}(\widehat{K}(n+1))$. La relation d'égalité sur E^*_G est définie par :

$$K_1 \underset{G}{=} K_2 \equiv \forall r \exists n \forall m \, (m \geq n \supset G(r, \underset{\smile}{K_1}(m) - \underset{\smile}{K_2}(m))).$$

On pose $G^*(r,K) \equiv \exists K_1 m \, (K_1 \underset{G}{=} K \; \& \; \forall k(k \geq m \supset G(r, \underset{\smile}{K_1}(k))))$. On définit comme précédemment $\langle\langle K_1, r\rangle, K_2\rangle \in G^{*\bullet} \equiv G^*(r, K_2 - K_1)$ en prenant cette fois comme ensemble d'indices l'ensemble des couples $\langle K, r\rangle$. On vérifie aisément que les voisinages de zéro dans E^*_G, $(G^{*\bullet})_r$ vérifient les propriétés (i) - (v) énoncées au paragraphe 2 pour les ensembles $(G^\bullet)_r$. On remarque d'autre part, que $\forall Kr(G^*(r,K) \equiv \forall n G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n))$. En effet, par définition de K, on a $\forall nm \, G(2^{-n-1}, \hat{K}_n - \hat{K}_m)$ d'où, par définition de G^*, $\forall n \, G^*(2^{-n-1}, \hat{K}_n - K)$. On vérifie sans peine que $\forall r_1 r_2 K_1 K_2 \, (G^*(r_1, K_1) \; \& \; G^*(r_2, K_2) \supset G^*(r_1 + r_2, K_1 + K_2))$. Donc on a : $G^*(r,K) \supset \forall n \, G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n)$, puisque (cf.[14]) le prédicat G^* est équivalent à G sur E_G. On suppose maintenant $\forall n G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n)$. Soit alors K_1 défini par $\underset{\smile}{K_1}(n) = \frac{r}{r+2^{-n}} \hat{K}_n$ et $\widehat{K_1}(n) = n + D$ où D est un entier défini par $2^D > \frac{r+1}{r^2}$. Alors $K_1 \in E^*_G$. On vérifie aisément que $K_1 \underset{G}{=} K'$ où $\underset{\smile}{K'}(n) = \hat{K}_n$ et $\widehat{K'}(n) = n$. Comme $K' \underset{G}{=} K$, $K_1 \underset{G}{=} K'$ et en outre $\forall n \, G(r, \underset{\smile}{K_1}(n))$. D'ou $\forall n \, G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n) \equiv G^*(r,K)$. Il en résulte en particulier que G^* est équivalente à sa double négation. On utilisera par la suite ces remarques sans référence.

D'après [31] on sait que l'espace topologique E^*_G est un espace vectoriel topologique localement convexe T'-séparé, qui, en tant qu'espace uniforme, est complet. E_G est dense dans E^*_G et pour tous P et r on a $G^*(r,P) \equiv G(r,P)$ (cf. ci-dessus). On sait d'après [33] qu'on peut doter E^*_G d'une structure d'espace topologique gerbé définissant une topologie équivalente à la topologie initiale.

Prenons pour I l'ensemble des couples $\langle P,r \rangle$ (P polynôme trigonométrique, r nombre rationnel positif). On pose :

$$\langle\langle P,r \rangle , K \rangle \in G^{\square} \equiv \exists K_1 \ldots K_n r_1 \ldots r_{n-1} (K_1 \underset{G}{=} P \,\&\, K_n \underset{G}{=} K \,\&$$

$$\& \; r_1 + \ldots + r_{n-1} < r \;\&\; \forall k j (1 \leq j \leq n-1 \supset G(r, \underbrace{K_{j+1}}(k) - \underbrace{K_j}(k)))).$$

On définit une relation de succession indiciaire σ_G par :

$$\langle P_1 r_1 \rangle \, \sigma_G \, \langle P_2 , r_2 \rangle = \exists \Pi_1 \ldots \Pi_n r'_1 \ldots r'_{n-1} \, (\Pi_1 \underset{E}{=} P_1 \,\&\, \Pi_n \underset{E}{=} P_2 \;\&$$

$$r'_1 + \ldots + r'_{n-1} < r_2 - r_1 \,\&\, \forall j (1 \leq j \leq n-1 \supset G(r'_j , \Pi_{j+1} - \Pi_j))) .$$

On pose $\sigma(K)(n) \doteq \langle \hat{K}_{n+1} , 2^{-n} \rangle$. Soit α une σ_G - suite d'éléments de I. On note g_α un algorithme tel que $\forall n (g_\alpha(n) \simeq \mu m \{(pr_2 \circ \alpha)(m) < 2^{-n}\})$

On peut construire un algorithme transformant toute σ_G - suite α en g_α.
On pose $\mathcal{L}(\alpha) \simeq \epsilon\, pr_1 \circ \alpha \ni \Diamond \; \epsilon g_\alpha \ni$. On a alors, si $\mathcal{K}_G$ désigne l'espace des FR-construits de E_G doté de la relation $\underset{G}{=}$:

<u>Proposition 2.</u> " Le 6-uplet $\langle \mathcal{K}_G , I, G^{\square} , \sigma_G , \sigma, \mathcal{L} \rangle$ est un espace topologique gerbé dont la topologie est équivalente à celle de l'espace E^*_G ".

<u>Démonstration.</u> (cf. [24]). La seule chose à démontrer est que $\mathcal{L}$ est une application de l'espace des suites σ_G-fondamentales dans $\mathcal{K}_G$ telle que

$\forall K (\mathcal{L}(\sigma(K)) \underset{G}{=} K)$. On remarque tout d'abord que si α est une suite σ_G - fondamentale, la suite $pr_2 \circ \alpha$ converge vers 0. Si α est une σ_G-

suite telle que $pr_2 \circ \alpha$ converge vers 0 , alors l'algorithme g_α est applicable à tout entier n et est un régulateur de convergence de la suite $pr_1 \circ \alpha$. Alors α est bien une suite σ_G- fondamentale pour le point $\mathcal{L}(\alpha)$. Par définition, $\mathcal{O}(K)$ est une suite σ_G - fondamentale pour le point K et $\mathcal{O}(K)$ est aussi une suite σ_G-fondamentale pour $\mathcal{L}(\mathcal{O}(K))$. Comme $(pr_1 \circ \mathcal{O})(K)$ converge vers le point K et que, E^*_G étant T'-séparé, il y a unicité de la limite, à égalité près, dans E^*_G, on a donc $\mathcal{L}(\mathcal{O}(K)) \underset{G}{=} K$. D'où le résultat annoncé ∎.

Dans la suite, on désignera par $\mathcal{Y}'_G$ l'espace topologique gerbé $\langle \mathcal{K}_G , I, G^{\square} , \sigma_G , \mathcal{O} , \mathcal{L} \rangle$.

CHAPITRE IV.

PROPRIETES DES ESPACES CONSTRUCTIFS DE FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES.

1. Comparaison entre les topologies des espaces $\mathcal{V}_G$.

On établit tout d'abord un lemme de comparaison entre les topologies des espaces E_G :

Lemme 16.- "Pour tous réels ℓ et p , $\ell > 0$ et $p \geqslant 1$ on a :

(1) $\forall Pr\ (N_1(r,P) \supset U(r,P) \supset S^p_\ell(r,P) \supset W_p(r,P) \supset B_p(r,P) \supset N_\infty(r,P).)$.

Pour tous p_1, p_2 réels avec $1 \leqslant p_1 < p_2$, on a :

(2) $\forall Pr((S_\ell^{p_2}\ (r,P) \supset S_\ell^{p_1}(r,P)) \ \& \ (W_{p_2}(r,P) \supset W_{p_1}(r,P)) \ \&$

$\& \ (B_{p_2}(r,P) \supset B_{p_1}(r,P)) \ \& \ (N_{p_1}(r,P) \supset N_{p_2}(r,P)))$

Démonstration. Soient r un rationnel positif et P un polynôme trigonométrique. Comme G est équivalente à sa double négation, on peut supposer que l'on peut construire une base régulière du groupe engendré par les fréquences de P et que P est propre. Soit $P = \alpha_1 \tau\ \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau\ \lambda_q$.

Soit $M = \sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|$. Alors $\forall x(|\Phi_p(x)| \leqslant M)$, et , comme P est propre, M est une N_1- norme de P. Donc $\forall pr(N_1(r,P) \supset U(r,P))$. Soit λ une U-norme de P , que l'on peut construire d'après le lemme 1. Pour et p fixés, $\ell > 0$ et $p \geqslant 1$. On a $\forall x(|\omega_{\ell,p}(x,P)| \leqslant \lambda^p)$ et donc $\forall pr(U(r,P) \supset S^p_\ell(r,P))$. Si λ' est une S^p_ℓ - norme de P on a $\forall m(w_{\ell,p}(m,P) \leqslant \lambda'^p)$. Mais $\frac{1}{n\ell}\int_x^{x+n\ell} |\Phi_p(t)|^p\, dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\ell}\int_{x+k\ell}^{x+(k+1)\ell} |\Phi_p(t)|^p\, dt$.

Donc $\frac{1}{n\ell}\int_x^{x+n\ell} |\Phi_p(t)|^p dt \leqslant w_{\ell,p}(m+nn_o,P)$ si $|x| \leqslant m$ et n_o vérifie $\ell \leqslant n_o$. Donc $w_{n\ell,p}(m,P) \leqslant w_{\ell,p}(m+nn_o,P) \leqslant \lambda'^p$. Donc si on fait tendre m et n vers l'infini, d'abord m, puis n on trouve que si μ est une W_p- norme de P , $\mu^p \leqslant \lambda'^p$. Donc, $\forall pr(S^p_\ell(r,P) \supset W_p(r,P))$. On a par ailleurs $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\Phi_p(t)^p dt \leqslant w_{T,p}(n,P)$ quelque soient n et T . Donc si μ est une W_p-norme de P , par passage à la limite sur T on obtient que si μ_1 est une B_p-norme de P , $\mu_1 \leqslant \mu$, d'où $\forall Pr(W_n(r,P) \supset B_p(r,P))$.

D'où les quatre premières inclusions de (1). La formule (2) résulte de ce que si $1 \leqslant p_1 < p_2$ on a :

$$\forall x_1 x_2 (x_1 < x_2 \supset (\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} |\Phi_p(t)|^{p_1} dt)^{1/p_1} \leqslant$$

$$\leqslant (\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} |\Phi_p(t)|^{p_2}\, dt)^{1/p_2}) \quad \text{et :}$$

$$\forall z_1 \dots z_q \left(\left(\sum_{k=1}^{q} |z_k|^{p_2} \right)^{1/p_2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{q} |z_k|^{p_1} \right)^{1/p_1} \right) \text{ avec } z_1, \dots, z_q$$

complexes, quel que soit q. On termine la démonstration de (1) en montrant $\forall \Pr (B_1(r,P) \supset N_\infty(r,P))$. Comme P a ses fréquences séparées, on a pour tout $T > 0$ $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Phi_p(t)| dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^{-i\lambda_j t} \Phi_p(t)| dt$ où λ_j est une des fréquences de P. Soit donc μ une B_1- norme de P. On a donc

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Phi_p(t)| dt \geqslant \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i\lambda_j} \Phi_p(t) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\alpha_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t}] dt \right| = \left| \alpha_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_j)T}{(\lambda_k - \lambda_j)T} \right| ,$$

car $k \neq j \supset \lambda_k \neq \lambda_j$. Comme $0 \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_j)T}{(\lambda_k - \lambda_j)T}$ pour $k \neq j$, on a donc $\mu \geqslant |\alpha_j|$. D'où $\forall \Pr (B_1(r,P) \supset N_\infty(r,P))$. Ce qui achève la démonstration du lemme $\square$.

