FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

<u>M A T H E M A T I Q U E S</u>

CERTIFICAT DE M. G. P.

(section II)

<u>C O U R S   S U R   L E S   S E R I E S</u>

(février, mars 1966)

par B. MORIN

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

MATHEMATIQUES

Certificat de M. G. P.

(section II)

COURS SUR LES SERIES

(février, mars 1966)

Par B. MORIN

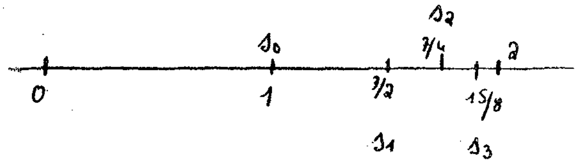
N.B. A côté de références internes et des références aux exercices proposés dans le présent texte, on trouvera quelques références aux problèmes donnés en M.G.P. (sections II et III) durant l'année 1965-1966. Ces problèmes sont désignés par leurs numéros.

1.- Séries numériques.

0.- Quelques exemples.

Exemple 1. : soit la suite :

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = 1 + \frac{1}{2} = g_0 + \frac{1}{2} \\ g_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = g_1 + \frac{1}{4} \\ \vdots \\ g_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = g_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{cases}$$



Il est clair que la suite (g_n) a une limite $g = 2$.

En effet $g_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, la suite $(\frac{1}{2^n})$ tend vers o quand n tend vers ∞.

Plus généralement soit $u \in \mathbb{C}$, la suite :

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = 1 + u = g_0 + u \\ g_2 = 1 + u + u^2 = g_1 + u^2 \\ \vdots \\ g_n = 1 + u + \dots + u^n = g_{n-1} + u^n \end{cases}$$

vérifie la relation :

$$(1 - u)g_n = 1 - u^{n+1}$$

et par suite tend $\begin{cases} \text{vers la limite } g = \frac{1}{1-u} \text{ lorsque } |u| < 1, \\ \text{vers } +\infty \text{ lorsque } u \in \,]1, \infty[. \end{cases}$

Lorsque $u = 1$ $g_n = n$ tend vers $+\infty$

Lorsque $u \in \,]-\infty, -1[$ g_n ne tend vers aucune limite.

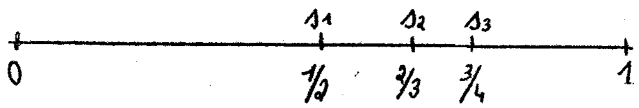
./...

Il en est de même lorsque $|u| > 1$ et arg $u \neq 2\pi$.

<u>Exercice 1</u>. Calculer à l'aide d'une table de logarithmes s_{63} lorsque $u = 2$. Estimer l'erreur commise.

<u>Exemple 2</u>. Soit maintenant la suite :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{2} \\ s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = s_1 + \frac{1}{6} \\ s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = s_2 + \frac{1}{12} \\ \vdots \\ s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = s_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \end{cases}$$



On remarque que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ par suite, que

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ et par récurrence sur n que

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

La suite (s_n) tend donc vers la limite $s = 1$.

./...

<u>Exemple 3.</u> : Considérons maintenant la suite

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 1 + \frac{1}{2} = h_1 + \frac{1}{2} \\ h_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = h_2 + \frac{1}{3} \\ \vdots \\ h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = h_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Cette suite tend-elle vers une limite finie ?

La réponse est négative.

<u>1ère Méthode</u>. Pour le voir, on va remplacer la suite (h_n) par une suite (h'_n) telle que $h'_n \leqslant h_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et on va montrer que $h'_n \longrightarrow \infty$ avec n. Pour cela, remarquons que $\log(1 + x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

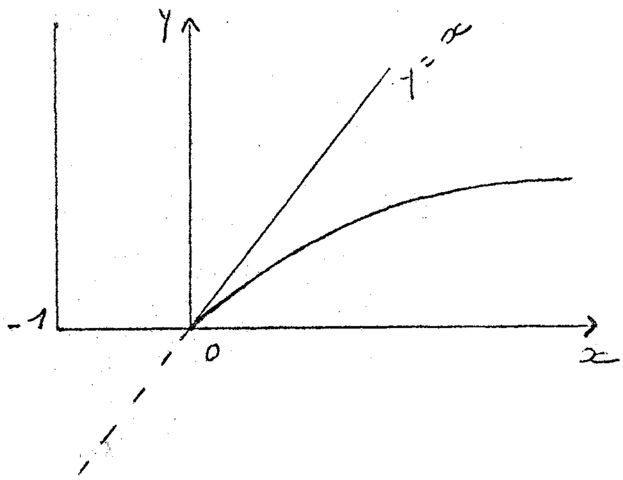
Et par conséquent

$$\frac{1}{n} \geqslant \log(1 + \frac{1}{n})$$

posons $h'_n = \sum_{p=1}^{n} \log(1 + \frac{1}{p})$

$$= \sum_{p=1}^{n} \log(p + 1) - \log p$$

$$= \log(n + 1) \leqslant h_n$$



qui tend donc vers l'infini avec $\log(n + 1)$.

<u>2ème Méthode</u>. On peut également construire une suite (h''_n) de la façon suivante. Considérons le tableau :

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$ .... $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$ ..... $\frac{1}{16}$	$\frac{1}{17}$ ...	... $\frac{1}{2^{p-1}}$	$\frac{1}{2^{p-1}+1}$ ... $\frac{1}{2^p}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ ... $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$ ... $\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$ ...	$\frac{1}{2^{p-1}}$ ... $\frac{1}{2^{p-1}}$	$\frac{1}{2^p}$ ... $\frac{1}{2^p}$
	1 terme	2 termes	4 termes	8 termes	16 termes		2^{p-1} termes

Les nombres de la 2ème ligne sont $\leqslant$ à ceux de la 1ère ligne et par suite la somme des n premiers termes de la 2ème ligne, que nous appellerons h''_n, est inférieure ou égale à la somme des n premiers termes de la 1ère ligne qui vaut h_n par définition. La somme de chacun des paquets de termes de la 2ème ligne vaut $\frac{1}{2}$. En d'autres termes on a :

$$h''_{2^0} = 1$$

$$h''_{2^p} = h''_{2^{p-1}} + \frac{1}{2}$$

et par suite $h''_{2^p} = 1 + \frac{p}{2}$ qui tend vers l'infini avec p. On vient de trouver une sous-suite de la suite croissante (h''_n) qui tend vers l'infini. Et par suite (h''_n) tend vers l'infini. Comme on a $h_n > h''_n$ pour tout n, la suite (h_n) tend elle aussi vers l'infini.

./...

<u>3ème Méthode</u>. Plus généralement on peut remarquer que

$$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}}$$

$$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

Si la suite (h_n) tendait vers une limite finie alors ce serait une suite de Cauchy, c'est-à-dire une suite telle que :

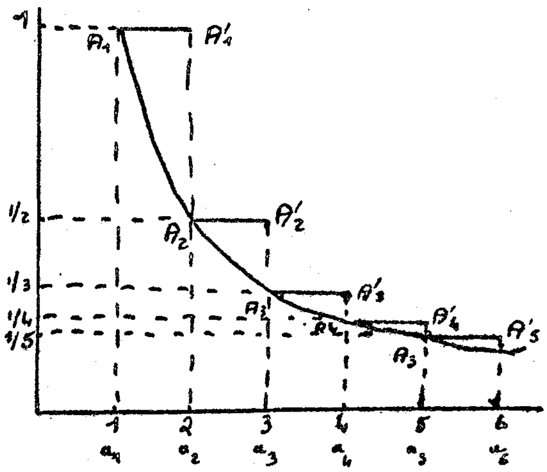
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \geq 1$ tels que quels que soient $p, q \geq n$ on ait $|h_p - h_q| < \varepsilon$.

On vient de montrer que la suite (h_n) n'est pas une suite de Cauchy, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n il existe p et $q \geq n$ tels que $|h_p - h_q| \geq \varepsilon$. Il suffit, en effet, de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1$ $p = 2n$, $q = n$.

<u>4ème Méthode</u>. Introduisons la fonction $u(x)$ définie sur l'intervalle $[1, \infty[$ par $u(x) = \frac{1}{n}$ lorsque $x \in [n, n+1[$ quel que soit l'entier $n > 1$.

On note parfois $u(x) = \frac{1}{E[x]}$ où $E[x] = \sup_{p \leq x} p$ s'appelle la partie entière de x.

C'est une fonction en escalier et $\int_1^{n+1} u(x)dx$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, et les parallèles à l'axe des y passant en $x = 1$ et $x = n+1$.



C'est donc la somme des aires des rectangles $a_p\ a_{p+1}\ A'_p\ A_p$ valant respectivement $\frac{1}{p}$. On voit donc que $\int_1^{n+1} u(x)dx = h_n$.

Le problème consiste à montrer que cette aire tend vers l'infini avec n. Pour cela considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $[1, \infty[$. Comme $f(x)$ est décroissante (puisque $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) on a, pour tout x, $f(x) \leq u(x)$.

Et par conséquent on a comme dans la 1ère méthode

$$h'_n = \int_1^{n+1} f(x)dx = \log(n + 1) \leq \int_1^{n+1} u(x)dx = h_n$$

qui tend vers l'infini.

<u>Exercice 2</u>.

Montrer à l'aide des fonctions auxiliaires

$f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ et $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$, que les suites

(a_n) définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ et

(b_n) définie par $b_1 = 1$ et $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)^3}$

tendent respectivement vers des limites finies a et b et que l'on a pour tout $n \geq 2$

(1) $a - a_n \leqslant \frac{1}{n} = \int_n^{\infty} f_1(x)dx \leqslant a - a_{n-1} \leqslant \int_{n-1}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{n-1}$ et

(2) $b - b_n \leqslant \frac{1}{2n^2} = \int_n^{\infty} f_2(x)dx \leqslant b - b_{n-1} \leqslant \int_{n-1}^{\infty} f_2(x)dx = \frac{1}{2(n-1)^2}$

(remarquer que f_1 et f_2 sont décroissantes et opérer comme dans l'exemple 3 (4e méthode).)

Exemple 4. Etudions maintenant la suite

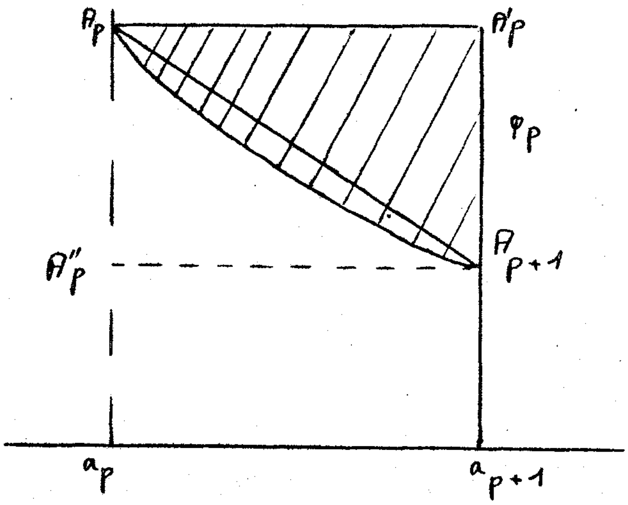
$\gamma_o = o$ et pour tout $n \geqslant 1$ $\gamma_n = h_n - \log(n+1) = h_n - h'_n \geqslant o$

(cf. exemple 3. 1ère et 4ème méthodes)

On a $\gamma_n = \int_1^{n+1} (u(x) - f(x))dx = \sum_{p=1}^{n} \gamma_p - \gamma_{p-1}$

où $\gamma_p - \gamma_{p-1} = \int_p^{p+1} (u(x) - f(x))dx \geqslant o$

(puisque $f(x)$ est décroissante). Ceci montre que la suite (γ_n) est croissante.



Le nombre $\gamma_p - \gamma_{p-1}$ est l'aire de la région φ_p délimitée par l'arc de courbe $\overparen{A_p A_{p+1}}$ et les segments $A_p A'_p$ et $A_{p+1} A'_p$ on a :

(3) $\gamma_p - \gamma_{p-1} < \frac{1}{p(p+1)}$ aire du rectangle $A_{p+1} A'_p A_p A''_p$.

./...

Translatons les φ_p dans le carré

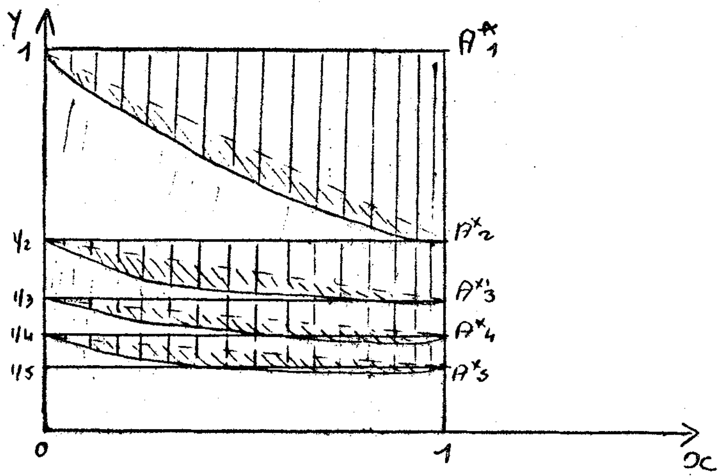
$o \leq x \leq 1, \quad o \leq y \leq 1$ comme

indiqué sur la figure.

Ceci donne une traduction graphique

en termes d'inégalités d'aires de

l'inégalité suivante qui s'obtient



par sommation sur $p \in [1, n]$ de l'inégalité (3) :

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} (\gamma_p - \gamma_{p-1}) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = s_n.$$

où (s_n) est la suite de l'exemple 2. En passant à la limite sur n il vient :

$\gamma \leq s = 1$ aire du carré.

D'autre part comme f est convexe (puisque $f''(x) = \frac{2}{x^3} > o$), on voit également

que $\gamma_p - \gamma_{p-1} > \frac{1}{2p(p+1)}$ aire du triangle $A_p \, A'_p \, A_{p+1}$ et par suite que

$\gamma_n \geq \frac{1}{2} s_n$ d'où $\gamma \geq \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$

<u>Le nombre γ s'appelle la constante d'Euler.</u>

<u>Exemple 5</u>. Evaluation de la somme des inverses des n premiers entiers

pour de grandes valeurs de n. On vient de voir que

$$h_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = \log n + \gamma_{n-1} < \log n + \gamma$$ et que l'on a

./...

$$\frac{1}{2}(s - s_{n-1}) = \frac{1}{2n} \leqslant \gamma - \gamma_{n-1} \leqslant \frac{1}{n} = s - s_{n-1}$$

On peut donc écrire

$h_{n-1} = \log n + \gamma - \frac{1}{2n} - \varepsilon_n$ et affirmer que $\varepsilon_n \in [o, \frac{1}{2n}]$

<u>Exemple 6</u>. Raffinement du procédé (méthode des trapèzes). On a :

$$\varepsilon_n = (\gamma - \gamma_{n-1}) - \frac{1}{2}(s - s_{n-1}) = \lim_{q \to \infty} \sum_{p=n}^{q} \psi_p$$

où $o \leqslant \psi_p = (\gamma_p - \gamma_{p-1}) - \frac{1}{2}(s_p - s_{p-1}) = \int_p^{p+1} \Big(\delta(x) - f(x)\Big) dx \leqslant \frac{1}{2p(p+1)}$

(où $y = \delta(x) = \frac{-x+2p+1}{p(p+1)}$ est l'équation de la corde $A_p\, A_{p+1}$ et où

$\int_p^{p+1} \delta(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right)$ est l'aire du trapèze $a_p\, a_{p+1}\, A_{p+1}\, A_p$).

Le nombre ψ_p est l'aire de la région ψ_p comprise entre l'arc $\widehat{A_p\, A_{p+1}}$ et le segment $A_p\, A_{p+1}$. On verra dans la suite du cours (cf. lemme du § 6/ b) que

$$\frac{1}{12} f''(p+1) = \frac{1}{6(p+1)^3} \leqslant \psi_p = \int_p^{p+1} \left(\frac{-x+2p+1}{p(p+1)} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{2p+1}{2p(p+1)} - \int_p^{p+1} f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{6p^3} = \frac{1}{12} f''(p)$$

En sommant sur $p \in [n, q]$ cette inégalité et en passant à la limite quand $q \to \infty$ on a(avec les notations de l'exercice 2)

$$\lim_{q \to \infty} \sum_{p=n+1}^{q+1} \frac{1}{6p^3} = \frac{1}{6}(b - b_n) = \frac{1}{6}(b - b_{n-1}) - \frac{1}{6n^3} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{6}(b - b_{n-1})$$

$$= \lim_{q \to \infty} \sum_{p=n}^{q} \frac{1}{6p^3}$$

./...

En comparant ces inégalités aux inégalités (2) de l'exercice 2, on aboutit au schéma suivant :

$$\frac{1}{6}(b - b_{n-1}) - \frac{1}{6n^3} \qquad \frac{1}{12n^2} \qquad \frac{1}{6}(b - b_{n-1})$$

$$\frac{1}{6}(b - b_{n-1}) - \frac{1}{6n^3} \qquad \varepsilon_n \qquad \frac{1}{6}(b - b_{n-1})$$

et par suite si l'on pose :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{12n^2} - \varepsilon'_n \quad \text{on peut affirmer que} \quad |\varepsilon'_n| = \frac{1}{6n^3}$$

(noter qu'on ignore le signe de ε'_n).

On en déduit :

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \varepsilon'_n$$

<u>Application</u>. Calcul de h_{10^3} avec une erreur $\leq 10^{-9}$

Dans la formule précédente on a pour $n = 1000$ $|\varepsilon'| = |\varepsilon'_{1000}| < \frac{5}{3}10^{-10}$

dans les tables on trouve

$$\gamma = 0{,}57\ 721\ 56\ 649\ 01132 \ldots$$

$$\frac{1}{M} = \log_e 10 = 2{,}30\ 258.50\ 929.94\ 045 \ldots$$

d'autre part

$$\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$$

./...

(cf. Fletcher An. Index of Mathematical tables (2ème Edition Blackwell Oxford 1962 vol. 1 p. 136 et 133)).

On a donc :

$$h_{10^3} = \frac{3}{M} + \gamma + 5\times 10^{-4} - \frac{1}{12}10^{-6} + \varepsilon'$$

$\frac{3}{M} = 6,\ 90\ 775\ 52\ 790 + 3\ \varepsilon_1$ avec $|\varepsilon_1| \leqslant \frac{1}{2}10^{-10}$

$\gamma = 0,\ 57\ 721\ 56\ 649 + \varepsilon_2$ $\quad |\varepsilon_2| \leqslant \frac{1}{2}10^{-10}$

$5.10^{-4} = 0,\ 00\ 05\ 00\ 000$ $\quad |\varepsilon_3| \leqslant \frac{1}{2}10^{-10}$

$-\frac{1}{12}10^{-6} = -\ 0,\ 00\ 000\ 00\ 833 + \varepsilon_3$

d'où une erreur totale ε telle que

$$|\varepsilon| \leqslant \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{3}\right) 10^{-10} = \frac{25}{6}10^{-10} \leqslant \frac{1}{2}10^{-9}$$

En effectuant les calculs il vient

$$h_{10^3} = 7,\ 48\ 547\ 08\ 606$$

En forçant l'avant dernière décimale on a donc $h_{10^3} = 7,\ 48\ 547\ 0861.$

Cette opération introduit une erreur supplémentaire $\frac{1}{2}10^{-9}$ d'où le résultat cherché avec la précision demandée.

<u>Exemple 7.</u> Considérons maintenant la suite :

$l_1 = \log 1 = o$

$l_2 = \log 1 + \log 2 = \log 2 = l_1 + \log 2$

.
.
.

$l_n = \log 1 + \dots + \log_n = l_{n-1} + \log n.$

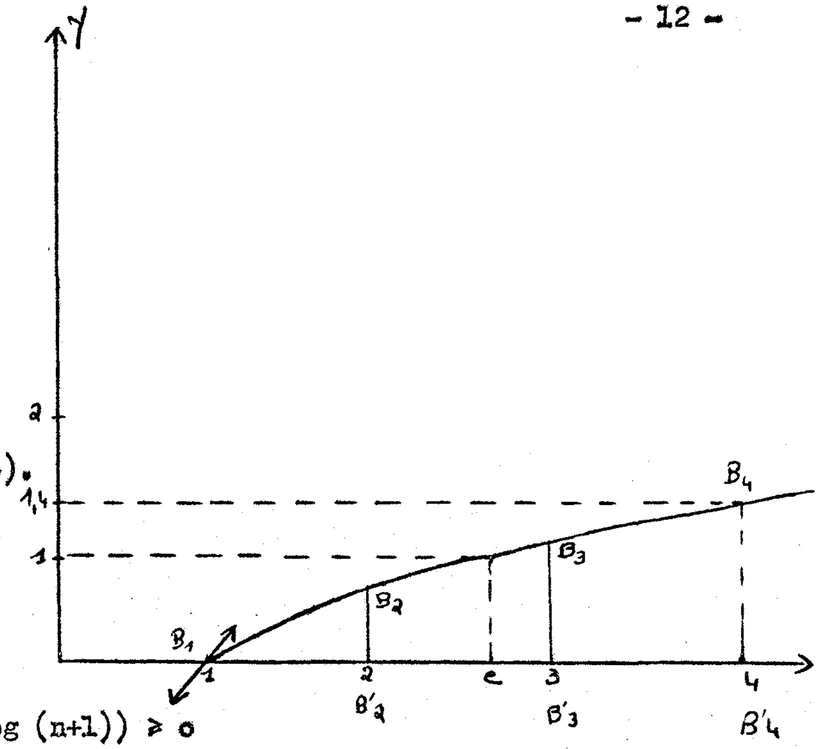
Cette suite tend vers $+\infty$

puisque $\log n \longrightarrow +\infty$.

La fonction $g(x) = \log x$ étant

concave (puisque $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$).

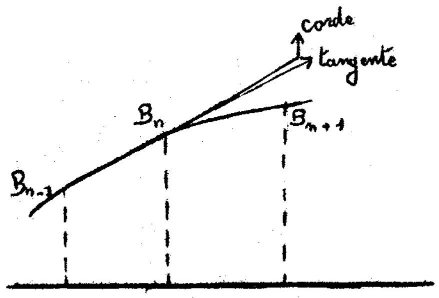
On voit comme précédemment que

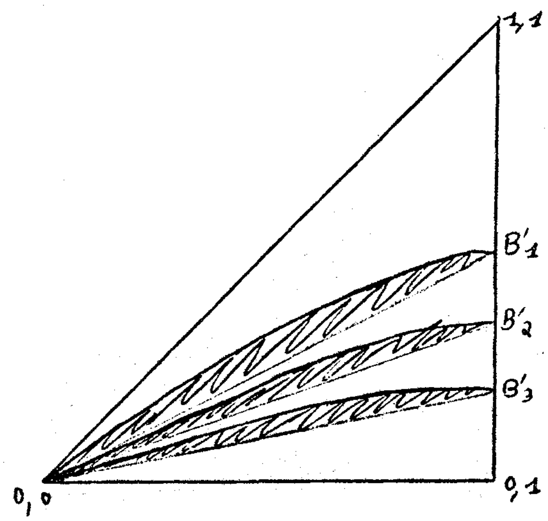


$$\psi'_n = \int_n^{n+1} \log x \, dx - \frac{1}{2}(\log n + \log (n+1)) \geq 0$$

(puisque $\frac{1}{2}(\log n + \log (n+1))$ est l'aire du trapèze $B'_n \, B'_{n+1} \, B_{n+1} \, B_n$.

Le nombre ψ'_n est l'aire de la région ψ'_n comprise entre l'arc $\widehat{B_n \, B_{n+1}}$ et la corde $B_n \, B_{n+1}$. En outre la concavité de $\log x$ entraîne que la pente de la tangente à son graphe en B_n est inférieure ou égale à la pente de la corde $B_{n-1} \, B_n$ (pour le montrer passer à la limite sur la condition ii) du Problème 11).





./...

suite p. 12 bis

Ceci permet de translater les ψ'_n à l'intérieur du triangle rectangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sans qu'elles empiètent les unes sur les autres. Comme l'aire du triangle considéré vaut $\frac{1}{2}$, on voit que la suite $(k_n) = \sum_{p=1}^{n} \psi'_p$ tend vers une limite $k \in [0, \frac{1}{2}]$. D'autre part

(puisque $\int_1^x \log (t)dt = x \log x - x + 1$) on a :

$$k_{n-1} = \int_1^n \log x \, dx - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2}\big(\log p + \log (p+1)\big)$$

$$= n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n - l_n \quad \text{d'où}$$

(4) $k - k_{n-1} = k - 1 - (n + \frac{1}{2}) \log n + n + l_n$

tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$.

On verra dans la suite du cours (cf. Lemme du § 6 b) que

$$-\frac{1}{12} g'' (p+1) = \frac{1}{12(p+1)^2} = \int_p^{p+1} g(x)dx - \frac{1}{2}\big(\log p + \log(p+1)\big) = k_p - k_{p-1}$$

$$= \psi'_p \leqslant \frac{1}{12p^2} = -\frac{1}{12} g''(p).$$

En sommant sur $p \in [n, q]$ l'inégalité précédente et en passant à la limite quand $q \longrightarrow \infty$ on a (avec les notations de l'exercice 2) :

$$\lim_{q \to \infty} \sum_{p=n+1}^{q+1} \frac{1}{12p^2} = \frac{1}{12}(a - a_n) = \frac{1}{12}(a - a_{n-1}) - \frac{1}{12n^2} \leqslant k - k_{n-1} \leqslant \frac{1}{12} (a - a_{n-1})$$

$$= \lim_{q \to \infty} \sum_{p=n}^{q} \frac{1}{12p^2}$$

./...

En comparant ces inégalités aux inégalités (1) de l'exercice 2 on aboutit au schéma suivant :

$$\frac{1}{12}(a - a_{n-1}) - \frac{1}{12n^2} \qquad \frac{1}{12n} \qquad \frac{1}{12}(a - a_{n-1})$$

$$\frac{1}{12}(a - a_{n-1}) - \frac{1}{12n^2} \qquad k - k_{n-1} \qquad \frac{1}{12}(a - a_{n-1})$$

Et par suite si l'on pose $k - k_{n-1} = \frac{1}{12n} + \eta_n$ on peut affirmer

$$|\eta_n| \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

Exemple 8. Formule de Stirling.

La formule de Taylor à l'ordre 1, avec reste de Lagrange, donne

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}(e^{\theta x})$ où $\theta \in]0, 1[$ et par suite (puisque la fonction e^x est croissante), lorsque $x \in [0,1]$, on a

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{e}{2} x^2.$$

Puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant k - k_n \leqslant \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$1 + \frac{1}{12n} + \eta_n \leqslant e^{k - k_{n-1}} \leqslant e^{\frac{1}{12n} + \eta_n} \leqslant 1 + \eta_n + \frac{1}{12n} + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{12n} + \eta_n\right)^2$$

./...

En utilisant les inégalités

$$|\eta_n| \leqslant \frac{1}{12n^2}, \quad e \leqslant 3, \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \leqslant n \quad (\text{pour} \quad n \geqslant 1)$$

et en posant

$$\alpha_n = e^{k - k_{n-1}} = 1 + \frac{1}{12n} + \beta_n$$

on peut affirmer que

$$|\beta_n| \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)^2\right) = \frac{5}{24n^2} < \frac{1}{4n^2}$$

d'où, en exponentiant (4) il vient :

$$(5) \quad n\,! = e^{1-k}\, n^{n + \frac{1}{2}}\, e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \beta_n\right)$$

avec $e^{1-k} = K \in [\sqrt{e}, e]$.

<u>Exemple 9</u>. Calcul de $K = e^{1-k}$ (Intégrale de Wallis)

Posons $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ c'est une suite décroissante de nombres réels et positifs. On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ et par intégration par parties

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n.$$

soit $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$ et par récurrence

$$I_{2n-1} = \frac{2^n\, n\,!}{2n.3.5.\ldots.(2n-1)} \geqslant$$

$$I_{2n} = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n\, n\,!}\, \frac{\pi}{2} \geqslant$$

$$I_{2n+1} = \frac{2^n\, n\,!}{3.5.\ldots.(2n+1)}$$

./...

d'où

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(3.5\ldots(2n-1))^2} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{2^{4n}(n!)^4}{2n((2n)!)^2} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n(3.5\ldots\ldots(2n-1))^2}$$

Ce qui montre que le 2e membre de cette inégalité tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $n \to \infty$.

d'où en remplaçant les factorielles par leurs expressions tirées de (5) on a

$$\frac{\alpha_n^4}{\alpha_{2n}^2} \times \frac{2^{4n}K^4 n^{4n+2}\, e^{-4n}}{2^n K^2 (2n)^{4n+1} e^{-4n}} = \frac{\alpha_n^4}{\alpha_{2n}^2} \times \frac{K^2}{4}$$

tend vers $\frac{\pi}{2}$ et comme $\frac{\alpha_n^4}{\alpha_{2n}^2}$ tend vers 1 quand n tend vers ∞

on en déduit $K = \sqrt{2\pi}$

et par suite

$$\boxed{n\,! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \beta_n\right) \quad \text{avec} \quad |\beta_n| \leq \frac{1}{4n^2}}$$

c'est la formule de Stirling.

<u>Exercice 3</u>. Avec quelle incertitude peut-on calculer (1000) ! à l'aide de la formule de Stirling en utilisant une table de log. à 5 décimales.

<u>Exercice 4</u>. La suite $\mu_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n\,!}$ converge-t-elle, si oui calculer sa limite.

./...

1.- Position du problème.

Une suite est une application de l'ensemble N (ou de l'ensemble N^* ou plus généralement de l'ensemble des entiers $n \geq n_o \in Z$ donné) dans un ensemble E.

Lorsque E est un espace vectoriel, l'ensemble S des suites $\underline{u} : N \longrightarrow E$ est lui aussi un espace vectoriel pour la loi d'addition

$\underline{u} + \underline{v} = (u_o, u_1, \dots, u_n, \dots) + (v_o, v_1, \dots, v_n, \dots) = (u_o + v_o, \dots, u_n + v_n, \dots)$

($\underline{u}, \underline{v} \in S$, c'est-à-dire $u_i, v_i \in E$)

et pour l'homothétie :

$\lambda\underline{u} = \lambda(u_o, u_1, \dots, u_n, \dots) = (\lambda u_o, \lambda u_1, \dots, \lambda u_n, \dots)$

(λ scalaire) (on vérifiera à titre d'exercice que ces deux lois satisfont aux axiomes des espaces vectoriels). Dans la suite de ce chapitre on aura toujours $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsqu'une suite $u = u_n$ n'est définie qu'à partir d'un entier $n_o > o$ on pourra toujours convenir que $u_o = u_1 = \dots = u_{n_o - 1} = o$ et raisonner comme si $\underline{u}$ était définie sur N tout entier.

Quel que soit $i \in N$, désignons par $\underline{e}_i$ la suite dont tous les termes sont nuls à l'exception du i-ième qui vaut 1.

./...

