UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 152

Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

n° 152

Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

CHAPITRE I

REPRESENTATIONS D'UNE ALGEBRE COMMUTATIVE D'OPERATEURS SUR UN ESPACE DE HILBERT.

0. RESUME.

Soit H un espace de Hilbert et soit A une sous-algèbre commutative unitaire de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs sur H.

Dans ce chapitre, on montre l'existence de

1) un espace de Hilbert $\mathcal{H}$

2) une famille $\{H_I\}_{I\in\mathfrak{J}}$ de sous-espaces de $\mathcal{H}$ où $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des idéaux fermés de A.

3) une sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ isométriquement isomorphe à A

tels que

a) Pour tout $I\in\mathfrak{J}$, H_I est invariant par les opérateurs de $\mathfrak{a}$.

b) Le quotient de A par un idéal $I\in\mathfrak{J}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{a}|_{H_I}$ des opérateurs de $\mathfrak{a}$ restreints à H_I.

c) $\mathfrak{a}$ est complètement réductible sur son spectre

i. e.

Si $\mathfrak{M} = \mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,\mathfrak{a}$, pour tout $m\in\mathfrak{M}$, il existe un sous-espace H_m de $\mathcal{H}$

tel que :

$$\forall T \in \mathfrak{a} \qquad \forall h \in H_m \qquad T(h) = \hat{T}(m)h$$

où $\hat{T}(m)$ désigne la transformée de Gelfand de T au point m.

C'est le résultat c) qui est essentiel dans les questions d'interpolation.

1. NOTATIONS.

a) B est une C^* algèbre unitaire (on peut éventuellement rajouter une unité) i. e. une algèbre de Banach involutive telle que si $f \in B$, $\|f\|$ désigne la norme de f dans B, f^* l'élément adjoint de f, alors $\|ff^*\| = \|f\|^2$.

b) A désigne une sous-algèbre commutative unitaire et fermée de B.

c) $\mathfrak{M}$ est le spectre de Gelfand de l'algèbre A, A étant unitaire, $\mathfrak{M}$ est compact.

d) $\mathcal{E}(B)$ est l'ensemble des états de l'algèbre B, c'est-à-dire l'ensemble convexe des formes linéaires ℓ, continues sur B et vérifiant

$\|\ell\| = \ell(\mathbb{1}) = 1$ où $\mathbb{1}$ est l'élément unité de B.

B étant une C^*-algèbre, $\mathcal{E}(B)$ s'identifie au convexe des formes linéaires positives sur B et de masse 1.

<u>Remarque</u> :

- tout état de B se restreint en un état de A
- tout état de A se prolonge, d'après le théorème de Hahn-Banach en un état de B, donc en une forme linéaire positive sur B.

2. ESPACE DE HILBERT ASSOCIE A UN ETAT.

a) Soit $\ell \in \mathcal{E}(B)$.

Considérons sur B la forme sesquilinéaire :

$f \in B \quad , \quad g \in B \quad , \quad \langle f \mid g \rangle_{\ell} = \ell(g^* f)$.

(Il s'agit de la construction de Gelfand-Naimark-Segal [1]).

Soit $L^2(\ell)$ l'espace de Hilbert complété de B pour le produit scalaire associé.

A s'identifie à un sous-espace de $L^2(\ell)$.

Soit $H^2(\ell)$ l'adhérence de A dans $L^2(\ell)$.

R désigne la représentation régulière gauche de B associée à ℓ définie par :

$\forall f \in B \qquad \forall h \in L^2(\ell) \qquad R(f)h = fh$

$R(f)$ est un opérateur sur $L^2(\ell)$ et on a

$$\|R(f)\|_{op} \leq \|f\|_B$$

où $\|R(f)\|_{op}$ est la norme d'opérateur de $R(f)$.

b) On va considérer maintenant une représentation anti-linéaire de A dans $H^2(\ell)$ qui est l'analogue de la représentation de $H^\infty(D)$ par les opérateurs de Toeplitz co-analytiques dans le cas de l'algèbre du disque $A(D)$. (voir [2]).

Soit P le projecteur orthogonal de $L^2(\ell)$ sur $H^2(\ell)$. On appelle encore R la représentation définie en a) restreinte à A et pour $f \in A$ soit $R^*(f)$ l'adjointe de $R(f)$ dans $\mathcal{L}(L^2(\ell))$.

Pour tout $f \in A$, posons

$$\pi(f) = P\, R^*(f).$$

On a immédiatement : $\pi(f) = PR^*(f) = PR(f^*)$. $\pi(f)$ est l'analogue d'un opérateur de

Toeplitz co-analytique ([2]).

LEMME. π <u>est une représentation anti-linéaire contractante de</u> A <u>dans</u> $\mathcal{L}(H^2(\ell))$.

<u>Démonstration</u>.

π est clairement anti-linéaire.

$$\|\pi(f)\|_{op} = \|PR(f^*)\|_{op} \leq \|R(f^*)\|_{op} \leq \|f^\infty\|_B = \|f\|_B .$$

π est multiplicative :

Soient $f \in A$, $g \in A$ et $h \in A$, $k \in A$

$$\begin{aligned}
\langle \pi(fg)\, h \,|\, k \rangle_\ell &= \langle P(f^* g^* h) \,|\, k \rangle_\ell \\
&= \langle f^* g^* h \,|\, k \rangle_\ell \\
&= \ell\left[k^* g^* f^* h\right] \\
&= \langle f^* h \,|\, gk \rangle_\ell \\
&= \langle P(f^* h) \,|\, gk \rangle_\ell \\
&= \langle P(g^*)\, P f^* h \,|\, k \rangle_\ell \\
&= \langle \pi(g)\, \pi(f)\, h \,|\, k \rangle_\ell
\end{aligned}$$

A étant commutative et dense dans $H^2(\ell)$ on a

$$\pi(fg) = \pi(f)\, \pi(g).$$

c) Soit I un idéal fermé de A. $H^\ell(I)$ désigne l'orthogonal de I dans $H^2(\ell)$.

PROPOSITION.

i. <u>Pour toute</u> $f \in A$, $H^\ell(I)$ <u>est invariant par</u> $\pi(f)$.

ii. <u>La restriction de</u> π <u>à</u> $H^\ell(I)$ <u>est une représentation de l'algèbre quotient</u> A/I.

Cette proposition est inspirée d'un lemme dû à Cole [3], à la différence que π est l'adjointe de la représentation régulière utilisée par Cole.

Démonstration.

i. Soient $k \in I$, $h \in H^{\ell}(I)$, $f \in A$

$$\langle \pi(f)h \,|\, k\rangle_{\ell} = \langle h \,|\, fk\rangle_{\ell}$$

$$= 0 \quad \text{puisque} \quad fk \in I$$

donc : $\forall h \in H^{\ell}(I) \quad \pi(f)\, h \in H^{\ell}(I)$.

ii. Soient $f \in I$, $h \in H^{\ell}(I)$, $k \in A$

$$\langle \pi(f)\, h \,|\, k\rangle_{\ell} = \langle h \,|\, fk\rangle_{\ell}$$

$$= 0 \quad \text{puisque} \quad fk \in I$$

donc : $\forall h \in H^{\ell}(I) \quad \pi(f)h = 0$

et les restrictions de $\pi(f)$ à $H^{\ell}(I)$ s'annulent sur I et constituent une représentation de A/I dans $\mathcal{L}(H^{\ell}(I))$.

3. DECOMPOSITION POLAIRE DES FORMES LINEAIRES SUR B.

On va définir une décomposition polaire des formes linéaires sur B analogue à celle des mesures sur un espace mesurable.

Soient B' le dual de B et B'' son bidual.

B''_1 désigne la boule unité de B''.

Soit $\ell \in B'$, $\|\ell\| = 1$; ℓ atteint sa norme en un point $a \in B''_1$ (B''_1 est compacte pour la topologie $\sigma(B'',B')$) tel que $\|a\|_{B''} = 1 = \|\ell\| = \ell(a)$.

On sait que la multiplication d'Arens fait de B'' une C^*-algèbre dans laquelle B se plonge isomorphiquement et isométriquement ([4]).

a^* étant l'adjoint de a dans B'', a^*B'' est un idéal à droite de B''.

Soit k la forme linéaire définie sur a^*B'' par :

$$k(a^*x) = \ell(x).$$

Clairement $\|k\| \leq 1$.

D'après Hahn-Banach, k possède une extension dans B'' qu'on note encore k, de norme $\|k\| \leq 1$.

On va montrer que k est un état de B''.

D'après la définition de k et de a :

$k(a^*a) = \ell(a) = 1$ d'où $\|k\| = 1$.

B'' étant une C^*-algèbre, pour montrer que k est une forme positive, il suffit de vérifier que :

$k(\mathbb{1}) = 1$.

Cette démonstration est classique.

Soit $b = a^*a$; $b^* = b$, donc la C^*-algèbre $[b, \mathbb{1}]$ engendrée par b et $\mathbb{1}$ est commutative.

Si Ω est son spectre, on sait que

1) Ω est compact.

2) $[b, \mathbb{1}]$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathscr{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω.

La restriction de k à $[b, \mathbb{1}]$ définit une forme linéaire sur $\mathscr{C}(\Omega)$, donc une mesure μ sur Ω.

Si $\hat{b}$ est la transformée de Gelfand de b, il vient :

$$1 = k(b) = k(a^*a) = \int_\Omega \hat{b}(\omega)\, d\mu(\omega) = \|\mu\|.$$

Or $\quad$ 1) $b = a^*a \Longrightarrow \hat{b} \geq 0$

2) $\|b\| = \|a\|^2 = 1 \Longrightarrow \|\hat{b}\|_\infty = 1.$

1) et 2) entraînent que l'on a

$$\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad |\hat{b}| = 1 \quad \text{pp}(\mu)$$

$$\text{i. e.} \quad \hat{b} = 1 \quad \text{pp}(\mu)$$

par suite $\quad \mu(1) = \|\mu\| = 1.$

donc $\quad \mu(1) = k(\mathbb{1}) = 1.$

Donc k est bien un état de B''. Sa restriction à B est également un état et on a :

PROPOSITION. Pour toute ℓ de B' de norme 1, pour tout $a \in B''$ de norme 1 tel que $\ell(a) = 1$, il existe un état $k \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\forall x \in B \quad , \quad \ell(x) = k(a^*x).$$

4. REPRESENTATION ISOMETRIQUE DES QUOTIENTS DE A.

On va montrer la proposition suivante également inspirée par le travail de B. Cole [3].

On reprend les notations du § 2 et on notera π_I^ℓ la représentation de A/I dans $\mathcal{L}(H^\ell(I))$ restriction de $\dot{\pi}$, associée à l'état ℓ de B.

PROPOSITION. Soit I un idéal fermé de A. Pour tout $f \in A$ tel que $\|f\|_{A/I} = 1$, il existe un état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\|\pi_I^\ell(f)\| = \|f\|_{A/I} = 1.$$

Démonstration. Soit $\dot{f}$ la classe de f dans A/I. $\dot{f}$ atteint sa norme sur un élément de la boule unité (faiblement compacte) du dual $(A/I)'$ de A/I.

$(A/I)'$ s'identifie à l'ensemble des éléments du dual A' de A qui s'annulent sur I, leur norme étant la norme induite par celle de A'.

Soit donc $\ell \in A'$, $\ell(I) = 0$, $\|\ell\|_{A'} = 1$ telle que $\ell(\dot{f}) = \ell(f) = 1$.

On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que

$$\dot{f}_n = \dot{f} \qquad \text{et} \qquad \|f_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(cette suite existe puisque $\|\dot{f}\|_{A/I} = 1$).

Soit a un point faiblement adhérent à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A'' pour la topologie $\sigma(A'',A')$.

Alors $\|a\|_{A''} \leq 1$.

Comme $A'' \subset B''$, on peut appliquer la décomposition polaire définie au § 3.

Il existe $k \in \mathcal{E}(B'')$ tel que :

$$\forall x \in B \quad , \quad \ell(x) = k(a^*x)$$

k définit un produit scalaire sur B''.

Ici $L^2(k)$ sera la fermeture de B'' pour ce produit scalaire, π la représentation associée.

$H^2(k)$ est la fermeture de A dans $L^2(k)$, $H^k(I)$ l'orthogonal de I dans $H^2(k)$ et π_I la restriction de la représentation π à $H^k(I)$.