Considérons G^1 et G^2 deux prédicats G tel que

(3) $\forall \Pr (G^1(r,P) \supset G^2(r,P))$.

Soit $K \in \mathcal{S}_{G^1}$. $\overset{\frown}{K}$ est un régulateur de convergence de $\underset{\smile}{K_r}$ par rapport au prédicat G^1, mais aussi par rapport au prédicat G^2 d'après (3). Donc $K \in \mathcal{S}_{G^2}$. Donc le support de $\mathcal{K}_{G^1}$ est contenu dans celui de $\mathcal{K}_{G^2}$.
Par ailleurs, de (3) on tire également $K_1 \underset{G^1}{=} K_2 \supset K_1 \underset{G^2}{=} K_2$ d'où il

résulte que l'identité est une application de $\mathcal{K}_{G^1}$ dans $\mathcal{K}_{G^2}$. D'après (3) c'est une application continue de $\mathcal{S}_{G^1}$ dans $\mathcal{S}_{G^2}$. De ce fait, on a $\mathcal{S}_{G^1} \hookrightarrow \mathcal{S}_{G^2}$. On remarque que cette relation est transitive, ce qui, en vertu du lemme 16 , permet d'énoncer :

Proposition 3.- "On a les relations suivantes :

$$(4)\quad (\mathcal{S}_{N_1} \hookrightarrow \mathcal{S}_U \hookrightarrow \mathcal{S}_{S_\ell^p} \hookrightarrow \mathcal{S}_{W_p} \hookrightarrow \mathcal{S}_{B_p} \hookrightarrow \mathcal{S}_{N_\infty}) \;\&\; (\mathcal{S}_{N_1} \hookrightarrow \mathcal{S}_{N_p} \hookrightarrow \mathcal{S}_{N_\infty})$$

$$(5)\quad (1 \leqslant p_1 < p_2 \supset ((\mathcal{S}_{S_\ell^{p_2}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{S_\ell^{p_1}}) \;\&\; (\mathcal{S}_{W_{p_2}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{W_{p_1}}) \;\&\; (\mathcal{S}_{B_{p_2}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{B_{p_1}}) \;\&\; (\mathcal{S}_{N_{p_1}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{N_{p_2}})))\text{ ".}$$

Par la suite, on utilisera également le lemme suivant :

Lemme 17.- "On peut construire une suite C de nombres réels positifs tels que l'on ait : pour tout polynôme trigonométrique P dont les fréquences sont, avec le nombre 1 linéairement indépendantes sur les rationnels, si x_o , x_1, x_2 désignent respectivement des B_2-norme, B_{2m}-norme et W_{2m}-norme du polynôme P , alors $x_1 = x_2 \leqslant C_m\, x_o$ $(m \geqslant 1)$".

Démonstration. D'après l'hypothèse faite sur les fréquences du polynôme P , il est clair que l'on peut construire des nombres x_o , x_1 , x_2 qui soient, respectivement, des B_2-norme, B_{2m}-norme et W_{2m}-norme du polynôme P ,

m étant un entier naturel positif. Soit $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$.

Alors $|\Phi_p(t)|^2 = \sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1,j=1,k\neq j}^{qq} \alpha_k \bar{\alpha}_j e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t}$. On pose

$\beta_0 = \sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|^2$ et $\beta_{k_j} = \alpha_k \bar{\alpha}_j$, $\mu_{kj} = \lambda_k - \lambda_j$ pour $k \neq j$. D'où :

$$|\Phi_p(t)|^{2m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{h!(m-h)!} \beta_0^h \Big(\sum_{k\neq j} \beta_{kj} e^{i\mu_{kj}t}\Big)^{m-h} .$$

Désignons par s un $q(q-1)$-uplet d'entiers naturels $s = s_{2,1} * s_{3,1} * s_{3,2} * \ldots * s_{q,q-1}$, que l'on notera $s = \underset{k\neq j}{*} s_{kj}$ étant entendu que k et j varient entre 1 et q . On posera $|s| = \sum_{k\neq j} s_{kj}$, $s! = \prod_{k\neq j} s_{kj}!$ et $\beta^s = \prod_{k\neq j} \beta_{kj}^{s_{kj}}$ avec la convention $s_{kj} = 0 \supset \forall z(z^{s_{kj}} = 1)$ où z désigne un nombre complexe. On désigne par v un q-uplet d'entiers naturels $v = v_1 * \ldots * v_q$ que l'on notera $v = \underset{k}{*} v_k$ avec $k = 1,\ldots,q$. On posera $|v| = \sum_k v_k$, $v! = \prod_k v_k!$ et $a^v = \prod_k |\alpha_k|^{2v_k}$. On notera $(s,\mu) = \sum_{k\neq j} s_{kj}\mu_{kj}$ où $s = \underset{k\neq j}{*} s_{kj}$ et $\mu = \underset{k\neq j}{*} \mu_{kj}$ (on définit aisément $\underset{k\neq j}{*} \mu_k$) et $(v,\lambda) = \sum_k \lambda_k v_k$ où $v = \underset{k}{*} v_k$ et $\lambda = \underset{k}{*} \lambda_k$. On a alors :

$$(6) \qquad |\Phi_p(t)|^{2m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{h!(m-h)!} \beta_0^h \sum_{|s|=m-h} \beta^s \frac{(m-h)!}{s!} e^{i(s,\mu)t} .$$

Si f est une fonction presque périodique, soit $\check{f}$ la fonction définie par $\forall x(\check{f}(x) = f(-x))$. $\check{f}$ est presque-périodique. On écrira $f \sim x \pmod{\mathfrak{M}}$ chaque fois que $x = \mathfrak{M}(f + \check{f})$ (cf. lemme 2), ce qui équivaut à $x \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt$; Il est clair que si f_1 et f_2 sont presque-périodiques ainsi que $f_1 + f_2$ et si $f_j \sim x_j \pmod{\mathfrak{M}}$ $(j = 1,2)$, alors

$f_1+f_2 \sim x_1+x_2 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$. En raison des hypothèses faites toute somme partielle des termes de la somme (6) est presque périodique. En effet, $(s,\mu) = \sum_{k\neq j} s_{kj}\mu_{kj} = \sum_{k\neq j} s_{kj}(\lambda_k - \lambda_j)$. Si on pose $w_k = \sum_{j\neq k}(s_{kj} - s_{jk})$, on a $(s,\mu) = (w,\lambda)$ où $w = \underset{k}{*}\ w_k$. La discrétude rationnelle des $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ implique donc celle des fréquences de toute somme partielle de (6). Comme les λ_k sont linéairement indépendants sur les rationnels et non nuls, $(s,\mu) = 0 \equiv \forall k(1\leq k\leq q \supset w_k = 0)$. Soit x_s un réel tel que $e^{i(s,\mu)t} \sim x_s (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$ (un tel nombre est réalisable). Alors $(x_s = 1 \equiv (s,\mu) = 0)$ & $(x_s = 0 \equiv (s,\mu) \neq 0)$. En vertu de (6) on a donc :

$$(7) \quad |\Phi_p(t)|^{2m} \sim \sum_{h=o}^{m} \frac{m!}{h!\,(m-h)!}\ \beta_o^h \sum_{|s|=m-h} \frac{(n-h)!}{s!}\ \beta^s x_s \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}) .$$

On remarque que si $w_k \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ pour un des indices $1,\ldots,q$ alors $(w,\lambda) \neq 0$, c'ést-à-dire $(s,\mu) \neq 0$, et donc $x_s = 0$. Donc, dans (7) on ne tiendra compte que des termes s pour lesquels $\forall k(w_k \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2))$, qu'on appellera <u>multi-entiers pairs.</u> On remarque aussi, que

$$|\beta|^s = \prod_{k\neq j} (|\alpha_k||\alpha_j|)^{s_{kj}} = \prod_{k=1}^{q} |\alpha_k|^{w_k^{(1)}} \quad \text{où} \quad w_k^{(1)} = \sum_{k\neq j}(s_{kj} + s_{jk}) \text{ , et}$$

que $w_k^{(1)} \equiv w_k\ (\mathrm{mod}\ 2)$ car $1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Comme on suppose s pair, on peut écrire $w_k^{(1)} = 2v_k^{(s)}$ où $v_k^{(s)}$ est un entier naturel. D'où $|\beta^s| = a^{v^{(s)}}$ pour s pair, et $v^{(s)} = \underset{k}{*}\ v_k^{(s)}$. Comme par définition de x_1, $|\Phi_p(t)|^{2m} \sim x_1^{2m} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, on a :

$$(8) \qquad x_1^{2m} \leq \sum_{h=o}^{m} \frac{m!}{h!\,(m-h)!}\ \beta_o^h \sum_{\substack{|s|=m-h \\ s \text{ pair}}} \frac{(m-h)!}{s!}\ a^{v^{(s)}}$$

On remarque que $\sum_{k=1}^{q} w_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j \neq k} (s_{kj} + s_{jk}) = 2|s|$.