$\underline{e}_o = (1, 0, 0, \ldots)$

$\underline{e}_1 = (0, 1, 0, \ldots) \ldots$

Le système $(\underline{e}_i)$ est libre dans S mais il n'engendre pas S. En effet, une combinaison linéaire des $\underline{e}_i$ est de la forme $\sum\limits_{i=o}^{\infty} u_i \underline{e}_i$ (où les $u_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux). Pour qu'une suite $\underline{u}$ soit engendrée par les $\underline{e}_i$, il faut et il suffit que tous ses termes soient nuls à partir d'un certain rang. Une telle suite sera dite une <u>suite finie</u>.

Sur l'espace vectoriel S_f des suites finies considérons la forme linéaire $\sum$ définie par $\sum(\underline{e}_i) = 1$ pour tout $i \in N$.

Pour une suite finie (u_n), la forme $\sum$ vaut :

$$\sum(u_o\underline{e}_o + u_1\underline{e}_1 + \ldots) = u_o + u_1 + \ldots = \sum_{i=o}^{\infty} u_i$$

expression qui a un sens puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'$u_i \neq o$.

Si l'on cherche à étendre $\sum$ à S tout entier on se heurte au fait qu'il est impossible de définir algébriquement $\sum\limits_{i=o}^{\infty} u_i$ pour une infinité d'$u_i \neq o$.

Néanmoins par des procédés de passage à la limite, on peut donner, dans certains cas, un sens à l'expression précédente.

C'est l'objet de la <u>théorie des séries</u>.

./...

Le sujet du présent cours est l'étude d'un de ces procédés : la méthode des sommes partielles.

2.- Rappel de quelques définitions.

L'expression " à partir d'un certain rang ..." signifiera :

" il existe $n_o \in N$ tel que pour tout $n \geq n_o$ on ait ..."

Exemple 1. 2 suites (u_n) et (v_n) sont dites égales à partir d'un certain rang, si l'on a la relation :

il existe n_o tel que $n \geq n_o \Longrightarrow u_n = v_n$

c'est-à-dire si la suite $(u_n - v_n)$ est une suite finie.

Exercice 5. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence sur S. Montrer que la relation "à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ " est une relation d'ordre sur S.

Exemple 2. Dire qu'une suite (u_n) tend vers une limite u revient à dire que quelque soit $\varepsilon > o$, la suite $(|u_n - u|) \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Rappelons que lorsque les suites (u_n) et (v_n) tendent respectivement vers u et v, la suite $(u_n + v_n)$ tend vers u + v et que la suite (λu_n) tend vers λu. Ce qui exprime que l'ensemble S_c des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de S et que l'opération de passage à la limite pour

./...

une suite convergente (u_n) est une forme linéaire sur S_c.

Remarque importante. Lorsque les suites de nombres réels (u_n) et (v_n) tendent respectivement vers des limites u et v, si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$ on peut en conclure que $u \leq v$; mais si, à partir d'un certain rang, l'on a $u_n < v_n$, on ne peut en déduire que $u < v$.

Relations de comparaison.

a) on dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) et l'on note :

$$u_n = O(v_n)$$

s'il existe $k \in R^+$ et $n_o \in N$ tels que pour tout $n \geq n_o$ on ait

$$|u_n| \leq k\ |v_n|.$$

Lorsque $v_n \neq o$ quel que soit n, cela revient à dire qu'à partir d'un certain rang

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq k$$

ou encore qu'il existe $k' \in R^+$ tel que

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq k' \quad \text{quel que soit} \quad n \in N.$$

b) on dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) et l'on note

$$u_n = o(v_n)$$

si pour tout $\varepsilon > o$, il existe $n_o \in N$ tel que, quel que soit $n \geq n_o$ on ait

./...

$|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$

lorsque $v_n \neq o$ pour tout n, cela revient à dire que le rapport $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow o$.

c) on dit que la suite u_n est <u>équivalente</u> à la suite v_n et l'on note $u_n \sim v_n$ si l'on a la relation $u_n - v_n = o(v_n)$

lorsque $v_n \neq o$ pour tout n, cela revient à dire que $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

<u>Exercice 6</u>. Montrer que la relation $u_n = O(v_n)$ est réflexive et transitive, mais qu'elle n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Montrer que la relation "$u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$" est une relation d'équivalence sur S.

Montrer que si $u_n = O(v_n)$ et $u'_n = O(v_n)$, alors $u_n + u'_n = O(v_n)$ et que, pour tout $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $\lambda u_n = O(v_n)$ et par conséquent que l'ensemble des suites (u_n) dominées par (v_n) est un sous-espace vectoriel de S.

<u>Exemples</u>. (1) l'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n = O(o)$ est l'ensemble S_f des suites finies.

(2) l'ensemble S_b des suites (u_n) telles que $u_n = O(1)$ est l'ensemble des suites dont tous les termes sont majorés en valeur absolue par une constante (<u>suite bornée</u>).

./...

(3) l'ensemble S_l des suites (u_n) pour lesquelles il existe $k \in N$ tel que $u_n = O(n^k)$ s'appelle l'ensemble des suites à <u>croissance lente</u>.

Vérifier que c'est encore un sous-espace vectoriel de S.

(4) l'ensemble des suites (u_n) telles que pour tout $k \in N$ on ait $u_n = O(\frac{1}{n^k})$ s'appelle l'ensemble S_r des suites à <u>décroissance rapide</u>.

Montrer que c'est encore un sous-espace vectoriel de S.

<u>Exercice 7.</u> Montrer que la relation

$u_n = o(v_n)$ entraine la relation $u_n = O(v_n)$

Montrer que les relations

$u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n)$

Montrer que les relations

$u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n)$.......

Montrer que la relation

$u_n = o(v_n)$ est transitive mais qu'elle n'est pas réflexive.

Montrer que l'ensemble des suites (u_n) négligeables devant une suite (v_n) fixée est un sous-espace vectoriel de l'ensemble S.

<u>Exemple.</u> L'ensemble S_o des suites (u_n) telles que $u_n = o(1)$ est l'ensemble des suites qui tendent vers zéro.

Exercice 8. Montrer que la solution $u_n - v_n = o(v_n)$ entraine

$u_n - v_n = o(u_n)$

Utiliser cette propriété pour montrer que $u_n \sim v_n$ est une relation symétrique et transitive.

En déduire que c'est une relation d'équivalence.

Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors on a $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Exemple. L'ensemble S_c des suites convergentes est la réunion de l'ensemble S_o de l' exemble précédent et de l'ensemble des suites (u_n) tel que $u_n \sim k$ constante $\neq o$.

Diagramme récapitulatif des sous-espaces vectoriels S considérés

$S_f \subset S_r \subset S_o \subset S_c \subset S_b \subset S_1 \subset S$

Exercice 9.

α) Montrer que les relations

$u_n = O(v_n)$ et $u'_n = O(w_n)$ entrainent la relation $u_n u'_n = O(v_n w_n)$

Montrer que les relations

$u_n = O(v_n)$ et $u'_n = o(w_n)$ entrainent la relation $u_n u'_n = o(v_n w_n)$

Montrer que les relations

$u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim w_n$ entrainent la relation $u_n u'_n \sim v_n w_n$

./...

β) Montrer que si (n_p) est une suite d'entiers strictement croissante la relation $u_n = O(v_n)$ entraine la relation $u_{n_p} = O(v_{n_p})$, (et de même en remplaçant O par o) et que $u_n \sim v_n$ entraine $u_{n_p} \sim v_{n_p}$.

Exercice 10.

α) Montrer que si $v_n > o \quad v_n \to \infty$ et que si $u_n = o(v_n)$ alors $e^{u_n} = o(e^{v_n})$.

Montrer que si $u_n > o$, $v_n > o$ et $v_n \to \infty$, la relation $u_n \sim v_n$ entraine la relation $\log u_n \sim \log v_n$.

β) Montrer que si $\alpha, u_n, v_n > o$ les relations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ entrainent respectivement les relations $u^{\alpha}_n = O(v_n^{\alpha})$, $u^{\alpha}_n = o(v_n^{\alpha})$ et $u^{\alpha}_n \sim v_n^{\alpha}$. Que deviennent ces relations lorsque $\alpha < o$.

3.- Sommes partielles d'une suite, convergence d'une série.

a) Sommes partielles.

A toute suite $(u_n) \in S$ on associe la suite $(s_n) \in S$ des sommes partielles de (u_n) définie par $s_n = u_o + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=o}^{n} u_i$.

Si $(v_n) \in S$ et si $t_n = \sum_{i=o}^{n} v_i$ est la suite des sommes partielles de (v_n), la suite des sommes partielles de $(u_n + v_n)$ est la suite $(s_n + t_n)$. Quel que soit $\lambda \in K$ la suite des sommes partielles de (λu_n) est la suite (λs_n).

./...

En d'autres termes l'opération qui à toute suite associe la suite de ses sommes partielles est une application linéaire de S dans lui-même. Cette application est bijective et admet pour inverse l'application définie comme suit :

Soit (s_n) une suite arbitrairement donnée on lui associe la suite $u_o = s_o$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour chaque $n \geqslant 1$ (<u>suite des différences</u>).

<u>Remarque</u>. Lorsqu'une suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_o on la prolonge par zéro pour tout $n \in [o, n_o - 1]$. La suite de ses sommes partielles vaut alors $s_n = o$ lorsque $o \leqslant n \leqslant n_o - 1$ et

$$s_n = \sum_{i=n_o}^{n} u_i$$

b) <u>Notion de convergence</u>.

<u>Définitions</u>.

1) la suite (s_n) des sommes partielles d'une suite $(u_n) \in S$ s'appelle <u>la série de terme général u_n</u>.

2) lorsque $s_n = \sum_{i=o}^{n} u_i$ tend vers une limite finie s, on dit que la série <u>converge</u> et que s est sa somme. On note :

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n} u_i = \sum_{i=o}^{\infty} u_i .$$

3) lorsque la suite (s_n) ne tend vers aucune limite finie s on dit

./...

que la série <u>diverge</u>. Alors l'expression $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ n'a aucun sens.

4) cependant lorsque $K = \mathbb{R}$ on exprime le fait que $s_n \longrightarrow +\infty$ par la notation $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = +\infty$. Avec cette convention une série de terme général $u_n \geq 0$ est une suite croissante admettant toujours une somme finie ou infinie.

5) on dit que deux séries sont de <u>même nature</u> si elles sont simultanément convergentes ou divergentes.

6) lorsque u_n est le terme général d'une série convergente de somme s, la suite $r_n = s - s_{n-1}$ (où l'on a posé $s_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$) s'appelle <u>la suite des restes</u> de la série de terme général u_n. Noter que cette suite tend vers zéro et qu'elle décroît lorsque tous les $u_n \geq 0$.

<u>Exemples</u>. La suite des sommes partielles de la suite $u_n = u^n$ est la suite g_n, de l'exemple 1 § 0. On l'appelle la <u>série géométrique</u>. On a vu

qu'elle converge pour $|u| < 1$,

qu'elle diverge pour $|u| \geq 1$,

et que sa somme est $+\infty$ quand $u \geq 1$.

./...

La suite $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ admet pour suite des différences la suite $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (cf. exemple 2 § 0).

On a vu (§ 0 exemple 3) que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (c'est la série harmonique).

Remarques.

1) si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes, de sommes respectives s et t, la série de terme général λu_n est convergente et de somme λs. En d'autres termes l'ensemble des suites (u_n) dont la série associée converge est un sous-espace vectoriel de S noté S_σ.

La suite des restes de la série u_n dépend linéairement de la suite $(u_n) \in S_\sigma$.

2) si deux suites sont égales à partir d'un certain rang les séries associées sont de même nature.

En effet, soit (s_n) et (t_n) les suites des sommes partielles des suites données ; la suite $(t_n - s_n)$ est constante à partir d'un certain rang.

3) quel que soit $p \in Z$ la série de terme général u_n et la série de terme général $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n+p < 0 \\ u_{n+p} & \text{si } n+p \geq 0 \end{cases}$

(obtenue en décalant les indices) sont de même nature.

./...

c) <u>la théorie des Séries se propose les buts suivants</u>.

i) déterminer si une série donnée est convergente ou non.

ii) lorsque la série est divergente calculer (de façon exacte ou approchée) les termes s_n de la suite de ses sommes partielles, étudier le comportement de la suite (s_n) quand $n \longrightarrow \infty$ (au moyen de développement limité).

Exemple : calcul exact : lorsque $u_n = 1$ pour $n \geqslant 1$, on a $s_n = n$.

lorsque $u_n = n$ on a $s_n = \frac{n(n+1)}{2} \sim n^2$

et plus généralement lorsque $u_n = C_n^k$ on a $s_n = C_{n+1}^{k+1} \sim n^{k+1}$

lorsque $u_n = n^2$ on a $s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

on a donné au début de l'année des formules de récurrence permettant de calculer s_n lorsque $u_n = n^k$ (k entier $\geqslant 1$) et par suite lorsque $u_n = P(n)$ est un polynôme en n.

calcul approché : (cf. § 0 exemples 5 à 7).

iii) lorsque la série est convergente calculer sa somme.

Lorsque le calcul exact est impossible donner une majoration du reste r_n (définition 6) en vue d'une estimation de $s = r_n + s_{n-1}$; dans tous les cas étudier le comportement de la suite (r_n) quand $n \longrightarrow \infty$ au moyen de développement limité (rapidité de la convergence).

./...

Exemple : la série géométrique converge plus rapidement que la série du § o exemple 2. Les exemples 4 à 6 (§ o/) étudient le comportement du reste $\gamma - \gamma_{n-1}$, l'exemple 7 celui du reste $k - k_{n-1}$.

d) Premier résultat.

Théorème 1. Pour qu'une série soit convergente il faut que son terme général u_n tende vers zéro. En d'autres termes on a $S_\sigma \subset S_o$.

En effet si la suite (s_n) des sommes partielles tend vers une limite finie s, alors c'est une suite de Cauchy et par conséquent pour tout $\varepsilon > o$, il existe n_o tel que, quel que soit $n > n_o$ on ait $|s_n - s_{n-1}| = |u_n| \leqslant \varepsilon$ ce qui exprime que u_n tend vers zéro.

Remarque. Cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple de la série harmonique dont le terme général est $\frac{1}{n}$ (cf. exemple 3 § o).

e) Convergence absolue.

A toute suite (u_n) on peut associer la suite de ses valeurs absolues $(|u_n|)$. (Ce n'est pas une application linéaire).

Théorème 2. Si $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| < \infty$, alors la série du terme général u_n est convergente.

(la réciproque est fausse comme on le verra plus loin).

./...

En effet la suite $s'_n = \sum_{j=0}^{n} |u_j|$ est une suite de Cauchy puisqu'on a supposé qu'elle tend vers une limite finie. Il en est de même de la suite $s_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$ car quels que soient $p, q \in N$ on a $|s_p - s_q| \leq |s'_p - s'_q|$.

Définition. Une série de terme général u_n tel que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$ est dite absolument convergente.

Exercice 11. Montrer que l'ensemble S_s des suites dont les séries sont absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de S. Les théorèmes 1 et 2 montrent que l'on a la suite d'espaces vectoriels emboités suivante :

$S_{f_i} \subset S_s \subset S_\sigma \subset S_o$.

Le théorème 2 suggère de s'intéresser en 1er lieu à la convergence des séries dont le terme général u_n est positif.

4.- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.

a) Critère de 1ère espèce.

Théorème 3. (théorème principal) : Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que $(v_n) \neq o$ et $v_n \geq o$ pour tout $n \in N$ et $u_n = O(v_n)$.

α) si (s_n) et (t_n) désignent les suites des sommes partielles de (u_n) et (v_n) respectivement alors on a $s_n = O(t_n)$.

./...

β) La convergence de la série de terme général v_n entraine la convergence absolue de la série de terme général u_n. Cela revient à dire que si

$$\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty \quad \text{alors} \quad \sum_{n=o}^{\infty} v_n = \infty.$$

En outre si (r_n) et (ρ_n) sont les suites des restes des séries de terme général u_n et v_n on a : $r_n = O(\rho_n)$.

Démonstration.

α) par hypothèse il existe un entier n_o tel que $v_{n_o} \neq o$ et un entier n_1 (que l'on peut supposer $\geq n_o$) tel que pour un nombre réel $k \geq o$ on ait $|u_n| \leq kv_n$ pour tout $n \geq n_1$ et par suite tel que

$$|s_n - s_{n_1}| \leq k(t_n - t_{n_1})$$

$$\text{d'où } |s_n| \leq |s_{n_1}| + |s_n - s_{n_1}| \leq |s_{n_1}| + k(t_n - t_{n_1})$$

$$\leq k't_{n_1} + k'(t_n - t_{n_1}) = k't_n$$

où l'on a posé $k' = \sup\left(k, \frac{|s_{n_1}|}{t_{n_1}}\right)$

β) posons $s'_n = \sum_{i=o}^{n} |u_i|$. Comme on a $|u_n| = O(v_n)$ on déduit de α) qu'il existe $k'' \in R^+$ et $n_2 \in N$ tels que pour tout $n \geq n_2$ on ait $s'_n \leq k''t_n$.

La suite $(k''t_n)$ étant bornée par hypothèse il en est de même de la suite croissante (s'_n) qui est donc convergente. Avec les notations de α) pour tout

./..

$n > n_1$ et tout $p \geq n$ on a :

$$|s_p - s_{n-1}| \leq |s'_p - s'_{n-1}| \leq k(t_p - t_{n-1})$$

et en désignant par s et t les limites respectives des suites (s_n) et (t_n) on a en passant à la limite sur p,

$$|r_n| = |s - s_{n-1}| \leq k(t - t_{n-1}) = k \ \rho_n.$$

Exemple : on a pour tout nombre réel $\alpha \geq 2$

$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ terme général d'une série convergente (cf. exemple 2 § 0/) et par conséquent $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \text{pour} \quad \alpha \in [2, \infty[}$

Pour tout nombre réel $\alpha \leq 1$ on a : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ terme général d'une série divergente (cf. exemple 3 1ère méthode § o/) et par conséquent

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty \quad \text{pour} \quad \alpha \in]-\infty, 1[}$$

Conséquence, avec les notations de l'exercice 6 (exemple) et de l'exercice 11 on a l'inclusion $S_r \subset S_s$.

On verra au § 5/ quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \in]1, 2[$.

<u>Corollaire 1</u>. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors les séries de terme général u_n

et v_n sont de même nature.

Corollaire 2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes positifs et si il existe $k > o$ tel que $u_n \sim k\, v_n$ alors les séries associées sont de même nature.

Traiter l'exercice 12 ci-dessous.

b) Critère de seconde espèce.

Théorème 4. Soient (u_n) et (v_n) des suites à termes strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang on ait :

(1) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors $u_n = O(v_n)$ (et l'on peut appliquer le théorème 3).

Démonstration. Soit n_o l'entier à partir duquel (1) est vérifiée on a alors $u_{n_o+1} \leqslant \frac{u_{n_o}}{v_{n_o}} v_{n_o+1}$

et par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$ $u_{n_o+p} \leqslant \frac{u_{n_o}}{v_{n_o}} v_{n_o+p}$

d'où le théorème.

Remarque.

Il serait faux de croire que l'hypothèse $u_n = O(v_n)$ implique l'hypothèse du théorème 4 comme le montre l'exemple des suites (u_n) et (v_n)

définies pour $n \geqslant 1$ par $u_{2p} = \frac{1}{2^p}$ et $u_{2p+1} = \frac{1}{3^p}$ et $v_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$.

En effet, on a bien $u_n = O(v_n)$ mais le rapport $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^p$ tend vers l'infini avec p, tandis que le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ reste constamment égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, comme on a $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ l'exemple 1 du § o/ montre que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$, le théorème 3 permet d'en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$, tandis que le théorème 4 ne permet pas de conclure.

c) <u>Théorème du développement limité</u>.

<u>Théorème 5</u>. Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in N$ et $u_n = o(v_n)$

α) si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente et l'on a $r_n = o(r'_n)$ en désignant par (r_n) et (r'_n) les suites des restes des séries de terme général respectif u_n et v_n.

β) si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \infty$ et si (s_n) et (t_n) désignent les suites des sommes partielles de (u_n) et (v_n) respectivement alors on a $s_n = o(t_n)$.

<u>Démonstration</u>.

α) si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$ et le théorème 3 montre que la

./...

série de terme général u_n est absolument convergente.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, quel que soit $n \geq n_0$ on ait :

$$|r_n| = \lim_{p\to\infty} \left|\sum_{i=n}^{p} u_i\right| \leq \lim_{p\to\infty} \sum_{i=n}^{p} |u_i| \leq \lim_{p\to\infty} \sum_{i=n}^{p} \varepsilon v_i$$

$$= \varepsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i=n}^{p} v_i = \varepsilon r'_n$$

β) comme par hypothèse pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que, quel que soit $p > n_1$ on ait $|u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_p$ on en déduit pour tout $n > n_1$ par sommation sur l'entier $p \in [n_1 + 1, n]$ que

$$|s_n - s_{n_1}| \leq \sum_{p=n_1+1}^{n} |u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t_n - t_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} t_n.$$

Dire que la série de terme général v_n est divergente signifie, en particulier, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_2 tel que, quel que soit $n \geq n_2$ on ait $|s_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2} t_n$.

Posons $n_0 = \max. (n_1 + 1, n_2)$; alors pour tout $n \geq n_0$ on a $|s_n| \leq |s_{n_1}| + |s_n - s_{n_1}| \leq \varepsilon t_n$.

<u>Corollaire</u>. Soient (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels et positifs telles que $(u_n) \sim (v_n)$.

α) si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$ et l'on a avec les notations du

./...

théorème $(r_n) \sim (r'_n)$.

β) si $\sum_{n=o}^{\infty} v_n = \infty$ alors avec les notations du théorème $s_n \sim t_n$.

En effet par définition $|u_n - v_n| = o(v_n)$ et d'après le théorème, dans le cas β) on a $|s_n - t_n| \leq \sum_{p=o}^{n} |u_p - v_p| = o\,(t_n)$

de même dans le cas α) :

$$|r_n - r'_n| \leq \lim_{p \to \infty} \sum_{q=n}^{p} |u_q - v_q| = o\,(r'_n).$$

<u>Remarque</u>. Le théorème 5 permet, lorsqu'on connait un développement limité de la suite (u_n) de calculer un développement limité de la suite (s_n) de ses sommes partielles ou de la suite (r_n) de ses restes (suivant les cas) du type de ceux donnés au § 0/ exemples 4 à 7. Cela est possible notamment lorsqu'à partir d'un certain rang $u_n = R(n)$ (où R est une fraction rationnelle en n).

$$u_n = C^{n^{\frac{\alpha}{k}}},\quad u_n = \log\left(1 + \frac{\alpha}{n^k}\right),\quad u_n = \left(1 + \frac{\beta}{n^k}\right)^{\alpha}$$

$$u_n = \log\left(1 + \alpha \log\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\right)$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$) etc ....

Il suffit, en effet, pour cela de connaître un développement limité des suites

$$\zeta_n(k) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^k}$$

($k \in \mathbb{Z}$ fixé). On a vu au § 3/ c) comment le faire lorsque $k \leq o$

./...

l'exemple 6 § c/ donne un développement limité de $\zeta_n(1)$, (cf. aussi § 6 c) exercice II 5).

<u>Application suite de Césaro.</u>

<u>Proposition 1.</u> Soit (u_n) une suite définie pour $n \geqslant 1$ tendant vers une limite u (finie ou infinie) et soit (s_n) la suite de ses sommes partielles ; alors la suite $(\frac{s_n}{n})$ tend vers u.

En effet, lorsque $u \neq \infty$ la suite $(u_n - u) \longrightarrow 0$; en d'autres termes $u_n - u = o(1)$ d'où d'après le theorème 5 $s_n - nu = o(n)$. Ce qui exprime que $\frac{s_n - nu}{n} = \frac{s_n}{n} - u \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Lorsque $u = +\infty$ on a $1 = o(u_n)$ et par suite (d'après le théorème 5 qui s'applique encore puisque $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang) $n = o(s_n)$ ou encore $1 = o(\frac{s_n}{n})$. Comme à partir d'un certain rang on a $s_n \geqslant 0$ cela exprime que $\frac{s_n}{n} \longrightarrow +\infty$.

Lorsque $u = -\infty$ on applique le raisonnement précédent à la suite $(-u_n)$.

(n.b.) la suite $u_n = (-1)^n$ (définie pour $n \geqslant 1$) ne tend vers aucune limite tandis que la suite $\frac{s_n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ tend vers zéro.

ce qui montre que la réciproque est fausse.

Traiter l'exercice 13.

./...

Exercice 12.

α) montrer que si la série de terme général $u_n \geq o$ converge, alors pour tout $\alpha \geq 1$ la série de terme général u_n^{α} est convergente. Montrer que si la série de terme général $u_n \geq o$ est divergente, alors pour tout $\alpha \leq 1$ la série de terme général u_n^{α} est divergente (on traitera à part le cas où tous les u_n ne sont pas plus petits que 1 à partir d'un certain rang).

β) utiliser la convexité de la fonction e^x et l'identité $u = e^{\log u}$ (pour tout $u \in R^+$) pour montrer que si les séries de terme général respectif $u_n \geq o$ et $v_n \geq o$ sont convergentes alors pour tout $\alpha \in [o,1]$ la série de terme général $u_n^{\alpha} v_n^{1-\alpha}$ est convergente.

γ) en déduire que si la série de terme général $u_n \geq o$ est convergente, alors il en est de même de la série de terme général $\sqrt{u_n u_{n+1}}$.

δ) montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la réciproque est fausse, mais qu'elle devient vraie si l'on suppose, en outre, (u_n) décroissante.

Exercice 13. soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 1$ de nombres $> o$ et (s_n) la suite de ses sommes partielles.

α) écrire en fonction de u_n la suite (t_n) des sommes partielles de la suite (s_n) et montrer que

./...

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ecrire en fonction des u_n la suite $v_n = \frac{(n+1)s_n - t_n}{n}$

et déduire de ce qui précède que, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$, alors $v_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

β) montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (remarquer pour cela que

$\frac{v_n}{n+1} = ((n+1)s_n - t_n)\,(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ et exprimer en fonction de s_n la nième

somme partielle de la série de terme général $\frac{v_n}{n+1}$).

γ) montrer, par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que si f est une fonction

convexe sur $\mathbb{R}$, alors quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right]$$

(on remarque que l'inégalité est vraie pour $n = 2$ par définition des

fonctions convexes et que pour $n \geq 3$ si l'on suppose $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$;

on a $x = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \in [x_1, x_{n-1}]$; on applique ensuite la définition des

fonctions convexes aux points x, x_n et

$y = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{n-1}{n}\,x + \frac{1}{n}\,x_n \in [x, x_n]$ et l'hypothèse de récurrence

au point x).

δ) utiliser la convexité de la fonction e^x et l'inégalité précédente

pour montrer que si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, alors on a

$$(t_1\, t_2 \cdots t_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n).$$

Montrer que si les t_i ne sont pas tous égaux, alors on peut remplacer $\leqslant$ par $<$ dans l'inégalité précédente.

ε) déduire de α) et δ) que si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ alors

$\lim_{n\to\infty} (n\,!\, u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n} = 0$ et utiliser la formule de Stirling pour montrer que $\lim_{n\to\infty} n(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n} = 0$.

ζ) utiliser β) pour montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\,!\, u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n}}{n+1} \leqslant \sum_{n=1} u_n$

Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$, on peut remplacer $\leqslant$ par $<$ dans l'inégalité précédente. Utiliser la formule de Stirling pour en déduire que les séries de terme général u_n et $\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$ sont de même nature.

— . — . — . — . —

Exercice 14. Montrer, en s'inspirant de la 3e méthode (exemple 3), que, si la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs est décroissante et s'il existe $k \in N$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $k\, u_{kn} \geqslant u_n$, alors la série de terme général u_n a une somme infinie.

— . — . — . —

Exercice 15. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$ si (u_n) est une suite décroissante, de nombres réels et positifs, définie pour $n \geqslant 1$ et $u'_n = k^n u_{k^n}$ alors les séries de terme général respectifs u_n et v_n sont de même nature.

— . — . — . —

./...

5.- Critères classiques de convergence absolue.

a) sommation par paquets.

Remarque : soit (u_n) une suite de nombres réels ; lorsque la suite (s_n) de ses sommes partielles admet une limite finie ou infinie, toute sous suite (s_{n_p}) de (s_n) admet la même limite.

Ecrivons la suite (v_p) des différences (cf. § 3/ a)) de la suite (s_{n_p}), il vient : $v_o = \sum_{n=o}^{n_o} u_n$ et $v_p = \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} u_n$.

La remarque précédente montre que l'on ne change pas la somme d'une série lorsque cette somme existe en calculant cette somme par paquets. Ici les paquets d'indices considérés sont les intervalles d'entiers

$[o, n_o]$, $[n_o + 1, n_1]$, ..., $[n_{p-1}+1, n_p]$, ...

On trouve une illustration de ce procédé dans l'exemple 3, 2ème méthode, § o/ où la suite croissante d'entiers (n_p) utilisée est la suite (2^p).

En particulier on peut donc énoncer :

Proposition 2. Avec les notations précédentes si on a $u_n \geqslant o$ alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

(n.b.) Il serait faux de croire que cette règle est vraie en général.

Ainsi la suite (s_n) des sommes partielles de la suite $\left((-1)^n\right)$ ne tend

./...

vers aucune limite et pourtant les suites (s_{2p}) et (s_{2p+1}) sont constantes et valent 1 et o respectivement.

Scholie 1. La propriété de sommabilité par paquets est l'extension aux séries convergentes de la propriété d'associativité dont jouissent les sommes finies. Les séries absolument convergentes vérifient, en outre, une propriété de commutativité, fausse pour les séries convergentes en général, qu'on ne peut énoncer ici car elle ne peut s'expliciter en termes de somme partielle (notion de séries sommables).