On vérifie que :

1) $a \in H^k(I)$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans A et admet un point adhérent b dans $H^2(k)$

pour la topologie faible de $L^2(k)$.

b est tel que $\|b\|_{L^2(k)} \leq 1$

et $\langle f_n | a \rangle_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle b | a \rangle_k$.

D'autre part, a étant $\sigma(A'',A')$ adhérent à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(f_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \langle f_{n_p} | a \rangle_k = k(a^* f_{n_p}) = \ell(f_{n_p}) = 1 \\ \text{et} \quad k(a^* f_{n_p}) \xrightarrow[p\to\infty]{} k(a^* a) = \langle a | a \rangle_k . \end{cases}$$

D'où
$$\left.\begin{array}{l} \|a\|_{L^2(k)} \leq 1 \\ \|b\|_{L^2(k)} \leq 1 \\ \langle a | b \rangle_k = 1 \end{array}\right\} \quad a = b .$$

donc $a \in H^2(k)$.

Si $x \in I$ $\quad \langle x | a \rangle_k = k(a^* x) = \ell(x) = 0$

d'où a est orthogonal à I.

2) $\mathbb{1} \in H^k(I)$.

(*) $\quad \langle \pi(f)\, a | \mathbb{1} \rangle_k = \langle a | f \rangle_k = k(f^* a) = \overline{k(a^* f)} = \overline{\ell(f)} = 1$

et $\pi(f)a \in H^k(I)$ puisque $H^k(I)$ est invariant par $\pi(f)$.

D'autre part,

$$\|\pi(f_n)\|_{op} \leq \|f_n\|_A \quad \text{et} \quad \|f_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où

(**) $$\|\pi(f)a\|_{H^k(I)} \leq 1.$$

De (*) et (**) on déduit que $\pi(f)a = \mathbb{1}$ donc $\mathbb{1} \in H^k(I)$.

De 1) et 2) on peut déduire

$$1 \geq \|\pi_I(f)\| \geq |\langle \pi_I(f)a \mid \mathbb{1}\rangle| = 1$$

$$\Longrightarrow \|\pi_I(f)\| = 1.$$

On en déduit la représentation isométrique :

Pour tout état $\ell \in \mathcal{E}(B)$, soit H^{ℓ} l'espace de Hilbert construit au § 2 et soit π^{ℓ} la représentation associée $(H^{\ell} = H^2(\ell))$.

Soit $H^{\ell}(I)$ le sous-espace orthogonal à l'idéal I dans H^{ℓ}.

Soit $\mathcal{H} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} H^{\ell}$ l'espace de Hilbert somme hilbertienne des espaces $(H^{\ell})_{\ell \in \mathcal{E}(B)}$

$$\pi = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} \pi^{\ell}.$$

Pour tout idéal I fermé de A on définit de même

$$\mathcal{H}(I) = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} H^{\ell}(I)$$

$$\pi_I = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} \pi_I^{\ell}.$$

Alors on a

1) $\mathcal{H}(I)$ est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{0\})$

2) π_I est une représentation anti-linéaire isométrique de A/I.

En particulier, A est isométriquement isomorphe à $\mathfrak{A} = \pi(A)$ (anti-linéairement).

Remarque 1. Pour obtenir des représentations linéaires, on considère l'algèbre A^* adjointe de l'algèbre A.

Remarque 2. A. Bernard [5] a montré un résultat analogue. Si A est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(H)$, I un idéal bilatère de A, alors A/I est encore une algèbre d'opérateurs.

5. VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES DE π (f).

Les résultats précédents sont essentiellement analogues à ceux obtenus par Cole et l'intérêt de considérer la représentation adjointe de celle de Cole ne va apparaître que maintenant.

Soit $\ell \in \mathcal{E}(B)$ et soit π^{ℓ} la représentation associée de A dans $\mathcal{L}(H^{\ell})$ introduite au § 2.

Soit $\mathfrak{M} = \mathrm{Sp}\, A$.

Si $m \in \mathfrak{M}$, et $\hat{f}(m)$ la transformée de Gelfand de f au point m, on définit

$$I_m = \left\{ f \in A,\ \hat{f}(m) = 0 \right\}.$$

I_m est un idéal fermé de A.

Appelons $H^{\ell}(m)$ l'orthogonal de I_m dans H^{ℓ}.

Alors, ou bien $H^{\ell}(m) = \{0\}$,

ou bien $H^{\ell}(m)$ est un sous-espace de dimension 1 de H^{ℓ}.

En effet, si $h \in H^{\ell}(m)$, pour tout $f \in A$,

$$\langle h \mid f - \hat{f}(m)\, 1\!\!1 \rangle_{\ell} = 0$$

$$\langle h \mid f \rangle_{\ell} = \overline{\hat{f}(m)}\ \langle h \mid 1\!\!1 \rangle$$

et A est dense dans H^{ℓ}.

<u>Notation</u>. Si $H^{\ell}(m)$ n'est pas nul, on pose e_m^{ℓ} le vecteur unitaire de $H^{\ell}(m)$ tel que $\langle 1\!\!1 \mid e_m^{\ell} \rangle$ est positif.

Si $H^{\ell}(m)$ est nul, on pose $e_m^{\ell} = 0$.

<u>Remarque</u>. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $H^{\ell}(m)$ est nul.

2) $\mathbb{1}$ appartient à la fermeture de I_m dans H^{ℓ}.

3) I_m est dense dans H^{ℓ}.

Soit $f \in A$; $f - \hat{f}(m)\mathbb{1} \in I_m$ donc $\langle f-\hat{f}(m)\mathbb{1} | e_m^{\ell} \rangle_{\ell} = 0$; d'où la formule

(*) $$\forall m \in \mathfrak{M} ; \ \langle f | e_m^{\ell} \rangle_{\ell} = \hat{f}(m) \ \langle \mathbb{1} | e_m^{\ell} \rangle_{\ell} .$$

Si $\langle \mathbb{1} | e_m^{\ell} \rangle_{\ell}$ est non nul, on pourra définir $\hat{f}(m)$ pour tout $f \in H^{\ell}$ par la formule (*).

L'état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ étant fixé, on omettra l'indice ℓ dans la suite du paragraphe.

PROPOSITION. <u>Pour tout</u> $f \in A$, e_m <u>est vecteur propre de</u> $\pi(f)$ <u>pour la valeur propre</u> $\overline{\hat{f}(m)}$.

Démonstration.

Si $e_m = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Si $e_m \neq 0$, $\langle \mathbb{1} | e_m \rangle$ est positif strictement.

Soient $k \in A$, $f \in A$,

$$\begin{aligned} \langle \pi(f)\, e_m | k \rangle &= \langle e_m | fk \rangle \\ &= \overline{\widehat{fk}(m)}\ \langle e_m | \mathbb{1} \rangle \quad \text{par} \quad (*) \\ &= \overline{\hat{f}(m)}\ \overline{\hat{k}(m)}\ \langle e_m | \mathbb{1} \rangle \end{aligned}$$

d'où $$\langle \pi(f)\, e_m | k \rangle = \overline{\hat{f}(m)}\ \langle e_m | k \rangle \quad \text{par} \quad (*)$$

(**) $$\forall m \in \mathfrak{M} ; \quad \pi(f) e_m = \overline{\hat{f}}(m)\, e_m .$$

On note $\rho_{\ell}(m) = \langle \mathbb{1} | e_m^{\ell} \rangle$.

DEFINITIONS. On appellera <u>enveloppe spectrale</u> de l'état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ relativement à A l'ensemble

$$\mathfrak{M}^{\ell} = \left\{ m \in \mathfrak{M} ;\ \rho_{\ell}(m) > 0 \right\}.$$

On appellera <u>support spectral</u> de l'état ℓ la fermeture $\overline{\mathfrak{M}^{\ell}}$ de $\mathfrak{M}^{\ell}$ pour la topologie de Gelfand du spectre $\mathfrak{M}$.

PROPOSITION. <u>Soit</u> $D_{\delta} = \left\{ m \in \mathfrak{M}^{\ell} ;\ \rho(m) \geq \delta \right\}$ <u>où</u> δ <u>est un nombre strictement positif</u>.

<u>Si</u> $f \in H^{\ell}$, f <u>est continue sur</u> D_{δ}.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A convergeant vers f dans H^{ℓ}, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_{H^{\ell}} \to 0$.

D'après (*), il vient :

$$\sup_{m \in D_{\delta}} \left| \hat{f}(m) - \hat{f}_n(m) \right| = \sup_{m \in D_{\delta}} \left| \frac{1}{\rho(m)} \langle f - f_n \mid e_m \rangle \right|$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \| f - f_n \|_{H^{\ell}}.$$

Les f_n étant continues sur D_{δ}, f est continue.

Conclusion. Si A est une sous-algèbre commutative unitaire de l'algèbre des opérateurs continu d'un espace de Hilbert H, on a montré que A est isométriquement isomorphe à $\mathfrak{A} = \pi(A)$ incluse dans l'algèbre d'opérateurs $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et complètement réduite, i. e. :

Pour tout $m \in \mathrm{Sp}\, A$, il existe un sous-espace de Hilbert $H(m)$ de $\mathcal{H}$ tel que :

$\forall h \in H(m)$, $\forall T \in \mathfrak{A}$, $T(h) = \hat{T}(m)\, h$

où $T(m)$ est la transformée de Gelfand de T au point m.

On appellera $\mathcal{A} = \pi(A)$ la représentation spectrale isométrique de A.

CHAPITRE II

ENSEMBLES D'INTERPOLATION.

1. ENSEMBLES D'INTERPOLATION.

Si $\mathfrak{M}$ est le spectre de l'algèbre A, on considère une partie finie σ de $\mathfrak{M}$: $\sigma \in \mathfrak{M}$; card $\sigma < +\infty$.

On dira que σ est un ensemble d'interpolation pour A si

$$\forall \omega \in \ell^{\infty}(\sigma), \quad \exists f \in A, \quad \forall m \in \sigma \quad \hat{f}(m) = \omega(m)$$

σ étant fini, il existe une constante positive C telle que

$$\forall \omega \in \ell^{\infty}(\sigma), \quad \exists f \in A, \quad \forall m \in \sigma \quad \hat{f}(m) = \omega(m) \;\; ; \;\; \|f\|_A \leq C\|\omega\|_{\infty}.$$

On considère maintenant un sous-ensemble σ de $\mathfrak{M}$ de cardinal quelconque.

DEFINITION. Soit $\sigma \subset \mathfrak{M}$; on dira que σ est un ensemble d'interpolation de type $I(c)$ si pour toute partie finie $\tilde{\sigma}$ de σ, $\tilde{\sigma}$ est d'interpolation de constante c.

Remarque. Si Card $\sigma = +\infty$, on interpole un élément de $\ell^{\infty}(\sigma)$ en général dans le bidual A'' de A et non dans A.

Soit $\sigma \subset \mathfrak{M}$, σ de type I(c) et soit $\omega \in \ell^{\infty}(\sigma)$

$\forall \tilde{\sigma} \subset \sigma$, card $\tilde{\sigma} < +\infty$, $\exists f_{\tilde{\sigma}} \in A$:

a) $\forall m \in \tilde{\sigma}$ $\hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$

b) $\| f_{\tilde{\sigma}} \| \leq C \| \omega \|_{\ell^{\infty}(\tilde{\sigma})} \leq C \| \omega \|_{\ell^{\infty}(\sigma)}$.

Soit $\mathcal{P}_F(\sigma)$ l'ensemble des parties finies de σ ordonné par l'inclusion.

$\{f_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{P}_F(\sigma)}$ est une famille filtrante dans la boule de rayon $c\|\omega\|_{\infty}$ de A donc de A" (on plonge isométriquement A dans A").

Cette boule est faiblement compacte et il existe un point $f \in A''$ faiblement adhérent à $\{f_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma}}$. Si on considère l'élément φ_m, évaluation au point m du spectre, du dual A' de A on a :

a) $\varphi_m(f_{\tilde{\sigma}}) = \hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$

b) $\| f \|_{A''} \leq c\|\omega\|_{\infty}$

on en déduit $\varphi_m(f) = \hat{f}(m) = \omega(m)$.

2.. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'INTERPOLATION.