D'où $|v^{(s)}| = |s|$. On considère maintenant v fixé avec $|v| = m - h$, v étant un q-uplet d'entiers naturels. On cherche un majorant du nombre de multi-entiers s tels que $v^{(s)} = v$. Soient $\sigma_1,\ldots, \sigma_p$ les s_{kj} non nuls de s . Soit $j_1,\ldots, j_u$ la réunion des indices figurant dans les kj pour chacun des σ_j . Soit s' un autre multi-entier, $\sigma'_1,\ldots, \sigma'_p$, et $j'_1,\ldots, j'_{u'}$ définis comme pour s. Si l'ensemble $j_1,\ldots, j_u$ diffère de l'ensemble $j'_1,\ldots, j'_{u'}$, alors $a^{v^{(s)}}$ contient un $|\alpha_k|$ que ne contient pas $a^{v^{(s')}}$. Par ailleurs, $m - h$ se décompose, à l'ordre près des termes fixé, par exemple, par la condition $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$, en au plus $2^{\frac{(m-h)(m-h-1)}{2}}$ sommes de $m-h$ entiers naturels qu'on appellera décompositions canoniques. Soit s tel que $v^{(s)} = v$. Aux entiers $\sigma_1,\ldots, \sigma_p$ correspond une seule décomposition canonique. $\sigma_1,\ldots, \sigma_p$ définissent l'ensemble d'indices $j_1,\ldots, j_u$. Il y a au plus $\frac{(2(m-h))!}{(m-h)!\,2}$ ensembles d'indices doubles $k_1 j_1 \ldots k_p j_p$ dont la réunion des indices soit $j_1,\ldots, j_u$. Pour un tel ensemble d'indices doubles $k_1 j_1 \ldots k_p j_p$

il y a au plus $p!$ permutations possibles des $\sigma_1,\ldots, \sigma_p$. Comme $p \leq m - h$, on a donc au plus

$\frac{2(m-h)!}{(m-h)!}\,2^{\frac{(m-h)(m-h-1)}{2}}$ multi-entiers s pairs tels que $v^{(s)} = v$, où v est un q-uplet d'entiers naturels donnés. Par ailleurs, pour tous s et v avec $|s| = |v| = m - h$, on a $\frac{v!}{s!} \leqslant (m-h)!$. D'où $\frac{(m-h)!}{s!} \leqslant (m-h)!\,\frac{(m-h)!}{v!}$. De (8) on tire donc

$$x_1^{2m} \leqslant \sum_{h=o}^{m} \frac{m!}{h!(m-h)!}\ \beta_o^h \sum_{|v|=m-h} \frac{(m-h)!\,(m-h)!\,(2(m-h))!}{v!\ \ (m-h)!}\,2^{\frac{(m-h)(m-h-2)}{2}}\ a^v =$$

$$= \sum_{h=o}^{m} d_{h,m}\ \beta_o^h \sum_{|v|=m-h} \frac{(m-h)!}{v!}\ a^v \qquad \text{avec } d_{h,m} = \frac{m!}{h!}\ \frac{(2(m-h))!}{(m-h)!}\ 2^{\frac{(m-h)(m-h-1)}{2}} .$$

Comme $\sum_{|v|=m-h} \frac{(m-h)!}{v!}\ a^v = \beta_o^{m-h}$, on obtient $x_1^{2m} \leqslant (\sum_{h=o}^{m} d_{h,m})\ \beta_o^m$.

Or $\beta_o = x_o^2$ (cf.[16]) et $(2m!)2^{\frac{m^2}{2}}$ est un majorant de $\sum_{h=o}^{m} d_{h,m}$. D'où en prenant par exemple $C_m = ((2m)!)^{\frac{1}{2m}}\,2^{\frac{M}{4}}$, la construction d'une suite de réels tels que $x_1 \leqslant C_m x_o$ $(m \geqslant 1)$.

Il reste à montrer que $x_1 = x_2$. D'après (6) et (7), $|\Phi_p(t)|^{2m} = x_1^{2m} + \sum c_j e^{i\omega_j t}$ avec $\omega_j \neq 0$, j parcourant un nombre fini d'indices. Il vient

$$\frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} |\Phi_p(t)|^{2m} = x_1^{2m} + \sum_j c_j e^{i\omega_j x}\ \frac{e^{i\omega_j \ell}}{i\omega_j \ell} \leqslant$$

$$\leqslant x_1^{2m} + \frac{1}{\ell} \sum_j |c_j|\ \frac{2}{|\omega_j|}$$

. Les $|c_j|$ sont bornés et les $|\omega_j|$ bornés inférieurement par une constante positive. Donc pour chaque n

$$w_{\ell,2m}(n,P) \leqslant x_1^{2m} + \frac{1}{\ell} \sum_j \frac{2|c_j|}{|\omega_j|}$$

. Comme x_2 est une W_{2m}-norme de P , qui est réalisable en vertu des hypothèses faites sur P , par passage à la limite sur n , puis sur ℓ , on trouve $x_2^{2m} \leqslant x_1^{2m}$. D'après le lemme 16, $x_1 \leq x_2$. D'où $x_1 = x_2$, ce qui achève la démonstration du lemme ■ .

2. Propriétés communes des espaces $\mathcal{S}_G$.

Théorème 4.- "Pour chacun des prédicats G, l'espace $\mathcal{S}_G$ est non-séparable et suffisamment non séparable ".

Démonstration.-D'après le lemme 16, pour chacun des prédicats G on a :

(1) $\forall Pr(G(r,P) \supset N_\infty(r,P))$.

Soit $\mathcal{K}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_G$. On peut construire un réel λ, tel que λ soit distinct de toutes les fréquences de chacun des polynômes $\mathcal{K}_n(k)$ (cf.[5]). On pose $K = 1\tau\lambda$. Soit $\underbrace{\mathcal{K}_n}(k) = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q$. Alors $\underbrace{\mathcal{K}_n}(k) - K = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q * - 1\tau\lambda$. λ est distinct de chacun des λ_j.

Si P est un polynôme à fréquences séparées égal à $\underbrace{\mathcal{K}_n}(k)$ dans E, ses fréquences figurent parmi les λ_j. Il en résulte $\neg N_\infty(\frac{1}{2}, \underbrace{\mathcal{K}_n}(k)-K)$ d'où, d'après (1), $\forall nk \neg G(\frac{1}{2}, \underbrace{\mathcal{K}_n}(k) - K)$. Si on fixe n et si on fait tendre k vers l'infini on en déduit $\neg G^*(\frac{1}{4}, \mathcal{K}_n - K)$. D'où la première assertion. Si on considère maintenant la famille K_λ définie par $K_\lambda = 1\tau\lambda$, comme on a $\neg N_\infty(\frac{1}{2}, K_{\lambda_1} - K_{\lambda_2})$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d'après (1), on a donc $\lambda_1 \neq \lambda_2 \supset$

$\supset \neg G(\frac{1}{2}, K_{\lambda_1} - K_{\lambda_2})$. D'où le théorème ■.

Corollaire 1." Pour chacun des prédicats G, l'espace $\mathcal{S}_G$ n'est pas métrisable".

Ce corollaire découle immédiatement du lemme 8.

Corollaire 2.- " Pour chacun des prédicats G, la topologie de l'espace $\mathcal{S}_G$ n'est ni M-majorée, ni M-régulière ".

Démonstration. Soit K un point de γ_G et $(G^{\square})_{\langle P,r\rangle}$ un voisinage de base de K. Supposons la topologie de γ_G M-majorée. On peut alors construire une partie d'appui $\mathcal{U}$ de γ_G, telle que $K \in \mathcal{U} \,\&\, \forall K_1 (K_1 \in \mathcal{U} \supset$ $\supset K_1 \in (G^{\square})_{\langle P,r\rangle})$. D'après le prinipe de prise, on peut construire un entier n tel que $K_n \in \mathcal{U}$. Donc on peut construire un polynôme P tel que $P \in \mathcal{U}$. On remarque sans difficulté que

(2) $\forall P_1 P_2 (P_1 \underset{e}{=} P_2 \supset P_1 \underset{E}{=} P_2)$.

Donc $\mathcal{U} \cap E$ est une partie fidèle de $E_{\mathbb{R}}$. Donc, en vertu du principe de prise ($E_{\mathbb{R}}$ est un espace topologique gerbé d'après la proposition 1), on peut construire un polynôme rationnel Q tel que $Q \in \mathcal{U}$. Donc $\mathcal{E}^o$ est dense dans γ_G. Ce qui contredit le théorème 4. D'où le corollaire *.

On peut obtenir ce corollaire comme conséquence du lemme 9 et du théorème suivant :

Théorème 5.- "Pour chacun des prédicats G, l'espace γ_G est un espace localement vaguemant séparable".

Démonstration. D'après la définition, il suffit de se placer dans un élément $(G^{o})_{\langle P,r\rangle}$ où P est un polynôme trigonométrique et r un rationnel positif. Désignons par $\mathcal{M}_1$ l'ensemble $E^o \cap (G^{\square})_{\langle P,r\rangle}$.

D'après (2) et le lemme 15 on a :

(3) $\forall P_1 P_2 (P_1 \underset{e}{=} P_2 \supset P_1 \underset{E}{=} P_2 \supset P_1 \underset{G}{=} P_2)$.

Donc $\mathcal{M}_1$ est une partie fidèle de E*. On notera $\mathfrak{M}_1$ l'espace $\langle \mathcal{M}_{1\underset{e}{=}} \rangle$.

On désigne par $\mathcal{X}_1$ l'espace topologique gerbé dont la structure topologique gerbé est induite par celle de $E_{\mathbb{R}}$, puisqu'on obtient un espace topologique gerbé en prenant une partie fidèle de cet espace (cf.[32]). On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des mots de la forme $P * Q$ où $Q \in \mathcal{E}^{o}$ tels que $P * Q \in (G^{o})_{\langle P,r\rangle}$. Il est clair que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des mots de la forme $P * Q$ avec $\alpha_G^1(Q) < r$ (cf. le corollaire 2 du lemme 14 pour la définition de α_G^1). Comme $\mathcal{E}^{o}$ est énumérable, $\mathcal{E}$ l'est aussi. On désigne par Ψ l'identité sur $\mathcal{P}_G$. D'après (3) c'est une application de $\mathcal{X}_1$ dans $(G^{o})_{\langle P,r\rangle}$. Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{P}_G$, $\Psi(\mathcal{X}_1)$ est dense dans $(G^{o})_{\langle P,r\rangle}$. Il reste à montrer que la topologie de $\mathcal{X}_1$ est vaguement absorbée, dans son fondement, par la topologie de $\mathcal{P}_G$, relativement à $\mathcal{E}$. En effet, soit $P_1 \in \mathcal{X}_1$. D'après la définition de G^{o}, on peut construire r_1 avec $r_1 < r$, tel que $P_1 \in (G^{o})_{\langle P,r_1\rangle}$.
Si on suppose qu'on peut construire une base régulière du groupe engendré par les fréquences de $P_1 - P$, on peut construire une suite $\mathcal{Q}$ de polynômes rationnels tels que la suite $\mathcal{Q}$ converge vers $P_1 - P$ dans $E_{\mathbb{R}}$ et telle que pour tout réel λ qui soit une G-norme de $P_1 - P$, on ait $\lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_G^1(\mathcal{Q}_n)$. Une telle suite est donnée par la suite $\mathcal{Q}$ construite au corollaire 1 du lemme 12, dans le cas des prédicats U, S_{ℓ}^{p}, W_p et B_p : d'après ce corollaire, la suite $\mathcal{Q}$ converge vers $P_1 - P$ dans $E_{\mathbb{R}}$ et vérifie une certaine propriété d'égale presque-périodicité relative.
Or, comme la convergence de $\mathcal{Q}$ vers $P_1 - P$ dans $E_{\mathbb{R}}$ implique la convergence de $\Phi_{\mathcal{Q}_n}$ vers $\Phi_{P_1 - P}$ uniformément sur tout intervalle $[-m,+m]$ la suite des fonctions u.p.p. $\Phi_{\mathcal{Q}_n}$ converge étroitement vers la fonction u.p.p. $\Phi_{P_1 - P}$. Il résulte du corollaire 2 du lemme 12 que

$\lambda \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}^1_G(\mathcal{R}_n)$. Dans le cas des prédicats N_p et N_∞ , on utilise la suite $\mathcal{Q}^{P_1-P}$ et la démonstration du lemme 13 montre que $\lambda \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}^1_G(\mathcal{R}_n)$. On a donc $\lambda \leqslant r_1$ donc $\lambda < r$. Donc, on peut construire un entier n_1 tel que $\forall n (n \geqslant n_1 \supset \mathcal{A}^1_G(\mathcal{R}_n) < r)$. Donc, si on peut construire une base régulière du groupe engendré par les fréquences de $P_1 - P$, on peut construire une suite Φ d'éléments de $\mathcal{E}$, les mots $P * \mathcal{R}_n$ pour $n \geqslant n_1$ telle que $\Phi(n)$ converge vers $P + (P_1 - P)$ dans $E_{\mathbb{R}}$, $P + (P_1 - P)$ étant égal à P dans E , donc dans $\mathcal{S}_G$. Comme on ne peut pas ne pas construire une base régulière du groupe engendré par les fréquences de $P_1 - P$, on ne peut ne pas construire la suite Φ , d'où le théorème ■.