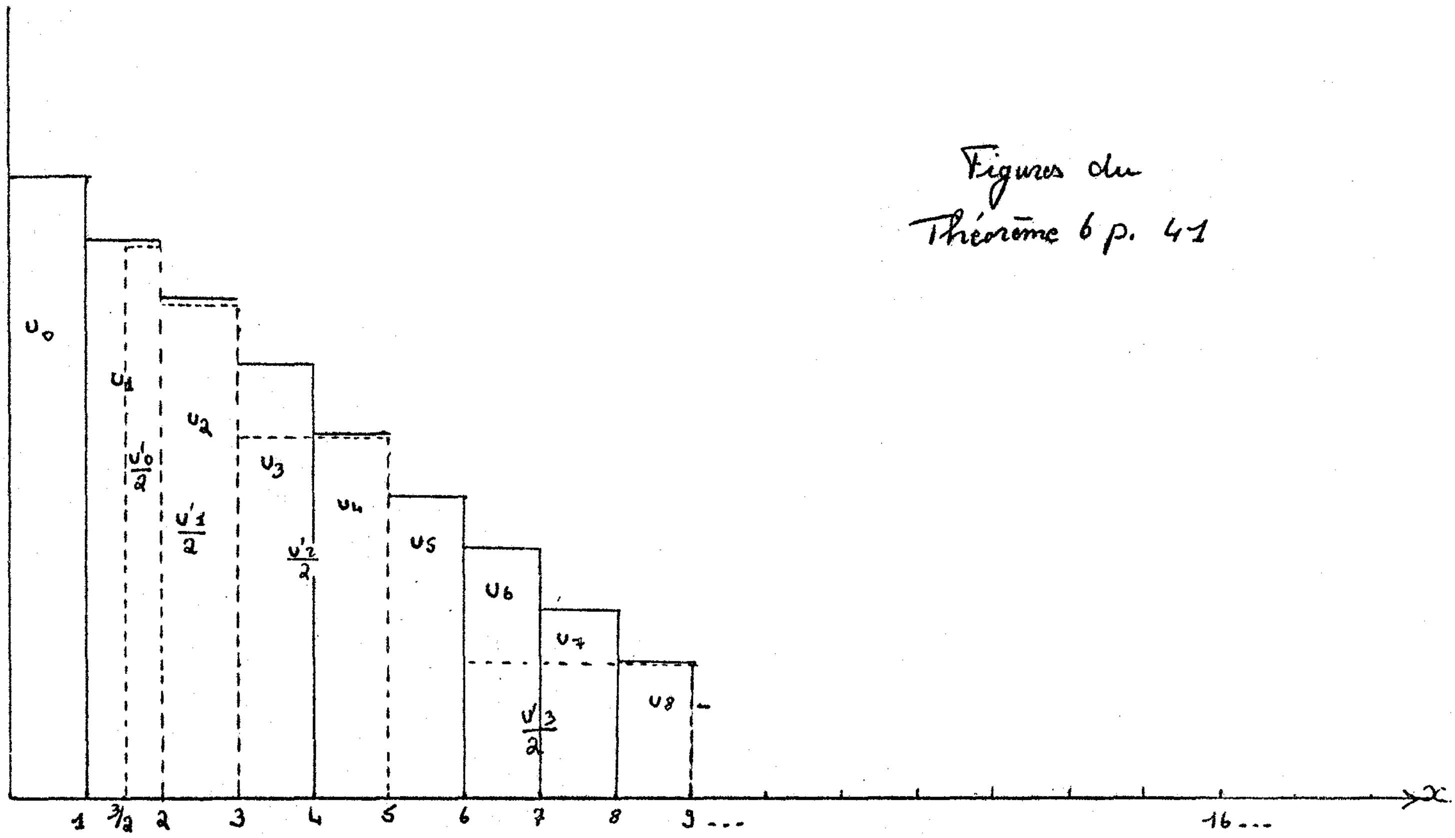
b) Critère de condensation.

Théorème 6. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels positifs définie pour $n \geqslant 1$ et soit (u'_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u'_n = 2^n u_{2^n}$; alors les séries de terme général respectif u_n et u'_n sont de même nature.

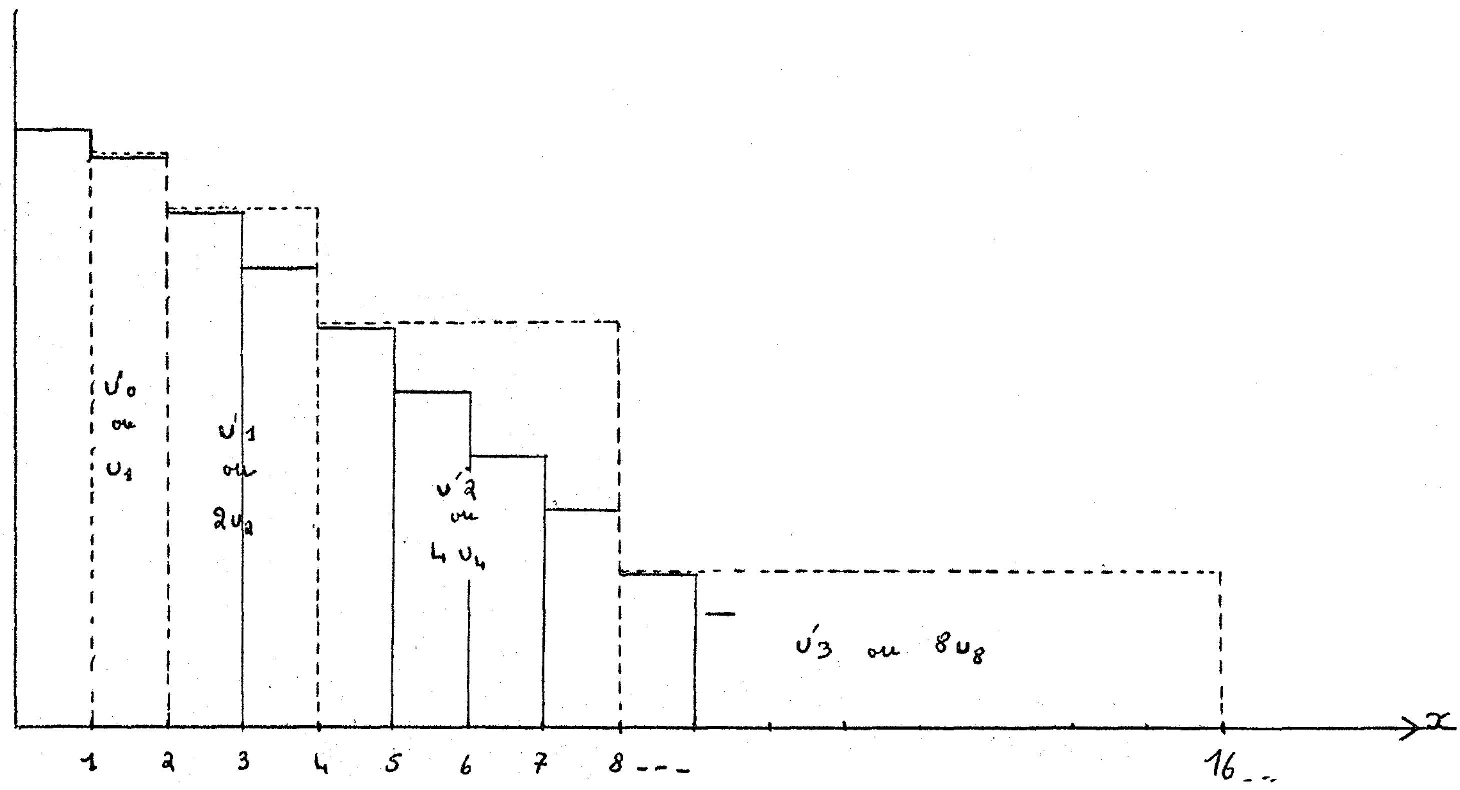
(figures à la page 41 bis).

./...

Figures du
Théorème 6 p. 41



$u'_0 = u_1$, $u'_1 = 2u_2$, $u'_2 = 4u_4$, u'_3 $\;_8$ ---



La démonstration de ce théorème généralise le procédé du § 0/ exemple 3.

2e Méthode.

Désignons par (s_n) la suite des sommes partielles de (u_n) et posons $v_o = u_1 = s_1$ et pour tout $n \geqslant 1$ $v_n = s_{2^n} - s_{2^{n-1}}$ d'après la proposition 2 tout revient à montrer que les suites v_n et u'_n sont de même nature. Or, comme (u_n) est décroissante, on a lorsque $2^{n-1} < p \leqslant 2^n$, $u_{2^{n-1}} \geqslant u_p \geqslant u_{2^n}$ et en sommant cette inégalité sur l'entier $p \in \left[2^{n-1} + 1, 2^n\right]$ il vient :

$$u'_{n-1} = 2^{n-1} u_{2^{n-1}} \geqslant v_n = \sum_{p=2^{n-1}+1}^{2^n} u_p \geqslant 2^{n-1} u_{2^n} = \frac{1}{2} u'_n$$

ce qui exprime que $u'_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u'_n)$

on conclut en appliquant le corollaire 1 du théorème 3.

<u>Corollaire</u>. Si le terme général $u_n \geqslant o$ d'une série convergente est décroissant alors la suite $(nu_n) \longrightarrow o$.

En effet, lorsque $2^p < n \leqslant 2^{p+1}$ on a $nu_n \leqslant 2^{p+1} u_{2^p} = 2u'_p$ qui tend vers zéro quand $p \longrightarrow \infty$ (d'après le théorème 1) comme terme général d'une série convergente. Puisque, quel que soit $\varepsilon > o$, à partir d'un certain rang p_o on a $u_p \leqslant \varepsilon$ on en déduit que $nu_n \leqslant \varepsilon$ à partir du rang 2^{p_o}.

./...

Remarque. Le théorème 6 et son corollaire sont faux si on ne précise pas que (u_n) est décroissante. Posons, en effet $u_n = \frac{1}{(\log n)^2}$ lorsque n est de la forme 2^p et $u_n = o$ dans le cas contraire la sommation par paquets sur la suite d'indices (2^p) montre que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{(\log 2)^2 n^2}$ qui converge (cf. exemple du théorème 3). Or $u'_p = \frac{1}{(\log 2)^2} \times \frac{2^p}{p^2} \longrightarrow \infty$ puisque $p^2 = o\ (2^p)$. Ceci montre que $\sum\limits_{n=o}^{\infty} u'_n = \infty$ et que la suite $(n\ u_n)$, (qui vaut u'_p lorsque n est de la forme 2^p), ne tend pas vers zéro.

Traiter l'exercice n° 14 et l'exercice n° 15.

c) Echelle des séries tests.

On considère la suite de fonctions $\log_o(x) = x$ $\log_1(x) = \log x$ et pour tout $k \geq 1$ $\log_k(x) = \log\ (\log_{k-1}(x))$ définies sur l'intervalle $]e^{k-2}, \infty[$ et positives sur $[e^{k-1}, \infty[$. On a :

$$\frac{d}{dx} \log_k(x) = \frac{\frac{d}{dx} \log_{k-1}(x)}{\log_{k-1}(x)} = \frac{1}{\prod\limits_{j=o}^{k-1} \log_j(x)} = \frac{1}{x \log x \ldots \log_{k-1}(x)}$$

$$= \lambda_{k-1}(x) > o$$

sur l'intervalle $]e^{k-2}, \infty[$, ce qui montre que les fonctions

$\lambda_k(x) = \frac{1}{\prod\limits_{j=o}^{k} \log_j(x)} = \frac{1}{x \log x \ldots \log_k(x)}$ sont positives et décroissantes sur

$[e^{k-1}, \infty[$, de mêmes les fonctions $\dfrac{\lambda_{k-1}(x)}{(\log_k(x))^{\alpha}}$ sont décroissantes sur $[e^{k-1}, \infty[$ pour $\alpha > o$. En restreignant les fonctions $\dfrac{\lambda_{k-1}(x)}{(\log_k(x))^{\alpha}}$ à l'ensemble des entiers, on définit donc des suites $\dfrac{\lambda_{k-1}(n)}{(\log_k(n))^{\alpha}}$ positives et décroissantes à partir d'un certain entier n_k lorsque $\alpha \geq o$. Avec ces notations on a les résultats suivants :

(-1) la série de terme général $u_{-1\,n} = \dfrac{1}{\alpha^n}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$ $(\alpha > o)$ (d'après l'exemple 1 du § 0/).

(o) la série de terme général $u_{o\,n} = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$ $(\alpha \in R)$. C'est évident lorsque $\alpha \leq o$. Lorsque $\alpha > o$, avec les notations du théorème 6, la série de terme général $u'_{o\,n} = \dfrac{1}{(2^{\alpha-1})}$ est de même nature que la série de terme général $u_{o\,n}$.

Or $2^{\alpha-1} < 1$ lorsque $\alpha > 1$, et $2^{\alpha-1} \geq 1$ lorsque $\alpha \leq 1$, on est donc ramené au cas (-1).

(1) la série de terme général $u_{1\,n} = \dfrac{1}{n(\log n)^{\alpha}} = \dfrac{\lambda_o(n)}{(\log_1(n))^{\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$ $(\alpha \in R)$. C'est évident pour $\alpha \leq o$ d'après (o).

Lorsque $\alpha > o$ la série de terme général $u'_{1\,n} = \dfrac{1}{(\log 2)^{\alpha} n^{\alpha}} = \dfrac{1}{(\log 2)^{\alpha}} (u_{o\,n})$ est de même nature que la série de terme général ${}_1u_n$. On est donc ramené au cas (o).

(2) la série de terme général ${}_2u_n = \dfrac{1}{n\log n(\log\log_n)^\alpha} = \dfrac{\lambda_1(n)}{(\log_2 n)^\alpha}$ est

convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leqslant 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. C'est évident

pour $\alpha \leqslant o$ d'après (1). Lorsque $\alpha > o$ la série de terme général

${}_2u'_n = \dfrac{1}{n\log 2(\log(n\log 2))^\alpha}$ est de même nature que la série de terme

général ${}_2u_n$.

Comparons les suites $({}_2u'_n)$ et $({}_1u_n)$. Comme on a $\sqrt{e} \leqslant$ [illegible] $< 2 < e$ on a

$\frac{1}{2} < \log 2 < 1$. La fonction $\dfrac{1}{x(\log x)^\alpha}$ étant décroissante on en tire les

deux conséquences suivantes :

D'une part, ${}_1u_n = \dfrac{1}{n(\log n)^\alpha} \leqslant {}_2u'_n$

c'est-à-dire, ${}_1u_n = O({}_2u'_n)$

D'autre part, ${}_1u_p = \dfrac{1}{p(\log p)^\alpha} \geqslant {}_2u'_{2p} \geqslant {}_2u'_{2p+1}$

et par suite, $v_p = {}_2u'_{2p} + {}_2u'_{2p+1} = O({}_1u_p)$.

D'après la proposition 2, la série de terme général v_p étant de même nature que la série de terme général ${}_2u'_n$, le théorème 3 montre que la série de terme général ${}_2u_n$ est de même nature que la série de terme général ${}_1u_n$. On est donc ramené au cas (1).

****

(k) La série de terme général $_k u_n = \dfrac{1}{n\log n \ldots (\log_k n)^\alpha} = \dfrac{\lambda_{k-1}(n)}{(\log_k(n))^\alpha}$

est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leqslant 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

C'est évident lorsque $\alpha \leqslant o$ d'après (k-1). Lorsque $\alpha > o$ la série de terme général $_k u'_n = \dfrac{\lambda_{k-2}(n \log 2)}{(\log_{k-1}(n \log 2))^\alpha}$ est de même nature que la série de terme général $_k u_n$. Comparons les suites $(_k u'_n)$ et $(_{k-1}u_n)$.

La fonction $\dfrac{\lambda_{k-2}(x)}{(\log_{k-1}(x))^\alpha}$ étant décroissante, les inégalités $\frac{1}{2} < \log 2 < 1$ permettent de tirer les deux conséquences suivantes :

D'une part $\quad {}_{k-1}u_n = \dfrac{\lambda_{k-2}(n)}{(\log_{k-1}(n))^\alpha} \leqslant {}_k u'_n = \dfrac{\lambda_{k-2}(n \log 2)}{(\log_{k-1}(n \log 2))^\alpha}$

c'est-à-dire $\quad {}_{k-1}u_n = O(_k u'_n)$

D'autre part $\quad {}_{k-1}u_p = \dfrac{\lambda_{k-2}(p)}{(\log_{k-1}(p))^\alpha} \geqslant {}_k u'_{2p} \geqslant {}_k u'_{2p+1}$

et par suite $\quad v_p = {}_k u'_{2p} + {}_k u'_{2p+1} = O(_{k-1}u_p)$.

D'après la proposition 2, la série de terme général v_p étant de même nature que la série de terme général $_k u'_n$, le théorème 3 montre que la série de terme général $_k u_n$ est de même nature que la série de terme général $_{k-1}u_n$.

On est donc ramené au cas (k-1).

./...

Schéma de la démonstration.

$$\begin{tikzcd}
 & & {}_{k-1}u_n \arrow[d, "\text{domine}"] \\
{}_k u_n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{même nature}"] & {}_k u'_n \arrow[ur, "\text{domine}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{même nature}"] & v_n = {}_k u'_{2n} + {}_k u'_{2n+1}
\end{tikzcd}$$

Schéma de l'échelle étudiée.

$k =$	-1	0	$1 \ldots\ldots$	$\ldots k \ldots\ldots$	$\ldots k \ldots\ldots$	1	0	-1
$\alpha =$	∞ — $1+\varepsilon$	∞ — $1+\varepsilon$	∞ — $1+\varepsilon$	∞ — $1+\varepsilon$	1 — $-\infty$	1 — $-\infty$	1 — $-\infty$	1 — ~~$+\infty$~~ ε 0
	convergent				divergent			

Si on pose $\;{}_k u_n(\alpha) = \dfrac{\lambda_{k-1}(n)}{(\log_k(n))^{\alpha}}$, on a $\;{}_k u_n = o({}_{k'}u_n(\alpha'))$

lorsque le point (k,α) est situé à gauche du point (k',α') dans le tableau précédent.

<u>Définition</u>. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont <u>comparables</u> si l'on a $u_n = O(v_n)$ ou $v_n = O(u_n)$.

<u>Scholie 2</u>.

α) le théorème 3 implique que si une suite (u_n) est dominée par une suite (v_n) de l'échelle dont la série associée converge, alors la série de terme général u_n est absolument convergente. Si, en revanche, la suite (u_n) domine une suite (v_n) de l'échelle dont la série associée diverge, alors le théorème 3 implique que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty$.

./...

On va, maintenant, donner des conditions sur les termes u_n d'une suite permettant d'affirmer que cette suite est comparable à l'une des suites de l'échelle et par conséquent de décider si elle est convergente ou non;

β) l'existence d'une échelle du type précédent permet de se poser la question suivante : peut-on construire une échelle de suites à termes positifs dont les séries associées soient de nature connue telle que, quelle que soit la suite (u_n) on ait $u_n = O(v_n)$ (pour une suite (v_n) de l'échelle dont la série converge), ou $w_n = O(u_n)$ (pour une suite (w_n) de l'échelle dont la série diverge).

L'exercice 17 montre que cela est impossible car, à toute série convergente de terme général $u_n \geq o$, il permet d'associer une série de terme général $v_n \geq o$ convergente telle que $u_n = o\,(v_n)$; en outre, à toute suite de séries convergentes de termes généraux ${}_ku_n \geq o$ tels que ${}_ku_n = o\,({}_{k+1}u_n)$ il permet d'associer une série convergente de terme général $v_n \geq o$ telle que ${}_ku_n = o\,(v_n)$ pour tout $k \in N$. Dans le cas de la divergence on a une situation analogue décrite dans l'exercice 18.

Traiter les exercices 16, 17 et 18.

<u>Exercice 16</u>. Montrer que si une suite (u_n) de nombres réels $\geq o$ n'est pas identiquement nulle à partir d'un certain rang, alors il existe

./...

une suite (ω_n) de nombres réels $\geqslant o$ telle que pour tout $\alpha > o$ la suite $(u_n \omega_n{}^{\alpha})$ ne soit pas bornée. Montrer que la suite :

$$\omega_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n = o \text{ et} \\ n\, e^{\frac{1}{u_n}} & \text{si } u_n \neq o \end{cases}$$

répond à la question.

<u>Exercice 17</u>. (Du Bois-Reymond). Soit (u_n) une suite de nombres réels $\geqslant o$ et soit (s_n) la suite de ses sommes partielles.

α) montrer que si $\sum\limits_{n=o}^{\infty} u_n = s < \infty$, alors il existe une suite (ω_n) de nombres réels $\geqslant 1$ tendant vers $+\infty$ telle que $\sum\limits_{n=o}^{\infty} u_n \omega_n < \infty$ (montrer par récurrence que si $(u_n) \not\equiv o$ alors la suite

$$\omega_n = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } n \text{ tel que } s_{n-1} < s - \frac{1}{2} \\ \sqrt{p} & \text{pour tout } n \text{ tel que } s - \frac{1}{p} \leqslant s_{n-1} < s - \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

répond à la question $(p \geqslant 2$ entier$)$).

Cette propriété reste-t-elle vraie, si on ne suppose plus $u_n \geqslant o$?

β) déduire de α) qu'il existe une suite double $(u_{p,n})$ telle que

$$\left.\begin{aligned} & u_{o,n} = u_n \\ & u_{p,n} \leqslant u_{p+1,n} \end{aligned}\right\} \text{ quel que soit l'entier } p \geqslant o$$

./...

Suite p. 49 bis.

$$u_{p,n} = o\,(u_{p+1,n}) \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{et}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} u_{p,n} = s_p < \infty.$$

γ) montrer que si la suite $(u_{p,n})$ jouit des propriétés β), alors il existe une suite (v_n) de nombres réels positifs tels que

$u_{p,n} = o\,(v_n)$ pour tout $p \in N$ et $\sum_{n=o}^{\infty} v_n < \infty$

(on pourra montrer que pour tout $n \in N$ on a :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{u_{p,n} - u_{p-1,n}}{p^2(s_p - s_{p-1})} = v_n < \infty$$

et que la suite (v_n) ainsi construite répond à la question).

— . — . — . — . — . —

<u>Exercice 18.</u> (Du Bois-Reymond). Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs et soit (s_n) la suite de ses sommes partielles.

α) montrer que si $\sum_{n=o}^{\infty} u_n = \infty$, il existe une suite (ω_n) de nombres réels $\geqslant o$ et $\leqslant 1$ tendant vers zéro tels que $\sum_{n=o}^{\infty} u_n\,\omega_n = \infty$. (Montrer par exemple que la suite $\omega_o = 1$ et (lorsque $n \geqslant 1$) $\omega_n = \frac{1}{p}$ si $p - 1 \leqslant s_{n-1} < p$ répond à la question).

β) trouver une condition nécessaire et suffisante sur (u_n) qui permette d'exiger, en outre, que (ω_n) soit convergente (la condition est

./...

que u_n soit non bornée. Montrer alors qu'il existe une sous-suite $(u_{n(p)})$ telle que $u_{n(p)} \geqslant p^3$. Prendre alors $\omega_n = 0$ si $n \neq n(p)$ et quel que soit p. $\omega_n = \frac{1}{p^2}$ si $n = n\,(p)$.

γ) déduire de α) qu'il existe une suite double $(u_{p,n})$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} u_{o,n} = u_n \\ u_{p,n} \geqslant u_{p+1,n} \end{array}\right\} \text{quel que soit l'entier } p \geqslant o$$

$u_{p+1,n} = o\,(u_{p,n})$ quand $n \longrightarrow \infty$ et $\sum\limits_{n=o}^{\infty} u_{p,n} = \infty$.

δ) montrer que si la suite double $(u_{p,n})$ jouit des propriétés γ), alors il existe une suite (v_n) de nombres réels positifs telle que $v_n = o\,(u_{p,n})$ pour tout $p \in N$ et $\sum\limits_{n=o}^{\infty} v_n = \infty$. (soit (n_q) la suite d'entiers construite par récurrence sur q de façon à vérifier les propriétés.

$$n_o = o \quad \text{et} \quad \sum_{j=n_{q-1}+1}^{n_q - 1} u_{q,j} < 1 \leqslant \sum_{j=n_{q-1}+1}^{n_q} u_{q,j}.$$

On pose $p(o) = o$ et $p(n) = q$ si $n_{q-1} < n \leqslant n_q$

Montrer que la suite $v_n = u_{p(n),n}$ répond à la question.

— . — . — . — . — . — . —

d) <u>Critères de première espèce.</u>

(C_{-1}) Chercher s'il existe $\alpha > o$ tel que la suite (u_n) soit comparable à la suite $(\frac{1}{n^\alpha})$ revient à chercher s'il existe $\alpha > o$ tel que, à partir d'un certain rang, la suite $(\alpha^n|u_n|)$ soit minorée ou majorée par une constante $k > 0$ ou encore (puisque $\sqrt[n]{k} \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$) à chercher s'il existe $\alpha > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ soit plus petite ou plus grande que la constante $\frac{1}{\alpha}$. Le théorème 3 donne alors les résultats suivants :

Critère de Cauchy.

α) s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(\alpha^n|u_n|)$ soit majorée par un nombre $k \geq 0$ alors la suite de terme général u_n est absolument convergente.

Si à partir d'un certain rang la suite $(|u_n|)$ est minorée par un nombre $k > 0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty$ ou encore :

β) s'il existe $a = \frac{1}{\alpha} \in]0,1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{|u_n|} \leq a$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente. (noter qu'on ne peut conclure lorsqu'on a seulement $\sqrt[n]{|u_n|} < 1$).

Si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty$.

On en déduit :

γ) lorsque la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ tend vers une limite $a < 1$, alors la

./...

série de terme général u_n est absolument convergente. Lorsque la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ tend vers une limite $a > 1$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$. Il en est de même lorsque la suite $(\sqrt[n]{|u_n|}) \longrightarrow 1$ par valeurs ≥ 1.

Application.

Proposition 3. (Lemme d'Abel). Soit (a_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $R_o > o$ tel que la suite $(a_n R_o^n)$ soit bornée en valeur absolue, alors pour tout $r \in [o, R_o[$ les séries de terme général $a_n r^n$, $\frac{a_n}{n+1} r^n$ et $n\, a_n r^{n-1}$ sont absolument convergentes.

En effet, par hypothèse il existe un nombre $M > o$ tel que $|a_n| R_o^n \leq M$ quel que soit l'entier n. Par suite on a :

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} = \frac{r}{R_o} \sqrt[n]{|a_n| R_o^n} \leq \frac{r}{R_o} \sqrt[n]{M}.$$

expression qui tend vers $\frac{r}{R_o}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

De même on a :

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1} r^{n+1}} = \frac{r}{R_o} \sqrt[n]{\frac{r}{n+1} |a_n| R_o^n} \leq \frac{r}{R_o} \sqrt[n]{\frac{r}{n+1} M}$$

expression qui tend vers $\frac{r}{R_o} < 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

./...

Enfin on a :

$$\sqrt[n]{n|a_n|r^{n-1}} = \frac{r}{R_o}\sqrt[n]{\frac{n}{r}|a_n|R_o^n} \leqslant \frac{r}{R_o}\sqrt[n]{\frac{n}{r}M}.$$

expression qui tend vers $\frac{r}{R_o}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Dans les trois cas comme $\frac{r}{R_o} < 1$ par hypothèse γ) s'applique.

<u>Exercice 19.</u> Montrer que la proposition 3 reste vraie si on suppose seulement que la suite $(a_n R^n)$ est à croissance lente (cf. exercice 6 exemple).

(C_o) Chercher s'il existe $\alpha > o$ tel que la suite (u_n) soit comparable à la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ revient à chercher s'il existe $\alpha > o$, tel que, à partir d'un certain rang, la suite $\left(n^\alpha|u_n|\right)$ soit minorée ou majorée par constante $k > o$ ou encore (puisque $\frac{k}{\log^n} \longrightarrow o$ quand $n \longrightarrow \infty$) à chercher s'il existe $\alpha > o$ tel qu'à partir d'un certain rang la suite $\left(\frac{\log|u_n|}{\log^n}\right)$ soit plus grande ou plus petite que la constante $-\alpha$. Le théorème 3 donne alors les résultats suivants :

<u>Critère logarithmique d'ordre o.</u>

α) s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha|u_n|)$ soit majorée par un nombre $k \geqslant o$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si à partir d'un certain rang la suite $(n|u_n|)$ est minorée par un nombre $k > o$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$, ou encore

$\beta)$ s'il existe $\alpha > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{\log|u_n|}{\log n} \leq - \alpha$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

(Noter qu'on ne peut conclure si l'on a seulement $\frac{\log|u_n|}{\log n} < - 1$).

Si à partir d'un certain rang $\frac{\log|u_n|}{\log n} \geq - 1$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$.

On en déduit :

$\gamma)$ lorsque la suite $(\frac{\log|u_n|}{\log n})$ tend vers une limite $a = - \alpha < - 1$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Lorsque la suite $(\frac{\log|u_n|}{\log n})$ tend vers une limite $a > - 1$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$.

Il en est de même lorsque la suite $(\frac{\log|u_n|}{\log n}) \longrightarrow - 1$ par valeur $\geq - 1$.

(C_k) Les mêmes considérations appliquées à la suite (u_n) et à la suite test $\frac{1}{n \log n \dots (\log_k n)^{\alpha}}$ permettent d'énoncer.

<u>Critère logarithmique d'ordre k ou Critère de Bertrand.</u>

$\alpha)$ s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $\left(n \log n \dots (\log_k n)^{\alpha}|u_n|\right)$ soit majorée par un nombre $k \geq o$; alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si à partir d'un certain rang la suite $\left(n \log n \ldots \log_k n |u_n|\right)$ est minorée par un nombre $k > 0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty$ ou encore (puisque $\frac{k}{\log_{k+1}(n)} \to 0$ quand $n \to \infty$).

β) s'il existe $\alpha > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$$v_n = \frac{\log |u_n| + \log n + \ldots + \log_k n}{\log_{k+1}(n)} \leqslant -\alpha$$

alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

(Noter qu'on ne peut conclure si l'on a seulement $v_n < -1$).

Si à partir d'un certain rang $v_n \geqslant -1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$

on en déduit

γ) avec les notations de β) lorsque la suite (v_n) tend vers une limite $a = -\alpha < -1$, alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Lorsque la suite (v_n) tend vers une limite $a > -1$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty .$$

Il en est de même lorsque la suite $(v_n) \to -1$ par valeur $\geqslant -1$.

e) <u>Critères de seconde espèce</u>. On suppose ici $u_n \neq 0$ pour tout

./...

$n \in N$ et on cherche à savoir s'il existe une suite (v_n) de l'échelle telle que à partir d'un certain rang la suite $\left(\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ soit de signe constant. S'il en est ainsi le théorème 4 permet d'en déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont comparables.

Si à partir d'un certain rang $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 0$ et si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si, à partir d'un certain rang, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 0$ et si la série de terme général v_n est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \infty$.

En exprimant ces conditions pour chacun des types de suites (v_n) de l'échelle, on obtient les critères suivants.

(C'_{-1}) <u>Critère de D'Alembert.</u>

S'il existe un nombre positif $a = \frac{1}{\alpha} < 1$ tel que, à partir d'un certain rang, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant a$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

(Noter qu'on ne peut conclure lorsqu'on a seulement $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$).

./..

Si à partir d'un certain rang $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$. On en déduit que si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tend vers une limite $a < 1$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tend vers une limite $a > 1$ ou tend vers 1 par valeur $\geqslant 1$ alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$.

<u>Exemple</u>. La série de terme général $u_n = \frac{ch\ \sqrt{n}}{e^n}$ est convergente.

En effet, on a $\frac{ch\ \sqrt{n}}{e^n} \sim \frac{e^{\sqrt{n}}}{2e^n} = v_n$.

Or $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{e}\, e^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.

(C'_o) <u>Critère de Duhamel</u>.

.S'il existe $\alpha > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant (1 + \frac{1}{n})^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\,(\frac{1}{n})$.

C'est-à-dire s'il existe $\alpha' > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant 1 - \frac{\alpha'}{n}$, ou encore si à partir d'un certain rang

$n(1 - \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}) \geqslant \alpha' > 1$ alors la série de terme général u_n est absolument convergente. (Noter qu'on ne peut conclure lorsqu'on a seulement

./...

$$n\left(1-\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\right)>1).$$

Si à partir d'un certain rang $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ ou encore si

$$n\left(1-\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\right) \leqslant 1 \quad \text{alors} \quad \sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty.$$

(C'_k) <u>Critère de Raabe</u>.

