UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N^OS 186 - 7655

SEMINAIRE

D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

1976

(PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY)

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Année 1975-1976

-:-:-:-:-:-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 1 du 3.11.1975

SUR LES IDEAUX MAXIMAUX DE L'ALGEBRE DE WEYL A_1

par

Kanté SIAKA BAMBA

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SOMMAIRE.

Au cours des deux conférences, répondant à une conjecture de Dixmier (J) ouverte depuis 1970, je construis de nouveaux idéaux unilatères de A_1 et je construis de nombreuses nouvelles classes - invariantes par automorphismes de A_1 - de représentations irréductibles de A_1. Indépendamment, je retrouve (à une proposition près) les résultats de Dixmier , et j'en établis d'autres, nouveaux.

Dans les deux exposés, k est un corps de caractéristique o, $A = k[q][p]$ avec $pq - qp = 1$; $B = k(q)[p]$.

I. LOCALISATION.

1.1. LEMME. *Soit* $f \in k(q)$, $i \in \mathbb{N}$, *alors* $p^i f = \sum_{j=o}^{i} C_i^j f^{(j)} p^{i-j}$.

Preuve : par récurrence sur i.

1.2. LEMME.

a) *Tout idéal unilatère de* B *est principal*

b) *Si* $x \in A$, *posons* $\deg x$ = degré *de* x *par rapport à* p.

Soit $g \in A$, *de coefficient directeur (par rapport à* p) *dans* k^*.

Soit $f \in A$, *alors il existe deux couples uniques* $(q_1, r_1), (q_2, r_2) \in A \times A$

tels que

$r_j \in k[q]$ ou degré de r_j (en p) $\leq$ degré g (en p) $-$ 1 et

$$f = q_1 g + r_1 = g q_2 + r_2 .$$

1.3. THEOREME. Soit $g \in A$ tel que son coefficient directeur (pour p) soit dans k^* alors si gB (resp. Bg) est maximal à droite (resp. à gauche) dans B, alors gA (resp. Ag) est maximal à droite (resp. à gauche) dans A.

Preuve : d'après 1.2, si J est un idéal à droite (resp. à gauche) de A tel que $gA \subsetneq J$, alors $JB = B$ et $k[q] \cap J \neq o$ et J est de codimension sur k finie, donc $J = A$.

1.4. THEOREME.

i) Si $r \in k[q]^*$ est de degré impair, l'idéal $B(p^2+r)$ (resp. $(p^2+r)B$) est maximal (Mc Connell - Robson).

ii)(Si k est algébriquement clos), si $n \in \mathbb{N}^*$, $B(p^2+q^n)$ (resp. $(p^2+q^n)B$) est maximal.

iii) Si $r \in k[q]$ est de degré impair, si $n \in \mathbb{N}^*$, si $\emptyset \in \operatorname{Aut} A$ alors $(p^2+r)A$, $A(\emptyset(p)^2 + \emptyset(r))$, $A(\emptyset(p)^2 + \emptyset(q)^n)$ sont maximaux respectivement à droite, à gauche.

Preuve : si $(p^2+r)B$ n'est pas maximal, comme B est principal il existe $\alpha \in k(q)$, $h \in k(q)$ tels que

$$(p^2+r) = (\alpha+p)(h+p) = \alpha h + h' + (\alpha+h)p + p^2$$

$$\Longrightarrow \alpha h + h' = r \quad \text{et} \quad \alpha + h = o \Longrightarrow \boxed{h' + h^2 = -r \iff h' - h^2 = r} \qquad (1)$$

Prenons $r = q^{2n}$, $h = \frac{f}{g}$, $(f,g) \in k[q] \times k[q]^*$, $(f,g) = 1$. On a d'après (1) :

$$g(f' - g q^{2n}) = f(f+g')$$

donc il existe $\alpha \in k[q]$ tel que

$$(f' - g q^{2n}) = \alpha f \quad \text{et} \quad (f+g') = \alpha g \qquad (2)$$

$\Longrightarrow$ (3) : $f = -g' + \alpha g$ et $f' - \alpha f = g q^{2n}$

$\alpha \neq o$ et (2) $\Longrightarrow$ $\deg \alpha + \deg f = \deg g + 2n$ et $\deg f = \deg \alpha + \deg g$

d'où $\deg \alpha = n$ et $f' = \alpha' g + \alpha g' - g''$

d'où $(q^{2n} - \alpha' + \alpha^2) g = 2\alpha g' - g'' \Longrightarrow \deg(q^{2n} + \alpha^2 - \alpha') = n-1$.

1.5. LEMME. Si $\deg(q^{2n} + \alpha^2 - \alpha') = n-1$, l'équation (1) n'a pas de solution si α n'est pas de la forme $\alpha = a_o q^n$ avec $a_o = \pm i$.

Preuve :

1) Si $\alpha = a_o q^n$ alors $q^{2n} + \alpha^2 - \alpha' = (1 + a_o^2)\, q^{2n} - n a_o q^{n-1} \Rightarrow a_o^2 = -1$.

2) Si $\alpha = a_o q^n + a_p q^p + \beta$ avec $a_p \neq o$ et $\deg \beta \leq p-1$ alors $q^{2n} + \alpha^2 - \alpha' = (a_o^2 + 1) q^{2n} + 2 a_p a_o q^{n+p} + \alpha$ où $\deg \alpha \lneq n+p \Rightarrow a_o^2 = -1$.