Corollaire.- "Pour chacun des prédicats G on a : toute application de $\mathcal{S}_G$ dans un espace topologique M-régulier est continue en chaque point où elle est définie".

On établira, au paragraphe 4 , comme corollaire d'une propriété du prédicat N_1 et du lemme 16 que tous les espaces E_G sont T-séparés.

On a également,

Proposition 4.- (cf. [24])" . On peut construire une forme linéaire f sur E qui admette une discontinuité constructive en 0 pour chaque espace E_G ".

Démonstration. L'exemple de la fonction donnée ci-dessous est dû à V.P. Tchernov : Soit $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$. On pose $\psi(P) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \alpha_k$. ψ est une application sur E et c'est une forme linéaire. En effet, $\forall P(\phi(P) = \Phi'_P(0))$. Soit β la suite de polynômes trigonométriques $\forall n(\beta_n = \frac{1}{n+1} \tau \quad n+1)$. Pour tout G , $\frac{1}{n+1}$ est une $\hat{G}$-norme de β_n et, par ailleurs, $\forall n(\phi(\beta_n) = 1)$. D'où l'assertion ■ .

<u>Corollaire.</u>- " Pour chaque espace E_G on peut construire une fonction numérique qui n'admet pas de prolongement à $\mathcal{S}_G$ ".

3. Propriétés des espaces $\mathscr{S}_{B_p}$, $\mathscr{S}_{W_p}$, $\mathscr{S}_{N_p}$ $(p > 1)$ et $\mathscr{S}_{N_\infty}$.

Dans tout ce paragraphe G désigne un des prédicats suivants : $B_p(p \geqslant 1)$, W_p $(p \geqslant 1)$, $N_p(p > 1)$ et N_∞ .

3.1. Densité des parties d'appui non vides dans $\mathscr{S}_G$.

On a en effet le théorème suivant :

Théorème 6.- "Toute partie d'appui non vide de $\mathscr{S}_G$, pour $G = B_p$ $(p \geqslant 1)$, W_p $(p \geqslant 1)$, N_p $(p > 1)$, N_∞ , est dense dans $\mathscr{S}_G$ ".

Démonstration. Si on considère G^1 et G^2 deux prédicats G pour les valeurs de G admises dans ce paragraphe avec $\forall Pr(G^1(r,P) \supset G^2(r,P))$, d'après la proposition 3 on a $\mathscr{S}_{G^1} \subsetneq \mathscr{S}_{G^2}$. Supposons que toute partie d'appui non vide $\mathscr{S}_{G^1}$ soit dense dans $\mathscr{S}_{G^1}$. Alors cette propriété est vraie aussi pour $\mathscr{S}_{G^2}$. Soit en effet $\mathscr{Y}$ une partie d'appui non vide de $\mathscr{S}_{G^2}$. D'après le principe de prise $E \cap \mathscr{Y}$ est non vide. Comme l'identité sur $\mathscr{S}_{G^1}$ est une application de $\mathscr{K}_{G^1}$ dans $\mathscr{K}_{G^2}$ et que $E \subset \mathscr{K}_G$ pour tout G, $\mathscr{S}_{G^1} \cap \mathscr{Y}$ est une partie d'appui non vide de $\mathscr{S}_{G^1}$. Soit $K \in (G^{2\circ})_{\langle P,r\rangle}$. On peut trouver un polynôme trigonométrique Π tel que $\Pi \in (G^{2\circ})_{\langle P,r\rangle}$ puisque E est dense dans $\mathscr{S}_G$, quel que soit G . Comme on a $\mathscr{S}_{G_1} \subsetneq \mathscr{S}_{G_2}$, on peut construire $\langle P_1, r_1\rangle$ tel que $(G^{1\circ})_{\langle P_1,r_1\rangle}$ soit contenu dans $\mathscr{K}_{G^1} \cap (G^{2\circ})_{\langle P,r\rangle}$ avec $\Pi \in (G^{1\circ})_{\langle P_1,r_1\rangle}$.

Comme $\mathcal{U} \cap \gamma^{\rho}_{G^1}$ est dense dans $\gamma^{\rho}_{G^1}$, on peut construire un $X \in \mathcal{U} \cap \gamma^{\rho}_{G^1}$ avec $X \in (G^{1\circ})_{\langle P_1,r_1\rangle}$. D'où $X \in \mathcal{U} \cap (G^{2\circ})_{\langle P,r\rangle}$

On remarque également qu'il suffit de montrer que toute partie d'appui non vide de E_G est dense dans E_G puisque, d'après le principe de prise, si $\mathcal{U}$ est une partie d'appui non vide de γ^{ρ}_G, $\mathcal{U} \cap E$ est non vide.

Démontrons l'assertion pour le prédicat N_p $(p > 1)$.

Soit donc $\mathcal{U}$ une partie d'appui de E_G (donc de E), $\mathcal{U}$ non vide. $\mathcal{U}$ est aussi une partie d'appui de E^*(cf. (2; (2))). En vertu du principe de prise et du principe du choix constructif appliqué aux polynômes rationnels, $\mathcal{U}$ est habité. Soit donc $P_1 \in \mathcal{U}$ et P_2 un polynôme trigonométrique. On pose $P = P_1 - P_2$.

On peut écrire : $P = \alpha_1\tau\lambda_1 * \ldots * \alpha_q\tau\lambda_q$. On pose alors

$$\Pi_n = \underbrace{\frac{\alpha_1}{n}\tau\lambda_1 * \ldots * \frac{\alpha_1}{n}\tau\lambda_1}_{n \text{ fois}} * \ldots * \underbrace{\frac{\alpha_q}{n}\tau\lambda_q * \ldots * \frac{\alpha_q}{n}\tau\lambda_q}_{n \text{ fois}}$$

Il est clair que $\forall n (P_1 \underset{E}{=} P_2 + \Pi_n)$. On a donc :

$$(1) \qquad \forall n\, (P_2 + \Pi_n \in \mathcal{U})$$

puisque $\mathcal{U}$ est une partie d'appui. On peut construire une suite $\beta_{n,u}$ de polynômes trigonométriques définie par :

$$(2) \quad \beta_{n,u} = \frac{\alpha_1}{n}\tau\,\ell^{(1)}_{1,u} * \ldots * \frac{\alpha_1}{n}\tau\,\ell^{(n)}_{1,u} * \ldots * \frac{\alpha_q}{n}\tau\ell^{(1)}_{q,u} * \ldots * \frac{\alpha_q}{n}\tau\ell^{(n)}_{q,u}$$

où $\ell^{(j)}_{i,p} = \frac{\pi^{ni+j}}{\widehat{(\pi^{ni+j})}_u} \widehat{(\lambda i)}_u$.

Alors, pour tout u , si $(i,j) \neq (k,h)$, $\ell^{(j)}_{i,u} \neq \ell^{(h)}_{k,u}$. Donc $\beta_{n,u}$ a ses fréquences séparées, de telle sorte qu'on peut calculer une N_p - norme de $\beta_{n,u}$. En l'occurence :

$$(3) \quad \forall unp \; (p > 1 \supset (N_p)_1 (\frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}} (\sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|^p)^{1/p} , \beta_{n,u})) .$$

En particulier :

$$(4) \quad \forall un \; (n \geq 1 \supset (N_2)_1 (\frac{1}{\sqrt{n}} (\sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|^2)^{1/2} , \beta_{n,u})) .$$

Pour n fixé , $n \geq 1$ on considère la suite des $\beta_{n,u}$. Il est clair, d'après (2) que $\beta_{n,u}$ converge vers Π_n dans $E_{\mathbb{R}}$ et donc $P_2 + \beta_{n,u}$ converge vers $P_2 + \Pi_n$ dans $E_{\mathbb{R}}$. Comme $\mathcal{Q}$ est une partie fidèle de E^*, en vertu du principe de prise, on peut construire un entier u_n tel que $P_2 + \beta_{n,u_n} \in \mathcal{Q}$. On pose $S_n = \beta_{n,u_n}$. Alors $\forall n(P_2 + S_n \in \mathcal{Q})$.

D'après (3) on a donc $\forall np \; (n \geq 1 \;\&\; p > 1 \supset (N_p)_1 (\frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}}(\sum_{k=1}^{q}|\alpha_k|^p)^{1/p} , S_n))$.

Il en résulte que la suite $P_2 + S_n$ converge vers P_2 dans E_G .

D'où le théorème dans le cas N_p $(p > 1)$ et N_∞ .

Soit G un des prédicats B_p ou W_p avec $p \geq 1$. On remarque que si P est un polynôme à fréquences séparées avec

$P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$, $\left(\sum_{k=1}^{q} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2}$ est une B_2 -norme de P.

Soit donc $\mathcal{O}$ une partie d'appui non vide de E et $P_1 \in \mathcal{O}$ (cf. précédemment). Soit $P_2 \in E^o$ et $P = P_1 - P_2$ avec $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$. On définit Π_n et $\beta_{n,u}$ comme ci-dessus. De (2) on déduit que pour tout n et u les fréquences $\beta_{n,u}$ sont, avec le nombre 1, linéairement indépendantes sur les rationnels. Soit p fixé et m un entier positif tel que $p \leq 2m$. Si C désigne la lettre B ou W, suivant que $G = B_p$ ou W_p respectivement, on peut construire une C_{2m} - norme x_n du polynôme S_n. D'après le lemme 17 et d'après (4), la suite $P_2 + S_n$ converge vers P_2 dans $E_{C_{2m}}$. D'où le théorème. ▨

3.2. Conséquences.

On déduit de ce théorème des corollaires importants :

Théorème 7.- "Pour $G = B_p$ $(p \geqslant 1)$, $W_p (p \geqslant 1)$, $N_p (p > 1)$, N_∞ on a la propriété suivante : toute application non constante de l'espace E_G dans un espace topologique T-séparé et M-régulier admet une discontinuité constructive en chaque point où elle est définie".