S'il existe $\alpha > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n \dots \log_{k-1}(n)} - \frac{\alpha}{n \log n \dots \log_k(n)}$$

alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si à partir d'un certain rang

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n \dots \log_k(n)},$$

alors $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n| = \infty$ (on démontrera ce critère à titre d'exercice).

Traiter les exercices 20 et 21.

<u>Exercice 20</u>. Série hypergéométrique.

α) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma \neq -n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta\,(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2\dots n\ \ \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}$$

est $\neq 0$ et de signe constant à partir d'un certain rang. Utiliser le critère de Duhamel pour montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente pour $\alpha + \beta < \gamma$ et a une somme infinie pour $\alpha + \beta > \gamma$. Montrer à l'aide du critère de Raabe que cette somme est encore infinie lorsque $\alpha + \beta = \gamma$. (On donnera de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ un développement en $\dfrac{1}{n}$ limité à l'ordre 2.

β) Utiliser les méthodes des exemples 7 et 8 du § o/ pour montrer que si α vérifie les hypothèses précédentes, il existe une constante K_α telle que : $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \sim K_\alpha\, n^{\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

(On étudiera à part le cas $\alpha < 0$).

γ) En déduire qu'il existe un nombre $a \neq 0$ tel que $u_n \sim a n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$ et appliquer (C_o) pour retrouver les résultats du α).

— . — . — . — . —

<u>Exercice 21</u>. Soit (u_n) une suite croissante de nombres strictement positifs tendant vers $+\infty$.

α) utiliser le corollaire du théorème 5 pour montrer que si $\frac{u_n}{u_{n-1}} \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors on a $\sum_{p=1}^{n} \frac{u_p - u_{p-1}}{u_p} \sim \log u_n$ et que pour tout $\alpha > -1$ $\sum_{p=1}^{n} u_p^{\alpha} (u_p - u_{p-1}) \sim \frac{1}{\alpha+1} u_n^{\alpha+1}$

β) sans faire d'hypothèse sur le comportement de $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n-1}}{u_n}$ a toujours une somme infinie (on traitera à part le cas où $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ ne tend pas vers 1).

γ) pour tout $\alpha > 0$, comparer les suites $\left(\frac{1}{u_{n-1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}\right)$ et $\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{u_n (u_{n-1}^{\alpha})}\right)$ en vue de montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n-1}}{u_n \, u_{n-1}^{\alpha}}$ est convergente.

<u>Exercice 22</u>.

α) quand $x \longrightarrow \infty$ donner un développement en $\frac{1}{x}$ limité à l'ordre 1 de $f(x) = x \log (1 + \frac{1}{x})$ et à l'ordre 2 de $f'(x)$ en vue de montrer qu'il existe x_0 tel que $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ est décroissante lorsque $x \geq x_0$ et que $\lim_{x \to \infty} g(x) = e$. .

β) soit (u_n) une suite à termes positifs. Montrer que s'il existe $\beta < \frac{1}{e}$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \beta$ alors la série de terme

./...

général u_n est convergente (pour le voir choisir α tel que $\beta < \frac{1}{e^\alpha} < \frac{1}{e}$ en vue de comparer, à l'aide du théorème 4, (u_n) et $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

γ) montrer que si à partir d'un certain rang on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{e}$, alors la série de terme général u_n a une somme infinie (utiliser α) pour comparer, à l'aide du théorème 4, les suites (u_n) et $\left(\frac{1}{n}\right)$).

6.- Comparaison des séries et des intégrales.

a) Critère de condensation pour les intégrales.

Théorème 7. (Cauchy - Mac - Laurin). Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[0, \infty[$, alors la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ sont de même nature.

En effet, posons $\tilde{f}(x) = f(E[x])$ (cf. exemple 3, 4e méthode, § o/), c'est-à-dire $\tilde{f}(x) = f(n)$ lorsque $n \leqslant x < n+1$.

Alors, comme $f(x)$ est décroissante, quel que soit $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$\tilde{f}(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \tilde{f}(x)$;

ce qui montre que les intégrales $\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,dx$ et $\int_0^\infty f(x)\,dx$ sont de même nature. Le théorème se déduit alors du fait que l'on a

$$\int_0^{n+1} \tilde{f}(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n} f(p).$$

./...

<u>Remarque</u>. Le théorème reste vrai si l'on suppose que $f(x)$ ne décroît qu'à partir d'une certaine valeur x_o de la variable, ce qui permet notamment de l'appliquer lorsque f est définie seulement sur $]x_o, \infty[$ $(x_o > o)$. Il reste évidemment vrai si $f(x)$ est croissante : la série et l'intégrale sont alors divergentes.

<u>Application</u>. La fonction $f_{-1}(x)$ est monotone, et admet pour primitive $F_{-1}(x) = -\frac{\alpha^{-x}}{\log(\alpha)}$; elle est donc convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha \in]o, 1]$.

La fonction $f_o(x) = x^{-\alpha}$ est monotone et admet pour primitive $F_o(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ lorsque $\alpha \neq 1$ et $F_o(x) = \log x$ lorsque $\alpha = 1$; elle est donc convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

La fonction $f_1(x) = \frac{(\log x)^{-\alpha}}{x}$ est monotone pour x assez grand et admet pour primitive $F_1(x) = \frac{(\log x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ lorsque $\alpha \neq 1$ et $F_1(x) = \log\log x$ lorsque $\alpha = 1$; elle est donc convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha \leqslant 1$.
Plus généralement (avec les notations du § 5/ c/) la fonction $f_k(x) := \frac{(\log_k(x))^{-\alpha}}{x \log x \ldots \log_{k-1}(x)}$ est monotone pour x assez grand et admet pour primitive $F_k(x) = -\frac{(\log_k(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ lorsque $\alpha \neq 1$ et $F_k(x) = \log_{k+1}(x)$ lorsque $\alpha = 1$; elle est donc convergente pour $\alpha > 1$,

./...

divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

Le théorème 7, appliqué aux fonctions $f_k(x)$ et aux suites $(f_k(n))$, redonne les résultats du § 5/ c/.

b) <u>Méthode des trapèzes</u>.

<u>Proposition 4</u>.

α) soit f une fonction positive, continue, monotone sur $[o, \infty[$; alors on a

$$\sum_{p=o}^{n} f(p) = \int_{o}^{n} f(x)\, dx - \frac{1}{2}(f(n) - f(o)) + R_o(o, n)$$

avec $|R_o\,(o, n)| \leqslant \frac{1}{2}\,|f(n) - f(o)|$ en outre si f est convexe on a

$R_o(o, n) \geqslant o$, si f est concave on a

$R_o(o, n) \leqslant o$.

β) soit f une fonction positive, continue, décroissante sur $[o, \infty[$ telle que $\int_o^{\infty} f(x)\, dx < \infty$, alors quel que soit l'entier n on a

$$r_n = \lim_{p \to \infty} \sum_{q=n}^{p} f(q) = \int_n^{\infty} f(x)\, dx + \frac{1}{2}f(n) + R_o(n, \infty)$$

avec $|R_o\,(n, \infty)| \leqslant \frac{1}{2}\,|f(n)|$.

En outre, si f est convexe on a $R_o(n, \infty) \geqslant o$.

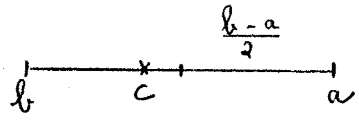
./...

Démonstration α).

Par hypothèse le nombre $c = \int_0^n f(x)\,dx$ est compris entre

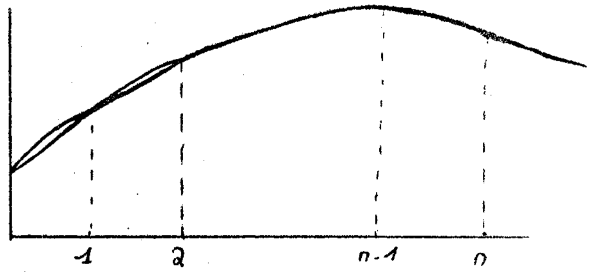
$$a = \sum_{p=0}^{n-1} f(p) \quad \text{et} \quad b = \sum_{p=1}^{n} f(p) \quad \text{et par suite}$$

$$\left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leq \left|\frac{b-a}{2}\right|.$$



En outre,

$$\frac{a+b}{2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{f(p-1) + f(p)}{2} = \int_0^n g(x)\,dx,$$



où $g(x)$ est la fonction obtenue en interpolant linéairement f entre les valeurs entières de la variable. La deuxième partie de α résulte alors de la définition de la convexité.

Démonstration de β)

On a par hypothèse $r_n - f(n) \leq \int_n^\infty f(x)\,dx \leq r_n$

et par suite $\left|r_n - \frac{1}{2} f(n) - \int_n^\infty f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2} f(n)$.

En outre, $r_n - \frac{1}{2} f(n) = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{f(p) + f(p+1)}{2} = \int_n^\infty g(x)\,dx$ où $g(x)$ est définie comme en α). La deuxième partie de β) résulte alors de la définition de la convexité.

On va maintenant améliorer les résultats de la proposition 4.

<u>Proposition 5</u>. (formule des accroissements finis généralisés).

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivables sur $]a, b[$. Si l'on suppose $g(b) \neq g(a)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

En effet, la fonction $\varphi(x) = \Big(f(b) - f(a)\Big) g(x) - \Big(g(b) - g(a)\Big) f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et l'on a

$\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a)$.

D'après le théorème de Rolle il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$\varphi'(c) = \Big(f(b) - f(a)\Big) g'(c) - \Big(g(b) - g(a)\Big) f'(c) = 0$

ce qui démontre la proposition.

<u>Lemme</u>. Soit f une fonction de classe C^1 admettant une dérivée seconde sur un intervalle $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ $(a < b$ et $\varepsilon > 0)$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\, dx - (b - a)\, \frac{f(a) + f(b)}{2} = - \frac{(b - a)^3}{12} f''(c).$$

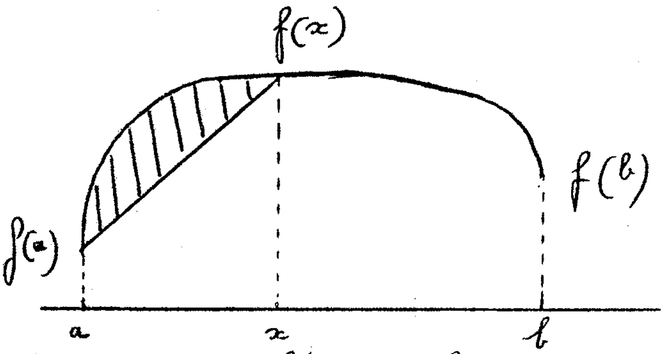
En effet, la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt - (x - a)\, \frac{f(a) + f(x)}{2}$

est de classe C^1 et deux fois dérivable sur $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ et l'on a

./...

$\varphi(a) = \varphi'(a) = o.$

En appliquant la proposition 4 à $\varphi(x)$ et à $(x-a)^3$ on voit qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $\dfrac{\varphi(b)}{(b-a)^3} = \dfrac{\varphi'(d)}{3(d-a)^2}$



φ(x) est l'aire de la région hachurée.

En appliquant la proposition 4 aux fonctions $\varphi'(x)$ et $3(x-a)^2$ sur $[a, d]$ on voit qu'il existe $c \in]a, d[\subset]a, b[$ tel que

$\dfrac{\varphi(b)}{(b-a)^3} = \dfrac{\varphi''(c)}{6(c-a)}$ comme $\varphi''(x) = -(x-a)\dfrac{f''(x)}{2}$,

le lemme est démontré.

Le lemme précédent permet de préciser les résultats de la proposition 4 lorsque f est de classe C^2 et de trouver notamment comme cas particuliers les formules des exemples 6 et 7 du § o/. Il fournit en outre une méthode pour le calcul approché d'une intégrale définie.

Proposition 6. (Simpson).

Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 5 lorsque f est de classe C^2 sur un intervalle $]-\varepsilon, \infty[$ $(\varepsilon > o)$,

./...

α) on a $|R_o(o, n)| \leq \frac{n}{12} \sup\limits_{x \geq o} |f''(x)|$.

En outre, lorsque f'' est monotone,

$$R_o(o, n) = \frac{1}{12}(f'(n) - f'(o)) + R_1(o, n)$$

avec $|R_1(o, n)| \leq \frac{1}{12}|f''(n) - f''(o)|$

β) lorsque f' et f'' tendent vers zéro et que f'' est positive et décroissante alors on a

$$R_o(n, \infty) = \frac{1}{12}f'(n) + R_1(n, \infty)$$

avec $|R_1(n, \infty)| \leq \frac{1}{12}f''(n)$.

<u>Démonstration de α</u>

D'après le lemme on a

$$R_o(o, n) = \frac{1}{12} \sum_{p=1}^{n} f''(p-1+\theta_p)$$

avec $o < \theta_p < 1$. La 1ère inégalité en résulte immédiatement. D'autre part, lorsque f'' est monotone, les nombres $R_o(o, n)$ et

$$\frac{1}{12}\int_o^n f''(x)\, dx = \frac{1}{12}\big(f'(n) - f'(o)\big)$$

sont tous deux compris entre $\frac{1}{12}\sum\limits_{p=o}^{n-1} f''(p)$ et $\frac{1}{12}\sum\limits_{p=1}^{n} f''(p)$, d'où la 2ème inégalité.

Démonstration de β

Les nombres $R_o(n, \infty)$ et $\frac{1}{12} f'(n)$ sont tous deux compris entre $\frac{1}{12} \lim_{p\to\infty} \sum_{q=n+1}^{p+1} f''(q)$ et $\frac{1}{12} \lim_{p\to\infty} \sum_{q=n}^{p} f''(q)$ (ces limites existent d'après le théorème 7, puisque par hypothèse, f'' est positive, décroissante et que f' tend vers zéro).

On démontre de façon tout à fait analogue la proposition suivante.

Proposition 7. (Calcul approché des intégrales définies).

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ $(\varepsilon > o)$, alors on a

$$\int_o^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n} \sum_{p=o}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) - \frac{1}{2n}(f(o) + f(1)) + R(n)$$

avec $|R(n)| = \frac{1}{12n^2} \sup_{o\leqslant x\leqslant 1} f''(x)$.

En outre, si f'' est monotone on a

$$R(n) = -\frac{1}{12n^2}(f'(1) - f'(o)) + R'(n)$$

avec $|R'(n)| \leqslant \frac{1}{12n^3} |f''(1) - f''(o)|$.

Lorsque f est de classe C^r pour r assez grand une généralisation convenable de la proposition 6 permet d'aboutir à l'une des formules fondamentales du calcul numérique qu'on pourra établir à titre d'exercice.

Traiter l'exercice 23.

o.- Formule d'Euler Mac Laurin.

Exercice 23.

I.- Préliminaires.

α) Polynômes de Bernoulli. On considère la suite des polynômes à une indéterminée $(B_n(x))$ définie par les conditions

$$(1)\begin{cases} B_o(x) = 1 \quad \text{et} \\ \dfrac{d\,B_n(x)}{d\,x} = n\,B_{n-1}(x) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

(1') $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant o$ on pose $b_n = B_n(o)$

1°) Calculer les B_n pour $n \leqslant 5$. Montrer que :

$$(2)\begin{cases} B_1(o) = -B_1(1) \quad \text{et à l'aide de (1') que pour tout} \quad n \geqslant 2 \\ B_n(1) = B_n(o). \end{cases}$$

2°) Montrer, par récurrence sur $n \geqslant o$, à l'aide de (1) que l'on a :

$$B_n(x) = \sum_{p=o}^{n} C_n^p\, b_p\, x^{n-p}$$

et déduire de (2) que

$$\sum_{p=o}^{n-1} C_n^p\, b_p = o.$$

./...

3°) i) Montrer, par récurrence sur $n \geqslant o$, que

$$P_n(x) = B_n(x) - (-1)^n B_n(-x) + nx^{n-1} = B_n(x+1) - (-1)^n B_n(-x) \equiv 0.$$

[Lorsque $n \geqslant 1$, on montrera que

$$\frac{d\, P_n(x)}{dx} = n\, P_{n-1}(x)$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que P_n est constant. Lorsque $n = 2p$, vérifier que $P_n(o) = o$; Lorsque $n = 2p+1$, remarquer que la constante

$$P_n = \int_o^1 P_n(-t)\, dt = \int_o^1 [\, B_n(1-t) + B_n(t)]\, dt = 2\left(\frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(o)}{n+1}\right) = o. \;]$$

En déduire que pour tout $k \geqslant 1$

$$B_{2k+1}(o) = B_{2k+1}(1) = b_{2k+1} = o.$$

En déduire également que $B_n(\frac{1}{2} + x)$ est pair ou impair selon que n est pair ou impair et par suite que $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = o$ pour tout $k \geqslant o$.

ii) Montrer que, pour tout $n \geqslant o$, les polynômes

$$Q_n(x) = B_n(x + \tfrac{1}{2}) + B_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} B_n(2x)$$

ont même parité que n et que

$$\frac{d}{dx} Q_{n+1}(x) = (n+1)\, Q_n(x).$$

Montrer que $Q_o \equiv o$ et que pour tout $k \geqslant o$,

si $Q_{2k} \equiv o$, alors $Q_{2k+1} \equiv o$.

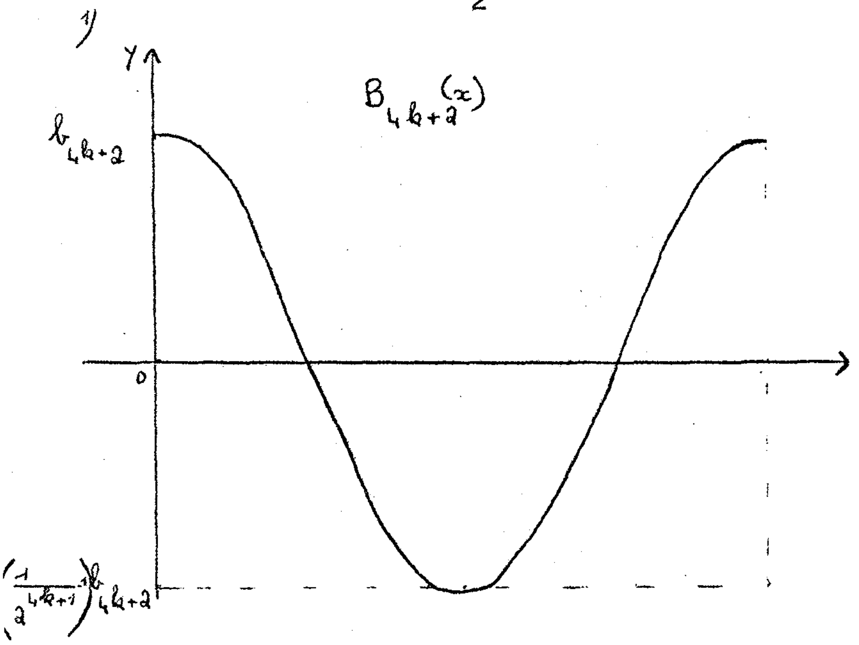
Utiliser le fait que $Q_{2k+3}(\frac{1}{2}) = Q_{2k+3}(0) = 0$

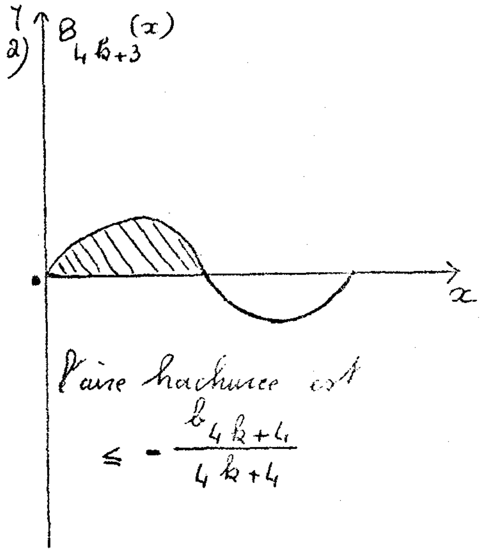
(que l'on vérifiera) pour en déduire qu'alors $Q_{2k+2} \equiv 0$.

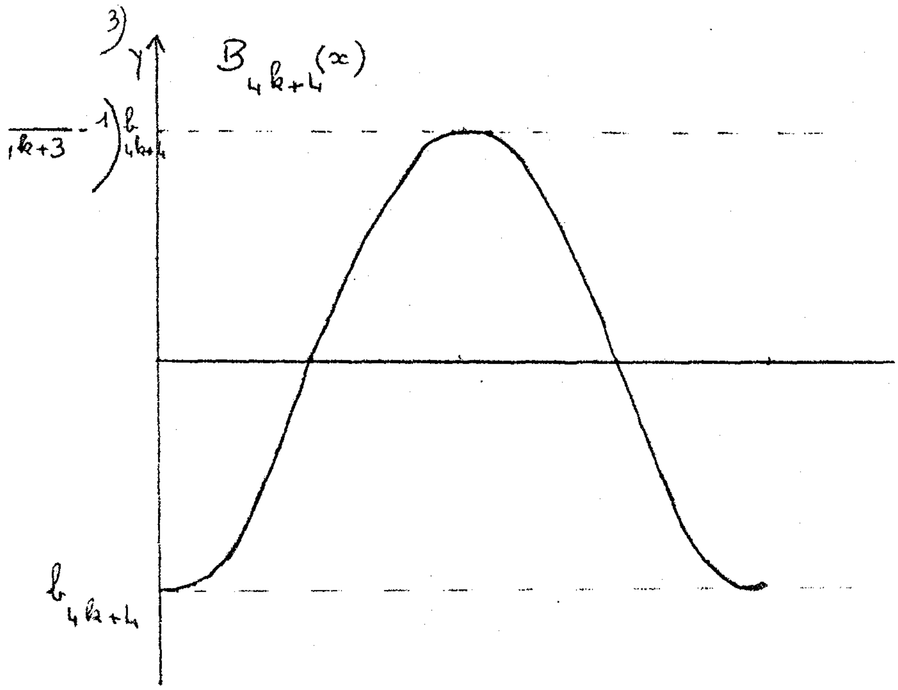
En conclure que $Q_n \equiv 0$ pour tout $n \geq 0$.

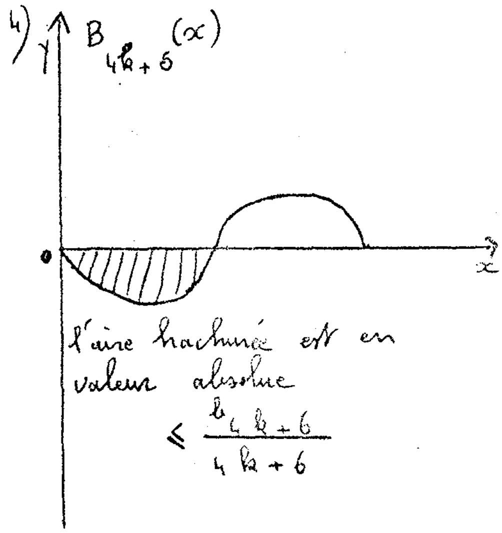
Utiliser le fait que $Q_{2k}(0) = 0$ pour montrer que

(3) $B_{2k}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^{k-1}} - 1)\, b_{2k}$.









4°) Montrer qu'on a $B_2(o) > o$ et que $B_2(x)$ n'a qu'une racine sur $[o, \frac{1}{2}]$. Montrer, à l'aide du 3°) que, si $B_{2k}(x)$ n'a qu'une racine sur $[o, \frac{1}{2}]$ et si $B_{2k}(o) > o$, alors on a $B_{2k+1}(x) \geq o$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Montrer qu'alors $B_{2k+2}(x)$ n'a qu'une racine sur $[o, \frac{1}{2}]$ et que $B_{2k+2}(o) < o$; On en déduit que $B_{2k+3}(x) \leq o$ sur $[o, \frac{1}{2}]$ et que $B_{2k+4}(x)$ n'a qu'une racine sur $[o, \frac{1}{2}]$ avec $B_{2k+4}(o) > o$.

Déduire de la récurrence précédente que pour tout $k \geq 1$ b_{2k} est de signe $(-1)^{k+1}$.

5°) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_o^1 B_n(t)\, dt = o$ et que, pour tout $k \geq 1$, $\int_o^{1/2} B_{2k}(t)\, dt = o$.

Utiliser la formule (3) pour montrer que, quel que soit $k \geq 1$,

$$\left|\int_o^{1/2} B_{2k+1}(t)\, dt\right| \leq \frac{|b_{2k+2}|}{2k+2} \quad \text{et que} \quad B_{2K+2} = \sup_{o \leq x \leq 1} |B_{2k+2}(x)| = |b_{2k+2}|.$$

β) <u>Formule de la moyenne généralisée</u>.

1) Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$; on suppose $g \geq o$ pour tout $x \in [a, b]$ et l'on désigne par $G(x)$ une primitive de g. Montrer, à l'aide de la formule de la moyenne et du changement de variable $u = G(x)$, qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = f(o) \int_a^b g(x)\ dx.$$

2) On suppose maintenant qu'il existe $d \in \,]a, b[$ tel que $g(x) \geqslant o$, pour tout $x \in [a, d]$, $g(x) \leqslant o$ pour tout $x \in [d, b]$ et

$$\int_a^d g(x)\ dx = - \int_d^b g(x)\ dx$$

Utiliser le 1e) pour montrer que, si f est décroissante, on a

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx \leqslant \Big(f(a) - f(b)\Big) \int_a^d g(x)\ dx$$

3) A l'aide du α) 5°), déduire du β) 1°) que, si f est une fonction continue sur $[o, 1]$, alors

$$\left|\int_o^1 f(x)\ B_{2k+2}(x)\ dx\ \right| \leqslant |b_{2k+2}| \int_o^1 |f(x)|\ \ dx.$$

Déduire du β) 2°) que, si f est une fonction continue, décroissante sur $[o, 1]$, alors

$$\int_o^1 f\ (x)\ B_{2k+1}(x)\ dx \quad \text{a le signe de} \quad \frac{f(o) - f(1)}{2k+2}\ b_{2k+2}$$

et que l'on a

$$\left|\int_o^1 f(x)\ B_{2k+1}(x)\ dx\ \right| \leqslant (f(o) - f(1)\ )\ \left|\frac{b_{2k+2}}{2k+2}\right|.$$

γ) <u>Intégration par parties itérée.</u>

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$. Montrer, par récurrence sur l'entier p en utilisant l'intégration par parties, que, si f et g sont des fonctions de classe C^{p+1} sur un intervalle $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ $(\varepsilon > o)$, alors

$$(4) \int_o^{b-a} f^{(p+1)}(a+t)\, g(b-t)\, dt = \int_o^{b-a} f^{(p+1)}(b-t)\, g(a+t)\, dt$$

$$= \sum_{q=o}^{p} \left[f^{(q)}(b)\, g^{(p-q)}(a) - f^{(q)}(a)\, g^{(p-q)}(b) \right] + \int_o^{b-a} f(a+t)\, g^{(p+1)}(b-t)\, dt$$

Que devient cette formule lorsque $g(x) = \dfrac{(x-a)^p}{p\,!}$.

δ) <u>Application</u>. Dans (4) on suppose $b = a + 1$ et l'on pose

$g(x) = \dfrac{B_{p+1}(x - a)}{(p+1)\,!}$. Utiliser (1) et (2) pour montrer que l'on a,

lorsque $p = 2k$,

$$(5) \quad f(a) = \int_a^{a+1} f(t)dt - \frac{1}{2}\Big(f(a+1) - f(a)\Big) + \sum_{q=1}^{k} \frac{b_{2q}}{(2q)!}\Big(f^{(2q-1)}(a+1) - f^{(2q-1)}(a)\Big) - R_k(a)$$

où $R_k(a) = \dfrac{1}{(2k+1)!} \displaystyle\int_o^1 B_{2k+1}(t)\, f^{(2k+2)}(a+1-t)\, dt.$

Utiliser le β 3°) pour montrer que

1) $|R_k(a)| \leq \dfrac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} \displaystyle\int_a^{a+1} |f^{(2k+1)}(t)|\, dt$

où l'on a posé $\beta_{2k+1} = \sup\limits_{o \leq x \leq 1} |B_{2k+1}(x)|$.

2) si $f^{(2k+1)}(x)$ est de signe constant sur $[a, a+1]$,

alors $|R_k(a)| \leq \dfrac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} |f^{(2k)}(a+1) - f^{(2k)}(a)|$

3) si f est de classe C^{2k+2}, alors

./...

$$|R_k(a)| \leqslant \frac{|b_{2k+2}|}{(2k+2)!}\left[\left|f^{(2k+1)}(a+1) - f^{(2k+1)}(a)\right| + \int_a^{a+1} \left|f^{(2k+2)}(t)\right| dt\right]$$

compte tenu du fait que :

$$R_k(a) = \frac{1}{(2k+2)!}\int_o^1 f^{(2k+2)}(a+1-t)\, B_{2k+2}(t)dt - \frac{b_{2k+2}}{(2k+2)!}\left(f^{(2k+1)}(a+1) - f^{(2k+1)}(a)\right)$$

4) si f est de classe C^{2k+1} et si sa dérivée $2k+1$ ième est monotone sur $[a, a+1]$, alors

$R_k(a)$ a le même signe que $-\dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!}\left(f^{(2k+1)}(a+1) - f^{(2k+1)}(a)\right)$

et $|R_k(a)| \leqslant \left|\dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!}\left(f^{(2k+1)}(a+1) - f^{(2k+1)}(a)\right)\right|$.

II.- <u>Formule sommatoire d'Euler Mac Laurin.</u>

α) On suppose f de classe C^{2k+1} dans un intervalle $]1-\varepsilon, n+\varepsilon[$ pour un entier n donné $(\varepsilon > o)$. En remplaçant dans (5) a par p (entier compris entre 1 et $n-1$) et en sommant pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, montrer que l'on a

$$(6)\quad s_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} f(p) = \int_1^n f(t)dt - \frac{1}{2}\left(f(n) - f(1)\right) + \sum_{q=1}^{k} \frac{b_{2q}}{(2q)!}\left(f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(1)\right) - \rho_k(1,n)$$

avec $\rho_k(1,n) = \dfrac{1}{(2k+1)!}\displaystyle\int_1^n \bar{B}_{2k+1}(t)\, f^{(2k+1)}(n-t)\, dt$

où l'on a posé, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\bar{B}_{2k+1}(x) = B_{2k+1}(x - E[x])$ (où $E[x]$ désigne la partie entière de x).

./...

