Faculté des Sciences d'Orsay

-:-:-:-:-

C3 Analyse Numérique

-:-:-:-:-

"Notions sur l'Approximation des fonctions"

-:-:-:-:-

R. Temam

Notes rédigées par MM.

C.M. Brauner

F. Lavainne

P. Penel

(Secrétariat de Mathématiques)

Faculté des Sciences d'Orsay

-:-:-:-:-

C3 Analyse Numérique

-:-:-:-:-

"Notions sur l'Approximation des fonctions"

-:-:-:-:-

R. Temam

Notes rédigées par MM.

C.M. Brauner

F. Lavainne

P. Penel

(Secrétariat de Mathématiques)

§0 - Introduction

De manière schématique, le problème type dans la théorie de l'approximation des fonctions est le suivant : "approcher" les éléments d'un espace fonctionnel H par les éléments d'un sous-ensemble donné X.

L'èxemple le plus usuel est celui où H est un espace de fonctions réelles continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, avec la norme de la convergence uniforme ou la norme de la convergence en moyenne d'ordre p, et X est l'ensemble $\mathcal{P}_k$ des fonctions polynomiales de degré $\leqslant k$, ou l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales. Parmi les autres exemples, citons le cas où H est l'espace des fonctions continues périodiques sur un intervalle, et X un sous-espace de fonctions trigonométriques ; ou aussi $H =$ un espace L^p, ou un espace de Sobolev (§3).

Supposons que H est un espace normé. On peut espérer, pour le problème considéré, deux types de solution

1) <u>On démontre que</u> X <u>est dense dans</u> H ;

Autrement dit tout élément de H peut être approché d'aussi près que l'on veut par des éléments de X.

Parmi les résultats les plus célèbres dans ce genre, on a le théorème de Weierstrass (approximation de fonctions continues par des polynômes) ou plus généralement le théorème de Stone-Weierstrass. De même certains théorèmes de convergence dans la théorie des séries de Fourier.

2) X <u>n'est pas dense dans</u> H .

Si $f \in H$, alors la distance de f à X

$$d(f,X) = \operatorname*{Inf}_{q \in X} \|f-q\|$$

est en général non nulle, et le problème intéressant est alors le suivant :

$$(0.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } p \in X , \text{ tel que} \\ \|f-p\| = d(f,X) \end{cases}$$

<u>Définition.- Dans les conditions qui précèdent, si</u> p <u>vérifie</u> (0.1), <u>on dit que</u> p <u>est un élément de meilleure approximation de</u> f <u>dans</u> X .

Le problème (0.1) est un problème de meilleure approximation, et c'est ce type de problèmes auquel nous allons nous intéresser dans la suite.

<u>Remarque</u>.- Suivant que X est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de H , on dit que le problème d'approximation considéré est linéaire ou non linéaire. Les méthodes sont assez différentes dans les deux cas.

§1 - Approximation dans un espace préhilbertien

1.0 Rappels

Définition.- Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle forme hermitienne sur E toute application φ de $E\times E$ dans K telle que

1°) $\forall y \in E \quad x \to \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur E

2°) $\forall x,y \in E$ on a $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$.

Définition.- On appelle espace préhilbertien un ensemble E muni de la structure définie par la donnée sur E d'une structure d'espace vectoriel par rapport à K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et d'une forme hermitienne positive (si $\varphi(x,x) \geqslant 0 \quad \forall x \in E$).

Il est bien connu que $\varphi(x,x)$ est alors une semi norme sur E. Si c'est une norme (i.e. $\varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$) on dit que l'espace préhilbertien est séparé.

Définition.- On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien séparé complet (pour la norme associée à φ).

1.1 Proposition.- Soient H un espace préhilbertien réel séparé et X un sous-ensemble convexe complet dans H. Alors $\forall f \in H \ \exists ! \ u \in X$ t.q. $\|f-u\| = d(f,X)$.

Démonstration :

Soient $\delta = d(f,X) = \inf\limits_{v\in X} \|f-v\|$ $\qquad B_n = B_{\text{fermée}}(f,\delta+\frac{1}{n})$

$C_n = X \cap B_n$ est fermé non vide

il vient : $\{u \in X \text{ t.q. } \|f-u\| = \delta\} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n$.

Déterminons le diamètre de C_n : $\delta(C_n) = \sup\limits_{v,w\in C_n} \|v-w\|$.

Si v et $w \in X$, alors $m = \frac{v+w}{2} \in C_n$ par convexité

$(2\,\|f-m\|)^2 + \|v-w\|^2 = 2[\|f-v\|^2 + \|f-w\|^2]$ d'après la règle du parallélogramme.

On a $\|f-v\| \leqslant \delta+\frac{1}{n}$ et $\|f-m\| \geqslant \delta$

d'où $\|v-w\|^2 \leqslant 4(\delta+\frac{1}{n})^2 - 4\,\delta^2$

$$\delta(C_n) \leqslant \left(\frac{8\delta}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Dans un espace métrique complet, une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 , a une intersection réduite à un point.

D'où l'existence et l'unicité de la m.a.

Remarque.- Cette proposition est valable sous des hypothèses plus générales sur l'espace H elle s'étend aux espaces de Banach uniformément convexes

* cf. plus loin le théorème 2.1.3.

1.2 Définition.- *Dans les conditions de la proposition* 1.1 *on dit que* u *est la projection de* f *sur* X *et l'application* $f \mapsto u$ *s'appelle le projecteur dans* H *sur* X (par analogie avec le cas où X est un sous-espace complet de H).

On note $$u = \mathrm{proj}_X f \ .$$

Remarquer que $\mathrm{proj}_X f = f$, $\forall f \in X$ et donc proj_X est une surjection sur X .

1.3 Proposition .- *Sous les hypothèses de la proposition* 1.1, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $u \in X$ *soit la projection de* f *est que*

$\langle u-v, f-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in X$.

<u>Démonstration</u> :

Soient $u = \text{proj}_X f$ $v \in X$ et $\theta \in [0,1]$ alors $\theta v+(1-\theta)u \in X$

$$\|f-u\|^2 \leqslant \|f-[\theta v+(1-\theta)u]\|^2 = \|f-u + \theta(u-v)\|^2$$

$$= \|f-u\|^2 + \theta^2 \|u-v\|^2 + 2\theta < f-u,u-v >$$

soit $2(f-u,u-v) + \theta\|u-v\|^2 \geqslant 0 \quad \forall\theta \in [0,1]$

faisons tendre θ vers 0, il vient $(f-u,u-v) \geqslant 0$.

Réciproquement soit $u \in X$ tel que $(u-v,f-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in X$.

On a $\|f-v\|^2 = \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2 + 2(f-u,u-v) + \|u-v\|^2$

$$\geqslant \|f-u\|^2$$

alors $\|f-v\| \geqslant \|f-u\| \quad \forall v \in X$ et par suite $u = \text{proj}_X f$ <u>c.q.f.d.</u>

<u>Cas particuliers de la proposition</u> 1.3

1.4 <u>Définition</u>.- On dit que $X \subset H$ est un cône (pointé) de sommet 0, s'il est stable par les homothéties de rapport > 0 $(\geqslant 0)$.

1.5 <u>Proposition</u>.- <u>Soit X un cône pointé convexe complet de sommet 0. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que u soit la projection de f sur X est que</u> $(u,f) = \|u\|^2$ <u>et</u> $(u,v) \geqslant (f,v) \quad \forall v \in X$.

<u>Démonstration</u> : u est caractérisée par $(u-v,f-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in X$

si $v = 0$ on a $(u,f-u) \geqslant 0$

si $v = 2u$ on a $-(u,f-u) \geqslant 0$

donc $(u,f-u) = 0$ et $(v,f-u) \leqslant 0$, $\forall v \in X$.

Inversement ces deux conditions s'écrivent $(u,f-u) = 0$

et $-(v,f-u) \geqslant 0$

d'où $(u-v,f-u) > 0 \quad v \in X$ c.q.f.d.

1.6 Exemple : Soit $H = \mathcal{C}[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Soit $X = \{\varphi \in \mathcal{C}[0,1] \ ; \ \varphi(x) = \text{cste} \geqslant 0 \text{ sur } [0,1]\}$.

C'est un cône pointé convexe complet de sommet 0.

Si $f \in H$, trouver la m.a. de f sur X c'est trouver la m.a. de f par une constante $\geqslant 0$. Soit u cette meilleure approximation.

$$u(x) \equiv \lambda \geqslant 0 \ ; \text{ si } v \in X \ , \ v(x) \quad \mu \geqslant 0$$

D'après la proposition 1.5

$$(u,f) = |u|^2 \Longrightarrow \int_0^1 \lambda f(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lambda^2 \, dx$$

$$\Longrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \int_0^1 f(x)dx \ .$$

. Si $\int_0^1 f(x)dx \leqslant 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ car λ doit être $\geqslant 0$

. Si $\int_0^1 f(x)dx \geqslant 0$, on utilise le fait que : $\langle v,f \rangle \leqslant \langle v,u \rangle$, $\forall v \in X$

i.e. $\int_0^1 \mu f(x)dx \leqslant \int_0^1 \lambda \mu \, dx = \lambda \mu \ , \forall \mu \geqslant 0 \Longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \leqslant \lambda$.

Donc $\int_0^1 f(x)dx \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Par conséquent la m.a. de $f \in \mathcal{C}[0,1]$ par une constante $\geqslant 0$ est : $\int_0^1 f(x)dx$ si $\int_0^1 f(x)dx \geqslant 0$; 0 sinon.

1.7 Proposition.- Soient Y un sous-espace complet de H et $X = \varphi + Y$ le translaté de Y par $\varphi \in H$.

Alors u est la projection de f sur X si et seulement si $u \in X$ et $f-u$ est orthogonal à Y.

En effet $\forall w \in Y$ si $u = \text{pro}_X f$ $u-w$ et $u+w \in X$ d'où $(w,f-u) = 0$ d'après la caractérisation 1.3 de u. Réciproquement supposons que pour $u \in X$ on ait $(w,f-u) = 0$ $\forall w \in Y$ on a alors $\forall v \in X$, $w = u-v \in Y$ d'où $(u-v,f-u) = 0$

c.q.f.d.

1.8 Applications

1.8.1 Détermination de la meilleure approximation

Soit $X = \varphi+Y$, où $\varphi \in H$ et Y est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie n.

X est isomorphe à Y et Y isomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc X est complet.

Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ une base de Y.

Soit $f \in H$, et soit u la m.a. de f dans X, $u = \varphi + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$.

Proposition.- Les λ_j sont solutions du système

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_i,e_j\rangle\lambda_j = \langle f-\varphi,e_i\rangle \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

qui est de Cramer.

Démonstration : D'après la proposition 1.6 :

$$u \text{ m.a. de } f \Longleftrightarrow u \in X \text{ et } (f-u)\perp Y$$

$$\Longleftrightarrow (f-u)\perp e_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{ou} \quad \langle (f-u),e_i\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \langle f - \varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j , e_i\rangle = 0 , \ 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle e_i,e_j\rangle\lambda_j = \langle f-\varphi,e_i\rangle \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

Ce système est de Cramer, car il existe une seule m.a.

Remarque.- Il est intéressant de prendre une base orthogonale.

Exemple : Prenons $H = \mathcal{C}[0,1]$ muni de la norme quadratique :

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)dx .$$

Soit Y l'espace des trinômes tels que $p(1) = 0$, $X = \varphi+Y$, avec $\varphi \equiv 1$ sur $[0,1]$.

Par conséquent : $p \in Y \Longleftrightarrow p(x) = ax^2+bx+c$ et $a+b+c = 0$;

donc $p(x) = a(x^2-1) + b(x-1)$.

Comme base de Y on choisit $e_1(x) = x^2-1$
$e_2(x) = x-1$,

et on cherche la meilleure approximation u de f dans $X = \varphi+Y$

$u(x) = \varphi(x)+p(x) = 1+a(x^2-1)+b(x-1)$. On a $\langle f-u,e_i\rangle = 0$ $i=1,2 \Longrightarrow$

$\langle f,e_i\rangle = \langle u,e_i\rangle$ $i=1,2$ ce qui donne le système (en a et b) :

$$\langle f,x-1\rangle = \langle 1+a(x^2-1)+b(x-1),x-1\rangle$$

$$\langle f,x^2-1\rangle = \langle 1+a(x^2-1)+b(x-1),x^2-1\rangle$$

1.8.2 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés a pour but de résoudre au mieux un système de m équations à n inconnues lorsque $m > n$ (et que les équations ne sont pas compatibles).

Soit $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\lambda_j = c_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$

ce système où les inconnues sont : $\lambda_j \quad 1 \leqslant j \leqslant n$.

On prend $H = \mathbb{R}^m$ avec le produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i\, g_i$$

Le système développé donne :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\,\lambda_1 & +\cdots\cdots+ & a_{1j}\,\lambda_j & +\cdots\cdots+ & a_{1n}\,\lambda_n & = & c_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}\,\lambda_1 & +\cdots\cdots+ & a_{ij}\,\lambda_j & +\cdots\cdots+ & a_{in}\,\lambda_n & = & c_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,\lambda_1 & +\cdots\cdots+ & a_{mj}\,\lambda_j & +\cdots\cdots+ & a_{mn}\,\lambda_n & = & c_m
\end{array}$$

avec m lignes et n colonnes.

Si on pose $\quad f = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$

$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ où f et $a_j \in \mathbb{R}^m = H$

le système devient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 +\cdots\cdots+ \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \lambda_j +\cdots\cdots+ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

ou : $a_1\,\lambda_1 +\cdots\cdots+ a_j\,\lambda_j +\cdots\cdots+ a_n\,\lambda_n = f$.

Prenons pour X l'espace engendré par $a_1, \ldots a_n$.

Si $f \notin X$ il n'existe pas de λ_j tels que $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, a_j$.

* Une des solutions du problème consiste à chercher les λ_j tels que $\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j\,\lambda_j \|$ soit minimum. Cela revient à chercher $u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, a_j$, meilleure approximation de $f \in H$, dans X . On a donc à résoudre :

$\langle f - \sum_{j=1}^{n} a_j\,\lambda_j \,,\, a_i \rangle = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ou $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle a_j, a_i \rangle = \langle f, a_i \rangle$

avec $\langle a_j, a_i \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, a_{ki}$ et $\langle f, a_i \rangle = \sum_{k=1}^{m} c_k\, a_{ki}$.

