Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en analyse de Fourier

par Henry HELSON

Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en analyse de Fourier

par Henry HELSON

Le contenu de ce cours est extrait, pour la majeure partie, de mon livre (Lectures on Invariant Subspaces) et de mes travaux publiés. Le lecteur devrait connaître les faits fondamentaux concernant : les mesures, les espaces de Hilbert et de Banach, et les séries trigonométriques. Pour ces préconnaissances on se réfèrera aux livres de Riesz-Sz.-Nagy et de Zygmund par exemple.

Ces notes ont été rédigées par MM. Djebbar et Seghier et tapées par Mme Maynard. Je tiens à leur exprimer mes remerciements.

H. Helson

Orsay, le 8 mai 1967

TABLE DES MATIERES

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques résultats relatifs au tore qui nous seront utiles par la suite.

Nous identifierons le tore soit au cercle unité ($\{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z|=1\}$) soit à l'intervalle $(0,2\pi)$. Nous prendrons comme mesure sur le tore $d\sigma(x) = \frac{dx}{2\pi}$ où dx est une mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$.

Une fonction f sur le tore notée $f(e^{ix})$ est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ $(x \in R)$ et on note son intégrale sur le tore :

$$\int f\, d\sigma = \int_0^{2\pi} f(e^{ix})\, d\sigma(x) .$$

Il n'est pas nécessaire de préciser les bornes puisque le champ d'intégration est donné par la mesure $d\sigma$ sauf quand il s'agit d'une intégrale partielle.

$L^1(0,2\pi)$ ou L^1 (cercle unité) ou $L^1(T)$ désigneront l'espace des fonctions mesurables définies sur le tore T et telles que :

$$\int |f|\, d\sigma < \infty$$

La norme de $L^1(T)$ est précisément ce nombre-là.
Pour une fonction $f \in L^1(T)$ on définit les coefficients de Fourier par

$$a_n(f) = \int e^{-inx} f(e^{ix})\, d\sigma(x) = \int \chi^{-n} f\, d\sigma$$

avec $\chi(e^{ix}) = e^{ix}$, et on lui associe la série formelle

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{inx}$$

qu'on appelle la série de Fourier de f, qu'on note :

$$f(e^{ix}) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{inx}$$

Remarques :

(1) Si $f(e^{ix}) = \sum_{-N}^{+N} a_n \, e^{inx}$ alors $f(e^{ix}) \sim \sum_{-N}^{+N} a_n \, e^{inx}$, en effet,

soient $(b_m)_{m \in N}$ les coefficients de Fourier de f, on a :

$$b_m = \int e^{-imx} f(e^{ix}) \, d\sigma(x) = \int e^{-imx} (\sum_{-N}^{+N} a_n \, e^{inx}) \, d\sigma(x) =$$

$$\sum_{-N}^{+N} a_n \int e^{i(n-m)x} \, d\sigma(x) = a_m \quad \forall \, |m| \leq N$$

(2) Pour tout $f \in L'$ on a :

$$|a_n| \leq \int |f| \, d\sigma = \|f\|_{L'} \quad \text{(car } d\sigma \text{ est normalisé)}$$

(3) Pour tout n fixé $a_n = a_n(f)$ dépend linéairement de f donc :

$$f \longrightarrow a_n(f)$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur $L'(T)$.

(4) Pour n fixé l'ensemble des f telles que $a_n(f) = 0$ est un sous-ensemble fermé de $L'(T)$ (sous-espace vectoriel).

Pour p tel que $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace L^p :

$$L^p : \{f \text{ mesurables sur } T \text{ telles que } \|f\|_p = \int |f^p|^{1/p} d\sigma < \infty\}$$

Pour $p = +\infty$ on définit de même L^∞ :

$$L^\infty : \{f \text{ mesurables et bornées sur } T\}$$

la norme dans L^∞ est $\|f\|_\infty = M$ si $|f(e^{ix})| \leq M$ presque partout, M étant le plus petit des majorants.

Si $p' > p$ on a $L^{p'} \subset L^p$. Cela provient du fait que pour f fixée, $\|f\|_p$ est croissante quand p croît. En effet soit $f \in L^p \cap L^{p'}$ (qui est non vide). Nous devons montrer que :

$$\left(\int |f|^{p}\, d\sigma\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^{p'}\, d\sigma\right)^{1/p'}$$

L'inégalité de Hölder pour deux fonctions g et h appartenant respectivement à L^n et à L^m $(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1)$ est :

$$\int |g.h|\, d\sigma \leqslant \left(\int |g|^{n}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int |h|^{m}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{m}}$$

Posons alors $|f|^p = g$ et $h = 1_T$ (fonction égale à 1 p.p. sur T), $n = p'/p$. On a donc

$$\int |f|^{p}\, d\sigma \leqslant \left(\int (|f|^{p})^{p'/p}\right) . \left(\int (1_T)^{m}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\int |f|^{p'}\, d\sigma\right)^{p/p'} ,$$

d'où

$$\left(\int |f|^{p}\, d\sigma\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^{p'}\, d\sigma\right)^{1/p'} .$$

<u>Espaces L^2</u> :

L^2 est un espace de Hilbert où le produit scalaire est défini par

$$(f,g) = \int f.\bar{g}\, d\sigma \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^2 .$$

Ce produit scalaire est linéaire par rapport à f et antilinéaire par rapport à g $((f,\lambda g) = \bar{\lambda}(f,g))$.

L^2 est un espace complet pour la norme $\|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$.
Pour $p \neq 2$, les espaces L^p ne sont pas des espaces de Hilbert.
Dans L^2 on a l'inégalité de Schwartz

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_2 . \|g\|_2 \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^2 .$$

Le produit scalaire est continu par rapport aux deux variables. En effet si

$$\left\{\begin{matrix} f_n \to f \\ g_n \to g \end{matrix}\right\} \quad f_n \in L^2 \text{ et } g_n \in L^2 \text{ et la limite est en norme dans } L^2$$

alors : $(f_n,g_n) \to (f,g)$, car on a :

$$\begin{aligned}|(f_n,g_n) - (f,g)| &= |(f_n,g_n-g) - (f-f_n,g)| \\ &\leqslant |(f_n,g_n-g)| + |(f-f_n,g)| \\ &\leqslant \|f_n\|_2 . \|g_n-g\|_2 + \|f-f_n\|_2 \|g\|_2 < \varepsilon\end{aligned}$$

pour n assez grand, car $\|f_n\|_2$ est borné si f_n converge.

<u>Définition</u> :

On dit qu'une fonction F définie sur l'espace L^p est une fonctionnelle linéaire si :

$$F(f+g) = F(f) + F(g) \quad , \quad \forall\, f \text{ et } g \in L^p$$

$$F(\alpha f) = \alpha F(f) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$$

et F continue.

On note $(L^p)^*$ l'ensemble des fonctionnelles F sur L^p. Si p et q sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ou $q = \infty$ si $p = 1$ (p et q sont dits exposants conjugués) L^q est alors le dual de L^p en ce sens :

<u>Théorème</u> :

<u>Pour</u> $1 \leqslant p < \infty$, <u>toute fonctionnelle linéaire sur</u> L^p <u>s'exprime par la formule</u> :

$$F(f) = \int f\, \bar{g}\, d\sigma \quad \text{pour} \quad g \in L^q \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

<u>De plus</u> $1 \leqslant p < \infty$ <u>la norme de</u> F <u>définie par</u>

$$\|F\| = \sup_{f \in L^p \,;\, \|f_p\| \leqslant 1} |F(f)|$$

<u>est exactement</u> $\|g\|_q$.

Dans la démonstration du théorème on se sert de l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int f . \bar{q}\, d\sigma\right| \leqslant \|f\|_p . \|g\|_q$$

(Nous ne donnerons pas la démonstration du théorème ici).

<u>Remarque</u> :

1) Etant donné un espace de Banach on peut avoir plusieurs identifications de son dual. Exemple :

Pour toute $f \in L^p$ on définit

$$F'(f) = \int f \frac{\bar{g}}{x} d\sigma$$

le dual de L^p est donc l'ensemble des fonctions g telles que $\frac{g}{x} \in L^q$ (où $x \in]0,2\pi]$).

L'avantage de prendre L^q comme identification du dual de L^p est que les fonctions de L^q donnent une expression particulièrement simple des fonctionnelles.

2) Si $q = +\infty$ le théorème est inexact car le dual de L^∞ contient strictement L' (L^∞ est un espace trop "vaste").

3) L^p est réflexif pour $1<p<\infty$ $((L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p)$ L' n'est pas réflexif.

Egalité de Parseval :

Soit $f \in L^2$ $f \sim (a_n)_{n\in N}$ i.e. $f(e^{ix}) \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$. Alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 .$$

On a facilement un résultat plus faible ; Inégalité de Bessel :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

Preuve :

$$\|f - \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}\|_2^2 \geqslant 0 \quad \text{i.e. :}$$

$$<f - \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx} , f - \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}> \geqslant 0$$

$$<f,f> + <f, \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}> - <\sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}, f> + <\sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}, \sum_{-N}^{+1} a_n e^{inx}> \geqslant 0$$

$$\|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{+N} |a_n|^2 \geqslant 0 \quad , \forall N \text{ d'où à la limite :}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

Démonstration du théorème de Parseval (Egalité).

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

1) Théorème de Riesz-Fischer : (sans démonstration)

Pour toute suite $(a_n)_{n \in N}$ telle que

$$\sum |a_n|^2 < \infty$$

Il existe au moins une fonction $f \in L^2$ telle que

$$f \sim \sum a_n \chi^n$$

. Soit alors P.T l'ensemble des polynômes trigonométriques qui est un sous-espace de $L^2(T)$ et soit $F : f \longrightarrow (a_n)_{n \in N}$

La restriction de F à ce sous-espace est une isométrie, en effet soit $P_N = \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx}$ on a $\|P\|_2^2 = \sum_{-N}^{+N} |a_n|^2$.

Et si nous montrons que $\overline{P.T} = L^2$ alors F se prolonge en une isométrie sur L^2 et le théorème est démontré.

2) $\underline{\overline{P.T} = L^2}$

Supposons le contraire, il existerait alors une fonction f dans L^2 qui n'appartiendrait pas à la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques. Comme L^2 est un espace de Hilbert, il revient au même de dire qu'il existe $f \in L^2$, $f \not\equiv 0$ et f orthogonale à $\overline{P.T}$ i.e :

$$a_n = \int f \chi^{-n} = 0 \quad \forall n \neq 0$$

On peut choisir cette fonction telle qu'elle soit continue :
Soit en effet g définie par :

$$g(e^{it}) = \int_0^t f(e^{ix})\, d\sigma(x)$$

cette fonction est évidemment continue et l'on a :

$$(1) \quad \int g \chi^n = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \neq 0$$

ou encore en posant $a = \int g \chi^0$

$$\int (g-a)\, \chi^n = 0 \,, \quad \forall n \,.$$

(ce résultat est obtenu par intégration par partie).

Comme $g-a$ est continue sur le cercle, d'après le théorème de Weïrstrass, $g-a$ peut être approchée uniformément par une suite de polynômes et d'après (1) on a :

$$\int (g-a)\,\overline{P}_n\, d\sigma = 0$$

et à la limite :

$$\int |g-a|^2\, d\sigma = \|g-a\|_{L^2} = 0 \qquad (|g-a| = \lim_{n\to\infty} P_n)\,.$$

Par conséquent :

$$g-a = 0 \text{ presque partout.}$$

Comme g est continue

$$g = a \text{ partout.}$$

De plus $f = g' = 0$ partout, d'où la contradiction et

$$\overline{T.P} = L^2$$

C.Q.F.D.

<u>Remarques</u> :

1) On peut montrer le même résultat par une autre méthode. Pour toute fonction $g \in L^2$, il existe une suite (f_n) de polynômes telle que :

$$g = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{(la limite est prise en norme dans } L^2\text{)}$$

Les f_n étant définis par :

$$f_n(y) = \int P_n(x)\, g(y-x)\, d\sigma(x)$$

et les P_n sont des polynômes trigonométriques caractérisés par le fait qu'ils tendent vers 0 très vite en dehors d'un petit intervalle. On reviendra à cette méthode.

2) L'égalité de Parseval équivaut à l'unicité des coefficients de Fourier d'une fonction dans $L^2(T)$ i.e.

$$f \in L^2 \quad \text{et} \quad a_n(f) = 0 \quad \forall n \Rightarrow f=0$$

3) La même démonstration de l'égalité de Parseval donne un énoncé plus général :

si $f \in L^1(T)$ et $a_n(f) = 0$ pour tout n alors $f=0$

Définition :

Pour tout p tel que $1<p<\infty$, on définit les espaces H^p par :

$$H^p : \left\{ f \in L^p \; ; \; f \sim \sum_0^\infty a_n \, e^{inx} \right\}$$

Ce sont des sous-espaces de L^p

Théorème :

Pour toute fonction $f \in H^2$ et $f \not\equiv 0$, $f \neq 0$ presque partout

Preuve :

H^2 étant un sous-espace fermé de L^2, c'est donc un sous-espace de Hilbert. $(H^2 = \bigcap_{n<o} \text{Ker } a_n(f))$

Il est clair que si f est dans H^2 $\chi^n f \in H^2$ pour tout $n>0$. Si la valeur moyenne de f est nulle, i.e. $f \sim \sum_1^\infty a_n \chi^n$, on prendra pour f, $f\chi^{-n}$ avec n convenablement choisi de telle sorte que l'on ait :

$$f \sim \sum_o^\infty a_n \chi^n \quad \text{avec} \quad a_o \neq 0 \quad (a_o = \int f \neq 0)$$

On définit un sous-espace M de H^2 par :

$$M : \left\{ g = f.(1+a_1\chi+a_2\chi^2+\dots+a_n\chi^n) \right. ,$$

$$\left. f \text{ fixée, et pour toutes les suites } (a_1,\dots,a_n),\ n \text{ variant} \right\}$$

$\overline{M}$ est un sous-espace convexe fermé de H^2. Dans $\overline{M}$, il existe un élément g minimal en norme et unique d'après les propriétés des espaces de Hilbert.

Ceci étant, et d'après la définition de $\overline{M}$. $g+\lambda\chi^n g$ appartient aussi à $\overline{M}$ pour $n>0$. Comme la norme de g est minimale on a :

$$\|g + \lambda\chi^n g\|_2 \geqslant \|g\|_2 \qquad \forall\ \lambda\in\mathbb{C} \quad \text{i.e. :}$$

$$\int|g + \lambda\chi^n g|^2\, d\sigma = \int|g|^2\, d\sigma + \lambda^2 \int|g|^2 + 2\ \mathrm{Re}\ \bar\lambda \int g\chi^{-n}\bar g\, d\sigma$$

$$= (1+|\lambda|^2)\int|g|^2\, d\sigma + 2\ \mathrm{Re}\ \bar\lambda \int\chi^{-n}|g|^2\, d\sigma$$

$$\geqslant \int|g|^2\, d\sigma \quad .$$

Or on peut trouver des λ très petits en module telle que cette inégalité ne soit vérifiée que si l'on a :

$$\int \chi^{-n}|g|^2\, d\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

et par passage au conjugué pour $n=-1,-2,\ldots$

Ainsi :

$$|g|^2 \sim a_o$$

donc d'après le théorème d'unicité :

$$|g|^2 = a_o \quad \text{presque partout.}$$

Comme $g\in\bar M$, elle peut être approchée par des fonctions du type : $f(1+a_1 +\ldots+a_n\chi^n)$
et en passant à l'intégrale :

$$\int g = \lim \int f(1+a_1\chi+\ldots+a_n\chi^n)$$

comme $f\in H^2$ on a

$$\int f\ \chi^n = 0 \quad \Longrightarrow \int g = \int f = a_o \neq 0 \Longrightarrow |g| = cte \neq 0 \quad \text{p.p.}$$

Si f était nulle sur un ensemble de mesure positive, $g = f(1+a_1\chi+\ldots+a_n\chi^n)$ serait nulle presque partout sur le même ensemble. Or $|g| = cte \neq 0$ presque partout, d'où la contradiction.

C.Q.F.D.

<u>Définition</u> :

Soit M un sous-espace fermé de L^2 ayant la propriété suivante :

$$(\forall f \in M \, , \, \chi f \in M \quad \text{et} \quad \chi^{-1} f \in M)$$

M est dit alors sous-espace complètement invariant.
L'ensemble des suites $[a_n(f)]_{-\infty}^{+\infty}$ pour toute $f \in M$, est invariant par <u>translation</u> dans ℓ^2.

<u>Théorème dit de Wiener</u> :

<u>Si</u> M <u>est un sous-espace complètement invariant</u>, <u>il existe un ensemble</u> E <u>mesurable sur le cercle tel que</u> $M = M_E$ <u>avec</u> M_E : $\{f \in L^2 \, : \, f = 0$ en dehors de E presque partout$\}$

<u>Remarque</u> :

Pour chaque E mesurable sur le tore M_E est un sous-espace de L^2 ayant la propriété de M.

<u>Démonstration du Théorème</u> :

Soit $g \in L^2$ et g orthogonale à M i.e.

$$\int g\bar{f} \, d\sigma = 0 \qquad \forall f \in M \, .$$

Donc

$$(f \in M \Rightarrow \chi^n f \in M \quad \forall n) \Rightarrow \left(\int g\bar{f}\, \chi^n \, d\sigma = 0 \, , \, n = 0, \pm 1, +2, \ldots\right) .$$

Comme f et g sont dans L^2, $f\bar{g} \in L^1$ et $a_n(f\bar{g}) = 0$ pour tout n.
En appliquant le théorème d'unicité $g\bar{f} = 0$ presque partout.
Par conséquent pour toute g dans $M^\perp$ et pour toute f dans M on a

$$g\bar{f} = 0$$

Soient maintenant la fonction $1_T = \chi_o = 1$ presque partout sur le tore et f sa projection sur M (dans un espace de Hilbert, pour tout sous-espace fermé, il existe un opérateur autoadjoint qui réalise la projection d'un élément quelconque sur ce sous-espace).

On a donc :

$$(1-f) \perp M \quad \text{et} \quad (1-f) \perp \chi^n f \qquad \forall n$$

i.e. :

$$\int (1-f)\bar{f}\chi^{-n}\, d\sigma = 0 \qquad \forall n$$

d'où

$$(1-f)\bar{f} = 0 \quad \text{p.p.}$$

ce qui entraîne que

$$\bar{f} = |f|^2 \quad \text{i.e.} \quad f \geq 0 \quad f = f^2$$

Mais cela n'est vrai que si :

$$f = 0 \quad \text{ou} \quad f = 1 .$$

Soit alors E l'ensemble où $f = 1$. Si g est dans $M^{\perp}$ on a :

$$g = 0 \quad \text{p.p. dans } E \quad (g\bar{f} = 0 \text{ p.p.}).$$

Pour tout h dans M on a :

$$(1-f)\bar{h} = 0 \quad \text{p.p.} \quad (1-f \in M^{\perp})$$

h est donc nulle presque partout sur l'ensemble où est portée $1-f$, i.e. :

$$h = 0 \text{ sur } \complement E \text{ p.p.}$$

donc

$$M \subset M_E .$$

Mais comme $M \oplus M^{\perp} = L^2$ on en déduit que $M = M_E$ (en effet si $h \in M_E$ et $h \perp M$, on a $h = 0$ sur $\complement E$ p.p. et $h = 0$ sur E p.p., ce qui prouverait que $h = 0$ p.p.) .

C.Q.F.D.

<u>Définition</u> :

Soit M un sous-espace fermé de L^2 ayant la propriété suivante

$$\chi.M \subsetneq M \quad (\text{i.e. } \chi^{-1}.M \not\subset M \text{ et } \chi.M \subset M) .$$

Un tel sous-espace est dit simplement invariant.

<u>Exemple</u> : l'espace H^2 : $\{f \in L^2 ; f \sim \sum_0^\infty a_n e^{inx}\}$ est simplement invariant. En effet :

$$\chi f \sim \sum_0^\infty a_n e^{i(n+1)x} = \sum_0^\infty b_n e^{inx} \quad (b_n = a_{n-1})$$

de plus si $a_o \neq 0$:

$$\chi^{-1} f \sim \sum_0^\infty a_n e^{i(n-1)x} = \sum_{-1}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (c_{-1} = a_o \neq 0)$$

$\chi^{-1} f$ n'appartient donc pas à H^2 .

<u>Théorème</u> (de Beurling) :

<u>Les sous-espaces simplement invariants sont de la forme</u> :

$$E\, H^2 : \{f = E.g \ , \ \forall\, g \in H^2\}$$

<u>où</u> E <u>est une fonction sur le cercle telle que</u> :

$$|E(e^{ix})| = 1 \text{ presque partout.}$$

<u>Preuve</u> :

Tout ensemble $E\,H^2$ est simplement invariant. En effet si g est dans H^2 on a :

$$\chi \cdot E\, g = E\, \chi\, g \quad \text{et} \quad \chi\, g \in H^2 \Longrightarrow \chi\, E.g \in E\, H^2$$

d'autre part

$$\chi^{-1} E\, g = E\, \chi^{-1} g$$

et pour un choix convenable de g $(a_o(g) \neq 0)$;

$$\chi^{-1} g \notin H^2 \Longrightarrow \chi^{-1} E\, g \notin E\, H^2$$

Les ensembles invariants sont les ensembles $E\,H^2$.