Soit $\sigma \subset \mathfrak{M}$, on définit

$$I_\sigma = \left\{ f \in A \quad \forall m \in \sigma \quad , \quad \hat{f}(m) = 0 \right\}.$$

I_σ est un idéal fermé de A.

Si $\ell \in \mathcal{E}(B)$ est un état de B, on note π_σ^ℓ la représentation spectrale $\pi_{I_\sigma}^\ell$ associée à ℓ et à I_σ (chapitre I, § 4).

Soit $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ l'ensemble des vecteurs propres associés.

$\mathcal{A}_\sigma^\ell$ désigne l'algèbre des opérateurs de $H^\ell(I_\sigma)$ qui "diagonalisent" dans le système $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_\sigma^\ell = \left\{T\in\mathcal{L}(H^\ell(I_\sigma))\ ;\quad \forall m\in\sigma\quad ;\ \exists\ \hat{T}(m)\in\mathbb{C}\quad ;\quad T(e_m) = \hat{T}(m)\, e_m\right\}.$$

$\mathcal{A}_\sigma^\ell$ est une algèbre fermée pour la topologie faible des opérateurs.

Clairement, on a $\pi_\sigma^\ell(A) \subset \mathcal{A}_\sigma^\ell$.

On dira que $\mathcal{A}_\sigma^\ell$ est d'interpolation $I(c)$ si $\forall\omega \in \ell^\infty(\sigma)$; $\exists\, T \in \mathcal{A}_\sigma^\ell$;

$\|T\| \leq c\|\omega\|_\infty$

$\forall m \in \sigma \qquad \hat{T}(m) = \omega(m)$.

LEMME 1. <u>Si</u> σ <u>est un ensemble d'interpolation de type</u> $I(c)$, <u>pour tout état</u> $\ell\in\mathcal{E}(B)$, $\mathcal{A}_\sigma^\ell$ <u>est d'interpolation</u> $I(c)$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$

$\forall\tilde{\sigma} \subset \sigma$, card $\tilde{\sigma} < +\infty$, $\exists\ f_{\tilde{\sigma}} \in A$,

1) $\forall m \in \tilde{\sigma} \qquad \widehat{f_{\tilde{\sigma}}}(m) = \omega(m)$

2) $\|f_{\tilde{\sigma}}\|_A \leq c\|\omega\|_\infty$.

Posons $T_{\tilde{\sigma}} = \pi_{\tilde{\sigma}}^\ell(f_{\tilde{\sigma}})$.

Il vient : 1) $\forall m \in \tilde{\sigma} \qquad T_{\tilde{\sigma}}(e_m) = \omega(m)\, e_m$

d'où $(\forall m \in \tilde{\sigma})$; $(e_m \neq 0) \Longrightarrow \widehat{T_{\tilde{\sigma}}}(m) = \omega(m)$

2) $\|T_{\tilde{\sigma}}\| \leq c\|\omega\|_\infty$.

Soit E_σ^ℓ l'adhérence dans $H^\ell(I_\sigma)$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs $\{e_m\}_{m\in\sigma}$.

E_σ^ℓ est un sous-espace de Hilbert de $H^\ell(I_\sigma)$.

Montrons que $\{T_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma}\in\mathcal{P}_F(\sigma)}$ converge fortement sur E_σ^ℓ :

Soit P le projecteur orthogonal sur E^{ℓ}_{σ} on va montrer que $\left\{T_{\tilde{\sigma}}P\right\}_{\tilde{\sigma}}$ converge fortement. Soit donc $h \in E^{\ell}_{\sigma}$ et soit $h_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{m_i}$ tel que $\|h - H_{\varepsilon}\| < \varepsilon$.

On a : $T_{\tilde{\sigma}}P(h_{\varepsilon}) = T_{\tilde{\sigma}}(h_{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_{\tilde{\sigma}}(m_i)\, e_{m_i}$ d'où $\left\{T_{\tilde{\sigma}}P(h_{\varepsilon})\right\}_{\tilde{\sigma}}$ converge puisque constant dès que $\tilde{\sigma}$ contient $\left\{m_1, \ldots, m_k\right\}$.

D'autre part $\| T_{\tilde{\sigma}}P(h) - T_{\tilde{\sigma}} P(h_{\varepsilon})\| \leq \|T_{\tilde{\sigma}}\| \, \| h-h_{\varepsilon}\|$

$$\leq C\|\omega\|_{\infty}\, \varepsilon.$$

Donc le filtre $\left\{T_{\tilde{\sigma}}P\right\}_{\tilde{\sigma}}$ converge fortement sur $H^{\ell}(I_{\sigma})$ vers un opérateur T.

Mais . $P \in \mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$

en effet, $\forall m \in \sigma \qquad P(e_m) = e_m$

$$T_{\tilde{\sigma}} \in \mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$$

donc le produit $T_{\tilde{\sigma}}P \in \mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$ et $T \in \mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$

de plus T interpole ω.

<u>Remarque</u> 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\quad H^{\ell}(I_{\sigma}) = E^{\ell}_{\sigma}$

(ii) $\quad P = I$

(iii) $\quad \langle h | e_m \rangle_{\ell} = 0$ si et seulement si h appartient à la fermeture de I_{σ} dans $H^{\ell}(I_{\sigma})$.

<u>Remarque</u> 2. $H^{\ell}(I_{\sigma})$ peut être différent de E^{ℓ}_{σ} comme on le montrera dans le cas particulier des algèbres uniformes.

LEMME 2. (réciproque). <u>Soit</u> $\sigma \subset \mathfrak{M}$ <u>tel que pour tout</u> $\ell \in \mathscr{E}(B)$, $\mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$ <u>soit d'interpolation</u> $I(c)$ (c <u>indépendant de</u> ℓ). <u>Alors</u> σ <u>est un ensemble d'interpolation de type</u> $I(c)$ <u>dans</u> A.

Démonstration. Soit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\operatorname{card} \tilde{\sigma} < +\infty$. Soit $\omega \in \ell^{\infty}(\tilde{\sigma})$.

$\tilde{\sigma}$ étant fini, il existe $f_{\tilde{\sigma}} \in A$ tel que $\forall m \in \tilde{\sigma}$, $\widehat{f_{\tilde{\sigma}}}(m) = \omega(m)$.

Pour tout $\ell \in \mathcal{E}(B)$, il existe $T \in \mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$ tel que si $e^{\ell}_{m} \neq 0$ $\hat{T}(m) = \overline{\omega(m)}$

$$\|T\| \leq C\|\omega\|_{\infty}$$

mais $T\big|_{E^{\ell}_{\tilde{\sigma}}} = \pi^{\ell}_{\tilde{\sigma}}(f_{\tilde{\sigma}})$ d'où

$$\|\pi^{\ell}_{\tilde{\sigma}}(f_{\tilde{\sigma}})\| = \|T\|_{E^{\ell}_{\tilde{\sigma}}} \leq C\|\omega\|_{\infty}.$$

On sait qu'il existe $\ell \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\|f_{\tilde{\sigma}}\|_{A/I_{\tilde{\sigma}}} = \|\pi^{\ell}_{\tilde{\sigma}}(f_{\tilde{\sigma}})\|.$$

Choisissant cet état particulier, il vient

$$\|f_{\tilde{\sigma}}\|_{A/I_{\tilde{\sigma}}} \leq C\|\omega\|_{\infty}.$$

La définition de la norme quotient permet de déduire le lemme 2.

On peut résumer les lemmes 1 et 2 dans la

PROPOSITION. Pour que $\sigma \subset \mathfrak{M}$ soit d'interpolation $I(c)$ dans A, il faut et il suffit que pour tout $\ell \in \mathcal{E}(B)$, $\mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$ soit d'interpolation $I(c)$.

Remarque. Dans la proposition on peut supprimer partout $I(c)$.

On va étudier les algèbres $\mathfrak{a}^{\ell}_{\sigma}$.

3. INTERPOLATION DANS UN ESPACE DE HILBERT.

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ une famille de vecteurs unitaires de H.

DEFINITION. On dira que $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ est un ensemble d'interpolation dans H si l'application R définie par

$$R \left\{ \begin{array}{l} H \longrightarrow \ell^2(\sigma) \\ h \longrightarrow \{\langle h | e_m \rangle\}_{m\in\sigma} \end{array} \right.$$

est une surjection continue de H sur $\ell^2(\sigma)$, c'est-à-dire que

1) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h \in H \qquad \sum_{m\in\sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2.$$

2) $\forall \lambda \in \ell^2(\sigma)$; $\exists h \in H$; $\forall m \in \sigma$ $\langle h | e_m \rangle = \lambda_m$

on sait qu'alors il existe une constante K telle qu'il existe $h \in H$ vérifiant de plus $\|h\|^2 \leq K^2 \sum_{m\in\sigma} |\lambda_m|^2$. Shapiro et Shields [7] appellent ces ensembles des ensembles de Riesz-Fischer.

Sur ces questions, on peut voir aussi Nina Bari [8].

Soit E_σ l'adhérence dans H des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_m\}_{m\in\sigma}$.

PROPOSITION. Pour que $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H, il faut et il suffit qu'il existe une base orthonormale $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ de E_σ et un opérateur bicontinu Q de $\mathcal{L}(E_\sigma)$ tels que

$$\forall m \in \sigma \qquad , \qquad e_m = Q\, \varepsilon_m.$$

Démonstration. Il est clair qu'on peut supposer $H = E_\sigma$.

a) Supposons l'existence de l'opérateur Q tel que :

$Q \in \mathcal{L}(E_\sigma)$, $Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_\sigma)$, $e_m = Q\, \varepsilon_m$.

Si $h \in E_\sigma$

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad \langle h | e_m \rangle = \langle h | Q \varepsilon_m \rangle = \langle Q^* h | \varepsilon_m \rangle$$

et $\sum_{m\in\sigma} |\langle h | e_m\rangle|^2 = \|Q^* h\|^2$

d'où $$\sum_{m\in\sigma} |\langle h | e_m\rangle|^2 \leq \|Q\|^2 \|h\|^2.$$

2) Soit $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\sigma}$ un élément de $\ell^2(\sigma)$.

Si $k = \sum_{m\in\sigma} \lambda_m \varepsilon_m$, k est un élément de E_σ.

Soit $h = Q^{*-1}k$.

Alors $h\in E_\sigma$

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad \langle h | e_m\rangle = \langle Q^{*-1}k | e_m\rangle$$
$$= \langle k | Q^{-1} e_m\rangle$$
$$= \langle k | \varepsilon_m\rangle = \lambda_m.$$

De plus $\|h\|^2 \leq \|Q^{-1}\|^2 \|k\|^2$.

b) Réciproque. Supposons que $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ soit d'interpolation dans H.

R est une bijection bicontinue de E_σ sur $\ell^2(\sigma)$.

Il suffit de vérifier que R est injective.

Soit $h \in E_\sigma$ tel que $Rh = 0$.

$$Rh = 0 \iff \forall m\in\sigma \ \ \langle h | e_m\rangle = 0$$
$$\iff h \text{ orthogonal à } E_\sigma$$
$$\iff h = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\forall h \in E_\sigma \qquad \frac{1}{\|R^{-1}\|^2} \| h \|^2 \leq \sum_{m\in\sigma} |\langle h | e_m\rangle|^2 \leq \| R \|^2 \| h \|^2.$$

Soit $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ une base orthogonale de E_σ.

On définit Q sur le sous-espace engendré par $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ par :

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad Q\,\varepsilon_m = e_m .$$

L'opérateur Q est, a priori, à domaine dense dans E_σ. Soit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, card $\tilde{\sigma} < +\infty$

et soit $h \in E_{\tilde{\sigma}}$, le sous-espace engendré par $\{e_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$.

Des inégalités

$$\frac{1}{\|R^{-1}\|^2}\|h\|^2 \leq \sum_{m\in\sigma} |\langle Q^* h \,|\, \varepsilon_m\rangle|^2 \leq \|R\|^2 \, \|h\|^2$$

on peut déduire

$$\frac{1}{\|R^{-1}\|^2}\|h\|^2 \leq \|Q^* h\|^2 \leq \|R\|^2 \, \|h\|^2 .$$

Q^* est bicontinue sur $E_{\tilde{\sigma}}$ et donc Q également.

Pour expliciter les ensembles d'interpolation, on introduit une définition.