Revenons alors à $(q^{2n} + \alpha^2 - \alpha') g = 2\alpha' g' - g''$. Posons

$$g = \beta_o q^m + g_1 \quad \text{où} \quad \deg g_1 \lneq m.$$

Egalons les termes de plus hauts degrés, on a :

$$\underline{-n a_o \beta_o = 2m\, a_o \beta_o} .$$

1.6. THEOREME. L'idéal $(p^3 + r)B$ (resp. $B(p^3 + r)$) est maximal si $r \in k[q]$ et degré r (en q) n'est pas multiple de 3.

Preuve : si $(p^3 + r)B$ n'est pas maximal, il existe $h_i \in k(q)$ tels que

$(p^2 + h_1 p + h_2)(p + h_3) = p^3 + r$

d'où $\boxed{h'' - 3hh' + h^3 = r}$ $h \in k(q)$ (4)

(4) n'est possible que si degré r est multiple de 3.

De même $(p^3 + r) = (p + h_3)(p^2 + h_1 p + h_2)$

$\Rightarrow$ $\boxed{h'' + 3h'h - h + h^3 = r}$ (5)

qui exige que degré r est multiple de 3.

1.7. THEOREME. Soit $\lambda, \mu \in k^*$ tels que $\lambda\mu = -\frac{1}{2}$, soit $\omega \in k$, alors

i) $q \xrightarrow{\emptyset_1} \frac{1}{2}q + \lambda p$, $p \xrightarrow{\emptyset_1} p + \mu q$

ii) $q \xrightarrow{\emptyset_2} q + \lambda p$, $p \xrightarrow{\emptyset_2} \frac{1}{2}p + \mu q$

sont des automorphismes de A et

iii) $\emptyset_i(pq+\omega)$ est de la forme $\alpha_1 p^2 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3$ où $(\alpha_1, \alpha_2) \in (k^*, k^*)$ et $\alpha_3 \in k$.

1.8. THEOREME. Soit $\omega \in k\text{-}\mathbb{Z}$, alors les idéaux unilatères suivants sont maximaux

i) $A(pq+\omega)$; ii) $A(qp+\omega)$; iii) $A(p^2 - \frac{1}{4}q^2 + \omega + \frac{1}{2})$;

iv) $(p^2 - \frac{1}{4}q^2 + \omega + \frac{1}{2})A$.

Preuve : il suffit d'étudier $\alpha^2 + \alpha' = \frac{1}{4}q^2 - \omega - \frac{1}{2}$ où $\alpha \in k(q)$ qui n'a pas de solution.

1.9. THEOREME. (ne se trouve pas dans [4]).

Pour tout $s \in N$ l'idéal $Ap^{s+1} + A(pq-s-1)$ est maximal.

Preuve : notations de [4]

$$d(J) = 1,\ \mathfrak{a}(J, s+1) = k[X] \ ;\quad (1) = \mathfrak{a}(J, \infty) \Rightarrow Ap^{s+1} + A(pq-s-1) = J$$

où $J = \{x \mid \sigma(x)X^s = o\}$.

1.10. THEOREME.
Soit $r \in k[q]$; soit $i \in \mathbb{N}$, alors si degré de r est impair et $\neq 1$, $(p^4+r)B$, (resp. $B(p^4+r)$) est un idéal unilatère maximal.

Preuve : si $(p^4+r)B$ n'est pas maximal p^4+r se factorise : étudions le cas le plus difficile :

a) $(p^4+r) = (\alpha_o + \alpha_1 p + p^2)(\beta_o + \beta_1 p + p^2)$

soit
$$\begin{cases} \beta_1^3 - 3\beta_1'\beta_1 - 2\beta_o\beta_1 + 2\beta_o' + \beta_1'' = o & (1) \\ \beta_1^2\beta_o - 2\beta_1'\beta_o - \beta_o^2 - \beta_1\beta_o' + \beta_o'' = r & (2) \end{cases}$$

On a en dérivant (1)

(3) $$\beta_o'' = \frac{2\beta_1^2\beta_o' + \beta_1' A + 2\beta_1'\beta_o' - \beta_1 A'}{2\beta_1}$$

où

$$A = \beta_1^3 - 3\,\beta_1\beta_1' + \beta_1''.\quad \beta_1 \neq 0 \quad \text{est nécessaire et}$$

(2) $\Longrightarrow$ (4) $$\beta_o'' = r + \beta_1\beta_o' + \frac{(A+2\beta_o')(-2\beta_1^3 + A + 2\beta_o' + 4\beta_1\beta_1')}{4\beta_1^2}.$$

Eliminons β_o'' entre (3) et (4), on a

(5) $$\beta_o'[4\,\beta_1^3 - 4\,\beta_1\beta_1' - 4A - 4\beta_o'] + A[-2\beta_1\beta_1' - A + 2\,\beta_1^3] - 2\beta_1^2 A' = 4\beta_1^2\, r\ ;$$

dérivons (2) pour avoir β_o'''. Puis calculons β_o''' dans (4). On a, après élimination de $2\beta_1\beta_o'''$:

(6) $$2\,\beta_1 r' + \beta_o'[4\,\beta_o' + 4\,\beta_1'' - 8\,\beta_1\beta_1'] + A[\beta_1'' - 2\beta_1\beta_1'] + \beta_1 A'' = 0$$

et (5) et (6) donnent :

(7) $$[\beta_1^3 - 3\,\beta_1\beta_1' + \beta_1''][\beta_1^2 - \beta_1'] + [-6\,\beta_1^3\beta_1' + 6\,\beta_1^2\,\beta_1'' + 3\,\beta_1^2 + 12\,\beta_1\beta_1'^2 - 5\,\beta_1\beta_1''' - 9\beta_1'\beta_1'' + \beta_1^{(4)}]$$
$$= -2r' + 4\,\beta_1 r$$

alors si degré $\beta_1 \underset{\neq}{<} 0$, (7) est impossible sauf si degré $\beta_1 = -1$.