Posons $M_n = \chi^n M$. Les M_n sont strictement décroissants par inclusion pour n tendant vers $+\infty$ puisque M est simplement invariant.

Soit alors $M_1 = \chi\, M \subsetneq M$. On peut trouver une fonction E dans $M \ominus M$ telle que $\|E\| = 1$. Comme $M_n \subset M$, pour $n>1$, E est dans $M_n^\perp$ pour $n=1,2,\ldots$; de plus :

$$\chi^n E \in M_n \ominus M_{n+1} \subset M_n \Longrightarrow E \perp \chi^n E \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots$$

i.e. :

$$\int E.\overline{E}\, \chi^{-n}\, d\sigma = 0 \ ; \ n=1,2,\ldots$$

soit

$$\int |E|^2 \chi^{-n} = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots$$

et en prenant la conjuguée de l'intégrale

$$\int |E|^2 \chi^{-n} = 0 \quad \text{pour} \quad n=-1,-2,-3,\ldots$$

La fonction $|E|^2$ a tous ses coefficients de Fourier nuls sauf celui qui correspond à $n=0$, on en conclut que :

$$|E| = \text{cte} \quad \text{presque partout}$$

comme $\|E\| = 1$:

$$|E| = 1 \quad \text{presque partout.}$$

E étant dans M, $\chi^n E$ est aussi dans M ainsi que $E(a_o + a_1 \chi + \ldots + a_n \chi^n)$. Comme la fermeture de l'ensemble des fonctions du type $(a_o + a_1 \chi + \ldots + a_n \chi^n)$ est H^2, la fermeture de $\{E(a_o + a_1 \chi + \ldots + a_n \chi^n)\}$ est $E\, H^2$.

Par conséquent :

$$E\, H^2 \subset M \quad \text{(puisque } M \text{ est fermé)}.$$

D'autre part :

$$\chi^{-1} E \in M_{-1} \ominus M \Longrightarrow \chi^{-1} E \perp M \ ; \text{ et de même } \chi^{-n} E \perp M \quad \forall\, n=1,2,\ldots$$

d'où

$$E(a_{-1} \chi^{-1} + a_{-2} \chi^{-2} + \ldots + a_{-n} \chi^{-n}) \in M^{\perp}$$

Comme

$$\overline{\{(a_{-1} \chi^{-1} + \ldots + a_{-n} \chi^{-n})\}} = (H^2)^{\perp}$$

Cela implique que :

$$E.(H^2)^{\perp} \subset M^{\perp}$$

mais comme $E\, H^2 \subset M$, cela n'est possible que si

$$M = E\, H^2 .$$

C.Q.F.D.

Corollaire :

Si M est un sous-espace invariant et si les sous-espaces M_n ne sont pas tous identiques, on a :

(1) $$\bigcap_n M_n = \{0\}$$

(2) $\bigcup_n M_n$ (pour $n \to -\infty$) est partout dense dans L^2.

En effet comme $M = E.H^2$ et que l'application

$$g \to E\ g$$

est injective, on a :

$$\bigcap_n M_n = \bigcap_n \chi^n E.H^2 = E.\bigcap_n \chi^n H^2 = E.\{0\} = \{0\}$$

d'autre part :

$$\bigcup_{\substack{n \\ n\to-\infty}} M_n = \bigcup_n \chi^n E\ H^2 = E.\bigcup \chi^n H^2 \supset E.\{\text{l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques}\}$$

Or les polynômes trigonométriques sont partout denses dans L^2, d'où la conclusion de (2).

Application du Théorème de Beurling :

Deuxième démonstration de la proposition :

si $f \in H^2$ et $f \neq 0$ alors $f \neq 0$ p.p.

Supposons le contraire, i.e. $f=0$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive. Soit Mf le plus petit sous-espace invariant de L^2 contenant f (c'est la fermeture de l'ensemble des fonctions du type $f.\{a_0 + a_1 \chi^1 + \dots + a_n \chi^n\}$). Mf étant simplement invariant, il s'écrit :

$$Mf = E\ H^2$$

En particulier E est dans Mf et E est non nulle presque partout. Or toute fonction de Mf est nulle sur $\mathcal{E}$, d'où la contradiction.

C.Q.F.D.

Définition du produit de convolution :

Le produit de convolution de deux fonctions appartenant à $L^1(T)$ est la fonction définie par :

$$h(x) = f * g(x) = \int f(x-y)\ g(y)\ d\sigma(y)\ .$$

Les fonctions $f(x-y)$ et $g(y)$ considérées comme fonctions de deux variables sont mesurables ; il en est de même de leur produit $f(x-y)$ $g(y)$. Pour presque tout y , la fonction $f(x-y)\ g(y)$ appartient à $L^1(T)$ (comme fonction de x) .

En utilisant le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}\int\Big[\int |f(x-y)\ g(y)|\ d\sigma(y)\Big]\ d\sigma(x) &= \int d\sigma(y) \int |f(x-y)\ g(y)|\ d\sigma(x)\\ &= \int |g(y)|\ d\sigma(y)\Big(\int |f(x-y)|\ d\sigma(x)\Big)\\ &= \|g\|_1 . \|f\|_1 < \infty\end{aligned}$$

Par suite $\int |f(x-y)\ g(y)|\ d\sigma(y)$ est finie presque partout, i.e. la fonction $f * g$ est définie pour presque tout x .

D'autre part l'inégalité

$$\int\Big|\int f(x-y)\ g(y)\Big|\ d\sigma(y)\quad d\ (x) \leqslant \iint |f(x-y)\ g(y)|\ d\sigma(x)\ d\sigma(y) = \|f\|_1 . \|g\|_1$$
$$\leqslant \infty$$

montre que $f * g$ est dans $L^1(T)$.

Propriétés du produit de convolution :

(1) Pour f et g appartenant à $L^1(T)$ on a :

$$a_n\ (f * g) = a_n(f)\ .\ a_n(g)$$

En effet :

$$\begin{aligned}a_n(f * g) &= \int f * g(x)\ e^{-inx}\ d\sigma(x)\\ &= \int\Big(\int f(x-y)\ g(y)\ d\sigma(y)\Big)\ e^{-inx}\ d\sigma(x)\\ &= \iint f(x-y)\ e^{-in(x-y)}\ g(y)\ e^{-iny}\ d\sigma(x)\ d\sigma(y)\\ &= \int f(x-y)\ e^{-in(x-y)}\ d\sigma(x) \int g(y)\ e^{-iny}\ d\sigma(y)\\ &= a_n(f)\ a_n(g)\end{aligned}$$

2 - Pour f et g dans $L^2(T)$ on a :

$$a_n(f.g) = a_n(f) * a_n(g)$$

$*$ est un produit de convolution que l'on précisera.

En effet soit f et g dans $L^2(T)$, leur produit $f.g$ appartient à $L^1(T)$ et

$$a_n(f.g) = \int f.g\, e^{-inx}\, d\sigma(x)$$

f et g étant dans $L^2(T)$ on a :

$$f = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} a_n\, e^{inx} \quad \text{et} \quad g = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} b_m\, e^{imx}$$

(la limite est prise par rapport à la norme de $L^2(T)$).

D'après la continuité du produit scalaire on a :

$$a_r(f.g) = \lim_{N\to\infty} \int \Big(\sum_{-N}^{+N} a_n\, e^{inx}\Big) \Big(\sum_{-N}^{+N} b_m\, e^{imx}\Big)\, e^{-irx}\, d\sigma(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_m a_{r-m}\, b_m\Big) \quad \text{pour} \quad |m| \leqslant N \text{ , } |r-m| \leqslant M$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{r-m}\, b_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{r-m}(f)\, a_m(g)$$

en posant $a_{r-m} = a_{r-m}(f)$ et $b_m = a_m(g)$. On convient d'écrire :
$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{r-m}(f)\, a_m(g) = a_r(f) * a_r(g)$, on a donc :

$$a_r(f.g) = a_r(f) * a_r(g) .$$

<u>Remarque</u> :

Ce résultat a un sens car la série $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{r-m}\, b_m$ est absolument convergente ; en effet :

$$\sum_{m=-N}^{+N} |a_{r-m}|\, |b_m| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{-N}^{+N} (|a_{r-m}|^2 + |b_m|^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty} |b_m|^2\Big)$$

d'où en passant à la limite et en utilisant l'inégalité de Bessel

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{r-m}|\ |b_m| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_2 + \|g\|_{L^2})$$

(2) le même résultat se généralise au cas où $f \in L^p(T)$ et $g \in L^q(T)$ $(1<p\leqslant\infty$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1)$ en utilisant le fait que $\sum_{-N}^{+N} a_n e^{-inx}$ tend vers f en norme dans $L^p(T)$ quand $N \to \infty$ (il en est de même pour g dans $L^q(T)$), d'après un théorème de M. Riesz. En effet dans ce cas on a de même :

$$a_r(f\circ g) = \lim_{N\to\infty} \int (\sum_{-N}^{+N} a_n \chi^n)(\sum_{-N}^{+N} b_n \chi^n)\ \chi^{-r}\ d\sigma(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} (\sum a_{r-m}\ b_m\ ,\ |m| \leqslant N\ ,\ |r-m| \leq N)$$

et la série $\sum a_{r-m}\ b_m$ est convergente quand $N \to \infty$.

<u>Définition</u> :

On appelle unité approchée dans $L^1(T)$ un système de fonctions $K_1, K_2, \ldots, K_n$, tel que :

$$K_n * f \xrightarrow{L^1} f \ ;\quad \forall\ f \in L^1(T) \quad \text{pour} \quad n \to \infty$$

Au lieu d'un système on peut avoir une famille de fonctions $(K_r)_{r\in[0,1[}$ telles que :

$$K_r * f \xrightarrow{L^1} f \ ;\quad \forall\ f \in L^1(T) \quad \text{pour} \quad z \uparrow 1 \quad \text{(en croissant)}$$

Cette famille est aussi appelée unité approchée.

L'idée d'approcher l'unité (en tant qu'opérateur) provient du fait que $\delta * f = f$, δ étant la mesure de Dirac. Mais δ n'est pas une fonction dans $L^1(T)$.

<u>Théorème de Fejér</u> :

<u>Soit un système de fonctions</u> $(K_n)_{n\in N}$ <u>vérifiant</u> :

(1) $K_n \geqslant 0$, $\forall\ n$

(2) $\int K_n\ d\sigma = 1$, $\forall\ n$

(3) $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K_n\ d\sigma \to 1 \quad (n \to \infty)$

<u>Alors</u> $(K_n)_{n\in N}$ <u>est unité approchée.</u>

On donnera deux démonstrations, la première pour $L^1(T)$, la seconde, beaucoup plus générale, dans $L^p(T)$ $(p \geq 1)$

1) Cas de $L^1(T)$:

$$\|K * f - f\|_1 = \int \left| \int K_n(x)\, f(y-x)\, d\sigma(x) - f(y) \right| d\sigma(y)$$

d'après (2) $f(y) = \int K_n(x)\, f(y)\, d\sigma(x)$, donc

$$\|K * f - f\|_1 \leq \iint K_n(x)\, |f(y-x) - f(y)|\, d\sigma(x)\, d\sigma(y)$$

Posons $\rho(x) = \int |f(y-x) - f(y)|\, d\sigma(y)$.

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\|K_n * f - f\|_1 \leq \int K_n(x)\, \rho(x)\, d\sigma(x)$$

ou encore

$$(1)\quad \|K_n * f - f\|_1 \leq \int_{-\pi}^{-\varepsilon} K_n(x)\, \rho(x)\, d\sigma(x) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K_n(x)\, \rho(x)\, d\sigma(x) + \int_{-\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\, \rho(x)\, d\sigma(x) .$$

$\rho(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (c'est la continuité de la translation de la norme liée à la mesure de Lebesgue)

Donc pour ε donné positif :

$\rho(x) < \eta$ dans $[-\varepsilon \;\; +\varepsilon]$, avec η très petit.

De plus les égalités :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K_n(x)\, d\sigma(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K_n(x)\, d\sigma(x) = 1$$

impliquent que, pour n assez grand,

$$\int_{-\pi}^{-\varepsilon} K_n(x)\, d\sigma(x) \quad \text{et} \quad \int_{+\varepsilon}^{+\pi} K_n(x)\, d\sigma(x)$$

sont très petits.

D'autre part, on a :

$$\rho(x) \leq 2\|f\|_1 \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K_n(x)\, d\sigma \leq 1$$

Ainsi, les trois intégrales du deuxième membre de l'inégalité peuvent être majorées et on a :

$$\|K_n * f - f\|_1 \leq z\,\|f\|_1\,\varepsilon_1 + n + 2\,\|f\|_1\,\varepsilon_2 \leq \varepsilon$$

2) Cas général ($L^p(T)$, $p<+\infty$)

Théorème :

Si $p<+\infty$ et sous les mêmes hypothèses sur les K_n que ci-dessus, on a :

$$K_n * f \xrightarrow{L^p} f \text{ , pour tout } f \in L^p(T) \text{ et } n \to \infty$$

Si f est continue, alors $K_n * f \longrightarrow f$ uniformément.

La démonstration se basera sur le fait que $C(T)$ est dense dans L^p (Théorie de la mesure) et sur le principe général suivant :

Soit $T_1, T_2, \ldots, T_n,$ une suite de transformations continues dans un espace de Banach ε telle que :

$$\|T_j\| \leq K < \infty \text{ pour chaque } j \text{ (}K\text{ indépendant de } j\text{) ;}$$

et T_j converge pour chaque fonction f , f dans ε_o sous-ensemble dense dans ε. Alors il existe un opérateur linéaire T borné dans ε tel que $T_j(f)$ tend vers $T(f)$ pour f dans ε.

Indication de la démonstration du principe :

L'opérateur T est défini pour $f \in \varepsilon_o$ comme limite des $T_j(f)$. Le champ de convergence des T_j étant linéaire (espace vectoriel), on peut supposer que ε_o est linéaire (espace vectoriel).

Pour tout $f \in \varepsilon_o$ et pour tout j :

$$\|T_j(f)\| \leq K\|f\|_1$$

puisque les T_j sont continues et globalement bornées par K.

D'où en passant à la limite :

$$\|T(f)\| \leq K\|f\| .$$

Donc T admet un prolongement unique $\tilde{T}$ à l'espace tout entier et $\tilde{T}$ aura les mêmes propriétés que T (de linéarité et de borne K).

Reste à montrer que pour tout $f \in \varepsilon$

$$\lim_{j\to\infty} T_j(f) = \tilde{T}(f) .$$

Soient $f \in \varepsilon$ et $f_o \in \varepsilon_o$, f_o approchant f.

$$\tilde{T}(f) - T_j(f) = (\tilde{T}f - \tilde{T}f_o) + (Tf_o - T_jf_o) + (T_jf_o - T_jf)$$

$$\|\tilde{T}(f) - T_j(f)\| \leqslant K\|f - f_o\| + \|Tf_o - T_jf_o\| + K\|f_o - f\|$$

Pour j assez grand et f_o suffisamment voisin de f on a :

$$\|\tilde{T}(f) - T_j(f)\| \leqslant K\,\varepsilon_1 + \varepsilon + K\,\varepsilon_1$$

C.Q.F.D.

En démontrant le théorème de Fejér dans le cas de $C(T)$, le théorème général s'en déduit immédiatement par l'application du principe précédent.

<u>Proposition</u> : (théorème de Fejér dans $C(T)$)

<u>Pour toute</u> $f \in C(T)$ $K_n * f \longrightarrow f$ <u>uniformément</u>

<u>Preuve</u> :

Puisque f est continue sur un compact, l'expression

$$\rho_\infty(x) = \sup_y |f(y-x) - f(y)|$$

tend uniformément vers 0 quand $x \to 0$.

Considérons l'expression $\|K_n * f - f\|_\infty$

$$\|K_n * f - f\|_\infty = \sup_y \left|\int K_n(x)\,[f(y-x) - f(y)]\,d\sigma(x)\right| \leqslant \int K_n(x)\,\rho_\infty(x)\,d\sigma(x).$$

La majoration de l'intégrale du deuxième membre se fait d'une manière analogue à la majoration dans le cas de L^1. Et comme $f_\infty(x) \to 0$ quand $x \to 0$, on en déduit que

$$\|K_n * f - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Pour achever la démonstration du théorème de Fejér, il suffit de remarquer que :

- $C(T)$ est sous-espace dense dans L^p
- $f \in C(T)$ $K_n * f \longrightarrow f$ pour $n \to \infty$
- les opérateurs $K_n * (.)$ sont bornés par 1, en effet

$$\|K_n * f\|_p \leqslant \|K_n\|_1\,\|f\|_p \quad \text{et} \quad \|K_n\|_1 = 1, \quad \forall\, n$$

donc

$$\|K_n * f\|_p \leqslant \|f\|_p \implies \|K_n(\cdot)\| \leqslant 1 , \quad \forall\, n$$

Le principe général nous permet de conclure que pour toute $f \in L^p$ on a:

$$K_n * f \longrightarrow f \text{ en norme dans } L^p \text{ , pour } n \to \infty$$

C.Q.F.D.

<u>Définition des noyaux classiques</u> :

1 - <u>Noyau de Dirichlet</u>

$$D_N(e^{ix}) = \sum_{-N}^{+N} e^{inx}$$

D_N est un polynôme trigonométrique :
Pour toute $f \in L'(T)$ $(f(e^{ix}) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{inx})$:

$$D_N * f(e^{ix}) \sim \sum_{-N}^{+N} a_n\, e^{inx}$$

<u>Remarque</u> :

Si D_N était unité approchée, on aurait $D_N * f \xrightarrow{L^1} f$ pour toute $f \in L^1$, ce qui équivaudrait à

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} a_n\, e^{inx} = f \quad \text{(en norme dans } L^1)$$

Or, ceci est inexact, comme on le montre par des contre-exemples classiques.

<u>Expressions analytiques de</u> D_N

(1) $$D_N(e^{ix}) = 1 + 2 \,\mathrm{Re} \sum_{1}^{N} e^{inx} = 1 + 2 \sum_{1}^{N} \cos n\, x$$

(2) $$D_N(e^{ix})\; e^{-iNx} \sum_{0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx}\, \frac{1 - e^{1(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

$$= \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$D_N(e^{ix}) = \frac{\sin\, (2N+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

<u>Propriétés de</u> D_N :

1) $\int D_N \, d\sigma = 1$, $\forall n$

2) D_N a plusieurs oscillations et au voisinage de 0 , D_N tend vers $2N+1$ et $\int |D_N| \, d\sigma > 1$ à cause des aires négatives

3) $\int |D_N| \, d\sigma \sim K \operatorname{Log} N$, pour une constante K quand N est assez grand.

2 - <u>Noyau de Fejér</u>

Son expression est donnée par :

$$K_N(e^{ix}) = \sum_{-N}^{+N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx}$$

Pour obtenir l'expression analytique de K_N , on pourrait dériver D_N . Mais ici on procède autrement :

Posons $z = e^{ix}$ et considérons l'identité suivante :

$$(1 + z + \dots + z^n)^2 = 1 + 2z + \dots + (n+1)\, z^n + n\, z^{n+1} + \dots + z^{2n}$$

en multipliant par z^{-n}

$$z^{-n}(1+z+\dots+z^n)^2 = z^{-n} + \dots + (n+1) + nz + \dots + z^n = (n+1)\, K_{n+1}(e^{ix})$$

$$= z^{-n}\left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right)^2$$

d'où

$$(n+1)\, K_{n+1}\, (z^2) = \left(\frac{z^{-n} - z^{n+2}}{1 - z^2}\right)^2 = \left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right)^2$$

et l'on a finalement :

$$K_N(e^{ix}) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin N \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$$

<u>Propriétés du noyau de Fejér</u> :

1) $\int K_N \, d\sigma = 1$ (à cause de sa forme primitive)

2) $K_N(e^{ix})$ tend vers 0 uniformément sur $(-\pi, -\varepsilon)$ et (ε, π) quand $N \to \infty$. En effet pour $|x| \geqslant \varepsilon > 0$ les D_N sont bornés.

Les noyaux de Fejér sont donc unité-approchée.

A l'aide des propriétés du noyau de Fejér, nous allons donner une nouvelle démonstration des théorèmes de Parseval et de Weirstrass.

Théorèmes de Parseval et de Weirstrass.

Remarque :

Pour les polynômes trigonométriques l'égalité de Parseval est une conséquence d'un calcul direct et élémentaire. Nous reprenons le sujet ; pour ce but il sera légitime d'utiliser l'égalité de Parseval pour les polynômes trigonométriques ; et le lemme ("principe général") sur les suites d'opérateurs dont les normes sont bornées, s'applique. D'abord il est question du fait que $T_t f \to f$, pour $t \to 0$, dans L^p . Cela est vrai et élémentaire dans $C(T)$. Pour $f \in C(T)$, il est a fortiori vrai que $T_t f \to f$ dans L^p , $1 \leq p < \infty$. Donc si on sait que $C(T)$ est dense dans L^p , on a $T_t f \to f$ pour chaque $f \in L^p$. $(1 \leq p < +\infty)$.

La densité de $C(T)$ dans L^p est triviale si on définit L^p comme le complété de $C(T)$ pour la norme $\| \ \|_p$ dans $C(T)$.

Si on construit les $\bar{L}^p$ par un autre procédé, il sera alors nécessaire de démontrer ce fait dans la théorie.

Nouvelle démonstration du théorème de Parseval.