Démonstration. Pour la simplicité de l'exposé, on se placera dans le cas d'une application numérique f définie sur E_G. Il est clair que si f n'est pas constante, son domaine de définition n'est pas vide. Donc, en vertu du principe de prise et du principe du choix constructif appliqué aux polynômes rationnels, on déduit que le domaine de définition de f est habité. Soit donc P_1 tel que $!f(P_1)$. Comme f n'est pas constante, en vertu du principe de prise et du principe du choix constructif, on peut construire un polynôme P_2 tel que $!f(P_2)$ et tel que $f(P_1) \neq f(P_2)$. (On utilise que l'espace d'arrivée est T-séparé). Soit $\mathcal{R}$ un algorithme transformant tout rationnel en le nombre 1 et $\mathcal{H}$ un algorithme tel que

$\forall x (x \neq 0 \supset ! \quad \mathcal{H}(x) \,\&\, |x| > 2^{-\mathcal{H}(x)})$. On trouve dans [35] la description d'un tel algorithme. On peut construire un rationnel positif r tel que

$|f(P_1) - f(P_2)| > r$ puisque $f(P_1) \neq f(P_2)$. On pose

$g(P) \simeq f(P). \mathcal{R}(\mathcal{H}(|f(P) - f(P_1)| - \frac{r}{2}))$. Il est clair que $\neg !g(P_1) \,\&\, !g(P_2)$.

g est une application numérique définie dans E_G. On peut donc construire une suite Φ de points de E_G telle que $\forall n (!g(\Phi_n) \,\&\, P_1 \lim_{n\to+\infty} {}_G \Phi_n)$, c'est-à-dire une suite de points Φ_n qui converge vers P_1 dans E_G et telle que $\forall n(!f(\Phi_n)$ & $|f(\Phi_n) - f(P_1)| > \frac{r}{2})$. Donc f admet une discontinuité constructive au point P_1. ∎

Corollaire 1.- "Pour $G = B_p\ (p \geqslant 1)$, $W_p\ (p \geqslant 1)$, $N_p\ (p > 1)$, N_∞ on a la propriété suivante : toute application de l'espace $\mathcal{P}_G$ dans un espace topologique T-séparé et M-régulier est constante".

Démonstration. Comme toute application f de $\mathcal{P}_G$ dans un espace M-régulier est continue(corollaire du théorème 5), sa restriction à E_G l'est aussi. D'après le théorème 7, f ne peut pas ne pas être non constante. Donc $\forall P_1 P_2(!f(P_1)$ & $!f(P_2) \supset f(P_1) = f(P_2))$. Donc f est constante sur $\mathcal{P}_G$ par continuité. ∎

On remarque que ce corollaire se déduit également des théorèmes 7 et 2 : en effet, si f est une application non constante de $\mathcal{P}_G$ dans un espace topologique T-séparé et M-régulier, en vertu du principe de prise, la restriction de f à E_G est également non constante. Donc, en vertu du théorème 7, elle admet une discontinuité constructive en un point. Donc f admet la même discontinuité constructive au même point, ce qui contredit le théorème 2.

Corollaire 2.- "Pour $G = B_p(p \geqslant 1)$, $W_p(p \geqslant 1)$, $N_p(p > 1)$, N_∞ on a la propriété : les applications non constantes de E_G dans un espace uniforme

T-séparé et M-régulier ne peuvent être prolongées en dds applications de $\mathcal{P}_G$ dans le complété de cet espace uniforme".

4. Propriétés des espaces γ_{N_1}, γ_{U}, $\gamma_{S^p_\ell}$.

Soit $\langle \mathcal{M}, \langle I,B\rangle\rangle$ un espace topologique constructif. On dira que l'espace $\langle \mathcal{M},\langle I,B\rangle\rangle$ est fortement séparé par rapport à $\langle I,B\rangle$ si on peut construire un algorithme $\mathfrak{h}$ tel que $\forall Xi(\neg(X \in (B)_i) \equiv\ !\ \mathfrak{h}\ (X \square i))$.

On dit que l'espace $\langle \mathcal{M}, \langle I,B\rangle\rangle$ est fortement séparé si on peut construire une base de topologie $\langle I_1,B_1\rangle$ équivalente à $\langle I,B\rangle$ telle que $\langle \mathcal{M},\langle I_1,B_1\rangle\rangle$ soit fortement séparé par rapport à $\langle I,B\rangle$.

Proposition 5.- "Soit G un des prédicats U ou S^p_ℓ ($\ell > 0$ et $p \geqslant 1$ fixés). On peut construire un algorithme f_G transformant tout couple $x \square K$ où x est un réel et K un élément de γ_G en un nombre réel non négatif tel que :

(i) $\forall x_1 x_2 K_1 K_2 (x_1 = x_2\ \&\ K_1 \underset{G}{=} K_2 \supset f_G(x_1 \square K_1) = f_G(x_2 \square K_2))$

(ii) $\forall kr\ (\neg\ G^*(r,K) \equiv \exists x(f_G(x \square K) > r))$."

Démonstration.- Soit $P \in E_G$ et x un nombre réel. On peut construire un algorithme φ_G transformant $x \square G$ en un réel non négatif par : $\varphi_U(x \square P) = |\Phi_p(x)|$ et $\varphi_{S^p_\ell}(x \square P) = (\omega_{\ell,p}(x,P))^{1/p}$. Soit $K \in \gamma_G$.

Comme $\widehat{K}$ est un régulateur de convergence de $\underset{\smile}{K}$ on a :

$\forall nm(|\varphi_G(x \square \widehat{K}_{n+m}) - \varphi_G(x \square \widehat{K}_n)| \leqslant 2^{-n-1})$, car

$|\varphi_G(x \square \widehat{K}_{m+n}) - \varphi_G(x \square \widehat{K}_n)| \leqslant \varphi_G(x \square \widehat{K}_{n+m} - \widehat{K}_n) \leqslant 2^{-n-1}$. On

définit alors f_G par $f_G(x \square K)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_G(x \square \widehat{K}_n)$. f_G est défini comme un algorithme puisqu'il y a un algorithme de passage à la limite dans l'ensemble des nombres réels. L'assertion (i) en découle aussitôt.

On remarque tout d'abord que

(1) $\forall P r(\neg G(r,P) = \exists x(\varphi_G(x \sqcap P) > r))$.

Supposons que P est presque périodique : on peut construire un réel λ qui soit une G-norme de P.

Si on pose $\sigma_n = \sup_{|x| \leqslant n} \varphi_G(x \sqcap P)$, on a $\lambda \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$ et $\forall n(\sigma_{n+1} \geqslant \sigma_n)$.

Donc $\exists x(\varphi_G(x \sqcap P) > r) \supset \lambda > r \supset \neg G(r,P)$. Par construction de λ on tire $G(r,P) \equiv \lambda \leqslant r \equiv \forall x(\varphi_G(x \sqcap P) \leqslant r)$. Donc $\neg G(r,P) \equiv$ $\equiv \neg\neg \exists x(\varphi_G(x \sqcap P) > r)$ puisque l'inégalité sur les réels est équivalente à sa double négation. En vertu du principe du choix constructif $\neg G(r,P) \supset \exists x(\varphi_G(x \sqcap P) > r)$. Mais P ne peut pas ne pas être presque-périodique. Comme G est équivalente à sa double négation, on a la formule (1).

Soit maintenant $K \in \mathcal{P}_G$. Si $\exists x(f_G(x \sqcap K) > r)$, comme $f_G(x \sqcap K) \lim_{n\to+\infty} \varphi_G(x \sqcap \hat{K}_n)$ le principe du choix constructif montre que $\exists n(\varphi_G(x \sqcap \hat{K}_n) > r + 2^{-n})$. On a donc $\neg G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n)$ d'où $\neg G^*(r,K)$ puisqu'on a $G^*(2^{-n}, \hat{K}_n - K)$. Si on a $\neg G^*(r,K)$, on a alors, en revenant à la définition de $\hat{K}_m$, $\neg\neg \exists n \neg G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n)$. D'après (1), en utilisant le principe du choix constructif on a donc $\exists n \neg G(r + 2^{-n}, \hat{K}_n)$. Donc, d'après (1) $\exists x(\varphi_G(x \sqcap \hat{K}_n) > r + 2^{-n})$. Par construction même de $f_G(x \sqcap K)$ on a $f_G(x \sqcap K) > r$. D'où la proposition ▪.

Théorème 8.- "Les espaces $\mathcal{V}_G$ pour $G = N_1, U, S^p_\ell$ $(p \geq 1, \ell > 0)$ sont fortement séparés".

Démonstration. Pour $G = U, S^p_\ell$, cela résulte de la proposition 5 et du principe du choix constructif et du fait que la topologie de $\mathcal{V}_G$ est équivalente à celle de E^*_G. Reste à examiner le cas du prédicat N_1.

On rappelle que $\mathcal{V}_1(n,P) = f_1(\mathcal{P}^{(n;\,P)}[z](n,P))$ (cf. paragraphe 2 du chapitre III). On remarque tout d'abord que si q est un entier positif fixé et $\mathcal{P}$ représante les partitions de $\mathbb{N}_q$ on a :

(2) $$\forall \mathcal{P}_1\ \mathcal{P}_2[z](\ell h[z] = q \;\&\; \mathcal{P}_1 \geq \mathcal{P}_2 \supset$$

$$\supset f_1(\mathcal{P}_1[z]) \geq f_1(\mathcal{P}_2[z])).$$

puisque pour tous z_1, z_2 on a $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Si on considère $\mathcal{Q}^P$ la suite adjointe de P, il résulte de (2) que

$$\forall nm[z](\ell h[z] = q \supset f_1(\mathcal{P}_{n+m}[z]) \geq f_1(\mathcal{P}_n[z])) \text{ où } q = \ell h(P)$$

et $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(n;P)$.

Par construction de $\mathcal{Q}^P$, si $[z](n,P) =$

$= a_1^{(n)} * \ldots * a_q^{(n)}$ on a $|a_k^{(n+m)} - a_k^{(n)}| < 2^{-n-1-q}$ pour $k = 1,\ldots,q$.

Il en résulte $\mathcal{V}_1(n+m,P) = f_1(\mathcal{P}_{n+m}[z](n+m,P)) \geq f_1(\mathcal{P}_n[z](n+m,P)) >$

$> f_1(\mathcal{P}_n[z](n,P)) - 2^{-(n+1)}$. D'où :

(3) $\forall nm(\gamma_1(n+m,P) - \gamma_1(n,P) > -2^{-(n+1)})$.

Si on a $\neg N_1(r,P)$ et si on peut construire une N_1 - norme x de P, comme $x > r$, on peut construire un entier n tel que $\gamma_1(n,P) > r + 2^{-n}$. Donc $\neg N_1(r,P) \supset \neg\neg \exists n(\gamma_1(n,P) > r + 2^{-n})$. En vertu du principe du choix constructif. $\neg N_1(r,P) \supset \exists n(\gamma_1(n,P) > r + 2^{-n})$. Si on suppose $\exists n(\gamma_1(n,P) > r + 2^{-n})$ d'après (3) on a $\forall m(m \geqslant n + 1 \supset \gamma_1(m,P) > > r + 2^{-(n+1)})$. Donc toute N_1- norme x de P, si on peut en construire une, vérifie $x > r$. D'où $\neg N_1(r,P)$ et :

(4) $\neg N_1(r,P) \equiv \exists n(\gamma_1(n,P) > r + 2^{-n})$.

En suivant la démonstration de la proposition 5 on obtient, par applications successives du principe du choix constructif :

(5) $\neg N_1^*(r,K) = \exists nm(\gamma_1(n,\hat{K}_m) > r + 2^{-n} + 2^{-m})$.

Le théorème résulte de l'application du principe du choix constructif à la formule (5). ∎.