Si degré $\beta_1 = -1$, (1) et (2) montrent que

deg r = deg $\beta_o'^2$, et donc degré r est pair, si on suppose que degré de r est ≥ 2.

Si degré $\beta_1 \geq 0$, (7) montre que degré r est multiple de 4.

Conférence n° 1^{bis} du 10.11.1975

MODULES. REPRESENTATIONS ET ALGEBRES DE WEYL

par

Kanté SIAKA BAMBA

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

2. HOMOLOGIE.

2.1. THEOREME. Soit $N = \frac{A}{A(p^2+r)}$, $r \in k[q]$, $I = A(p^2+r)$

$\Delta(2, r, r) \in \mathrm{Hom}_k(N,N)$ définie par $\Delta(2, r, r)(n) = (p^2+r)n$ (I).

Alors :

i) $N = k[q] \oplus k[q]p$ (I)

ii) $\Delta(2, r, r)(f_1 + f_2 p) = (-2f_2' r - f_2 r' + f_1'') + (2f_1' + f_2'')p$ (I)

où $f_i \in k[q]$

iii) $(\alpha_1 + \alpha_2 p) \in \mathrm{im}\, \Delta(2, r, r)$ si et seulement si il existe $f \in k[q]$ tel que $4rf' + 2r'f + f''' = 2\alpha_1 - \alpha_2'$ où $\alpha_i \in k[q]$

iv) $\dim_k(\frac{N}{\mathrm{im}\ \Delta}) = \dim_k \mathrm{coker}\ \Delta = \sup(o, \text{degré } r-1)$ (Mc Connell et Robson).

Preuve : seul iv) est difficile.

Soit $D : k[q] \longrightarrow k[q]$ définie par $f \longrightarrow f''' + 2r'f + 4rf'$

alors $\frac{N}{\mathrm{im}\,\Delta(2,r,r)}$ est k-isomorphe à $\frac{k[q]}{\mathrm{im}\ D}$.

Considérant alors les deux cas degré $r \geq 1$ et deg $r = o$, on a le résultat.

2.2. THEOREME. Pour tout $r \in k[q]$, $E \times T_A^1(\frac{A}{A(p+r)}, \frac{A}{A(p+r)}) = o$.

Preuve : $\frac{A}{A(p+r)} \simeq \frac{A}{(p+r)A} \simeq k[q]$ (mod $(p+r)A$) et l'application $f \to -f'$, $f \in k[q]$ est surjective.

2.3. PROPOSITION.

i) Si $N = \frac{A}{A(p^2+r)}$, alors la suite de k-modules suivante est exacte :

$$o \to \mathrm{Hom}_A(N,N) \to N \xrightarrow{\Delta(2,r,r)} N \to E\times T^1_A(N,N) \to o .$$

ii) $\dim_k E\times T^1_A(N,N) = \dim_k \frac{N}{\mathrm{im}\,\Delta(2,r,r)} = \dim_k \frac{N}{(p^2+r)N}$.

Preuve : on applique les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(\cdot,N)$ et $E\times T^1_A(\cdot,N)$ à la suite de A-module exacte : $o \to A(p^2+r) \to A \to \frac{A}{A(p^2+r)} \to o$.

2.3. THEOREME. Soient $f_1, f_2 \in k[q]$ tels que $f_1-f_2 \in k^*$, alors

i) si $\deg f_i \gneq 2$, $\dim_k E\times T^1_A\left(\frac{A}{(p^2+f_1)A}, \frac{A}{(p^2+f_2)A}\right) = \deg f_i - 2$

ii) si $\deg f_i = 2$, si $f_1 = \beta_2 q^2 + p_1 q + \beta_o$, ($\beta_2 \neq o$) et si $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f_1-f_2)^2 + 4\beta_2(n+1)^2 \neq o$, on a $\dim_k E\times T^1_A\left(\frac{A}{(p^2+f_1)A}, \frac{A}{(p^2+f_2)A}\right) = o$.

iii) s'il existe $n \in N$ tel que $(f_1-f_2)^2 + 4\beta_2(n+1)^2 = o$, alors

$$\dim_k E\times T^1_A\left(\frac{A}{(p^2+f_1)A}, \frac{A}{(p^2+f_2)A}\right) = 1 .$$

iv) si $\deg f_1 \lneq 2$, on a $E\times T^1_A\left(\frac{A}{(p^2+f_1)A}, \frac{A}{(p^2+f_2)A}\right) = o$.

Preuve : soit $\Delta(2,f_1,f_2) : \alpha_1+\alpha_2 p \longrightarrow (\alpha_1+\alpha_2 p)(p^2+f_1) + (p^2+f_2)A$

$\frac{A}{J} \to \frac{A}{J}$ où $J = (p^2+f_2)A$.

Alors $\delta_1+\delta_2 p \in \mathrm{im}\,\Delta(2,f_1,f_2) \Leftrightarrow$ ($\exists$ $\alpha \in k[q]$ tel que

$$(\lambda^2+2f_1'')\alpha + (2f_1'+4f_2')\alpha' + (2f_1+2f_2)\alpha'' + \alpha''' = 2\lambda\delta_2 - \delta_2'' + 2\delta_1'$$

où $\lambda = f_1-f_2$.

Posons $D\alpha = (\lambda^2+2f_1'')\alpha + (2f_1'+4f_2')\alpha' + (2f_1+2f_2)\alpha'' + \alpha'''$.