Avant de donner la démonstration nous allons prouver un lemme.

Lemme :

Si $f \in L^1$, K un polynôme trigonométrique, alors

$$K * f(e^{ix}) = \sum a_n(K)\, a_n(f)\, e^{inx} .$$

la relation $K * f \sim \sum a_n(K)\, a_n(f)\, e^{inx}$ est immédiate.

Mais l'égalité se démontre par un calcul évident : il suffit de considérer $K = \chi^n$, et le résultat s'en déduit à cause de la linéarité de la transformation de Fourier :

$$\begin{aligned} \chi^n * f(e^{ix}) &= \int \chi^n(e^{i(x-y)})\, f(e^{iy})\, d\sigma(y) , \\ &= \int \chi^n(e^{ix})\, \chi^n(e^{iy})\, f(e^{iy})\, d\sigma(y) , \\ &= \chi^n(e^{ix}) \int \chi^n(e^{iy})\, f(e^{iy})\, d\sigma(y) , \\ &= a_n(f)\, \chi^n \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Soit $K = K_N$ le noyau de Fejér d'ordre N et $f \in L^2$, on a :

$$K_N * f = \sum_{-N}^{+N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a_n(f)\, e^{inx} .$$

K_N étant unité approchée :

$$\lim_{N\to\infty} K_N * f = f \quad \text{(la limite est prise dans } L^2 \text{)}$$

En d'autres termes les polynômes trigonométriques sont partout denses dans L^2.

De plus la relation élémentaire :

$$\|K_N * f\|_2^2 = \sum_{-N}^{+N} \left|\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)\right| |a_n(f)|^2$$

ayant pour limite, pour $N \to \infty$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$, implique :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 .$$

Ce qui établit le théorème de Parseval.

<u>Théorème de Weirstrass</u> : (nouvelle démonstration)

<u>Les polynômes trigonométriques forment un sous-espace partout dense dans</u> $C(T)$ (fonctions continues sur le cercle) :

<u>Preuve</u> :

Nous l'avons déjà établie en montrant que :

$$K_N * f \longrightarrow f \text{ (uniformément) pour } f \text{ continue.}$$

On peut déduire <u>l'énoncé</u> plus usuel :

<u>Toute fonction continue sur</u> $[0,1]$ <u>est limite uniforme de polynômes ordinaires</u>.

Soit f continue sur $[0,1]$, on peut la prolonger en une fonction périodique continue sur $[0, 2\pi]$, elle peut alors être considérée comme fonction continue sur le cercle. D'après le théorème précédent, il existe une suite $\{P_n\}$ de polynômes trigonométriques, telle que :

$$\|f - P_n\|_\infty < \varepsilon \text{, pour } n \text{ assez grand.}$$

Comme chaque exponentielle de $P_n = \sum a_n e^{inx}$ peut être approchée sur $[0,1]$ par une somme partielle du développement $e^{inx} = \sum_0^\infty \frac{(inx)^k}{k!}$, on peut trouver une suite de polynômes P'_n de x telle que :

$$\|f - P'_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

C.Q.F.D.

3 - Noyau de Poisson

Le noyau de Poisson est défini par :

$$P_r(e^{ix}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx} \qquad (0<r<1) .$$

$\{P_r\}_{0<r<1}$ est unité approchée. En effet si on pose $z = r e^{ix}$, on a

$$P_r(e^{ix}) = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_1^\infty z^n$$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{z}{1-z}\right) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1 - |z|^2}{(1-|z|)^2}$$

P_r est donc positif pour tout r : $0<r<1$.

D'autre part, d'après son développement en série de Fourier,

$$\int P_z \, d\sigma = 1$$

$P_r(e^{ix})$ tend vers 0 uniformément pour $r \uparrow 1$ et pour $|1 - e^{ix}| \geq \varepsilon > 0$

On notera que P_z n'est pas un polynôme trigonométrique.

<u>Remarques</u> :

Si $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$ converge pour $0<r<1$, la somme est alors une fonction harmonique dans le disque (si F est cette somme, cela signifie que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$) .

Posons $F(r e^{ix}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$ pour $0<r<1$

Soit :

$$\|F_r\|_p = \left(\int |F(r e^{ix})|^p \, d\sigma(x)\right)^{1/p}$$

Pour chaque p fixé on a :

$$\|F_r\|_p \uparrow \quad \text{pour } z \uparrow \ (\uparrow : \text{croissance}) .$$

En effet, soient s et r deux nombres positifs tels que $s<1$ et $r<1$:

$$P_{r\,s} = P_r * P_s \quad [a_n(P_{rs}) = (r.s)^{|n|} = r^{|n|} . s^{|n|} = a_n(P_r * P_s)]$$

et

$$F_{rs} = P_r * F_s$$

d'où

$$\|F_{r\,s}\|_p \leq \|P_r\|_1 . \|F_s\|_p \leq \|F_s\|_p \qquad (r\ rs < s)$$

Une fonction F à valeurs complexes est dite harmonique dans le disque unité si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. On sait de plus que toute fonction F qui est analytique dans D est en même temps harmonique.

<u>Coefficients de Fourier-Stielges d'une mesure</u> :

<u>Définition</u> :

Soit μ une mesure complexe sur $[0,2\pi]$ bornée $(|\mu(E)|<\mu<\infty$ pour tout $E\subset[0,2\pi])$ et définie au moins pour les ensembles boréliens de $[0,2\pi]$; les coefficients de Fourier-Stielges de μ sont définis par :

$$a_n(\mu) = \int \chi^{-n}\,(e^{inx})\ d\mu(x)$$

<u>Remarque</u> :

Il existe une correspondance biunivoque entre certaines mesures complexes (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\sigma(x)$ et les fonctions de $L'(T)$:

Pour $f \in L'(T)$ on fait correspondre

$$d\mu(x) = f\ d\sigma(x)$$

qui définit bien une mesure sur les fonctions complexes, ce qu'on vérifie en posant pour $\phi \in C(T)$.

$$\int \phi\ d\mu = \int \phi\ f\ d\sigma$$

Réciproquement, on montre qu'à toute mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on fait correspondre une fonction dans L^1 .

Pour de telles mesures, nous avons :

$$a_n(\mu) = \int \chi^{-n} \, d\mu(x) = \int \chi^{-n} f \, d\sigma(x) = a_n(f)$$

Les coefficients de Fourier-Stielges d'une mesure absolument continue $f\,d\sigma$ sont exactement les coefficients de Fourier de la fonction f.
Pour les mesures absolument continues, on a :

$$a_n(\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{car} \quad a_n(f) \longrightarrow 0 \quad \text{d'après le théorème de Mercer})$$

Mais ceci est inexact pour une mesure quelconque. Pour le voir il suffit de prendre la mesure de Dirac à un point e^{ix_0} arbitraire :

$$a_n(\mu) = \int \chi^{-n} \, d\mu = e^{-inx_0}$$

donc $\forall n \quad |a_n(\mu)| = 1$ et ne tend pas vers 0.

Pour finir, nous donnons sans démonstration le théorème de représentation de F. Rietz.

Théorème :

Toute fonctionnelle f sur C s'exprime sous la forme :

$$f(\phi) = \int \phi \, d\mu \qquad \phi \in C$$

avec μ mesure complexe finie.

Remarque :

Ce théorème très important établit l'équivalence entre la théorie de la mesure où la mesure est considérée comme fonction d'ensemble complètement additive (σ-additive) et la théorie de la mesure faite en considérant la mesure comme fonctionnelle bornée sur l'espace vectoriel des fonctions continues.

On a défini les coefficients de Fourier-Stieltgés d'une mesure par :

$$a_n(\mu) = \int e^{-inx} \, d\mu(x)$$

Ces coefficients ne tendent pas vers 0 en général. Mais si la mesure est absolument continue i.e. :

$$d\mu = f \, d\sigma \, , \; f \in L^1$$

On a :

$$a_n(\mu) = a_n(f)$$

et le théorème suivant nous donne une réponse positive :

Théorème de Mercer :

Si f est dans L' , alors $a_n(f) \to 0$ pour $|n| \to +\infty$

Preuve :

Pour f dans L^1 et pour n fixé l'application :

$$F_n : f \longrightarrow a_n(f)$$

est une fonctionnelle sur L^1

Pour tout n fixé F_n a les propriétés suivantes :

1 - Elle est bornée en norme par 1 . ($|a_n(f)| \leq \|f\|$)

2 - Pour tout polynôme trigonométrique f , $a_n(f) \to 0$, $n \to \infty$ ($a_n(f) = 0$, $\forall\ n > d^\circ(f)$) .

Donc les restrictions des F_n à l'espace des polynômes trigonométriques tendent vers la fonctionnelle 0 .

Appliquant le principe général, on déduit que pour tout f dans L^1 :

$$F_n(f) \longrightarrow 0(f) = 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty$$

En d'autres termes

$$a_n(f) \longrightarrow 0 \quad \forall\ f \in L^1$$

C.Q.F.D.

Ce résultat est d'ailleurs une conséquence très simple du fait que L^2 (où on a : $a_n \to 0$ d'une manière évidente) est dense dans L^1 .

Théorème d'unicité pour les mesures :

Si $a_n(\mu) = 0$ pour tout n , alors μ est identiquement nulle.

Preuve :

Il revient au même de montrer que la fonctionnelle linéaire sur $C(T)$ associée à μ est identiquement nulle (Théorème de Riesz). On continuera à noter cette fonctionnelle par μ .

L'hypothèse $a_n(\mu) = 0$ pour tout n est équivalente à $\mu(\chi^n) = 0$ pour tout n . Par linéarité μ s'annule sur tout polynôme trigonométrique. Comme $\overline{P.T} = C(T)$, μ s'annule sur toute fonction continue. μ est donc identiquement nulle.

<u>Théorème de F. Riesz et de Fejér</u> :-

<u>Si</u> $P \in P.T$ <u>et si</u> $P(e^{ix}) \geqslant 0$ <u>sur le cercle</u>, <u>alors il existe</u> $Q \in P.T$ <u>tel que</u> :

$$P = |Q|^2$$

<u>La réciproque est vraie et immédiate</u> :

Si $Q \in P.T$; $|Q|^2 \in P.T$ et $|Q|^2 \geqslant 0$.

Le théorème sera corollaire de résultats plus généraux qu'on démontrera plus tard.

<u>Théorème de Herglotz</u> :

<u>Soit</u> (a_n) <u>une suite finie de nombres complexes telle que pour toute suite</u> (α_k) <u>finie</u> $(\alpha_k \in \mathbb{C}, \forall k)$ <u>on ait</u> :

$$\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha}_k a_{j-k} \geqslant 0 ,$$

<u>Il existe alors une mesure</u> $\mu \geqslant 0$ <u>telle que</u> :

$$a_n = \int e^{-inx} d\mu(x)$$

<u>Réciproque</u> :

Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$, la suite $a_n(\mu)$ vérifie la relation du théorème pour toute suite (α_k) finie.

<u>Démonstration de la réciproque</u> :

Posons
$$a_n = a_n(\mu) = \int e^{-inx} d\mu(x)$$

on a

$$\sum \alpha_j \overline{\alpha}_k a_{j-k} = \sum \alpha_j \overline{\alpha}_k \int e^{-i(j-k)x} d\mu(x)$$

$$= \sum_{j,k} \alpha_j \overline{\alpha}_k \int e^{-i(j-k)x} d\mu(x)$$

$$= \sum_{j,k} \int \alpha_j e^{-ijx} \overline{\alpha}_k \overline{e^{-ikx}} d\mu(x)$$

$$= \int \Big(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-ijx}\Big) \overline{\Big(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{-ikx}\Big)} d\mu(x)$$

$$= \int \Big|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-ijx}\Big|^2 d\mu(x) \geqslant 0$$

La dernière expression est bien positive puisque μ est positive.

Preuve du théorème direct :

Définissons une fonctionnelle linéaire sur les polynômes trigonométriques par :

$$F\left(\sum_{-N}^{+N} C_n e^{inx}\right) = \sum_{-N}^{+N} C_n a_{-n}$$

Cette expression a un sens puisque la somme est finie. Montrons que pour tout polynôme trigonométrique P, $F(|P|^2) \geqslant 0$.

Soit

$$P = \sum_{-N}^{+N} C_n e^{inx}$$

$$|P|^2 = \left(\sum_{-N}^{+N} C_n e^{inx}\right)\left(\sum_{-N}^{N} \overline{C}_m e^{-imx}\right) = \sum_{n,m} C_n \overline{C}_m e^{i(n-m)x}$$

ou en posant $n-m = r$

$$|P|^2 = \sum_r \sum_m C_{m+r} \overline{C}_m e^{irx}$$

d'où

$$F(|P|^2) = \sum_r \sum_m C_{m+r} \overline{C}_m a_{-r}$$

cela s'écrit encore :

$$F(|P|^2) = \sum_r \sum_m C_r \overline{C}_m a_{m-r}$$

qui est positive par hypothèse (en substituant $\overline{C}_j$ par C_j pour chaque j). Comme tout polynôme $Q \geqslant 0$ peut se mettre sous la forme $Q = |P|^2$, F est alors positive sur tout polynôme trigonométrique $\geqslant 0$.

On a plus généralement :

$$F(P) \leqslant F(Q) \quad \text{si} \quad P \leqslant Q$$

F est bornée

Il suffit de montrer que F est bornée pour tout P réel et $|P| \leqslant 1$, car tout polynôme Q à valeurs complexes s'écrit :

$$Q = Q_1 + i\, Q_2$$

Q_1 et Q_2 sont réels et $|Q_1| \leqslant 1$, $|Q_2| \leqslant 1$ si $|Q| \leqslant 1$.

Supposons $|P| \leqslant 1$;

$$F(P) \leqslant F(1) = a_o$$

$$F(-P) \leqslant F(1) = a_o \text{ , ou } F(P) \geqslant - a_o \text{ .}$$

Donc $F(P)$ est borné pour $|P| \leqslant 1$, et F est bornée comme fonctionnelle sur l'ensemble $P.T$. Comme $\overline{P.T} = C(T)$, F est prolongeable en une fonctionnelle sur tout $C(T)$. Il existe alors (théorème de Riesz) une mesure μ qui la représente et qui sera nécessairement positive.

Comme $F(\phi) = \int \phi \, d\mu$ pour toute ϕ continue sur T, on a en particulier pour $\phi = \chi^{-n}$:

$$a_n = F(\chi^{-n}) = \int \chi^{-n} \, d\mu = a_n(\mu) \text{ .}$$

C.Q.F.D.

On a vu qu'à toute fonction f dans L^1 on associait $F_r(e^{i\theta})$ définie par

$$F_r(e^{i\theta}) = P_r * f = \sum a_n \, r^{|n|} \, e^{in\theta}$$

avec $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{in\theta}$.

Inversement, on se propose de chercher une fonction définie sur la frontière à partir d'une fonction donnée définie dans le disque et telle que l'on ait la même relation que celle de ci-dessus.

<u>Nouvelle définition de</u> H^p :

Soit une fonction F définie dans le disque unité D par

(1) $$F(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, z^n \text{ , } \quad z \in D$$

Posons $z = r \, e^{ix}$; on a :

$$F(z) = F(r \, e^{ix}) = F_r(e^{ix}) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, r^n \, e^{ix} \text{ .}$$

H^p sera défini comme un ensemble de fonctions analytiques dans le disque unité et non plus comme un ensemble de fonctions définies sur la frontière. Ces fonctions analytiques doivent de plus satisfaire à la condition suivante :

$$\|F_r\|_p = \left(\int |F_r \, (e^{ix})|^p\right)^{1/p} \leqslant M \qquad (1)$$

pour tout $r<1$.

On va démontrer qu'à toute fonction de H^p ainsi définie, correspond d'une manière univoque une fonction de H^p (définie comme ensemble de fonctions frontières).

Mais le théorème qui donne cette correspondance établit le même fait dans un cas plus général, à savoir celui des fonctions harmoniques dont les normes sont bornées dans le même sens que (1) . On a le théorème suivant :

Théorème :

Soit p tel que $1<p\leqslant\infty$ et soit donnée une fonction F harmonique et définie dans le disque unité :

$$F(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$$

et telle que :

$$\|F_r\|_p \leqslant M \quad \text{pour} \quad 0<r<1 .$$

Alors, il existe f dans $L^p(T)$ telle que :

$$P_r * f = F_r \quad \text{pour} \quad 0<r<1 .$$

Preuve :

Soit $g = \sum_{-N}^{+N} b_n e^{inx}$. Définissons une fonctionnelle linéaire de la façon suivante :

$$(1) \quad g \longrightarrow (g,F_r) = \int \overline{F_r}\, g\, d\sigma = \sum \overline{a}_m b_n r^{|m|} \int e^{(n-m)ix} d\sigma(x)$$

$$= \sum_{n=-N}^{-N} \overline{a}_n b_n r^{|n|} \text{ avec } 0<r<1 .$$

Comme les F_r sont dans L^p, d'après un théorème énoncé précédemment, elles peuvent être identifiées à des fonctionnelles sur $L^q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, et leurs normes en tant que fonctionnelles sont bornées $(\|F_r\|_p = \|F_r\|_{(L^q)^*} \leqslant M ,\ 0<r<1)$.

Sur $P.T$ sous-espace de L^q elles s'expriment par (1). De plus pour tout polynôme trigonométrique g on a :

$$\lim_{r\to 1} (g,F_r) = \lim_{r\to 1} \sum_{-N}^{+N} \overline{a}_n b_n r^{|n|} = \sum_{-N}^{N} \overline{a}_n b_n .$$

Donc les F_r tendent vers une fonctionnelle bornée sur $P.T$ pour

$r \to 1$ (en croissant) qui est définie par :

$$f : g \longrightarrow \sum_{-N}^{+N} \overline{a_n}\, b_n \ .$$

Comme $\overline{P.T} = L^q$, la fonctionnelle f se prolonge à tout L^q en restant bornée et pour tout $g \in L^q$ on a :

$$\lim_{r \uparrow 1} \ (g, F_r) = f(g) \quad \text{(Principe général).}$$

Donc d'après le même théorème mentionné ci-dessus, f est un élément de L^p avec :

$$f(g) = \int \overline{f}\, g\, d\sigma \ .$$

Donc :

$$\overline{a}_n = f(\chi^n) = \int \overline{f}\, \chi^n\, d\sigma = \overline{a}_n(f) \ ,$$

d'où :

$$a_n(f) = a_n$$

ou encore :

$$F_r = P_r * f \ .$$

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> :

Pour le cas $p = 1$ la conclusion est inexacte. En effet il se peut que $\int |F_r|\, d\sigma$ soit bornée sans que F_r tende vers une fonction. On a toutefois le théorème suivant, avec les mêmes notations qu'au théorème précédent :

<u>Théorème</u> :

<u>Si</u> $\|F_r\|_1 \leqslant M$ <u>pour</u> $0<r<1$, <u>il existe alors une mesure complexe</u> μ <u>telle que</u>

$$a_n(\mu) = a_n \ ,$$

ou en d'autres termes :

$$P_r * d\mu = F_r$$

où $$P_r * d\mu(x) = \int P_r(x-y)\, d\mu(y) \ .$$

<u>Preuve</u> :

Les F_r peuvent être identifiés à des fonctionnelles sur $C(T)$ par la formule $\int F_r \, \phi \, d\sigma$ et elles sont bornées par M. (En effet L^1 est isométrique à un sous-espace de $[C(T)]^* = M(T)$ et $\|F_r\|_1 \leq M$).

D'après le même raisonnement que précédemment, il existe une fonctionnelle F sur $C(T)$ telle que :

$$F(\phi) = \lim_{r \uparrow 1} F_r(\phi) .$$

Il lui correspond donc une mesure complexe :

$$\mu(\phi) = \int \phi \, d\mu(x) = F(\phi)$$

pour $\phi \in C(T)$.

En prenant $\phi = \chi^{-n}$:

$$a_n = F(\chi^{-n}) = \int \chi^{-n} \, d\mu(x) = a_n(\mu) . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Du premier théorème on déduit pour $p>1$ la correspondance entre les espaces

$$H^p : \{ f \in L^p , f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} \} \text{ (1ère définition)}$$

$$H^p : \{ F : F = \sum_{0}^{\infty} a_n Z^n , \|F_r\|_p \leq M \text{ pour } r \uparrow 1 \} \text{ (2ème définition)}$$

En effet à chaque f on associe $F = P_r * f$.

La conclusion reste vraie dans le cas où $p=1$ d'après le théorème suivant :

<u>Théorème de F et M. Riesz</u> :

<u>Si</u> μ <u>est une mesure complexe telle que</u> :

$$a_n(\mu) = 0 , \quad \forall \; n<0$$

<u>alors</u> μ <u>est absolument continue</u> (i.e. $\mu = f \, d\sigma$, $f \in H^1$) .

<u>Remarque</u> :

A tout $F \in H^1$ (2ème définition) il correspond donc $f \in L^1$, $a_n(f) = a_n(\mu) = 0$ pour $n<0$, f étant la fonction poids de la mesure μ. La correspondance dans le cas $p=1$ est donc établie.

Nous allons faire une série de remarques d'où découlera une démonstration du théorème. Mais il y a des démonstrations plus directes.

Soit $F_r(e^{ix}) = \sum_0^\infty a_n r^n e^{inx} = P_r * \mu(e^{ix})$. Alors $F_r \in H^1$

1 - <u>Supposons que</u> $F(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z|<1$.

