UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 179

Régularité de certaines moyennes

Jacques Peyrière

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

REGULARITE DE CERTAINES MOYENNES

par Jacques Peyrière

1. ENONCES DES RESULTATS.

On désigne par σ_{n-1} la mesure de Radon, positive, de masse 1, invariante par rotation, portée par S_{n-1}, sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (la norme sur $\mathbb{R}^n$ sera notée $|\ |$).

Si β est un nombre réel et f une fonction localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$F_{\beta,x}(t) = |t|^{\beta} \int f(x + ty)\, d\sigma_{n-1}(y),$$

(l'intégrale converge pour tout x de $\mathbb{R}^n$, pour presque tout t de $\mathbb{R}$).

L'objet de ce travail est d'étudier pour β et x fixés la régularité de la fonction $F_{\beta,x}$.

Nous rappelons plus loin la définition et quelques propriétés des espaces $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ étudiés par M. H. Taibleson [1].

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs complexes, on pose $\check{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

Voici les résultats obtenus.

THEOREME. Soient n un entier supérieur à 2, α et β deux nombres réels positifs. On suppose que β appartient à l'intervalle $\left]-1\, ,\, \frac{n-2}{2}\right[$; il existe alors un nombre strictement positif C tel que pour toute fonction continue à support compact f définie sur $\mathbb{R}^n$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda^{2,2}_{\alpha}(\mathbb{R})} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f * \check{f}(x)|\, |x|^{2(\beta-\alpha)-n+1}(1+|x|^{2\alpha})\, dx.$$

COROLLAIRE 1. Soient n un entier supérieur à 2, p et q deux nombres réels tels que l'on ait $1 \leq p < q \leq 2$. Si f appartient à $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ et si α et β sont deux nombres réels tels que $-1 < \beta < \inf(\frac{n-2}{2}, n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2})$ et $0 < \alpha < \beta + \frac{1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$ alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^n$, la fonction $F_{\beta,x}$ appartient à l'espace $\Lambda^{2,2}_{\alpha}(\mathbb{R})$.

COROLLAIRE 2. Soient n un entier supérieur à 3, q un nombre de l'intervalle $\left]\frac{n}{n-1}, 2\right]$ et f une fonction appartenant localement à $L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^n$, la fonction $F_x(t) = \int_{S_{n-1}} f(x+ty)\, d\sigma_{n-1}(y)$ coïncide presque partout sur $\left]0\, ,\, +\infty\right[$ avec une fonction appartenant localement à $\Lambda_{\alpha}(\left]0, \infty\right[)$ pour tout α strictement inférieur à $n(1 - \frac{1}{q}) - 1$.

2. RAPPELS SUR LES ESPACES $\Lambda^{p,q}_{\alpha}$.

Soit g une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{R})$; notons u son intégrale de Poisson. Soient α un nombre réel strictement positif et k un entier strictement supérieur à α. La fonction g appartient à $\Lambda^{p,q}_{\alpha}(\mathbb{R})$ si l'expression

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^\infty \left[y^{k-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right|^p dx \right)^{1/p} \right]^q \frac{dy}{y} \right\}^{1/q}$$

est finie ; cette quantité est une norme sur $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R})$. Deux k différents donnent deux normes équivalentes. Lorsque p ou q est infini, il faut interpréter la formule précédente de la manière hatibuelle.

Lorsque α n'est pas un nombre entier $\Lambda_\alpha^{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ est l'espace de Lipchitz habituel $\Lambda_\alpha(\mathbb{R})$.

Les relations $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$, $\alpha_1 - \frac{1}{p_1} = \alpha_2 - \frac{1}{p_2}$ entraînent $\Lambda_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\mathbb{R}) \subset \Lambda_{\alpha_2}^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$. On a, en particulier, $\Lambda_{\alpha+\frac{1}{2}}^{2,2}(\mathbb{R}) \subset \Lambda_\alpha^{\infty,\infty}(\mathbb{R})$.

L'espace $\Lambda_\alpha^{2,2}$ est l'espace de Sobolev H_α.

3. DES LEMMES.

Soit $u_o(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$ le noyau de Poisson du demi-plan. On pose $u_k(x,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} u_o(x,y)$.

La fonction u_{2k} est homogène de degré $-(2k+1)$ par rapport aux deux variables et impaire par rapport à la seconde, il existe donc un nombre c_k tel que l'on ait

$$|u_{2k}(x,y)| \leq c_k \frac{y}{(x^2+y^2)^{k+1}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

LEMME 1. On a $u_k(.,y) * u_k(.,y) = u_{2k}(.,2y)$.