<u>Corollaire 1</u>.- "Pour $G = N_1$, U, S^p_ℓ, les espaces γ_G sont T-séparés".

<u>Démonstration</u>. Désignons par h_G un algorithme tel que

(6) $\forall Kr(\neg G^*(r,K) \equiv\, !\, h_G(K \circ r))$.

La formule G^* est équivalente à sa double négation (cf. paragraphe 5 du chapitre III). L'espace γ_G est T'-séparé, donc $\neg(K =_G 0) \equiv \neg\neg \exists r \neg G^*(r,K)$.

D'après la formule (6), il en résulte $\neg(K \underset{G}{=} 0) \equiv \neg\neg \exists r! \mathfrak{H}_G(K \cap r) \equiv$

$\equiv \exists r! \mathfrak{H}'_G(K \cap r)$ en vertu du principe du choix constructif. ■.

<u>Corollaire 2</u>.- "Pour $G = N_1$, S^p_ℓ, U on peut construire des fonctions numériques non constantes sur γ_G et des formes linéaires sur γ^p_G non-triviales".

<u>Démonstration</u>. Pour les fonctions numériques, on peut prendre $f_G(x,.)$ dans le cas de U et de S^p_ℓ. Comme $\gamma_{N_1} \subsetneq \gamma_U$, il est clair que pour chaque x, $f_U(x,.)$ est une fonction numérique non constante sur γ_{N_1}.

Pour les formes linéaires, posons $\psi_U(x \cap P) = \Phi_p(x)$ et

$\psi_{S^p_\ell}(x \cap P) = \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \Phi_p(t)dt$. Il est clair que $|\psi_U(x \cap P_1) - \psi_U(x \cap P_2)| \leqslant$

$\leqslant \varphi_U(x \cap P_1 - P_2)$ pour tous polynômes P_1, P_2 et que

$$|\psi_{S^p_\ell}(x \cap P_1) - \psi_{S^p_\ell}(x \cap P_2)| \leqslant \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} |\Phi_{P_1-P_2}(t)|dt \leqslant \varphi_{S^p_\ell}(x \cap P_1 - P_2)\,\ell^{-\frac{p-1}{p}}.$$

De la proposition 5 et à l'aide d'un algorithme de passage à la limite sur les nombres complexes, on voit que $\lim_{n\to+\infty} \psi_G(x \cap \hat{K}_n)$ est défini. On notera g_G cette limite. Comme précédemment, $g_G(x,.)$ est un exemple de forme linéaire non triviale pour $G = U$ ou S^p_ℓ. Comme $\gamma_{N_1} \subsetneq \gamma_U$, g_U est définie sur γ_{N_1}.

Un corollaire de cette proposition est constitué par l'énoncé suivant :

Proposition 6.- "Pour $G = N_1$, U, S^p_ℓ on a la propriété : on peut construire une application f de γ_G dans lui-même, de domaine de définition non vide et admettant une discontinuité constructive en chaque point où elle est définie".

Démonstration.- On posera, pour simplifier l'écriture :

$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell K\,dt = g_{S^p_\ell}(0,K)$. Dans le cas de U et de N_1, comme la fonction

$g_U(.,K)$ est uniformément continue comme limite uniforme de fonctions uniformément continues, on peut définir la fonction de K: $\frac{1}{\ell}\, g_U(t,K)\,dt$ pour

On posera $\frac{1}{\ell}\int_0^\ell K\,dt = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell g_U(t,K)\,dt$. Soit ℓ fixé, $\ell > 0$ (on prendra $\ell = 1$ pour simplifier les notations). On pose : $f(K) \simeq 1\tau\ \mathrm{Re}\int_0^1 K\,dt$ où si $z = x + iy$, $\mathrm{Re}\,z = x$. Il est clair que f est une application de γ_G dans lui-même, partout définie. Soit $K \in \gamma_G$ et Φ la suite de points de γ_G : $\Phi_n = K + \frac{1}{n}\tau\ 0$. On a $\frac{1}{n}\tau\ 0 \underset{G}{=} \Phi_n - K$. Comme $\forall n N_1(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\tau\ 0)$ on a, d'après le lemme 16 $\forall n\ G(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\tau\ 0)$ et donc $\forall_n G^*(\frac{1}{n+1}, \Phi_{n+1} - K)$.

Donc la suite Φ_n converge vers K dans γ_G. D'autre part,

$\mathrm{Re}\int_0^1 \Phi_n dt = \mathrm{Re}\int_0^1 K dt + \frac{1}{n}$. Donc $\forall n(\mathrm{Re}\int_0^1 \Phi_{n+1}\,dt \neq \mathrm{Re}\int_0^1 K dt)$. D'où

$\forall n \quad \neg N^*_\infty(\frac{1}{2}, f(K) - f(\Phi_{n+1}))$. Il en résulte $\forall n(\neg G^*(\frac{1}{2}, f(K) - f(\Phi_{n+1})))$.

D'où l'énoncé. ∎

On a par ailleurs :

Proposition 7.- "Pour tous les prédicats G l'espace E_G est T-séparé".

Démonstration. D'après le lemme 16, il suffit d'établir pour l'espace E_{N_∞}.

On sait par ailleurs, que quelque soit le prédicat G

$\forall P_1 P_2 (P_1 \underset{E}{=} P_2 \equiv P_1 \underset{G}{=} P_2)$ en vertu du lemme 15. Soit donc

$\neg(P \underset{N_\infty}{=} 0)$. Alors $\neg(P \underset{E}{=} 0)$. En vertu du principe du choix constructif,

$\exists x(|\Phi_p(x)| > 0)$. En appliquant encore une fois ce principe, on peut construire un rationnel positif r tel que $|\Phi_p(x)| > r$. On a alors $\neg U(\frac{r}{2},P)$ d'où, d'après le lemme 16, $\neg N_1(\frac{r}{2},P)$. Soit $q = \ell h(P)$. Soit Π un polynôme propre, égal à P dans E. Alors $\ell h\,(\Pi) = q_1 \leqslant q$, puisque les fréquences de Π figurent parmi celles de P. On peut écrire $\Pi = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_{q_1} \tau \lambda_{q_1}$.

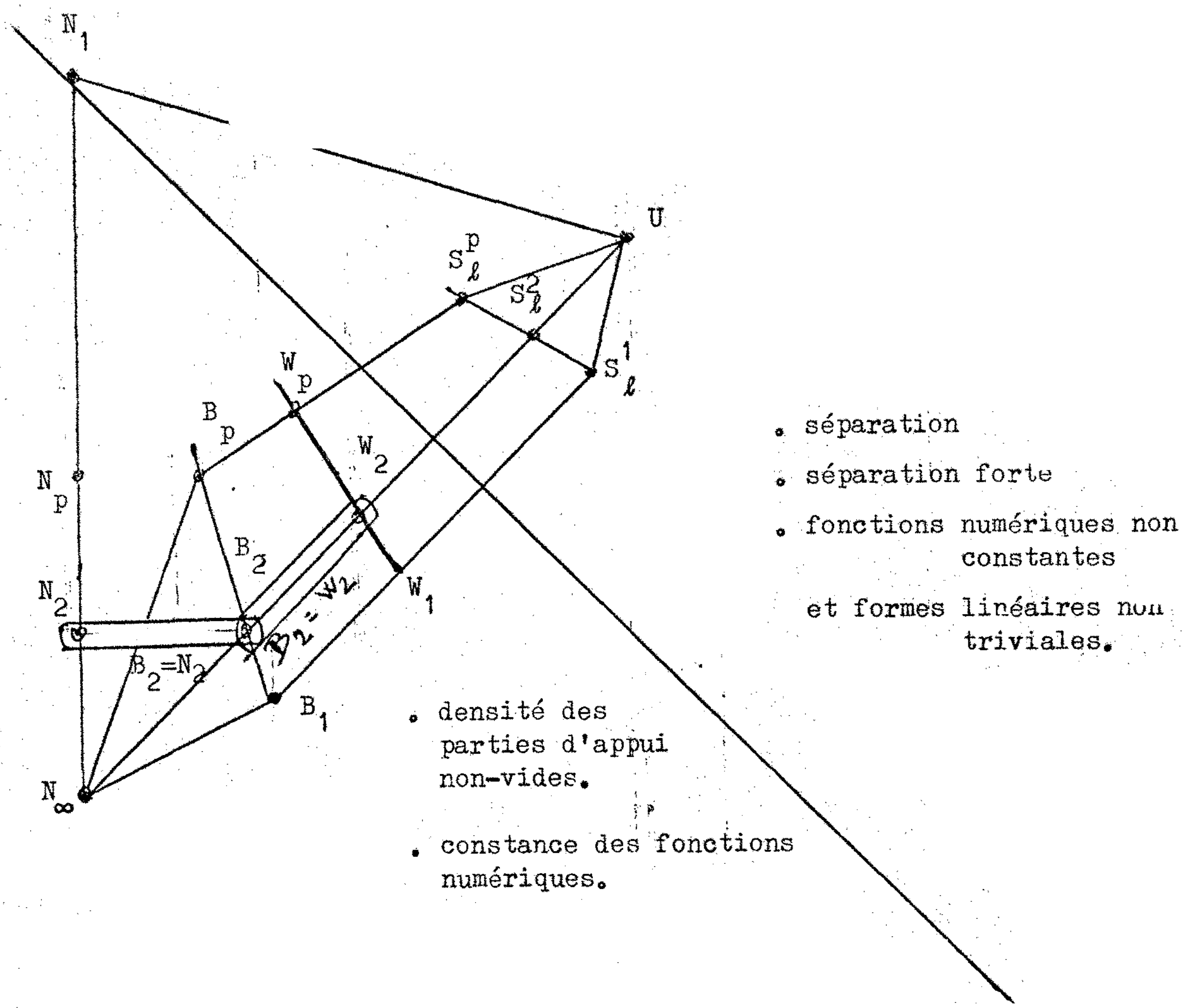
Donc $\sum_{k=1}^{q_1} |\alpha_k|$ est une N_1-norme de Π, donc de P et $\max_{1 \leqslant k \leqslant q_1} |\alpha_k|$ une N_∞ - norme de Π. Or $\sum_{k=1}^{q_1} |\alpha_k| \leqslant q_1 \max_{1 \leqslant k \leqslant q_1} |\alpha_k|$. Comme $q_1 \leqslant q$ il en résulte : $\forall Pr(N_\infty (r,P) \supset N_1(r\, \ell h(P),P))$. On remarquera qu'on a là la meilleure majoration possible. Donc de $\neg N_1(\frac{r}{2},P)$ on tire

$\neg N_\infty(\frac{r}{2\ell h(P)}, P)$. Comme pour tout prédicat G $\forall Pr(N_\infty(r,P) \supset \neg G(n,P))$,

la proposition est démontrée.

5. Conclusion.

On peut résumer les résultats obtenus par le schéma suivant.



Dans ce schéma, un trait oblique joignant G_1 à G_2 signifie que la relation $\gamma_{G_1} \subsetneq \gamma_{G_2}$ a lieu où G_1 est à l'extrémité supérieure du trait.