* <u>Autres solutions</u> :

- On peut prendre un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$: $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, f_k\, g_k$,

$\alpha_k > 0$; ceci revient à pondérer différemment les équations.

- On peut prendre une norme non hilbertienne sur $\mathbb{R}^m$ (par exemple $\|f\| = \max_k |f_k|$) ; mais cela n'entre plus dans le cadre précédent.

Exemple :

La situation précédente se rencontre chaque fois qu'il s'agit d'exploiter des résultats numériques redondants : par exemple quelle valeur attribuer aux angles d'un triangle si leur mesure donne (en d°) 31, 61, 91. Si λ_1 et λ_2 sont les deux premiers angles on a le système (inconsistant)

$$\lambda_1 = 31$$

$$\lambda_2 = 61$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = 180-91 = 89 .$$

1.9 Approximation des fonctions continues

1.9.1 Polynômes orthogonaux

Soient I un intervalle fermé, borné ou non de R et μ une fonction de $L^1(I)$, strictement positive presque partout sur I.

Nous appellerons cette fonction μ, un poids sur I. Soit H, l'espace $\mathscr{C}(I)$ des fonctions continues sur I, muni du produit scalaire :
$(f,g)_\mu = \int_I f(x)g(x)\mu(x)dx$. Vérifions que la fonction
$(f,g)_\mu = \int_I f(x)g(x)\mu(x)dx$ est bien un produit scalaire sur $\mathscr{C}(I)$.
Il est facile de voir que c'est une forme hermitienne positive. De plus comme $\mu > 0$, presque partout sur I ; $(f,f)_\mu = \int_I f^2(x)\mu(x)dx = 0$ entraîne $f \equiv 0$

sur I . Nous noterons $\mathscr{C}_\mu(I)$, cet espace H .

Soit $X = \mathscr{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. X est un sous-espace de dimension finie $(= n+1)$ de H , il est donc convexe et complet. On a déjà vu que toute fonction de H , admet alors un élément de meilleure approximation unique dans X , qui est ici un polynôme de degré $\leqslant n$.

Soit $e_o, e_1, \ldots, e_n$ une base de $X = \mathscr{P}_n$. On peut prendre par exemple les vecteurs e_j : $e_j(x) = x^j$. La meilleure approximation d'une fonction f de H dans X s'écrit donc $u = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j$, où

$$f-u \perp X \Longleftrightarrow (f-u, e_j)_\mu = 0 \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

$$\Longleftrightarrow (f, e_j)_\mu = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (e_i, e_j)_\mu \ , \ 0 \leqslant j \leqslant n \ .$$

On a

$$(e_i, e_j)_\mu = \int_I e_i(x) e_j(x) \mu(x) dx \ .$$

$$(f, e_j)_\mu = \int_I f(x) e_j(x) \mu(x) dx \ .$$

On obtient ainsi un système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues : $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Pour le résoudre, il est plus simple de le diagonaliser ce qui revient à choisir comme base de X , une base orthogonale : ce sont les polynômes orthogonaux.

On va rappeler le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt dans le cas général.

* Si H est un espace préhilbertien, et $(e_o, e_1, \ldots e_n \ldots)$ une suite finie ou infinie, de vecteurs linéairement indépendants de H ; pour tout n, soit L_n le sous-espace de H engendré par $e_o, e_1, \ldots, e_n$.

Si on pose $p_o = e_o$

$$p_{n+1} = e_{n+1} - \text{Projection sur } L_n \text{ de } e_{n+1}$$

la suite (p_n) est un système orthogonal, et pour tout n, les vecteurs $p_o, p_1, \ldots, p_n$ engendrent L_n.

- Cela se démontre par récurrence. Supposons démontré que $(p_o, p_1, \ldots, p_n)$ est un système orthogonal qui engendre L_n.

Alors : $p_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} (e_{n+1}, p_i) \dfrac{p_i}{\|p_i\|^2}$

donc $(p_{n+1}, p_i) = (e_{n+1}, p_i) - (e_{n+1}, p_i) \dfrac{\|p_i\|^2}{\|p_i\|^2} = 0$ pour $i \leqslant n$

p_{n+1} est bien orthogonal à $p_o, p_1, \ldots, p_n$.

De plus, comme $e_{n+1} = p_{n+1} +$ (un vecteur de L_n) le système $(p_o, p_1, \ldots, p_{n+1})$ engendre le même espace que $(e_o, e_1, \ldots, e_{n+1})$, c'est donc une base orthogonale. (Remarque : on peut aussi orthonormer cette base).

- La meilleure approximation de $f \in H$ dans $X = \mathcal{P}_n$ s'écrit donc

$$u = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, p_j$$

$$((f-u), p_i)_\mu = 0 \;, \forall i \Longleftrightarrow (f, p_i)_\mu = \lambda_i \, \|p_i\|_\mu^2$$

$$\text{et} \quad u = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f, p_j)_\mu}{\|p_j\|_\mu^2} \, p_j$$

- Les polynômes $p_o, p_1, \ldots, p_n$ obtenus par ce procédé, avec le produit scalaire défini au début s'appellent les polynômes orthogonaux associés au poids μ sur I.

<u>Remarques</u> : - On a : degré $p_j = j$, $\forall j$.

- Si on utilise la base $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, les polynômes ainsi obtenus ont un coefficient de tête égal à 1 . Les polynômes orthogonaux usuellement considérés sont ceux qui précèdent, à un coefficient multiplicatif près. Le choix de ce coefficient est lié au type de polynôme considéré.

1.9.2 - <u>Exemples classiques</u> :

1°) Si $I = [-1,+1]$ et $\mu(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ avec α et $\beta > -1$ (en sorte que $\mu \in L^1(I)$) , les polynômes p_n correspondants s'appellent : polynômes de Jacobi

* Pour $\alpha = \beta = 0$, donc $\mu(x) \equiv 1$, ce sont les polynômes de Legendre

* Pour $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, donc $\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce sont les polynômes de Tchebycheff de 1ère espèce

* Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, donc $\mu(x) = \sqrt{1-x^2}$, ce sont les polynômes de Tchebycheff de 2ème espèce.

2°) Si $I =]-\infty,+\infty[$ et $\mu(x) = e^{-x^2}$,

les polynômes p_n s'appellent polynômes d'Hermite.

3°) Si $I = [0,+\infty[$ et $\mu(x) = e^{-x}$,

les polynômes p_n s'appellent polynômes de Laguerre.

1.9.3 - <u>Proposition</u> : <u>Lorsque l'intervalle</u> I <u>est compact, les polynômes</u> $p_0, p_1, \ldots p_n, \ldots$, <u>orthogonaux associés au poids</u> μ <u>sur</u> I <u>forment une suite orthogonale et totale dans</u> $\mathcal{C}_\mu(I)$. <u>Toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}_\mu(I)$ <u>admet un déve-</u>

<u>loppement convergent dans</u> $\mathcal{C}_\mu(I)$: $f = \sum_{i=0}^{+\infty} (f,p_i)_\mu \frac{p_i}{\|p_i\|_\mu^2}$ <u>et on a</u>
$\|f\|_\mu^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(f,p_i)_\mu^2}{\|p_i\|_\mu^2}$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction $f \in \mathcal{C}_\mu(I)$ est limite uniforme de polynômes donc de combinaisons linéaires des p_n . Or

$$\|f\|_\mu^2 = \int_I |f(x)|^2\mu(x)dx \leqslant \|f\|^2 \int_I \mu(x)dx \quad \text{où} \quad \|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cette inégalité montre que la convergence uniforme entraîne la convergence pour la norme de $\mathcal{C}_\mu(I)$. La famille des p_n est donc totale dans $\mathcal{C}_\mu(I)$. Comme d'autre part elle est orthogonale, c'est une base orthogonale de $\mathcal{C}_\mu(I)$.

On a
$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} (f,p_i)_\mu \frac{p_i}{\|p_i\|_\mu^2}$$

Et la relation de Parseval donne :
$$\|f\|_\mu^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(f,p_i)_\mu^2}{\|p_i\|_\mu^2}$$

<u>Remarques</u> : - Rappelons qu'on appelle base orthogonale (orthonormale) d'un espace préhilbertien H , une famille orthogonale (orthonormale) et totale dans H .

- Une base orthogonale d'un espace préhilbertien H n'est pas une base algébrique de H , sauf dans le cas où H est de dimension finie.

- Tout espace préhilbertien séparé ne possède pas nécessairement de base orthonormale, mais tout espace de Hilbert admet une base orthonormale.

- La proposition précédente s'applique aussi à $L^2(I,\mu(x)dx)$ car $\mathcal{C}_\mu(I)$ est dense dans $L^2(I,\mu(x)dx)$ [$L^2(I,\mu(x)dx)$ est l'espace des fonctions f définies sur I , de carré μ-intégrable donc telles que $\int_I f^2(x)\mu(x)dx < +\infty$] .

1.9.4 Propriétés générales des suites de polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux p_n associés à un poids μ sur I possèdent certaines propriétés indépendantes du poids μ .

Proposition : Les n racines du polynôme p_n sont réelles distinctes et intérieures à I .

Démonstration : Remarquons d'abord que p_n est orthogonal à $p_i \ \forall i=0,1,\dots,n-1$ et donc à toutes les combinaisons linéaires de $p_o,\dots,p_{n-1}$ c'est-à-dire à tous les polynômes de degré $< n$. Soient $t_1,t_2,\dots,t_m$ (où $t_i < t_{i+1}$) les racines de p_n , réelles, intérieures à I , de multiplicité impaire (donc en lesquelles p_n change de signe). On a évidemment $m \leqslant n$.

Soit $Q(x) = (x-t_1)\dots(x-t_m)$.

Le polynôme $p_n(x)Q(x)$ a un signe constant sur I et ne s'annulle qu'en n points au plus. Par conséquent $\int_I p_n(x)Q(x)\mu(x)dx \neq 0$.

D'où : degré $Q = m \geqslant n$ (sinon $(Q, p_n)_\mu = 0$).

Par conséquent $m = n$ c.q.f.d.

Proposition : Il existe trois suites de nombres réels a_n , b_n et c_n tels que pour $n \geqslant 2$ on ait :

(1) $$p_n(x) = (a_n x+b_n)p_{n-1}(x) - c_n\, p_{n-2}(x)$$

De plus si $p_n(x) = k_n\, x^n + s_n\, x^{n-1} + \dots$

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n-1}} \ ; \ b_n = a_n\left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right) \ ; \ c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|^2_\mu}{\|p_{n-2}\|^2_\mu}$$

ou encore :

$$x\, p_{n-1}(x) = \frac{k_{n-1}}{k_n}\, p_n(x) - \left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right) p_{n-1}(x) + \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|_\mu^2}{\|p_{n-2}\|_\mu^2}\, p_{n-2}(x) .$$

Démonstration :

Le polynôme $x\, p_{n-1}(x)$ est de degré n , il s'écrit donc :

$$\sum_{j=0}^{n} \rho_j\, p_j(x)$$

Pour $i \leqslant n$ on a : $(x\, p_{n-1}, p_i)_\mu = \rho_i \|p_i\|_\mu^2$.

De plus : $(x\, p_{n-1}, p_i)_\mu = \int_I x\, p_{n-1}(x) p_i(x) \mu(x) dx = (p_{n-1}, x\, p_i)_\mu$

$x\, p_i$ est un polynôme de degré $i+1$.

Par conséquent pour $i+1 < n-1$ ou $i < n-2$ on a : $(p_{n-1}, x\, p_i)_\mu = 0$

et $\rho_i = 0$ pour $i \neq n$, $n-1$, $n-2$ et on a la relation de récurrence (1).

Dans (1), on exhibe les coefficients du terme

- de degré n : $k_n = a_n\, k_{n-1} \Longrightarrow a_n = \dfrac{k_n}{k_{n-1}}$
- de degré $n-1$: $s_n = s_{n-1}\, a_n + b_n\, k_{n-1}$

$$b_n = \frac{s_n}{k_{n-1}} - s_{n-1} \frac{k_n}{k_{n-1}^2} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right)$$

$$b_n = a_n \left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right)$$

On a : $a_n\, x\, p_{n-1}(x) = p_n(x) - b_n\, p_{n-1}(x) + c_n\, p_{n-2}(x)$

$(a_n\, x\, p_{n-1}, p_n)_\mu = \|p_n\|_\mu^2 = (p_{n-1}, a_n\, x\, p_n)_\mu$. Par conséquent :

$(p_{n-2}, a_{n-1}\, x\, p_{n-1})_\mu = \|p_{n-1}\|_\mu^2$

et : $(a_n\, x\, p_{n-1}, p_{n-2})_\mu = c_n \|p_{n-2}\|_\mu^2 = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \|p_{n-1}\|_\mu^2$

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|_\mu^2}{\|p_{n-2}\|_\mu^2} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> $p_n^* = \frac{p_n}{k_n}$ <u>le polynôme orthogonal dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Quel que soit le polynôme</u> P <u>de degré</u> n , <u>dont le coefficient de</u> x^n <u>est</u> 1 , <u>on a</u> :

$$\|p_n^*\|_\mu \leqslant \|p\|_\mu$$

<u>Démonstration</u> : $p_n^* - p$ est de degré $n-1$ donc : $(p_n^*, p_n^* - p)_\mu = 0$ et

$\|p_n^*\|_\mu^2 = (p_n^*, p)_\mu \leqslant \|p_n^*\|_\mu \|p\|_\mu$ et $\|p_n^*\|_\mu \leqslant \|p\|_\mu$ c.q.f.d.

* <u>Polynômes de Tchebycheff</u> (<u>1ère espèce</u>)

L'intervalle I est $[-1,1]$, le poids : $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Les polynômes orthogonaux sont de la forme :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$$

Montrons qu'ils forment bien un système orthogonal :

Pour cela on fait le changement de variable : $x = \cos\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$(T_m, T_n)_\mu = \int_{-1}^{+1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta$$

. Si $m \neq n$ $\quad (T_m, T_n)_\mu = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta = 0$

. Si $m = n \neq 0$ $\quad (T_n, T_n)_\mu = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos 2n\theta + 1] d\theta = \frac{\pi}{2}$

. Si $m = n = 0$ $\quad (T_o, T_o)_\mu = \int_0^\pi d\theta = \pi$.