Définissons alors la fonction :

$$G(z) = \sqrt{F(z)}$$

(il y a deux manières de définir $G(z)$; mais après le choix de $G(0)$, il n'y a qu'une seule façon de la prolonger à tout le cercle).

On a :

$$\|G_r\|_2^2 = \int |G_r|^2 \, d\sigma = \int |F_r| \, d\sigma \leqslant M .$$

Donc $G \in H^2$. D'après ce qui précède $G_r \xrightarrow{H^2} g$ pour $r \uparrow 1$, et g est sa fonction frontière. Posons $f = g^2$, dire que :

$$F_r \xrightarrow{H^1} f \quad \text{pour} \quad r \uparrow 1$$

n'est qu'un changement de notation du fait que $G_r \xrightarrow{H^2} g$. Comme F_r converge faiblement vers $d\mu$, on a $d\mu = f \, d\sigma$ et μ est absolument continue.

2 - $F(z)$ <u>a des zéros dans le disque</u>.

Supposons que $F(z)$ est de la forme $F = B F_1$ avec $F_1 \in H^1$, $B \in H^\infty$ et $F_1(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D$.

F peut encore s'écrire :

$$F = B \sqrt{F_1} \quad \sqrt{F}$$

et la démonstration se fait comme auparavant. Il s'agit donc de trouver B et F_1 .

3 - <u>Pour</u> F <u>dans</u> H^2 , la décomposition s'obtient facilement. (Mais ceci ne démontre pas, bien entendu, le théorème de F et M. Riesz).

Soit f la fonction frontière de F et M_f le sous-espace simplement invariant engendré par f dans H^2 . D'après le théorème de Beurling M_f est de la forme :

$$M_f = B \, H^2$$

où B est une fonction sur le cercle dans H^∞ , telle que

$$|B(e^{ix})| = 1 \quad \text{p.p.}$$

(Il lui correspond une fonction $B(z)$ analytique dans le disque avec $|B(z)|\leq 1$ et $|B(e^{ix})| = 1$ p.p.).
Il existe donc g dans H^2 telle que :

$$f = B\,g\,,\ \text{et}\ g(z) \neq 0\ \text{partout (car } g \text{ est extérieure).}$$

- <u>Pour le cas où</u> F <u>est dans</u> H^1, la décomposition est encore possible et repose sur l'utilisation des produits de Blaschke ; mais la démonstration est plus difficile. Auparavant, on va faire quelques rappels de topologie.

<u>Topologie faible dans le dual d'un espace de Banach.</u>

Soit B un espace de Banach et B^* son dual (ensembles des formes linéaires continues sur B).

On définit la norme dans B^* par :

$$\|F\|_{B^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|}$$

Muni de cette norme B^* est un espace de Banach (même si B n'est pas complet).

On dira que $X_n \in B$ converge vers X pour la topologie induite par la norme si

$$\|X_n - X\|_{B^*} \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty$$

<u>Topologie faible</u> :

Il y a deux types de topologie faible

(1) <u>Topologie faible dans</u> B

$$X_\lambda \longrightarrow X \quad \text{faiblement dans } B \text{ si}$$

$$F(X_\lambda) \longrightarrow F(X) \qquad \forall\ F \in B^*$$

<u>Théorème de Banach</u> :

Si $X_n \to X$ faiblement dans B alors

$$\|X_n\| < M \qquad \forall\ n$$

Ce résultat n'est pas vrai pour les suites généralisées.

Comme espace de Banach B^* a sa topologie faible à savoir :

$$F_\lambda \longrightarrow F \quad \text{faiblement dans } B^* \text{ si}$$

$$\alpha(F_\lambda) \longrightarrow \alpha(F) \qquad \forall\ \alpha \in B^{**}$$

(2) Topologie * dans B^*

On dit que :

$$F_\lambda \longrightarrow F \text{ pour la topologie}^* \text{ si}$$

$$F_\lambda(x) \longrightarrow F(x) \quad \forall\ x \in B$$

Il est plus facile d'avoir la convergence pour la topologie * que la convergence faible dans B^*, parceque parmi les éléments de B^{**} se trouvent certains tels que :

$$\alpha_X(F) = F(x) \quad (x \text{ fixé dans } B) .$$

On a des résultats non triviaux sur B^*.

Théorème :

La boule unité de B^* est compacte pour la topologie *

On dit qu'un espace de Banach B est réflexif si

$$B = (B^*)^* = B^{**}.$$

Dans ce cas la topologie faible et la topologie faible * se confondent dans B et dans B^*.

Décomposition de $F : \sum_{0}^{+\infty} a_n Z^n$

Nous allons obtenir la décomposition de F sous la forme :

$$F = B.G$$

où B est une fonction analytique dans le disque dont la fonction frontière notée encore B est dans H^2 avec :

$$|B(e^{ix})| = 1 \text{ p.p. },$$

et où G est définie et analytique sur le disque telle que :

$$\int |G(re^{ix}) \, d\sigma(x) \leqslant M < +\infty$$

et

$$G(z) \neq 0 \text{ pour } |z|<1$$

Remarque :

Il y a une voie classique pour enlever les zéros d'une fonction analytique F en partant des expressions de la forme

$$\frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}$$

où z_o est un zéro de F.

Cette expression est analytique sauf pour $z = \frac{1}{z_o}$ et

$$\left|\frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}\right| = 1 \quad \text{pour} \quad |z| = 1 .$$

En effet :

$$\left|\frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}\right|^2 = \frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_o}{1 - z_o \bar{z}} = \frac{1 - z\,\bar{z}_o - z_o\bar{z} + |z_o|^2}{1 - z\,\bar{z}_o - z_o\bar{z} + |z_o|^2} = 1$$

Si z_1 est encore un zéro de F, on forme la même expression avec ce dernier.

Un produit de plusieurs facteurs de ce type est dit produit de Blaschke.

Quand F a une infinité de zéros, on aura alors un produit infini du même type dont les produits partiels convergent vers la fonction B telle que

$$|B(e^{ix})| = 1 \quad \text{p.p.}$$

Dans cet exposé on procédera autrement pour avoir la décomposition. Mais on utilisera toujours les produits partiels sans toutefois se servir de leur convergence.

Soient $z_1, z_2, \ldots$ les zéros de F ; on notera que

$$|z_n| \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

(Puisque dans tout compact contenu dans le disque il n'existe qu'un nombre fini de zéros de F).

Soit E_n le produit de Blaschke partiel formé avec les zéros de F

$$E_n = \prod_1^n \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}$$

Posons :

$$G_n = F/E_n$$

G_n est une fonction analytique dans le disque.

A partir d'un n_o dépendant z,

$$G_n(z) \neq 0$$

et cela pour tout z (i.e. : à tout z il existe n_o tel que $G_n(z) \neq 0$ pour $n \geqslant n_o$).
On notera que $|G_n(z)|$ s'accroît pour tout z fixé. Donc si G est limite des G_n il est certain que $G(z) \neq 0$ pour tout z dans le disque. On va trouver cette limite.

1) $|E_n(z)| \leqslant 1$ et $|E_n(z)|$ décroît pour z fixé donc $G_n = F/E_n$ a les propriétés suivantes :

- $|G_n(z)|$ est croissant pour z fixé
- $G_n(z) \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_o$ (n_o dépendant de z)

2) G_n appartient à H^1 pour tout n :

$$\int |G_n(re^{ix})| \, d\sigma(n) < M \text{ pour tout } n ,$$

en effet :

$$\int \left|\frac{F(re^{ix})}{E_n(re^{ix})}\right| d\sigma(n) \quad \text{pour} \quad r \geqslant |z_1| . |z_2| \dots |z_n|$$

est une expression croissante mais en même temps diffère très peu de

$$\int |F(re^{ix}) \quad d\sigma(n)$$

pour r près de 1 (par ce que les E_n^{-1} sont continus et convergent continûment)

3) Comme $r \to 1$ les $\{G_{n,r}\}$ tendent dans l'ensemble des mesures identifié au dual de $\mathbb{C}(T)$, vers une mesure limite unique ν_n et on note :

$$G_{n,r} = P_r * \nu_n$$

$\mathbb{C}(T)$ étant un espace séparable, il existe $\{n_j\} \subset N$ telle que

$$\nu_{n_j} \longrightarrow \nu \text{ faiblement}$$

et

$$G(re^{ix}) = P_r * \nu = \lim_{n_j} P_r * \nu_{n_j}$$

implique :

$$G(z) = \lim_{y\to\infty} G_{n_j}(z) \quad \text{pour chaque} \quad z, |r|<1 .$$

4) Donc

$$|G_n(z)| \geqslant |F(z)| , \quad G(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad G \in H^1$$

De plus $F = B\ G$ avec $|B| \leqslant 1$.
On peut prendre B telle que

$$|B(e^{ix})| = 1$$

En effet si $|B| \leqslant 1$, il existe B, bornée ayant les mêmes zéros que B telle que :

$$|B_1(e^{ix})| = 1 \quad \text{p.p.}$$

et telle que

$$B = B_1\ f$$

avec f analytique bornée sans zéro. On a alors

$$F = B_1\ G_1 \quad \text{avec} \quad G_1 = f\ G .$$

Pour achever la preuve du théorème des Riesz, on remarquera que F peut s'écrire :

$$F = (B\ \sqrt{G})\ (\sqrt{G})$$

$\sqrt{G}$ appartient à H^2, et à ce moment-là le reste de la démonstration est facile.

<u>Processus stochastique.</u>

Soit

$$\ldots X_{-1}, X_o, X_1 \ldots$$

une suite d'éléments dans un espace de Hilbert H. Elle est dite alors processus stochastique.

On dit qu'elle est stationnaire si le produit scalaire

$$(X_m, X_n) = \rho(m,n)$$

ne dépend que de $(m-n)$. On notera encore la valeur de ce produit scalaire $\rho(m-n)$.

En d'autres termes, (X_{m+p}, X_{n+p}) ne dépend pas de p.
Le fait essentiel est que ρ est une fonction définie positive.
En effet :

$$\sum c_j \overline{c_k}\, \rho(j-k) = \sum_{j,k} c_j \overline{c_k}\, (X_j, X_k) = \sum_{j,k} (c_j X_j, c_k X_k),$$

les sommes sur j et k étant indépendantes, on a finalement :

$$\sum c_j \overline{c_k}\, \rho(j-k) = \|\sum c_j X_j\|^2 \geqslant 0 .$$

D'après le théorème de Herglotz, il existe une mesure μ positive sur le cercle telle que

$$\rho(m) = \int e^{imx}\, d\mu(x) .$$

μ est dite mesure spectrale du processus. Si de plus μ est absolument continue, $\mu = f\, d\sigma$, f est dite alors la fonction spectrale du processus.

Soit $L^2(\mu)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré μ-intégrables, le produit scalaire étant défini par :

$$(f,g)_\mu = \int f \cdot \overline{g}\, d\mu$$

<u>Remarque</u> :

1) Il est préférable de définir $L^2(\mu)$ comme complété de l'ensemble des polynômes trigonométriques.

2) D'autre part les éléments de $L^2(\mu)$ sont des fonctions définies presque partout par rapport à la mesure μ.

$L^2(\mu)$ étant un espace de Hilbert, on va remplacer l'espace de Hilbert H ci-dessus par $L^2(\mu)$ et on va trouver dans $L^2(\mu)$ un processus stationnaire équivalent dans un certain sens du processus de H. Soit :

$$\widetilde{X}_j = \chi^j \qquad (\chi(e^{ix}) = e^{ix})$$

$(\widetilde{X}_j)$ féfini ainsi est un processus stochastique qui est stationnaire, en effet :

$$(\widetilde{X}_j, \widetilde{X}_k)_{L^2(\mu)} = \int \chi^{j-k}\, d\mu = \rho(j-k) .$$

De plus :

$$(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k) = (X_j, X_k) \ ; \quad X_j \ \text{ et } \ X_k \ \text{ dans } \ H .$$

Autrement dit les deux processus sont équivalents en tout ce qui concerne les produits scalaires de leurs éléments. Donc pour l'analyse du processus de H, il convient d'étudier le processus de $L^2(\mu)$.

Définitions :

La prévision (au sens de Kolmogoroff) est l'étude de l'approximation, par les polynômes trigonométriques dans $L^2(\mu)$ (approximation pondérée par μ).

Le passé du processus est le sous-espace de H engendré par les éléments $X_{-1}, X_{-2},\dots$

Le futur est le sous-espace engendré par $X_1, X_2,\dots$

Notions de Probabilité :

Soit X un nombre qui doit être déterminé par des expériences. Ce nombre ne peut pas être connu exactement. Puisqu'il n'existe pas de nombre exact définissant X, on remplace X par la famille de ses valeurs et on appelle alors X "variable aléatoire".

D'une manière plus abstraite on pose Ω comme étant l'ensemble de toutes les possibilités ou épreuves (ω dénotant une épreuve).

Cet ensemble Ω est muni d'une structure d'espace mesuré. La mesure μ sur Ω (liée à sa structure) donne la probabilité pour que X jouisse d'une certaine propriété, c'est-à-dire la mesure du sous-ensemble de Ω constitué par les épreuves ω telles que $X(\omega)$ (variable aléatoire) jouisse de la propriété donnée.

μ est une mesure positive et de masse 1 ($\int d\mu = 1$) une variable aléatoire devient alors une fonction mesurable sur Ω.

Exemples :

1) La probabilité de l'événement : "$|X|\leqslant 6$" est la mesure de

$$\{\omega \ ; \ \omega \in \Omega \ \text{ tel que : } |X(\omega)| \leqslant 6\}$$

2) Sur Ω on peut considérer plusieurs variables aléatoires $X_1, X_2,\dots$; et on pourra parler de :

$$P_\nu \ \{|X_1| \leqslant |X_2 + 2X_3|\} = \frac{1}{8}$$

et ceci voudra dire :

$$\text{mes } \{\omega \ ; \ \omega \in \Omega \ \text{ tel que } \ |X_1(\omega)| \leqslant |X_2(\omega) + 2X_3(\omega)|\} = \frac{1}{8}$$

<u>Définition</u> :

On dit que deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace Ω sont indépendantes si :

ε et ε' étant deux ensembles mesurables de nombres complexes, les deux ensembles :

$$\varepsilon_X = \{\omega \ ; \ X(\omega) \in \varepsilon \}$$

$$\varepsilon_Y = \{\omega \ ; \ Y(\omega) \in \varepsilon' \}$$

jouissent de la propriété

$$\mu(\varepsilon_X \cap \varepsilon_Y) = \mu(\varepsilon_X) \ \mu(\varepsilon_Y)$$

Définissons $L^2(\mu)$ comme l'ensemble des fonctions μ-mesurables définies sur Ω de carré intégrable. Il est donc licite de dire qu'une variable aléatoire appartient à $L^2(\mu)$.

Soit

$$a = \int X \, d\mu \ ,$$

dite espérance de X. $X - a$ est dite variable centrée et $\|X - a\|_2^2$ est la variance de X.

On appelle corrélation de X et Y l'expression :

$$\frac{1}{\|X\|_2 \|Y\|_2} \int X \, \overline{Y} \, d\mu$$

La corrélation est 1 si $X = Y$ p.p. , et de module inférieur à 1 si $X \neq Y$. Si X et Y sont indépendantes, leur corrélation est 0. La réciproque n'est pas vraie.

La corrélation nulle est différente de l'indépendance car l'indépendance dépend des valeurs de X et Y en chaque point, alors que la corrélation ne s'exprime que par le produit scalaire, donc c'est une propriété liée à la structure d'espace de Hilbert. Les corrélations sont donc conservées par l'isomorphisme entre $H = L^2(\Omega)$ et $L^2(\mu)$ défini précédemment, ce qui n'est pas le cas pour les relations d'indépendances.

Introduction

Soient $X_{-1}, X_{-2}, \ldots, X_{-n}$ les résultats des diverses épreuves réalisées. Le problème statistique consiste à donner la meilleure valeur possible à X_o connaissant ces résultats. En termes mathématiques, ceci s'exprime par le choix d'une variable aléatoire $X_o(\omega)$, étant données les variables $X_{-1}(\omega)$, $X_{-2}(\omega)$ ...

Définition :

La fonction de répartition d'une variable réelle $X = X(\omega)$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$,

$$\lambda \longrightarrow F(\lambda) : \mu\{\omega ; X(\omega) \leq \lambda\}$$

ayant les propriétés suivantes :

1) F est une fonction croissante de λ

2) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$

Si ϕ est une "bonne fonction" (continue sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en dehors d'un compact) alors :

$$\int_\Omega \phi(X(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dF(\lambda)$$

La première intégrale est prise au sens de Lebesgue, tandis que la seconde est prise au sens de Riemann-Stielgès.

Certaines propriétés importantes s'expriment par des conditions sur la fonction de répartition, par exemple le fait qu'une variable est gaussienne. Mais de telles propriétés ne peuvent être exprimées en général dans la structure de L^2_μ qui est un espace de Hilbert, c'est-à-dire par le produit scalaire.

On va aborder une théorie qui utilise seulement les produits scalaires. On n'aura donc pas besoin des propriétés plus fines qui sont liées à la nature de la fonction de répartition (ou d'autres propriétés) et qui ne sont pas induites par la structure d'espace de Hilbert.

Prévision d'un processus (X_n)

On suppose le processus stationnaire dans ce sens :

$$\int_\Omega X_j\, \overline{X}_k\, d\mu = \rho(j-k)$$

Premier problème :

Ce problème consiste à définir une variable aléatoire Y

$$Y = \sum_{j<0} a_j X_j \quad \text{(somme finie)}$$

telle que $X_0 - Y$ soit petit dans un certain sens (dans le sens de $\| \|_\infty$ ou $\| \|_1$ ou $\| \|_2$ etc...). Mais en général on considère le sens qui correspond à $\| \|_2$, ce qu'on fera ici, c'est-à-dire qu'on cherchera dans quelle condition l'expression :

$$\|X_0 - \sum_{j<0} a_j X_j\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (1)$$

est petite.
La borne inférieure de (1) donne la variance de la meilleure approximation de X_0 par les éléments du passé. On obtient alors l'erreur sur la prévision de X_0.

Le cas dégénéré est quand la prévision est parfaite, car alors on peut approcher X_0 d'aussi près que l'on veut. Nous laisserons de côté ce cas.

D'après l'équivalence établie entre les processus stationnaires d'un espace de Hilbert (ici L^2_μ) et L^2_ν (ν étant la mesure associée à la fonction définie positive $\rho(j-k)$, on a :

$$\|X_0 - \sum_{j<0} a_j X_j\|^2_{L^2_\Omega} = \|1 - \sum_{j<0} a_j X^j\|^2_{L^2_\nu}$$

donc :

$$\inf\|X_0 - \sum_{j<0} a_j X_j\|^2_{L^2_\Omega} = \inf_{a_{-1}, a_{-2}, \dots a_{-n}} \int |1 - a_{-1}X^{-1} - a_{-2}X^{-2} \dots - a_{-n} X^{-n}|^2 \, d\nu(X)$$

où n est variable.

En passant au complexe conjugué (ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale) on a à évaluer :

$$\tau(\nu) = \inf_{a_1, a_2, \dots a_n} \int |1 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots a_n X^n|^2 \, d\nu(X) .$$

Cette quantité dépend uniquement de ν.

Remarques :

1) si $d\nu = d\sigma$ ($d\sigma$: mesure de Haar) alors

$$\tau(\nu) = 1$$

En effet d'après l'inégalité de Bessel on a :

$$\int |1 + a_1 X + \dots a_n X^n|^2 \, d\nu(X) \geqslant 1 + |a_1|^2 + \dots |a_n|^2 \qquad (1)$$

et pour $a_1 = a_2 = \dots a_n = 0$ l'inf. est atteint et vaut 1 .
Il n'est pas vrai en général que la borne inf. soit atteinte même pour une infinité des a_n .

2) $\tau(\nu)$ est évidemment une fonction monotone de ν .
Donc si $d\nu \geqslant \varepsilon \, d\sigma$ avec $\varepsilon > 0$ (où $\omega \geqslant \varepsilon$, ω partie absolument continue de ν) on a :

$$\int |1 + a_1 X + \dots + a_n X^n|^2 \, d\nu \geqslant \varepsilon(1 + |a_1|^2 + \dots |a_n|^2) \geqslant \varepsilon .$$

Il n'est pas vrai que l'inf. est atteint pour les a_i tous nuls mais il est certainement positif.

3) Supposons $d\nu$ absolument continue, c'est-à-dire

$$d\nu = \omega \, d\sigma$$

avec $\omega \in L^1$, $\omega \geqslant 0$ p.p. et supposons de plus $\omega = |f|^2$, $f \in H^2$.
On va alors trouver une évaluation de $\tau(\nu)$. Comme $f \in H^2$, f engendre un sous-espace simplement invariant $\mathfrak{M}_f$.
D'après le théorème de Beurling :

$$\mathfrak{M}_f = E . H^2$$

avec E analytique et $|E| = 1$ p.p.