<u>Remarque</u> : Les relations $\gamma_{G_1} \subsetneq \gamma_{G_2}$ indiquées sur ce schéma ne sont pas permutables, sauf pour les relations $\gamma_{W_p} \subsetneq \gamma_{B_p}$ où la question

reste ouverte (*) .

Pour les autres relations, la classification selon les propriétés topologiques permet de restreindre l'étude aux cas suivants :

(i) $\wp_{N_1} \subsetneq \wp_U$ (ii) $\wp_U \subsetneq \wp_{S^p_\ell}$ (iii) $\wp_{N_\infty} \subsetneq \wp_{B_1}$

(iv) $\wp_{N_p} \subsetneq \wp_{N_\infty}$ pour $1 \leq p_1 < p_2$: (v) $\wp_{B_{p_2}} \subsetneq \wp_{B_{p_1}}$

(vi) $\wp_{W_{p_2}} \subsetneq \wp_{W_{p_1}}$ (vii) $\wp_{S_\ell^{p_2}} \subsetneq \wp_{S_\ell^{p_1}}$ (viii) $\wp_{N_{p_1}} \subsetneq \wp_{N_{p_2}}$

(ix) pour $1 \leq p \leq 2$ $\wp_{N_p} \subsetneq \wp_{B_p}$ (x) pour $p \geq 2$ $\wp_{B_p} \subsetneq \wp_{N_p}$.

Aucune de ces relations n'est permutable sauf, pour $p = 2$, (ix) et (x). Pour (ix) et (x) cela résulte de la non permutabilité des relations (v) et (viii) .

La démonstration est triviale pour (viii) et (iv). Pour les autres relations, on transposera en analyse constructive des démonstrations de l'analyse classique :

Pour (i) , on trouve dans [13] , les contre-exemple du type

$$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\log n}$$ qui sont constructivement valides.

(*) La réponse à cette question est positive : voir la démonstration en appendice.

Pour (iii), les noyaux de Dirichlet permettent de construire un contre-exemple en considérant une série de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} D_{N_n}$ où D_N est le noyaux de Dirichlet d'ordre N et la suite d'entiers N_n choisie de telle sorte que la norme L_1 de D_N, qui est sa B_1- norme puisque D_N est périodique, soit de l'ordre de $\log N$! Constructivement cette démonstration est valide.

Pour les relations restantes, on peut procéder comme suit : p étant fixé, soit $p' > p$. On sait que si f est une fonction ℓ-périodique, $\mathfrak{M}(f) = \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} f(t)dt$ quel que soit x. Il en résulte que si λ_1, λ_2, λ_3 sont respectivement des B_p-, W_p-, S_ℓ^p-normes de f, on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \left(\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

. On peut supposer f 2π-périodique ; on utilise les notations classiques. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $f \notin L^{p'}(\mathbb{T})$, par exemple $f(x) = x^\alpha$ sur $]0,2\pi[$ avec $-\frac{1}{p} < \alpha \leq -\frac{1}{p'}$. On considère $f*K_N$ où K_N est le noyau de Féjer d'ordre N. $f*K_N$ est un polynôme trigonométrique et $\|f*K_N\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$, pour tout N. Par ailleurs, sur l'intervalle $I_m = [\frac{1}{m+1}, 2\pi]$ $(m \geq 0)$, $f*K_N$ converge uniformément vers f. Il en résulte que $\|f*K_N\|_{L^{p'}}$ et $\|f*K_N\|_u$ ne sont pas bornées. On peut donc trouver une suite d'entiers N_n telle que

$$\|f*K_{N_n}\|_{L^{p'}} > 2^n \quad (\text{resp. } \|f*K_{N_n}\|_u > 2^n).$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} f*K_{N_n}$ est alors convergente dans L^p et divergente dans $L^{p'}$ (resp. dans U).

On peut adapter ce raisonnement constructivement : on peut, en analyse constructive, définir l'intégrale d'une fonction uniformément continue sur un intervalle fermé borné. On peut définir l'intégrale sur $[0,2\pi]$ d'une fonction définie sur $]0,2\pi]$, qui est uniformément continue sur tout intervalle $[a,2\pi]$ $(0 < a \leqslant 2\pi)$, pourvu que la suite $\int_{\frac{1}{n}}^{2\pi} f(t)dt$ converge.

On écrira alors $\int_0^{2\pi} f(t)dt$ cette limite. Si $f(x) = x^\alpha$ avec $-\frac{1}{p} < \alpha \leqslant -\frac{1}{p}$ $(p \geqslant 1)$, c'est le cas. On pose $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

et $f * K_N(t) = \sum_{n=N}^{N} (1-\frac{|n|}{N+1})\hat{f}(n)\,e^{int}$. En utilisant la formule de Hölder, on peut établir comme dans [2] que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f * K_N(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{car}$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(t)|dt = 1$ où $K_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} (1-\frac{|n|}{N+1})e^{int}$. Pour établir la convergence uniforme de la suite $f * K_N$ vers f sur I_m, on peut calquer la démonstration classique en utilisant l'artifice suivant pour "prolonger" f par périodicité hors de $[0,2\pi]$. On considère des fonctions constructives définies sur $]-2\pi,0[$, $]0,2\pi[$ et $]2\pi,4\pi[$ déduites les unes des autres par translation. Comme $\int_{\frac{1}{m}}^{2\pi} |f(t)|^{p'}dt$ tend vers l'infini constructivement, ceci permet d'établir $\neg\,\exists C\ \forall n(x_n \leqslant C)$ où $G_1(x_n,P_n)$ avec

$G = S_{\ell}^{p'}$ ou U et $\Phi_{p_n} = f * K_n$. Donc $\forall C \neg\neg \exists n(x_n > C)$. D'après le principe du choix constructif, on obtient, comme les x_n sont réalisables, $\forall C \; \exists n(x_n > C)$. En prenant pour C les nombres 2^j , on termine la démonstration suggérée comme on le fait en analyse classique.

Ce même argument permet de construire un élément de $\mathcal{S}_{W_1}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{S}_{S_{\ell}^1}$. En effet, on a $\neg \exists C \; \forall K(W_1^*(1,K) \supset S_{\ell}^1*(C,K))$, ou encore $\forall C \neg\neg \exists K(W_1^*(1,K) \,\&\, \neg\, S_{\ell}^1*(C,K))$ puisque G^* est équivalente à sa double négation. Le théorème 8 et la propriété de séparabilité vague locale montrent, qu'en se restreignant à des polynômes rationnels, on peut ôter la double négation dans la dernière formule. Ceci permet de reproduire dans ce cas le raisonnement évoqué plus haut.

APPENDICE.

Comme cela est indiqué en note au paragraphe 5 du chapitre IV (p.), on peut établir l'inclusion topologique $\mathcal{S}_{B_p}^{\rho} \subsetneq \mathcal{S}_{W_p}^{\rho}$. On a :

<u>Proposition 8</u>.- "Quel que soit le réel p , $p \geqslant 1$, on a :

$$\forall Pr \quad (B_p(r,P) \equiv W_p(r,P))."$$

<u>Démonstration</u>. On sait que (voir [24]).

$$(1) \quad (1-x)^{\nu} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k}{\nu} x^k$$

uniformément sur $[0,1]$ pour $\nu > 0$. $p \geqslant 1$ étant fixé, on pose $\nu = \frac{p}{2}$.

P est un polynôme trigonométrique fixé dont on suppose les fréquences rationnellement discrètes. On écrit $P = \alpha_1 \tau \lambda_1 * \ldots * \alpha_q \tau \lambda_q$. Soit $M = (\sum_{k=0}^{q} |\alpha_k|) + 1$. On a $\forall x(|\Phi_p(x)| \leqslant M)$. On pose $g_p = 1 - \frac{1}{M^2} P\overline{P}$ où $\overline{P} = \bar{\alpha}_1 \tau - \lambda_1 * \ldots * \bar{\alpha}_q \tau - \lambda_q$ avec si $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

On a : $\forall x((|\Phi_p(x)|^p = M^p(1 - \Phi_{g_p}(x))^{\nu}) \;\&\; (0 \leqslant \Phi_{g_p}(x) \leqslant 1))$. On tire de (1) que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire un entier N tel que

$$(2) \quad \forall x \; (|(1 - \Phi_{g_p}(x))^{\nu} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{k}{\nu} \Phi_{g_p}^{k}(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Il en résulte que pour tout T et ℓ positifs et pour tout x on a :

$$(3_1) \quad |\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\Phi_p(t)|^p dt - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{k}{\nu} \frac{M^p}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi_{g_p}^{k}(t)dt| \leqslant \varepsilon M^p .$$

$$(3_2)\quad \left|\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}|\Phi_p(t)|^p dt - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{k}{\nu}\frac{M^p}{\ell}\int_x^{x+\ell}\Phi_{g_p}^k(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon M^p.$$

Soient x_B et x_W respectivement une B_p-norme et une W_p-norme de P (qui peuvent être construites puisque Φ_p est presque périodique). Soit σ_N un réel limite, lorsque T tend vers l'infini, de

$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{k}{\nu}\frac{M^p}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_{g_p}^k(t)dt$. On peut construire un tel nombre. En passant à la limite dans (3_1) on tire :

$$(4)\quad |x_B^p - \sigma_N| < \varepsilon M^p .$$

On remarque que les fréquences du polynôme g_p^k sont des combinaisons linéaires rationnelles des fréquences de P. Donc

$\Phi_{g_p}^k(t) = a_k + \sum C_m^{(k)} e^{i\omega_m^{(k)} t}$ avec $\omega_m^{(k)} \neq 0$. On sait qu'alors