C'est bien un système orthogonal.

<u>Propriétés</u> :

1) On a la relation de récurrence :

$$2x\, T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$$

qui découle de la relation trigonométrique :

$$2\cos\theta\cos n\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$$

Comme $T_o(x) = 1$, $T_1(x) = x$; la relation prouve que T_n est un polynôme de degré n .

2) Les n racines de $T_n(x)$ sont : $x = n_k = \cos\frac{(2k+1)}{2n}\pi$

$$k = 0,1,\ldots,n-1$$

en effet $\cos n\theta = 0 \Longrightarrow n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} = n \text{ Arc}\cos x$ avec : $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

3) $(1-x^2)T_n'(x) = n\,T_{n-1}(x) - nx\,T_n(x)$.

En effet d'après la relation de récurrence (propriété 1)

$$n\,T_{n-1}(x) - nx\,T_n(x) = nx\,T_n(x) - n\,T_{n+1}(x)$$

$$= n[\cos\theta\cos n\theta - \cos(n+1)\theta]$$

$$= n\sin n\theta\sin\theta$$

$$= \sin^2\theta\,T_n'(x) = (1-x^2)\,T_n'(x)$$

car $T_n'(x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\text{ Arc}\cos x) = \frac{-n}{\sin\theta}\sin n\theta$.

4) $(1-x^2)T_n''(x)-x\,T_n'(x)+n^2\,T_n(x) = 0$ s'obtient en dérivant l'expression précédente.

5) $2\,T_n(x)T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)$ $(n \geqslant m)$ découle de :

$$2\cos n\theta\cos m\theta = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta$$

6) $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$

car $T_n(T_m(x)) = \cos(n\text{ Arc}\cos[\cos m(\text{Arc}\cos x)])$

$$= \cos(n\,m\text{ Arc}\cos x) = T_{mn}(x).$$

Les premiers polynômes de Tchebycheff sont :

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2-1$

$T_3(x) = 4x^3-3x$

$T_4(x) = 8x^4-8x^2+1$

$T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x$

$T_6(x) = 32x^6-48x^4+18x^2-1$

$T_7(x) = 64x^7-112x^5+ 56x^3-7x$

* Polynômes de Legendre

L'intervalle est $I = [-1,1]$ et le poids $\mu(x) \equiv 1$.

Les polynômes orthogonaux sont :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\ n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

On pose $$Q_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{2^n\ n!}\ ,\ L_n = Q_n^{(n)}$$

et on vérifie que le système est orthogonal :

$$(L_n,L_m)_\mu = \int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(x)\ Q_m^{(m)}(x)dx = \left[Q_n^{(n-1)}(x)Q_m^{(m)}(x)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} Q_n^{(n-1)}(x)Q_m^{(m+1)}(x)dx$$

Avec n intégrations par parties on obtient :

$$(L_n,L_m)_\mu = (-1)^n \int_{-1}^{+1} Q_n(x)\ Q_m^{(m+n)}(x)dx$$

car $Q_n(\pm 1) = 0$, $Q_n'(\pm 1) = 0$,...., $Q_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$.

. Si $n > m$ $Q_m^{(m+n)} \equiv 0$ et $(L_n,L_m)_\mu = 0$

. Si $n = m$ $(L_n, L_m)_\mu = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{(x^2-1)^n}{(2^n\, n!)^2}\,(2n)!\; dx = \frac{2}{2n+1}$

<u>Propriétés</u> : Comme pour les polynômes de Tchebycheff on a :

1) Relation de récurrence

$(n+1)\, L_{n+1}(x) - (2n+1)x\, L_n(x) + n\, L_{n-1}(x) = 0$

avec $L_o(x) \equiv 1$ et $L_1(x) = x$

2) $(x^2-1)\, L'_n(x) = nx\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x) = (n+1)\, L_{n+1}(x) - (n+1)x\, L_n(x)$

3) $(1-x^2)\, L''_n(x) - 2x\, L'_n(x) + n\,(n+1)\, L_n(x) = 0$

4) $|L_n(x)| \leqslant 1 \quad \forall x \in [-1,1]$.

<u>Note</u> : Pour d'autres exemples de polynômes orthogonaux, voir : SZEGÖ [5] .

§2 - <u>Approximation dans un espace normé</u> H

On étudiera essentiellement le problème d'approximation uniforme des fonctions continues sur un espace topologique compact K . On établira un théorème de caractérisation dû à Kolmogorov, puis des considérations sur la convexité et des hypothèses plus restrictives quant au sous-espace X amèneront la démonstration du théorème de Tchebycheff. On notera l'importance des propositions 2.4.7 et 2.4.11.

2.1 <u>Existence et Unicité de la m.a.</u>

2.1.1 <u>Soit</u> H <u>un espace normé et soit</u> X <u>un sous-espace de dimension finie de</u> H . <u>Tout</u> f <u>de</u> H <u>possède au moins un élément de m.a. dans</u> X <u>et l'ensemble</u> X_f <u>des éléments de m.a. de</u> f <u>est une partie convexe fermée de</u> X .

<u>Démonstration</u> :

Soit $\alpha = \|f\|$.

On pose $\bar{B}_\alpha(f)$ = boule fermée de centre f , de rayon α

$$Y = X \cap \bar{B}_\alpha(f)$$

on a $d(f,Y) = d(f,X)$ donc un élément de m.a. de f dans X est m.a. de f dans Y (et réciproquement).

Y partie fermée bornée d'un espace normé de dimension finie est compacte. La fonction $v \to \|f-v\|$ y atteint son minimum.

Il existe donc $u \in Y$ t.q. $\|f-u\| = \underset{Y}{\operatorname{Inf}} \|f-v\| = \underset{X}{\operatorname{Inf}} \|f-v\|$.

Soit $X_f = \{u \in X \text{ t.q. } \|f-u\| = d(f,X)\}$.

X_f est fermé : il est clair que X_f est la préimage de $\{d(f,X)\}$ par une fonction continue.

Soit $u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$, u_1 et $u_2 \in X_f$, $\lambda \in [0,1]$; on a $u \in X$

et $$\|f-u\| \leqslant \lambda \|f-u_1\| + (1-\lambda) \|f-u_2\| = d(f,X)$$

donc $\|f-u\| = d(f,X)$ et par suite X_f est convexe.

<u>Remarque</u> : La proposition précédente est tout aussi vraie mais avec une démonstration différente si X est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Banach reflexif, c'est-à-dire pour lequel $H = H''$ où H'' est le bidual de H .

<u>Remarque</u> : Il n'y a pas en général unicité dans 2.1.1. En effet soit $H = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit X l'espace

des fonctions $v(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On n'a pas unicité de la meilleure approximation de $f \in H$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $\lambda \in [0,2]$ et $v(x)$ est alors m.a. de $f(x) \equiv 1$.

2.1.2 Cas d'unicité :

Définition : Un espace normé H est dit strictement convexe si $\forall f$ et $g \in H$ $\|f\| = 1$ $\|g\| = 1$ et $\forall \lambda \in]0\ 1[$ $\|\lambda f+(1-\lambda)g\| < 1$ (ou encore : si la sphère unité de H ne contient pas de segment ouvert).

Proposition : Si H est strictement convexe, X_f est réduit à un point $\forall f \in H$

Démonstration immédiate par l'absurde : soient $u_1 \neq u_2$ dans X_f

$$\tfrac{1}{2}(u_1+u_2) \in X_f \quad \text{et} \quad \left\| f - \frac{u_1+u_2}{2} \right\| < \tfrac{1}{2}\|f-u_1\| + \tfrac{1}{2}\|f-u_2\| < d(f,X)$$

d'où la contradiction.

Exemples : 1) Un espace préhilbertien séparé est strictement convexe.

2) Les espaces L^p $(1 < p < \infty)$ sont strictement convexes.

(Pour le vérifier il suffit de connaître les cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski).

3) Les espaces L^1 , L^∞ , $\mathcal{C}(I)$ (norme de la convergence uniforme) ne sont pas strictement convexes.

Les résultats précédents donnent donc : H étant un espace normé strictement convexe et X un sous-espace de dimension finie, toute fonction f de H possède un élément de m.a. dans X et un seul.

Soient H un espace normé et $\varepsilon > 0$.

On pose $\delta(\varepsilon) = \underset{(x,y)\in U_\varepsilon}{\text{Sup}} \|x-y\|$ avec $U_\varepsilon = \{(x,y)$ t.q. x et $y \in H$ $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|\frac{x+y}{2}\| \geqslant 1-\varepsilon\}$

<u>Définition</u> : <u>On dit que</u> H <u>est uniformément convexe si</u> $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon) = 0$.

<u>Lemme : Tout espace vectoriel normé uniformément convexe est strictement convexe</u>

<u>Démonstration</u> : Soient x et y dans cet espace t.q. $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$.

La définition de la convexité uniforme entraîne $\|x-y\| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ et par suite $x = y$. On conclut à la stricte convexité (i.e. il n'existe pas de segment sur la boule unité).

2.1.3 <u>Théorème</u> : <u>Soit</u> A <u>un sous-espace fermé convexe d'un espace de Banach</u> B <u>uniformément convexe. Alors pour toute</u> f <u>de</u> B <u>il existe un élément de m.a. unique dans</u> A .

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in B$ et $D_f = \inf\limits_{u\in A} \|f-u\|$.

On peut toujours se ramener au problème de la m.a. de 0 dans A . Si $D_f \neq 0$ par l'application $u \to \frac{u}{D}$, on peut supposer $D_f = 1$ (dans le cas contraire on a nécessairement $f \in A$).

L'uniforme convexité de B s'écrit $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$ t.q. pour $\|x\| = \|y\| = 1$ on ait
$$\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\eta \Longrightarrow \|x-y\| < \varepsilon .$$

Soit $u_n \in A$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 1$.

On a $\forall n \geqslant N(\eta)$ $\|u_n\| - 1 < \eta$.

Soient n et $m \geqslant N(\eta)$

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}+\frac{u_m}{\|u_m\|}\right\| = \frac{1}{2}\left\|u_n+u_m-(1-\frac{1}{\|u_n\|})u_n-(1-\frac{1}{\|u_m\|})u_m\right\|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|u_n+u_m\| - \frac{1}{2}(\|u_n\|-1) - \frac{1}{2}(\|u_m\|-1) > D_o-\eta = 1-\eta \ .$$

Alors $\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}-\frac{u_m}{\|u_m\|}\right\| < \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$. Cette suite de Cauchy converge donc dans B vers u . Il vient $\|u_n-u\| = \|u_n(1-\frac{1}{\|u_n\|}) + \frac{u_n}{\|u_n\|} - u\|$

$$\leqslant \|u_n\|-1 + \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|} - u\right\|$$

d'où $u_n \to u$ dans A et $\|u\| = 1$.

Vu que $D_o = 1$ u est m.a. de $f \equiv 0$ dans A .

L'unicité résulte du lemme précédent et de la proposition 2.1.2.

2.2 Approximation uniforme des fonctions continues

Soient $H = \mathscr{C}(K)$ où K est un espace topologique compact.

Soient $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ linéairement indépendants dans H et X l'espace engendré par $\varphi_1 \ldots \varphi_n$.

Soit $f \in H$, on sait qu'il existe un élément de m.a. dans X soit le polynôme $P = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \varphi_i$.

On notera K_o l'ensemble des $x \in K$ t.q. $\|f-P\| = |f(x)-P(x)|$.

2.2.1 Caractérisation de la m.a. Th. de Kolmogorov

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit polynôme de m.a. de f dans X est que</u>

$$\forall Q \in X , \sup_{x\in K_o} (f(x)-P(x)) > Q(x) \geqslant 0$$

<u>Démonstration</u> : (i) Montrons que si la condition est satisfaite alors P est p.m.a. de f.

K_0 est fermé dans K donc compact. Alors il existe $x_0 \in K_0$ tel que

$$(f(x_0)-P(x_0))Q(x_0) = \sup_{K_0} (f(x)-P(x))Q(x) \geqslant 0 .$$

Soit $P_1 \in X$ et $P-P_1 = Q$

$$\|f-P_1\|^2 \geqslant |f(x_0)-P_1(x_0)|^2 = |f(x_0)-P(x_0)|^2 + |Q(x_0)|^2 + 2(f(x_0)-P(x_0))Q(x_0) .$$

Alors $$\|f-P_1\|^2 \geqslant |f(x_0)-P(x_0)|^2 = \|f-P\|^2$$

et P est p.m.a. de f dans X.

(ii) Si la condition n'est pas satisfaite alors P n'est pas p.m.a. de f.

Supposons qu'il existe $Q \in X$ t.q. $\sup_{K_0} (f(x)-P(x))Q(x) < 0$ soit $= -2\delta$.

Alors $J = \{x \in K \text{ t.q. } (f(x)-P(x))Q(x) < -\delta\}$ est un ouvert contenant K_0.

Soient $\lambda > 0$ arbitrairement petit et $P_1 = P-\lambda Q$. On va établir que P_1 est meilleure approximation que P.

Soit x dans J, $|f(x)-P_1(x)|^2 = |f(x)-P(x)|^2 + \lambda^2 |Q(x)|^2 + 2\lambda\, Q(x)(f(x)-P(x))$

$$< \|f-P\|^2 - 2\lambda\delta + \lambda^2 \|Q\|^2$$

$$< \|f-P\|^2 - \delta\lambda \quad \text{si} \quad \lambda \leqslant \frac{\delta}{\|Q\|^2}$$

Soit x dans $K-J$, $\sup|f(x)-P(x)|$ est atteint sur $K-J$ soit en x_1.