Définition :

$g \in H^2$ est dite extérieure si $\mathfrak{M}_g = H^2$,
E est dite intérieure si $E \in H^\infty$ et $|E| = 1$ p.p.
Puisque $\mathfrak{M}_f = E \, H^2$, il existe $g \in H^2$ tel que :

$$f = E . g$$

On a vu dans ce cas que $\mathfrak{M}_g = H^2$ donc g est extérieure. Puisque $|E| = 1$ p.p. , on a :

$$|g| = |f| \quad \text{p.p.}$$

ou

$$\omega = |f|^2 = |g|^2$$

donc

$$\tau(\nu) = \tau(\omega) = \tau(|g|^2) = \inf \int |1 + a_1 X + \ldots + a_n X^n|^2 \, |g|^2 \, d\sigma$$

$$= \inf \int |(1+P)g|^2 \, d\sigma$$

$$= \inf \|(1+P)g\|^2_{L^2} \, .$$

Puisque $g \in H^2$ on a :

$$g = b + \sum_{1}^{+\infty} b_n \chi^n \; ; \text{ et } \int g \, d\sigma = b \neq 0 \, ,$$

puisque g est extérieure.

$$(1+P)g = g + a_1 \chi g + \ldots + a_n \chi^n g$$

$$= b + a_1 b \chi + \ldots$$

$$b - g = -b_1 \chi - b_2 \chi^2 \ldots \quad \in H^2$$

On peut choisir le polynôme P analytique et de valeur moyenne $= 0$ tel que Pg soit très proche de $b - g$:

$$\|(1+P)g\|^2_{L^2} = \|g + Pg\|^2_{L^2} \leqslant \|b - g + g\|^2 + \varepsilon = |b|^2 + \varepsilon$$

d'où

$$\inf \|(1+P)g\|^2_{L^2} \leqslant |b|^2 \, .$$

Mais d'après l'inégalité de Bessel :

$$\|(1+P)g\|^2_{L^2} \geqslant |b|^2 + |a_1 b|^2 + \ldots$$

donc

$$\inf \|(1+P)\|^2_{L^2} \geqslant |b|^2$$

d'où

$$\tau(\nu) = \inf \|(1+P)g\|^2_{L^2} = |b|^2 \, .$$

Finalement le problème consiste à chercher les fonctions ω qui s'écrivent

$$\omega = |f|^2 \quad \text{avec} \quad f \in H^2$$

dont on déterminera la fonction extérieure correspondante.

Théorème de Szegö :

Soit $\omega \in L^1$; $\omega \geq 0$; et soit

$$\tau_n = \inf \int |1 + a_1 X + \ldots + a_n X^n|^2 \, \omega \, d\sigma \quad (n \text{ fixé})$$

alors

$$\tau(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \tau_n = e^{\int \operatorname{Log} \omega \, d\sigma} \quad \text{si} \quad \int \operatorname{Log} \omega > -\infty$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \int \operatorname{Log} \omega = -\infty .$$

Remarque :

1) Si $\omega = 0$ sur un ensemble de mesure positive alors $\int \operatorname{Log} \omega$ est divergente et $\tau(\omega) = 0$

2) Même si $\omega > 0$ $\operatorname{Log} \omega$ peut être assez petit pour que l'intégrale diverge.

Avant de démontrer le théorème de Szegö, on démontre le théorème suivant :

Théorème de Kolmogoroff :

Soit μ une mesure non absolument continue

$$d\mu = \omega \, d\sigma + d\mu_s$$

alors

$$\tau(\mu) = \tau(\omega)$$

Ce théorème montre donc que la prévision d'un processus dans un espace de Hilbert L^2_μ (ou μ est arbitraire) est la même que dans un espace L^2_ω (ou ω est la partie absolument continue de μ). Or dans de tels espaces le théorème de Szegö va nous donner directement le résultat.

Preuve :

Supposons $\tau(\mu) > 0$

Soit S_μ la fermeture dans L^2_μ de l'ensemble des polynômes du type

$1+P$ où $P = \sum_1^N a_n \chi^n$, N variable.

(P désignera désormais un polynôme trigonométrique de ce type).

L'ensemble $\{1+P\}$ est convexe, donc sa fermeture S_μ l'est aussi. D'après les propriétés des espaces de Hilbert, il existe un élément dans S_μ dont la norme est minimale. Soit $1+H$ cet élément (H est défini comme la différence de l'élément minimal et de 1).

On a :

$1+H - P \in S_\mu$, pour chaque P et par conséquent :

$$\inf \|1+H - \lambda P\| = \|1+H\| \quad (\lambda \text{ complexe arbitraire})$$

donc

$$1+H \text{ est orthogonale à chaque } P .$$

En particulier $1+H$ est orthogonal à $\chi^n(1+H)$, qui est un élément de S_μ, pour $n=1,2,\ldots$

On en déduit :

$$(1) \quad \int |1+H|^2 \chi^{-n} \, d\mu = 0 \quad n=1,2,\ldots$$

et en passant au complexe conjugué :

$$(2) \quad \int |1+H|^2 \chi^{-n} \, d\mu = 0 \quad n=-1,-2,-3,\ldots$$

De même $1+H$ étant orthogonal à χ^n pour $n=1,2,\ldots$, on a :

$$(3) \quad \int (1+H) \chi^{-n} \, d\mu = 0 \quad n=1,2,\ldots$$

On remarquera qu'en général $1+H$ n'est pas une série de Fourier.

D'après l'unicité des transformées de Fourier-Stielgés on déduit de 1) et 2) que :

$$|1+H|^2 \, d\mu = K \, d\sigma$$

K est constante et telle que $K = \tau(\mu)$, donc positive par hypothèse.

On a de plus :

$$|1+H|^2 \, d\mu = |1+H|^2 \omega \, d\sigma + |1+H|^2 \, d\mu_s = K \, d\sigma$$

Ce qui implique que $|1+H|^2 \, d\mu_s$ est absolument continue. Comme $d\mu_s$ est une mesure singulière cela n'est possible que si

$$|1+H|^2 = 0 \quad \text{p.p. par rapport à } d\mu_s .$$

On désigne par $1+\tilde{H}$ la fonction dans L^2_ω qui est égale p.p. (par rapport $d\sigma$) à $1+H$.

On a :

$$|1+\tilde{H}|^2 \omega = K \quad \text{p.p.}$$

De 3) :

$$\int (1+\tilde{H}) \chi^{-n} \omega \, d\sigma = 0 \quad n=1,2,\ldots$$

En passant au complexe conjugué on déduit que $(1+\tilde{\tilde{H}})\omega$ est analytique. On notera que $(1+\tilde{\tilde{H}})\omega \in L^1_\omega$ puisque $|(1+\tilde{\tilde{H}})|^2 \in L^2_\omega$ (en effet $(1+\tilde{\tilde{H}})\omega \in L^1_\omega$ et on applique l'inégalité de Schwartz). Donc $(1+\tilde{\tilde{H}})\omega \in H^1$.

D'autre part, comme $K \neq 0$, $\omega = \dfrac{K}{(1+H)^2} \in L^1$ et $\dfrac{K}{1+\tilde{\tilde{H}}} \in L^2$, mais $\dfrac{K}{1+\tilde{\tilde{H}}} = (1+\tilde{\tilde{H}})\omega \in H^1$, donc

$$\frac{K}{1+\tilde{\tilde{H}}} \in H^2 .$$

Considérons maintenant, dans L^2_ω, le sous-ensemble S_ω obtenu par fermeture de l'ensemble des polynômes du type $1+P$ (la fermeture est prise dans la topologie de L^2_ω). Comme précédemment, S_ω est un convexe fermé. Il existe donc un élément $1+H'$ minimal pour la norme de L^2_ω satisfaisant aux mêmes relations d'orthogonalité que $1+H$ dans L^2_μ.

<u>Proposition</u>

$$H' = \tilde{H} \quad \text{dans} \quad L^2_\omega .$$

<u>Preuve</u> :

$$\|1+\tilde{H}+\lambda(H'-\tilde{H})\|^2_{L^2_\omega} = \|1+\tilde{H}\|^2_{L^2_\omega} + |\lambda|^2 \|H'-\tilde{H}\|^2_{L^2_\omega}$$

car :

$$2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} \int (1+\tilde{H})\overline{(H'-\tilde{H})}\omega \, d\sigma = 0 ,$$

puisque $H' = \lim P_n$; $\tilde{H} = \lim P'_n$, $(1+\tilde{H}) \perp \chi^n \ \forall n$ dans L^2_μ, et en remarquant que l'intégrale est la même par rapport à $d\mu$. $1+H'$ est l'élément minimal de L^2_μ. Le minimum de l'expression ci-dessus est atteint pour $\lambda=1$ par définition de H', mais également pour $\lambda=0$. D'où, d'une manière évidente

$$\|H-\tilde{H}\|^2_{L^2_\omega} = 0$$

donc $H' = \tilde{H}$ dans L^2_ω. En d'autres termes $H' = \tilde{H}$ sauf sur des ensembles sur lesquels $\omega=0$ et les ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

Donc $\tau(\omega) = \displaystyle\int |1+H'|^2 \omega \, d\sigma = \int |1+\tilde{H}|^2 \omega \, d\sigma = \tau(\mu)$.

Ce qui démontre le théorème de Kolmogoroff.

La même suite $(1+P_n)$ donne à la limite $1+H'$ ou $1+H$ suivant que l'on se place dans L^2_ω ou dans L^2_μ.

Lemme 1.

<u>Si</u> $f \in H^2$ <u>est telle que</u> $f^{-1} \in H^2$ <u>alors</u> f <u>est extérieure</u>

<u>Preuve</u> :

On a :
$$\mathfrak{M}_f = E.H^2$$

avec $|E| = 1$ p.p.

Il suffit de montrer que $E = c^{te}$. Il existe un élément $g \in H^2$ tel que :
$$f = E\, g$$

on a :
$$f^{-1} = \overline{E}\, g^{-1} \quad \text{p.p.}$$

donc
$$g\, f^{-1} = \overline{E} \quad \text{p.p.}$$

Comme $g \in H^2$, $f^{-1} \in H^2 \Longrightarrow \overline{E} \in H^1$.

Comme aussi $E \in H^\infty$ on a $E = c^{te}$.

Lemme 2.

<u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont extérieurs et</u> $|f| = |g|$ p.p. <u>alors</u> $f = \alpha g$; $\alpha = c^{te}$.

<u>Preuve</u> :

Puisque $|f| = |g|$ p.p. $\Longrightarrow$
$f = \alpha g$. avec $|\alpha| = 1$ p.p.

g extérieure $\Longrightarrow P_n g \longrightarrow 1 \quad (n \to +\infty)$.

Donc
$$\alpha P_n g = P_n f \longrightarrow \alpha \quad (n \to +\infty).$$

Comme $f \in H^2$, $P_n f \in H^2$ et $\lim P_n f = \alpha \in H^2$. D'autre part en utilisant le fait que f est extérieure et
$$g = \overline{\alpha}\, f$$

le même argument montre que $\overline{\alpha} \in H^2$. Donc
$$\alpha = c^{te}.$$

3ème Problème de la prévision

Faisons tout d'abord quelques rappels sur les fonctions conjuguées. Soit :

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \quad \text{(série quelconque)}$$

On lui associe la série conjuguée définie par :

$$\tilde{S} \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sign}(n)\, a_n e^{inx} .$$

où

$$\operatorname{sign}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n>0 \\ 0 & \text{si } n=0 \\ -1 & \text{si } n<0 \end{cases}$$

$S + i\tilde{S}$ est de type analytique.

Si S et $\tilde{S}$ sont des séries de Fourier, $S + i\tilde{S}$ est une série de Fourier d'une fonction de H^1.

Si S est de classe L^p, $\tilde{S}$ est aussi de classe L^p pour $1<p<\infty$ (Théorème de M. Riesz).
Pour le cas $p=2$ le résultat est immédiat.

Si S est de classe L^1, $\tilde{S}$ peut être définie et sera de classe L^p pour chaque $p<1$. (En général une fonction de L^p pour $p<1$ n'a pas de série de Fourier).

En fait pour des polynômes trigonométriques réels, on a

$$\int |\tilde{S}|^p \, d\sigma \leqslant K_p \int |S| \, d\sigma \qquad (p<1) .$$

De cette inégalité on déduit que si S_n est une suite de polynômes trigonométriques réels et si

$$S_n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^1 ,$$

alors

$$\tilde{S}_n \text{ converge dans } L^p \quad (p<1) \text{, et}$$

$\lim \tilde{S}_n$ sert à définir $\tilde{f}$.

Lemme :

Soit :

$$\tau(\mu) = K = \inf_{\rho} \int |1+p|^2 \, d\mu \ ; \quad P = \sum_{1}^{N} a_n \chi^n .$$

Si $K>0$ alors $f = \dfrac{K}{1+H}$ est extérieure.

Preuve :

Etant donné $w>0$, on a vu que :

$$w = \frac{K}{|1+H|^2} \quad (d\mu = w\,d\sigma + d\mu_s) .$$

Comme $w \in L^1$, $\frac{K}{1+H} \in L^2$.

(si $K=0$, $K = \int |1+H|^2\,d\mu = 0 \iff |1+H|^2 = 0$ p.p./$d\mu$)

D'autre part on a établi que :

$$(1+\bar{H})w \in H^2$$

donc :

$$\frac{K}{1+H} = (1+\bar{H})w \in H^2$$

Il suffit de montrer dans le cas où $w^{-1} \in L^1$ que l'inverse $(1+H)K^{-1} \in H^2$. Si par exemple nous supposons $w \geq \varepsilon > 0$, alors

$$(1+P_n) \longrightarrow (1+H) \quad \text{dans} \quad L^2\mu$$

implique :

$$(1+P_n) \longrightarrow (1+H) \quad \text{dans} \quad L^2$$

comme $(1+P_n) \in H^2$, $(1+H) \in H^2$,

C.Q.F.D.

Mais en général la convergence dans $L^2\mu$ n'entraîne pas la convergence dans L^2. On procède alors autrement pour démontrer que $\frac{K}{1+H}$ est extérieure.

Considérons l'égalité :

$$(1+P_n)f = (1+P_n)(1+\bar{H})w .$$

On sait que $(1+P_n)\sqrt{w} \longrightarrow (1+H)\sqrt{w}$ dans L^2.

La convergence n'est pas changée dans L^2 quand on remplace w par une fonction de même module. Or :

$$\frac{|f|}{\sqrt{K}} = \sqrt{w}$$

donc :

$$\left.\begin{array}{l} (1+P_n)\frac{f}{\sqrt{K}} \longrightarrow (1+H)\frac{f}{\sqrt{K}} \\ \text{ou} \\ (1+P_n)f \longrightarrow (1+H)f \end{array}\right\} \quad \text{dans } L^2$$

comme

$$(1+H)f = K ,$$

il existe une constante $\neq 0$ dans la fermeture des $\{(1+P_n)f\}$.
En d'autres termes, $\mathcal{M}_f = H^2$ et f est extérieure ; donc sa valeur moyenne α_o est nécessairement $\neq 0$.
De plus, comme on a : $w = |f|^2$,

$$\inf \int |1+P|^2 \; |f|^2 \; d\sigma = |\alpha_o|^2 > 0 .$$

(calcul déjà fait)

On a donc établi le résultat suivant :

$$\tau(w) > 0 \iff w = |f|^2$$

où $f \in H^2$ et pouvant être prise extérieure.
Si f est extérieure de valeur moyenne α_o , alors

$$\tau(w) = |\alpha_o|^2 .$$

Démonstration du théorème de Szegö

Soit w donné. On suppose que Log $w \in L^1$. Soit :

$$\text{Log } w \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \chi^n .$$

On définit

$$g = \frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \chi^n$$

quand cette expression a un sens (par exemple si Log w appartient à L^2)
On aura ainsi :

$$g + \bar{g} = 2 \operatorname{Re} g = \text{Log}\, w$$

(Log w étant réel, on a $a_n = \overline{a_{-n}}$).

Comme Log $w \in L^1$, $\widetilde{\text{Log}}\, w \in L^p$, pour tout $p<1$ et on a :

$$g = \frac{1}{2}\,(\operatorname{Log} w + i\,\widetilde{\operatorname{Log}}\, w)\ .$$

Donc g est dans H^p $(p<1)$; de plus $|e^g|^2 = w$, donc e^g est dans L^2 .

Le point essentiel du théorème de Szegö est de montrer que e^g est analytique extérieure, et que

$$\left|\int e^g\, d\sigma\right|^2 = e^{a_o}\ .$$

En effet, dans ce cas on aura

$$\tau(w) = \tau(|e^g|^2) = \left|\int e^g\, d\sigma\right|^2 = e^{a_o} = e^{\int \log w\, d\sigma}\ .$$

Cela achèvera la démonstration, sauf pour le cas facile où $\log w$ n'est pas sommable.

La démonstration se fait en plusieurs étapes suivant la nature de g .

1°) <u>On suppose</u> $g = (u + iv)$ <u>bornée</u> (par exemple si $u = \frac{1}{2}\operatorname{Log} w$ est un polynôme trigonométrique).

On a

$$e^g = 1 + \frac{g}{1!} + \frac{g^2}{2!} + \dots + \frac{g^n}{n!} + \dots$$

où $g^n \in H^\infty$ pour tout n .

La série est uniformément convergente, car l'ensemble des valeurs g est une partie compacte du plan. Comme H^∞ est fermé e^g est analytique.

Le même argument s'applique à e^{-g} , on a donc $e^{\pm g} \in H^\infty$, e^g est donc extérieure.

On a de plus :

$$\int e^g\, d\sigma = e^{\int g\, d\sigma}$$

qui s'obtient facilement du développement de l'exponentielle.

2°) <u>On suppose</u> $\|u\|_\infty < \infty$ $(v = \tilde{u}$ n'est pas nécessairement borné).

Soit une suite (u_n) définie par

$$u_n = K_n * u$$

où K_n est le noyau de Féjer d'ordre n .

Les u_n sont des polynômes trigonométriques qui approchent u dans L^2 et vérifient :

$$-\|u\|_\infty \leq u_n(e^{ix}) \leq \|u\|_\infty\ .$$

Il existe donc une sous-suite u_{n_i} tendant vers u presque partout en restant uniformément bornée . (Il est connu que $u_n \to u$ p.p. , mais nous arrivons sans ce résultat raffiné.)
Remarquons que $\|u_n\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty$ pour tout n .
Comme

$$v_n = K_n * v = (K_n * v)^{\sim} \xrightarrow{L^2} \tilde{u} = v$$

il existe également une sous-suite de la sous-suite sur laquelle v_n tend vers v p.p. Donc pour une certaine sous-suite d'entiers on a :

$$e^{u_{n_j} + iv_{n_j}} \longrightarrow e^{u+iv} \quad \text{p.p.}$$

Comme

$$0 \leqslant |e^{u_n + iv_n}| = e^{u_n} \leqslant e^u$$

le théorème de la convergence dominée donne :

1) $$e^{u_{n_j} + iv_{n_j}} \longrightarrow e^{u+iv} \quad \text{dans } L^1$$

et

2) $$\int e^{u_{n_j} + iv_{n_j}} d\sigma \longrightarrow \int e^{u+iv} d\sigma .$$

Mais $e^{u_n+iv_n} \in H^\infty$ (d'après 1°), donc $e^g \in H^1$, et enfin $e^g \in H^\infty$. De plus, la propriété de la moyenne est encore vérifiée. En effet d'après le 1°) et la 2ème assertion du théorème de la convergence dominée on a :

$$\int e^{u+iv} d\sigma = \lim_{u_j \to\infty} \int e^{u_{n_i}+v_{n_i}} d\sigma = \lim e^{\int (u_{n_j}+v_{n_j})\, d\sigma}$$

$$= e^{\int (u+iv)\, d\sigma}$$

Les mêmes arguments, appliqués à $-g$, montrent que $e^{-g} \in H^\infty$ d'où e^g est extérieure.

3°) <u>Cas où</u> u <u>est non bornée</u>.

On définit une suite u'_n de la manière suivante

$$u'_n = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leqslant n \\ n & \text{si } u > n \\ -n & \text{si } u < -n \end{cases}$$

Soit $\alpha_n = -\int u'_n \, d\sigma$.

On pose

$$u_n = u'_n + \alpha_n .$$

$u = \frac{1}{2}$ Log w est sommable et $u'_n \to u$ dans L^1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer :

$$\int u = \frac{1}{2} \text{Log } w = 0 ;$$

ceci implique que $\alpha_n \to 0$ et $u_n \to u$ dans L^1.

On peut extraire une sous-suite d'entiers n_j telle que

$$e^{u_{n_j} + iv_{n_j}} \to e^g \quad \text{p.p.}$$

Comme

$$e^{u_n} \leqslant e^{u+\alpha_n} \leqslant e^{u+1} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_o$$

on a

$$|e^g - e^{u_{n_j} + iv_{n_j}}|^2 \leqslant 4 \, e^{2(u+1)} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_o$$

Appliquant le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\int |e^g - e^{u_{n_j}+iv_{n_j}}|^2 \, d\sigma \to 0 \quad \text{pour} \quad n_j \to \infty .$$

Comme u_{n_j} est borné pour tout n_j, d'après 2°, on a :

$$e^{u_{n_j}+iv_{n_j}} \in H^2$$

Ce qui implique que $e^g \in H^2$.