Alors si $N = \frac{A}{J}$, on a

$$\frac{N}{\mathrm{im}\,\Delta(2,f_1,f_2)} \simeq \frac{k[q]}{\mathrm{im}\,D} \simeq E\times T^1_A\left(\frac{A}{(p^2+f_1)A}, \frac{A}{(p^2+f_2)A}\right) .$$

2.4. PROPOSITION. Soient M et N deux A-modules tels qu'il existe un k-isomorphisme I de M sur N, et il existe $\emptyset \in \mathrm{Aut}(A)$, tels que $I(am) = \emptyset(a)\, I(m)$ pour tout $(a,m) \in A \times M$; alors $E \times T^1_A(M,M)$ est k-isomorphe à $E \times T^1_A(N,N)$.

Preuve : soit $\mathcal{B}(M,N) = \{\varphi \mid \varphi : A \times M \longrightarrow N$ est k-bilinéaire et φ vérifie la relation $\mathcal{R}\}$, où M, N sont deux A-modules,

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} \varphi : A \times M \longrightarrow N \\ \varphi \text{ est k-bilinéaire} \\ \varphi(a_1 a_2, m) = a_1 \varphi(a_2, m) + \varphi(a_1, a_2 m), \quad \forall (a_1, a_2, m) \in A \times A \times M. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}(M,N) = \{\varphi \in \mathcal{B}(M,N) \mid \exists\, \lambda \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$ tel que

$\varphi(a,m) = \lambda(am) - a\lambda(m)\}$

alors $E \times T^1_A \simeq \dfrac{\mathcal{B}(M,N)}{\mathcal{L}(M,N)}$. $(E \times T^1_A = E \times T^1_A(M,N))$

Soit $\varphi \in \mathcal{B}(M,N)$; posons $\varphi^*(a,n) = (I \circ \varphi)(\emptyset^{-1}(a), I^{-1}(n))$

$\varphi \rightarrow \varphi^*$ est bijective.

2.5. PROPOSITION. Soit $\emptyset \in \mathrm{Aut}\, A$; soit M un A-module, soit $M^\emptyset$ le A-module déduit de M par transport de structure (dans $M^\emptyset$: $a * m = \emptyset(a)m$, $a \in A$, $m \in M$). Alors pour tout A-module L, $E \times T^1_A(M^\emptyset, L^\emptyset)$ est k-isomorphe à $E \times T^1_A(M,L)$.

Preuve : facile.

NOTATIONS.

Soit $\mathrm{irr}(A)$ l'ensemble des représentations irréductibles de A.

Soit V la relation d'équivalence sur $\mathrm{irr}(A)$ définie par $(\rho_1 V \rho_2) \Longleftrightarrow$ (il existe un k-isomorphisme d'espaces vectoriels I, et il existe $\emptyset \in \mathrm{Aut}\, A$, tels que le diagramme suivant soit commutatif).

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{I} & E_2 \\ \uparrow \rho_1(a) & & \uparrow \rho_2(\emptyset(a)), \quad \forall a \in A \\ E_1 & \xrightarrow{I} & E_2 \end{array}$$

Soit $A^V = \frac{\operatorname{irr} A}{V}$.

Soit ρ^V la classe de $\rho \in \operatorname{irr} A$.

2.6. THEOREME. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $r \in k[q]$; soit $\sigma(m,r)$ la représentation canonique de A dans $\frac{A}{A(p^m+r)}$.
Si $A(p^m+r)$ est unilatère maximal, soit $\sigma^V(m,r) \in A^V$; alors

i) si $r_i \in k[q]$ est tel que $A(p^2+r_i)$ soit maximal $(i = 1,2)$; si de plus $\deg r_1 \neq \deg r_2$, on a $\sigma^V(2,r_1) \neq \sigma^V(2,r_2)$

(exemple si degré r_i est impair et degré $r_1 \neq \deg r_2$; ou $\deg r_1$ est impair et $r_2 = q^{2m}$, $m \in \mathbb{N}^*$)

ii) si $\sigma^V(2,r)$ existe, et si $\deg r \gneq 1$, on a $\sigma^V(2,r) \neq \sigma^V(1,\mu)$, $\mu \in k$.

2.7. COROLLAIRE (que j'explicite pour des raisons historiques).

Soit $m \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\lambda \in k^*$, soient $\mu \in k$, $r \in k[q]$ soit $\sigma^V(m, n, \lambda, \mu) \in A^V$ si $A(p^m+\lambda q^n+\mu)$ est maximal ; et soit $\sigma(m, n, \lambda, \mu)$ la représentation canonique de A dans $\frac{A}{A(p^m+\lambda q^n+\mu)}$. Alors

i) $\sigma^V(2, 2, \lambda, \mu) \neq \sigma^V(1,\nu)$, $\nu \in k$.

Exemple : $\sigma^V(2, 2, 1, 0) \neq \sigma^V(1,\nu)$.

ii) $\sigma^V(2, n, \lambda, \mu) \neq \sigma^V(1,\nu)$, $\nu \in k$ et $n \gneq 1$.

Exemple : $\sigma^V(2, n, 1, 0) \neq \sigma^V(1,\nu)$ si $n \gneq 1$.

iii) $\sigma^V(2, n, \lambda, \mu) \neq \sigma^V(2, 2, \lambda_1, \mu_1)$ si $n \neq 2$, $\lambda_1 \in k^*$ et $\mu_1 \in k$.

Exemple : $\sigma^V(2, n, 1, 0) \neq \sigma^V(2, 2, 1, 0)$ si $n \neq 2$.

iv) $\sigma^V(2, n, \lambda, \mu) \neq \sigma^V(2, m, \lambda_1, \mu_1)$ si $n \neq m$.