J contenant K_0, on a $|f(x_1)-P(x_1)| < \|f-P\|$

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad |f(x_1)-P(x_1)| \leqslant \|f-P\| - \delta_1$$

$$|f(x)-P_1(x)| \leqslant |f(x)-P(x)| + \lambda\,|Q(x)|$$

$$\leqslant \|f-P\| - \delta_1 + \lambda\,\|Q\| \leqslant \|f-P\| - \tfrac{1}{2}\delta_1 \quad \text{si} \quad \lambda \leqslant \frac{\delta_1}{2\|Q\|}$$

Ainsi si $\lambda \leqslant \text{Min}\left(\dfrac{\delta}{\|Q\|^2}, \dfrac{\delta_1}{2\|Q\|}\right)$

$$\sup_K |f(x)-P_1(x)| = \|f-P_1\| < \|f-P\| \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Note : Dans le cas de fonctions à valeurs complexes la condition caractéristique s'écrit $\sup_{K_0} \Re e[(f(x)-P(x))\overline{Q(x)}] \geqslant 0 \ \forall Q \in X$.

On utilise pour cela l'égalité $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\Re e(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2 \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

2.3 Utilisation de la convexité

2.3.1 Définition : Soit A une partie d'un espace vectoriel réel ou complexe. On appelle enveloppe convexe de A notée A_c l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent A . C'est aussi le plus petit ensemble convexe contenant A (car toute intersection de convexes est convexe).

2.3.2 Lemme : A_c est identique à l'ensemble $\tilde{A}$ des combinaisons linéaires $\sum_i^p \lambda_i \xi_i$ où $\xi_i \in A$ $\lambda_i \geqslant 0$ $\sum_i^p \lambda_i = 1$.

En effet A_c est le plus petit ensemble convexe contenant A et par suite contient toute combinaison linéaire de ce type, soit $A_c \supset \tilde{A}$. Inversement $\tilde{A}$ est évidemment convexe donc $\tilde{A} \supset A_c$. Alors $A_c = \tilde{A}$.

2.3.3 Lemme : Dans un espace vectoriel réel de dimension finie n , on a
$A_c = \{\sum_i^p \lambda_i \xi_i$ où $\xi_i \in A$ $\lambda_i > 0$ $\sum_i^p \lambda_i = 1$ et $p \leqslant n+1\}$.

Démonstration : Soit $\xi \in A_c$ fixé

Soit r le plus petit entier tel que $\xi = \sum_i^r \lambda_i \xi_i$.

Si $r > n+1$ $\xi_2-\xi_1, \ldots, \xi_r-1$ sont $r-1$ vecteurs linéairement dépendants

$(r-1 > n)$

alors $\sum_2^r \beta_i(\xi_i-\xi_1) = 0$

ou $\sum_1^r \gamma_i\, \xi_i = 0$ avec $\gamma_i = \beta_i$ pour $i \geqslant 2$ et $\gamma_1 = -\sum_2^r \beta_i$

on a $\xi = \sum_1^r (\lambda_i+\alpha\gamma_i)\xi_i$.

Certains γ_i sont < 0 . Posons $\alpha = \min\limits_{\gamma_i < 0} \left\{\frac{\lambda_i}{|\gamma_i|}\right\} > 0$ on a $\lambda_i+\alpha\gamma_i \geqslant 0$ et $\lambda_i+\alpha\gamma_i = 0$ pour un i au moins

$$\sum_1^r \gamma_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^r \lambda_i+\alpha\gamma_i = 1 .$$

On aurait donc une écriture de ξ du type indiqué avec moins de r termes, ce qui est contradictoire. Donc $r \leqslant n+1$.

Note : Pour un espace vectoriel complexe un travail analogue donne $r \leqslant 2n+1$.

Lemme (toujours en dimension finie) : Si A est compact, A_c est compact.

Démonstration : Pour ce faire, il suffit de considérer l'application qui à $\xi_1 \ldots \xi_{n+1}$ et $\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}$ [tels que $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$] associe la somme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, \xi_i$. Cette application est continue à valeur dans A_c .

2.3.4 Remarque et rappels

1) Soit f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E, $f(\xi) = \beta$ est l'équation d'un hyperplan.

$\{\xi \text{ t.q. } f(\xi)-\beta \leqslant 0\}$ et $\{\xi \text{ t.q. } f(\xi)-\beta \geqslant 0\}$ sont les demi-espaces limités par l'hyperplan.

On dit qu'un hyperplan π sépare strictement deux ensembles A et B si

A et B sont inclus dans les demi-espaces ouverts limités par π.

2) Soit dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble A convexe fermé ne contenant pas l'origine. Alors il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{0\}$ et A.

En utilisant la convexité, on va établir une nouvelle forme du théorème de Kolmogorov.

<u>Soit</u> A <u>l'ensemble des vecteurs de composantes</u> $(f(x)-P(x))\varphi_j(x)$ <u>où</u> $j = 1 \dots n$ <u>pour</u> $x \in K_o$.

<u>Soit</u> $f \in \mathcal{C}(K)$.

2.2.5 <u>Proposition</u> : <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> P <u>soit m.a. de</u> f <u>dans</u> X <u>est que</u> $0 \in A_c$.

<u>Démonstration</u> :

(i) Montrons que si $0 \notin A_c$ alors P n'est pas p.m.a. de f.

Dans ce cas il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{0\}$ et A_c soit $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta = 0$.

Supposons que $0 \in \{\xi \text{ t.q. } \sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta > 0\}$ alors $\beta < 0$ et on a $A_c \subset \{\xi \text{ t.q. } \sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta < 0\}$. La relation $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta < 0$ satisfaite aussi par les éléments de A donne $\sum_1^n \alpha_j (f(x)-P(x))\varphi_j(x) - \beta < 0$.

Soit $Q = \sum_1^n \alpha_j \varphi_j$ alors $(f(x)-P(x))Q(x) < \beta < 0$ et ce $\forall x \in K_o$

alors $\sup_{K_o} (f(x)-P(x))Q(x) < 0$ et P n'est pas m.a. de f

(ii) Supposons que P ne soit pas m.a. de f dans X

alors il existe $Q \in X$ t.q. $\sup_{K_o} (f(x)-P(x))Q(x) = \beta < 0$.

Q s'écrit $\sum_1^n \alpha_j\, \varphi_j$.

Soit π_- le demi-espace $\sum_1^n \alpha_j\, \xi_j - \beta \leqslant 0$.

$$\sum_1^n \alpha_j (f(x)-P(x))\varphi_j(x) - \beta = (f(x)-P(x))Q(x) - \beta \leqslant 0 \quad \forall x \in K_o$$

donc $\pi_- \supset A$ et, π_- étant convexe, $\pi_- \supset A_c$.

Si maintenant $\xi = 0$ $\sum_1^n \alpha_j\, \xi_j - \beta = -\beta > 0$ donc $\pi_- \not\ni 0$ <u>c.q.f.d.</u>

2.3.6 <u>Proposition</u> : <u>Un polynôme</u> P <u>est p.m.a. de</u> $f \in \mathcal{C}(K)$ <u>si et seulement si il existe</u> $x_1 \ldots x_r \in K_o$ $(r \leqslant n+1)$ <u>et</u> $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ <u>positifs t.q.</u> $\sum_1^r \lambda_k = 1$ <u>et pour lesquels</u> $\sum_1^r \lambda_k [f(x_k)-P(x_k)]Q(x_k) = 0$ $\forall Q \in X$.

<u>Démonstration</u> :

Une condition équivalente étant $0 \in A_c$ on a $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ $r \leqslant n+1$ $\lambda_k > 0$ et $\sum_1^r \lambda_k = 1$ tel que $0 = \sum_1^r \lambda_k\, \xi^k$

ξ_r^k dans A de composantes $\xi_i^k = (f(x_k)-P(x_k))\varphi_i(x_k)$.

Alors $0 = \sum_1^r \lambda_k\, \xi_i^k$ $1 \leqslant i \leqslant n$.

<u>Note</u> : $\sum_1^r \lambda_k (f(x_k)-P(x_k))\varphi_i(x_k) = 0$ $1 \leqslant i \leqslant n$ équivaut à

$$\sum_1^r \lambda_k (f(x_k)-P(x_k))Q(x_k) = 0 \quad \forall Q \in X$$ <u>c.q.f.d.</u>

2.3.7 <u>Proposition</u> : P <u>est m.a. de</u> f <u>dans</u> X <u>si et seulement si il existe</u> <u>points</u> $x_1 \ldots x_r$ <u>dans</u> K , $r \leqslant n+1$ <u>et</u> r <u>nombres</u> $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ <u>non nuls.</u>
<u>t.q.</u> $\ell(Q) = \sum_1^r \alpha_i\, Q(x_i) = 0$ $\forall Q \in X$ <u>et</u> $f(x_i)-P(x_i) = \|f-P\|$ sñ α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$

<u>Démonstration</u> : (i) Supposons la condition satisfaite, alors on a pour $Q \in X$

$$\|f-Q\| \sum_1^r |\alpha_i| \geqslant \sum_1^r |f(x_i)-Q(x_i)|.|\alpha_i|$$

$$\geqslant \left|\sum_1^r (f(x_i)-Q(x_i)\alpha_i\right| = \left|\sum_1^r (f(x_i)-P(x_i))\alpha_i\right|$$

i.e. $\ell(Q-P) = 0$

$$= \|f-P\| \sum_1^r |\alpha_i|$$

i.e. $\widetilde{\mathrm{sn}}[f(x_i)-P(x_i)] = \widetilde{\mathrm{sn}}\ \alpha_i$

donc $\|f-Q\| \geq \|f-P\|$ $\forall Q \in X$ et P m.a. de f dans X.

(ii) La réciproque est immédiate d'après la proposition précédente 2.3.6.

P étant m.a. de f on a $0 \in A_c$ et

$\sum_1^r \lambda_k (f(x_k)-P(x_k))\varphi_i(x_k) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$ pour r pts et r nombres $\lambda_k > 0$

$$\alpha_k = \lambda_k(f(x_k)-P(x_k)) \neq 0$$

et $$s_{\tilde n}\ \alpha_k = s_{\tilde n}(f(x_k)-P(x_k))$$

d'où $$f(x_k)-P(x_k) = \|f-P\| s_{\tilde n}\ \alpha_k$$

Soit $Q = \sum_1^n \mu_i \varphi_i$ on a $\sum_{k}^{r}{}_1 \alpha_k Q(x_k) = \sum_{k}{}_1^r \sum_{i}{}_1^n \alpha_k \mu_i \varphi_i(x_k)$

$$= \sum_{i}{}_1^n \mu_i \sum_{k}{}_1^r \alpha_k \varphi_i(x_k) = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Note : Dans le cas de fonctions à variable complexe, la proposition reste valable mais la condition $r \leq n+1$ est remplacée par $r \leq 2n+1$.

2.4 Sous-espaces du type de Tchebycheff

2.4.1 Définition

Soit K un espace topologique compact.

Soit X un sous-espace de dimension finie n de $C(K)$.

On dit que X est un sous-espace du type de Tchebycheff de $C(K)$ si :

i) K possède au moins $n+1$ points

ii) Tout polynôme de X non identiquement nul, s'annule en $n-1$ points de K au plus.

Exemples :

i) $K = [a,b]$.

Prenons pour X : $\mathcal{P}_{n-1}$, l'espace des polynômes de degré $< n$ sur $[a,b]$.

X est du type de Tchebycheff : tout polynôme P de X s'écrit

$P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^i$ et a donc au plus $n-1$ racines.

ii) $K = [0,2\pi]$.

Prenons pour X l'espace engendré par : 1, $\cos x,\ldots,\cos mx$, $\sin x,\ldots,\sin mx$, qui est de dimension $n = 2m+1$. C'est un espace du type de Tchebycheff ; en effet, tout polynôme P de X s'écrit $P(x) = a_o + \sum_{p=1}^{m} \cos px + \sum_{p=1}^{m} \sin px$, et a donc au plus $2m = n-1$ racines.

iii) $K = [a,b]$.

Prenons pour X l'espace engendré par une fonction φ continue sur K . Il est clair que X est du type de Tchebycheff si et seulement si φ ne s'annule pas sur K .

Remarques :

i) Dans certains livres, on parle plutôt de "systèmes de Tchebychef", ou encore de "systèmes de Haar".

On dit que les fonctions $\phi_1\ldots\phi_n$ de $C(K)$ forment un système de Tchebychef, si : α) K a au moins n points

β) tout polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\phi_i$, non identiquement nul, a au plus $n-1$ racines sur K .

ii) Si on se donne K espace topologique compact, C(K) admet-il des sous-espaces du type de Tchebychef ? La réponse est donnée par le théorème de Mairhuber et Curtis.

Théorème : C(K) possède des sous-espaces du type de Tchebychef, si et seulement si K est homéomorphe à un sous-ensemble du cercle unité de C (réf. citée en [2]).

2.4.2 Propriétés d'un sous-espace du type de Tchebychef

Soit X du type de Tchebychef dans C(K), de dimension n.

i) Si P est un polynôme de X, et P s'annule en n points distincts de K, alors $P \equiv 0$.

Si P et $Q \in X$ et $P = Q$ en n points distincts de K, alors $P \equiv Q$.

ii) Si $x_1, \dots, x_n$ sont n points distincts de K, et si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont n fonctions linéairement indépendantes de X, alors la matrice $M = (\varphi_j(x_i))$ est non singulière

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \dots\dots \varphi_n(x_1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_1(x_n) \dots\dots \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Démonstration :

On suppose que M est singulière. Cela entraîne que, par exemple, les colonnes de M sont linéairement dépendantes. C'est-à-dire qu'il existe n scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_n$ non tous nuls t.q. $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(x_i) = 0 \quad i = 1 \dots n$. Il existe donc un polynôme $P = \sum_1^n \lambda_j \varphi_j$ de X t.q. P s'annule en n points distincts de K.

P n'étant pas identiquement nul, il y a contradiction avec le fait que X soit du type de Tchebychef. <u>C.Q.F.D.</u>

iii) <u>Si</u> $x_1 \ldots x_n$ <u>sont</u> n <u>points distincts de</u> K, <u>et si</u> $c_1 \ldots c_n$ <u>sont</u> n <u>nombres réels, alors il existe un polynôme</u> P <u>de</u> X <u>unique</u> t.q. $P(x_i) = c_i$ $i = 1 \ldots n$.