La formule de la moyenne $\int e^g \, d\sigma = e^{\int g \, d\sigma}$ est encore vérifiée, car

$$e^g = \lim e^{u_{n_j}+iv_{n_j}} \quad \text{dans} \quad L^2 .$$

Reste à montrer que e^g est extérieur, où encore que la fonction constante 1 peut être approchée dans H^2 par des fonctions $e^g(b_o + b_1\chi + \ldots + b_n\chi^n)$. Par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait, on trouve que

$$e^{(u+iv)-i(u_n+iv_n)} \to 1 \quad \text{dans} \quad L^2$$

quand $n \to \infty$, au moins sur la sous-suite n_j. Or $e^{-i(u_n+iv_n)}$ appartient à H^∞, et sera la limite (pour n fixé) d'une suite de P.T. analytique Q_k, la convergence ayant lieu presque partout tandis que les Q_i restent uniformément bornés. Donc

$$e^{(u+iv)-i(u_n+iv_n)} = \lim_k e^{(u+iv)} Q_k \quad \text{dans} \quad L^2 ,$$

et par conséquent la fermeture des fonctions $e^g(b_o+\dots)$ comprend $e^{(u+iv)-i(u_n+iv_n)}$ pour chaque n, donc aussi la fonction 1.

La démonstration du théorème de Szegő est complète, en ce qui concerne les w telles que $\mathrm{Log}\, w \in L^1$.

<u>Si</u> $\int \mathrm{Log}\, w \, d\sigma = -\infty$, pour $\varepsilon>0$ on a d'après ce qui précède :

$$e^{\int \mathrm{Log}(w+\varepsilon)\, d\sigma} = \inf_P \int |1+P|^2 \, (w+\varepsilon)\, d\sigma$$

(car $\int \mathrm{Log}(w+\varepsilon)\, d\sigma > -\infty$).

Comme $\mathrm{Log}(w+\varepsilon) \to \mathrm{Log}\, w$ en décroissant, pour $\varepsilon \to 0$ le théorème de la convergence monotone donne :

$$e^{\int \mathrm{Log}(w+\varepsilon)\, d\sigma} \longrightarrow e^{\int \mathrm{Log}\, w\, d\sigma} = 0 .$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\inf_P \int |1+P|^2 \, (w+\varepsilon)\, d\sigma\right] = 0 .$$

Or

$$\inf \int |1+P|^2 \, w\, d\sigma \leqslant \inf \int |1+P|^2 \, (w+\varepsilon)\, d\sigma \quad \forall\, \varepsilon>0 .$$

On en déduit

$$\tau(w) \leqslant 0 .$$

Mais comme $\tau(w) \geqslant 0$, on a finalement

$$\tau(w) = 0 ,$$

le résultat qu'on cherchait.

- Voici des corollaires du théorème de Szegö.

Théorème :

Si $f \in H^1$ et $f \not\equiv 0$ alors $\int \mathrm{Log}\,|f|\,d\sigma > -\infty$.

Remarque :

Il contient comme cas particulier le théorème démontré au début :

" $f \in H^2$ et $f \not\equiv 0 \Longrightarrow f \neq 0$ p.p."

En effet : si $f \in H^2$ et si $f=0$ sur E de mesure de Lebesgue positive, alors : $\int \mathrm{Log}\,|f|\, d\sigma = -\infty$.

Preuve du théorème :

On peut toujours supposer $\int f\, d\sigma = a_o \neq 0$ quitte à diviser f par une puissance convenable de χ .

$$\int |1+P|^2 |f|\, d\sigma = \int |(1+2P+P^2)f|\, d\sigma \quad \text{avec}$$

$(1+2P+P^2)f \in H^1$. Donc

$$\int |1+P|^2 |f|\, d\sigma \geq \left|\int (1+P)^2 f\, d\sigma\right| = |a_o| > 0 \text{ .}$$

Le théorème de Szegö donne :

$$e^{\int \mathrm{Log}|f|\, d\sigma} \geq |a_o| > 0$$

qui implique

$$\int \mathrm{Log}\,|f|\, d\sigma > -\infty$$

C.Q.F.D.

Théorème :

Tout $f \in H^1$ peut s'écrire sous la forme $f = gh$ où g et h sont dans H^2 et $|g| = |h|$ p.p.

Preuve :

Posons :

$w = |f|$ qui est >0 p.p. d'après le théorème précédent.

On a donc :

$$\mathrm{Log}\,|f| \in L^1$$

et d'après ce qui précède

On définit h par

$$f = g.h \text{ . Donc } |g| = |h| \text{ p.p. ;}$$

reste à montrer que $h \in H^2$.

Il suffit de montrer que $h \in H^1$ puisque

$$|h| = \sqrt{w} \text{ et } w \in L^1 \text{ (i.e. } h \in L^2\text{).}$$

Comme g est extérieure, il existe une suite Q_n de polynômes trigonométriques telle que :

$$Q_n\, g \longrightarrow 1 \text{ dans } H^2 .$$

On a

$$Q_n\, g.h \longrightarrow h \text{ dans } L^1 .$$

Mais

$$(Q_n\, g)h = Q_n(g.h) = Q_n\, f \in H^1 .$$

Comme H^1 est fermé, $h \in H^1$.

<u>Remarque</u> :

L'analogue de ce théorème pour deux variables est essentiellement faux.

On va maintenant donner une démonstration plus simple du théorème de F. et M. Riesz.

<u>Théorème de F. et M. Riesz</u> :

<u>Si</u> $d\mu \sim \sum_{0}^{+\infty} a_n\, e^{inx}$ <u>alors</u> $d\mu$ <u>est absolument continue.</u>

<u>Preuve</u> :

Soit :

$$d\mu = f\, d\sigma + d\mu_s \qquad \text{avec } f \in L^1 .$$

Montrons d'abord que $f \in H^1$.

on définit :

$$d\nu = |d\mu|$$

une mesure positive qui vérifie

$$d\nu = \phi\, d\mu \qquad \text{avec } \phi \in L^2_\mu$$

et $|\phi| = 1$ p.p./μ

d'après l'hypothèse on a :

$$\int \chi^n \ \phi \ d\nu = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\dots,$$

$$\int \chi^n \ (1+P)\phi \ d\nu = 0 \quad (P = \sum_1^N a_n \chi^n) \quad n=1,2,\dots .$$

comme :

$$1+H = \lim (1+P_n) \quad \text{dans} \quad L^2_\mu \ ,$$

on a :

$$\int \chi^n \ (1+H)\phi \ d\nu = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\dots .$$

Donc

$$(1+H)\phi \ d\nu = (1+H) \ d\mu$$

est analytique.

Mais $1+H = 0$ p.p. par rapport à $d\mu_s$ (théorème de Kolmogoroff) implique :

$$(1+H)f \in H^1 .$$

On va montrer que $f \in H^1$.

En effet

$$|1+H|^2 w = K > 0 \quad \text{où} \quad w = |f|$$

et

$$|1+H| \, |f| = \left| \frac{K}{1+H} \right| \in L^2$$

Donc

$$(1+H)f \in H^2$$

Mais $\frac{1}{1+H} \in H^2$ (résultat général), donc

$$[(1+H)f] \ \frac{1}{(1+H)} = f \in H^1 .$$

Cela prouve que $f \, d\sigma$ est analytique. Comme $d\mu$ est analytique par hypothèse $d\mu_s$ l'est aussi.

Pour terminer il suffit de montrer le cas particulier suivant du théorème :

Si $d\mu_s$ est singulière et analytique, elle est nulle.

En effet :

$$\lim_n \int (1+P_n)\, d\mu_s = \int (1+H)\, d\mu_s = 0 .$$

Or

$$\int \chi^n \, d\mu_s = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,,\ldots$$

par hypothèse, donc :

$$\int 1 \, d\mu_s = a_o = 0 \quad ,$$

comme

$$\chi^{-1}(1+H) = 0 \quad \text{p.p.}/d\mu_s \text{ , on a :}$$

$$0 = \int \chi^{-1} \, d\mu_s + \lim \int \chi^{-1} P_n \, d\mu_s .$$

Le second terme de droite est nul d'après l'hypothèse et le fait que $a_o = 0$; d'où

$$\int \chi^{-1} \, d\mu_s = a_1 = 0$$

et d'après le même procédé on aura :

$$a_2 = a_3 = \ldots = 0 .$$

Donc $d\mu_s = 0$ d'après l'unicité des transformées de Fourier-Stieljes.

C.Q.F.D.

<u>Théorème de Beurling.</u>

<u>Pour que</u> f <u>dans</u> H^2 <u>soit extérieure il faut et il suffit que</u>

$$\int \log|f| \, d\sigma = \log\left|\int f \, d\sigma\right| > -\infty \quad .$$

Posons $w = |f|^2$. Si f est extérieure, elle coïncide avec la fonction e^g de la démonstration du théorème de Szegö, d'où le résultat. Réciproquement, si f vérifie ces conditions alors on obtient, par le théorème de Szegö, dans la notation usuelle,

$$\inf \int |(1+P)f|^2 \, d\sigma = |a_o|^2 \quad \text{où} \quad a_o = \int f \, d\sigma$$

d'où on déduit que $\mathcal{M}_f$ contient des constantes non nulles, donc f est extérieure.

<u>Théorème de Fejér-Riesz.</u>

<u>Si</u> P <u>est un polynôme trigonométrique tel que</u>

$$P(e^{ix}) \geqslant 0 \qquad \forall\, e^{ix}$$

<u>alors</u>

$$P = |Q|^2$$

<u>et</u> Q <u>est un polynôme trigonométrique</u>.

<u>Preuve</u> :

Soit

$$P = \sum_{-N}^{+N} a_n \chi^n \qquad \text{et} \qquad P(e^{ix}) \geqslant 0 \,, \qquad a_N \neq 0 \,.$$

On a :

$$\chi^N P \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad \chi^N P \in H^2 \,.$$

Par des réflexions élémentaires, ou encore par le théorème général dans H^2,

$$\int \mathrm{Log}\, |\chi^n P| \; d\sigma > -\infty$$

donc $\mathrm{Log}\, P \in L^1$.

Appliquant le théorème de Szegö, on a :

$$P = |Q|^2$$

où $Q \in H^2$ est extérieure et de la forme

$$Q = \frac{\sqrt{K}}{1+H} = (1+\bar{H})\; P/\sqrt{K} \,.$$

La démonstration du théorème sera achevée si on montre que les coefficients de Fourier de Q d'ordre supérieur à N sont nuls.

Pour cela, soit :

$$\sqrt{K} \int Q\, \chi^{-N-1}\, d\sigma = \int (1+\bar{H}) P\, \chi^{-N-1}\, d\sigma$$

$$= \text{lim. de quantité de la forme} \int (1+\alpha_1 \chi^{-1} + \ldots + a_n \chi^{-n}) P \chi^{-N-1} d\sigma$$

$$= \lim \; (\chi^{-N-1} + \alpha_1 \chi^{-N-2} + \ldots) P\, d\sigma$$

$$= 0 \,.$$

Il en est de même si nous remplaçons $-N-1$ par $-N-2$, $-N-3$, et ainsi de suite.

Donc

$$\int Q\, \chi^{-n}\, d\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad n > N \,,$$

et Q est un polynôme.

Deuxième problème de la prévision :

On se propose de chercher le minimum de la norme de $1+P$ dans L^2_μ, mais ici P parcourra l'ensemble des polynômes de la forme :

$$P = \sum_{-N}^{+N} a_n \chi^n \quad (N \text{ variable}) \text{, avec } a_o = 0 .$$

Soit

$$\rho(\mu) = \inf_P \int |1+P|^2 \, d\mu .$$

On a alors :

Théorème de Kolmogoroff.

$$\rho(\mu) = \frac{1}{\int \frac{1}{w} \, d\sigma} \quad \text{où} \quad d\mu = w \, d\sigma + d\mu_s$$

et

$$\rho(\mu) = 0 \iff \int \frac{1}{w} \, d\sigma = -\infty .$$

Lemme :

Soit $w \geqslant 0$ et $w \in L^1$. Alors

$$L^2_w \subset L^1 \iff w^{-1} \in L^1 .$$

Preuve :

Supposons $w^{-1} \in L^1$. Soit $f \in L^2_w$. On a

$$\|f\|_{L^1} = \int |f| \, d\sigma = \int |f \sqrt{w}| \frac{1}{\sqrt{w}} \, d\sigma$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2_w} \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{w}} \right\|_{L^2} \quad \text{(inégalité de Schwartz)}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2_w} \left(\int w^{-1} \, d\sigma \right)^{1/2} < +\infty .$$

Donc

$$L^2_w \subset L^1 .$$

Supposons maintenant $L^2_w \subset L^1$.

On a nécessairement $w>0$ p.p. Soit k l'élément générique de L^2_w ; alors $k^2 w = h$ parcourt L^1 tout entier, ou encore $\sqrt{h}$ est l'élément générique de L^2.

Par hypothèse :

$$k = \sqrt{\frac{h}{w}} \in L^1 ,$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{w}} \cdot L^2 \subset L^1$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\sqrt{w}} \in L^2$$

ou encore :

$$w^{-1} \in L^1$$

C.Q.F.D.

<u>Preuve du théorème.</u>

On suppose $\rho(\mu) > 0$.

Soit :

$1+H = \lim(1+P_n)$ dans L^2_μ , l'élément minimal de $\{1+P_n\}$. $1+H$ est orthogonal à tout P_n dans L^2_μ (démonstration analogue à celle du premier problème).

En particulier $(1+H) \perp \chi^n$ $\forall n \neq 0$; i.e.

$$\int (1+H)\chi^n \, d\mu = 0 \quad \forall n \neq 0 .$$

D'après l'unicité des transformées de Fourier-Stieljes, on a :

$$(1+H)\, d\mu = K\, d\sigma , \ K > 0 .$$

Or $d\mu = w\, d\sigma + d\mu_s$, ce qui implique :

$$(1+H) = 0 \quad \text{p.p. pour} \quad d\mu_s$$

et

$$(1+H)w = K \quad \text{p.p.}, \quad 1+H = \frac{K}{w} > 0 \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$\rho(\mu) = \int (1+H)^2 \, d\mu = \int (1+H)^2 w \, d\sigma = K^2 \int w^{-1} \, d\sigma < \infty .$$

Donc $w^{-1} \in L^1$ et $L^2_w \subset L^1$.

Puisque

$$1+H = \lim(1+P_n) \quad \text{dans} \quad L^2_w$$

il s'ensuit que

$$1+H = \lim(1+P_n) \quad \text{dans} \quad L^1$$

et donc

$$\rho(\mu) = \int (1+H)^2 w \, d\sigma = K \int (1+H) \, d\sigma = K \lim_n \int 1+P_n \, d\sigma = K \, .$$

Or

$$\rho(\mu) = K^2 \int w^{-1} \, d\sigma \, .$$

En rapprochant ces deux expressions,

$$\rho(\mu) = K = \frac{1}{\int w^{-1} \, d\sigma} \, .$$

Reste à montrer la deuxième assertion du théorème. On a déjà montré que :

$$\rho(\mu) > 0 \implies w^{-1} \in L^1 \, .$$

Inversement on va prouver

$$w^{-1} \in L^1 \implies \rho(\mu) > 0 \, .$$

En effet

$$\int |1+P|^2 \, d\mu \geqslant \int |1+P|^2 \, w \, d\sigma = \|1+P\|^2_{L^2 w}$$

et

$$\|1+P\|^2_{L^2 w} \geqslant \delta \|1+P\|_{L^1} \geqslant \delta$$ (en appliquant le lemme et en posant :

$$\delta = \left(\frac{1}{\int w^{-1} \, d\sigma} \right)^{1/2} > 0 \;) \, .$$

Donc

$$\rho(\mu) \geqslant \delta > 0 \, ,$$

C.Q.F.D.

Finalement on a

$$\rho(\mu) > 0 \iff w^{-1} \in L^1$$

ce qui équivaut à :

$$\rho(\mu) = 0 \iff \int w^{-1} \, d\sigma = \infty \, .$$

Cela achève la démonstration du théorème.

Troisième problème de la Prévision :

Angles de deux sous-espaces vectoriels fermés dans un espace de Hilbert.

Soient M et N ces deux sous-espaces. On s'intéresse à la quantité :

$$\rho(M,N) = \operatorname{Sup} |(f,g)|$$

pour $f \in M$, $g \in N$; $\|f\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$.
Supposons :

$$M \cap N \neq \{0\}$$

Par normalisation, l'élément commun peut-être pris de norme égale à L . Dans ce cas :

$$\rho(M,N) = 1 \quad (f=g \quad \text{et} \quad \|f\|=1) \ .$$

Dans le cas général on a

$$\operatorname{Sup}|(f,g)| \leq \operatorname{Sup}(\|f\|,\|g\|) \leq 1$$

Définition :

On dit que M et N font un angle positif si

$$\rho(M,N) < 1$$

Le problème est de savoir si dans L^2_μ le passé et le futur font un angle positif.

Pour cela on définit deux sous-espaces de L^2_μ $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{P}_m$ par :

$$\mathcal{F}_n = \text{fermeture de } \left\{ \sum_{j \geq n} a_j \chi^j \right\}$$

$$\mathcal{P}_m = \text{fermeture de } \left\{ \sum_{j \leq m} a_j \chi^j \right\}$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera aux sous-espaces $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{F}_1$ et on étudiera le comportement de $\rho = \rho(\mathcal{P}_0,\mathcal{F}_1)$.
On définit l'opérateur T par :

$$T\Big(\sum_{\text{finie}} a_n \chi^n\Big) = \sum_{n \geq 1} a_n \chi^n$$

Théorème :

Pour que $\rho<1$ il faut et il suffit que T soit bornée dans L^2_μ .

Remarque :

En fait, ce n'est pas seulement un théorème sur L^2_μ mais sur un espace de Hilbert tout à fait général.

Preuve :

On raisonnera par l'absurde :

Si $\rho=1$ alors T est non bornée. $\rho=1$ implique l'existence de f dans $\mathcal{F}_o$ et de g dans $\mathcal{F}_1$ telles que :

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

et $|(f,g)|$ très près de 1.

On peut d'ailleurs les prendre comme polynômes trigonométriques de norme $= 1$. De plus, on peut prendre (f,g) réel, quitte à le multiplier par une constante complexe convenable.

Posons :

$$h = f-g \ ;$$

c'est un polynôme trigonométrique.

$$\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2(f,g)$$

$$\leqslant 2\varepsilon \qquad \text{(puisque } (f,g) \text{ réel très près de } 1).$$

Mais :

$$g = -Th \quad , \quad \|g\| = \|Th\| = 1 \quad \text{et} \quad \|h\| < \varepsilon'$$

implique que T est non bornée.

Si T non bornée alors $\rho=1$.

Soit h un polynôme trigonométrique tel que :

$$\|h\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Th\| = 1$$

On peut poser :

$$h = f-g \ ; \quad f \in \mathcal{F}_o \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{F}_1 \ ,$$

alors :

$$g = -Th \ .$$

Comme

$$\|h\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|g\| = 1 \ ,$$

on a :

$$1 - \varepsilon \leqslant \|f\| \leqslant 1 + \varepsilon$$

$$\varepsilon^2 \geqslant \|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\mathrm{Re}\ (f,g) \geqslant 0$$

$$2 \operatorname{Re}(f,g) \geqslant (1-\varepsilon)^2 + 1 - \varepsilon^2$$

comme

$$|(f,g)| > \operatorname{Re}(f,g) \text{ , on a}$$

$$|(f,g)| > 1 - \varepsilon ;$$

D'autre part,

$$\|f\| \leqslant 1 + \varepsilon \text{ entraîne}$$

$$\left|\left(\frac{f}{\|f\|} , g\right)\right| > 1 - \delta(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$\rho = 1$$

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> :

<u>Pour que</u> $\rho<1$ <u>il faut et il suffit que</u>

$$\|T_{m,n}\| \leqslant M < \infty \quad m \leqslant n \quad \underline{\text{avec}} :$$

$$T_{m,n} \left(\sum_{\text{finie}} a_k \,{}^k \right) = \sum_m^n a_k \chi^k \text{ .}$$

Supposons $\rho<1$.

D'après le théorème précédent, T est bornée. On définit les opérateurs T_m et U_n par :

$$T_m\left(\sum a_k \chi^k\right) = \sum_{k \geqslant m} a_k \chi^k$$

$$U_n\left(\sum a_k \chi^k\right) = \sum_{k \leqslant n} a_k \chi^k \text{ ,}$$

comme les multiplications par χ^p sont des isométries dans l'espace de Hilbert, on a :

$$\|T_m\| = \|T\|$$

et par passage au conjugué, on a également :

$$\|U_n\| = \|T\| .$$

Or

$$T_{m,n} = U_n \, T_m \text{ ,}$$

donc

$$\|T_{m,n}\| \leq \|U_n\| \, \|T_m\| = \|T\|^2 < \infty .$$

Si les $T_{m,n}$ sont uniformément bornés pour tout $m \leq n$; alors $\rho<1$.

Prenons $m=1$:

$\|T_{1,n}\|$ est alors uniformément bornée quand $n \to +\infty$.

Pour tout polynôme f,

$$T_{1,n}f \to Tf$$

car à partir d'un certain rang les deux termes sont égaux.

En utilisant le principe général, T est un opérateur borné et $T_{1,n}f \to Tf \quad \forall f \in L^2_\mu$.

Donc

$$\rho < 1 .$$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> :

<u>Pour que</u> $\rho<1$ <u>il faut et il suffit qu'à tout</u> f <u>dans</u> L^2_μ <u>on puisse associer une série</u> $\delta = \sum a_n \chi^n$ <u>telle que</u> :

$$T_{m,n}\delta \to f \quad \text{dans} \quad L^2_\mu$$

<u>pour</u> m <u>et</u> n <u>tendant vers l'infini indépendamment</u>.