Exemple : $\sigma^V(2, n, 1, 0) \neq \sigma^V(2, n+1, 1, 0)$.

v) $\sigma^V(2, n, \lambda, \mu) \neq \sigma^V(2, r)$ si $\deg r \neq n$.

Exemple : $\sigma^V(2, 1, 1, 0) \neq \sigma^V(2, 2n, 1, 0)$.

vi) $\sigma^V(2, r) \neq \sigma^V(2, 2, \lambda, \mu)$ si $\deg r \underset{\neq}{>} 2$.

Exemple : $\sigma^V(2, 3, 1, 0) \Rightarrow \sigma^V(2, 2, \lambda, \nu)$.

Preuves de 2.6. et 2.7.

Soit I l'annulateur de 1 pour chacune des représentations. On a :

	$\dim_k E \times T^1_A(\frac{A}{I}, \frac{A}{I})$
$\sigma(1, \mu)$	0
$\sigma(2, 2, \lambda, \mu)$	1
$\sigma(2, n, \lambda, \mu)$	n-1
$\sigma(2, n, 1, 0)$	n-1
$\sigma(2, r)$	sup(0, degré r-1)

2.8. COROLLAIRE. Soit σ la représentation de A dans $k[X]$ définie par

$$\sigma(p)f = \frac{df}{dX} \quad \text{et} \quad \sigma(q)f = Xf, \quad f \in k[X].$$

Soit σ_ω la représentation de A dans $k[X, X^{-1}]$ (séries de Laurent bornées) définies par

$$\sigma_\omega(p)f = \frac{df}{dX} + \frac{\omega}{X}f \quad \text{et} \quad \sigma_\omega(q)f = Xf \quad \text{où} \quad f \in k[X, X^{-1}] \quad \text{et} \quad \omega \in k - \mathbb{Z},$$

alors :

i) σ et σ_ω sont irréductibles

ii) $\sigma_\omega^V \neq \sigma^V$.

Preuve :

σ est V-équivalente à $\sigma(1, \lambda)$, $\lambda \in h$.

σ_ω est V-équivalente à $\sigma(2, 2, -\frac{1}{4}, \omega + \frac{1}{2})$.

2.9. PROPOSITION. (Dixmier).

Si k est algébriquement clos, si $\omega \in k-\mathbb{Z}$, si $\omega' \in k-\mathbb{Z}$, alors

$$(\overset{\vee}{\sigma}_{\omega} = \overset{\vee}{\sigma}_{\omega'}) \Leftrightarrow (\omega \equiv \mp \omega' \text{ modulo } \mathbb{Z}).$$

Preuve : ([4]) proposition 4.4. ii.

THEOREME . Soit $r \in k[q]$. Alors l'idéal à gauche $A(p^4+r)$ (resp. l'idéal à droite $(p^4+r)A$ est maximal si le degré de r n'est pas multiple de 4.

Preuve : Comme en 1.10.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAMBA (S.K.), Conférences des 29.11 et 6.12, 1973, Séminaire d'Algèbre enveloppante, Jussieu.

[2] BAMBA (S.K.), Conférence du 6.5.1974, Séminaire d'Algèbre non Commutative, I.H.P.

[3] BAMBA (S.K.), Conférence des 3 et 10.6.1975, Séminaire d'Algèbre enveloppante, E.N.S.

[4] DIXMIER (J.), Bull. Soc. Math. France, 94, 1970, pp. 289-301.

[5] Mc CONNELL (J.C.) and ROBSON (J.C.), Homo and Extensions of Modules over A_1 and related rings, Journal of Algebra.

[6] RENTSCHLER (R.) et GABRIEL (P.), C.R. Acad. Sc., t. 265, Série A, 1967.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 2 du 24.11.1975

SUR QUELQUES PROBLEMES OUVERTS EN ALGEBRE NON COMMUTATIVE

par

G. CAUCHON

-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Cet exposé est destiné à faire une mise au point sur quelques problèmes ouverts en théorie des algèbres à identités polynômiales. J'ai fait cette mise au point à la lumière des suggestions que m'ont faites Procesi et Formanek que j'ai rencontrés à la fin du mois de mai 1975.

I. GENERALITES SUR LA THEORIE DES ALGEBRES A IDENTITES POLYNOMIALES.

Rappelons quelques définitions.

Soit C un anneau commutatif et A une C-algèbre.

On dit que A *vérifie une identité polynômiale en tant que C-algèbre* s'il existe un polynôme non nul $P(X_1, \ldots, X_n)$ à coefficients dans C et à n indéterminées non commutatives, qui s'annule identiquement sur A.

On dira qu'un anneau A *vérifie une identité polynômiale* s'il vérifie une identité polynômiale en tant que C-algèbre où C est le centre de A.

On dira qu'*un anneau* A *est à identité polynômiale* si tout quotient propre de A vérifie une identité polynômiale. Il en est en particulier ainsi lorsque A vérifie une identité polynômiale $P(X_1, \ldots, X_n)$ telle que l'idéal de A engendré par les coefficients de P soit A tout entier. On dit alors que P *est une identité* polynômiale homomorphique.

Pour alléger les énoncés, nous remplacerons souvent l'expression "identité polynômiale" par les deux lettres "I.P."

On peut distinguer, pour les anneaux à I.P., deux grands types de problèmes.

1°) Les problèmes de structure.

Ce sont les problèmes du type suivant :

Etant donné un anneau A vérifiant une I.P. (ou une famille d'I.P.), quelles propriétés de A peut-on déduire de ces I.P. ?

Voici deux exemples célèbres de problèmes de ce type :

Problème de Hall : soit A un anneau et n un entier tel qu'on ait $x^n - x = 0$ pour tout $x \in A$. A est-il commutatif ?