Utiliser le β) 3°) pour montrer que

1) avec les notations du γ 1), on a

$$|\rho_k(1,n)| \leqslant \frac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} \int_1^n |f^{(2k+1)}(t)| \, dt$$

2) si $f^{(2k+1)}(x)$ est de signe constant sur $[1,n]$ alors

$$|\rho_k(1,n)| \leqslant \frac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} \, |f^{(2k)}(n) - f^{(2k)}(1)|$$

3) si f est de classe C^{2k+2} alors

$$|\rho_k(1,n)| \leqslant \frac{|b_{2k+2}|}{(2k+2)!} \left[|f^{(2k+1)}(n) - f^{(2k+1)}(1)| + \int_1^n |f^{(2k+2)}(t)| \, dt \right]$$

Compte tenu du fait que

$$\rho_k(1,n) = \frac{1}{(2k+2)!} \int_1^n \overline{B}_{2k+2}(t) \, f^{(2k+2)}(n-t) \, dt - \frac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} \left(f^{(2k+1)}(n) - f^{(2k+1)}(1) \right)$$

avec $\overline{B}_{2k+2}(x) = B_{2k+2}(x - E[x])$

4) si f est de classe C^{2k+1} et si sa dérivée $2k+1$ ième est monotone

sur $[1,n]$ alors

$\rho_k(1,n)$ a le même signe que $- \dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} \left(f^{(2k+1)}(n) - f^{(2k+1)}(1) \right)$

et $|\rho_k(1,n)| \leqslant \left| \dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} \left(f^{(2k+1)}(n) - f^{(2k+1)}(1) \right) \right|$.

./...

β) On suppose maintenant que f est de classe C^{2k+1} sur $]1-\varepsilon, \infty[$, que $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ est convergente, que $f(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \infty$, que $f^{(2q-1)}(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \infty$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$, et que $\int_1^{\infty} \overline{B}_{2k+1}(-t)\, f^{(2k+1)}(t)\,dt$ est convergente. Montrer que

$$(7) \quad r_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{m} f(p) = \int_n^{\infty} f(t)\,dt + \frac{1}{2} f(n) - \sum_{q=1}^{k} \frac{b_{2q}}{(2q)!} f^{(2q-1)}(n) - \rho_k(n, \infty)$$

où $\rho_k(n,\infty) = \dfrac{1}{(2k+1)!} \displaystyle\int_n^{\infty} \overline{B}_{2k+1}(-t)\, f^{(2k+1)}(t)\,dt$

(pour le voir développer $\rho_k(n, m) = \dfrac{1}{(2k+1)!} \displaystyle\int_n^{m} f^{(2k+1)}(m-t)\, \overline{B}_{2k+1}(t)\,dt$

(pour $m \geqslant n$) à l'aide de (6) et passer à la limite quand $m \longrightarrow \infty$).

Utiliser β) 3°) pour montrer que

1) si $\int_n^{\infty} |f^{(2k+1)}(t)|\,dt < \infty$, alors avec les notations du γ 1°) on a

$$|\beta_k(n,\infty)| \leqslant \frac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} \int_n^{\infty} |f^{(2k+1)}(t)|\,dt$$

2) si $f^{(2k+1)}(x)$ est de signe constant sur $[n, \infty]$, alors

$$|\rho_k(n,\infty)| \leqslant \frac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!} |f^{(2k)}(n)|$$

3) si f est de classe C^{2k+2} et si $\int_n^{\infty} |f^{(2k+2)}(t)|\,dt < \infty$, alors

./...

$$|\rho_k(1,n)| \leqslant \frac{|b_{2k+2}|}{(2k+2)!}\left[|f^{(2k+1)}(n)| + \int_n^\infty |f^{(2k+2)}(t)|\,dt\right],$$

compte tenu du fait que

$$\rho_k(n,\infty) = \frac{1}{(2k+2)!}\int_n^\infty \bar{B}_{2k+2}(-t)\, f^{(2k+2)}(t)\,dt + \frac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+1)}(n)$$

4) si f est de classe C^{2k+1} et si sa dérivée $2k+1$ ième est monotone sur $[n,\infty]$ alors

$\rho_k(n,\infty)$ a le même signe que $-\dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+1)}(n)$

et $|\rho_k(n,\infty)| \leqslant \left|\dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+1)}(n)\right|$

γ) On suppose maintenant qu'il existe un entier $\ell (o \leqslant \ell < k)$ tel que

$\int_1^\infty \bar{B}_{2\ell+1}(-t)\, f^{(2\ell+1)}(t)\,dt$ est convergente

que $f^{(2q-1)}(x)$ tend vers zéro quand $x \longrightarrow \infty$ pour $\ell+1 \leqslant q \leqslant k$

et que $\int_1^\infty |f^{(2k+1)}(t)|\,dt < \infty$. Montrer, en développant $\rho_\ell(1,n)$ à l'aide de 6

et $\rho_k(n,\infty)$ à l'aide de 7, que l'on a

$$s_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} f(p) = \int_1^n f(t)\,dt - \frac{1}{2}\Big(f(n) - f(1)\Big) + \sum_{q=1}^{\ell} \frac{b_{2q}}{(2q)!}\Big(f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(1)\Big) \tag{8}$$

$$+ K + \sum_{q=\ell+1}^{k} \frac{b_{2q}}{(2q)!} f^{(2q-1)}(n) - \rho_k(n,\infty)$$

./...

où l'on a posé $K = \rho_{\ell}(1,\infty) = \frac{1}{(2\ell+1)!}\int_1^{\infty} \bar{B}_{2\ell+1}(-t)\, f^{(2\ell+1)}(t)\, dt$

qui est finie par hypothèse. Montrer que les majorations de $\rho_k(n,\infty)$ données en β) sont encore valables.

δ) Utiliser la formule (8) pour donner des développements limités en $\frac{1}{n}$ d'ordre arbitrairement grand de h_n, ℓ_n, $\gamma - \gamma_{n-1}$, $k - k_{n-1}$ et α_n (exemples 6, 7 et 8 du § o/).

Utiliser les formules 6 et 7 pour donner des développements limités en $\frac{1}{n^q}$ $(q \in Z)$ des sommes $\zeta_n(k)$ définies dans la remarque du théorème 5, et calculer les développements limités des exemples proposés dans cette remarque.

ε) Par un changement de variable dans (5), montrer que si f est de classe C^{2k+1} sur un intervalle $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ alors on a

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}f(o) + f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{2}{n}) + \dots + f(\tfrac{n-1}{n}) + \frac{1}{2}(f(1)\right]$$

$$- \sum_{q=1}^{k} \frac{b_{2q}}{(2q)!}\,\frac{1}{n^{2q}}\left(f^{(2q-1)}(1) - f^{(2q-1)}(o)\right) + \rho'_k(n)$$

avec $|\rho'_k(n)| \leqslant \frac{\beta_{2k+1}}{(2k+1)!}\,\frac{1}{n^{2k+1}}\int_0^1 |f^{(2k+1)}(t)|\, dt.$

./...

7.- Produit de convolution des séries absolument convergentes.

Remarque. On sait que, si les suites (u_n) et (v_n) tendent respectivement vers des limites u et v, alors le produit terme à terme $(u_n v_n)$ de ces suites tend vers uv. Ce serait une erreur de croire que, si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes et de sommes respectives s et t, alors la série de terme général $u_n v_n$ a pour somme st.

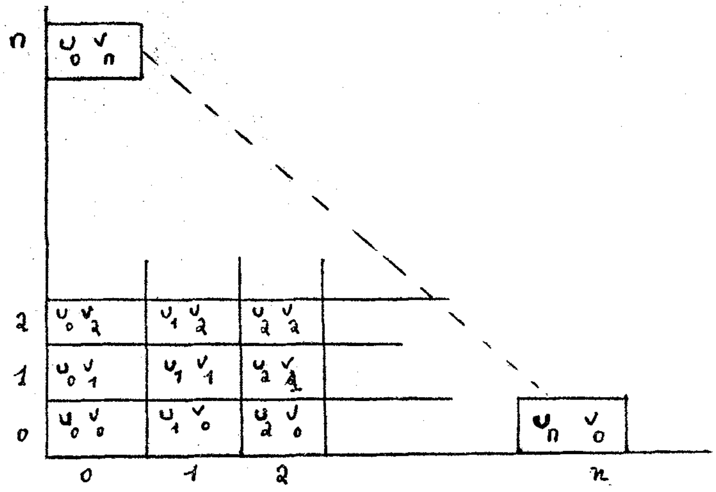
On va définir, sur l'espace S des suites, une nouvelle notion de produit possédant cette propriété que l'on appellera produit de convolution pour le distinguer du produit terme à terme.

Définition. Soient $\underline{u} = (u_n)$ et $\underline{v} = (v_n)$ des suites de nombres réels ou complexes. On appelle produit de convolution de $\underline{u}$ et de $\underline{v}$ et l'on note $\underline{u} * \underline{v}$ la suite $\underline{w} = (w_n)$ définie par

$$w_n = u_o v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_o = \sum_{p=o}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q .$$

En revenant aux notations du § 1), ce produit est entièrement déterminé par la table de multiplication $\underline{e}_i * \underline{e}_j = \underline{e}_{i+j}$ pour tous $i, j \in N$.

./...



Propriétés fondamentales.

Quels que soient $\underline{u}, \underline{u'}, \underline{v}, \underline{v'} \in S$ on montrera à titre d'exercice que

$\underline{u} * \underline{v} = \underline{v} * \underline{u}$ (commutativité)

$\underline{u} * (\underline{v} * \underline{v'}) = (\underline{u} * \underline{v}) * \underline{v'}$ (associativité)

$\underline{u} * \underline{e}_o = \underline{e}_o * \underline{u} = \underline{u}$ (existence d'un élément neutre).

$(\underline{u} + \underline{u'}) * \underline{v} = \underline{u} * \underline{v} + \underline{u'} * \underline{v}$ (distributivité à gauche par rapport à l'addition)

$\underline{u} * (\underline{v} + \underline{v'}) = \underline{u} * \underline{v} + \underline{u} * \underline{v'}$ (distributivité à droite par rapport à l'addition).

Ces propriétés expriment que l'espace vectoriel S muni de cette opération est un anneau.

En outre, quel que soit $\lambda \in K$ on a

$(\lambda u) * \underline{v} = \underline{u} * (\lambda \underline{v}) = \lambda(\underline{u} * \underline{v})$ (compatibilité avec l'homothétie).

(un groupe abélien muni à la fois de structures d'anneau et d'espace vectoriel compatibles au sens précédent s'appelle une <u>algèbre</u> : c'est le cas par exemple de l'anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un corps commutatif K).

<u>Théorème 8</u>. Soient $\underline{u} = (u_n)$, $\underline{v} = (v_n)$ des suites et $\underline{u} * \underline{v} = (w_n)$ leur

./...

produit. Si les séries de terme général u_n et v_n sont absolument convergentes et de sommes respectives s et t, alors la série de terme général W_n est absolument convergente et de somme st.

Démonstration.

i) notation. Quel que soit $n \in N$ on pose

$$W_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q \qquad W'_n = \sum_{p+q=n} |u_p| \, |v_q|$$

$$s_n = \sum_{p=o}^{n} u_p \qquad s'_n = \sum_{p=o}^{n} |u_p|$$

$$t_n = \sum_{p=o}^{n} v_p \qquad t'_n = \sum_{p=o}^{n} |v_p|$$

$$z_n = \sum_{p=o}^{n} W_p = \sum_{p+q\leq n} u_p v_q \quad (*) \; z'_n = \sum_{p=o}^{n} W'_p = \sum_{p+q\leq n} |u_p| \, |v_q|$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad s' = \lim_{n\to\infty} s'_n$$

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n \qquad t' = \lim_{n\to\infty} t'_n$$

$\left((*) \text{ Noter qu'on n'a pas } z'_n = \sum_{p=o}^{n} |W_p|\right).$

ii) convergence absolue. Pour montrer que la série de terme général W_n est absolument convergente, il suffit de vérifier que $\sum_{n=o}^{\infty} W'_n < \infty$,

./...

car pour tout $n \in N$ on a $|W_n| \leqslant W'_n$.

En d'autres termes, il suffit de montrer que la suite croissante (z'_n) est bornée. Or on a

$$z'_n = \sum_{p+q\leqslant n} |u_p|\ |v_q| \leqslant \sum_{\substack{o\leqslant p\leqslant n \\ \text{et } o\leqslant q\leqslant n}} |u_p|\ |v_q| = s'_n t'_n \leqslant s't'.$$

iii) <u>Calcul de la somme</u>. Montrer que la série de terme général W_n a pour somme $s \cdot t$, revient, puisque $(s_n t_n) \longrightarrow st$, à montrer que la suite $(s_n t_n - z_n) \longrightarrow o$ quand $n \longrightarrow \infty$. Or on a

$$|s_n t_n - z_n| = \Big|\sum_{\substack{p+q>n \\ p\leqslant n \text{ et } q\leqslant n}} u_p v_q\Big| \leqslant \sum_{\substack{p+q>n \\ p\leqslant n \text{ et } q\leqslant n}} |u_p|\ |v_q| = s'_n t'_n - z'_n.$$

Il suffit donc de montrer que la suite $(s'_n t'_n - z'_n) \longrightarrow o$.

Si $k = E\,[\frac{n}{2}]$ (c'est-à-dire si $k = \frac{n}{2}$ ou $k = \frac{n-1}{2}$ selon que n est pair ou impair), alors les inégalités $p \leqslant k$ et $q \leqslant k$ entraînent $p + q \leqslant n$ et par suite $s'_k t'_k = z'_n$.

On en déduit que

$$s'_n t'_n - z'_n \leqslant s'_n t'_n = (s'_n - s'_k)t'_k + s'_n(t'_n - t'_k) \leqslant (s'_n - s'_k)t'_n + s'_n(t'_n - t'_k)$$

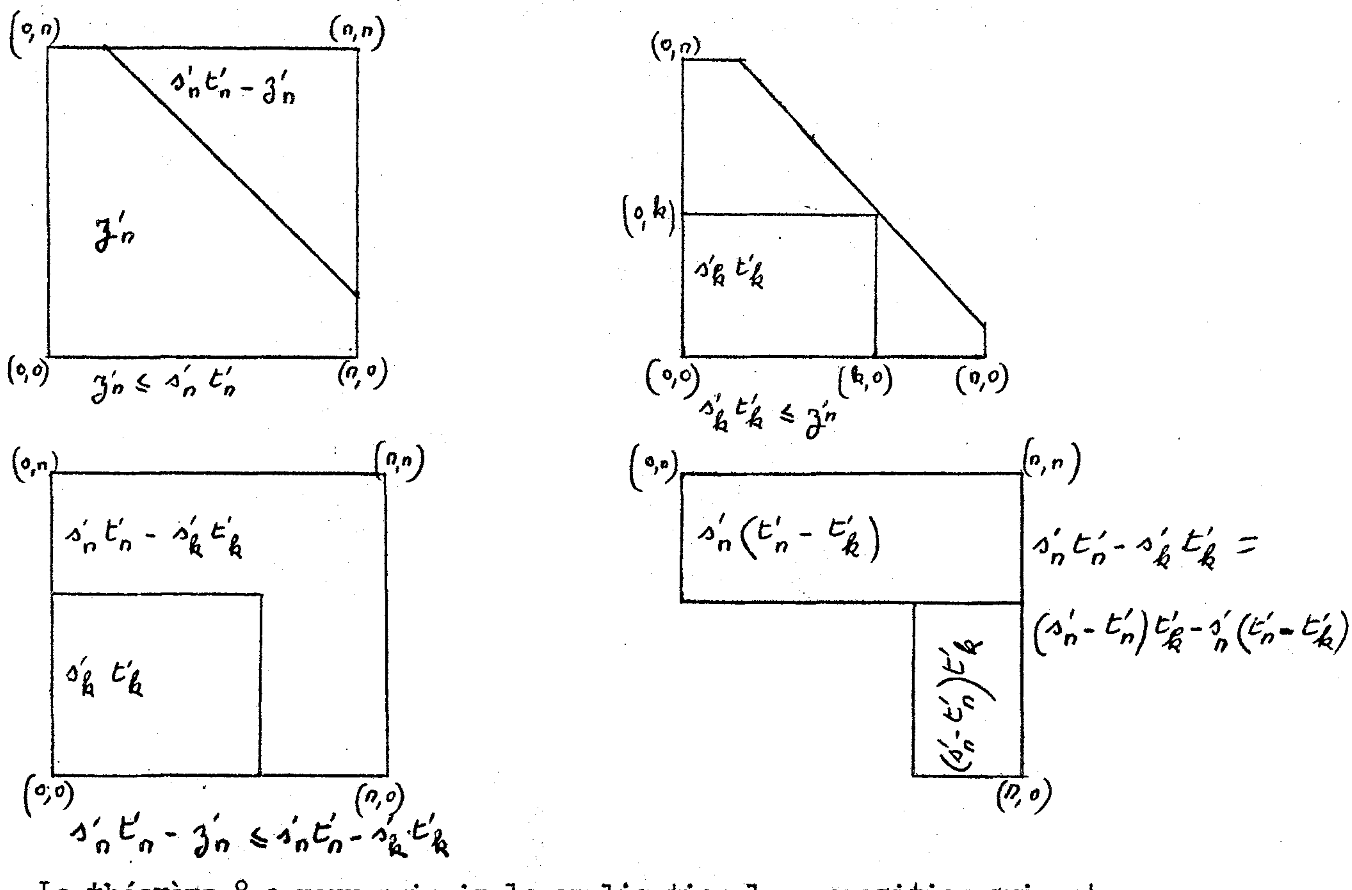
$$\leqslant (s'_n - s'_k)t' + s'(t'_n - t'_k) \leqslant (s' - s'_k)t' + s'(t' - t'_k),$$

./...

puisque les suites (s'_n) et (t'_n) sont croissantes et bornées par s' et t'.

Comme les suites (s'_n) et (t'_n) tendent respectivement vers s' et t' et, puisque $k \longrightarrow \infty$ avec n, on voit que le dernier membre de l'inégalité précédente tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$, ce qui achève la démonstration.

IV.- Représentation schématique des ensembles de couples d'indices sur lesquels ont été effectuées les sommations utilisées dans la démonstration.



Le théorème 8 a pour principale application la proposition suivante, essentielle pour la suite.

<u>Proposition 8</u>. Soient (a_n) et (b_n) des suites pour lesquelles il existe un nombre $R_o > o$ tel que $(a_n R^n_o)$ et $(b_n R^n_o)$ soient bornées en valeur absolue, alors pour tout $r \in [o, R_o[$ la série de terme général $c_n r^n$ (où l'on a posé $c_n = \sum_{p=o}^{n} a_p b_{n-p}$) est absolument convergente.

En effet, si l'on pose $\underline{u}_r = (a_n r^n)$ et $\underline{v}_r = (b_n r^n)$, alors $\underline{u}_r * \underline{v}_r = c_n r^n$.

On sait, par la proposition 3, que les séries associées $\underline{u}_r$ et $\underline{v}_r$ sont absolument convergentes, ce qui permet de leur appliquer le théorème 8.

8.- <u>Convergence des séries non absolument convergentes</u>.

a) <u>Transformation d'Abel</u>. Il est impossible de donner des conditions sur le terme général u_n d'une série qui permettent de décider dans tous les cas si la série donnée est convergente ou non. Cependant, il existe des procédés permettant d'étudier des séries de types particuliers. Le plus courant d'entre eux, est l'analogue pour les séries de l'intégration par parties et fait l'objet du lemme suivant.

<u>Lemme</u>. (<u>Transformation d'Abel</u>) Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soient (s_n) la suite des sommes partielles de la suite (u_n) et (t_n)

./...

la suite des sommes partielles de la suite $(u_n v_n)$, alors on peut écrire :

$$t_n = s_n v_n - \sum_{p=o}^{n-1} s_p \, (v_{p+1} - v_p) \quad \text{et lorsque} \quad m > n$$

$$t_m - t_n = s_m v_m - s_n v_{n+1} - \sum_{p=n+1}^{m-1} s_p \, (v_{p+1} - v_p).$$

En effet, en écrivant que (u_n) est la suite des différences (§ 3/ a)) de la suite (s_n), on peut mettre t_n sous la forme :

$$(1) \quad t_n = \sum_{p=o}^{n} u_p v_q = s_o v_o + \sum_{p=1}^{n} (s_p - s_{p-1}) \, v_p$$

$$= \sum_{p=o}^{n-1} s_p (v_p - v_{p-1}) + s_n v_n$$

<u>Proposition 9</u>. Soient (u_n) une suite de nombres réels et (v_n) une suite décroissante de nombres positifs. On désigne par (s_n) la suite des sommes partielles de la suite (u_n) et l'on suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on ait

(2) $\lambda \leqslant s_n \leqslant \mu$.

Sous ces hypothèses si (t_n) désigne la suite des sommes partielles de la suite $(u_n v_n)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

(3) $\lambda \, v_o \leqslant t_n \leqslant \mu \, v_o$.

./...

<u>Démonstration</u>. Comme par hypothèse pour tous les entiers $p, n \geq o$ on a

$$v_p - v_{p+1} \geq o \qquad \text{et} \quad v_n \geq o,$$

on déduit de (2) les inégalités

(4) $\lambda\,(v_p - v_{p+1}) \leq s_p(v_p - v_{p+1}) \leq \mu\,(v_p - v_{p+1})$ et

(5) $\lambda\, v_n \leq s_n v_n \leq \mu\, v_n$.

En sommant les inégalités (4) pour $o \leq p \leq n - 1$ et en ajoutant (5), compte tenu de (1) on obtient (3), ce qui démontre la proposition.

<u>Théorème 9</u>.

Soient (z_n) une suite de nombres complexes et (ε_n) une suite décroissante de nombres positifs tendant vers zéro. Si la suite (s_n) des sommes partielles de (z_n) est bornée en valeur absolue par une constante $\mu \geq o$, alors la série de terme général $z_n \varepsilon_n$ est convergente. Soit t sa somme ; en posant

$$r_n = t - \sum_{p=o}^{n-1} z_p \varepsilon_p, \quad \text{on a}$$

(6) $|r_n| \leq 2\mu\, \varepsilon_n$.

<u>Démonstration</u>. Soit (t_n) la suite des sommes partielles de $(z_n \varepsilon_n)$

./...

quels que soient les entiers q et $p \geqslant o$ on a

$$|s_q| \ (\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}) \leqslant \mu \ (\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1})$$

et $|s_p| \ \varepsilon_p \leqslant \mu \ \varepsilon_p$.

En outre, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|s_{n-1}| \varepsilon_n \leqslant \mu \ \varepsilon_n.$$

Dans ces conditions en appliquant la transformation d'Abel quels que soient les entiers n et p $(n < p)$ il vient, en sommant la 1ère inégalité pour $n \leqslant q \leqslant p-1$ et en ajoutant la seconde et la 3ème

$$|t_p - t_{n-1}| \leqslant \sum_{q=n}^{p-1} |s_q| \ (\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}) + |s_p| \ \varepsilon_p + |s_{n-1}| \ \varepsilon_n \leqslant 2\mu \ \varepsilon_n$$

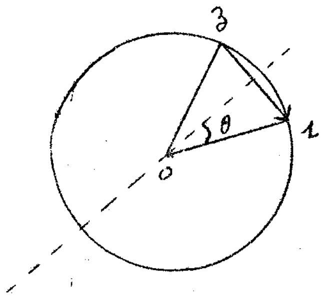
expression qui tend vers zéro par hypothèse, ce qui montre que la suite (t_n) est une suite de Cauchy et par conséquent qu'elle tend vers une limite $t \in \mathbb{C}$.

Dans l'inégalité précédente en faisant tendre p vers l'infini n restant fixe, on obtient (6), ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. Soit (a_n) une suite de nombres positifs et soit $z \neq 1$ un nombre complexe tel que $|z| = 1$; on pose $\theta = \arg z$. Pour que la série de terme général $a_n z^n$ soit convergente il suffit que (a_n) soit décroissante et tende vers zéro quand $n \to \infty$. Lorsqu'il en est ainsi, soit t la somme de la série ; alors on a

./...

$$|r_n| = |t - \sum_{p=o}^{n-1} a_n z^n| \leqslant 2\mu|a_n|$$



où $\mu = \dfrac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$.

En effet, posons

$$s_n = \sum_{p=o}^{n} z^p = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{(puisque } (1 - z) \neq o \text{ par hypothèse)}$$

on a $|1 - z| = 2\ |\sin \frac{\theta}{2}|$

et $|1 - z^{n+1}| \leqslant 2$

d'où $|s_n| \leqslant \mu = \dfrac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$,

le théorème 9 montre alors que la série est convergente et donne la majoration de $|r_n|$.

<u>Remarque</u>. Le théorème 9 et son corollaire deviennent faux si on ne suppose pas (ε_n) et (a_n) décroissantes.

b) <u>Cas particulier : Série alternée</u>.

<u>Définition</u>. Une série de nombres réels est dits <u>alternée</u> si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geqslant o$.

<u>Proposition 10</u>. Pour qu'une série alternée soit convergente, il suffit que la valeur absolue de son terme général u_n soit décroissante et tende vers zéro. Lorsqu'il en est ainsi, le reste r_n de la série est majoré en

./...

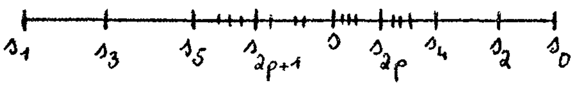
valeur absolue par $|u_n|$ et a le signe de u_n.

Pour le voir on applique le corollaire précédènt avec $\theta = \pi$, ce qui donne $\mu = 1$. Alors il rèste seulement à déterminer le signe et la valeur absolue de r_n lorsque la série est convergente. Il suffit pour cela de remarquer que, quel que soit l'entier $p \geqslant o$, on a

$u_{2p} + u_{2p+1} \geqslant o$ et $u_{2p+1} + u_{2p+2} \leqslant o$.

On en déduit que les sous-suites (s_{2p+1}) et (s_{2p}) de la suite (s_n) des sommes partielles de (u_n) sont respectivement croissantes et décroissantes et tendent toutes deux vers la somme s de la série.

On voit alors que $|r_n| = |s - s_{n-1}| \leqslant |s_n - s_{n-1}| \leqslant |u_n|$ et que $r_n = s - s_{n-1}$ a le signe de $s_n - s = u_n - r_n$, qui a même signe que u_n puisque $|r_n| \leqslant |u_n|$



<u>Exercice 24</u>. Soit (u_n) une suite de nombres réels, non nuls, tendant vers zéro. On suppose qu'il existe un nombre réel $r (o < r < 1)$ et un entier $n_o \geqslant o$, tels que, lorsque $n > n_o$ on a :

$$-1 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$$

α) Montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante (au sens large).

./..

β) On désigne par $\mathcal{J}$ l'ensemble des entiers $n > n_o$ pour lesquels on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > o$

Lorsque $\mathcal{J}$ est fini, utiliser la proposition 10 et α) pour montrer que la série de terme général u_n est convergente.

γ) On súppose désormais que $\mathcal{J}$ est infini et on ordonne ces éléments en une sous-suite (n_p) $(p \geq 1)$ de façon à avoir $n_o < n_1 < n_2 < \ldots$

En notant (s_n) la suite des sommes partielles de la suite (u_n), montrer qu'on a

$$|s_n - s_{n_p}| \leq |u_{n_p + 1}| \leq |u_{n_o + 1}| r^p \quad (1)$$

lorsque $n_p < n \leq n_{p+1}$

δ) Soit (v_p) la suite obtenue en posant

$$v_o = s_{n_o} \quad \text{et} \quad v_p = s_{n_p} - s_{n_{p-1}} \quad \text{lorsque} \quad p \geq 1$$

Déduire de (1) que la série de terme général v_p est absolument convergente. On désigne sa somme par s.

ε) Montrer que, pour tout nombre réel $\varepsilon > o$ et tout entier $p \geq \frac{\log((1-r)\frac{\varepsilon}{2})}{\log r}$ on a $|s - s_{n_p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_{n_p + 1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

A l'aide de (1) en conclure que la série de terme général u_n est convergente.

? ./..

Exercice 25. Utiliser les calculs de l'exemple 9 § o/ pour montrer que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(Ecrire π_n et constater que l'on sait déjà que $2\pi_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$).

Exercice 26.

α) Montrer, par récurrence sur n, que, lorsque $o \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})} = 2^n \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{x}{2^p} .$$

β) En déduire que $\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$.

γ) Trouver, à l'aide de β, une expression de $\frac{2}{\pi}$ sous forme de produit infini (on utilisera la relation $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$).

— . — . — . — . — . —

9.- Notion de produit infini.

Définition. Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes $\neq -1$. On appelle produit infini de terme général $1 + u_n$ la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $\pi_n = \prod_{q=o}^{n} (1 + u_q)$.

Conformément à la convention faite au § 1, lorsque le terme général du produit n'est défini qu'à partir d'un certain rang n_o on conviendra que les termes non définis sont égaux à 1. C'est-à-dire que les u_n non définis seront supposés nuls.

Proposition 11. Soit (u_n) une suite de nombres réels (n.b.) supérieurs à -1.

α) Une condition nécessaire et suffisante, pour que le produit infini de terme général $1 + u_n$ existe, est que la série de terme général $\log(1 + u_n)$ soit convergente.

β) Pour que le produit infini de terme général $1 + u_n$ existe il suffit que la série de terme général u_n soit absolument convergente.

Démonstration.

α) résulte de ce que l'application $\log(1 + x)$ est continue et strictement monotone sur $]-1, \infty[$.

En effet, pour que la suite (π_n) tende vers une limite il faut et il suffit que la suite $s_n = \sum_{p=o}^{n} \log(1 + u_p) = \log(\pi_n)$ tende vers une limite.

Pour montrer β) on applique la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction $\log(1 + x)$. Il vient $\log(1 + u_n) = u_n + v_n$ avec $v_n = o(u_n)$ ou encore $v_n = O(u_n)$. Comme la série de terme général u_n est absolument convergente, le théorème 3 montre que la série de terme général v_n converge et par suite aussi la série de terme général $u_n + v_n$. On peut alors appliquer α.

(n.b.) L'hypothèse $u_n \in \mathbb{R}$ n'est pas nécessaire lorsqu'on dispose du logarithme d'un nombre complexe.

./...

II.- Séries de Fonctions.

1°). Notion de convergence simple.

a) Limite simple d'une suite de fonctions. Soit E un ensemble. L'ensemble K^E des applications de E dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur K, pour la loi d'addition

$$\left.\begin{array}{l}(f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{et pour l'homothétie} \\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{quels que soient } f, g \in K^E, \text{ pour tout} \\ x \in E \text{ et pour tout } \lambda \in K.\end{array}$$

On vérifiera, à titre d'exercice, que les axiomes des espaces vectoriels sont vérifiés par ces deux lois.

Une suite $\underline{u}(x) = (u_n(x))$ de fonctions définies dans E à valeurs dans K est une application de N (ou plus généralement de l'ensemble des entiers $n \geqslant n_o \in Z$ donné) dans K^E ; c'est aussi, si l'on veut, une fonction $u(n, x)$ définie sur $N \times E$ à valeurs dans K. L'ensemble des suites de fonctions $E \longrightarrow K$ est donc lui aussi un espace vectoriel.

[Lorsqu'une suite $\underline{u}(x) = (u_n(x))$ de fonctions n'est définie qu'à partir d'un entier $n_o > o$, on pourra toujours convenir que

$u_o(x) = u_1(x) = \dots = u_{n_o - 1}(x) = o$ quel que soit $x \in E$

et raisonner comme si $\underline{u}(x)$ était définie sur N tout entier].

Pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ est une application de N dans K. C'est donc une suite numérique à laquelle les constructions et les résultats du chapitre précédent sont applicables.

Définition. Limite simple. On dit qu'une suite $(u_n(x))$ de fonctions définies dans E à valeurs dans K tend (ou, lorsqu'on a besoin de préciser, tend simplement) vers une limite $u(x) : E \longrightarrow K$ si pour tout $x \in E$ la suite numérique $(u_n(x))$ tend vers une limite $u(x)$.