<u>Remarque</u> :

Nous retrouvons le résultat classique sur la convergence d'une série de Fourier dans L^2. En effet ici,

$$d\sigma = d\mu \quad \text{et} \quad \rho=0 \quad (\mathcal{P}_0 \perp \mathcal{F}_1)$$

<u>Preuve</u> :

Soit $\rho<1$. Les $T_{m,n}$ définies d'abord pour les polynômes trigonométriques sont uniformément bornées d'après ce qui précède. Cela permet de définir une "série de Fourier" pour chaque fonction de L^2_μ.
De plus $T_{m,n}f \to f$ pour tout f polynôme trigonométrique, et par application du principe général, cela est vrai pour tout f dans L^2_μ.

Inversement supposons que f possède une série de Fourier dans ce sens :

$$T_{m,n}f = \sum_m^n a_k \chi^k \to f \quad \text{dans} \quad L^2_\mu ,$$

pour $m \to -\infty$ et $n \to +\infty$ indépendamment. Donc :

$$\|T_{m,n}f\| \leq K_f ;$$

D'après le principe de Banach-Steinhaus ;

$$\|T_{m,n}\| \leqslant K \;;$$

donc

$$\rho < 1$$

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> :

<u>Si</u> $\rho<1$, μ <u>est absolument continue</u>.

On donnera ici une démonstration qui est une conséquence facile du théorème des Riesz.

Soit $d\mu = \omega\, d\sigma + d\mu_s$. Il s'agit de montrer que $\rho=1$, en supposant que $d\mu_s \neq 0$.

Soit f telle que :

$$f = \begin{cases} 0 & \text{p.p. pour } d\sigma \\ 1 & \text{p.p. pour } d\mu_s \,. \end{cases}$$

Alors $f \in \mathcal{F}_o$. En effet d'après les propriétés des espaces de Hilbert il suffit de montrer que

$$f \perp \phi \qquad \forall \phi : \phi \perp \mathcal{F}_o$$

Si $\phi \perp \mathcal{F}_o$, on a :

$$\int \bar{\phi} \chi^n \, d\mu = 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

(puisque χ^n engendre $\mathcal{F}_o$)

$\bar{\phi}\, d\mu$ est donc une mesure analytique. D'après le théorème des Riesz, $\bar{\phi}\, d\mu$ est absolument continue. En d'autres termes $\phi = 0$ p.p. pour $d\mu_s$. Comme $f=0$ p.p. pour $d\sigma$:

$$\int f\bar{\phi} \;\; d\mu = 0 \,.$$

Donc $f \in \mathcal{F}_o$. Pour des raisons analogues $f \in \mathcal{P}_1$ (et en général $f \in \mathcal{P}_m$, $f \in \mathcal{F}_n$) .

Comme par hypothèse $d\mu_s \neq 0$, $f \not\equiv 0$ et

$$\mathcal{P}_o \cap \mathcal{F}_1 \neq \{0\} \,.$$

Donc

$$\rho = 1$$

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> :

<u>Soit</u> C <u>l'opérateur défini sur les polynômes trigonométriques par</u>

$$C\left(\sum_{\text{finie}} a_n \chi^n\right) = \sum -i \operatorname{sign}(n)\, a_n \chi^n .$$

<u>Alors</u>

$$\rho<1 \iff C \ \underline{\text{borné dans}} \ L^2_\mu$$

<u>Preuve</u> :

Supposons $\rho<1$

C peut être obtenu comme combinaison linéaire de T_m et U_n, donc C est borné (puisque T_m et U_n le sont).

Inversement, supposons C borné.

L'opérateur C^2 est aussi borné et on a :

$$C^2(f) = -f + a_o$$

ou encore :

$$(I + C^2)(f) = a_o .$$

Donc $I + C^2$ est un opérateur borné. Or

$$a_o + f + iC = 2a_o + \sum_{n\geqslant 1} 2a_n \chi^n ,$$

donc T_o est borné. Il en est de même de $T_1 = T$ et $\rho<1$

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> :

<u>Pour que</u> $\rho<1$ <u>il faut et il suffit que</u> $d\mu = w\, d\sigma$ <u>et</u> $w = e^{u+\tilde{v}}$ <u>où</u> u <u>et</u> v <u>sont des fonctions réelles bornées avec</u> $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ ($\tilde{v}$ <u>la fonction conjuguée de</u> v) .

<u>Preuve</u> :

Supposons $\rho<1$. Soient :

$$f = \sum_{n\geqslant 1} a_n \chi^n , \quad (f \in \mathcal{P}_1) ,$$

$$g = \sum_{n\leqslant o} a_n \chi^n , \quad (g \in \mathcal{P}_o) .$$

Posons :

$$I = \int f\bar{g}\, w\, d\sigma .$$

où f et g sont des polynômes trigonométriques tels que

$$\int |f|^2\, w\, d\sigma \leqslant 1 \qquad ; \qquad \int |g|^2\, w\, d\sigma \leqslant 1 .$$

L'hypothèse $\rho<1$ implique que $\operatorname{Log} w$ est sommable et $w = |h|^2$ où h est une fonction extérieure dans H^2. On a :

$$I = \int f.\bar{g}\ h.h\ e^{-2i\phi}\ d\sigma \quad \text{où} \quad h = |h| e^{i\phi} .$$

comme $\bar{g}$ est analytique, on peut écrire

$$I = \int f.g\ \chi\ h^2\ e^{-2i\phi}\ d\sigma$$

où f et g sont des P.T. normés dans $\mathcal{F}_o$.
Finalement on obtient :

$$I = \int (f.h)(g.h)\ \chi\ e^{-2i\phi}\ d\sigma$$

avec $\int |f.h|^2\ d\sigma \leqslant 1$; $\int |g.h|^2\ d\sigma \leqslant 1$. ρ est la borne supérieure de $|I|$ sous ces conditions.

Comme h est extérieure, l'espace engendré par les fonctions fh où f parcourt l'ensemble des polynômes trigonométriques analytiques tels que $\|fh\|_2 \leqslant 1$ est partout dense dans la boule unité de H^2. Il en est de même des fonctions du type gh. Comme toute fonction de H^1 se décompose en un produit de deux fonctions de H^2 de même module, il s'ensuit que l'ensemble des produits $(fh)(gh)$, qui est contenu dans la boule unité de H^1 en tout cas, est dense dans cette boule.

D'où l'expression de ρ :

$$\rho = \sup_f |I| = \sup_f \left| \int f\ \chi\ e^{-2i\phi}\ d\sigma \right|$$

où $f \in H^1$, $\|f\|_1 \leqslant 1$. ρ apparaît donc comme la norme de $\chi\ e^{-2i\phi}$ identifiée à une fonctionnelle linéaire sur H^1.

Soit A dans L^∞ tel que :

$$\int h\ A\ d\sigma = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \quad \text{dans} \quad H^1 .$$

Comme $\chi\ e^{-2i\phi}$ est la même fonctionnelle sur H^1 que $\chi\ e^{-2i\phi} - A$, dont la norme est majorée par la norme dans L^∞, on a

$$\|\chi\ e^{-2i\phi}\|_{f.\ell} \leqslant \|\chi\ e^{-2i\phi} - A\|_{L^\infty} .$$

($\| \ \|_{f.\ell}$ est la norme d'une fonctionnelle linéaire sur H^1.)
Cette inégalité est vraie pour tous les éléments A de L^∞ qui s'annulent sur H^1, donc

$$\|\chi\, e^{-2i\phi}\|_{f.} \leqslant \inf_A \|\chi\, e^{-2i\phi}-A\|_{L^\infty} .$$

Comme H^1 est un sous-espace vectoriel de L^1, il existe un prolongement de la fonctionnelle $\chi\, e^{-2i\phi}$ de H^1 à L^1, qui réalise l'égalité des normes (théorème de Hahn-Banach), et cette fonctionnelle correspond à une fonction de L^∞ de la forme $\chi\, e^{-2i\phi}-A$.

On a donc :

$$\|\chi\, e^{-2i\phi}\|_{f.\ell} = \inf_A \|\chi\, e^{-2i\phi}-A\|_{L^\infty} .$$

D'autre part il est évident que

$$\int A\, h\, d\sigma = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \quad \text{dans} \quad H^1$$

si et seulement si A appartient à $\chi\, H^\infty$:

$$\rho = \inf_{A\in\chi H^\infty} \|\chi\, e^{-2i\phi}-A\|_{L^\infty} ,$$

et en remplaçant A par $\chi\, A$ ce qui ne change pas la norme, on a :

$$\begin{aligned}\rho &= \inf_{A\in H^\infty} \|e^{-2i\phi}-A\|_{L^\infty} \\ &= \inf_{A\in H^\infty} \|1 - e^{2i\phi}A\|_{L^\infty} .\end{aligned}$$

cette expression sera transformée encore par le lemme suivant.

<u>Lemme</u> :

<u>Pour que</u> $\rho<1$ <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> $\varepsilon>0$ <u>et</u> $A \in H^\infty$ <u>tels que</u>

$$|A| \geqslant \varepsilon \quad \text{p.p.} \quad \text{et}$$

$$|\mathrm{Arg}(Ah^2)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) .$$

(Bien entendu ces conditions portent sur les valeurs de A et de Ah^2 à la frontière.)

Soit d'abord $\rho<1$.

Il existe donc un élément A de H^∞ tel que :

$$\|1 - A\, e^{2i\phi}\|_{L^\infty} < 1 .$$

Cette inégalité implique que $|A| > \varepsilon$ p.p. pour un certain $\varepsilon>0$, car sinon, A peut être aussi voisin de 0 que l'on veut et $|1 - A\, e^{2i\phi}|$

est arbitrairement voisin de 1 .

Donc l'inégalité

$$|1 - A\, e^{+2i\phi}| < 1 - \varepsilon$$

montre que $A\, e^{2i\phi}$ est dans le cercle de centre 1 et de rayon $1-\varepsilon$. Ce cercle est contenu dans le domaine d'équation :

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon ;$$

comme

$$\mathrm{Arg}(Ah^2) = \mathrm{Arg}(A\, e^{2i\phi}) ,$$

Il s'ensuit que :

$$|\mathrm{Arg}(Ah^2)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon .$$

Inversement, supposons que

$$|A| > \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad |\mathrm{Arg}(Ah^2)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon .$$

A peut être de module très grand mais on peut trouver un nombre positif λ assez petit tel que le domaine des valeurs de λA soit contenu dans un cercle de centre 1 et de rayon $1-\varepsilon'$, vu que A est borné et $|A| > \varepsilon$. ε' sera alors pris tel que :

$$0 < \varepsilon' < \lambda\varepsilon < \varepsilon ;$$

donc

$$\|1 - \lambda A\, e^{2i\phi}\|_{L^\infty} < 1 ;$$

par conséquent $\rho<1$

C.Q.F.D.

- On reprend la démonstration du théorème en posant :

$$v \longrightarrow \vartheta = \mathrm{Arg}(Ah^2) \pmod{2\pi}$$

$\rho<1$ implique

$$|\vartheta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{p.p.} \quad \text{(Lemme).}$$

Soit

$$f = e^{-i(\vartheta + i\tilde{\vartheta})}$$

$\vartheta+i\tilde{\vartheta}$ est analytique. Il en est de même de l'exponentielle. De plus $e^{\tilde{\vartheta}}$ est sommable puisque $|\vartheta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (théorème dans Zygmund). Donc

f est dans H^1. Comme ϑ est réelle, $Ah^2 f \geq 0$ à la frontière. De plus comme $f \in H^1$ et $Ah^2 \in H^2$, $Ah^2 f \in H^{1/2}$ d'après un théorème qu'on va démontrer plus loin, $Ah^2 f$ est analytique sur la frontière. On peut donc la prolonger en une fonction analytique dans le plan entier, y compris le point infini, par le procédé de réflexion. Elle est donc constante :

$$Ah^2 f = K .$$

On peut alors écrire :

$$h^2 = K A^{-1} f^{-1} \; ; \; w = |K| |A^{-1}| e^{\tilde{v}} .$$

Posons $|A^{-1}| = e^u$ où u est bornée inférieurement et supérieurement ; on obtient ainsi l'expression cherchée de w en rappelant que v était définie comme le conjugué de $\tilde{v}$, $\|v\|_\infty < \pi/2$.

\- Inversement :

Si $w = e^{u+\tilde{\vartheta}}$ où u, ϑ réelles, u bornée et $\|\vartheta\|_{L^\infty} < \frac{\pi}{2}$, alors $\rho<1$.

w peut s'écrire

$$w = q\, e^{-\tilde{\vartheta}} \qquad (q = e^u)$$

où on a remplacé $\tilde{\vartheta}$ par $-\tilde{\vartheta}$.

Soient : $f = e^{-\vartheta+i\vartheta}$ et A fonction extérieure bornée telle que $|A| = q$; et soit h telle que :

$$|h|^2 = w = q\, e^{-\tilde{\vartheta}} .$$

Comme f et q sont dans H^1 et extérieures, $\sqrt{f}.\sqrt{q}$ est dans H^2 et extérieure.

$$|h|^2 = w = |Af|$$

implique

$$|h| = |\sqrt{f}\,\sqrt{q}| .$$

Or deux fonctions extérieures de même module sont égales à une constante multiplicative près. Donc

$$h^2 = \alpha Af \quad \text{où} \quad |\alpha| = 1 .$$

Par conséquent

$$\|\mathrm{Arg}\, A^{-1} h^2\|_{L^\infty} = \|\mathrm{Arg}\, f\|_{L^\infty} < \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse ; et :}$$

$$|A^{-1}| > \varepsilon \quad (\text{puisque } A^{\pm 1} \in H^\infty) .$$

Les conditions du lemme sont donc satisfaites et par conséquent $\rho<1$.
Cela achève la démonstration du théorème.

On définit l'espace L^p pour $0<p<1$ comme l'ensemble des fonctions f définies sur le cercle et mesurables qui vérifient :

$$\int |f|^p \, d\sigma \leqslant M .$$

En posant :

$$\|f\|_p = \int |f|^p \, d\sigma ,$$

On munit l'espace L^p d'une distance. En effet :

Soient a et b deux nombres positifs. Posons :

$$a^p = A , \; b^p = B \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{r} \quad \text{où} \quad r>1 .$$

alors : $A^r + B^r \leqslant (A+B)^r$

donc : $(A^r+B^r)^{1/r} \leqslant A + B$

ou : $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$

Si a et b sont deux nombres complexes, on a

$$|(a+b)|^p \leqslant (|a| + |b|)^p < |a|^p + |b|^p$$

donc :

$$\|f+g\|_p = \int |f+g|^p \, d\sigma \leqslant \int (|f|^p + |g|^p) \, d\sigma = \|f\|_p + \|g\|_p$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

Pour cette distance, L^p est un espace métrique complet et pour toute suite f_n convergente dans L^p , il existe une sous-suite qui converge presque partout.

On définit l'espace H^p pour $0<p<1$ comme l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque et vérifiant :

$$\|f\|_p = \int |f(re^{ix})|^p \, d\sigma \leqslant M \quad \text{pour} \quad 0<r<1 .$$

Ainsi défini, H^p est un espace métrique complet ; on verra que H^p peut être identifié à un sous-espace de L^p .

Certaines propriétés des espaces H^p pour $p>1$ sont encore vraies :

<u>Théorème</u> :

<u>Toute fonction</u> f <u>de</u> H^p , <u>où</u> $0<p<1$, <u>s'écrit</u>

$$f = B \, f_1$$

où B est une fonction analytique bornée avec $|B(e^{ix})| = 1$ p.p. et f_1 est dans H^p avec $f_1(z) \neq 0$ pour $|z|<1$.

<u>Preuve</u> :

Il suffira de trouver B' <u>bornée</u> analytique et f_2 dans H^p sans zéros telles que $f = B f_2$; car $B' = B g$ où B est analytique ; $|B(e^{ix})|= 1$ p.p., et g bornée extérieure. Alors $f = B' f_2 = B(g f_2)$ est la décomposition cherchée.

Soit n entier tel que $np \geqslant 2$. Alors

$$\int |f(re^{ix})|^{2/n} \, d\sigma \leqslant M < \infty \quad , \; 0<r<1 .$$

Désignons par K_r la fonction extérieure de H^2 pour laquelle on a

$$|K_r(e^{ix})| = |f(re^{ix})|^{1/n} \quad \text{p.p.} \; , \quad K_r(0)>0 .$$

Sa famille $\{K_r\}$ est bornée dans H^2. Donc il existe un point-limite K de $\{K_r\}$ pour la topologie étoile de H^2 ; et H^2 étant séparable, K possède cette propriété : pour une suite $r_j \uparrow 1$ fixée, et pour chaque g de H^2,

$$\lim_{j\to\infty} \int K_{r_j}(e^{ix}) \, \overline{g(e^{ix})} \, d\sigma(x) = \int K(e^{ix}) \, g(e^{ix}) \, d\sigma(x) .$$

Or par un choix convenable de g (rappelons la formule de Cauchy !) cette relation implique

$$\lim_{j\to\infty} K_{r_j}(z_o) = K(z_o)$$

pour chaque z_o fixé, $|z_o|<1$.

Remarquons que $K(0) \neq 0$. En effet K_r étant extérieure on a

$$\log|K_r(0)|^n = \int \log|K_r(e^{ix})|^n \, d\sigma(x) = \int \log|f(re^{ix})| \, d\sigma(x)$$
$$\geqslant \log|f(0)| \; , \quad 0<r<1 .$$

Donc la limite $\log|K(0)|$ est finie, si $f(0) \neq 0$. Mais l'argument s'applique à $\chi^{-p}f$ si f a un zéro d'ordre p à l'origine.

Donc K n'est pas identiquement zéro. Mais l'argument, formulé plus largement, implique que $|K(r)| \geqslant |f(r)|^{1/2}$ pour $|r|<1$. En effet $K_r(z)^n$ est extérieure bornée dans le cercle, au même module à la frontière que $f(rz)$. Donc

$$|f(rz)| \leqslant |K_r(z)|^n \qquad (|z|<1) .$$

Quand $r_j \to 1$ on a à la limite

$$|f(r)| \leq |K(r)|^n \qquad (|r|<1) .$$

On pourrait démontrer que $K(r) \neq 0$ pour $|r|<1$ (comme déjà fait pour $r=0$), mais cela n'est pas nécessaire. Comme $K \in H^2$, $K = C f_3$ où C est analytique bornée, $|C(e^{ix})| = 1$ p.p. , et $f_3 \in H^2$, $f_3(r) \neq 0$ pour $|r|<1$. Donc

$$f(r) = B'' C^n f_3^n = (B'' e^n) f_3^n$$

où B' , définie comme f/K^n , est analytique (puisque bornée pour $|r|<1$).

Il reste à montrer que f_3^n est dans H^p . Comme $f_3 \in H^2 \cap L^{np}$, $np \geq 2$, nous avons $f_3 \in H^{np}$, ce qui équivaut à $f_3^n \in H^p$.
La démonstration du théorème est donc achevée, et de plus nous avons démontré ce

<u>Corollaire</u> :

<u>Si</u> $f \in H^p$ <u>et si sa fonction frontière est dans</u> L^r , $r>p$, <u>alors</u> $f \in H^r$.

Pour une fonction F appartenant à H^p , on a obtenu la décomposition suivante :

$$F = B\ G$$

où $B \in H^\infty$, $|B(e^{ix})| = 1$ p.p. ; $G = G_1^n$, $G_1 \in H^2$. Ceci étant il s'agit de rattacher à F définie dans le disque une fonction frontière f . Cette fonction sera par définition :

$$f(e^{ix}) = B(e^{ix})\ G_1^n(e^{ix})$$

où B et G_1 sont respectivement les fonctions frontière de $B(z)$ et $G_1(z)$ dans le disque. Le produit de ces deux fonctions à la frontière ne dépend pas de la décomposition ; en effet il est évident que f est la limite dans L^p de F_r quand $r \to 1$.

On a donc associé à toute fonction F de H^p pour $0<p<1$, une fonction f de L^p . L'espace H^p apparaît donc comme un sous-esapce de L^p .

Ainsi, certains résultats obtenus pour les espaces H^p , $p>1$ restent encore vrais pour $0<p<1$. Mais il y a des exceptions. Par exemple :

Toute fonction de H^p $(p\geq 1)$ s'écrit comme l'intégrale de Poisson de sa fonction frontière (pour le cas $p=1$ grâce au théorème de F. et M. Riesz).

Cette représentation n'est plus vraie pour le cas où $0<p<1$. En effet $F = P_r * f$ n'a pas de sens général si f n'appartient pas à L^1.

On illustre ce fait par un exemple :

Soit μ une mesure arbitraire réelle non A.C. et soit :

$$F = P_r * d\mu$$

F est harmonique et F_r dans L^1.