Problème de Levitzki : un nil anneau A d'indice borné (c.à.d. tel qu'il existe un entier $n > 0$ avec $x^n = 0$ pour tout $x \in A$) est-il localement nilpotent ? (c.à.d. tout sous-anneau de A engendré par un nombre fini d'éléments est-il nilpotent ?)

Ces deux problèmes sont à l'origine de la théorie moderne des anneaux à I.P. introduite en 1948 par Kaplansky [6]. Le problème de Levitzki a été résolu affirmativement par Levitzki lui même [8]. Ce résultat a été généralisé par Kaplansky [6] qui a montré qu'on peut remplacer l'identité polynômiale $x^n = 0$ par n'importe quelle identité polynômiale.

Le problème de Hall a été résolu par Jacobson [5] qui a montré que la réponse est encore affirmative dans le cas le plus général où n dépend de x. Ce résultat plus général ne relève pas de la théorie des anneaux à I.P., mais de la théorie des anneaux entiers sur leur centre sur laquelle nous ne nous étendrons pas ici bien qu'elle soit très intéressante (voir l'article de Blair [3]).

2°) Les problèmes de classification des I.P. d'un anneau donné.

Ces problèmes ont été étudiés beaucoup plus récemment que les problèmes de structure et nous verrons que de nombreuses questions les concernant sont encore posées à l'heure actuelle.

II. LES PROBLEMES DE STRUCTURE.

Dans toute la suite, les anneaux considérés sont supposés unitaires.

Le théorème suivant est un très beau résultat concernant la structure des anneaux premiers à I.P.. On en trouvera une preuve très accessible dans [9].

THEOREME DE POSNER. *Soit* A *un anneau premier, vérifiant une identité polynômiale de degré* d, *et soit* S *le système multiplicatif des éléments centraux non nuls de* A.

Alors, l'anneau de fractions $Q = S^{-1}A$ est artinien simple de centre $F = S^{-1}C$. De plus, Q est une F-algèbre de dimension finie n^2 où l'entier n est inférieur à la partie entière de $d/2$.

Il en résulte facilement le théorème suivant qui permet de définir la notion de nil-radical d'un anneau à I.P..

THEOREME 2. *Soit* A *un anneau à I.P., et soit* N *l'intersection des idéaux premiers de* A.

Alors N est un nil-idéal de A qui contient tous les nil-idéaux à gauche et tous les nil-idéaux à droite de A.

Par définition, N s'appelle le nil-radical de A.

Démonstration.

Le fait que N soit nil est une propriété générale des anneaux associatifs. En effet, si un élément x de A n'est pas nilpotent, la famille $\mathcal{F}$ des idéaux bilatères de A ne contenant aucune puissance de x est non vide $(0 \in \mathcal{F})$ et inductive. Elle admet un élément maximal $\mathcal{P}$ qui est premier. Comme $x \notin \mathcal{P}$, il en résulte que $x \notin N$. Donc tout élément de N est bien nilpotent.

Le fait que N contienne tout nil-idéal à gauche (resp. à droite) est une conséquence facile de l'existence des I.P. de A. En effet, soit $A' = A/\mathcal{P}$ un quotient premier de A. Par le théorème de Posner, A' se plonge dans un anneau artinien simple Q'. Les annulateurs à gauche des éléments de A' sont les traces sur A' de leurs annulateurs dans Q'. Il en résulte que les annulateurs à gauche des éléments de A' satisfont à la condition de chaîne ascendante. Par suite, d'après un résultat classique ([12] p. 47), A' ne contient pas de nil-idéal à gauche (resp. à droite) non nul. Donc tout nil-idéal à gauche (resp. à droite) de A est bien contenu dans N.

On trouve dans la littérature une foule de problèmes ouverts très intéressants concernant la structure des anneaux à I.P.. Selon Procesi, l'un des plus importants est le suivant :

<u>Problème 1</u>. Soit k un corps commutatif et soit $A = k[x_1, \ldots, x_p]$ une k-algèbre de type fini vérifiant une I.P.. Son nil-radical N est-il nilpotent ?

Faisons quelques remarques très simples sur ce problème.

<u>Remarque 1</u>. k est un sous-corps du centre de A. Donc l'I.P. vérifiée par A est homomorphique, de sorte que A satisfait aux hypothèses du théorème 2.

<u>Remarque 2</u>. La réponse est affirmative et bien connue lorsque A est commutatif puisqu'alors, A est noethérien. Ceci nous conduit à nous demander si une algèbre A satisfaisant aux hypothèses du problème 1 est noethérienne. La réponse est malheureusement négative. Considérons en effet l'algèbre $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4]$ des polynômes à 8 indéterminées commutatives sur un corps commutatif k, et soit A la sous-algèbre de $M_2(R)$ (algèbre

des matrices 2×2 à coefficients dans R), engendrée par les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

A est donc une algèbre de type fini sur k qui vérifie toutes les I.P. de $M_2(R)$. Donc A vérifie l'I.P.

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_4} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)} \quad \text{(voir [2])}$$

Cependant, il est facile de prouver que A n'est pas noethérien à gauche. Pour ceci, posons $\omega_n = XY^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Je dis que : $A\omega_1 \subsetneqq A\omega_1 + A\omega_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq A\omega_1 + \dots + A\omega_n \subsetneqq \dots$.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait écrire XY^n sous la forme d'une somme de monômes αXY^i avec $1 \leq i \leq n-1$ et où α est un monôme en X et Y.

Pour obtenir XY^n, on peut ne retenir, dans cette somme, que les monômes de degré 1 en X et n en Y, de sorte qu'on aurait

$$XY^n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i Y^{n-i} X Y^i \quad (\lambda_i \in k).$$

En spécialisant par $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $XY^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y^{n-i} X Y^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où une contradiction.