DEFINITION. On dira que $\{e_m\}$ et $\{\rho_m\}_{m\in\sigma}$ forment un système biorthonormal dans H si

$$\langle \rho_m \,|\, e_{m'}\rangle = \delta_{mm'} \quad \text{(où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker).}$$

On dit que le système est complet si

$$\forall h \in H \qquad h = \sum_{m\in\sigma} \langle h \,|\, e_m\rangle \rho_m$$

$$= \sum_{m\in\sigma} \langle h \,|\, \rho_m\rangle e_m$$

les séries du second membre convergeant dans l'espace de Hilbert H.

cf. Nina Bari [8] ; Riesz-Nagy [9].

On pose toujours $E_{\tilde{\sigma}}$ l'espace engendré par $\{e_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$.

PROPOSITION. $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ <u>est un ensemble d'interpolation dans</u> H <u>si et seulement si</u> :

1) <u>il est topologiquement libre</u>

2) <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que pour toute partie</u> $\tilde{\sigma} \subset \sigma$ <u>et pour tout vecteur</u> $h \in E_{\tilde{\sigma}}$ <u>on ait</u>

a) $\sum_{m\in\tilde{\sigma}} |\langle h | e_m\rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$

b) $\sum_{m\in\tilde{\sigma}} |\langle h | \rho_m^{\tilde{\sigma}}\rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$

<u>où</u> $\{\rho_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ <u>désigne la famille associée à</u> $\{\rho_m^{\sigma}\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ <u>pour former un système biorthonormal dans</u> $E_{\tilde{\sigma}}$.

<u>Démonstration</u>.

(i) Supposons que $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H.
Alors il existe une base orthonormale $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ et un opérateur $Q\in\mathscr{L}(E_\sigma)$ tel que

$Q^{-1}\in\mathscr{L}(E_\sigma)$

$\forall m\in\sigma \quad , \qquad Q\varepsilon_m = e_m.$

Posons $\rho_m = Q^{*-1}\varepsilon_m$; il vient

$$\begin{aligned}\langle \rho_m | e_{m'}\rangle &= \langle Q^{*-1}\varepsilon_m | Q\,\varepsilon_{m'}\rangle\\ &= \langle \varepsilon_m | \varepsilon_{m'}\rangle\\ &= \delta_{mm'}.\end{aligned}$$

Donc $\{\rho_m\}_{m\in\sigma}$ et $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ forment un système biorthonormal dans E_σ.
Si $\rho_m^{\tilde{\sigma}}$ est la projection de ρ_m sur $E_{\tilde{\sigma}}$, il est clair que $\{\rho_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ et $\{e_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ forment un système biorthonormal de $E_{\tilde{\sigma}}$.

De plus pour tout $h\in E_{\tilde{\sigma}}$

a) $$\begin{aligned}\sum_{m\in\tilde{\sigma}} |\langle h | e_m\rangle|^2 &= \sum_{m\in\tilde{\sigma}} |\langle h | Q\varepsilon_m\rangle|^2\\ &\leq \|Q\|^2 \|h\|^2.\end{aligned}$$

b) $\sum_{m\in\sigma} |\langle h | \rho_m^{\tilde\sigma} \rangle|^2 = \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle h | \rho_m \rangle|^2$

$$= \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle Q^{-1}h | \varepsilon_m \rangle|^2$$

$$\leq \|Q^{-1}\|^2 \, \|h\|^2.$$

(ii) <u>Réciproque</u>. Soit $\tilde\sigma \subset \sigma$, $\operatorname{card}\tilde\sigma < +\infty$. $\{e_m\}_{m\in\tilde\sigma}$ étant une famille libre, on peut définir les vecteurs $\{\rho_m^{\tilde\sigma}\}_{m\in\tilde\sigma}$ de $E_{\tilde\sigma}$ par $\langle e_{m'} | \rho_m^{\tilde\sigma} \rangle = \delta_{mm'}$.

Soit $\{\varepsilon_m^{\tilde\sigma}\}_{m\in\tilde\sigma}$ une base orthonormale de $E_{\tilde\sigma}$ et $Q^{\tilde\sigma}$ l'opérateur de $\mathcal{L}(E_{\tilde\sigma})$ tel que : $\forall m \in \tilde\sigma$, $Q^{\tilde\sigma}(\varepsilon_m^{\tilde\sigma}) = e_m$.

Alors par hypothèse, on a les relations $(\mathfrak{R})$ suivantes pour tout $h \in E_{\tilde\sigma}$.

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 &= \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle Q^{\tilde\sigma *} h | \varepsilon_m^{\tilde\sigma} \rangle|^2 \\ &= \|Q^{\tilde\sigma *} h\|^2 \leq C^2 \|h\|^2. \\ \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle h | \rho_m^{\tilde\sigma} \rangle|^2 &= \sum_{m\in\tilde\sigma} |\langle Q_{\tilde\sigma}^{-1} h | \varepsilon_m^{\tilde\sigma} \rangle|^2 \\ &= \|Q_{\tilde\sigma}^{-1} h\|^2 \leq C^2 \|h\|^2. \end{aligned}\right.$$

Les relations $(\mathfrak{R})$ entraînent

$$\|Q^{\tilde\sigma}\| \leq C$$

$$\|Q^{\tilde\sigma -1}\| \leq C.$$

La famille $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ étant topologiquement libre et engendrant E_σ, il existe une base $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ orthonormale dans E_σ.

Soit Q l'opérateur à domaine dense dans E_σ tel que :

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad Q\,\varepsilon_m = e_m.$$

Les relations $(\mathfrak{R})$ permettent de montrer que

$$\begin{cases} Q \in \mathcal{L}(E_\sigma), \quad Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_\sigma) \\ \|Q\| \leq C \\ \|Q^{-1}\| \leq C. \end{cases}$$

En effet, pour toute partie $\tilde{\sigma}$ finie de σ, il existe un opérateur $U^{\tilde{\sigma}}$ unitaire tel que

$$\forall m \in \tilde{\sigma} \qquad \varepsilon_m^{\tilde{\sigma}} = U^{\tilde{\sigma}}(\varepsilon_m).$$

On peut alors calculer la norme de Q et Q^{-1} sur le sous-ensemble dense des combinaisons linéaires de $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$, $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ respectivement.

On prolonge alors Q par l'identité sur l'orthogonal de E_σ et on obtient la proposition.

COROLLAIRE 1. $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ <u>est un ensemble d'interpolation dans</u> H <u>si et seulement s'il existe un ensemble</u> $\{\rho_m\}_{m\in\sigma}$ <u>formant avec</u> $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ <u>un système orthonormal complet dans</u> E_σ.

<u>Démonstration</u> : par le théorème du graphe fermé.

Posons, pour tout $m\in\sigma$,

$$e'_m = \frac{\rho_m}{\|\rho_m\|}.$$

COROLLAIRE 2. <u>Pour que</u> $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ <u>soit un ensemble d'interpolation dans</u> H <u>il faut</u>

1. <u>les idempotents élémentaires</u> (i. e. ρ_m, $m\in\sigma$) <u>soient uniformément bornés dans</u> E'_σ.

2. <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que pour tout</u> $h\in E_\sigma$

a) $\sum_{m\in\sigma} |\langle h | e_m\rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$

b') $\sum_{m\in\sigma} |\langle h | e'_m\rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$.

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition.

4. INTERPOLATION POUR LES ALGEBRES DE TYPE $\mathfrak{a}_\sigma$.

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ une famille de vecteurs unitaires de H, topologiquement indépendants.

On appelle $\mathfrak{a}_\sigma$ l'algèbre définie par :

$$\mathfrak{a}_\sigma = \left\{T\in\mathcal{L}(H),\quad \forall m\in\sigma \qquad \exists\, \hat{T}(m)\in\mathbb{C}\ ,\quad T.e_m = \hat{T}(m)\, e_m\right\}.$$

On va faire le lien entre l'interpolation dans un espace de Hilbert et une algèbre d'opérateurs et on montre la proposition

PROPOSITION. Pour que $\mathfrak{a}_\sigma$ soit une algèbre d'interpolation, il faut et il suffit que $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H.

Rappel. Dire que $\mathfrak{a}_\sigma$ est d'interpolation signifie :

$$\forall\omega\in \ell^\infty(\sigma) \qquad \exists\, T\in\mathfrak{a}_\sigma \quad , \quad \forall m\in\sigma \quad , \quad \hat{T}(m) = \omega(m).$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ tel qu'il existe $T\in\mathfrak{a}_\sigma$ vérifiant :

$$\forall m\in\sigma \qquad \hat{T}(m) = \omega(m)$$

$$\|T\| \leq C\, \|\omega\|_\infty.$$

Démonstration.

a) Supposons $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ d'interpolation dans H. Alors il existe $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$

une base orthonormale de l'espace E_σ engendré par $\{e_m\}_{m\in\sigma}$ et un opérateur $Q\in\mathcal{L}(E_\sigma)$ tels que :

1) $Q^{-1}\in\mathcal{L}(E_\sigma)$

2) $\forall m\in\sigma,\ Q\varepsilon_m = e_m$.

Soit P_m le projecteur orthogonal sur ε_m.

Si $\omega\in\ell^\infty(\sigma)$, soit $S = \sum_{m\in\sigma}\omega(m)\,P_m$.

Alors : $S\in\mathcal{L}(E_\sigma)$

$\|S\| \leq \|\omega\|_\infty$.

Posons $T = Q\circ S\circ Q^{-1}$.

Alors : 1) $T\in\mathcal{L}(E_\sigma)$

2) $\|T\| \leq \|Q\|\ \|Q^{-1}\|\ \|\omega\|_\infty$

3) $T\,e_m = Q\circ S\,\varepsilon_m = \omega(m)\,Q\varepsilon_m$

$= \omega(m)\,e_m$.

Si P est le projecteur orthogonal de H sur E_σ alors $T\circ P\in\mathcal{A}_\sigma$ et $T\circ P$ interpole $\omega\in\ell^\infty(\sigma)$.

b) réciproque ; supposons que $\mathcal{A}_\sigma$ soit d'interpolation de type $I(C)$.

Soit σ une partie finie de σ ; $\mathcal{A}_\sigma$ laisse E_σ invariant et on a

$\forall\omega\in\ell^\infty(\sigma),\ \exists\, T_\omega\in\mathcal{A}_\sigma$;

1) $\forall m\in\sigma,\ \hat{T}_\omega(m) = \omega(m)$

2) $\|T_\omega\| \leq C\|\omega\|_\infty$.

Soit $h\in E_{\tilde\sigma}$, h peut s'écrire

$$h = \sum_{m\in\tilde\sigma} h_m e_m \qquad h_m\in\mathbb{C}.$$

D'après l'hypothèse 2)

$$\| T_\omega h\|^2 = \| \sum_{m\in\tilde\sigma} h_m\, \omega(m) e_m\|^2$$
$$\leq C^2 \|\omega\|_\infty^2 \, \|h\|^2$$

d'où

$$C^2 \| \sum_{m\in\tilde\sigma} h_m e_m\|^2 \geq \sup_{\|\omega\|_\infty = 1} \| \sum_{m\in\tilde\sigma} \omega(m)\, h_m e_m\|^2$$
$$C^2 \|h\|^2 \geq \sum_{m\in\tilde\sigma} |h_m|^2 \qquad (*)$$

Cette dernière inégalité (*) se démontre par récurrence sur $\operatorname{card}\tilde\sigma$.

Supposons la vérifiée pour $\operatorname{card}\tilde\sigma \leq n$ et soit alors $\operatorname{card}\tilde\sigma = n+1$

$$\| \sum_{p=1}^{n+1} \omega_k h_k e_k\|^2 = \| \sum_{k=1}^{n} \omega_k h_k e_k\|^2 + |\omega_{m+1}^2 h_{n+1}^2| + 2\operatorname{Re} \omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | \sum_{k=1}^{n} \omega_k h_k e_k \rangle$$

Soit $u_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k h_k e_k$.

Par hypothèse on peut choisir $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ tels que $\|u_\omega\|^2 \geq \sum_1^n |h_k|^2$.

On choisit ω_{n+1} tel que $\begin{cases} |\omega_{n+1}| = 1 \\ 2\operatorname{Re} \omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | u_\omega \rangle \geq 0 \end{cases}$

d'où $\|u_\omega + \omega_{n+1} h_{n+1} e_{n+1}\|^2 \geq \sum_1^{n+1} |h_k|^2$.