Démonstration. La transformée de Fourier de $u_o(.,y)$ est $e^{-|\xi|y}$, celle de $u_k(.,y)$ est donc $(-|\xi|)^k e^{-|\xi|y}$ par suite celle de $u_k(.,y) * u_k(.,y)$ est $(-|\xi|)^{2k} e^{-2|\xi|y}$, d'où le résultat.

Notons χ la fonction indicatrice de l'ensemble

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \big||x|-|y|\big| < |z| < |x|+|y|\}$. Posons, lorsque $\chi(x,y,z)$ vaut 1, $\Delta(x,y,z) = \frac{1}{4}\sqrt{[(x+y)^2 - z^2][z^2-(x-y)^2]}$, c'est l'aire des triangles dont les longueurs des côtés sont $|x|$, $|y|$, $|z|$.

Enfin désignons par s_n l'aire de S_n.

LEMME 2. Soient n un entier supérieur à 1 et r et s deux nombres réels non nuls. Appelons μ_n la mesure image de $\sigma_n \times \sigma_n$ par l'application, $(y,z) \rightsquigarrow ry+sz$, de $S_n \times S_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$d\mu_n(x) = \frac{2^{n-2}\, s_{n-1}}{s_n^2} \frac{[\Delta(|x|,r,s)]^{n-2}}{(|rs|.|x|)^{n-1}} \chi(|x|,r,s)\, dx.$$

Démonstration. On peut supposer que l'on a $0 < r \leq s$. Soit t un nombre positif. Calculons $\omega(t) = \mu(\{x \ ; \ |x| \leq t\})$. On a

$$\omega(t) = \int_{S_n} \Big(\int_{S_n \cap \{y;\ |ry+sz| \leq t\}} d\sigma_n(y) \Big)\, d\sigma_n(z) \ ;$$

l'intégrale interne ne dépendant manifestement pas de z nous obtenons

$$\omega(t) = \int_{S_n \cap \{y;\ |ry+sz| \leq t\}} d\sigma_n(y)$$

où z est un point quelconque de S_n.

Clairement $\omega(t)$ est nul si t est inférieur à $s-r$ et vaut 1 si t est supérieur à $s+r$. Si l'on a $s-r < t < s+r$ on désigne par φ_o le nombre compris entre 0 et π tel que $t^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\varphi_o$. On a alors

$$\omega(t) = \frac{s_{n-1}}{s_n} \int_o^{\varphi_o} (\sin\varphi)^{n-1}\, d\varphi$$

(on intègre d'abord à $\langle y,z \rangle$ constant) et

$$rs \sin\varphi_o = 2\Delta(r,s,t).$$

On a donc

$$\omega'(t) = 2^{n-2}\ \frac{s_{n-1}}{s_n}\ \frac{t\,[\Delta(r,s,t)]^{n-2}}{(rs)^{n-1}}\ \chi(r,s,t).$$

Pour conclure il suffit de remarquer que la mesure μ_n est invariante par rotation

LEMME 3. Soient v et w deux nombres réels tels que $v < 0$, $w > -1$ et $2(v+w) < -1$. Posons

$$\lambda(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty (t^2-s^2)^v (t^2-1)^w\, dt & \text{lorsque } |s|<1 \\ \displaystyle\int_0^1 (s^2-t^2)^v (1-t^2)^w\, dt & \text{lorsque } |s|>1. \end{cases}$$

On a, lorsque s tend vers 1,

$$\lambda(s) = \begin{cases} O(1) & \text{lorsque } v+w > -1 \\ O\left[\log(1/|1-s|)\right] & \text{lorsque } v+w = -1 \\ O(|1-s|^{v+w+1}) & \text{lorsque } v+w < -1. \end{cases}$$

Démonstration. Etudions d'abord le cas où s tend vers 1 par valeurs supérieures. On a, lorsque s est inférieur à 2, $\lambda(s) \le c\displaystyle\int_0^1 (s-t)^v\,(1-t)^w\, dt$, d'où

$$\lambda(s) = C\int_0^1 (s-1+t)^v\, t^w\, dt = C\,(s-1)^{v+w+1}\int_0^{\frac{1}{s-1}} (1+t)^v\, t^w\, dt$$

et l'on conclut facilement.