Plus généralement, soit $D \subset E$ l'ensemble des x tels que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$ existe et soit finie, on dit $(u_n(x))$ tend, sur D, vers la fonction $u(x) : D \longrightarrow K$.

Exemple. La suite $u_n(x) = x^n$ est une suite de fonctions définies dans R tout entier et dont la limite $u(x)$ est définie sur $]-1, +1]$. On a

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \in]-1, +1[\\ 1 & \text{lorsque } x = 1 \end{cases}$$

Remarque. Comme on va le voir dans les exemples suivants, les propriétés (être dérivable, continue ou bornée, etc...) vérifiées par chacune des fonctions u_n d'une suite, qui admet une limite simple u, ne se conservent

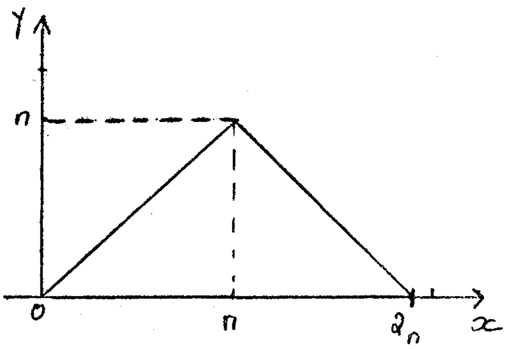
./...

pas en général lorsqu'on passe à la limite. On étudiera plus loin une notion de convergence plus stricte (la convergence uniforme) permettant d'affirmer que u est bornée ou continue quand les u_n sont bornées ou continues.

(1) Lorsque les fonctions $u_n(x)$ sont bornées et lorsque la suite (u_n) est simplement convergente, on ne peut en déduire que la limite $u(x)$ de cette suite est bornée.

Exemple. Sur $E = \mathbb{R}^+$, les fonctions

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{lorsque} \quad o \leqslant x \leqslant n \\ -x+2n & \text{lorsque } n \leqslant x \leqslant 2n \\ o & \text{lorsque} \quad 2n \leqslant x \end{cases}$$

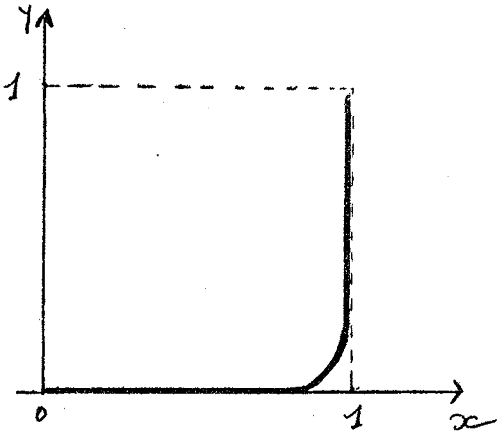


sont bornées et pourtant la suite $(u_n(x))$ admet pour limite $u(x) = x$ qui n'est pas bornée.

(2) Lorsque les fonctions $u_n(x)$ sont continues et lorsque la suite (u_n) est simplement convergente, on ne peut en déduire que la limite $u(x)$ de cette suite est continue.

./...

<u>Exemple</u>. Sur $E = [o, 1]$ les fonctions $u_n(x) = x^n$ sont continues et pourtant la suite $(u_n(x))$ tend vers la limite



$$u(x) = \begin{cases} o & \text{lorsque} \quad x \in [o, 1] \\ 1 & \text{lorsque} \quad x = 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue.

(3) Lorsque la suite $u_n(x)$ tend vers une limite $u(x)$ la suite numérique $v_n = \sup_{x \in E} |u(x) - u_n(x)|$

ne tend pas nécessairement vers zéro.

<u>Exemple</u>. La suite de fonctions

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & \text{lorsque} \quad o \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ -nx+2 & \text{lorsque} \ 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ o & \text{lorsque} \quad 2/n \leqslant x \end{cases}$$

ond vers zéro et cependant $\sup_{x \in R^+} |u_n(x)| = 1$.

La suite de fonctions

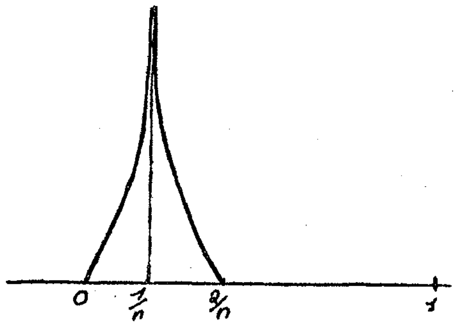
$$u_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{lorsque} \quad o \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^2x+2n & \text{lorsque} \ 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ o & \text{lorsque} \quad 2/n \leqslant x \end{cases}$$

tend vers zéro et cependant $\sup_{x \in R^+} |u_n(x)| = n$

(4) Lorsque les fonctions $u_n(x)$, définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sont telles que $\int_a^b u_n(x)\,dx$ soit définie quel que soit $n \in N$ et lorsque la suite (u_n) tend vers une limite $u(x)$, on ne peut en déduire que $\int_a^b u(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

Exemple. La suite de fonctions

$$u_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{lorsque } o \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^2x+2n & \text{lorsque } 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ o & \text{lorsque } 2/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$



tend vers zéro et cependant $\int_o^1 u_n(x)dx = 1$ pour tout $n \in N$.

La suite de fonctions

$$u_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{lorsque } o \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^3x+2n^2 & \text{lorsque } 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ o & \text{lorsque } 2/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

tend vers zéro et cependant $\int_o^1 u_n(x)dx = n \longrightarrow \infty$.

b) <u>Convergence simple d'un série de fonctions</u>.

A partir d'une suite de fonctions $(u_n(x))$ on peut former la suite $(s_n(x))$ de <u>ses sommes partielles</u> en posant, pour tout $n \in N$, $s_n(x) = \sum\limits_{p=o}^{n} u_p(x)$.

./...

De même, à partir d'une suite $(s_n(x))$, on peut former la suite $(u_n(x))$ de ses <u>différences</u> en posant

$u_o(x) = s_o(x)$ et pour tout $n \geqslant 1$ $u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$

<u>Définitions</u>

1) La suite $(s_n(x))$ des sommes partielles d'une suite $(u_n(x))$ s'appelle la <u>série de terme général $u_n(x)$</u>.

2) Lorsque, quel que soit $x \in E$, la suite $(s_n(x))$ tend vers une limite finie $s(x)$, on dit que la série <u>converge</u> (ou, si l'on a besoin de préciser <u>converge simplement</u>) et que la fonction $s(x)$ est sa somme. On note

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=o}^{n} u_p(x) = \sum_{p=o}^{\infty} u_p(x).$$

3) Lorsque la suite $(s_n(x))$ ne tend vers une limite finie $s(x)$ que sur un sous-ensemble $D \subset E$ (éventuellement vide), alors l'expression

$$\sum_{u=o}^{\infty} u_n(x)$$ représente l'application $u(x) : D \longrightarrow K$.

4) Lorsque $u_n(x)$ est le terme général d'une série simplement convergente sur un sous-ensemble D de E de somme $s(x)$, la suite

$$r_n(x) = s(x) - s_{n-1}(x) \quad \text{(où l'on a posé } s_{n-1}(x) = \sum_{p=o}^{n-1} u_p(x))$$

./...

est définie sur D et s'appelle la suite des restes de la série de terme général $u_n(x)$. Noter que cette suite tend simplement vers zéro sur D.

Remarque. Comme plus haut, on peut constater sur des exemples que la somme $s(x)$ d'une série de terme général $u_n(x)$ ne possède pas nécéssairement les propriétés des fonctions u_n. Néanmoins, lorsqu'on connaît déjà une fonction $s(x)$ il est souvent intéressant de pouvoir démontrer qu'il existe un sous-ensemble D de E sur lequel elle peut se mettre sous la forme d'une série de terme général $u_n(x)$.

On va maintenant étudier une illustration importante de cette remarque.

c) Séries de Taylor.

Soit $f(x)$ une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant l'origine. La formule de Taylor permet d'écrire, quel que soit l'entier $n \geq 1$ $f(x) = s_{n-1}(x) + r_n(x)$ (pour tout $x \in I$)

où, pour un certain nombre $\theta \in]0, 1[$,

$$r_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = O(x^n) = o(x^{n-1})$$

quand x tend vers zéro, et où l'on a posé

$s_0(x) = u_0(x) = f(0)$ et, pour tout $p \geq 1$ $s_p(x) - s_{p-1}(x) = u_p(x) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

./...

Remarque 1. Rappelons que, si par d'autres méthodes, on parvient à écrire f sous la forme

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \rho_n(x)$$

où $\rho_n(x) = o(x^{n-1})$ et où $P_{n-1}(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq n-1$, alors on a nécéssairement $P_{n-1} = s_{n-1}$ et $\rho_n = r_n$.

En effet, par soustraction il vient

$$P_{n-1}(x) - s_{n-1}(x) = r_n(x) - \rho_n(x) = o\,(x^{n-1})$$

ce qui n'est possible que si le polynôme $P_{n-1} - s_{n-1} \equiv o$ (unicité du développement limité).

En particulier, soient f et g des fonctions de classe C^∞ sur I et

$$f(x) = s_{n-1}(x) + r_n(x)$$

et $$g(x) = t_{n-1}(x) + r'_n(x)$$

leur développement de Taylor à l'ordre $n-1$. Alors

$$(s_{n-1}(x) + t_{n-1}(x)\ ) + (r_n(x) + r'_n(x)\ )$$

est le développement de Taylor à l'ordre $n-1$ de $(f+g)\,(x)$;

si λ est un nombre réel,

$s_{n-1}(\lambda x) + r_n(\lambda x)$ est le développement à l'odre $n-1$ de $f(\lambda x)$;

...

enfin, pour tout entier p positif

$s_{n-1}(x^p) + r_n(x^p)$ est le développement à l'ordre $p\,n-1$ de $f(x^p)$

et $x^p s_{n-1}(x) + x^p r_n(x)$ est le développement à l'odre $p + n-1$ de $x^p f(x)$.

<u>Définition</u>. Soit f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de $o \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n(x) = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}x^n$ s'appelle la <u>série de Taylor de f</u>.

<u>Remarque 2</u>. D'après la remarque 1, si, en un point $x_o \in \mathbb{R}$, les séries de Taylor de f et g convergent respectivement vers $f(x_o)$ et $g(x_o)$, les séries de Taylor des fonctions $f + g$, λf, $f(\lambda x)$ $f(x^p)$ et $x^p f(x)$ tendent respectivement en x_o vers les limites $f(x_o) + g(x_o)$, $\lambda f(x_o)$, $f(\lambda x_o)$, $f({x_o}^p)$ et ${x_o}^p f(x_o)$.

<u>Remarque 3</u>. Quel que soit $x \in I$, pour que la série de terme général $u_n(x) = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}x^n$ soit convergente et de somme $f(x)$, il faut et il suffit que $r_n(x)$ tende vers zéro quand $n \to \infty$.

Il en est toujours ainsi pour $x = o$. Mais on ne peut rien conclure à priori, lorsque x n'est pas nul, comme le montre l'exemple suivant. On va donc étudier le reste $r_n(x)$ du développement taylorien des fonctions usuelles, afin de savoir s'il existe un voisinage de l'origine sur lequel ces fonctions s'identifient à la somme de leur série de Taylor.

i) la fonction $f(x) = e^{-1/x^2}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Quel que soit $n \in N$, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Qn(x)} e^{-1/x^2}$$

où P_n et Qn sont des polynômes déterminées par les formules de récurrence

$P_o = 1$, $Q_o = 1$ et pour tout $n \geq 1$

$P_n(x) = 2P_{n-1} Q_{n-1} + x^3 P'_{n-1} Q_{n-1} - x^3 P_{n-1} Q'_{n-1}$

et $Q_n(x) = x^3 (Q_{n-1})^2$.

Lorsque $x \longrightarrow o$ on sait que; pour toute fraction rationnelle $R(x)$, on

$e^{-1/x^2} = o(R(x))$

En particulier, quel que soit $n \in N$,

(1) $\lim\limits_{x \to o} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to o} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = o.$

Pour tout $n \in N$, posons $f_n(x) = f^{(n)}(x)$ quel que soit $x \neq o$ et

$f_n(o) = o$. Les égalités (1) montrent que les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$

tout entier et que $f'_n(x) = f_{n+1}(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

On en conclut que la fonction

$$f_o(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{lorsque } x \neq o \\ o & \text{lorsque } x = o \end{cases}$$

est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in N$, $f^{(n)}(o) = 0$.

La formule de Taylor donne alors

$$f_o(x) = s_{n-1}(x) + r_n(x) \quad \text{avec} \quad s_{n-1}(x) \equiv o$$

et par suite

$$f_o(x) = r_n(x) \quad \text{pour tout} \quad n \in n.$$

Comme $f_o(x) \neq o$ lorsque $x \neq o$, la suite $(r_n(x))$ ne tend vers zéro en aucun point $x \neq o$. (Dans le même ordre d'idée on consultera le problème n° 8.1), qui donne un exemple de fonction de même type).

ii) Puisque la fonction $f(x) = e^x$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, et comme, pour tout $n \in N$, $f^{(n)}(o) = 1$, on a

$$f(x) = \sum_{p=o}^{n-1} \frac{x^p}{p!} + r_n(x)$$

où pour un certain nombre $\theta \in]o, 1[$

$$|r_n(x)| = |\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)| \leqslant k \frac{|x^n|}{n!}$$

avec $K = \max(1, e^x)$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'expression $\frac{x}{n} \longrightarrow o$ et l'on voit (directement ou en utilisant la formule de Stirling) que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n}$ est nul ce qui exprime que

./...

$$\pi_n = \frac{|x^n|}{n!} \longrightarrow o \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

La remarque 3 permet alors de conclure que

$$e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}$$

D'après la remarque 2 on en déduit que

$$e^{-x} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \quad e^{x^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad sh\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

iii) On sait que la fonction $f(x) = \cos x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$f^{(4k)}(o) = 1, \quad f^{(4k+1)}(o) = o, \quad f^{(4k+2)}(o) = -1, \quad f^{(4k+3)}(o) = 0$$

On a donc

$$\cos x = \sum_{o \leq 2k \leq n-1} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k} + r_n(x)$$

où $|r_n(x)| \leq \dfrac{|x^n|}{n!}$.

Comme plus haut on peut donc écrire

$$\cos x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}$$

De même, $\sin x = \sum_{o \leq 2k \leq n-2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_n(x)$

avec $|r_n(x)| \leq \frac{|x^n|}{n!}$ on peut donc affirmer que

$$\sin x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

On retrouve sur ces formules le fait que $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. En divisant par x le développement de Taylor de $\sin x$ il vient :

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{o \leq 2k \leq n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + \rho_n(x)$$

où $\rho_n(x) = o(x^{n-1})$ est tel que $|\rho_n(x)| \leq \frac{|x^n|}{(n+1)!}$.

On en conclut que la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, se prolonge à l'origine par continuité en posant $f(o) = 1$ et que l'on a

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}$$

Remarquer que rien ne nous permet encore d'affirmer que cette fonction est de classe C^{∞} au voisinage de 0 et que son développement soit un développement de Taylor.

iv) On sait que la fonction $f(x) = \log(1-x)$ est de classe C^{∞} sur $]-\infty, 1[$ et que quel que soit l'entier $n \geq 1$ on a $f^{(n)}(o) = -(n-1)!$.

On a donc

$$\log(1-x) = -\sum_{p=1}^{n} \frac{x^n}{n} + r_{n+1}(x).$$

Comme $f^{(n+1)}(x) = -\frac{n\,!}{(1-x)^n}$ l'expression du reste sous forme intégrale donne

$$r_{n+1}(x) = -\int_o^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.$$

Posons $\varphi(t) = \frac{x-t}{1-t}$: comme $\varphi'(t) = \frac{x-1}{(1-t)^2}$ on voit que pour $|x| < 1$ la fonction $\varphi(t)$ est décroissante sur $]o, x[$ (lorsque $x > o$) ou sur $]x, o[$ (lorsque $x < o$) et qu'elle s'annule pour $t = x$.

Dans tous les cas on a :

$$|\varphi(t)|^n \leqslant |x|^n$$

sur l'intervalle d'intégration et le théorème de la moyenne permet d'écrire, lorsque $|x| < 1$

$|r_{n+1}(x)| \leqslant |x|^{n+1}$ qui tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$.

On peut donc écrire :

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{sur }]-1, +1[.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ la remarque 1 permet d'écrire

$$\log(a-x) = \log a + \log(1-\frac{x}{a}) = \log a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n} \quad \text{sur }]-a, +a[.$$

On a également

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

et encore

$$\log(1 - x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} .$$

v) On sait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ est de classe C^{∞} sur $]-1, \infty[$ et que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$ on a

$$f^{(n)}(o) = \alpha\,(\alpha - 1) \dots (\alpha - n+1) = \prod_{p=o}^{n-1} (\alpha - p).$$

On a donc

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - p+1)}{p\,!} x^p + r_{n+1}(x).$$

Comme $f^{(n+1)}(x) = \prod_{p=o}^{n} (\alpha-p)\ (1+x)^{\alpha-n-1}$ l'expression du reste sous forme intégrale donne :

$$r_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n\,!} \int_o^x (1-t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \, dt$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n\,!} \int_o^x (\varphi(t))^n \, (1-t)^{\alpha-1} \, dt,$$

en utilisant les notations du iv) comme on a $|\varphi(t)|^n \leqslant |x^n|$ lorsque $|x| < 1$. D'après le théorème de la moyenne, en posant

$K = \sup\limits_{|t| \leqslant |x|} (1-t)^{\alpha-1}$ on a

$$|r_{n+1}(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n)|}{n\ !}\ K\ |x|^{n+1}.$$

Or, la série numérique de terme général

$$v_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n)}{n\ !}\ K\ |x|^{n+1}$$

est absolument convergente lorsque $|x| < 1$, car

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \left|\frac{\alpha - n+1}{n+1}\right|\ |x| \sim |x| \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

ce qui permet d'appliquer le critère de d'Alembert.

D'après le théorème 1 la suite (v_n) tend donc vers 0 et en conséquence on peut écrire :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha - n+1)}{n\ !}\ x^n$$

sur l'intervalle $]-1, +1[$.

Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$ on retrouve, comme cas particulier, la formule du binôme, car le développement s'arrête dès que le coefficient $\prod_{p=0}^{n-1} (\alpha-p)$ contient un facteur nul.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ la remarque 2 permet d'écrire,

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha(1+\tfrac{x}{a})^\alpha = a^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n)}{a^{n-\alpha}\ \ n\ !}\ x^n \text{ sur }]-|a|, |a|[.$$ En particulier, lorsque $\alpha = 1$ et $a = -1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{sur} \quad]-1, +1[$$

(on retrouve les résultats de l'exemple 1 § o/).

Toujours d'après la remarque 2 on peut aussi identifier les fonctions $x^p(1-x^k)^\alpha$ à leur développement en série de Taylor sur $]-1, +1[$ lorsque $k \in \mathbb{N}$.

11) Notion de convergence uniforme.

a) limite uniforme d'une suite de fonctions.

Définition. On dit qu'une suite $(u_n(x))$ de fonctions définies dans un ensemble E à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tend uniformément vers une fonction $u(x) : E \longrightarrow K$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$ on ait $\sup\limits_{x \in E} |u(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon$.

La fonction u s'appelle la limite uniforme de la suite (u_n).

[Noter que la définition a un sens, car sur K on a une notion de valeur absolue ; cela signifie que K est muni d'une application $K \xrightarrow[v]{} \mathbb{R}^+$ (l'application $v(x) = |x|$) telle que

$$\left.\begin{array}{l} v(x) = 0 \iff x = 0 \\ v(xy) = v(x)v(y) \\ v(x+y) \leq v(x) + v(y) \end{array}\right\} \text{quels que soient } x, y \in K.$$

La définition a un intérêt du fait qu'il existe $x \in K$ $(x \neq o)$ tel que $v(x) \neq 1$. Un corps muni d'une telle application s'appelle un <u>corps valué non discret</u>.]

<u>Remarque</u>. Il est clair que la convergence uniforme entraine la convergence simple. En revanche, tous les exemples du § 10/ a) montrent que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme.

<u>Exemples</u>. La suite $u_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ tend uniformément vers zéro dans $\mathbb{R}$.

La suite $u_n(x) = \frac{x^2}{n}$ tend uniformément vers zéro sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mais ne tend pas uniformément vers zéro dans $\mathbb{R}$.

La suite $u_n(x) = \mathrm{Arctg}(x-n)$ tend uniformément vers $-\frac{\pi}{2}$ dans tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$; la suite $u_n(x) = \mathrm{Arctg}(x + n)$ tend uniformément vers $\frac{\pi}{2}$ dans tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$; mais ces suites ne tendent pas uniformément vers leur limite dans $\mathbb{R}$ tout entier.

<u>Théorème 10</u>. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit (u_n) une suite de fonctions $E \longrightarrow K$ continues sur E, qui tend uniformément vers une limite u. Alors la fonction $u : E \longrightarrow K$ est continue sur E.

[Plus généralement, on peut prendre pour E un ensemble sur lequel on dispose d'un voisinage pour chacun de ses points x, ce qui permet de parler de fonctions continues. C'est le cas notamment lorsque $E \subset \mathbb{R}^n$; un voisinage d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ est, pour un $\eta > 0$ donné, l'ensemble $V_\eta(x)$ des $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ tels que

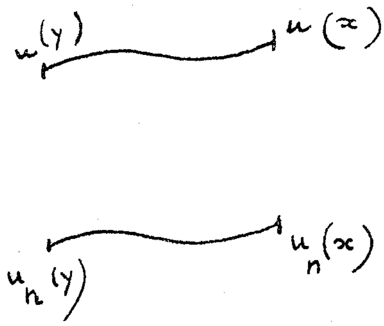
$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < \eta \quad \text{(voisinages cubiques).}$$

On aurait pu prendre aussi, pour voisinage de x, les ensembles $V'_\eta(x)$ définis par $y \in V'_\eta(x)$ lorsque $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} < \eta$ (voisinages sphériques).

Une fonction $f : E \longrightarrow K$ sera dite <u>continue au point $x \in E$</u>, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que, quel que soit $y \in V_\eta(x)$ (ou $y \in V'_\eta(x)$), on ait $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La démonstration suivante s'étend à de tels ensembles, qui seront étudiés dans la suite du cours.]

<u>Démonstration</u>. Comme la suite (u_n) est uniformément convergente, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que si $n \geq n_0$, alors $|u(x) - u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in E$.



Choisissons un tel n ; alors, puisque la fonction u_n est continue, pour tout $x \in E$, il existe $\eta > o$ tel que $|y - x| \leqslant \eta$ entraine $|u_n(y) - u_n(x))| \leqslant \varepsilon/3$.

On en déduit que, quel que soit y tel que $|y - x| \leqslant \eta$ on a

$$|u(y)-u(x)| \leqslant |u(y)-u_n(y)| + |u_n(y)-u_n(x)| + |u_n(x)-u(x)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la fonction u est continue.

<u>Corollaire</u>. Soient $u_n(x)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ la suite (u_n) soit uniformément convergente sur l'ensemble D_r des x tels que $|x| \leqslant r$. Alors la limite $u(x)$ de la suite $(u_n(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tout entier.

<u>Remarque 1</u>. Lorsque $(u_n(x))$ est une suite de fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$, admettant une limite uniforme $u(x)$, on ne peut en déduire que $u(x)$ soit dérivable ni, lorsque $u'(x)$ existe, que $\lim\limits_{n \to \infty} u'_n(x)$ existe et soit égale à $u'(x)$.

<u>Exemple</u>. La suite $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin n x$ tend uniformément vers zéro, tandis que la suite $u'_n(x) = \cos nx$ ne tend vers aucune limite.

<u>Remarque 2</u>. Lorsque les $u_n(x)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$

telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\,dx$ soit définie et lorsque la suite (u_n) tend uniformément vers une limite $u(x)$, on ne peut en déduire que

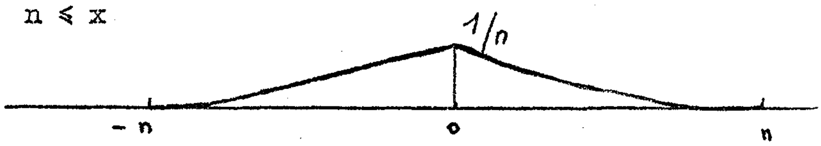
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)dx$$

ni même que l'intégrale du 1er membre soit définie.

<u>Exemples</u> : La suite de fonctions

$$u_n(x) = \begin{cases} o & \text{lorsque} \quad x \leqslant -n \\ 1/n^2\, x + 1/n & \text{lorsque} \quad -n \leqslant x \leqslant o \\ -1/n^2\, x + 1/n & - \qquad o \leqslant x \leqslant n \\ o & - \qquad n \leqslant x \end{cases}$$

(définie pour $n \geqslant 1$),



tend uniformément vers zéro, mais on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\,dx = 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1.$$

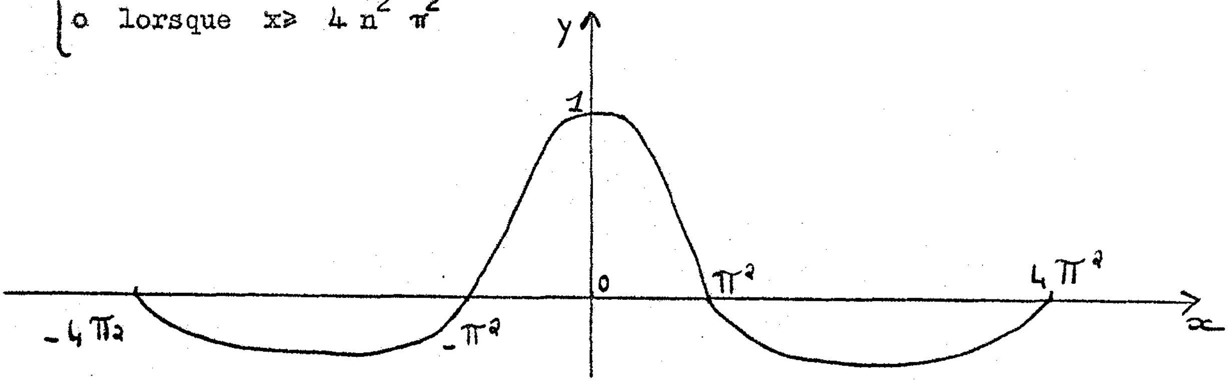
La suite de fonctions

$$u_n(x) \begin{cases} o & \text{lorsque} \quad x \leqslant -n^2 \\ \frac{1}{n^3}x + \frac{1}{n} & \text{lorsque} \quad -n^2 \leqslant x \leqslant o \\ -\frac{1}{n^3}x + \frac{1}{n} & \text{lorsque} \quad o \leqslant x \leqslant n^2 \\ o & \text{lorsque} \quad n^2 \leqslant x \end{cases}$$

tend uniformément vers zéro, mais on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)dx = n.$

La suite de fonctions

$$u_n(x) \begin{cases} o \text{ lorsque } x \leqslant -4\,n^2\,\pi^2 \\ \dfrac{\sin\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} \text{ lorsque } -4\,n^2\,\pi^2 \leqslant x \leqslant 4\,n^2\,\pi^2 \\ o \text{ lorsque } x \geqslant 4\,n^2\,\pi^2 \end{cases}$$



tend uniformément vers $u(x) = \dfrac{\sin\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\,dx$ est définie quel que soit n tandis que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ n'est pas définie. (Comme on le voit au moyen du changement de variable $u = \sqrt{|x|}$.) En revanche, on a le résultat suivant.

<u>Théorème 11.</u> Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, admettant une limite uniforme $u(x)$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

(le théorème est faux si on remplace $[a, b]$ par $]a, b[$).

<u>Démonstration.</u> Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > o$, il existe $n_o \in N$ tel que

quel que soit $n \geq n_o$ on ait $|u(x) - u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

D'après le théorème de la moyenne, lorsque $n \geq n_o$ on a

$$\left|\int_a^b u(x)dx - \int_a^b u_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |u(x) - u_n(x)|dx \leq \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $a \in I$. Soient $u_n(x)$ des fonctions continues sur I telles que pour tout $x \in I$, la suite (u_n) converge uniformément sur tout intervalle $[b, c] \subset I$ vers une fonction $u(x) : I \longrightarrow K$. Alors la suite de fonctions

$U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\, dt$ tend uniformément vers $U(x) = \int_a^x u(t)\, dt$

sur tout intervalle $[b, c] \subset I$.

En effet, quel que soit $\varepsilon > o$, il existe $n_o \in N$ tel que, pour tout $n \geq n_o$ on ait $|u(x) - u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{c-b}$, lorsque $x \in [b, c]$. On conclut alors comme dans la démonstration du théorème.

b) <u>Convergence uniforme d'une série de fonctions</u>.

<u>Définition</u>. Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions définies dans E à valeurs dans K. On dit que la série de terme général u_n converge uniformément dans E si la suite $(s_n(x))$ des sommes partielles de la suite $(u_n(x))$ tend

uniformément vers la somme $s(x)$ de la série.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la suite $(r_n(x))$ des restes de la série soit définie sur E tout entier et que $(r_n(x))$ tende uniformément vers zéro.

Exemple. Les séries de Taylor des fonctions e^x, $\sin x$ et $\cos x$ sont uniformément convergentes sur tout intervalle de la forme $[-a, +a]$ car, lorsque $|x| \leqslant a$ on a $|r_n(x)| \leqslant K \frac{a^n}{n!}$ ou $|r_n(x)| \leqslant \frac{a^n}{n!}$ suivant les cas.

Les séries de Taylor des fonctions $\log(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$ sont uniformément convergentes sur $[-a, +a]$ dès que $a < 1$, car, lorsque $|x| \leqslant a$, on a

$|r_n(x)| \leqslant a^n$ ou

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - n+1)|}{(n-1)!} K a^n$$

suivant les cas.

De même, toutes les séries étudiées au § 10/ c) ii) ... v) sont uniformément convergentes sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle où elles convergent.

(N.B.) Le théorème 10 permet d'affirmer que la somme $s(x)$ d'une série uniformément convergente dont le terme général $u_n(x)$ est une fonction continue sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est continue.

Son corollaire montre qu'il suffit en fait que la série converge uniformément sur $E \cap D_r$ (où D_r est l'ensemble des x tel que $|x| \leqslant r$.)

Le théorème 11 permet d'affirmer que si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est une série uniformément convergente de fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors, $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx$.

Cette formule est fausse si l'on remplace $[a, b]$ par $]a, b[$ ou "uniformément convergente" par "simplement convergente". (intégration terme à terme).