Si $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$ est tel que, $\forall m \in \tilde\sigma$, $|\omega(m)| = 1$ il vient

$$\|T_\omega . T_{\bar\omega} h\|^2 = \|h\|^2 \leq C^2 \|\omega\|_\infty^2 \, \|T_{\bar\omega} h\|^2$$
$$\|h\|^2 \leq C^2 \inf_{|\omega(m)|=1} \| \sum_{m\in\tilde\sigma} \bar\omega(m)\, h_m e_m\|^2$$
$$\leq C^2 \sum_{m\in\tilde\sigma} |h_m|^2 \qquad (**).$$

Cette dernière inégalité (**) se démontre de manière analogue à l'inégalité (*) par récurrence, et en choisissant ω_{n+1} tel que $2\operatorname{Re}\omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | u_\omega \rangle \leq 0$.

Les inégalités (*) et (**) montrent que si $h \in E_{\tilde\sigma}$

$$\frac{1}{C^2} \sum_{m\in\tilde\sigma} |h_m|^2 \leq \|h\|^2 \leq C^2 \sum_{m\in\tilde\sigma} |h_m|^2 \qquad (***).$$

Soit alors $\{\varepsilon_m\}_{m\in\sigma}$ une base orthonormale de E_σ et Q l'opérateur défini par :

$$\forall m \in \sigma,\ Q\varepsilon_m = e_m.$$

Les inégalités (***) impliquent que les opérateurs Q et Q^{-1} sont bornés et que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ est un ensemble d'interpolation pour H.

5. ENSEMBLES D'INTERPOLATION POUR L'ALGEBRE A.

On veut démontrer un théorème sur l'union de deux ensembles d'interpolation pour A.

Pour cela on a besoin de la proposition suivante qui se déduit aisément des deux derniers paragraphes :

PROPOSITION. $\sigma \subset \mathfrak{M}$ est d'interpolation pour A si et seulement si :

$\exists\, C > 0$; t.q. $\forall \ell \in \mathcal{E}(B)$ on ait :

i) $\{e_m^\ell\}_{m\in\sigma}$ vérifie la condition notée (C) :

(C) $\qquad \forall h \in H_\sigma^\ell : \sum |\langle h | e_m^\ell \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$

ii) les idempotents élémentaires existent et soient uniformément bornés i.e. :

$$\forall m \in \sigma \ ; \|\rho_m^\ell\| \leq C$$

iii) les idempotents élémentaires normalisés vérifient (C) :

$$\forall h \in H_\sigma^\ell ; \ \sum |\langle h | (e_m^\ell)^1 \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2.$$

On aura aussi besoin du lemme :

LEMME. Les idempotents élémentaires sont vecteurs propres de la représentation adjointe de π^ℓ dans $\mathcal{L}(H_\sigma^\ell)$.

Si R_σ^ℓ désigne cette représentation on a :

$$\forall f \in A \,;\forall m \in \sigma \,;\; R^{\ell}_{\sigma}(f).\rho^{\ell}_{m} = \hat{f}(m).\rho^{\ell}_{m}\,.$$

En effet, appelons P^{ℓ}_{σ} la projection orthogonale de H^{ℓ} sur H^{ℓ}_{σ}, et R^{ℓ} la représentation régulière associée à ℓ, alors : $R^{\ell}_{\sigma} = P^{\ell}_{\sigma} R^{\ell}$ et il ne reste plus qu'à faire la vérification.

Comme dans le cas des algèbres uniformes, appelons distance de Gleason de deux points m et m' du spectre de A le nombre :

$$d_G(m,m') = \sup\{\,|\hat{T}(m)|\;;\; T \in A\;;\; \hat{T}(m') = 0\;;\; \|T\| = 1\}.$$

On va alors établir le théorème suivant :

THEOREME. <u>Soient σ_1 et σ_2 deux ensembles d'interpolation pour A tels que la distance de Gleason de 2 points distincts de $\sigma_1 \cup \sigma_2$ soit uniformément minorée. Alors $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est d'interpolation</u>.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de N. Varopoulos [10] dans le cadre des algèbres uniformes.

<u>Démonstration du théorème</u>. Il faut vérifier les conditions de proposition pour l'ensemble : $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

En fait, il suffit de les vérifier pour $\tilde{\sigma} \subset \sigma$; Card $\tilde{\sigma} < +\infty$, et les constantes ne dépendant que de σ_1 et σ_2,

i) il faut que $\{e^{\ell}_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ vérifient (C) or : $\forall h \in H^{\ell}$:

$$\sum_{m\in\tilde{\sigma}} |\langle h | e^{\ell}_m \rangle|^2 \le \sum_{m\in\sigma_1} |\langle h | e^{\ell}_m \rangle|^2 + \sum_{m\in\sigma_2} |\langle h | e^{\ell}_m \rangle|^2$$
$$\le (C_1^2 + C_2^2)\; \|h\|^2.$$

iii) Si on note $\{e^{\ell'}_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$ les idempotents élémentaires normalisés associés à $\{e^{\ell}_m\}_{m\in\tilde{\sigma}}$, d'après le lemme ceux-ci sont vecteurs propres de $R^{\ell}_{\tilde{\sigma}}(f)$ donc :

posons : $E_{\tilde{\sigma}_i} = \{$l'espace engendré par $\{e^{\ell'}_m\}_m m \in \tilde{\sigma} \cap \sigma_i\ \}$

et $\quad \mathfrak{A}_{\tilde{\sigma}_i} = \{\ T \in \mathcal{L}(E_{\tilde{\sigma}_i})\ ;\ T\, e^{\ell'}_m = \hat{T}(m)\, e^{\ell'}_m$ pour $m \in \tilde{\sigma} \cap \sigma_i = \tilde{\sigma}_i\ \}$

puisque σ_i est d'interpolation C_i, et que $R^{\ell}_{\tilde{\sigma}}(f)$ $\quad \forall f \in A$, appartient manifestement à $\mathfrak{A}_{\tilde{\sigma}_i}$, il est clair que $\mathfrak{A}_{\tilde{\sigma}_i}$ est d'interpolation, donc les $\{e^{\ell'}_m\}_{m \in \tilde{\sigma}_i}$ aussi et donc $\{e^{\ell'}_m\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ vérifient (C) comme en i).

ii) Reste à montrer que les idempotents élémentaires sont uniformément bornés.

Pour cela il suffit de considérer le cas où σ_2 est réduit à un point, en effet : notons δ la borne inférieure des distances de Gleason ; $\delta > 0$ par hypothèse.

Soit : $\ m \in \sigma_2$ et notons χ_m l'idempotent associé i.e. :

$$\hat{\chi}_m(m) = 1$$

$$\hat{\chi}_m(p) = 0 \qquad \forall\, p \in \sigma_1 .$$

On a alors : $\|\chi_m\| \leq K(C_1, \delta)$.

σ_2 étant d'interpolation $I(C_2)$ soit

$$\varphi_m \quad \text{tq} : \hat{\varphi}_m(m) = 1$$

et
$$\hat{\varphi}_m(p) = 0 \qquad \forall\, p \in \sigma_2 \setminus \{m\}.$$

On a : $\qquad \|\varphi_m\| \leq C_2$.

Il reste alors à poser : $\psi_m = \chi_m \cdot \varphi_m$

pour avoir : $\hat{\psi}_m(m) = 1\ ;\ \hat{\psi}_m(p) = 0 \qquad \forall\, p \in \sigma_1 \cup \sigma_2 - \{m\}$

et $\qquad \|\psi_m\| \leq C_2\, K(C_1, \delta)$.

Il reste donc à montrer le théorème dans le cas où σ_2 est réduit à un point et où σ_1 est fini. Soit donc : Card $\sigma_1 = n$, $\ \sigma_1 = \{m_1, \dots, m_n\}$, $\sigma_2 = \{m\}$

$$\ell \in \mathcal{E}(A) \qquad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

et π^{ℓ}_{σ} la représentation associée.

On notera e_i le vecteur e^{ℓ}_{mi} $i = 1, \ldots n$

et e_{n+1} le vecteur e^{ℓ}_{m}.

Soit $\mathfrak{A} = \{ T \in \mathcal{L}(E_\sigma) \; ; \; Tei = \hat{T}(i) \, ei \quad i = 1, \ldots n+1 \}$

i.e. $= \pi^{\ell}_{\sigma}(A)$.

Puisque σ_1 est d'interpolation C_1 pour A, il est facile de voir que $\{1, \ldots n\}$ est d'interpolation C_1 pour $\mathfrak{A}$.

Dans un premier temps on va supposer que :

(*) $\{e_1, \ldots e_n\}$ forment un système orthonormal dans E_σ.

Soit alors $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n+1}$ une base orthonormale de E_σ telle que :

$$\varepsilon_i = e_i \qquad i = 1, \ldots n.$$

Alors : $$e_{n+1} = \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varepsilon_i \right] + \sqrt{1-|\lambda|^2} \;\; \varepsilon_{n+1}$$

avec $$0 \leq |\lambda| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.$$

Traduisons alors les deux hypothèses :

(1) $\{1, \ldots n\}$ est d'interpolation C_1, i.e. ;

$I_{n+1} = \{ T \in \mathfrak{A} \; ; \; \hat{T}(n+1) = 0 \}$ alors $\mathfrak{A}/I_{n+1}$ est d'interpolation C_1.

(2) $d_G(m \; ; m_i) \geq \delta > 0 \quad m_i \in \sigma_1 \implies d_G(n+1, i) \geq \delta > 0 \qquad \forall \, i \in [1, 2, \ldots, n]$.

(1) : Si P_i désigne l'opérateur de $\mathfrak{A}$ tel que :

$$P_i e_j = \delta_{ij} \, e_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

On a : $\inf\limits_{\omega \in \mathbb{C}} \| P_1 + \ldots + P_k + \omega \, P_{n+1} \| \leq C_1 \qquad \forall \, k \leq n$.

Posons : $T_k(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{k} P_i + \omega \, P_{n+1}$.

Il vient alors : $$T_k(\omega) . \varepsilon_{n+1} = \frac{\omega}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \, e_{n+1} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, e_i .$$

Soit : $$T_k(\omega) . \varepsilon_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} (\omega - 1) \frac{\lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \alpha_i \, \varepsilon_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\omega \, \lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \alpha_i \, \varepsilon_i + \omega \, \varepsilon_{n+1} .$$

Mais : $\|T_k(\omega)\| \geq \|T_k(\omega).\epsilon_{n+1}\|$ donc :

$$\|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \; [\, |\omega - 1|^2 \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + |\omega|^2 \sum_{i=k+1}^{n} |\alpha_i|^2 \,] + |\omega|^2 .$$

On en déduit :

$$\inf_{\omega\in\mathbb{C}} \|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \inf_{\omega\in\mathbb{C}} [\, |\omega-1|^2 \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + |\omega|^2 \sum_{i=k+1}^{n} |\alpha_i|^2 \,] .$$

Soit : $\displaystyle\inf_{\omega\in\mathbb{C}} \|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \; [\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \,] . [\sum_{i=k+1}^{n} |\alpha_i|^2 \,].$

Donc (1) implique finalement :

$$\forall k \leq n : \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \; [\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \,] [\sum_{k+1}^{n} |\alpha_i|^2 \,] \leq C_1^2 \qquad [1'] .$$

Voyons (2) :

Soit $R_i \in \mathcal{G}$ tq :

$$R_i \, e_{n+1} = e_{n+1}$$

$$R_i \, e_j = c_{ij} \, e_j \quad \text{avec} \quad c_{ii} = 0 \;;\; c_{ij} \in \mathbb{C} \qquad j \neq i$$

$$i = [1, 2, \ldots, n]$$

$$j = [1, 2, \ldots, n].$$

Alors : $\displaystyle R_i \, \epsilon_{n+1} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \epsilon_j \, (1 - c_{ij}) + \epsilon_{n+1} .$

Mais : $\displaystyle \|R_i\|^2 \geq \|R_i \, \epsilon_{n+1}\|^2 = \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \, \Sigma \, |\alpha_j|^2 \, |1 - c_{ij}|^2 + 1.$

L'hypothèse (2) implique alors :

$$\inf_{\substack{c_{ij}\in\mathbb{C} \\ c_{ij}=0}} \|R_i\|^2 \leq \delta^{-2}$$

d'où : $\displaystyle \forall\, i \leq n : \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \, |\alpha_i|^2 \leq \delta^{-2} \qquad [2'].$

De [1'] et [2'] on tire alors :

- si $\displaystyle\sup_{i\leq n} |\alpha_i|^2 \geq \frac{1}{2} \implies \frac{|\lambda|^2}{1|\lambda|^2} \leq 2\,\delta^{-2} \qquad [2'']$

- si $\displaystyle\sup_{i\leq n} |\alpha_i|^2 < \frac{1}{2}$, on choisit k tel que :

$\frac{1}{4} \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \leq \frac{3}{4}$, [1'] implique alors : $\frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \leq 16\, C_1^2$ [1''].