Etudions maintenant le cas où s tend vers 1 par valeurs inférieures. On a $\lambda(s) \le \displaystyle\int_1^2 (t^2-s^2)^v (t^2-1)^w dt + \int_2^\infty (t^2-1)^{v+w}\, dt$ d'où

$\lambda(s) \le C(1 + \displaystyle\int_1^2 (t-s)^v (t-1)^w\, dt) \le C(1 + \int_0^1 (1-s+t)^v\, t^w\, dt)$ et l'on conclut comme précédemment.

4. DEMONSTRATIONS.

Dans ce qui suit C désigne une fonction strictement positive de α, β, n, deux occurences différentes de C pouvant désigner deux fonctions distinctes.

Calculons d'abord $\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dx$. On a

$$|F_{\beta,x}(t)|^2 = |t|^{2\beta} \iint_{S_{n-1}\times S_{n-1}} f(x+ty_1)\ \overline{f(x+ty_2)}\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2),$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_{\beta,x}(t)|^2\, dx = |t|^{2\beta} \iint_{S_{n-1}\times S_{n-1}} f * \check{f}(ty_1 \quad ty_2)\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2).$$

Utilisons maintenant le lemme 2, nous obtenons,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_{\beta,x}(t)|^2\, dx = C\, |t|^{2\beta} \int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x)\ \frac{[\Delta(|x|,t,t)]^{n-3}}{(t^2|x|)^{n-2}}\ \chi(|x|,t,t)\, dx$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dx = C \int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x) \left[\int_{\frac{|x|}{2}}^{\infty} \frac{t^{2(\beta-n+2)}}{|x|}(4t^2 - |x|^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\right] dx$$

$$= C\left[\int_{1/2}^{\infty} t^{2(\beta-n+2)}\,(4t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x)\, |x|^{2\beta-n+1}\, dx\right].$$

La première intégrale converge car on a $\beta < \frac{n-2}{2}$.

Evaluons maintenant l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^{\infty} h^{2(k-\alpha)-1}\Big(\int_{\mathbb{R}} |u_k(.,h) * F_{\beta,x}(t)|^2\, dt\Big)\, dh\right] dx\ ,$$

où k est le plus petit entier strictement supérieur à α. On a

$$F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau) = \iint_{\mathbb{R}\times S_{n-1}} |t|^{\beta}\ f(x+ty)\, u_k(\tau-t\ ,\ h)\, dt\, d\sigma_{n-1}(y),$$

d'où

$$|F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau)|^2 = \iiiint_{\mathbb{R}^2\times S^2_{n-1}} |t_1 t_2|^{\beta} f(x+t_1y_1)\,\overline{f(x+t_2y_2)}\ \times$$

$$u_k(\tau-t_1,h)\, u_k(\tau-t_2,h)\, dt_1 dt_2\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2)$$

d'où, compte tenu du lemme 1,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau) \right|^2 d\tau = \iiiint_{\mathbb{R}^2 \times S^2_{n-1}} |t_1 t_2|^{\beta} f(x+t_1 y_1)\, \overline{f(x+t_2 y_2)} \times$$

$$u_{2k}(t_1-t_2, 2h)\, dt_1 dt_2 d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-}\,(y_2).$$

Si nous posons

$$A(\beta,h) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} |F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau)|^2\, dx\, d\tau$$

et

$$\varphi(x) = f * \check{f}(x)$$

nous obtenons

$$A(\beta,h) = \iiiint_{\mathbb{R}^2 \times S^{n-1}} |t_1 t_2|^{\beta} \varphi(t_1 y_1 - t_2 y_2) u_{2k}(t_1-t_2, 2h) dt_1 dt_2 d\sigma_{n-1}(y_1) d\sigma_{n-1}(y_2).$$

Utilisons à nouveau le lemme 2, il vient,

$$A(\beta,h) = C \iint_{\mathbb{R}^2} |t\ t_2|^{\beta} u_{2k}(t_1-t_2, 2h) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{(\Delta(|x|, t_1, t_2))^{n-3}}{(|t_1 t_2|\, |x|)^{n-2}} \chi(|x|, t_1, t_2)\, dx \right] dt_1\, dt_2.$$