<u>Démonstration</u> :

P est de la forme $\sum_1^n \lambda_j \varphi_j$, $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ étant une base de X; d'après ii), le système $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x_i) = c_i$ $i = 1 \ldots n$ est de Cramer, d'où le résultat.

P est appelé le <u>polynôme d'interpolation</u> prenant les valeurs données c_k aux points x_k.

Si le nombre de points x_k et de valeurs c_k est inférieur à n, il est clair que P existe, mais n'est plus unique.

2.4.3 <u>Proposition</u> :

<u>Soit</u> X <u>du type de Tchebychef dans</u> $C(K)$, <u>de dimension</u> n.

i) <u>Soit</u> $x_1 \ldots x_r$ r <u>points distincts de</u> K, <u>et soit</u> $\ell(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i v(x_i)$, <u>où les</u> α_i <u>sont non nuls, une fonctionnelle sur</u> $C(K)$ <u>s'annulant sur</u> X.

<u>Alors</u> $r = n+1$.

ii) <u>Soit</u> $x_1 \ldots x_{n+1}$ $n+1$ <u>points distincts de</u> K <u>alors il existe un système de</u> $n+1$ <u>nombres</u> $\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}$ <u>non nuls, unique à un coefficient multiplicatif près,</u> <u>t.q.</u> $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0$, $\forall Q \in X$.

Démonstration :

i) On sait déjà, d'après 2.3.6, que $r \leqslant n+1$. Supposons $r \leqslant n$, d'après 2.4.2 (iii), il existe un polynôme d'interpolation Q de x t.q.

$$Q(x_1) = 1,$$

$$Q(x_i) = 0 \quad i = 2 \dots r$$

$\ell(Q) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k Q(x_k) = \alpha_1 \neq 0$ ce qui est absurde, d'où $r = n+1$.

ii) Considérons l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$.

Si $\varphi_1 \dots \varphi_n$ est une base de X, il est clair que cette équation est identique au système : $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_j(x_i) = 0, j = 1 \dots n$

C'est un système de n équations à $n+1$ inconnues ; le rang de la matrice est n, donc l'espace des solutions $(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$ est de dimension 1. Si on écarte la solution triviale, aucun α_i n'est nul. C.Q.F.D.

2.4.4 Corollaire :

Soit X un sous-espace du type de Tchebychef de $C(K)$ de dimension n.

Soit $f \in C(K)$, et P le p.m.a. de f dans X.

Alors $K_0 = \{x \in K \text{ t.q. } |t(x)-P(x)| = \|f-P\|\}$ a du moins $n+1$ points.

Démonstration : Si P est p.m.a, la proposition 2.3.7 nous donne r points $x_1 \dots x_r$ de K, $r \leqslant n+1$, et r nombres non nuls $\alpha_1 \dots \alpha_r$ t.q. $\ell(v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v(x_i)$ s'annule sur X et t.q. $|f(x_i)-P(x_i)| = \|f-P\|$; d'après 2.4.3 i), $r = n+1$, donc on connait $n+1$ points où $|f(x_i)-P(x_i)| = \|f-P\|$.

C.Q.F.D.

Ce corollaire nous permet d'énoncer :

2.4.5 <u>Proposition</u>

Soit X un sous espace du type de Tchebychef de $C(K)$. Alors toute fonction continue sur K possède un p.m.a. dans X et un seul.

Démonstration :

Soit $f \in C(K)$, et soit P et P_1 deux p.m.a. distincts de f.

Alors $\frac{P+P_1}{2}$ est aussi p.m.a. de f, puisque l'ensemble des p.m.a. de f est convexe.

D'après le corollaire 2.4.4, il existe $n+1$ points $x_1 \dots x_{n+1}$ de n tels que :

$$|f(x_k) - \frac{P(x_k)+P_1(x_k)}{2}| = \|f - \frac{P+P_1}{2}\| = \delta$$

$\forall k$, posons :

$$f(x_k) - P(x_k) = \rho_k$$
$$f(x_k) - P_1(x_k) = \sigma_k$$

On a :

$$|\rho_k| \leqslant \|f-P\| = \delta$$
$$|\sigma_k| \leqslant \|f-P_1\| = \delta$$
$$|\rho_k+\sigma_k| = 2\delta$$

d'où $\rho_k = \sigma_k$, donc $P = P_1$ en au moins $n+1$ points de K. Alors $P \equiv P_1$.

C.Q.F.D.

Cette proposition admet une réciproque.

2.4.6 <u>Théorème de Haar</u>

Soit K un espace topologique compact ayant au moins n points. Soit X un sous-espace de $C(K)$ de dimension finie. Si chaque fonction continue sur K admet un seul p.m.a. dans X, alors X est du type de Tchebychef.

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans CHENEY [3] (p.81, cas d'un intervalle), ou dans LORENTZ [2] (p.27, cas général).

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour énoncer le théorème suivant :

2.4.7 Théorème

Soit K un espace topologique compact ; soit X du type de Tchebychef dans $C(K)$, de dimension n. Alors :

i) toute fonction continue sur K possède un p.m.a. et un seul dans X.

ii) soit $f \in C(K)$.

P est p.m.a. de f dans X si, et seulement si, il existe dans K $n+1$ points distincts $x_1 \dots x_{n+1}$, et $n+1$ nombres non nuls $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$ tels que :

a) $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$

b) $f(x_i) - P(x_i) = \|f-P\| \operatorname{sign} \alpha_i$

Ce théorème est la conséquence immédiate de la proposition 2.3.7 et de 2.4.3 i).

Remarque : D'après 2.4.3 ii), les coefficients α_i sont définis de manière unique (à un coefficient multiplicatif près), dès qu'on connaît les points $x_1 \dots x_{n+1}$.

Le système des points $x_1, \dots, x_{n+1}$ n'est pas nécessairement unique.

2.4.8 Cas d'un intervalle

Si $K = [a,b]$, nous allons pouvoir donner une caractérisation simple du p.m.a. d'une fonction continue sur $[a,b]$ dans un sous-espace du type de Tchebychef de $C([a,b])$.

Nous allons avoir besoin de la remarque suivante, qui précise la proposition 2.4.3.

2.4.9 Proposition

Soit X un sous-espace du type de Tchebychef de $C([a,b])$, de dimension n.

Soit $a \leqslant x_1 < x_2 \ldots < x_{n+1} < b$ $n+1$ points ordonnés de $[a,b]$, et soit

$\ell(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, v(x_i)$ une fonctionnelle linéaire s'annulant sur X. Alors les signes des coefficients α_i sont alternés.

Démonstration :

i) Si $u = 1$, X est engendré par une fonction ϕ.

On a : $\alpha_1 \, \phi(x_1) + \alpha_2 \, \phi(x_2) = 0$.

Comme X est du type de Tchebychef, ϕ ne s'annule pas, donc garde un signe constant, par conséquent $\alpha_1 \alpha_2 < 0$.

ii) Si $n \geqslant 2$, il y a donc au moins trois points x_i.

Supposons qu'en deux points adjacents x_{j-1} et x_j, les α_i soient du même signe, par exemple positifs.

Il est bien clair qu'il est possible de trouver deux nombres ρ_{j-1} et ρ_{j+1} tous deux positifs t.q. :

$$\alpha_{j-1} \, \rho_{j-1} + \alpha_{j+1} \, \rho_{j+1} > 0$$

d'après 2.4.2 iii), il existe un polynôme d'interpolation unique Q de X t.q.

$$Q(x_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j-1 \, , \, j \, , \, j+1$$

$$Q(x_{j-1}) = \rho_{j-1} > 0$$

$$Q(x_{j+1}) = \rho_{j+1} > 0 \, .$$

Notons que $Q(x_j)$ n'est pas imposé, mais comme

$$\ell(Q) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, Q(x_i) = \alpha_{j-1} \, \rho_{j-1} + \alpha_j \, Q(x_j) + \alpha_{j+1} \, \rho_{j+1} = 0 ,$$

on a $$Q(x_j) = - \frac{1}{\alpha_j} (\alpha_{j-1} \, \rho_{j-1} + \alpha_{j+1} \, \rho_{j+1}) < 0 .$$

Donc, puisque $Q(x_{j-1})$ et $Q(x_{j+1}) > 0$, Q doit s'annuler sur $]x_{j-1} , x_j[$ et sur $]x_j , x_{j+1}[$.

Comme, d'autre part, $Q(x_i) = 0$ si $i \neq j-1 , j , j+1$, Q a n racines distinctes, donc il est identiquement nul, ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Nous en déduisons immédiatement :

2.4.10 Lemme

Soit X un sous-espace du type de Tchebychef de $C([a,b])$, de dimension n .

Soit $f \in C([a,b])$, et P son p.m.a. dans X .

Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

i) il existe $n+1$ points distincts $x_1 \ldots x_{n+1}$ dans $[a,b]$, et $n+1$ nombres non nuls $\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}$ tels que :

a) $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$

b) $f(x_i) - P(x_i) = \|f-P\| \text{ sign } \alpha_i$

ii) il existe $n+1$ points ordonnés de $[a,b]$, soit $a \leqslant x_1 < x_2 \ldots < x_{n+1} \leqslant b$ tels que : $f(x_i) - P(x_i) = \pm \|f-P\|$, avec des signes alternés.

Démonstration :

Supposons i). Quitte à changer la numérotation des x_i , on peut supposer qu'ils sont rangés par ordre croissant. Alors, d'après 2.4.9, les signes des α_i sont alternés. On a donc bien ii).

Supposons ii). La proposition 2.4.3 nous donne a). D'après 2.4.9, les signes des α_i sont alternés. Il suffit de multiplier les α_i par ± 1 pour avoir b).

C.Q.F.D.

Il ne reste plus qu'à énoncer le théorème démontré par Tchebychef en 1857:

2.4.11 Théorème

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit X du type de Tchebychef dans $C([a,b])$, de dimension n.

Alors :

i) toute fonction f continue sur $[a,b]$ possède dans X une m.a. et une seule.

ii) $P \in X$ est m.a. de f si et seulement si il existe $n+1$ points de $[a,b]$, $a \leqslant x_1 < x_2 \dots < x_{n+1} \leqslant b$ t.q. $f(x_i) - P(x_i) = \pm \|f-P\|$ avec des signes alternés

2.4.12 Applications du théorème de Tchebychef.

2.4.12 A) Meilleure approximation d'une fonction continue par une constante.

Soit f continue sur $[a,b]$.

Il existe x_1 et $x_2 \in [a,b]$ t.q. :

$$f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = m$$

$$f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = M$$

Soit X l'espace des fonctions contantes sur $[a,b]$. Il est clair qu'il est du type de Tchebychef.

Soit P le p.m.a. de f dans X.

On a : $P = \frac{m+M}{2}$

En effet : $\|f-P\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \frac{m+M}{2}\right| = \frac{M-m}{2}$

aux points x_1 et x_2 , $f-P$ atteint son maximum $\frac{M-m}{2}$, avec des signes alternés :

$$f(x_1) - P(x_1) = m - \frac{m+M}{2} = -\left(\frac{M-m}{2}\right)$$

$$f(x_2) - P(x_2) = M - \frac{m+M}{2} = +\left(\frac{M-m}{2}\right)$$

2.4.12 B) <u>Approximation par une fonction linéaire.</u>

Prenons $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x) = \sin x$

$$X = \{v \ \text{ t.q. } \ v(x) = \lambda x + \mu\}$$

Il est clair que X est bien du type de Tchebychef.

Cherchons P p.m.a. de f dans X , $P(x)$ est de la forme $\lambda x + \mu$.

$f(x) - P(x)$ atteint son maximum en trois points au moins : $x_1 < x_2 < x_3$.

Supposons que les trois points x_k appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Alors l'équation $f'(x_k) - P'(x_k) = 0 = \cos x_k - \lambda$ a trois solutions dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui est absurde, d'où : $0 = x_1 < x_2 < x_3 = \frac{\pi}{2}$, avec $\cos x_2 = \lambda$.

On a, si ρ est égal à $\|f-P\|$ au signe près :

$$f(0) - P(0) = -\mu = +\rho$$

$$f(x_2) - P(x_2) = \sin x_2 - \lambda x_2 - \mu = -\rho$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) - P(\tfrac{\pi}{2}) = 1 - \lambda\tfrac{\pi}{2} - \mu = +\rho$$

les inconnues sont λ, μ, x_2, ρ . Elles sont parfaitement déterminées par les équations ci-dessus :

$$\mu = -\rho$$

$$1 - \lambda\frac{\pi}{2} = \mu + \rho = 0 \ , \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{2}{\pi}$$

l'équation $\cos x_2 = \frac{2}{\pi} < 1$ détermine x_2 de manière unique.

$$2\mu = \sqrt{1 - \cos^2 x_2} - \frac{2}{\pi} x_2 \ , \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \cos \frac{2}{\pi}\right]$$

2.4.12 C) Polynômes de Tchebychef.

Nous allons démontrer l'énoncé suivant :

Le polynôme de degré n, dont le coefficient de x^n est 1, qui approche le mieux 0 sur $[-1,+1]$, au sens de la norme de la convergence uniforme, est $2^{-n+1}T_n$.

Rappel : T_n est le polynôme de Tchebychef d'ordre n. Pour $x \in [-1,+1]$, $T_n(x) = \cos nt$ avec $x = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. On sait que $T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ $n = 2,3,\ldots$, $T_0 = 1$, $T_1 = x$ d'où le coefficient de x_n dans T_n est 2^{n-1} (par récurrence). Nous allons avoir besoin de la remarque suivante

Remarque : P_n est p.m.a. de 0 sur $[-1,+1]$ si et seulement si :

a) il existe $n+1$ points de $[-1,+1]$ où $P_n = \pm \|P_n\|$ avec des signes alternés.

b) le coefficient de x_n dans P_n est 1.

En effet :

Soit Q_{n-1} le p.m.a. de x^n sur $[-1,+1]$. Comme $\mathcal{P}_{n-1}$ est du type de Tchebychef, il existe $n+1$ points sur $[-1,+1]$ où $x^n - Q_{n-1} = \pm \|x^n - Q_{n-1}\|$ avec des signes alternés.