D'où l'on déduit :

$$\|P_{n+1}\|^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2} \leq K(\delta, C_1).$$

Si on désigne par $P_i^{(n)}$ les projecteurs élémentaires de $\mathcal{G}/I_{n+1}$, on a :

$$P_i = P_i^{(n)}(1-R_i) \; ; \; 1 \leq i \leq n \, .$$

Mais $\mathcal{G}/I_{n+1}$ est $I(C_1)$ donc : $\|P_i^{(n)}\| \leq C_1$ et $\|R_i\| \leq \delta^{-1}$ d'où :

$$\|P_i\| \leq C_1(1+\delta^{-1}) \qquad 1 \leq i \leq n \, .$$

Tout est donc bien montré avec l'hypothèse (*).

Ne supposons plus (*).

On s'y ramène ainsi :

sur : $E_\sigma = \{e_1, \dots e_{n+1}\}$, l'espace engendré par les e_i . Considérons le nouveau produit scalaire : $k, h \in E_\sigma$ s'écrivent :

$$h = h_1 + h_2 \qquad \text{avec} \qquad h_1 \in E_{\sigma_1} = \{e_1, \dots e_n\}$$
$$k = k_1 + k_2$$

et $h_2 \perp E_{\sigma_1}$ de même pour k_i $(i = 1, 2)$.

On pose alors :

$$\langle\langle h | k \rangle\rangle = \langle\langle h_1 | k_1 \rangle\rangle + \langle h_2 | k_2 \rangle$$

où $\langle\langle h_1 | k_1 \rangle\rangle$ est tel que les $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ forment une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Puisque $\mathcal{G}/I_{n+1}$ est d'interpolation C_1, $\{e_1, \dots e_n\}$ est aussi d'interpolation C_1 et l'on a, si on note par $|||h|||$ la nouvelle norme de h :

$$\frac{1}{C^2}\|h\|^2 \leq |||h|||^2 \leq C_1^2 \|h\|^2 \qquad (**).$$

On peut alors appliquer ce qui précède avec ce produit scalaire car alors (*) est vrai.

A cause de (**) il suffit de multiplier les constantes par C_1^2 pour achever la démonstration du théorème.

CHAPITRE III

SPECTRE D'UNE ALGEBRE UNIFORME.

UNE STRUCTURE PSEUDO-METRIQUE SUR LE SPECTRE.

Soit A une algèbre uniforme i.e.

1) A est une algèbre de Banach commutative unitaire

2) $\forall f \in A \qquad \|f^2\| = \|f\|^2$.

C'est un cas particulier de la classe d'algèbres étudiées précédemment.

Soient $\mathfrak{M}$ le spectre de A, λ une mesure de probabilité sur $\mathfrak{M}$.

Nous avons noté H^λ l'adhérence de A dans $L^2(\lambda)$ et montré l'existence d'un sous-ensemble $\mathfrak{M}^\lambda$ de $\mathfrak{M}$ tel que :

1) $\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda$, $\exists\, e_m \in H^\lambda$, $\|e_m\|_{H^\lambda} = 1$, $\rho(m) = < 1 | e_m > > 0$.

2) $\forall f \in A$, $\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad <f | e_m> = \rho(m)\, \hat{f}(m)$

3) $\forall f \in A$, $\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad \pi(f) e_m = \overline{\hat{f}(m)} e_m$

où π est la représentation spectrale associée à λ.

1. NOYAU DE POISSON ET STRUCTURE PSEUDO-METRIQUE ASSOCIEE.

Posons pour tout $m \in \mathfrak{M}^\lambda$ $\quad P_m = |e_m|^2$.

On définit ainsi une famille de fonctions positives ayant les propriétés suivantes

1) $P_m \in L^1(\lambda)$ et $\|P_m\|_{L^1} = 1$

2) $\forall f \in A, \forall\, m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad \hat{f}(m) = \int f\, P_m\, d\lambda$.

Ce noyau de Poisson va nous permettre de définir une ébauche de théorie du potentiel analytique. On prolonge de façon naturelle les fonctions de H^λ sur $\mathfrak{M}^\lambda$:

Si $h \in H^\lambda$ on pose ;

$$\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda, \quad \hat{h}(m) = \frac{1}{\rho(m)} <h|e_m>.$$

Ce prolongement a un sens grâce au lemme suivant :

LEMME. <u>Si</u> $\mathfrak{M}^\lambda \cap \operatorname{Supp}\lambda \neq \emptyset$ (λ p.s.), <u>les 2 définitions des fonctions de</u> H^λ <u>coïncident p.p.</u> λ <u>sur cette intersection</u>.

<u>Preuve</u>. On utilise le fait qu'il existe une suite (f_k) de A qui converge dans L^2 et p.p. λ vers e_m.

On prolonge aussi le noyau de Poisson ;

$$\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda, \forall m' \in \mathfrak{M}^\lambda, \quad P_m(m') = |\hat{e}_m(m')|^2 .$$

On donne alors, comme dans le cas classique les définitions suivantes :

DEFINITIONS. <u>On appelle "cellule" de centre</u> m <u>et d'ouverture</u> $t > 0$ <u>l'ensemble</u> $C_{m,t}$ <u>défini par</u> :

$$C_{m,t} = \{m' \in \mathfrak{M}^\lambda,\ \rho^2(m)\, P_m(m') > t^{-1}\}.$$

On appelle "boule" de centre m et d'ouverture t ;

$$B_{m,t} = C_{m,t} \cap \operatorname{supp}\lambda .$$

On appelle pseudo-distance au bord ;

$$d(m) = \rho^2(m).$$

2. APPLICATION A L'INTERPOLATION.

Soit un ensemble $\sigma \subset \mathfrak{M}$ tel que $\sigma_\lambda = \sigma \cap \mathfrak{M}^\lambda$ soit d'interpolation hilbertienne i.e. $\{e_m\}_{m\in\sigma_\lambda}$ forme une famille d'interpolation.

On sait qu'il existe une constante C telle que : [Chap. II § 3]

$$\forall h \in H^\lambda, \sum_{m\in\sigma_\lambda} |\langle h|e_m\rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2_{H^\lambda}$$

d'où :

$$\forall h \in H^\lambda, \sum_{m\in\sigma_\lambda} \rho^2(m)\,|\hat{h}(m)|^2 \leq C^2 \|h\|^2_{H^\lambda} \qquad (*).$$

Posons

$$\mu = \sum_{m\in\sigma_\lambda} \rho^2(m)\,\delta_m$$

où δ_m est la masse de Dirac au point m.

(*) s'écrit :

$$\int |\hat{h}|^2\, d\mu \leq C^2 \|h\|^2_{L^2(\lambda)} .$$

Soit $m_o \in \mathfrak{M}^\lambda$ et $C_{m_o,t}$ la cellule associée. En prenant $h = e_{m_o}$ il vient :

$$C^2 \geq \sum_{m\in\sigma_\lambda} \rho^2(m)\,|\hat{e}_{m_o}(m)|^2 \geq \sum_{m\in\sigma_\lambda\cap C_{m_o,t}} \rho^2(m)\,|\hat{e}_{m_o}(m)|^2 .$$

Si $m \in C_{m_o,t}$

$$|\hat{e}_{m_o}(m)|^2 \geq t^{-1} \rho^{-2}(m_o)$$

donc :

$$C^2 \geq \sum_{m\in\sigma_\lambda\cap C_{m_o,t}} \rho(m)^2 \rho^{-2}(m_o)\, t^{-1}.$$

Soit

$$C^2 \geq t^{-1} \rho^{-2}(m_o) \quad \mu[C_{m_o,t}]$$

c'est-à-dire

$$(**) \qquad \underline{\mu[C_{m_o,t}] \leq C^2\, t\, \rho^2(m_o)} .$$

Si l'on suppose de plus que $\{P_m,\ m \in \mathfrak{M}^\lambda\}$ est uniformément troncable par la famille $\rho(m)^2$ [11] i.e.

$$\int_{B_{m,t}} P_m \geq 1 - \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ ne dépend que de t et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, alors :

$$\rho^2(m_o) \leq t\, \lambda[B_{m_o,t}]$$

c'est-à-dire

$$(***) \qquad \underline{\mu[C_{m_o,t}] \le C^2\, t^{-2}\, \lambda\, [B_{m_o,t}]} \;.$$

On retrouve ainsi la condition classique de Carleson [11], [12], [13], ce qui justifie le choix des boules et cellules et $\rho^2(m)$ comme structure pseudo-métrique associée à A et λ.

On a ainsi montré le théorème suivant

THEOREME. <u>Une condition nécessaire pour que</u> σ <u>soit d'interpolation est que, pour toute mesure de probabilité</u> λ <u>sur</u> $\mathfrak{M}$, <u>la mesure</u> μ <u>associée soit une mesure de Carleson par rapport à</u> λ .

Si l'on note $H^\infty(\lambda)$ l'adhérence faible étoile de A dans $L^\infty(\lambda)$, il serait intéressant de savoir s'il existe un théorème de Fatou analytique i.e. : la base $\{B_{m,t}\}_{m\in\mathfrak{M}^\lambda}$; dérive-t-elle les fonctions de $H^\infty(\lambda)$ sous la seule hypothèse d'uniforme troncabilité ?

CHAPITRE IV

RESULTATS NOUVEAUX ET ANCIENS POUR L'ALGEBRE DU DISQUE.

On construit une représentation du groupe conforme de la boule unité de $\mathbb{C}^n$; dans le cas où $n = 1$, elle va nous permettre d'étudier les quotients semi-simples de l'algèbre du disque :

d'une part les quotients semi-simples de $A(D)$ sont isométriquement isomorphes à leur représentation spectrale. En utilisant les caractérisations des suites d'interpolation on retrouve alors le théorème de Carleson.

d'autre part on détermine la sphère unité des quotients.

1. NOTATIONS.

Soit $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n, \ |z|^2 = |z^{(1)}|^2 + \ldots + |z^{(n)}|^2 < 1\}$, $A(B_n)$ est l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{B}_n$ analytiques dans B_n.

λ est la mesure de Lebesgue normalisée sur S_n où

$$S_n = \delta B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \ \ |z| = 1\}.$$

Le spectre de $A(B_n)$ est $\overline{B}_n$.

Si $z_o \in B_n$, e_{z_o} défini par :

$$\zeta \in S_n, \quad e_{z_o}(\zeta) = \frac{(1-|z_o|^2)^{\frac{n}{2}}}{(1-<\zeta,z_o>)^n}$$

est orthogonal dans $L^2(S_n,\lambda)$ à l'idéal des fonctions de $A(B_n)$ nulles en z_o.

En effet e_{z_o} n'est autre que le noyau de Cauchy- Szegö normalisé.

On appelle, comme d'habitude, $H^2(B_n)$ la fermeture de $A(B_n)$ dans $L^2(S_n,\lambda)$.

2. UNE REPRESENTATION DU GROUPE CONFORME DE B_n

Soit G le groupe des transformations conformes de B_n. On sait qu'il est isomorphe à $U(n,1)$ [14] où $U(n,1)$ est le groupe des isométries pour la forme sesquilinéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\ll z,w \gg = z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_n\overline{w}_n - z_{n+1}\overline{w_{n+1}} .$$

Soit $T \in U(n,1)$; dans la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ sa matrice $[T]$ s'écrit par blocs :

$$[T] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est une matrice (n,n)
B $(n,1)$
C $(1,n)$
D $(1,1)$.

La transformation conforme φ de B_n qui lui correspond est définie par

$$\varphi(z) = \frac{AZ+B}{CZ+D}$$ où Z est la matrice $(n,1)$ des (z_i) $i = 1\ldots n$.