Utilisant les propriétés d'homogénéité, nous obtenons

$$A(\beta,h) = C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ |x|^{2(\beta-k)+1-n} K\left(\frac{2h}{|x|}\right) dx,$$

où l'on a posé

$$K(\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} |t_1 t_2|^{\beta-n+2} u_{2k}(t_1-t_2, \tau)(\Delta(1,t_1,t_2))^{n-3} \chi(1,t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Admettons provisoirement que l'on a

$$|K(\tau)| \leq C/(1+\tau^{2k+1}).$$

Alors

$$\int_0^\infty h^{2(k-\alpha)-1} A(\beta,h)\, dh \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\ |x|^{2(\beta-k)-n+1} \left[\int_0^\infty \frac{h^{2(k-\alpha)-1}}{1+\left(\frac{2h}{|x|}\right)^{2k+1}} dh \right] dx$$

$$\leq C \left[\int_0^\infty \frac{\tau^{2(k-\alpha)-1}}{1+\tau^{2k+1}}\, d\tau \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, |x|^{2(\beta-\alpha)-n+1}\, dx \right].$$

La première intégrale converge, collectant les deux estimations qui précèdent, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda^{2,2}_\alpha} \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f * \check{f}(x)| \, |x|^{2(\beta-\alpha)-n+1}(1+|x|^{2\alpha})dx.$$

Reste à démontrer la majoration de $|K(\tau)|$. Par changement de variables nous obtenons

$$K(\tau) = C \iint_{\{(s,t)\in R^2;(t^2-1)(1-s^2)>0\}} |t^2-s^2|^{\beta-n+2} u_{2k}(s,\tau) |(t^2-1)(1-s^2)|^{\frac{n-3}{2}} \, ds\, dt.$$

Posons

$$L(s) = \begin{cases} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \displaystyle\int_1^\infty (t^2-s^2)^{\beta-n+2} (t^2-1)^{\frac{n-3}{2}} dt & \text{si } |s| < 1 \\ (s^2-1)^{\frac{n-3}{2}} \displaystyle\int_0^1 (s^2-t^2)^{\beta-n+2}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt & \text{si } |s| > 1, \end{cases}$$

ces intégrales convergent car on a $\beta < \frac{n-2}{2}$ et $n \geq 2$.

La fonction L est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$, le lemme 3 montre qu'elle est intégrable au voisinage de -1 et 1 lorsque l'on a $\beta > -1$ de plus lorsque s tend vers $+\infty$ on a $L(s) = O(s^{2\beta-n+1})$ ce qui montre que L est intégrable. On a

$$K(\tau) = C \int_{-\infty}^{+\infty} u_{2k}(s,\tau) \, L(s) \, ds.$$

Lorsque τ tend vers 0, $K(\tau)$ tend, à un coefficient près, vers la dérivée d'ordre $2k$ de L à l'origine. De plus

$$|K(\tau)| \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{(\tau^2+s^2)^{k+1}} |L(s)| ds$$

ce qui montre que $|K(\tau)|$ est $O(|\tau|^{-2k-1})$ lorsque τ tend vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Démontrons maintenant le premier corollaire. Observons que l'hypothèse

$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ implique que $f * \check{f}$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^n) \cap L^s(\mathbb{R}^n)$ où r et s sont les nombres définis par les égalités $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} - 1$, $\frac{1}{s} = \frac{2}{q} - 1$. Plus précisément on a

$$\|f * \check{f}\|_r \leq \|f\|_p^2 \quad \text{et} \quad \|f * \check{f}\|_s \leq \|f\|_q^2.$$

Appelons r' et s' les exposants conjugués de r et s. On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R})} dx \leq C \|f\|_p^2 \left(\int_{|x|>1} |x|^{(2\beta-n+1)r'} dx\right)^{1/r'}$$
$$+ C\|f\|_q^2 \left(\int_{|x|<1} |x|^{(2\beta-2\alpha-n+1)s'} dx\right)^{1/s'} ;$$

la première intégrale converge si $\beta < n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$, la seconde si $\alpha < \beta + \frac{1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$. On obtient donc un résultat si l'on a

$$-1 < \beta < \inf\left(\frac{n-2}{2}, n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

et

$$0 < \alpha < \beta + \frac{1}{2} - n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right).$$

Démontrons le second corollaire. Soit f un élément de $L^q(\mathbb{R}^n)$, multiplions cette fonction par la fonction indicatrice d'une boule et appliquons lecorollaire précédent en prenant $p = 1$: si α appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\right[$ on peut choisir un β convenable. On conclut en utilisant l'inclusion $\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R}) \subset \Lambda^{\infty,\infty}_{\alpha-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

[1] TAIBLESON, M. H. On the theory of Lipschitz spaces of distributions of Euclidean n-space, I. J. Math. Mech. 13 (1964), 407-480.