Il est clair que $P_n = x^n - Q_{n-1}$, d'où la remarque.

Il ne reste plus qu'à voir que $2^{-n+1}T_n$ satisfait a) et b) :

a) il est clair que $\|T_n\| = \sup |\cos nt| - 1$.

pour $t_k = \frac{k\pi}{n}$, $\cos nt = (-1)^k$.

Puisque $t \in [0,\pi]$, k prend les valeurs $0,1\ldots n$, donc il y a $n+1$ points t_k entre 0 et π . Prenons $x_k = \cos t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ $k=0,1\ldots n$.

Il y a $n+1$ points x_k entre -1 et $+1$, où T_n prend les valeurs ± 1 avec des signes alternés.

Donc T_n vérifie a), ce qui entraîne que $2^{-n+1}T_n$ vérifie aussi a).

b) il est évident que le coefficient de x_n dans $2^{-n+1}T_n$ est 1 .

2.5 <u>Meilleure approximation sur un sous-ensemble et Algorithme de Remès.</u>

Soient $K = [a,b]$ et $X \subset \mathcal{C}(K)$ un sous-espace du type de Tchebycheff de dimension finie n .

Soit J un sous-ensemble de K formé de $n+1$ pts au moins. Si $v \in X$, la restriction $v_{/J}$ caractérise v de manière unique. Si $Y = \{v_{/J}$ où $v \in X\}$, Y est du type de Tchebycheff et on peut poser le problème de la m.a. de $f_{/J}$ dans Y .

2.5.1 <u>Définition : On dit que</u> $u \in X$ <u>est la m.a. de</u> f <u>sur</u> J , <u>si</u> $u_{/J}$ <u>est la m.a. de</u> $f_{/J}$ <u>dans</u> Y .

Si $f \in \mathcal{C}(K)$, on sait qu'il existe u unique dans X qui réalise la m.a. de f sur J et qu'il existe alors $n+1$ pts de J tels que

$f(x_i) - u(x_i) = \pm \sup\limits_J |f(x) - u(x)|$ avec des signes alternés.

2.5.2 <u>Algorithme de Remès.</u>

- L'algorithme de Remès permet de construire la m.a. dans X de $f \in \mathcal{C}(K)$

- Précisons l'algorithme :

a)- On part de J_o arbitraire formé de $n+1$ points.

b)- Soit u_o la m.a. de f sur J_o : $u_o = \sum_1^n \lambda_j\varphi_j$

en ces $n+1$ points on a $f(x_i) - u(x_i) = (-1)^i \|f-u_o\|_{\mathcal{C}(J)} = (-1)^i\rho_o$

d'où $n+1$ équations à $n+1$ inconnues λ_j et ρ_o qui s'écrivent

$$\sum_1^n \lambda_j\varphi_j(x_i) + (-1)^i\rho_o = f(x_i) \quad 0 \leqslant i \leqslant n .$$

c)- On a $\|f-u_o\| = \sup_K |f(x)-u_o(x)| \geqslant \rho_o = \|f-u_o\|_{(J)} = \sup_J |f(x)-u_o(x)|$

(α) ou bien $\|f-u_o\| = \rho_o$ et d'après le théorème de Tchebycheff, u_o = m.a. de f sur K

(β) ou bien $\|f-u_o\| > \rho_o$.

Alors $\exists x \in K-J_o$ t.q. $|f(x)-u_o(x)| = \|f-u_o\|$.

On considère J_o $\{x\}$ que l'on ordonne et, on élimine un des points en sorte que les alternations soient respectées.

d)- Sur l'ensemble J_1 ainsi obtenu, on détermine u_1 m.a. de f et on itère le procédé...

e)- Il en résulte une suite u_k qui converge vers la m.a. de f sur J .

2.5.3 <u>Proposition</u> : <u>La suite</u> u_k <u>converge uniformément vers la m.a. de</u> f <u>dans</u> X .

Trois lemmes préalables seront utiles à la démonstration.

<u>Lemme</u> 1 : <u>Les</u> $\rho_k = \operatorname*{Sup}_{J_k} |f(x)-u_k(x)|$ <u>forment une suite croissante.</u>

<u>Démonstration</u> :

On note $J_i = \{x_1^i \ldots x_{n+1}^i\}$ et u_i la m.a. de f sur J_i.

Soit $\ell_i(v) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^i \, v(x_j^i)$ les α_j^i ayant été normalisées c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n+1} |\alpha_j^i| = 1$. On a $\ell_i(u_k) = 0$ car $u_k \in X$.

$$\rho_1 = \ell_1(f) = \ell_1(f-u_o) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^1 (f(x_j^1) - u_o(x_j^1))$$

$$= \sum_j |\alpha_j^1| \, |f(x_j^1) - u_o(x_j^1)|$$ "puisque l'on a des alternations" $= \sum_j |\alpha_j^1| \rho_o + |\alpha_{j_1}^1| \, (\|f-u_o\| - \rho_o)$ " puisque l'on a $|f(x_j^1) - u_o(x_j^1)| = \rho_o$ sauf pour un j $(j = j_1)$ où l'on a $|f(x_{j_1}^1) - u_o(x_{j_1}^1)| = \|f-u_o\|$".

Alors $\rho_1 = \rho_o + |\alpha_{j_1}^1| \, (\|f-u_o\| - \rho_o) > \rho_o$ puisque $\|f-u_o\| > \rho$.

<u>De même</u>, $\rho_k = \rho_{k-1} + |\alpha_{j_k}^k| \, (\|f-u_{k-1}\| - \rho_{k-1}) > \rho_{k-1}$ <u>c.q.f.d.</u>

<u>Lemme</u> 2 : Il n'y a pas de points de J_k dont la distance mutuelle tende vers 0, <u>i.e.</u> $\exists s > 0$ t.q. $|x_i^k - x_j^k| \geqslant s$ $\forall i$ et $j \leqslant n+1$ et $\forall k$.

<u>Démonstration</u> :

Par l'absurde pour i et j fixés.

Supposons qu'il existe $\{k_m\} \to +\infty$ t.q. $|x_i^{k_m} - x_j^{k_m}| \to 0$.

Dans la suite $\{x_\ell^{k_m}\}$ on peut extraire une sous-suite convergente vers $\bar{x}_\ell$ et ce pour $1 \leqslant \ell \leqslant n+1$. On notera que $\bar{x}_i = \bar{x}_j$. Comme $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}$, ne sont pas tous distincts, il existe $\bar{u}$ dans X (du type de Tchebycheff), tel que $\bar{u}(\bar{x}_\ell) = f(\bar{x}_\ell)$, $1 \leqslant \ell \leqslant n+1$. Alors $|f(x_\ell^{k_m}) - u_k(x_\ell^{k_m})| = \rho_k > \rho_1 > 0$

$1 \leqslant \ell \leqslant n+1$ et $|f(x_\ell^{k_m}) - \bar{u}(x_\ell^{k_m})| \leqslant \frac{\rho_1}{2}$ $\forall \ell$ dès que $k_m \geqslant k_{m_o}$.

Il suffit maintenant de remarquer que $\ell_k(u_{k_m} - \bar{u}) \neq 0$ pour $k_m \geqslant k_{m_o}$ ce qui est impossible puisque ℓ_k doit s'annuler pour toute fonctionnelle de X :

$$\begin{aligned} \ell_k(u_k-\bar{u}) &= \ell_k(u_k-f) + \ell_k(f-\bar{u}) \\ &= -\rho_k + \sum_j \alpha_j^k(f(x_j^k) - \bar{u}(x_j^k)) \\ &\leqslant -\rho_k + \frac{\rho_1}{2} \sum_j |\alpha_j^k| = -\rho_k + \frac{\rho_1}{2} < - \frac{\rho_1}{2} < 0 \end{aligned}$$

<u>c.q.f.d.</u>

<u>Lemme</u> 3 : Il existe $r > 0$ tel que $|\alpha_i^k| \geqslant r$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $\forall k$

<u>Démonstration</u> (par l'absurde)

Supposons $\alpha_1^{k_m} \to 0$ pour une certaine suite k_m .

Les $\{\alpha_i^k\}_k$ étant bornées (puisque l'on a $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i^k| = 1$) alors par extractions successives de sous-suites, on obtient une sous-suite k_m telle que

$$\begin{cases} \alpha_1^{k_m} \to 0 & \\ \alpha_i^{k_m} \to \alpha_i & 2 \leqslant i \leqslant n+1 \\ x_i^{k_m} \to \bar{x}_i & 1 \leqslant i \leqslant n+1 \end{cases}$$

Alors si $v \in X$ $\ell_{k_m}(v) = 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^{k_m} v(x_j^{k_m})$ tend vers $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j v(\bar{x}_j)$

d'où $\sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j v(\bar{x}_j) = 0$ $\forall v \in X$.

Compte tenu de $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geqslant s > 0$ (lemme 2), ceci n'est possible que si $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$. Or la normalisation des α_i^k exige que $\sum_{j=1}^{n+1} |\alpha_j| = 1$ d'où la contradiction.

<u>Démonstration de la proposition</u> 2.6.1

Soit u la m.a. de f et $\rho = \|f-u\|$.

$$\rho_k = \operatorname*{Sup}_{J_k} |f(x) - u_k(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{J_k} |f(x) - u(x)| \leqslant \rho$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k + |\alpha^k| \, (\|f-u_k\| - \rho_k) \quad \text{d'après le lemme 1}$$

$$\geqslant \rho_k + r\,(\|f-u\| - \rho_k) \quad \text{d'après le lemme 3.}$$

Il vient $\rho - \rho_{k+1} \leqslant (1-r)(\rho-\rho_k)$

$$\leqslant (1-r)^{k+1}(\rho-\rho_o)$$

Les α_i^k étant non tous nuls et $\sum |\alpha_i^k| = 1$, on a $r < 1$ et le second membre tend vers 0 , quand $k \to +\infty$.

D'où $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \rho$.

D'où immédiatement dans la formule qui vient du lemme 1

$$\lim_{k\to\infty} \|f-u_k\| = \rho \text{ .}$$

La suite $\{u_k\}$ étant alors bornée dans X qui est de dimension finie, est relativement compacte, et il existe une suite extraite convergente vers $\bar{u}$ dans X .

Alors $\rho = \|f-u\| = \|f-\bar{u}\|$ d'où $u = \bar{u}$ (unicité de la m.a. de f dans X)

et $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = u$. c.q.f.d.

§3 - Fonctions splines d'interpolation

3.0 Introduction

A l'origine, il s'agissait d'un problème d'interpolation : pour tracer une courbe passant par des points donnés, les dessinateurs utilisaient des lattes (en anglais "splines") flexibles. Ces lattes étaient maintenues en place par des poids de plomb, appelés "ducks". En jouant, d'une part sur les pointsoù les ducks étaient attachés à la latte, d'autre part sur la position de la latte et des poids par rapport à la surface, on arrivait à faire passer la latte par les points imposés.

Appelons Γ la courbe dessinée par l'axe déformé de la latte.

La "fonction spline" mathématique u est une approximation de la courbe Γ par une fonction de classe C^2, de classe C^3 par morceaux, les sauts de la dérivée troisième correspondant aux points où sont attachés les ducks.

La théorie mathématique des fonctions splines est récente ; un grand progrès a été effectué en 1957 avec la démonstration par Holloday du théorème suivant :

Théorème : *soit* $a < x_1 \ldots < x_N < b$ *une subdivision de* $[a,b]$, *et* $y_1 \ldots y_N$ *N nombres réels. Parmi toutes les fonctions* v *de classe* C^2 *sur* $[a,b]$ *telles que* $v(x_i) = y_i$ $i=1\ldots N$, *la spline fonction* u *telle que* $u''(x_1) = u''(x_N)$ *minimise la fonction* $E(v) = \int_a^b |v''(x)|^2 dx$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans Ahlberg [6] .

<u>Interprétation</u> : l'énergie potentielle de la latte est minimum. En effet, V'' est en général une bonne approximation de la courbure C, et on sait que l'énergie potentielle d'une latte déformée est proportionnelle à $\int (C(x))^2 dx$.

C'est pourquoi le théorème d'Holloday est parfois appelé la "propriété du minimum de courbure".

Nous allons généraliser ce résultat, en cherchant parmi les fonctions v t.q. $v^{(k)} \in L^2(a,b)$ et $v(x_i) = y_i$ celle qui réalise le minimum de la fonction $E(v) = \int_a^b |v^{(k)}(x)|^2 dx$.

3.1 <u>Définition et propriétés de</u> $H^k(a,b)$.

3.1.1 <u>Définition</u>

<u>Soit</u> $[a,b]$ <u>un intervalle de</u> $\mathbb{R}$.

<u>Soit</u> k <u>un entier</u> $\geqslant 1$. <u>L'espace de Sobolev</u> $H^k(a,b)$ <u>d'ordre</u> k <u>sur l'ouvert</u> $]a,b[$ <u>est défini par</u> :

$$H^k(a,b) = \{u \,;\, \text{t.q. } u \in L^2(a,b) \text{ et } \frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(a,b)\ ,\ j=1,\ldots,k\}\ .$$

Il faut préciser à quel sens on prend les $\dfrac{d^j u}{dx^j}$.

Pour cela rappelons brièvement comment sont définies les distributions sur $]a,b[$. (pour une théorie générale, voir Schwartz [7]).

On définit d'abord :

$$\mathcal{D}(]a,b[) = \{\varphi, \varphi \text{ indéfiniment différentiable sur }]a,b[\text{ , et à support compact dans }]a,b[\}$$

puis :

$\mathcal{D}'(]a,b[)$ = dual de $\mathcal{D}(]a,b[)$ = espace des distributions sur $]a,b[$ qu'on munit de la topologie forte de dual.

Si $T \in \mathcal{D}'(]a,b[)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, la valeur en φ de T est notée $\langle T,\varphi\rangle$.

La dérivée $\frac{dT}{dx}$ est définie par :

$$\langle \frac{dT}{dx},\varphi\rangle = -\langle T,\frac{d\varphi}{dx}\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$$

ce qui donne une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(]a,b[)$ dans lui-même qui à T associe $\frac{dT}{dx}$.

Naturellement, on définira $\frac{d^jT}{dx^j}$ par itération.