L'algèbre A s'appelle l'algèbre des matrices génériques 2×2 à 2 indéterminées X et Y. Procesi a démontré que c'est un anneau intègre [10]. Donc, d'après [4], A n'est pas non plus noethérien à droite, ni noethérien bilatère.

On définit d'une manière analogue l'algèbre des matrices génériques $n \times n$ à p indéterminées ($1 \leq p \leq +\infty$). C'est l'algèbre $k[\xi_1, \dots, \xi_p]$ où les ξ_α sont des matrices $n \times n$ de terme général x_{ij}^α où les x_{ij}^α sont des indéterminées commutatives distinctes sur k.

Pour une étude approfondie des algèbres de matrices génériques, le lecteur pourra consulter le livre de Procesi [10].

Remarque 3. Compte tenu du théorème 2, le problème 1 peut être énoncé sous la forme équivalente suivante :

Si k est un corps commutatif et si A est une k-algèbre de type fini vérifiant une identité polynômiale, tout nil-idéal bilatère $\mathfrak{B}$ de A est-il nilpotent ?

Un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ de A est une sous-algèbre de A (non unitaire en général) et on peut se demander dans un premier temps si un nil-idéal bilatère $\mathfrak{B}$ de A, qui est une k-algèbre de type fini, est nilpotent.

La réponse est affirmative (ce qui laisse un espoir pour que la réponse au problème 1 soit affirmative), elle est due à Kaplansky qui a établi le résultat suivant :

THEOREME 3 [7]. Si k est un corps commutatif, toute nil-k-algèbre de type fini qui vérifie une identité polynômiale, est nilpotente.

En voici une preuve très simple :

Soit $\mathfrak{B}$ une nil-k-algèbre de type fini vérifiant une I.P.

Il est facile de plonger $\mathfrak{B}$ dans une k-algèbre unitaire A, vérifiant une identité polynômiale, et telle que $\mathfrak{B}$ soit un idéal bilatère de A. (Par exemple, on peut munir l'espace vectoriel $A = k \oplus \mathfrak{B}$ de la structure d'algèbre définie par la multiplication :

$$(k,a)(k',a') = (kk', k'a + ka' + aa')).$$

Supposons $\mathfrak{B}$ non nilpotent, et soit $\mathfrak{F}$ la famille des idéaux bilatères de A qui ne contiennent aucune puissance de $\mathfrak{B}$. $(0 \in \mathfrak{F})$.

Je dis que $\mathfrak{F}$ est inductive. Soit, en effet, $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ une sous-famille totalement ordonnée de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{a} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$.

Si $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{F}$, il existe un entier n tel que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{B}^n$.

Soit $x_1, \ldots, x_p$ un système générateur de $\mathfrak{B}$, considéré comme une k-algèbre. $\mathfrak{a}$ contient tous les produits $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ $(1 \leq i_\alpha \leq p)$ qui sont en nombre fini $(\leq p^n)$. Tous ces produits appartiennent alors à un même $\mathfrak{a}_i$ qui contient nécessairement $\mathfrak{B}^n$, ce qui est impossible.

Donc $\mathfrak{F}$ est inductive. Elle admet un élément maximal $\mathfrak{P}$ qui est alors un idéal premier de A ne contenant pas $\mathfrak{B}$, ce qui contredit le théorème 2. Et, nécessairement, $\mathfrak{B}$ est nilpotent.

Cependant, ce théorème ne permet pas de résoudre le problème 1 car, en général, N n'est pas une k-algèbre de type fini ; même dans le cas commutatif. (Par exemple, si $k[X,Y]$ désigne l'algèbre de polynômes à 2 indéterminées commutatives sur k, et si on prend $A = k[X,Y]/X^2 k[X,Y]$, on a $N = A\bar{X}$ qui n'est pas une k-algèbre de type fini).

<u>Remarque 4</u>. On peut particulariser le problème 1 en faisant des hypothèses supplémentaires sur les identités polynômiales vérifiées par l'algèbre considérée. En particulier, on pourrait étudier dans un premier temps, le problème suivant :

<u>Problème 2</u>. Soit n un entier et A une k-algèbre de type fini vérifiant toutes les identités polynômiales de $M_n(k)$ (k désigne toujours un corps commutatif). Son nil-radical N est-il nilpotent ?

Si $A = k[x_1, \ldots, x_p]$, il est facile de voir que, sous les hypothèses du problème 2, il existe un homomorphisme surjectif φ de l'algèbre $k[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ des matrices génériques $n \times n$ à p indéterminées, sur A, tel que $\varphi(\xi_i) = x_i$.

Par suite, le problème 2 est équivalent au problème suivant :

<u>Problème 2^{bis}</u>. Soit $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère de l'algèbre G des matrices génériques $n \times n$ à p indéterminées. Tout idéal de G qui est nil modulo $\mathfrak{B}$

est-il nilpotent modulo $\mathcal{B}$?

Il serait bon, en particulier, de faire une étude approfondie du cas $n = p = 2$, d'essayer de construire des contre-exemples et, si on n'arrive pas à en construire, d'essayer de comprendre pourquoi.

III. PROBLEMES DE DETERMINATION DES I.P. D'UNE ALGEBRE DONNEE.

Le problème le plus naturel, et qui n'est pas toujours résolu, est le suivant :

Problème 3. Classer les I.P. de $M_n(k)$ pour tout entier $n > 0$ et pour tout corps commutatif k.

Pour expliquer ce que nous entendons par là, nous allons introduire la notion de T-idéal d'une k-algèbre libre.