$G(z)$ sera la fonction conjuguée de $F(z)$ si $G_r(e^{ix})$ est la série trigonométrique conjuguée de $F_r(e^{ix})$; alors G_r vérifie

$$\|G_r\|_p \leq A_p\|F_r\|_1 \leq M \; ; \quad 0<p<1 \, .$$

La fonction $F + i\,G$ est analytique et appartient à H^p. On peut lui associer une fonction frontière (théorème précédent). Mais $F + i\,G$ ne peut pas être représentée par une intégrale de Poisson à partir d'une fonction frontière, parce que sa partie réelle $P_r * d\mu$ n'est produite par aucune fonction frontière. Soit par exemple μ la masse ponctuelle unité au point 1 sur le cercle :

$$P_r * d\mu = P_r(e^{ix}) \, .$$

$P_r + i\,\widetilde{P}_r$ est analytique et appartient à H^p pour $0<p<1$. Soit :

$$K = i(P_r + i\,\widetilde{P}_r) \, .$$

K est dans H^p. Comme $P_1(e^{ix}) = 0$ partout sauf au point 1, la partie imaginaire de K est nulle presque partout à la frontière. Donc $P_r * K$ sera réelle, si elle est définie, et ne peut pas reproduire $K(r)$ pour $|r|<1$.

<u>Théorème</u> :

Si F appartient à H^1 et si elle est réelle presque partout sur un segment (α,β) de la frontière, alors F est analytique sur ce segment.

<u>Remarque</u> :

Ce théorème n'est plus vrai pour f dans H^p, $0<p<1$. En effet il suffit de considérer la fonction définie ci-dessus qui a pour expression

$$-\,i\,K(z) = 1 + 2\,\frac{z}{1-z}$$

Elle est réelle presque partout sur la frontière mais n'est analytique sur aucun arc qui contient 1 .

Preuve du théorème :

Soit F dans H^1. Posons :

$$F(z^{-1}) = \overline{F(\bar{z})}$$

On a alors une définition de F pour $|r|>1$, qui est analytique et dont les valeurs frontières vérifient

$$F(e^{-ix}) = \overline{F(e^{-ix})}\ .$$

La prolongée de F est analytique pour $|z|>1$ et pour $|z|<1$. On va montrer qu'elle l'est aussi sur (α,β)

Soient e^{ix_1} et e^{ix_2} deux points de (α,β) (distincts de α et de β) tels que :

$$\int_0^1 |F(re^{ix_1})|\,d\sigma < \infty\ ;\quad \int_0^1 |F(re^{ix_2})|\,d\sigma < \infty$$

De tels points existent et on peut les choisir aussi près de α et β que l'on veut. En effet posons

$$\rho(x) = \int_0^1 |F(re^{ix})|\,dr$$

alors :

$$\int_0^2 \rho(x)\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |F(re^{ix})|\,d\sigma\,dr = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} |F(re^{ix})|\,d\sigma$$

$$= \int_0^1 \|F_r\|_1\,d\sigma < \infty$$

Donc d'après le théorème de Fubini $\rho(x)$ existe presque partout. Soit

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

où γ est un chemin fermé, qui est le contour d'un secteur du disque de centre 0 et de rayon $\rho>1$.

Ce contour passe par e^{ix_1} et e^{ix_2} .

$G(z)$ ainsi définie est analytique à l'intérieur de γ , car la dérivation sous le signe d'intégration est légitime.

D'autre part si z est un point du secteur, et si $|r|<1$, on peut remplacer le chemin γ de cette intégrale par γ' qui est le contour du secteur de rayon 1 , qui passe également par e^{ix_1} et e^{ix_2}. Cette construction de γ est justifiée par l'hypothèse que $F \in H^1$, combinée à la définition de F à l'extérieur du cercle par réflexion. Mais il est évident que l'intégrale suivant γ' donne la valeur $F(r)$; donc $F(r) = G(r)$ pour les points à l'intérieur de γ' . De même $F(r) = G(r)$ pour les points à l'intérieur de γ situés en dehors du cercle. Donc G définit un prolongement analytique de F sur le segment (α,β) , ce que l'on cherchait.

<u>Théorème</u> :

<u>Etant donné</u> F <u>appartenant à</u> $H^{1/2}$ <u>et</u> $F \geq 0$ <u>sur un segment</u> $\alpha,\beta)$ <u>du cercle, alors</u> F <u>est analytique sur</u> (α,β) .

<u>Preuve</u> :

F étant dans $H^{1/2}$ on peut l'écrire

$$F = G\,K$$

où G et K appartiennent à H^1 et $|G| = |K|$ p.p.

Comme $F(e^{ix}) \geq 0$, on a :

$$G = \overline{K} \quad \text{sur} \quad (\alpha,\beta) .$$

Donc $G + K$ est réelle.

Comme de plus $G + K$ appartient à H^1 , on déduit d'après le théorème précédent que $G + K$ est analytique sur (α,β) . En répétant le raisonnement pour $i(G-K)$, on déduit qu'elle est analytique sur (α,β) . Donc G et K sont séparément analytiques sur (α,β) . Il en résulte que $F = G\,K$ est analytique sur (α,β)

C.Q.F.D.

Ceci achève le troisième problème de la prévision.

Pour une application au quatrième problème, remarquons que la conclusion subsiste si F présente un pôle à l'origine. La démonstration dans H^1 est d'un caractère local ; pour $H^{1/2}$ il suffit d'écrire F comme $(z^{-k}G)K$ où G,K appartiennent à H^1 .

Quatrième problème de la prévision :

Position du problème :

Quelles sont les conditions pour que

$$\rho(\mathcal{P}_o,\mathcal{F}_n) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty \ ?$$

On rappelle que :

$$\rho(\mathcal{P}_o,\mathcal{F}_n) = \sup|(f,g)_{L^2_\mu}| \quad ; \quad f \in \mathcal{P}_o \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{F}_n \ ;$$

et $\|f\|_{L^2_\mu} \leq 1$, $\|g\|_{L^2} \leq 1$.

Une condition nécessaire pour que ceci ait lieu est que μ soit absolument continue et $\text{Log } w \in L^1$, avec

$$\mu = w \, d\sigma \ .$$

En effet, si $d\mu_s \neq 0$, chaque f de L^2_μ telle que $f=0$ p.p. pour $d\sigma$ appartient à la fois à $\mathcal{P}_o$ et à $\mathcal{F}_n$, donc $\rho=1$. Si $\log w \notin L^1$, $\mathcal{P}_o$ et $\mathcal{F}_n$ coïncident avec L^2_μ entier, et $\rho=1$ cette fois aussi.

Posons :

$$\rho_n = \rho(\mathcal{P}_o,\mathcal{F}_n) = \sup\left|\int f \, \overline{g} \, w \, d\sigma\right| \ .$$

En changeant les notations, cela revient à écrire

$$\rho_n = \sup\left|\int f \, g \, \chi^n \, w \, d\sigma\right.$$

où $f, g \in \mathcal{F}_o$, $\|f\|_{L^2_\mu} \leq 1$ et $\|g\|_{L^2_\mu} \leq 1$.

Comme $\text{Log } w \in L^1$ on a $w = |h|^2$, où h est une fonction extérieure de H^2 . En posant $h = |h|e^{i\phi}$, on a :

$$\rho_n = \sup\left|\int (fh).(gh) \, \chi^n \, e^{-2i\phi} \, d\sigma\right.$$

avec $\int |fh|^2 \, d\sigma \leq 1$, $\int |gh|^2 \, d\sigma \leq 1$.

Utilisant le même argument que dans le troisième problème ρ_n s'écrit

$$\rho_n = \sup_f \left|\int f \, \chi^n \, e^{-2i\phi} \, d\sigma\right| \ , \text{ où } f \in H^1 \text{ et } \int |f| \, d\sigma \leq 1 \ .$$

ρ_n apparaît donc comme la norme de $\chi^n e^{-2i\phi}$, considérée comme fonctionnelle linéaire sur H^1 . On a donc

$$\rho_n = \inf_A \|\chi^{n-1} e^{-2i\phi} - A\|_\infty \quad \text{où} \quad A \in H^\infty$$

(même argument que dans le troisième problème).
Ce qui peut encore s'écrire

$$\rho_n = \inf_A \| e^{-2i\phi} - \chi^{1-n} A \|_\infty \ , \qquad A \in H^\infty$$

Il s'ensuit que

<u>Lemme 1</u> :

<u>La condition nécessaire et suffisante pour que</u> ρ_n <u>tende vers</u> 0 <u>quand</u> n <u>tend vers</u> ∞ <u>est que</u> :

$$e^{-2i\phi} \in \mathcal{A}.$$

Où $\mathcal{A}$ est la fermeture uniforme de $\bigcup_{n>-\infty} \chi^{-n} H^\infty$.

<u>Propriétés de</u> $\mathcal{A}$:

Comme $\bigcup_{n>-\infty} \chi^{-n} H^\infty$ est une algèbre (pour la multiplication ponctuelle), il en est de même de sa fermeture uniforme .

Tout polynôme trigonométrique est dans $\bigcup \chi^{-n} H^\infty$, donc $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des fonctions continues sur le tore. De plus, d'une manière évidente, $\mathcal{A} \supset H^\infty$.

<u>Proposition</u> :

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}(T) + H^\infty$$

La démonstration n'est pas immédiate, mais elle ne sera pas donnée parce que nous n'utiliserons pas le résultat. Il est bien évident que $\mathbb{C}(T) + H^\infty$ est dense dans $\mathcal{A}$; le fait à démontrer, qui surprend, c'est que cet ensemble est fermé.

<u>Définition 1</u> :

W : $\{w$, fonction poids telle que $\rho_n \to 0$ dans L^2_w pour $n \to \infty\}$.

On sait que si $w \in W$ alors $\mathrm{Log}\, w \in L^1$ et $w = |h|^2$ avec h extérieure dans H^2 et $h = |h|\, e^{i\phi}$, ce qui définit ϕ à $2k\pi$ près.

<u>Définition 2</u> :

W_o l'ensemble des fonctions poids w telles qu' à chaque $\varepsilon>0$ on ait une représentation.

$$\mathrm{Log}\, w = r + \tilde{s} + t$$

où r, s et t sont des fonctions réelles et telles que :

$$\|r\|_\infty < \varepsilon \ , \quad \|s\|_\infty < \varepsilon \quad , \quad t \text{ polynôme trigonométrique,}$$

et $\tilde{s}$ est la fonction conjuguée de s .

Propriétés de W_o :

Si $w \in W_o$, il en est de même de w^n pour $n = \pm 1, \pm 2, \dots$
En effet l'existence de telles représentations pour $\operatorname{Log} w$ est une propriété additive et homogène de $\operatorname{Log} w$; il reste à montrer que w^n est sommable. Cela revient à démontrer que $e^{|n,\tilde{s}|} \in L^1$, ce qui est vrai dès que $|n|\varepsilon < \pi/2$.

Si $w \in W_o$ il en est de même de $e^{\widetilde{\operatorname{Log} w}}$.

Comme toute fonction continue peut être approchée par un polynôme trigonométrique, i.e. $f = u + t$ où t est un polynôme trigonométrique et $\|u\|_\infty < \varepsilon$, l'ensemble $\operatorname{Log} W_o = \{r + \tilde{s} + t\}$ contient les fonctions continues réelles.

Si w est continue et $w \geqslant \varepsilon > 0$ alors $w \in W_o$.
En effet ces conditions impliquent que $\operatorname{Log} w$ est continue et d'après ce qui précède

$$\operatorname{Log} w \in \operatorname{Log} W_o$$

d'où $w \in W_o$.

- Avec ces mêmes conditions, $w \in W$. En effet, w s'écrit dans ce cas comme :

$$w = |h|^2$$

où h est une fonction extérieure. En posant $h = |h|\, e^{i\phi}$ on a

$$w = h^2\, e^{-2i\phi}.$$

D'autre part comme h est extérieure, $h^{\pm 1}$ bornée, on a $h^{\pm 1} \in H^\infty$.
Donc

$$e^{-2i\phi} = h^{-2}\, w$$

est le produit d'une fonction de H^∞ et d'une fonction de $C(T)$, donc élément de $\mathfrak{A}$. Cela implique que $w \in W$.

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème qui donne la solution du quatrième problème, nous allons établir quelques lemmes préliminaires

Lemme 2 :

$\inf \|1 - \chi^{1-n} A\, e^{i\phi}\|_\infty \longrightarrow 0$ pour $n \to \infty$, si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n et $A \in H^\infty$ tels que :

$$-\varepsilon < \operatorname{Log}|A| < \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon < \operatorname{Arg}(Ah^2\, \chi^{-n}) < \varepsilon \pmod{2\pi}$$

La démonstration est facile. Il suffit d'utiliser la même technique dans le lemme analogue du troisième problème.

Lemme 3 :

Toute fonction réelle continue sur le cercle peut être approchée uniformément par les fonctions du type

$$\text{Cte} + \operatorname{Arg} \chi^n \left[\prod_1^n \frac{1 - \alpha_j \chi}{\chi - \bar{\alpha}_j}\right]$$

où $\alpha, \ldots, \alpha_n$ sont des points dans le disque $\{|z|<1\}$ et n est variable.

Il revient au même de prouver que toute fonction réelle continue de valeur moyenne nulle est approchée par des fonctions du type :

$$\operatorname{Arg} \chi^n \left[\prod_1^n \frac{1 - \alpha_j \chi}{\chi - \bar{\alpha}_j}\right]$$

ce qui s'écrit encore

$$\operatorname{Arg} \prod_1^n \frac{1 - \alpha_j \chi}{1 - \bar{\alpha}_j \bar{\chi}} = 2 \operatorname{Arg} \prod_1^n (1 - \alpha_j \chi) = 2 \operatorname{Arg} \prod_1^n (1 - \alpha_j z) \qquad (z = \chi) .$$

Ces produits sont des polynômes en z dont les zéros $\frac{1}{\alpha_j}$ se trouvent à l'extérieur du cercle unité et où $P(0) = 1$. Inversement chacun de ces polynômes s'obtient de cette manière.

Soit f polynôme trigonométrique réel tel que $\int f \, d\sigma = 0$; $f + i\tilde{f}$ est un polynôme analytique et on a :

$$e^{i(f+i\tilde{f})} = \sum_0^\infty \frac{(if-\tilde{f})^n}{n!} .$$

Chaque somme partielle P_N de cette série est un polynôme analytique, et nous avons

$$P_N(0) = 1 ,$$

$$P_N \longrightarrow e^{i(f+i\tilde{f})} \text{ uniformément pour } |r|\leq 1 .$$

Donc $P_N(r) \neq 0$ pour tout r, $|r|\leq 1$, à partir d'un certain N, et les P_N sont bien des polynômes du type considéré plus haut.

De plus

$$2 \operatorname{Arg} P_N \longrightarrow 2f \pmod{2\pi} .$$

Comme f était polynôme trigonométrique arbitraire à valeur moyenne égale à 0, le lemme se trouve démontré.

Nous avons vu que w continue et vérifiant $w \geq \varepsilon > 0$ appartient à W_o et à W. Mais généralement on a

<u>Lemme 4</u> :

$$W_o \subset W .$$

Soit w dans W_o. Ecrivons $w = |h|^2 = |e^g|^2$ où h est extérieure de H^2, $g = \frac{1}{2}(\operatorname{Log} w + i \widetilde{\operatorname{Log} w})$. On pose $h = |h| e^{i\phi}$; alors

$$2\phi = \widetilde{\operatorname{Log} w} .$$

Pour ε donné, soit

$$\operatorname{Log} w = r + \tilde{s} + t$$

où $\|r\|_\infty < \varepsilon$, $\|s\|_\infty < \varepsilon$, t un P.T. Cette relation implique

$$2\phi = \tilde{r} + s + t_1$$

où encore $\|r\|_\infty < \varepsilon$, $\|s\|_\infty < \varepsilon$, t_1 un P.T. (conjugué de t à une constante près).

Approchons t_1 par une fonction de la forme

$$\operatorname{Arg} B = \mathrm{Cte} + \operatorname{Arg} \chi^n \prod_1^n \frac{1 - \alpha_j \chi}{\chi - \bar{\alpha}_j} \qquad (|\alpha_j| < 1).$$

En assimilant $t_1 - B$ à s on doit supposer que

$$2\phi = \tilde{r} + s + \operatorname{Arg} B$$

où toujours $\|r\|_\infty < \varepsilon$, $\|s\|_\infty < \varepsilon$. Posons $A = e^{r+i\tilde{r}}$, $f = e^{-\tilde{s}+is}$. Alors

$$\operatorname{Arg} h^2 = \operatorname{Arg}(A\, f\, B) ;$$

$$|\operatorname{Arg}(h^2 A^{-1} B^{-1})| < \varepsilon \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) .$$

Comme $A^{-1} \in H^\infty$, $|\operatorname{Log}|A^{-1}|| < \varepsilon$, la condition du lemme 2 est vérifiée (sauf dans les notations), donc w est dans W.

<u>Théorème</u> :

W <u>est l'ensemble de toutes les fonctions</u> $w = |P|^2 w_o$ <u>où</u> P <u>est un polynôme et</u> w_o <u>appartient à</u> W_o.

Soit $w_o \subset W_o$ et P un P.T. Alors w_o est dans W d'après le lemme 4. Si encore $|P|^2$ est dans W, on saura que $|P|^2 w_o$ est dans W. En effet, d'après le lemme 1, la propriété d'appartenir à W pour une fonction-poids sommable est déterminée par l'appartenance d'un argument $e^{-2i\phi}$ à $\mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{Q}$ est une algèbre, le produit de deux fonctions de W sera dans W dès que ce produit est sommable.

Mais en effet $|P|^2$ est dans W ; il suffit de rappeler la définition de ρ_N pour voir que cette quantité est 0 à partir d'un certain N.

Donc chaque produit $|P|^2 w_o$ appartient à W ; reste à démontrer que chaque w de W est de cette forme.

D'après le lemme 2, pour $0<\varepsilon<\pi/2$ choisissons un entier n et une A dans H^∞, tels que

$$-\varepsilon < \mathrm{Log}|A| < \varepsilon \ , \ -\varepsilon < \mathrm{Arg}(Ah^2 \chi^{-n}) < \varepsilon \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

où, comme d'habitude, $w = |h^2|$ avec h extérieur et $h = |h|e^{i\phi}$. Soit u la fonction réelle, $\|u\|_\infty < \varepsilon$, telle que

$$u = \mathrm{Arg}(Ah^2 \chi^{-n}) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

et posons $f = e^{\tilde{u}-iu}$. Alors par définition la fonction

$$Q = A\,h^2\,f\,\chi^{-n}$$

sera à la frontière du cercle. De plus $\chi^n Q$ est dans $H^{1/2}$.

On sait qu'une telle fonction analytique admet un prolongement à travers la frontière dans le plan entier. Elle aura un pôle à l'infini du même ordre qu'à l'origine.
Donc Q est un polynôme

$$Q = \sum_{-n}^{n} a_k\, z^k$$

réel et positif à la frontière dont l'ordre ne dépasse pas n. Pour achever la démonstration nous avons à tirer les conséquences de ce fait.

Les deux termes de l'égalité

$$\chi^n\, Q = A\, h^2\, f$$

sont analytiques, et de plus $h^2(r)\, f(r) \neq 0$ pour $|r|<1$. Donc A n'a qu'un nombre fini de zéros à l'intérieur du cercle, qui sont les mêmes que les zéros d'un polynôme Q_1. En écrivant $A = Q_1\, A_1$ nous obtenons

$$\chi^n Q Q_1^{-1} = A_1 h^2 f .$$

Le polynôme à gauche est différent de 0 pour $|r|<1$; un tel polynôme est forcément extérieur. Il s'ensuit que A_1 est extérieur. Comme A_1^{-1} est borné pour $|r|=1$, on conclut que $A_1^{-1} \in H^\infty$. Enfin f^{-1} est analytique.

Donc

$$h^2 = A_1^{-1} f^{-1} (\chi^n Q Q_1^{-1})$$

est une représentation de h^2 comme produit de facteurs analytiques et extérieurs.

Rappelons que $Q(e^{ix}) \geqslant 0$, donc Q est le module carré d'un autre polynôme. Cela montre que la multiplicité de chaque zéro de Q de module 1 est pair, ce qui sera encore vrai pour le polynôme $Q Q_1^{-1}$. Posons $\chi^n Q Q_1^{-1} = P^2 P_1$, où P^2 contient les zéros de $Q Q_1^{-1}$ se trouv nt à la frontière du cercle, et P_1 ceux à l'extérieur :

$$h^2 = A_1^{-1} P_1 f^{-1} P^2 .$$

Cela implique que h^2/P^2 est dans H^1, ou que h/P est dans H^2 et est extérieur.

D'autre part si R est un polynôme qui s'annule à la frontière du cercle, et si on pose

$$h^2 P^{-2} R^{-2} = A_1^{-1} P_1 f^{-1} R^{-2} = k ,$$

alors k n'est plus sommable. En effet si $k \in L^1$, on aurait $R^{-2} = k A_1 P_1^{-1} f \in L^{1/2}$, donc $R^{-1} \in L^1$, ce qui est faux.

Définissons $w_o = |h^2 P^{-2}|$, $h_o = h P^{-1}$. En suivant tout l'argument avec w_o au lieu de w on arrive à un autre polynôme Q. Si Q avait des zéros à la frontière, on pourrait encore diviser h_o par un polynôme R qui s'annule à la frontière, ce qui n'est pas possible.

Le nouveau polynôme P sera donc une constante, $A_1 = A$, et

$$h_o^2 = A^{-1} P_1 f^{-1}$$

avec de nouvelles fonctions A, P_1, f. Mais cette relation donne

$$\operatorname{Log} w_o = \operatorname{Log}|A^{-1}| + \operatorname{Log}|f^{-1}| + \operatorname{Log}|P_1|$$

qui est une représentation du type qui définit W_o. Donc w_o est dans W_o, $w = |P|^2 w_o$, et le théorème se trouve démontré.