On calcule le produit scalaire dans $H^2(B_n)$:

$$< e_{\varphi(z)}, e_{\varphi(w)} > = \frac{(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{2}}(1-|\varphi(w)|^2)^{\frac{n}{2}}}{(1-\varphi(z).\overline{\varphi(w)})^n}$$

[$\varphi(z).\overline{\varphi(w)}$ est le produit scalaire des vecteurs $\varphi(z)$ et $\varphi(w)$ dans $\mathbb{C}^n$]

$$1-\varphi(z)\,\overline{\varphi(w)} = 1 - \frac{AZ+B}{CZ+D}\cdot\overline{\frac{AW+B}{CW+D}}$$
$$= \frac{1}{(CZ+D)(\overline{CW+D})}\left[(CZ+D)(\overline{CW+D}) - (AZ+B)(\overline{AW+B})\right].$$

T laisse invariante la forme sesquilinéaire $\ll\ \gg$ donc si (X,t) et (Y,v) sont deux éléments de $\mathbb{C}^{n+1}$ $(X\in\mathbb{C}^n,\ t\in\mathbb{C},\ Y\in\mathbb{C}^n,\ v\in\mathbb{C})$ si :

$$\alpha = T(X,t)\ ;\ \beta = T(Y,v)$$

$$\ll\alpha,\beta\gg = (AX+Bt)-(\overline{AY+Bv})-(CX+Dt)(\overline{CY+Dv})$$
$$= X.\bar{Y} - t\bar{v}\ .$$

D'où en coordonnées inhomogènes si $z=\frac{X}{t}$, $w=\frac{Y}{v}$:

$$(AZ+B).(\overline{AW+B}) - (CZ+D).(\overline{CW+D}) = Z.\bar{W} - 1.$$

On en déduit

$$1-\varphi(z).\overline{\varphi(w)} = \frac{1}{(CZ+D)(\overline{CW+D})}\ [1-Z.\bar{W}].$$

D'où $$<e_{\varphi(z)}, e_{\varphi(w)}> = \frac{(CZ+D)^n}{|CZ+D|^n}\cdot\frac{(\overline{CW+D})^n}{|CW+D|^n}<e_z, e_w>.$$

Les combinaisons linéaires des vecteurs e_z étant denses dans $H^2(B_n)$, on définit sur $H^2(B_n)$ l'opérateur $U(\varphi)$ par :

$$U(\varphi)e_z = \eta(\varphi,z)\,e_{\varphi(z)}$$

avec $$\eta(\varphi,z) = \frac{(\overline{CZ+D})^n}{|CZ+D|^n} = \overline{\alpha(\varphi,z)}^n \text{ où}$$

$$\alpha(\varphi,z) = \frac{CZ+D}{|CZ+D|}$$

$U(\varphi)$ est donc unitaire sur $H^2(B_n)$.

Montrons que c'est de plus une représentation de G. On montre que pour tout z :

$$\eta(\psi\circ\varphi,\ z) = \eta(\psi,\ \varphi(z)).\eta(\varphi,\ z)$$

où $$\varphi(z) = \frac{AZ+B}{CZ+D} \quad\text{et}\quad \psi(w) = \frac{A'W+B'}{C'W+D'}\ .$$

Preuve :

$$\alpha(\varphi, z) = \frac{CZ+D}{|CZ+D|}$$

$$\alpha(\psi, w) = \frac{C'W+D'}{|C'W+D'|}$$

d'où :

$$\alpha(\psi, \varphi(z)) = \frac{C'(AZ+B)+D'(CZ+D)}{|C'(AZ+B)+D'(CZ+D)|}$$

$$\psi \circ \varphi(z) = \frac{A'(AZ+B)+B'(CZ+D)}{C'(AZ+B)+D'(CZ+D)}$$

d'où :
$$\alpha(\psi\circ\varphi, z) = \frac{C'(AZ+B)+D'(CZ+D)}{|C'(AZ+B)+D'(CZ+D)|}$$

d'où :
$$\alpha(\psi\circ\varphi, z) = \alpha(\psi, \varphi(z))\, \alpha(\varphi, z).$$

On en déduit que :

$$\eta(\psi\circ\varphi, z) = \eta(\psi, \varphi(z)).\eta(\varphi, z)$$

et :
$$U(\psi\circ\varphi) = U(\psi)\, U(\varphi).$$

THEOREME. U est une représentation unitaire de G dans $H^2(B_n)$.

3. CAS DU DISQUE

On notera : $D = B_1$.

$\sigma = \{z_1, \ldots. z_n\}$ n points distincts de D.

$I_\sigma = \{f \in A(D),\ \forall z_i \in \sigma, \quad f(z_i) = 0\}$

π la représentation spectrale associée à la mesure λ

E_σ le sous-espace de Hilbert de $H^2(\lambda)$ engendré par $\{e_{z_i}, z_i \in \sigma\}$.

Pour $z_i \in \sigma$ on note $e_i = e_{z_i}$.

On va démontrer le théorème suivant :

THEOREME. π <u>est une représentation antilinéaire isométrique de</u> $A(D)/_{I_\sigma}$ <u>dans</u> $\mathscr{L}(E_\sigma)$.

On sait que [Chap. I ; § 2] :

$$\forall\ f \in A(D)/_{I_\sigma} \quad \|\pi(f)\|_{\mathscr{L}(E_\sigma)} \leq \|f\|_{A/_{I_\sigma}} .$$

Il faut démontrer l'inégalité inverse.

LEMME. <u>Si</u> $n = \operatorname{card} \sigma \geq 2$ <u>alors</u> $\|\pi(z)\|_{\mathscr{L}(E_\sigma)} = 1$.

<u>Démonstration</u>. Soit $h \in E_\sigma$; $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$

$$\|\pi(z)h\|^2 = \sum_{ij} z_i\, z_j\, h_i\, \bar{h}_j\ < e_i | e_j >$$

$$< e_i | e_j > = \frac{\sqrt{1-|z_i|^2}\sqrt{1-|z_j|^2}}{1-\bar{z}_i z_j}$$

Donc $\quad \|\pi(z)h\|^2 = \sum_{ij} h_i \bar{h}_j \dfrac{\sqrt{1-|z_i|^2}\sqrt{1-|z_j|^2}}{1-\bar{z}_i z_j} - \sum_{ij} h_i \bar{h}_j \sqrt{1-|z_i|^2}\sqrt{1-|z_j|^2}$.

Posons $\alpha_o(h) = \sum_i h_i \sqrt{1-|z_i|^2} = h(0)$.

Il vient $\quad \|\pi(z)h\|^2 = \|h\|^2 - |\alpha_o(h)|^2$.

On en déduit que $\pi(z)$ est isométrique sur le noyau de l'évaluation en 0, d'où le lemme.

<u>Démonstration du théorème</u>. Elle se fait par récurrence sur $n = \operatorname{card} \sigma$. Pour $n = 1$ le théorème est évident.

Supposons le vrai pour $\operatorname{card} \sigma' = n$.

Soit alors $\sigma = \{z_1 \ldots z_n, z_{n+1}\}$ et $f \in A(D)$.

On fait deux hypothèses supplémentaires auxquelles on pourra se ramener

(*) $\qquad z_{n+1} = 0$

(**) $\qquad f(0) = 0$.

Soit $g \in A(D)$ telle que

$$\forall i = 1 \ldots n, \qquad g(z_i) = \frac{1}{z_i} f(z_i) .$$

Clairement $\|f\|_{A/I_\sigma} \leq \|g\|_{A/I_{\sigma'}}$ où $\sigma' = \{z_1 \ldots z_n\}$ car zg appartient à la classe de f dans A/I_σ.

On a $\qquad \pi(zg) = \pi(f) = \pi(z)\, \pi(g)$.

Calculons la norme de $\pi(f)$:

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi_\sigma(f)h\|}{\|h\|}$$

$$= \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi(g)\, \pi(z)\, h\|}{\|h\|} .$$

La borne supérieure n'étant pas atteinte sur un h tel que $\pi(z)h = 0$, on a

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi(g)\, \pi(z)h\|}{\|\pi(z)h\|} \; \frac{\|\pi(z)h\|}{\|h\|} .$$

Mais on sait que $\pi(z)$ est une isométrie sur $\ker \alpha_o$ et à cause de $(*)$ $\pi(z)$ envoie isométriquement $\ker \alpha_o$ sur $E_{\sigma'}$ d'où en posant $k = \pi(z)h$, $h \in \ker \alpha_o$

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \sup_{k \in E_{\sigma'}} \frac{\|\pi(g)\, k\|_{E_{\sigma'}}}{\|k\|_{E_{\sigma'}}} = \|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} .$$

La restriction de π à $E_{\sigma'}$ est la représentation spectrale de σ'. Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}} \geq \|f\|_{A/I_\sigma} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On se débarasse alors des hypothèses $(*)$ $(**)$.

a) $(**)$. Soit $f \in A(D)$ telle que $\|f\|_{A/I_\sigma} = 1$. Soit $a = f(0)$; $|a| < 1$ (à moins que f ne soit constante auquel cas il n'y a rien à démontrer).

Soit φ la représentation conforme du disque D telle que $\varphi(a) = 0$.

Si $\qquad \|f\|_A < \frac{1}{|a|}$, $\varphi \circ f \in A(D)$ et φ étant continue, $\|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} \leq 1$.

Montrons qu'on a exactement $\|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} = 1$.

Soit $g = \varphi \circ f$.

Si $\|g\|_{A/I_\sigma} < 1$, soit g tel que $\|g\|_A < 1$, alors $\|\varphi^{-1} \circ g\|_A < 1$ et

$\|f\|_{A/I_\sigma} = \|\varphi^{-1} \circ g\|_{A/I_\sigma} < 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

$\varphi \circ f$ vérifie les hypothèses (*) et (**) donc

$$\|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\| = \|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} = 1.$$

On montre alors que $\|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)}$: π_σ étant une représentation antilinéaire,

$$\pi_\sigma(\varphi \circ f) = (\pi_\sigma(f) - \bar{a})\,[1 - a\,\pi_\sigma(f)]^{-1}$$

$$= \psi(\pi_\sigma(f))$$

où ψ est la transformation conforme : $\psi(z) = \frac{z-\bar{a}}{1-az}$. $\pi_\sigma(f)$ est une contraction sur l'espace de Hilbert E_σ d'où, d'après un théorème de Von Neuman [15] il vient

$$\|\psi(\pi_\sigma(f))\| \leq \|\pi_\sigma(f)\|$$

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \|\psi^{-1} \circ \psi(\pi_\sigma(f))\| \leq \|\psi(\pi_\sigma(f))\| \leq \|\pi_\sigma(f)\|$$

d'où l'égalité $\|\pi_\sigma(f)\| = \|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\|$.

b) (*) Supposons $z_{n+1} \neq 0$

$$\sigma = \{z_1 \dots z_n, z_{n+1}\}.$$

Soient φ l'élément du groupe conforme tel que $\varphi(z_{n+1}) = 0$

$$\sigma' = \{\varphi(z_1), \dots \varphi(z_n), 0\}$$

$$f \in A(D).$$

On définit $g = f \circ \varphi^{-1}$, $g \in A(D)$. On a :

(i) $\|f\|_{A/I_\sigma} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}}$

(ii) $f(z_i) = g(z_i)$ où $z_i' = \varphi(z_i)$.

Puisque σ' vérifie (*) il vient :

$$\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}} .$$

On doit montrer que: $\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)}$. Pour cela on applique le théorème du § 2 ; en utilisant les mêmes notations, on a pour $i = 1 \dots n+1$

$$\begin{aligned}
U(\varphi^{-1})\, e_{z_i'} &= \eta(\varphi^{-1}, z_i')\, e_{\varphi^{-1}(z_i')} \\
&= \eta(\varphi^{-1}, z_i')\, e_{z_i}
\end{aligned}$$

$$\pi_\sigma(f)\, U(\varphi^{-1})\, e_{z_i'} = \eta(\varphi^{-1}, z_i')\, f(\overline{z_i})\, e_{z_i}$$

$$\begin{aligned}
U(\varphi)\, \pi_\sigma(f)\, U(\varphi^{-1})\, e_{z_i'} &= \eta(\varphi^{-1}, z_i')\, \eta(\varphi, z_i)\, f(\overline{z_i})\, e_{z_i'} \\
&= \pi_{\sigma'}(g)\, e_{z_i'}
\end{aligned}$$

d'où $$\pi_{\sigma'}(g) = U(\varphi)\, \pi_\sigma(f)\, U(\varphi^{-1}).$$

Comme U est unitaire :

$$\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

4. CARACTERISATION DE LA SPHERE UNITE DE $A(D)/_{I_\sigma}$

Soit $\sigma = \{z_1, \dots z_n\}$ et posons

$$S = \{f \in A(D)/_{I_\sigma}, \ \|f\|_{A/I_\sigma} = 1\}.$$

On a alors

THEOREME. <u>La sphère unité</u> S <u>de</u> $A/_{I_\sigma}$ <u>est constituée des classes des produits de Blaschke de</u> $(n-1)$ <u>zéros au plus (distincts ou confondus, multiplicités incluses)</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit φ une transformation conforme .

$$\pi(\varphi) = U(\varphi^{-1})\, \pi(z)\, U(\varphi).$$

$\pi(z)$ est une isométrie sur $\mathrm{Ker}\,\alpha_o$ [lemme du § 3].