On note que $\mathcal{D}(]a,b[) \subset L^2(a,b) \subset \mathcal{D}'(]a,b[)$, en identifiant (ce qui est loisible) tout élément u de $L^2(a,b)$ à la distribution : $\varphi \to \langle u,\varphi\rangle$.

On peut maintenant préciser la définition de $H^k(a,b)$ en disant que les dérivées $\frac{d^ju}{dx^j}$ sont prises au sens des distributions sur $]a,b[$.

On munit $H^k(a,b)$ de la norme :

$$\|u\|_{H^k(a,b)} = \left(\sum_{j=0}^{k} |D^ju|^2_{L^2(a,b)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad D^ju = \frac{d^ju}{dx^j}$$

on notera désormais : $|u| = |u|_{L^2(a,b)}$ et $(u,v) = (u,v)_{L^2(a,b)}$

$$\|u\|_k = \|u\|_{H^k(a,b)}$$

3.1.2 <u>Lemme</u>

<u>Pour la norme $\| \, \|_k$, $H^k(a,b)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire de deux éléments u et v de H^k étant donné par</u> :

$$((u,v)) = \sum_{j=0}^{k} (D^ju, D^jv)$$

Démonstration :

Il faut vérifier essentiellement que $H^k(a,b)$ est complet pour cette norme :

Soit $\{u_k\}$ une suite de Cauchy dans $H^k(a,b)$.

Pour tout j , $0 \leqslant j \leqslant k$, $\{D^j u_k\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(a,b)$ qui est complet, d'où $D^j u_k$ tend vers $\Psi_j \in L^2(a,b)$.

Posons $\Psi_0 = u$.

Comme u_k tend vers u dans $L^2(a,b)$, on a en particulier $u_k \to u$ dans $\mathcal{D}'(]a,b[)$, et, la dérivation étant continue dans $\mathcal{D}'$, on a : $D^j u_k \to D^j u$ dans $\mathcal{D}'(]a,b[)$ donc $D^j u = \Psi_j \in L^2(a,b)$ et $u \in H^k(a,b)$. D'où $u_k \to u$ dans $H^k(a,b)$. C.Q.F.D.

3.1.3 Lemme

Soit $u \in H^1(a,b)$.

Alors : i) u est p.p. égale à une fonction continue de $[a,b]$ dans R .

ii) l'injection $H^1(a,b) \to \mathcal{C}([a,b])$ est continue.

Démonstration :

i) Considérons $v(x) = \displaystyle\int_a^x u'(y)dy$

dans $\mathcal{D}'$, on a : $v' = u'$ d'où $(v-u)' = 0$

alors, presque partout, $u(x) = \displaystyle\int_a^x u'(y)dy + c$

donc, quitte à modifier u sur un ensemble de mesure nulle, $u \in \mathcal{C}([a,b])$.

On peut maintenant parler des valeurs de u en tout point de l'intervalle $[a,b]$.

ii) Soit $x_o \in [a,b]$.

$$\forall x \in [a,b] \;,\; u^2(x_o) = u^2(x) - 2\int_{x_o}^{x} u'(y)u(y)dy$$

$$u^2(x_o) \leqslant u^2(x) + 2\int_{x_o}^{x} |u'(y)|\,|u(y)|dy \;.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, $u^2(x_o) \leqslant u^2(x) + 2|u|.|u'| \leqslant u^2(x) + |u|^2 + |u'|^2$.

On somme de a à b :

$$(b-a)u^2(x_o) \leqslant |u|^2 + (b-a)(|u|^2+|u'|^2) \leqslant |u|^2+|u'|^2 + (b-a)(|u|^2+|u'|^2)$$

d'où $u^2(x_o) \leqslant c^2(|u|^2+|u'|^2)$ avec par exemple $c^2 = 1 + \frac{1}{b-a}$.

Ceci est vrai pour x_o arbitraire dans $[a,b]$.

Donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| \leqslant c\,\|u\|_1$ i.e. $\|u\|_{\mathcal{C}([a,b])} \leqslant c\,\|u\|_1$, ce qui entraîne bien que l'injection de $H^1(a,b)$ dans $\mathcal{C}([a,b])$ est continue. C.Q.F.D.

3.1.4 Soit $T : H^k(a,b) \to L^2(a,b) \subset \mathcal{D}'(]a,b[)$ définie par $T(v) = D^k v$.

Il est clair que T est linéaire et continue.

Lemme :

T est surjective et admet un inverse continue S :

$$x \to (Sf)(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} f(\xi)d\xi \;.$$

Démonstration :

On a : $(D^j Sf)(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1-j}}{(k-1-j)!} f(\xi)d\xi$ pour $j=1\ldots k-1$

et $D^k Sf = f$

donc on a bien $Sf \in H^k(a,b)$ et $T \circ S = I$.

T, ayant un inverse, est surjective.

Montrons que S est continue :

$$|(Sf)(x)| \leqslant c_o \int_a^b |f(\xi)| d\xi$$

d'après l'inégalité de Schwarz, $|(Sf)(x)| \leqslant c_o (b-a)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |f(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}$

d'où $|(Sf)(x)| \leqslant c_1 |f|$ et $\sup_{x \in [a,b]} |(Sf)(x)| \leqslant c_1 |f|$.

Par un raisonnement analogue, on a, pour $j=1 \ldots k-1$:

$$\sup_{x \in [a,b]} |(D^j Sf)(x)| \leqslant c_2 |f|$$

donc $|D^j Sf| \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \|D^j Sf\|_u \leqslant c_2 (b-a)^{\frac{1}{2}} |f|$

et $\|Sf\|_k = (\sum_{j=1}^{k} |D^j Sf|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_3 |f|$, ce qui entraine bien que S est continue.

<u>C.Q.F.D.</u>

3.1.5 <u>Lemme</u>

<u>Soient</u> $x_1 \ldots x_N$ N <u>points de</u> $[a,b]$.

<u>Soit</u> $H^k(a,b)$ <u>l'espace de Sobolev d'ordre</u> k , $1 \leqslant k \leqslant N$, <u>sur</u> $]a,b[$ <u>alors</u> $v \to (|D^k v| + \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)|)$ <u>est une norme sur</u> $H^k(a,b)$ <u>équivalente à la norme initiale</u> $\|v\|_k$.

<u>Démonstration</u> :

i) on écrit $v = SD^k v + v - SD^k v$

d'où : $\|v\|_k \leqslant \|SD^k v\|_k + \|v - SD^k v\|_k$

$$\|v\|_k \leqslant c_3 |D^k v| + \|v - SD^k v\|_k$$

Or $D^k(v - SD^k v) = D^k v - D^k S D^k v = 0$.

Donc $v - SD^k v \in \mathcal{P}_{k-1}$, espace des polynômes de degré $\leqslant k-1$ sur $[a,b]$.

Sur $\mathcal{P}_{k-1}$, espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Par conséquent, sur $\mathcal{P}_{k-1}$, $\theta \to \sum_{i=1}^{N} |\theta(x_i)|$ est une norme équivalente à la norme induite par celle de $H^k(a,b)$.

d'où : $\|v-SD^k v\|_k \leqslant c_4 \sum_{i=1}^{N} |v(x_i) - SD^k v(x_i)|$

$$\|v-SD^k v\|_k \leqslant c_4 \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)| + c_4 \sum_{i=1}^{N} |SD^k v(x_i)|$$

alors $\|v-SD^k v\|_k \leqslant c_4 \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)| + c_5 \, |D^k v|$, puisque :

$|SD^k v(x_i)| \leqslant \|SD^k v\|_u \leqslant c \, \|SD^k v\|_1 \leqslant c.c_3 \, |D^k v|$.

Finalement, $\|v\|_k \leqslant c_3 \, |D^k v| + c_4 \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)| + c_5 \, |D^k v|$

i.e. $\|v\|_k \leqslant c_6 \, |D^k v| + c_4 \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)|$.

ii) dans l'autre sens :

$$|D^k v| + \sum_{i=1}^{N} |v(x_i)| \leqslant \|v\|_k + N \, \|v\|_1 \leqslant c_7 \, \|v\|_k$$

<u>C.Q.F.D.</u>

3.2 Nous pouvons maintenant aborder le problème que nous nous étions posé, en l'énonçant sous la forme suivante :

<u>Soit</u> $a < x_1 < x_2 \ldots < x_N < b$ <u>une subdivision de l'intervalle</u> $[a,b]$, <u>et</u> $y_1 \ldots y_N$ N <u>nombres réels</u>.

<u>Soit</u> $H^k(a,b)$ <u>l'espace de Sobolev d'ordre</u> k , $1 \leqslant k \leqslant N$, <u>sur</u> $]a,b[$.

<u>Soit</u> $X = \{v \in H^k(a,b)$ <u>t.q</u> $v(x_i) = y_i$, $i=1 \ldots N\}$

<u>et</u> $Y = \{v \in H^k(a,b)$ <u>t.q</u> $v(x_i) = 0$, $i=1 \ldots N\}$

<u>posons</u> $E(v) = \int_a^b |D^k v(x)|^2 dx$.

Notre problème est : trouver $u \in X$ t.q $E(u) \leqslant E(v) \;\; \forall v \in X$.

La réponse nous est donnée par la proposition suivante.

3.2.1 Proposition :

Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $u \in X$ unique tel que $E(u) \leqslant E(v)$ $\forall v \in X$. Cet élément u est caractérisé par : $(D^k u, D^k \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in Y$.

Démonstration :

Le problème revient à trouver l'élément v_* de $D^k X \subset L^2(a,b)$ t.q. $|v_*| \leqslant |w|$ $\forall w \in D^k X$.

En effet, supposons que v_* existe et est unique :

comme $v_* \in D^k X$, il existe $u_* \in X$ t.q. $D^k u_* = v_*$.

Montrons l'unicité de u_* : soit u_{**} un autre élément de X t.q. $D^k u_{**} = v_*$

alors $D^k(u_{**} - u_*) = 0$, d'où $u_* - u_{**} \in \mathcal{P}_{k-1}$.

Mais $u_*(x_i) - u_{**}(x_i) = 0$ pour $i = 1 \ldots N$, avec $N \geqslant k$.

Par conséquent, $u_* - u_{**} \equiv 0$.

Comme $E(u_*) \leqslant E(v)$ $\forall v \in X$, u_* est solution du problème.

Il suffit donc de montrer l'existence et l'unicité de v_* :

Supposons que $D^k X$ soit fermé dans l'espace de Hilbert $L^2(a,b)$; alors il existe un élément unique w qui réalise la meilleure approximation de 0 dans $D^k X$: c'est la projection de 0 sur $D^k X$. Nous poserons : $v_* = w$.

Tout revient donc à montrer que $D^k X$ est fermé dans $L^2(a,b)$:

Soit $\{v_n \in D^k X\}$ une suite convergente vers v dans $L^2(a,b)$. C'est donc aussi une suite de Cauchy dans $L^2(a,b)$. Pour tout n, soit $u_n \in X$ tel que $D^k u_n = v_n$.

$\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $H^k(a,b)$:

En effet, $\|u_n-u_m\|_k \leqslant c\ |D^k(u_n-u_m)| + c \sum_{i=1}^{N} |u_n(x_i)-u_m(x_i)|$,

d'après le lemme 3.1.5.

Or $u_n(x_i)-u_m(x_i) = 0$, d'où $\|u_n-u_m\|_k \leqslant c\ |v_n-v_m| \to 0$ et $u_n \to u$ dans $H^k(a,b)$. L'opérateur T étant continu, $D^k u_n \to D^k u$ dans $L^2(a,b)$, et on a évidemment $D^k u = v$. Mais, pour $i=1\dots N$, $u(x_i) = \lim_{n\to\infty} u_n(x_i) = y_i$.

Donc $u \in X$, $D^k u = v \in D^k X$, et $D^k X$ est fermé dans $L^2(a,b)$.

<u>Caractérisation de</u> u_* :

$v_* = D^k u_*$, étant la projection de 0 sur $D^k X$ (qui est un sous-espace affine translaté de $D^k Y$), est caractérisée par $v_* - 0 \perp D^k Y$, c'est-à-dire :

$(D^k u_*, D^k \varphi) = 0\ \forall \varphi \in Y$. <u>C.Q.F.D.</u>

Nous allons maintenant donner une caractérisation plus précise de l'élément minimisant que nous venons de construire :

3.2.2 <u>Proposition</u>

<u>La fonction</u> u <u>qui réalise le minimum de</u> $E(v)$ <u>dans</u> X <u>est caractérisée par les conditions suivantes</u> :

i) u <u>est un polynôme de</u> $d^o \leqslant k-1$ <u>sur</u> $]a,x_1[$ <u>et</u> $]x_N,b[$

ii) u <u>est un polynôme de</u> $d^o \leqslant 2k-1$ <u>sur</u> $]x_i,x_{i+1}[$ $i=1\dots N-1$

iii) $D^j u(x_i-0) = D^j u(x_i+0)$ $j=0\dots 2k-2$ $i=1\dots N$

iv) $D^j u(a) = D^j u(b) = 0$ $j=k\dots 2k-1$.

<u>Démonstration</u> :

α) si u vérifie les 4 conditions, montrons que $(D^k u\, ,\, D^k\varphi) = 0 \quad \forall\varphi \in Y$.

Soit $\varphi \in Y$.

Considérons $]x_i\, ,\, x_{i+1}[$, $i=1\ldots N-1$.

Sur cet intervalle, $D^{2k}u \equiv 0$, car $d^o u \leqslant 2k-1$.