Le corollaire du théorème 11 permet d'affirmer que si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est une série uniformément convergente sur tout intervalle $[b, c]$ contenu dans un intervalle ouvert I (où les $u_n(x) : I \longrightarrow K$ sont continues) alors, en posant $U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt$ $((a, x) \in I)$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx$ est uniformément convergente sur $[b, c]$ et quel que soit $x \in I$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt.$$

<u>Application.</u>

Lorsque $|x| < 1$ on a :

① $$\text{Arctg}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

② $$\text{Argth}x = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

③ $$\text{Arcsin}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!\,2^n} t^{2n}\right] dt =$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!(2n+1)2^n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{3}{2.4.5.} x^5$$

$$+ \frac{3.5}{2.4.6.7} x^7 + \frac{3.5.7.}{2.4.6.8.9} x^9 + \dots$$

④ $$\text{Argsh}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3.5.\dots.(2n-1)}{n!\,2^n} t^{2n}\right] dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3.5.\dots.(2n-1)}{n!\,(2n+1)2^n} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} x^5 - \frac{3.5.}{2.4.6.7} x^7 + \dots$$

5 $$\text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.5\ldots(2n-1)}{n!(2n+1)2^n} x^{2n+1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{3}{2.4.5}x^5 - \frac{3.5}{2.4.6.7.}x^7 - \ldots$$

Lorsque $ab \leqslant 1$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on sait que

$$\text{Arctg } a + \text{Arctg } b = \text{Arctg } \left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

On en déduit que $2 \text{ Arctg } \frac{1}{5} = \text{Arctg } \frac{5}{12}$ et que

$4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} = \text{Arctg } \frac{240}{238} = \text{Arctg } 1 + \text{Arctg } \frac{1}{239}$ et par suite que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239} = \frac{4}{5} - \frac{4}{375} + \frac{4}{15.625} - \ldots - \frac{1}{239} + \frac{1}{3.(239)^3} - \ldots.$$

En utilisant ce développement en série et en appliquant la formule sommatoire d'Euler Mac Laurin (exercice 23 II), on peut, moyennant un peu de courage, trouver que .

π = 3 , 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,

3 2 3 8 4 6 2 6
Qui de ton jugement peut briser la valeur !

4 3 3 8 3 2 7 9 50288
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Les amateurs de moyens mnémotechniques apprendront avec plaisir que la phrase, "Les trois journées de 1830 sont un 89 renversé" permet de retenir que

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098.$

12. Notion de convergence normale.-

a) Espaces vectoriels normés.

Définition 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement sur un corps valué, cf § 11/ a) définition). Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$, notée $x \longrightarrow N(x)$ (ou plus couramment $x \longrightarrow ||x||$), vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & ||x|| = o \Longrightarrow x = o \\ \text{ii)} & ||\lambda x|| = |\lambda| . ||x|| \\ \text{iii)} & ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \end{array}\right\} \quad \text{pour tout } \lambda \in K \text{ et quels que soient } x, y \in E.$$

Un espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé.

Définition 2. Un sous-ensemble K d'un espace vectoriel E(sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dit convexe, si pour tous $x, y \in K$, le segment $[x, y]$ (ensemble des points de la forme $\lambda x + (1 -\lambda)y$, quel que soit $\lambda \in [o,1]$ est inclus dans K.

Proposition 11. Soit E un espace vectoriel normé. L'ensemble B des points x tels que $||x|| \leqslant 1$ est un ensemble convexe. En outre, pour tout $y \in E$, $y \neq o$, l'intersection avec B de la droite joignant y à l'origine est l'ensemble des points de la forme λy, avec

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{||y||} .$$

En effet, si $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ et $\lambda \in [o,1]$ alors on a

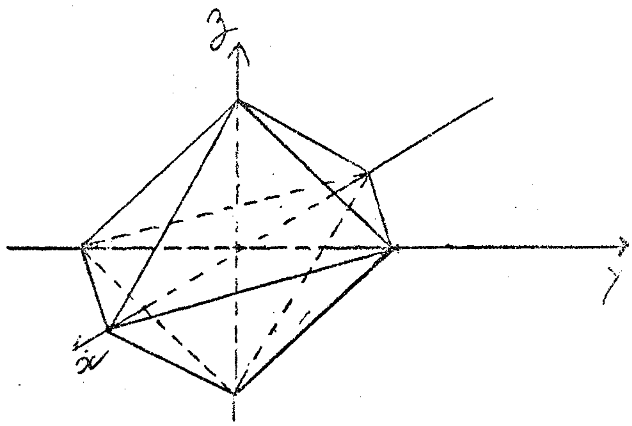
$||\lambda x + (1-\lambda)y|| \leq \lambda||x|| + (1-\lambda)\ ||y|| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$

D'autre part, pour tout $y \neq o$, la droite joignant y à l'origine est l'ensemble des points de la forme λy et une condition nécessaire et suffisante pour que $||\lambda y|| \leq 1$ est que $|\lambda| \leq \dfrac{1}{||y||}$.

Exemples d'espaces vectoriels normés.

① i) Sur K^n, l'application $x \longrightarrow N_1(x) = ||x||$, définie par $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (où l'on a posé $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$), est une norme.

Dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble B des points (x_1, x_2, x_3) tels que $|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1$, est l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur l'octaèdre régulier



de sommets $(\pm 1, o,o)$, $(o,\pm 1,o)$ et $(o,o,\pm 1)$.

ii) Sur l'espace $\mathcal{S}_s$ (noté aussi l_1) des suites dont la série est absolument convergente, l'application $\underline{u} \longrightarrow N_1(\underline{u}) = ||\underline{u}||$, définie par $\sum_{i=o}^{\infty} |u_i|$ (où l'on a posé $\underline{u} = (u_o, u_1, \ldots u_n)$), est une norme.

iii) Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a, b])$ des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, l'application $f \longrightarrow N_1(f) = ||f||$, définie par $||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$, est une norme.

La seule difficulté consiste à montrer que si $f \neq o$ $||f|| \neq o$: il existe alors $x \in [a, b]$ tel que $|f(x)| \geqslant \varepsilon > o$ et, puisque f est continue, il existe $\eta \geqslant o$ tel que $|f(y)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, lorsque $y \in [x - \eta, x + \eta] \cap [a, b]$ d'où, en vertu du théorème de la moyenne, $||f|| \geqslant \frac{\eta \varepsilon}{2} > o$.

Ⓟ On suppose que p est un nombre réel $\geqslant 1$.

i) Sur K^n, l'application $x \longrightarrow N_p(x) = ||x||$, définie par $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ (où l'on a posé $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$), est une norme.

La seule difficulté consiste à montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$, on a

$$(1) \quad \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum^{n} |y_i|^p}$$

(inégalité de Minkowski). Cette inégalité résulte de la proposition suivante).

<u>Proposition 12</u>. Soient p, q, r des nombres réels > 0 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Alors, pour tous $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in K$, on a (inégalité de Holder),

$$(2) \quad \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^r} \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}\right)\left(\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}\right)$$

En effet, c'est évident si tous les a_i ou tous les b_i sont simultanément nuls. Dans le cas contraire, posons:

$$\alpha = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} \quad , \quad \beta \quad \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}$$

et $\alpha_i = \frac{a_i}{\alpha}$, $\beta_i = \frac{b_i}{\beta}$ $(1 \leq i \leq n)$.

Il est alors équivalent de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i|^r \leq 1 = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|\beta_i|^q}{q} \right]$$

lorsque $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q = 1$. Il suffit pour cela de montrer que, quel que soit l'entier $i \in [1, n]$ on a

$$\frac{|\alpha_i \beta_i|^r}{r} \leq \frac{|\alpha_i|^p}{p} + \frac{|\beta_i|^q}{q},$$

ou encore

$$(3) \quad |\alpha_i|^r \, |\beta_i|^r \leq \frac{r}{p} |\alpha_i|^p + \frac{r}{q} |\beta_i|^q.$$

Or, comme la fonction e^x est convexe, quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a

$$(e^x)^t \, (e^y)^{1-t} = e^{tx + (1-t)y} \leq t\, e^x + (1-t)e^y.$$

L'inégalité (3) s'en déduit en posant

$e^x = |\alpha_i|^p$, $e^y = |\beta_i|^q$ et $t = \frac{r}{p}$ (compte-tenu du fait que $\frac{r}{q} = 1 - \frac{r}{p}$).

On a donc démontré (2).

<u>Démonstration de l'inégalité de Minkowski.</u>

En élevant le 1er membre de (1) à la puissance p il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| . \, |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Appliquons (2) à chacun des termes de la somme du dernier membre, en posant

$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ (c'est-à-dire $r = 1$) et

$b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$,

$a_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \end{cases}$ selon les cas. Il vient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \left[\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p} \right] \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{q(p-1)}}$$

En divisant les deux membres par $\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{q}}$,

Comme $q(p-1) = p$ et $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, il vient

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p}$$

c'est l'inégalité (1).

Cas particulier. Lorsque $p = 2$, la norme N_p s'appelle <u>norme euclidienne</u>.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble B des points $x = (x_1, x_2, x_3)$, tels que

$||x|| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}} \leqslant 1$, est l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur la sphère de centre o et de rayon 1 et s'appelle la <u>boule</u> de <u>rayon</u> 1

ii) L'ensemble l_p des suites (u_n), telles que $\sum_{n=o}^{\infty} |u_n|^p < \infty$, est un sous-espace vectoriel de S ; en effet, comme la fonction x^p est convexe lorsque $p \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{2^p} |u_n + v_n|^p \leqslant \frac{1}{2} (|u_n|^p + |v_n|^p),$$

ce qui montre que

$$|u_n + v_n|^p = O(|u_n|^p + |v_n|^p),$$

et par suite que l_p est stable pour l'addition.

Sur l'espace vectoriel l_p, l'application $\underline{u} \longrightarrow N_p(\underline{u}) = ||\underline{u}||$, définie par $\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p}$ (où l'on a posé $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots)$), est une norme.

On le voit, en généralisant la démonstration de la proposition 12 à des suites $(a_n) \in l_p$ et $(b_n) \in l_q$ et en établissant, comme ci-dessus, l'inégalité de Minkowski pour des suites "de puissance p ième sommable".

$$\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p}$$

iii) Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b])$ des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$, l'application $f \longrightarrow N_p(f) = ||f||$ définie par $||f|| = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}$, est une norme.

On vérifie, comme plus haut, que $f \neq o \Longrightarrow ||f|| \neq o$.

La démonstration de l'inégalité d'Holder pour les fonctions fait l'objet du Problème 14 I. On en déduit, par la même procédé que ci-dessus, l'inégalité de Minkowski pour les fonctions

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p dx}.$$

[Noter que l'application N_p n'est une norme, dans aucun des trois cas précédents, lorsque $p < 1$].

(∞) i) Sur k^n, l'application $x \longrightarrow N_\infty(x) = ||x||$, définie par $||x|| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (où l'on a posé $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$), est une norme.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble B des points (x_1, x_2, x_3) tels que $\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 1$, est l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur le cube centré en 0 dont l'arête est de longueur 2 et dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées.

ii) Sur l'espace $\mathcal{S}_b$ (noté aussi l_∞) des suites bornées, l'application $\underline{u} \longrightarrow N_\infty(\underline{u}) = ||\underline{u}||$, définie par $||\underline{u}_n|| = \sup\limits_{n \geq 0} |u_n|$ (où l'on a posé $\underline{u} = (u_0, u_1, \ldots)$), est une norme.

iii) Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (ou de $\mathbb{R}^n$, en utilisant les conventions indiquées au théorème 10). Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(E)$ des fonctions continues et bornées dans E, l'application $f \longrightarrow N_\infty(f) = ||f||$, définie par $||f|| = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$, est une norme.

Si E est un fermé, borné dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{C}_b(E)$ s'identifie à l'espace vectoriel $\mathscr{C}(E)$ des fonctions continues sur E : on l'a démontré lorsque E est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Montrer que sur $\mathbb{R}^3$ les applications

$$N_1(x) = \int_0^1 |x_1 t^2 + x_2 t + x_3| dt,$$

$$N_2(x) = \sqrt{\int_0^1 (x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 \, dt}, \quad \text{et,}$$

$$N_\infty(x) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |x_1 t^2 + x_2 t + x_3|,$$

(où l'on a posé $x = (x_1, x_2, x_3)$) sont des normes.

Trouver la forme des ensembles B_1, B_2 et B_∞ des points x tels que

$N_1(x) \leqslant 1$, $N_2(x) \leqslant 1$ et $N_\infty(x) \leqslant 1$.

---

b) Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Définition. On dit qu'une suite (s_n), dont les termes s_n sont des éléments d'un espace vectoriel normé E, tend vers une limite $s \in E$, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$||s - s_n|| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 13. Soit (s_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E qui tend vers une limite $s \in E$; alors la suite (s_n) est une suite de Cauchy, c'est-à-dire une suite telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que pour tous $n, p \geq n_1$ on ait $||s_n - s_p|| \leq \varepsilon$.

En effet, pour tous $n, p \geq n_0$, on a

$$||s_n - s_p|| \leq ||s_n - s|| + ||s - s_p|| \leq 2\varepsilon.$$

On sait que la réciproque de la proposition 13 est vraie lorsque $E = R$ ou C, en prenant pour norme la valeur absolue.

Cette réciproque est vraie aussi lorsque $E = K^m$, pour l'une quelconque des normes N_p ($p \in [1, \infty]$). En effet, se donner une suite (s_n) d'éléments de K^m, équivaut à se donner les m suites numériques (s_n^i) $(1 \leq i \leq m)$ (les suites des i-èmes coordonnées des points de la suite initiale) ; si (s_n) est une suite de Cauchy, pour l'une quelconque des normes étudiées plus haut, on voit immédiatement que les suites (s_n^i) sont aussi des suites de Cauchy, quel que soit l'entier $i \in [1,m]$; elles tendent donc respectivement vers des nombres $s^i \in K$; si l'on pose $s = (s^1, s^2, s^3, \ldots, s^m) \in K^m$, on voit alors que s est limite de la suite (s_n).

(A titre d'exercice on pourra préciser les détails de cette démonstration).

La réciproque de la proposition 13 est encore vraie lorsque E est l'un des espaces l_p étudiés dans les exemples d'espaces vectoriels normés, mais la démonstration de ce fait est assez délicate.

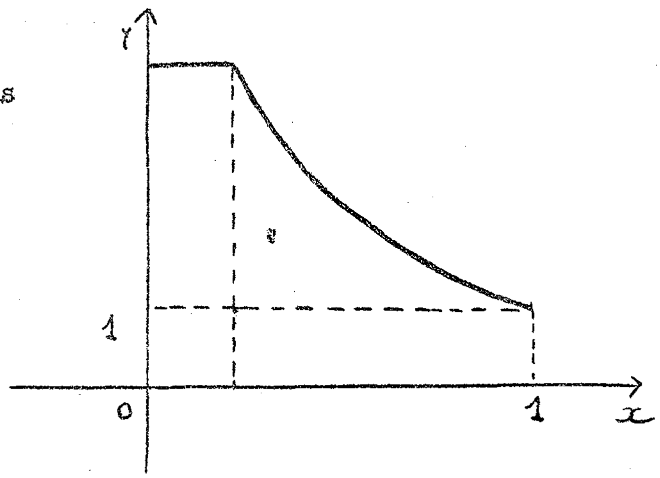
(N.B.) Il serait faux de croire que, dans un espace vectoriel normé E quelconque, une suite de Cauchy (s_n) tende nécessairement vers une limite $s \in E$.

Exemple. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme

$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$, la suite de fonctions

$$f_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{lorsque } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1/\sqrt{x} & \text{lorsque } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

est une suite de Cauchy, qui ne tend pas vers une limite dans $\mathcal{C}([0,1])$.



Cette suite tend, au sens de la convergence simple, sur $]0,1]$, vers la limite $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{C}([0,1])$.

Etudions maintenant un cas très important où la réciproque de la proposition 13 est vraie.

Théorème 12. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou encore de $\mathbb{R}^n$, avec les conventions du théorème 10). Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(E)$ des fonctions continues et bornées sur E, on considère la norme

$||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$, pour toute fonction f continue et bornée dans E (norme de la convergence uniforme). Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{C}_b(E)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

α) La suite (f_n) tend vers une limite f dans $\mathscr{C}_b(E)$.

β) La suite (f_n) est une suite de Cauchy.

Démonstration. α entraine β d'après la proposition 13. Montrons que β entraine α. Pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy, qui tend donc dans K vers une limite $f(x)$. Cela exprime que la suite de fonctions (f_n) tend simplement vers la fonction f. Montrons qu'elle tend uniformément vers f : par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > o$, il existe n_o tel que pour tous $n, p \geq n_o$ et tout $x \in E$, on ait $|f_p(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. En fixant n et en faisant tendre p vers l'infini, on en déduit que

(1) $\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Le théorème 10 montre alors que f est continue. D'autre part, f est bornée, car il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sup_{x \in E} |f_n(x)| \leq a$, d'où $\sup|f(x)| \leq a + \varepsilon$. En d'autres termes on a $f \in \mathscr{C}_b(E)$ et (1) exprime que $||f - f_n|| \leq \varepsilon$.

<u>Définition</u>. Un espace vectoriel normé, qui satisfait à la condition de Cauchy, c'est-à-dire qui vérifie la réciproque de la proposition 13 s'appelle un <u>espace vectoriel normé complet</u>.

Les espaces vectoriels K^n et l_p sont complets pour toutes les normes N_p de l'exemple du a). Le théorème 12 affirme que l'espace $\mathcal{C}_b(E)$ est complet pour la norme de la convergence uniforme.

c) <u>Convergence normale d'une série</u>.

<u>Définition</u>. Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On dit que la série de terme général u_n est <u>convergente</u>, si la suite (s_n) des sommes partielles de la suite (u_n) tend vers une limite $s \in E$.

<u>Définition</u>. Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On dit que la série de terme général u_n est <u>normalement convergente</u>, si l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n|| < \infty$.

<u>Remarque 1</u>. La notion de convergence normale n'a pas de sens pour les suites.

<u>Remarque 2</u>. Lorsqu'une série de terme général u_n est normalement convergente, la suite (s_n) de ses sommes partielles est une suite de Cauchy, ce qui permet d'affirmer que la série est toujours convergente lorsque E est complet (mais

seulement dans ce cas). Nous allons énoncer ce résultat dans le cas particulier des fonctions continues et bornées, qui seul nous servira dans la suite.

Théorème 13. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou encore de $\mathbb{R}^n$, avec les conventions du théorème 10). Soit (u_n) une suite de fonctions continues et bornées dans E. Si, pour la norme

$$||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

de la convergence uniforme, la série de terme général u_n est normalement convergente, alors la série de terme général u_n est uniformément convergente sur E.

En effet, la suite $(s_n(x))$ des sommes partielles de la suite (u_n) est une suite de Cauchy pour la norme considérée, car, quels que soient $n, p \in N$ $(n \leq p)$ et $x \in E$ on a

$$|s_p(x) - s_n(x)| \leq \sum_{q=n+1}^{p} |u_q(x)| \leq \sum_{q=n+1}^{p} ||u_q||.$$

On applique alors le théorème 12.

Remarque. Lorsque (u_n) est une suite de fonctions bornées telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ soit uniformément convergente, on ne peut en déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n|| < \infty .$$

En effet, la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sin x$ (défini pour $n \geq 1$) est uniformément convergente (comme on le voit en utilisant le théorème 10), mais on a $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (exemple 3 § 0/).

<u>Exemple de séries normalement convergentes.</u>

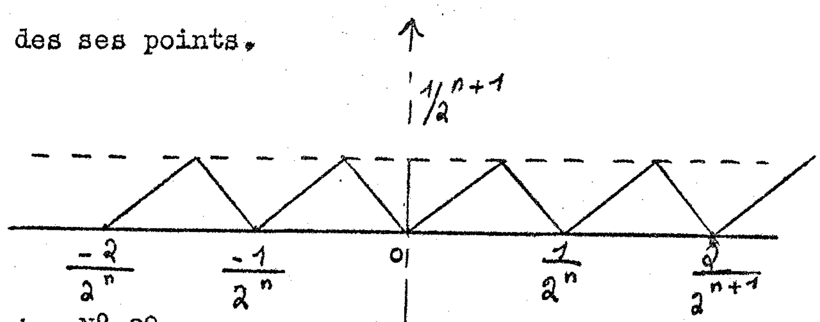
On appelle distance d'un point $x \in \mathbb{R}$ à un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et l'on note $D(x, E)$ le nombre réel positif $\inf_{y \in E} |y - x|$ (cette expression étant égale à $+\infty$ seulement lorsque $E = \emptyset$).

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on désigne par $\alpha.E.$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ des nombres réels de la forme αy avec $y \in E$.

Avec ces conventions, la série de terme général $u_n = d(x, \frac{1}{2^n} Z)$ (où Z est l'ensemble des entiers rationnels) est normalement convergente, car

$$\|u_n\| = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 \quad \text{(exemple 1 § o/).}$$

Le problème 8 III se proposait de démontrer que la somme $s(x)$ (qui est continue d'après le théorème 10) de la série de terme général u_n, n'est dérivable en aucun des ses points.



Traiter l'exercice N° 28.

13. Séries entières.

a) Position du problème.

Au paragraphe 10/ c), on a considéré une fonction f de classe C^∞ dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}$ et l'on a cherché à savoir s'il existait un voisinage de 0 sur lequel f était égale à la somme de sa série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(\text{où } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right).$$

Inversement, on peut partir d'une série de terme général $u_n(x) = a_n x^n$ (où la suite (a_n), des coefficients, est donnée arbitrairement) et se demander quelles conditions doivent vérifier les a_n pour qu'il existe un voisinage de l'origine sur lequel la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ soit définie. Lorsqu'il en est ainsi, on peut se demander si $f(x)$ est continue, dérivable, de classe C^∞, si ses dérivées successives ou l'une quelconque de ses primitives peuvent s'exprimer (sur un voisinage de l'origine) comme sommes de séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

C'est le point de vue auquel on va se placer maintenant : ce faisant, on ne perd rien en supposant que les coefficients a_n et la variable x de la série étudiée sont des nombres complexes.

Au contraire, on va voir qu'il est beaucoup plus naturel de ne pas se restreindre à $\mathbb{R}$ pour développer cette théorie.

L'utilisation systématique des nombres complexes permettra enfin de définir, sur $\mathbb{C}$ tout entier, des fonctions (telles que e^x) qui n'ont été encore définies, en principe, que sur $\mathbb{R}$.

b) *Séries formelles.*

On sait qu'un *polynôme formel* à coefficients complexes est une expression de la forme $P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ (où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux) ; on appelle *degré du polynôme* $P(X)$ (supposé non nul) l'entier $\sup_{a_n \neq 0} n$.

L'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes est muni de structures d'espace vectoriel et d'anneau, qui en font une algèbre (cf. § 7.).

Définition. On appelle *série formelle* à coefficients complexes une expression de la forme

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$ (où les $a_n \in \mathbb{C}$ ne sont plus astreints à être tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

Une série formelle est donc entièrement déterminée par la suite (a_n) de ses *coefficients*.

<u>Exemple</u>. Tout polynôme peut être considéré comme une série formelle, mais la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ n'est pas un polynôme.

L'ensemble $\mathbf{C}[[X]]$ des séries formelles à coefficients complexes est un espace vectoriel pour l'addition

$S(X) + T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$ (où (a_n) et (b_n) sont les coefficients de S et T respectivement), et l'homothétie

$$\lambda (S(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n X^n, \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

(on vérifiera qu'il en est bien ainsi).

En outre, c'est un anneau pour l'addition qu'on vient de définir et pour la multiplication

$S(X)\, T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ (où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ pour tout $n \in N$).

On vérifiera l'associativité et la commutativité de cette multiplication ainsi que sa distributivité par rapport à l'addition.

Noter que la suite (c_n) des coefficients de la série produit est le produit de convolution (§ 7) des suites (a_n) et (b_n) (coefficients des séries facteurs) et que, si S et T sont des polynômes, le produit ST, qu'on vient de définir, n'est autre que le produit de polynômes déjà étudié antérieurement.

L'élément neutre pour l'addition est la série $\sum_{n=o}^{\infty} 0.X^n$ que l'on note 0 ; l'élément neutre pour la multiplication est la série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0.X^n$ notée 1.

Il n'y a pas, pour les séries formelles, de notionde degré. En revanche on a la définition suivante.

Définition. On appelle ordre d'une série formelle $\sum_{n=o}^{\infty} a_n X = S \neq 0$ le plus petit entier $\omega(S) = \inf_{a_n \neq o} n$ tel que $a_n \neq o$.

Si p est l'ordre de S, alors on peut écrire

$$S(X) = X^p \sum_{n=o}^{\infty} a_{n+p} X^n.$$

Ceci permet de vérifier que l'ordre $\omega\,(S + T)$ de la somme de deux séries S et T est $\geq \min\,(\omega\,(S),\ \omega\,(T))$ et que l'ordre de $\omega\,(S.T)$ de leur produit $= \omega\,(S) + \omega\,(T)$.

Exemple : Posons $S(X) = o + \sum_{n=1}^{\infty} X^n$; l'ordre de cette série est égal à 1. On a

$$(S\,(X))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)X^n = X^2 \sum_{n=o}^{\infty} (n+1)X^n,$$

c'est une série d'ordre 2.

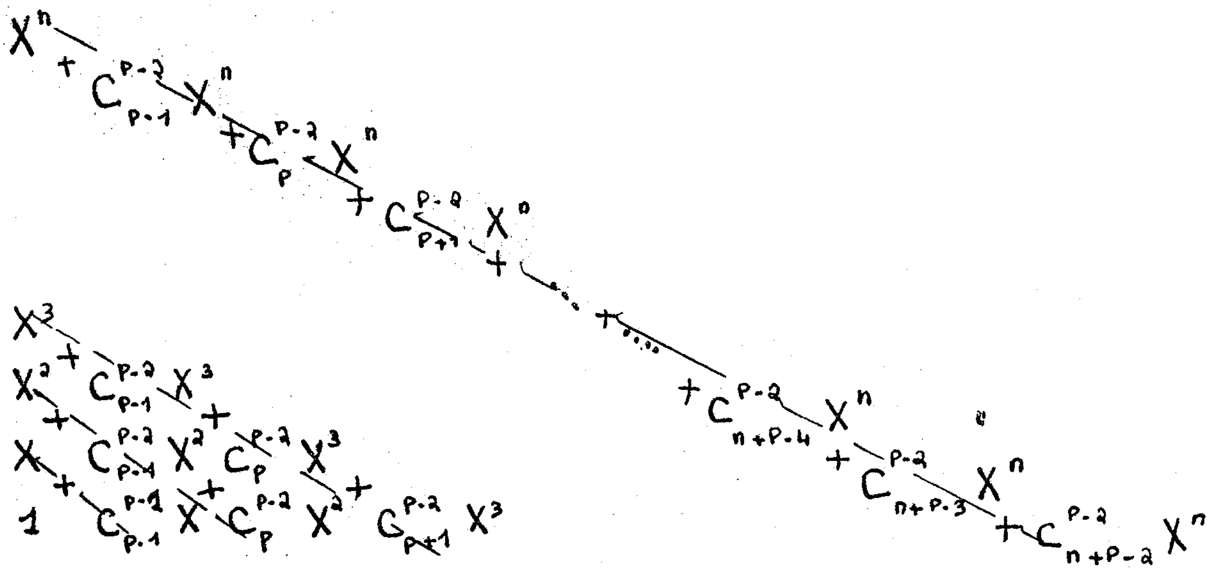
Plus généralement, on voit par récurrence sur p (en écrivant que

$(S(X))^p = (S(X))^{p-1}\, S(X)$ et en appliquant la formule

$$\sum_{q=0}^{n} C_{p+q-2}^{p-2} = C_{n+p-1}^{p-1}) \quad \text{que} \quad (S(X))^p = X^p \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^{p-1} X^n \;;$$

c'est une série d'ordre p.

Le calcul peut se schématiser comme suit



<u>Remarque</u>. Soit $S_p(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,n} X^n$ une suite de séries formelles telles que l'ordre $\omega(S_p)$ de chacune des séries tende vers l'infini avec p. Alors on peut effectuer <u>la somme infinie</u> $S(X) = \sum_{p=0}^{\infty} S_p(X)$ en posant $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où $a_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p,n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

En effet, $\sum_{p=o}^{\infty} a_{p,n}$ est en fait une somme finie, car, par hypothèse, quel que soit $n \in N$, il existe $p_o \in N$ tel que, pour tout $p \geq p_o$ on ait $\omega(S_p) \geq n+1$ et par suite $a_{p,n} = o$.

Exemple. Posons $S_p(X) = \sum_{n=p}^{\infty} X^n$. La somme $S(X) = \sum_{p=o}^{\infty} S_p(X)$ est la série $\sum_{n=o}^{\infty} (n+1)X^n$.

Le calcul peut se schématiser comme suit :

$$\begin{array}{lcl}
S_0(X) & = & 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots \\
S_1(X) & = & \phantom{1 + {}} X + X^2 + X^3 + \ldots \\
S_2(X) & = & \phantom{1 + X + {}} X^2 + X^3 + \ldots \\
S_3(X) & = & \phantom{1 + X + X^2 + {}} X^3 + \ldots \\
\ldots & = & \phantom{1 + X + X^2 + X^3 {}} + \ldots
\end{array}$$

Cette remarque permet de justifier la notation $\sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ adoptée pour les séries formelles, qui se trouvent ainsi exprimées comme sommes infinies de mônomes.

La multiplication est encore distributive par rapport aux sommes infinies de séries, ce qui signifie que, si $S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots$ est définie, alors on a $ST = S_0.T + S_1.T + S_2.T + \ldots$

Séries formelles inversibles.

Proposition 14. Pour qu'une série formelle S soit inversible, c'est-à-dire, pour qu'il existe une série formelle T telle que

$$S(X)\ T(X) = 1,$$

il faut et il suffit que $\omega(S) = o$.

La condition est nécessaire, car, si a_o et b_o désignent les coefficients initiaux de S et T respectivement, on doit avoir $a_o b_o = 1$ (d'où $a_o \neq o$). Pour voir qu'elle est suffisante posons $S = a_o(1 - U)$ et montrons que la série formelle $1 - U$ est inversible. (Cela suffit, car, si T' est inverse de $1 - U$, alors $T = \frac{1}{a_o} T'$ est inverse de S).

Par construction, la série U est d'ordre ≥ 1, et U^n d'ordre $\geq n$, on peut effectuer la somme

$$1 + U + U^2 + \dots + U^n + \dots.$$

C'est la série T' cherchée, car

$$(1 - U)\ (1 + U + U^2 + \dots) = 1 - U + U - U^2 + U^2 - \dots = 1.$$

L'inverse T de la série S dont on vient de montrer l'existence et que l'on note S^{-1} ou $\frac{1}{S}$ est unique, car si T' est une série telle que $S.T' = 1$ on doit avoit $T.S.T' = T$;

or par hypothèse $TS = 1$ d'où $T' = T$.

<u>Exemple</u>. Soit $P(X)$ un polynôme de terme constant non nul. Les coefficients de la série $\frac{1}{p}$ s'obtiennent en effectuant la division de 1 par p, suivant les puissances croissantes de X.

<u>Substitution des séries</u>. Soit S une série formelle et $T(X) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X^n$ une série formelle d'ordre ≥ 1. Alors, pour tout $n \in N$, la série formelle $(T(X))^n$ est d'ordre $\geq n$. Si (a_n) est la suite des coefficients de S, on peut effectuer la somme, sur n, des séries $a_n(T(X))^n$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(T(X))^n$ ainsi trouvée se note $S(T(X))$ ou encore $S \circ T$ et s'appelle la série obtenue en <u>substituant</u> T à X dans S.