$\pi(\varphi)$ sera donc une isométrie sur $U(\varphi^{-1})$ $[\mathrm{Ker}\,\alpha_o]$.

($U(\varphi^{-1})$ $[\mathrm{Ker}\,\alpha_o]$ est le noyau de l'évaluation au zéro de φ^{-1}).

On définit $\mathfrak{J}_\varphi = U(\varphi^{-1})\,[\mathrm{Ker}\,\alpha_o] \cap E_\sigma$. $\mathfrak{J}_\varphi$ est un hyperplan de E_σ.

Soit B un produit de Blaschke de (n-1) zéros au plus, $B = \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{k-1}$, $k \leq n$, où φ_i est une transformation conforme.

$\pi(B) = \pi(\varphi_1)\,\pi(\varphi_2) \dots \pi(\varphi_{k-1}) = \pi(\varphi_{k-1}) \dots \pi(\varphi_1)$.

Supposons d'abord que : $\forall i = 1 \dots k-1$, $\forall j = 1 \dots n$

$$\varphi_i(z_j) \neq 0$$

alors $\pi_\sigma(\varphi_i)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E_\sigma)$ pour tout i. Posons

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathfrak{J}_{\varphi_1} \\
E_2 &= \pi_\sigma(\varphi_1)^{-1}\,\mathfrak{J}_{\varphi_2} \\
&\vdots \\
E_{k-1} &= \pi_\sigma(\varphi_1)^{-1} \dots \pi_\sigma(\varphi_{k-2})^{-1}\,\mathfrak{J}_{\varphi_{k-1}}\,.
\end{aligned}$$

Alors $E = E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{k-1}$ est un sous-espace de E_σ de dimension au moins égale à (n-k+1), donc au moins égale à 1. Clairement $\pi_\sigma(B)$ est isométrique sur E donc :

$$\|\pi_\sigma(B)\| = 1.$$

Si B à des points de σ comme zéros, on peut faire la remarque suivante :

dans la base $\{e_1 \dots e_n\}$ l'opérateur $\pi_\sigma(B)$ est représenté par la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \overline{B(z_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{B(z_n)} \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur et sa norme sont des fonctions continues de $B(z_i)$, donc des zéros de B.

On aura donc encore

$$\|B\|_{A/I_\sigma} = \|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = 1.$$

Réciproque.

On va montrer que si B a n zéros alors :

$$\|B\|_{A/I_\sigma} = \|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} < 1.$$

La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de σ,

. c'est vrai pour $\operatorname{card} \sigma = 1$.

. Supposons le vrai pour $\operatorname{card} \sigma' = n$

et soit $\sigma = \{z_1 \dots z_n, z_{n+1}\}$.

Supposons de plus que :

(*) $\quad z_{n+1} = 0$

(**) $\quad B(0) = 0$.

D'après (**) $B(z) = z\,C(z)$ où C est un produit de Blaschke ayant n zéros.

Si $\quad \sigma' = \{z_1 \dots z_n\}$ on a

$$\|B\|_{A/I_\sigma} \leq \|C\|_{A/I_{\sigma'}}$$

car zC est dans la classe de B modulo I_σ.

Le théorème d'isométrie des quotients § 3 et l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|B\|_{A/I_\sigma} \leq \|\pi_{\sigma'}(C)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|C\|_{A/I_{\sigma'}} < 1.$$

On se débarasse des hypothèses (*) et (**) comme dans la preuve du théorème 1 § 3, en utilisant : 1. la représentation du groupe conforme (§ 2).

2. en remarquant que la composition à droite et à gauche d'un produit de Blaschke ayant p zéros par des transformations conformes est encore un produit

de Blaschke à p zéros.

COROLLAIRE. *Soit* $\omega \in \ell^{\infty}(\sigma)$ *où* card $\sigma = n$. *Il existe une fonction unique qui interpole* ω *sur* σ *et de norme minimum : c'est le produit d'une constante par un produit de Blaschke ayant au plus* $(n-1)$ *zéros*.

5. CARACTERISATION DES SUITES D'INTERPOLATION POUR $H^{\infty}(D)$.

Soit σ une suite dans D.

Une conséquence du théorème 1 d'isomorphisme est que σ est une suite d'interpolation pour $H^{\infty}(D)$ si et seulement si σ est d'interpolation pour $H^2(D)$ i.e. la famille des vecteurs $\{e_{z_i}\}_{z_i \in \sigma}$ est d'interpolation hilbertienne dans $H^2(D)$.

En utilisant ces techniques on va donner une autre démonstration du théorème de Carleson [16].

THEOREME 3 (Carleson). σ *est d'interpolation si et seulement si le produit des distances de Gleason est uniformément minoré*.

Preuve. On étudie d'abord un sous-ensemble fini $\tilde{\sigma}$ de σ,

$$\tilde{\sigma} = \{z_1 \ldots z_n\}.$$

Une condition nécessaire pour que σ soit d'interpolation est que les vecteurs conjugués à la famille $\{e_{z_i} \quad i = 1 \ldots n\}$ soient uniformément bornés dans $H^2(D)$.

LEMME. *Les conjugués* $\{\rho_i \quad i = 1 \ldots n\}$ *de la famille* $\{e_{z_i} \quad i = 1 \ldots n\}$ *sont définis par* $\rho_i(z) = \dfrac{B_i(z)}{B_i(z_i)} e_{z_i}(z)$ *où* B_i *est le produit de Blaschke s'annulant sur* $\tilde{\sigma} - \{z_i\}$.

En effet :

1) $$\begin{aligned} <\rho_i | e_{z_k}> &= \frac{1}{B_i(z_i)} <B_i e_{z_i} | e_{z_k}> \\ &= \frac{1}{B_i(z_i)} B_i(z_k) <e_{z_i} | e_{z_k}> \\ &= \delta_i^k \end{aligned}$$

2) $\rho_i \in E_\sigma$

en effet : $\rho_i(z) = \dfrac{\sqrt{1-|z_i|^2}\,(z-z_1)\ldots(z-z_{i-1})(z-z_{i+1})\ldots(z-z_n)}{B_i(z_i)(1-\bar{z}_i z)(1-\bar{z}_1 z)\ldots(1-\bar{z}_{i-1}z)(1-\bar{z}_{i+1}z)\ldots(1-\bar{z}_n z)}$.

Par décomposition en éléments simples on obtient :

$$\rho_i(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-\bar{z}_k z} \quad \text{donc} \quad \rho_i \in E_{\tilde{\sigma}} .$$

Calculons la norme de ρ_i dans $H^2(B_n)$:

$$\|\rho_i\|^2 = \langle \rho_i \mid \rho_i \rangle = \frac{1}{|B_i(z_i)|^2} \int_T B_i \bar{B}_i |e_i|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{|B_i(z_i)|^2}$$

donc : $\|\rho_i\|^2 \leq K^2$ se traduit par :

$$\prod_{k\neq i} \left|\frac{z_i - z_k}{1-\bar{z}_i z_k}\right| \geq \frac{1}{K} .$$

La condition de Carleson est bien nécessaire. Réciproquement, on suppose que

$$\inf_i \prod_{k\neq i} \left|\frac{z_i - z_k}{1-\bar{z}_i z_k}\right| > \delta .$$

Introduisons les vecteurs conjugués normalisés :

$$e_i' = \frac{\rho_i}{\|\rho_i\|} = B_i\, e_{z_i} .$$

LEMME 2. <u>L'opérateur</u> A <u>défini sur</u> $E_{\tilde{\sigma}}$ <u>par</u> $A(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum x_i e_i'$ <u>est anti-unitaire</u>.

En effet, on calcule :

$$\langle e_i' \mid e_j' \rangle = \int_\pi B_i \bar{B}_j e_i \bar{e}_j \frac{d\theta}{2\pi} .$$

En intégrant par la méthode des résidus on obtient :

$$\langle e_i' \mid e_j' \rangle = \overline{\langle e_i \mid e_j \rangle}$$

d'où : $(\forall h \in E_\sigma, \forall k \in E_{\tilde{\sigma}})$ $\quad \langle Ah \mid Ak \rangle = \overline{\langle h, k \rangle}$ c.q.f.d.

Pour démontrer le théorème 3 il faut prouver :

(1) $\quad \forall i = 1 \ldots n \quad \|\rho_i\| \leq K.$

(2) $\forall h \in E_\sigma \quad \sum_i |<h(e_i)>|^2 \leq K\|h\|^2$

(3) $\forall h \in E_\sigma \quad \sum |<h(e_i')>|^2 \leq K\|h\|^2$,

où la constante K ne dépend que de σ (et pas de $\tilde{\sigma}$) [chapitre II, § 3].

(1) est prouvé puisque le produit des distances de Gleason est uniformément minoré.

(2) On utilise le théorème de Carleson suivant [17] :

THEOREME. Si μ est une mesure positive dans D telle que, avec les notations du chapitre III

$$\forall z \in D, \quad \mu({}^C z, t) < a\lambda({}^B z, t) \qquad (*)$$

alors il existe une constante b_p telle que :

$$\forall h \in A(D) \quad \int |h(z)|^p \, d\mu(z) \leq b_p \int_{\pi} |h|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si le produit des distances de Gleason est uniformément minoré la condition (*) est satisfaite quand μ est la mesure associée à λ et σ [chapitre III] ; [18]. Donc (*) implique (2) en prenant $p = 2$ dans le théorème de Carleson.

(3) le lemme 2 prouve que (2) implique (3).

Remarque. Cette démonstration est proche dans l'esprit de celle de Shapiro et Shields [7] même si, ici, on considère la meilleure interpolation dans $H^2(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. DIXMIER : Les C^*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars. Paris 1964. Paris 1964.

[2] R. DOUGLAS : Banach algebra techniques in operators Theory. Academic Press 1972. 1972.

[3] J. WERMER et B. COLE : Quotient algebras of Uniform algebras. Symposium on Uniform algebras and Rational approximation ; University of Michigan, (1969).

[4] F. BONSALL et J. DUNCAN : Numerical Ranges. London Math. Society. Lecture note series 1971.

[5] A. BERNARD : Seminar on Uniform Algebras. University of Aberdeen (March 1973)

[7] H.S. SHAPIRO and A.L. SHIELDS : On some interpolation problems for Analytic functions. Amer. Jour. Math. (83), 1961.

[8] N. BARI : A treatise on trigonometric series. Pergamon Press, 1964.

[9] F. RIESZ and B. NAGY : Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[10] N. Th. VAROPOULOS : C.R.A.S. Série A, t. 272, 1971, p. 950.

[11] N. Th. VAROPOULOS : C.R.A.S. Série A, t. 274, 1972, p. 1539.

[12] L. CARLESON : An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).

[13] L. CARLESON and J. GARNETT : Interpolating sequences and separation properties. Preprint.

[14] E.M. STEIN : Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Math. Notes. Princeton University Press 1972.

[15] B. NAGY et C. FOIAS : Analyse harmonique des opérateurs dans l'espace de Hilbert. Masson et C^{ie} 1967.

[16] K. HOFFMAN : Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall Series, 1965.

[17] L. CARLESON : Interpolation by bounded analytic functions and the Corona problem. Ann. Math. 76 (1962).

[17] L. HÖRMANDER : L^p estimates for pluri-subharmonique functions. Math. Scand. 20 (1967).

[18] W. DURREN : Theory of H^p-spaces. Academic Press, 1970.