D'où, par intégration par partie :

$$0 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k}u \,.\, \varphi = D^{2k-1}u(x_{i+1}-0)\varphi(x_{i+1}) - D^{2k-1}u(x_i+0)\varphi(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-1}u \,.\, D\varphi$$

$$= - \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-1}u \,.\, D\varphi \quad \text{puisque} \quad \varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) = 0 \,.$$

Une deuxième intégration par partie donne :

$$0 = - D^{2k-2}\, u(x_{i+1}) \,.\, D\varphi(x_{i+1}) + D^{2k-2}u(x_i)\; D\varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-2} \,.\, D^2\varphi \,.$$

Cette écriture a un sens puisque $D^j u(x_i-0) = D^j u(x_i+0) = D^j u(x_i)$ pour

$j=0\ldots 2k-2$. Après k intégrations par partie :

$$0 = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{\alpha(j)} \{D^{k+j}u(x_{i+1}) \,.\, D^{k-1-j}\varphi(x_{i+1}) - D^{k+j}u(x_i) \,.\, D^{k-1-j}\varphi(x_i)\}$$

$$+ (-1)^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \,.\, D^k\varphi \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \alpha(j) = j \quad \text{si } k \text{ impair} \\ \alpha(j) = j+1 \text{ si } k \text{ pair} \end{array}$$

Nous remarquons : comme u est $2k-2$ fois dérivable en x_1 ,

$D^{k+j}u(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1 - 0} D^{k+j}u(x) = 0$ pour $j=0\ldots k-2$. De même au point x_N .

On a :

$$(D^k u\, ,\, D^k\varphi) = \int_a^b D^k u \,.\, D^k\varphi = \int_a^{x_1} D^k u \,.\, D^k\varphi + \int_{x_N}^b D^k u \,.\, D^k\varphi + \int_{x_1}^{x_N} D^k u \,.\, D^k\varphi$$

comme u est de degré $\leqslant k-1$ sur $]a,x_1[$ et sur $]x_N,b[$,

$$(D^k u\, ,\, D^k\varphi) = \int_{x_1}^{x_N} D^k u \,.\, D^k\varphi = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \,.\, D^k\varphi$$

Mais :

$$\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k\varphi = \sum_{i=1}^{N-1}\left[\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{\alpha(j)}(-1)^{k+1}\left\{D^{k+j}u(x_{i+1})\cdot D^{k-1-j}\varphi(x_{i+1}) - D^{k+j}u(x_i)\cdot D^{k-1-j}\varphi(x_i)\right\}\right] .$$

En intervertissant les sommations en i et les sommations en j :

$$\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k\varphi = \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\left[D^{k+j}u(x_N)D^{k-1-j}\varphi(x_N) - D^{k+j}u(x_1)D^{k-1-j}\varphi(x_1)\right]$$

D'après la remarque que nous avons faite, cette quantité est nulle.

On a donc $(D^k u , D^k\varphi) = 0$.

β) Supposons maintenant $(D^k u , D^k\varphi) = 0 \ \forall\varphi \in Y$.

En prenant pour φ une fonction de $\mathcal{D}(]x_i,x_{i+1}[) \subset Y$, on voit que la condition $(D^k u , D^k\varphi) = 0$ entraîne que $D_u^{2k} \equiv 0$ sur $]x_i,x_{i+1}[$.

Donc, sur chacun de ces intervalles, degré $u \leqslant 2k-1$, ce qui nous donne ii).

Utilisons ce résultat, comme dans le cas α) :

Soit $\varphi \in Y$; on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k}u \cdot \varphi = 0$.

Après k intégrations par partie, on a $0 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k\varphi + \sigma_i$.

Avec $\sigma_i = \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j \{D^{k+j}u(x_{i+1}+0)\cdot D^{k-1-j}\varphi(x_{i+1}) - D^{k+j}i(x_i+0)D^{k-1-j}\varphi(x_i)\}$.

D'où : $0 = \int_a^b D^k u \cdot D^k\varphi + \sum_{i=0}^{N}\sigma_i$, avec la convention $a = x_0$ et $b = x_{N+1}$.

Mais, comme $(D^k u , D^k\varphi) = 0$, on a nécessairement $\sum_{i=0}^{N}\sigma_i = 0$.

Considérons maintenant l'intervalle $]a,x_1[$, et prenons pour φ une fonction de $\mathcal{D}([a,x_1[)$.

Alors $0 = \sum_{i=0}^{N}\sigma_i = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[- D^{k+j}u(a)D^{k-1-j}\varphi(a)\right]$, et, nécessairement, $D^{k+j}u(a) = 0$ pour $j=0\ldots k-1$. D'où u est un polynôme de degré $\leqslant k-1$ sur

$]a, x_1[$. Le même raisonnement s'applique à l'intervalle $]x_N, b[$. On a donc prouvé i) et iv). Il ne nous reste plus qu'à prouver : $D^j u(x_i - 0) = D^j u(x_i + 0)$ pour $j = 0 \ldots 2k-2$ et $i = 1 \ldots N$.

Prenons pour φ une fonction de $\mathfrak{D}(]x_{i-1}, x_{i+1}[)$ telle que $\varphi(x_i) = 0$.

Il est clair que $\varphi \in Y$.

Alors :

$$0 = \sum_{i=0}^{N} \sigma_i = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \{D^{k+j} u(x_{i+1}-0) D^{k-1-j} \varphi(x_{i+1}) - D^{k+j} u(x_i+0) D^{k-1-j} \varphi(x_i)$$
$$+ D^{k+j} u(x_i - 0) D^{k-1-j} \varphi(x_i) - D^{k+j} u(x_{i-1}+0) D^{k-1-j} \varphi(x_{i-1})\}$$
$$= \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j [D^{k+j} u(x_i - 0) - D^{k+j} u(x_i + 0)] D^{k-1-j} \varphi(x_i)\}$$

Nécessairement, $D^{k+j} u(x_i - 0) = D^{k+j} u(x_i + 0)$ pour $j = 0 \ldots k-2$, et on a bien prouvé iii). <u>C.Q.F.D.</u>

3.2.3 <u>Définition</u>

<u>Soit</u> $a < x_1 < x_2 \ldots < x_N < b$ <u>une subdivision de l'intervalle</u> $[a,b]$.

<u>On dit que</u> $u_i \in H^k(a,b)$ <u>est la i-ème fonction spline de base si</u> $u_i(x_j) = \delta_{ij}$ <u>et</u> $E(u_i) \leqslant E(v)$ $\forall v \in X$.

Avec les notations de la proposition 3.2.2, on a $u = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i u_i$.

3.3 <u>Problème de convergence</u>

Soit $H^k(a,b)$ l'espace de Sobolev d'ordre k sur $]a,b[$.

Soit $f \in H^k(a,b)$ fixé.

A tout $n \in N$, associons une subdivision $\Delta_n : a < x_1^n < x_2^n \ldots < x_{N(n)}^n < b$ de $[a,b]$.

Soit $X_n = \{v , v \in H^k(a,b) \text{ et } v(x_i^n) = f(x_i^n) , i=1 \ldots N(n)\}$

et $Y_n = \{v , v \in H^k(a,b) \text{ et } v(x_i^n) = 0 , i=1 \ldots N(n)\}$

On sait alors qu'il existe un élément u_n de X_n tel que $E(u_n) \leqslant E(v) \forall v \in X_n$

Le problème est alors le suivant : Est-ce que u_n converge vers f quand n tend vers l'infini ?

La réponse nous est donnée par la proposition suivante :

3.3.1 <u>Proposition</u>

<u>Si le module de la subdivision Δ_n tend vers 0 quand $n \to \infty$, alors u_n converge vers f dans $H^k(a,b)$.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous noterons $\eta_n = \sup\limits_{i=0 \ldots N} |x_{i+1}^n - x_i^n|$ le module de la subdivision Δ_n.

i) <u>Remarques préliminaires</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n(x_i^n) = f(x_i^n)$, donc $u_n - f \in Y_n$, et $(D^k u_n , D^k u_n - D^k f) = 0$.

D'après l'inégalité de Schwarz, $|D^k u_n|^2 = (D^k u_n , D^k f) \leqslant |D^k u_n| \, |D^k f|$.

Donc $|D^k u_n| \leqslant |D^k f|$.

Posons $v_n = u_n - f$.

On a $v_n(x_i^n) = 0$ pour $i=1,\ldots,N(n)$.

$|D^k v_n| \leqslant |D^k u_n| + |D^k f|$, donc $|D^k v_n|$ est majoré par une constante indépendante de n, par exemple $2|D^k f|$.

Ecrivons : $v_n = SD^k v_n + \theta_n$, avec $\theta_n = v_n - SD^k v_n$.

Comme $D^k(v_n - SD^k v_n) = 0$, on a $\theta_n \in \mathcal{P}_{k-1}$.

On remarque que $\theta_n(x_i^n) = -SD^k v_n(x_i^n)$.

Notre but est de montrer que $v_n \to 0$ dans $H^k(a,b)$.

ii) Montrons que la suite $\{D^k v_n\}$ est bornée dans $L^2(a,b)$.

Dès que n est assez grand, $\eta_n \leqslant \frac{b-a}{k}$.

Il existe alors k points $y_1^n \ldots y_k^n$ tels que $|y_{i+1}^n - y_i^n| \geqslant \frac{b-a}{2k}$.

Utilisons les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\theta_n(y) = \sum_{i=1}^{k} \theta_n(y_i^n)\ell_i^n(y) \ , \quad \text{où} \quad \ell_i^n(y) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{(y-y_j^n)}{(y_i^n-y_j^n)}$$

$$|\theta_n(y)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\theta_n(y_i^n)|.|\ell_i^n(y)| \ .$$

D'une part : $|\ell_i^n(y)| \leqslant \dfrac{(b-a)^{k-1}}{[(b-a)/2k]^{k-1}} = (2k)^{k-1}$.

D'autre part : $|\theta_n(y_i^n)| \leqslant |SD^k v_n(y_i^n)| \leqslant \|SD^k v_n\|_{\mathcal{C}([a,b])} \leqslant c\,\|SD^k v_n\|_1 \leqslant c.c_3|D^k v_n|$

D'où $|\theta_n(y)| \leqslant k(2k)^{k-1}c.c_3\,|D^k v_n|$, donc $\|\theta_n\|_{\mathcal{C}([a,b])}$ est borné indépendamment de n dans $\mathcal{P}_{k-1}$ dès que $\eta_n \leqslant \frac{b-a}{k}$.

Toutes les normes étant équivalentes sur $\mathcal{P}_{k-1}$, on voit que la suite $\{\theta_n\}$ est bornée dans H^k .

$$\|v_n\|_k \leqslant \|SD^k v_n\|_k + \|\theta_n\|_k \leqslant c_3\,|D^k v_n| + \|\theta_n\|_k \ .$$

Comme $|Dv_n| \leqslant \|v_n\|_k$, la suite $\{D^k v_n|$ est bornée dans $L^2(a,b)$.

iii) Montrons que $v_n \to 0$ uniformément.

Soit $x \in [a,b]$. Alors il existe i tel que $x_i^n \leqslant x < x_{i+1}^n$.

$$v_n(x) = u_n(x_i^n) + \int_{x_i^n}^{x} Dv(\xi)d\xi \ .$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$|v_n(x)| \leqslant \left(\int_{x_i^n}^{x} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i^n}^{x} |Dv(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (|x-x_i^n|)^{\frac{1}{2}} |Dv_n|$$

D'où $\|v_n\|_{\mathscr{C}([a,b])} \leqslant K(\eta_n)^{\frac{1}{2}}$, ce qui entraîne bien que $v_n \to 0$ uniformément.

iv) Puisque la suite $\{D^k v_n\}$ est bornée dans $L^2(a,b)$, on peut en extraire une sous-suite $\{D^k v_{n'}\}$ qui converge vers v dans L^2 faible. Mais alors toute la suite $\{D^k v_n\}$ converge vers v dans L^2 faible : en effet, supposons qu'il existe $g \in L^2(a,b)$ tel que $(g, D^k v_n) \not\to (g,v)$. Cela signifie qu'il existe un nombre $\eta > 0$, et une suite n_p tels que : $|(g, D^k v_{n_p} - v)| \geqslant \eta$. Or la suite $\{D^k v_{n_p}\}$ est bornée dans $L^2(a,b)$, donc on peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement vers v , ce qui est absurde.

On voit maintenant que $v = 0$: en effet, $D^k v_n \to v$ dans L^2 faible, donc dans $\mathscr{D}'$. Mais d'autre part, $v_n \to 0$ uniformément, donc aussi dans $\mathscr{D}'$. L'opérateur D^k étant continu dans $\mathscr{D}'$, $D^k v_n \to 0$ et $v = 0$.

Montrons que $D^k v_n \to 0$ également dans L^2 fort :

Comme $(D^k u_n , D^k v_n) = 0$, $|D^k v_n|^2 + (D^k f , D^k v_n) = 0$.

Donc $|D^k v_n| \to 0$, ce qui signifie bien que $D^k v_n \to 0$ dans L^2 fort.

Nous pouvons maintenant conclure que $v_n \to 0$ dans $H^k(a,b)$:

Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ k points fixés de $]a,b[$.

$$\|v_n\|_k \leqslant c\{|D^k v_n| + \sum_{i=1}^{k} |v_n(x_i)|\} \leqslant c\{|D^k v_n| + kK(\eta_n)^{\frac{1}{2}}\}$$

cette dernière quantité tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. <u>C.Q.F.D.</u>

Le corollaire suivant est immédiat :

3.3.2 <u>Corollaire</u> : <u>Pour</u> $j=0,\ldots k-1$, <u>on a</u> : $\lim_{n \to \infty} \|D^j u_n - D^j f\|_{\mathscr{C}([a,b])} = 0$.

Bibliographie

A - Approximation des fonctions.

[1] BOURBAKI (N.).- Eléments de Mathématiques
Livre V Espace vectoriel topologique
Chapitre V Espaces hilbertiens.
Hermann.

[2] LORENTZ (G.G.).- Approximation of Functions (1966) Rinehort and Winston

[3] CHENEY (E.W.).- Introduction to Approximation Theory. International series in pure and applied mathematics. Mc Graw-Hill Company.

[4] DAVIS (P.J.).- Interpolation and approximation (1961) Ginn and Blaisdell Publishing Company.

B - Polynômes orthogonaux.

[5] SZEGO (G.).- Orthogonal Polynomials (1967) American Mathematical Society. Colloquium Publications, volume XXIII.

C - Fonctions splines.

[6] AHLBERG (J.H.), NILSON (E.N.), WALSH (J.L.).- The Theory of splines and their applications (1967) Academic Press.

D - Théorie des distributions

[7] SCHWARTZ (L.).- Théorie des distributions. Actualités scientifiques et industrielles, Hermann.