Quels que soient $S, S' \in C\left[[X]\right]$ on a

$$(S + S') \circ T = S \circ T + S' \circ T$$

et

$$(S.S') \circ T = (S \circ T)\,(S' \circ T).$$

<u>Exemple</u>. Si dans $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ on substitue à X la série nulle on trouve $S(o) = a_o + o = a_o$ (<u>terme constant</u> de S).

Lorsque ce terme constant est $\neq o$, la série $S^{-1}(X)$ s'obtient en substituant $1 - \frac{1}{a_o} S(X)$ dans la série $\frac{1}{a_o} \sum_{n=0}^{\infty} X^n$.

<u>Séries formelles réciproques</u>.

<u>Proposition 15</u>. Soit $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ une série formelle. Pour qu'il existe une série formelle

$$T(X) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X^n \quad \text{telle que} \quad S(T(X)) = X,$$

il faut et il suffit que l'on ait $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.

La condition est nécessaire, car on doit avoir

$S(T(0)) = 0$, d'où $a_0 = 0$ et

$S(T(X)) = a_1 b_1 X + X^2 U$ (où U est une série formelle), ce qui implique $a_1 \neq 0$.

Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de constater qu'en écrivant $S \circ T\,(X) = X$ on peut exprimer les b_n de proche en proche en fonction des a_n. Or on a $b_1 = \frac{1}{a_1}$ et l'on voit en explicitant les calculs que

$b_n = \dfrac{P_n(a_2, a_3, \ldots, a_n ; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})}{a_1}$, (où P_n est un polynôme en les $a_2, \ldots, a_n$ (supposés connus) et en les $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ (supposés déjà calculés)).

Les calculs faits montrent que la série T, <u>réciproque</u> de la série S, est unique puisqu'elle satisfait aux conditions de la proposition, T admet une série réciproque S_1 et l'on a $S_1 = S$.

Série formelle dérivée.

Définition. Soit $S(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ une série formelle. On appelle série dérivée de S la série

$$\frac{d}{dX} S(X) = S'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n X^{n-1}.$$

Si S et T sont des séries formelles on a

$$\frac{d}{dX} (S+T) = \frac{d}{dX} S + \frac{d}{dX} T$$

et

$$\frac{d}{dX}(S.T) = (\frac{d}{dX} S)T + S(\frac{d}{dX} T).$$

En dérivant p fois il vient,

$$\frac{d^p}{dX^p} S(X) = S^{(p)}(X) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1)\, X^{n-p}$$

et par suite,

$$\frac{d^p}{dX^p} S(o) = p!\, a_p$$

ce qui permet d'écrire

$$S(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{S^{(n)}(o)}{n!} X^n$$

(formule de Taylor pour les séries formelles).

Enfin la série formelle $T(X) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$

vérifie la relation

$$\frac{d}{dX}(T(X)) = S(X).$$

Elle mérite donc le nom de <u>primitive formelle</u> de S.

<u>Application</u>. La notion de série formelle dérivée permet d'écrire des équations différentielles dans $\mathbb{C}\left[[X]\right]$ et de les résoudre coefficients par coefficients.

<u>Exemple</u>. Les coefficients des séries S vérifiant

$$S(X) + (1 - X^2)\frac{d}{dX}(S(X)) = 0$$

doivent satisfaire aux relations

$$a_0 + a_1 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

pour tout $n \geqslant 2$ $a_n + (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = 0.$

c) <u>Séries entières</u>.

i) <u>Définition</u>. Une <u>série entière</u> est une série de fonctions définies dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont le terme général $u_n(z)$ est de la forme $a_n z^n$ (où $a_n \in \mathbb{C}$ est une constante).

Au b) on a étudié les diverses opérations qu'on peut effectuer à partir d'une ou plusieurs séries entières. On va maintenant se demander s'il existe un voisinage de 0, sur lequel une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Lorsque c'est le cas, la série définit une fonction, de la même façon qu'un polynôme formel définit la fonction polynôme qui lui est attachée. Mais, à la différence des polynômes, on ne peut toujours associer à une série entière, une fonction définie en dehors de l'origine, ni affirmer que la fonction représentative soit définie dans le plan tout entier.

ii) <u>Rayon de convergence</u>.

<u>Théorème 14</u>. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série entière, alors il existe R ($R \in \mathbb{R}^+$ ou $R = \infty$) répondant aux conditions suivantes :

α) Quel que soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série numérique de terme général $a_n z^n$ est divergente.

β) Quel que soit $r \in [0,R[$, la série de fonctions $\sum_{n=0} a_n z^n$ est normalement convergente sur l'ensemble D_r des points z tels que

$|z| \leqslant r$ (<u>disque fermé de rayon r</u>).

En effet, désignons par Δ l'ensemble des nombres réels positifs r pour lesquels il existe un nombre complexe z de valeur absolue égale à r, tel que la série numérique de terme général $a_n z^n$ soit convergente.

Cet ensemble est non vide, car la série converge lorsque $z = 0$. Montrons que la borne supérieure $R = \sup_{r \in \Delta} r$ de l'ensemble Δ répond aux conditions du théorème.

Lorsque $|z| > R$, la série de terme général $a_n z^n$ est divergente, car autrement on aurait $|z| \in \Delta$, ce qui contredirait la définition de R. Choisissons maintenant $r \in [0,R[$: par définition de R il existe $R_0 \in]r,R[$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, avec $|z_0| = R_0$ tel que la série de terme général $a_n z_0^n$ converge.

La suite $(|a_n| R_0^n)$ tend donc vers zéro (théorème 1) et par suite, tous ses termes sont majorés par une constante $M \in \mathbb{R}^+$. Le critère de Cauchy (proposition 3) montre alors que la série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente et par suite que la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n z^n$ est absolument convergente sur D_r.

<u>Définition</u>. Le nombre R (fini ou infini) que le théorème 14 associe à toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s'appelle le <u>rayon de convergence</u> de la série.

Lorsque $R > 0$, on dit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est <u>convergente</u>.

<u>Remarque</u>. Le nombre R est la borne supérieure des $r \in R^+$ tels que

$a_n = O(\frac{1}{r^n})$ (noter qu'on n'a pas nécessairement $a_n = O(\frac{1}{R^n})$).

Le critère de Cauchy permet donc d'écrire (formule d'Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \lim_{p\to\infty} \left(\sup_{n \geqslant p} \sqrt[n]{|a_n|}\right).$$

<u>Exemples</u>. La série $\sum_{n=o}^{\infty} n!\, z^n$ a un rayon de convergence nul.

Chacune des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2n}, \quad \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \sum_{n=o}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=o}^{\infty} z^{2^n}, \quad \sum_{n=o}^{\infty} n\, z^n,$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} n^{\alpha} z^n \quad \text{et} \quad 1 + \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad (\text{quel que soit } \alpha \in R^*)$$

a un rayon de convergence égal à 1.

De même les séries du § 11/ b) Application ont un rayon de convergence égal à 1.

Chacune des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^n} z^n$, $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{a^n} z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{a^n\, n!} z^n$

(pour tout $a \in C^*$) a un rayon de convergence égal à $|a|$.

Plus généralement, si $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1, alors quel que soit le nombre complexe $a \neq o$ la série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{a^n} z^n$ a un rayon de convergence égal à $|a|$.

Chacune des séries $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)} z^{2n}$, $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ a un rayon de convergence infini.

Plus généralement si (a_n) est une suite de nombres complexes bornée en valeur absolue, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

<u>Corollaire</u>. Soit $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Alors la somme de cette série est une fonction continue sur l'ensemble $\overset{o}{D}_R$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < R$ (<u>disque ouvert</u> de rayon R). C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 10.

<u>Définition</u>. L'ensemble $\overset{o}{D}_R$, défini dans le corollaire, s'appelle le <u>disque de convergence</u> de la série. L'ensemble Γ_R des points $z \in C$ tels que $|z| = R$ s'appelle le <u>cercle critique</u>. Lorsque $R = o$, le disque de convergence est vide et le cercle critique est réduit à $\{o\}$.

iii) Somme d'une série entière sur le cercle critique

Le théorème 14 n'affirme rien sur le comportement de la série numérique de terme général $a_n z^n$ lorsque $|z| = R$.

D'après le théorème 1, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un point $z \in \Gamma_R$, il faut que la suite $(a_n R^n)$ tende vers zéro. D'après le théorème 3, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit normalement convergente sur le disque fermé D_R, il faut et il suffit que la série de terme général $a_n R^n$ soit absolument convergente. Le corollaire du théorème 9 montre que, si (a_n) est une suite de nombres positifs telle que la suite $(a_n R^n)$ soit décroissante et tende vers zéro, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en tout point $z \in \Gamma_R$ sauf peut-être pour $z = R$.

Exemples. La série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ n'est définie en aucun point de Γ_1.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ est normalement convergente (et par conséquent continue) sur D_1.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ est définie sur $D_1 - \{1\}$.

N.B. Lorsqu'une série entière est définie sur un sous-ensemble E de son cercle critique Γ_R, on ne peut en déduire que sa somme est une fonction continue sur l'ensemble $\overset{o}{D}_R \cup E_1$. Néanmoins on peut affirmer

<u>Proposition 16</u>. (Abel). Soient $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et z_o un nombre complexe tel que la série numérique de terme général $a_n z_o^n$ soit convergente. Alors la série de fonctions de terme général $u_n(r) = (a_n z_o^n)\, r^n$ est uniformément convergente sur $[o,1]$. (Noter qu'on n'affirme pas ici que la convergence est normale).

<u>Démonstration</u>. Posons $w_o = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z_o^n$ et remplaçons a_o par $a_o - w_o$ de façon à avoir $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z_o^n = o$.

Moyennant cette modification, la suite (s_n) des sommes partielles de la suite $(a_n z_o^n)$ tend vers o.

Il suffit de montrer que la suite de fonctions $s_n(r) = \sum_{q=o} a_q z_o^q r^q$ est une suite de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme (théorème 12) sur $[o,1]$. La transformation d'Abel (§ 8/) permet d'écrire, pour tous $n, p \in N$, $(p \geq n)$

$$s_p(r) - s_n(r) = \sum_{q=n+1}^{p} (s_q - s_{q-1})r^q = s_p r^p - s_n r^{n+1} + \sum_{q=n+1}^{p-1} s_q(r^q - r^{q+1})$$

$$= s_p r^p - s_n r^{n+1} + (1-r) \sum_{q=n+1}^{p-1} s_q r^q.$$

Or quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|s_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Par suite pour tous $n, p \geqslant n_0$ $(p > n)$ on a quel que soit $r \in [0,1[$

$$|s_p(r) - s_n(r)| \leqslant |s_p| + |s_n| + (1-r)\frac{\varepsilon}{3} \sum_{q=n+1}^{\infty} r^q \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}(1-r)\left(\frac{1}{1-r}\right) = \varepsilon.$$

Lorsque $r = 1$, on a encore

$$|s_p(1) - s_n(1)| = |s_p - s_n| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

La proposition 16 permet d'affirmer que, si $z_0 \in \Gamma_R$, et si la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ est définie, alors elle est égale à la limite $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ quand $z \longrightarrow z_0$ en restant sur le segment $[0,z_0[$.

<u>Application</u>.

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Traiter l'exercice 29.

IV. - Opérations sur les séries convergentes.

Proposition 17. Soient $S(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ et $T(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$

des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.

Alors les séries entières

$$U(z) = \sum_{n=o}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n \quad \text{et}$$

$$V(z) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n \qquad (\text{où} \quad c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q)$$

ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à $R = \min (R_1, R_2)$.

Lorsque $R \neq o$, les fonctions $U(z)$ et $V(z)$ (définies sur $\overset{o}{D}_R$) sont respectivement égales aux fonctions $S(z) + T(z)$ et $S(z).T(z)$ (qui sont définies sur $\overset{o}{D}_R$ par hypothèse).

'En effet, quel que soit $r < R$, il existe $R_o \in]r,R[$ tel que, si $|z_o| = R_o$, les séries $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z_o^n$ et $\sum_{n=o}^{\infty} b_n z_o^n$ soient convergentes, ce qui entraine que les suites $(a_n R_o^n)$ et $(b_n R_o^n)$ sont bornées en valeur absolue.

Comme la suite $\left((a_n + b_n) R_o^n\right)$ est, elle aussi, bornée en valeur absolue, la proposition 3 montre que $\sum_{n=o}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ est normalement convergente sur D_r et que sur cet ensemble sa somme vaut $S(z) + T(z)$. Enfin la proposition 8 montre que la série $\sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n$ est normalement convergente sur D_r et que sur cet ensemble sa somme vaut $S(z).T(z)$. On montrerait de façon analogue les propositions suivantes.

<u>Proposition 18</u>. Soient $S(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ et $T(X) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n X^n$ des séries formelles telles que $b_o = o$; posons

$$S(T(X)) = U(X) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n X^n.$$

Si les séries entières $S(z)$ et $T(z)$ sont convergentes de rayons R_1 et R_2 respectivement, alors la série $U(z)$ est convergente ; si R_3 désigne son rayon de convergence on a

$$U(z) = S(T(z)), \quad \text{lorsque} \quad |z| < \min(R_2, R_3) \quad \text{et} \quad |T(z)| < R_1.$$

<u>Corollaire</u>. Soit $S(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ une série formelle telle que $a_o \neq o$ et soit $T(X) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n X^n$ la série inverse (proposition 14) de la série $S(X)$. Si la série entière $S(z)$ a un rayon de convergence $R_1 > a$, alors la série $T(z)$ a un rayon de convergence $R_2 > o$ et l'on a

$$T(z) = \frac{1}{S(z)} \quad \text{lorsque} \quad |z| < \min(R_1, R_2).$$

<u>Proposition 19</u>. Soit $S(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ une série formelle telle que $a_o = o$

et $a_1 \neq 1$ et soit $T(X) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n X^n$ la série réciproque (proposition 15) de la série $S(X)$. Si la série entière $S(z)$ a un rayon de convergence $R_1 > o$, alors la série $T(z)$ a un rayon de convergence $R_2 > o$ et l'on a

$$S(T(z)) = z, \text{ lorsque } |z| < R_2 \text{ et } |T(z)| < R_1$$

et

$$T(S(z)) = z, \text{ lorsque } |z| < R_1 \text{ et } |S(z)| < R_2.$$

V.- Dérivation des séries convergentes.

Théorème 15.

α) Soit $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence.

Alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ est égal à R.

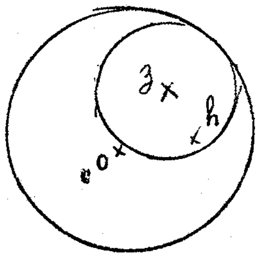
β) Lorsque $R > o$, soient $S(z)$ et $S'(z)$ les fonctions respectivement définies par les séries $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ dans $\overset{o}{D}_R$. Alors, quel que soit $z \in \overset{o}{D}_R$ on a $S'(z) = \lim\limits_{\substack{|h| < R-|z|,\\ h \to o}} \dfrac{S(z+h) - S(z)}{h}$.

Démonstration.

α) D'après le théorème 14, pour tout $r \in [o,R[$ et pour tout $R_o \in \,]r,R[$, la série de terme général $a_n R_o^n$ est convergente, d'où l'on déduit que la suite

$(a_n R_o^n)$ est bornée en valeur absolue par un nombre $M \geq o$. La proposition 3 montre alors que la série de terme général $n\, a_n r^{n-1}$ est absolument convergente et par suite que $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ est normalement convergente sur D_r, ce qui prouve que le rayon de convergence R' de cette série est supérieur ou égal à R. On montre de façon tout à fait analogue que $R \geq R'$, ce qui permet de conclure que $R = R'$.

β) La condition $|h| < R - |z|$ entraine l'inégalité $|z+h| < R$, ce qui montre que $S(z+h)$ est définie.



Pour z fixé, on a

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} = \sum_{n=o}^{\infty} u_n(h)$$

où les fonctions $u_n(h) = a_n \dfrac{(z+h)^n - z^n}{h} = a_n \sum_{p=1}^{n} C_n^p h^{p-1} z^{n-p}$

définies pour $h \neq o$ se prolongent par continuité, en posant $u_o(o) = o$ et $u_n(o) = n\, a_n z^{n-1}$ lorsque $n \geq 1$.

Montrons que la série de terme général $u_n(h)$ est normalement convergente sur D_ε, pour tout $\varepsilon \in]o, R - |z|[$.

En effet, lorsque $h \neq o$, on a

$$|u_n(h)| \leqslant \alpha_n = |a_n| \frac{(|z|+\varepsilon)^n - |z|^n}{\varepsilon},$$

pourvu que $|h| \leqslant \varepsilon$; cette inégalité reste vraie lorsque $h = o$ et par suite $||u_n|| = \alpha_n$.

Or les séries numériques $|a_n|(|z|+\varepsilon)^n$ et $|a_n||z|^n$ sont convergentes, car $|z| + \varepsilon < R$ et $|z| < R$; on en déduit que

$$\sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

La somme de la série $\sum_{n=o}^{\infty} u_n(h)$ est donc une fonction continue au point $h = o$ et l'on a $\sum_{n=o}^{\infty} u_n(o) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1</u>. La restriction à $\mathbb{R}$ de la somme $S(z)$ d'une série entière et leur $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$, dont le rayon de convergence R est non nul, est une fonction à valeurs complexes de classe C^∞ sur $]-R, +R[$.

En effet, en appliquant le théorème 15 aux séries $S_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-p+1) a_n z^{n-p}$, on voit, par récurrence sur p, que les fonctions $S_p(x)$ sont définies et continues sur $]-R, +R[$ et que

$$S_p(x) = \frac{d^p}{dx^p} S(x).$$

<u>Corollaire 2</u>. Si les sommes $S(z)$ et $T(z)$ de deux séries entières

convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ coïncident sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ (ou même seulement dans $\mathbb{R}$), alors on a $a_n = b_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

En effet, d'après le corollaire 1,

$$a_n = \frac{d^n}{dx^n} \frac{S(o)}{n\,!} = \frac{d^n}{dx^n} \frac{T(o)}{n\,!} = b_n$$

où $S(x)$ et $T(x)$ sont les restrictions de $S(z)$ et $T(z)$ à $\mathbb{R}$.

d) Applications.

i) Développement en série entière d'une fraction rationnelle sans pôle à l'origine. La fonction $\frac{1}{z-a}$ admet sur le disque ouvert $\overset{\circ}{D}_{|a|}$ le développement en série $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} z^n$

et par suite (proposition 17) pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $\frac{1}{(z-a)^k}$ admet sur $\overset{\circ}{D}_{|a|}$ le développement

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)\,!}{n\,!\,(k-1)\,!\,a^n} z^n .$$

Soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes premiers entre eux. On suppose que les racines $a_1, a_2, \dots, a_r$ de $Q(z)$ sont toutes différentes de zéro. Alors la décomposition en éléments simples permet d'écrire

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{b_{i,j}}{(z-a_i)^j} \right)$$

(où $R(z)$ est un polynôme et k_i la multiplicité de la racine a_i).

La proposition 17 permet alors d'écrire que

$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n$ sur $\overset{o}{D}_R$ (où $R = \min_{1\leq i\leq r} |a_i|$) et de calculer les c_n en fonction des a_i, des $b_{i,j}$ et des coefficients de $R(z)$.

D'autre part, si l'on pose

$$Q(z) = \sum_{n=o}^{q} \beta_n z^n \quad (\text{où } \beta_o \neq o)$$

on a

$Q(z). \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n z^n = P(z)$, où les $\alpha_n = \sum_{i+j=n} \beta_i c_j$ sont les coefficients de $P(z)$ et par suite sont nuls pour n assez grand. Ceci fournit un autre moyen de calculer les c_n (division du polynôme $P(z)$ par le polynôme $Q(z)$ suivant les puissances croissantes de z).

Inversement, soit (c_n) une suite numérique pour laquelle il existe des nombres complexes $\beta_o, \beta_1, \dots, \beta_q$ tels que $\beta_o \neq o$ et que la suite (α_n), définie par $\alpha_n = \sum_{i+j=n} \beta_i c_j$, soit nulle à partir d'un certain rang $p+1$. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est convergente et représente sur son disque de convergence la fraction rationnelle

$$\frac{\sum_{n=0}^{p} \alpha_n z^n}{\sum_{n=0}^{q} \beta_n z^n}$$

ii) La fonction e^z

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ est convergente sur $\mathbb{C}$ tout entier. On a vu (§ 10. c) ii)) que la restriction de sa somme à $\mathbb{R}$ est égale à la fonction e^x. Ceci suggère de noter e^z la somme de cette série, quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$; les séries numériques de terme général $\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes de sommes respectives e^z et $e^{z'}$. Par suite (théorème 8) la série de terme général

$$\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \frac{z'^q}{q!} = \frac{(z+z')^n}{n!}$$

est absolument convergente et sa somme $e^{z+z'}$ est égale au produit $e^z e^{z'}$. Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a donc $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et en particulier $e^z e^{-z} = 1$. D'après le théorème 15 on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ ce qui permet de retrouver toutes les propriétés déjà connues de la fonction e^x

et en particulier que c'est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (utiliser pour cela le fait que $e^x > 0$ quel que soit $x \geq 0$ et en déduire que l'on a aussi $e^{-x} > 0$).

Fonctions trigonométriques.

Si $\bar{z}$ désigne le conjugué de z on a

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

En particulier, lorsque z est de la forme iy (avec $y \in \mathbb{R}$), on a

$$|e^{iy}| = |e^{-iy}|$$

et par suite (comme $e^{iy}e^{-iy} = 1$)

$$|e^{iy}| = 1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Posons $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ et $\sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$, ce qui revient à écrire

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (\text{avec } \cos y,\ \sin y \in \mathbb{R}).$$

De la formule $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$ on tire

$$\left.\begin{aligned} &\cos(y+y') = \cos y \cos y' - \sin y \sin y' \\ \text{et}\quad &\sin(y+y') = \sin y \cos y' + \cos y \sin y' \end{aligned}\right\} \text{quels que soient } y, y' \in \mathbb{R}.$$

Le développement en série de e^{iy} permet d'écrire

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)\,!} \\ \text{et} \qquad & \\ \sin y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \end{aligned}\right\} \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

D'autre part

$$|e^{iy}|^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

Puisque $\frac{d}{dy}e^{iy} = i\, e^{iy}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dy}(\cos y) &= -\sin y. \\ \text{et} \qquad & \\ \frac{d}{dy}(\sin y) &= \cos y. \end{aligned}\right\} \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

De ces formules on déduit que les fonctions $\sin y$ et $\cos y$ sont bornées, que $\cos o = 1$ et $\sin o = o$.

Comme $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} - \dots < -\frac{1}{3} < o$,

l'ensemble des zéros de la fonction continue $\cos y$ restreinte à $[o,2]$ est un ensemble fermé non vide ; on note $\frac{\pi}{2}$ le plus petit élément de cet ensemble fermé borné ; on a $\frac{\pi}{2} > o$. On a $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + y)} = i\, e^{iy}$$

d'où $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y$ et $\cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$.

Enfin on a $e^{2i\pi} = i^4 = 1$

et l'on voit que 2π est le plus petit $y > o$ tel que $e^{iy} = 1$; on en déduit que $e^{i(y + 2\pi)} = e^{iy}$,

ce qui montre que les fonctions $\cos y$ et $\sin y$ sont périodiques, de période 2π. Ces résultats permettent de retrouver toutes les propriétés déjà connues des fonctions trigonométriques et en particulier que $\sin y$ et $\cos y$ appliquent R sur $[-1, +1]$. On en déduit que quel que soit $u \in \mathbb{C}$ (avec $|u| = 1$) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$.

Description de la fonction e^z.

C'est une application de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. Posons $z = x + iy$. On a $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

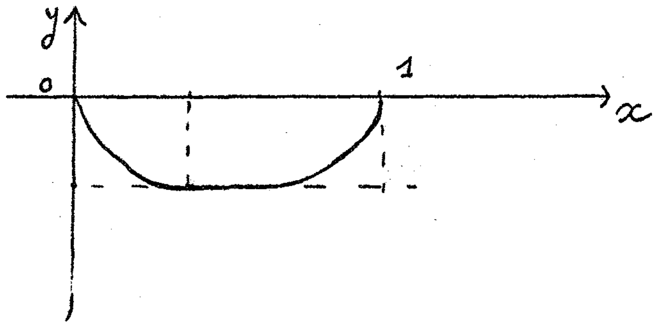
La fonction exponentielle applique les parallèles à l'axe réel sur des demi-droites issues de 0. Deux parallèles distantes de π sont appliquées sur des demi-droites opposées. Deux parallèles distantes de 2π sont appliquées sur la même demi-droite.

Les segments de longueur 2π parallèles à l'axe imaginaire sont appliquées sur des cercles de centre 0.

L'image réciproque d'un point $w \neq 0$ par l'application e^z est l'ensemble des points de la forme $\log|w| + i(\theta + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ où le nombre réel θ (défini à $2k\pi$ près) s'appelle l'argument de W et se note $\arg W$.

Exercice 28.-

α) Montrer que la fonction $f(x) = x \log x$ définie sur $]o,1]$ se prolonge par continuité à l'origine en posant $f(o) = o$ et que la courbe représentative de cette fonction admet une tangente verticale lorsque $x = o$. Montrer que $f(x) \leqslant o$, quel que soit $x \in [o,1]$, est convexe, que $f'(1) = 1$ et que $\inf\limits_{o<x\leq 1} f(x) = -\frac{1}{e}$ est atteint pour $x = \frac{1}{e}$.



β) Soit $P(x)$ un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer, par récurrence sur n, que

$$\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\left[\sum_{p=o}^{n} \frac{(-1)^p}{\alpha^p}\, P^{(p)}(x)\right]$$

est une primitive de $e^{\alpha x} P(x)$. En déduire, à l'aide du changement de variable $u = -\log x$, que $\displaystyle\int_o^1 x^n \log^n x \, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}}$.

γ) Montrer que la série de terme général $u_n(x) = (f(x))^n$ (où f est la fonction définie en α)) est normalement convergente sur $[o,1]$. En déduire que

$$\int_o^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \quad \text{et que} \quad \int_o^1 x^{-x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} .$$

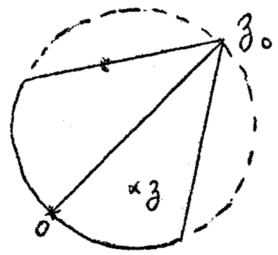
Exercice 29.-

α) Montrer que, quel que soit $k \in \,]0,1]$, les inégalités

$1 \leqslant \dfrac{|z-z_0|}{|z|-|z_0|} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (où $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$) sont équivalentes aux inégalités

$$- \operatorname{Arc} \cos k \leqslant \arg \frac{z_0 - z}{z_0} \leqslant \operatorname{Arc} \cos k.$$

β) Reprendre la démonstration de la proposition 16 en vue de montrer que, si z_0 est un nombre complexe tel que la série numérique de terme général $a_n z_0^n$ soit convergente, alors, pour tout $k \in \,]0,1]$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est uniformément convergente sur l'ensemble A_k des nombres complexes z, tels que



$z = z_0$, ou

$\left|1 - \dfrac{2z}{z_0}\right| \leqslant 1$ et $\dfrac{|z - z_0|}{|z| - |z_0|} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Exercice 30.-

Dans l'exercice 23.I α), on a étudié la suite (b_n) de nombres rationnels définie par les relations de récurrence $b_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = -\dfrac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^p \, b_p$. Déduire de cette formule que

$$(e^z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = z.$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \times \frac{e^z+1}{e^z-1}$ est convergente.

Retrouver, sur la formule précédente, le fait que $b_1 = -\frac{1}{2}$ et que

$b_{2k+1} = o$, lorsque $k \geq 1$. Montrer que

$\displaystyle\frac{1}{thz} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} b_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ et que

$\displaystyle\frac{1}{tgz} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$. Utiliser cette formule et la démonstration de

la proposition 14 pour calculer les coefficients du développement en série de

tgz en fonction des b_{2n}.

<u>Exercice 31.-</u>

α) Quel que soit $\alpha \in [o,\frac{1}{2}]$, on désigne par $Q(\alpha)$ l'ensemble des couples

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $o\leq x\leq 1$, $o\leq y\leq 1$ et $x+y \leq 2(1-\alpha)$. Calculer l'aire $q(\alpha)$

de l'ensemble $Q(\alpha)$.

Quel que soit $\alpha \in]o,\frac{1}{2}]$ on pose

$$I(\alpha) = \iint_{Q(\alpha)} \frac{dx\, dy}{1 - xy}.$$

Montrer que $I(\alpha)$ est une fonction décroissante sur $]o,\frac{1}{2}]$.

β) A l'aide des changements de variable $x = u - v$, $y = u + v$ et

$u = \sin \theta$. Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{4}\, I(\alpha) = \int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \int_{1/2}^{1-\alpha} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \theta d\theta + \int_{\pi/6}^{\operatorname{Arc\,sin}\,(1-\alpha)} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

En déduire que $I(\alpha)$ est continue sur $]o,\frac{1}{2}]$ et que, lorsque α tend vers zéro, cette fonction tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ (que l'on notera $I(o)$).

γ) Quel que soit $\alpha \in [o,\frac{1}{2}]$ et $n \in N$ on pose

$$u_n(\alpha) = \iint_{Q(\alpha)} x^n y^n \, dx\, dy.$$

Calculer $u_n(o)$ en fonction de n. Montrer que les fonctions $u_n(\alpha)$ sont décroissantes et que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est normalement convergente sur $[o,\frac{1}{2}]$.

En déduire que la somme $s(\alpha)$ de cette suite est une fonction continue sur $[o,\frac{1}{2}]$ et que $s(o) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

δ) Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $Q(\alpha)$. Pour y fixé on pose

$$\varphi(y) = \sup_{(x,y) \in Q(\alpha)} f(x,y).$$

Montrer (ou admettre) que $\varphi(y)$ dépend continuement de y. En déduire que $f(x,y)$ est bornée et atteint son maximum en un point de $Q(\alpha)$. Utiliser le théorème de la moyenne pour montrer que

$$\left|\iint_{Q(\alpha)} f(x,y)dx\,dy\right| \leq q(\alpha) \sup_{(x,y)\,\in\,Q(\alpha)} |f(x,y)|$$

(où $q(\alpha)$ est le nombre défini en α)).

ε) Montrer que quel que soit $n \in N$ la série $\sum_{p=n}^{\infty} x^p y^p$ a pour somme une fonction $R_n(x,y)$ continue sur $Q(\alpha)$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\,\in\,Q(\alpha)} R_n(x,y) \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Utiliser l'identité $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=o}^{\infty} t^n$ (valable pour $|t| < 1$) et δ) pour montrer que, quel que soit $\alpha \in]o,\frac{1}{2}]$,

$$I(\alpha) - \sum_{p=o}^{n-1} u_p(\alpha) = \iint_{Q(\alpha)} R_n(x,y)\,dxdy$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En déduire que

$$I(\alpha) = s(\alpha) \text{ sur }]o,\tfrac{1}{2}] \text{ et que } \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Je signale au lecteur qu'il trouvera dans ce cours les pages 12bis - 41 bis - 49 bis - 154 bis - 157 bis.

-:-:-:-:-:-