$\Phi_{g_p}^k(t) \sim a_k \pmod{\mathfrak{M}}$. Comme on a $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{k}{\nu}M^p\Phi_{g_p}^k(t) = \sigma_N + \sum_{j=1}^{s} c_j e^{i\mu_j t}$

où s est un entier positif et $\mu_j \neq 0$, on tire de (3_2) que pour tout $\ell > 0$ et tout x on a

$$\left|\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}|\Phi_p(t)|^p dt - \sigma_N\right| \leqslant \varepsilon M^p + \sum_{j=1}^{s}|c_j|\frac{2\left|\sin\frac{\mu_j\ell}{2}\right|}{|\mu_j\ell|} \quad \text{d'où :}$$

$$(5)\quad \left|\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}|\Phi_p(t)|^p dt - \sigma_N\right| \leqslant \varepsilon M^p + \frac{C}{\ell}$$

où $C > 0$ est une constante que ne dépend que de N. Comme

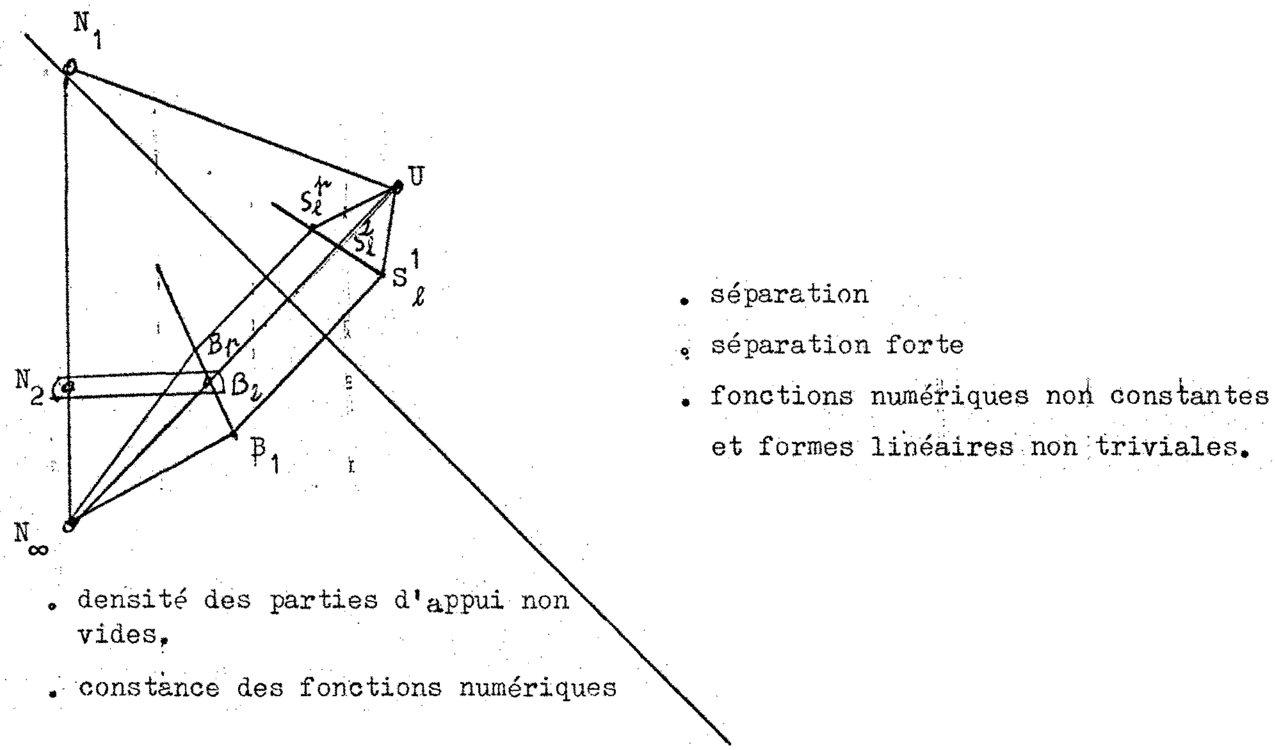
$\sup\limits_x \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} |\Phi_p(t)|^p \, dt$ est calculable constructivement (Φ_p est presque-périodique) si x_ℓ est un nombre égal à ce supremum on tire de (5) que $|x_\ell - \sigma_N| \leqslant \varepsilon M^p + \frac{C}{\ell}$. Comme x_W est la limite quand ℓ tend vers l'infini des x_ℓ on en déduit

(6) $|x_W^p - \sigma_N| \leqslant \varepsilon M^p$.

De (4) et (6) il résulte que $x_B = x_W$. Comme les fréquences du polynôme P ne peuvent ne pas être rationnellement discrètes, on a bien l'énoncé cherché.∎

<u>Corollaire</u>.- "Les espaces $\gamma^{\wp}_{B_p}$ et $\gamma^{\wp}_{W_p}$ sont identiques pour tous p, $p \geqslant 1$ ".

Ainsi, le schéma indiqué au paragraphe 5 du chapitre IV doit être remplacé par le schéma suivant :



On notera que ce résultat est vrai en analyse classique au sens suivant :

(i) la norme B_p et la norme W_p coïncident qur les polynômes trigonométriques ;

(ii) les espaces de fonctions B_p et W_p sont deux représentations fonctionnelles distinctes de la complétion métrique de l'espace des polynômes trigonométriques doté de la norme B_p. En effet, les espaces B_p et W_p sont distincts en tant qu'espaces de fonctions : on peut construire des fonctions nulles au sens B_p qui ne le sont pas au sens W_p. En voici un exemple signalé par J.-P. Kahane : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[10^n, 10^n + n]}$. Le calcul montre que $\|f\|_{W_p} = 1$ et $\|f\|_{B_p} = 0$. Par ailleurs on sait que pour toute fonction f, $\|f\|_{B_p} \leqslant \|f\|_{W_p}$.

(ii) résulte de (i) du fait que les espaces B_p et W_p sont complets pour leurs normes respectives. La complétude de l'espace B_p a été établie par Marcinkiewicz dans [23]. Une modification adéquate de cette démonstration permet d'établir la complétude de l'espace W_p. La densité des polynômes trigonométriques est un des résultats importants établis par Bésicowitch dans [1].

BIBLIOGRAPHIE.

A. BESICOVITCH.
[1] Almost periodic functions. Cambridge Univ. Press. 1932.

E. BISHOP.
[2] Foundation of Constructive Analysis. Mc. Graw Hill. 1967.

H. BOHR.
[3] Fastperiodische Funktionen. Berlin. Springer 1932.
Traduction anglaise : Almost periodic functions, Chelsea, New-York 1947.

Н.А. ШАНИН (N.A. CHANINE).
[4] "О конструктивном понимании математических суждений". Труды матем. ин.та АН СССР. 1958. т. 52. 226-311. "Sur l'interprétation constructive des énoncés mathématiques

[5] "Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства". Труды матем. ин-та АН СССР. 1962.т.67. 15-294.
"Nombres réels constructifs et espaces fonctionnels constructifs".

[6] "Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике". Труды матем. ин-та. АН СССР. 1973. т. 129. 203-266.
"Sur la hiérarchie des interprétations des assertions en mathématiques".

Н.А. ШАНИН, Г.С. ЦЕЙТИН, И.Д. ЗАСЛАВСКИЙ (N.A. CHANINE, G.S. TSEITINE, I.D. ZASLASVK

[7] "Особенности конструктивного математического анализа".
"Peculiarities of constructive mathematical analysis." Congrès international des mathématiciens. Moscou 1966.

В.К. ДЕТЛОВС (V.K. DETLOVS).
[8] "Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций".
Труды матем. ин-та АН СССР. 1958.т.52. 75-139.
"Equivalence des algorithmes normaux et des fonctions récursives.

J. FAVARD.
[9] "Leçons sur les fonctions presque-périodiques". Paris Gauthier-Villars 1933.

G. GENTZEN.
[10] "Untersuchungen über das logische Schließen I".

C.G. GIBSON.
[11] "On the almost periodicity of trigonometric polynomials in constructive mathematics". Indagationes mathematical. vol.34.4. 355-361.

A. HEYTING .

[12] "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". Sit zunker-preuss. Akad. Wissen. Berlin 1930 42-56.

J.-P. KAHANE.

[13] "Séries de Fourier absolument convergentes". Springer. Berlin 1970.

J.-P. KAHANE, R. SALEM.

[14] "Ensembles parfaits et séries trigonométriques. "Hermann, Paris, 1963. A.S.I. 1301.

S.C. KLEENE.

[15] "λ-definability and recursiveness". Duke Math. Journ. 1936-2. 340-353.

[16] Introduction to metamathematics. North-Holland. Amsterdam 1964.

Б.А. КУШНЕР (B.A. KOUCHNER)

[17] "Лекции по конструктивному математическому анализу". Наука. Москва. 1973. "Leçons d'analyse mathématique constructive".

G. KREISEL.

[18] "Non-derivability of (x) A(x) → (Ex) A(x), A primitive recursive in intuitionistic formal systems lab stact.)". Journ. Symb. Logic. 1958.23 456-457.

[19] "On weak completeness of intuitionistic predicate logic." Journ. Symb. Logic 1962- 27 139-158.

G. KREISEL, D. LACOMBE, J. SCHOENFIELD.

[20] "Fonctionnelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives". C.R.A.S. Paris 1957. 245 n°4, 399-402.

D. LACOMBE.

[21] "Les ensembles récursivement ouverts ou fermés et leurs applications à l'Analyse récursive". C.R.A.S. Paris 1957. 245 n°13. 1040-1043 et 1958- 246 n°1- 28-31.

S. LANG.

[22] Algebra. Add. and Wesley 1965.

J. MARCINKIEWICZ.

[23] "Une remarque sur les espaces de M. Bésicovitch". C.R.A.S. Paris 1939. 208- 157-159.

M. MARGENSTERN.

[24] "Sur les fonctions numériques constructives dans les espaces de fonctions presque-périodique". Записки научных семинаров ЛОМИ. 1974. т.40. 45-62. (en russe).

А.А. МАРКОВ (A.A. MARKOV)

[25] Теория алгорифмов. Труды матем. ин-та АН СССР. 1954. т.42. "Théorie des algorithmes.

[26] "О конструктивных функциях". Труды матем. ин-та АН СССР. 1958. т.52. н
315-348. "Sur les fonctions constructives".

[27] "An approach to constructive mathematical logic." Proceedings of the 3^d International Congress for logic, methodology and philosophy of science. Amsterdam. 1967.

Y.N. MOSCHOVAKIS.

[28] "Recursive metric spaces". Fund. math. 1964. 99.3. 215-238.

PHAN DINH DIEU.

[29] "Метризуемость, нормируемость и мультинормируемость конструктивных локально выпуклых пространств". Доклады АН СССР. 1965.т.162.№5. 1011.1014. "Métrisabilité, normabilité et multinormabilité des espaces localement convexes constructifs.

[30] "О замкнутых и открытых множествах в конструктивных топологических пространствах". Труды матем. ин-та АН СССР.1967.т.93.250-256. "Ensembles fermés et ensembles ouverts dans les espaces topologique constructifs.

[31] "Некоторые вопросы конструктивного функционального анализа". Труды матем. ин-та АН СССР.1970.т.114. "Quelques problèmes d'analyse fonctionnelle constructive ?

В.П. ЧЕРНОВ (V.P. TCHERNOV)

[32] "Топологические варианты теоремы о непрерывности отображений и родственных теорем". Записки научных семинаров ЛОМИ.1972.т.32. 129-139. "Variantes topologiques du théorème de continuité des applications et des théorèmes voisins".

[33] "О конструктивных топологических пространствах со снопообразной структурой и их отображениях".Кандидатская диссертация.ЛГУ.Ленинград.1973. "Sur les espaces topologiques constructifs à structure topologique gerbée et leurs applications.

A.S. TROELSFRA.

[34] Mathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. Lecture notes in mathematics. 344.

Г.С. ЦЕЙТИН (G.S. TSEITINE)

[35] "Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах". Труды матем. ин-та АН СССР.1962.т.67. 295-361. "Opérateurs algorithmiques dans des espaces métriques constructifs"

[36] "Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе". там же (ouvrage cité). .362-384. "Théorèmes de la valeur moyenne en analyse constructive".

[37] "Computability and λ-définability". Journ. Symb. Logic. 1937-2 153-163.

On trouvera une traduction anglaise de [4],[5],[26],[35] et [36] dans, respectivement les tomes 52,67,52,67 et 67 de "Proceedings of the Steklov Institute". Il y a également une traduction anglaise de [5] dans la série "Translations of Mathematical Monographs", volume 21 sous le titre "Constructive Real Numbers and Function Spaces."