Soit k un corps commutatif et soit $\mathcal{M} = k < X_1, \ldots, X_p, \ldots >$, l'algèbre libre des polynômes à coefficients dans k et en une infinité dénombrable d'indéterminées X_i qui ne commutent pas entre elles.

Soit n un entier positif, et soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de tous les polynômes de $\mathcal{M}$ qui s'annulent identiquement sur $M_n(k)$.

$\mathcal{M}_n$ est donc l'ensemble constitué par le polynôme nul et toutes les I.P. de $M_n(k)$.

Il est clair que $\mathcal{M}_n$ est un idéal bilatère de $\mathcal{M}$ et qu'il est stable par toute substitution des variables, c'est-à-dire : si $P(X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{M}_n$, alors $P(Q_1, \ldots, Q_p) \in \mathcal{M}_n$ quels que soient $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathcal{M}$.

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

DEFINITION. On appelle T-idéal de $\mathcal{M}$ tout idéal bilatère stable par substitution des variables.

L'intersection d'une famille quelconque de T-idéaux de $\mathcal{M}$ est un T-idéal, de sorte qu'on peut définir la notion de T-idéal engendré par un sous-ensemble

E de $\mathcal{U}$. C'est l'intersection de tous les T-idéaux de $\mathcal{U}$ qui contiennent E. C'est aussi l'ensemble de tous les polynômes de la forme $\sum_{\text{finie}} Q\, P(R_1, \ldots, R_p)S$ où $P(X_1, \ldots, X_p)$ décrit E et où les polynômes Q, S et R_i décrivent $\mathcal{U}$.

<u>On notera</u> T(E) <u>le</u> T-<u>idéal de</u> $\mathcal{U}$ <u>engendré par</u> E.

Ceci dit, par "classer les I.P. de $M_n(k)$", on entend :

<u>Problème 3^{bis}</u>. Trouver un système générateur E_n du T-idéal $\mathcal{U}_n$ de $\mathcal{U}$.

Si on est capable de décrire un tel système générateur E_n, on aura bien classé toutes les I.P. de $M_n(k)$ puisque toutes ces I.P. seront de la forme $\sum_{\text{finie}} Q\, P(R_1, \ldots, R_p)S$ où $P(X_1, \ldots, X_p)$ décrit E_n et où les polynômes Q, S et R_i décrivent $\mathcal{U}$. <u>On dira alors que les</u> I.P. <u>de</u> $M_n(k)$ <u>sont conséquences des</u> I.P. <u>de</u> E_n .

On sait résoudre le problème 3^{bis} pour $n = 1$:

<u>PROPOSITION 1. Soit</u> k <u>un corps commutatif</u>.

1°) <u>Si</u> k <u>est infini, les</u> I.P. <u>de</u> k <u>sont conséquences de l'I.P.</u> :

$S_2(X_1, X_2) = X_1X_2 - X_2X_1$.

2°) <u>Si</u> k <u>est fini d'ordre</u> q, <u>les</u> I.P. <u>de</u> k <u>sont conséquences de l'I.P.</u>

$X_1^q - X_1$.

<u>Démonstration</u>.

1°) <u>Supposons</u> k <u>infini</u>, et posons $\mathcal{U}'_1 = T(X_1X_2 - X_2X_1)$. On a évidemment $\mathcal{U}'_1 \subseteq \mathcal{U}_1$.

Soit $P(X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{U}_1$.

Puisque $\mathcal{U}/\mathcal{U}'_1$ est une algèbre commutative, on peut écrire

$$P(X_1, \ldots, X_p) = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p} X_1^{i_1} \ldots X_p^{i_p} + Q(X_1, \ldots, X_p) \quad \text{avec } Q \in \mathcal{U}'_1 .$$

Le polynôme $R = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p} X_1^{i_1} \ldots X_p^{i_p}$ s'annule alors identiquement sur k . Il est donc nul et $P \in \mathcal{U}'_1$. Donc $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}'_1 = T(X_1X_2 - X_2X_1)$.

2°) Supposons k fini d'ordre q, et posons $\mathcal{U}_1' = T(X_1^q - X_1)$. Pour tout $x \in \mathcal{U}/\mathcal{U}_1'$, on a $x^q = x$, de sorte que $\mathcal{U}/\mathcal{U}_1'$ est une algèbre commutative d'après la réponse au problème de Hall. On a évidemment $\mathcal{U}_1' \subseteq \mathcal{U}_1$ et tout polynôme $P(X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{U}_1'$ peut s'écrire

$$P(X_1, \ldots, X_p) = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p} X_1^{i_1} \ldots X_p^{i_p} + Q(X_1, \ldots, X_p)$$

avec $Q \in \mathcal{U}_1'$ et $0 \leq i_j < q$ pour tout j.

Le polynôme $R = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p} X_1^{i_1} \ldots X_p^{i_p}$ est alors identiquement nul sur k. Il est facile de voir qu'il en résulte que $R = 0$, donc que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1' = T(X_1^q - X_1)$

La situation se complique singulièrement dès qu'on aborde le cas $n = 2$. Le problème a, dans ce cas, été résolu partiellement par Razmyslov [11] qui a montré que, si k est de caractéristique zéro, les I.P. de $M_2(k)$ sont conséquences d'un nombre fini d'entre elles. Il n'existe à notre connaissance aucun embryon de réponse au problème 3^{bis} dès que $n \geq 3$. Cependant, compte tenu des résultats connus, on peut raisonnablement poser la question suivante :

Problème 4. Si k est un corps commutatif et si n est un entier positif, les I.P. de $M_n(k)$ sont-elles conséquences d'un nombre fini d'entre elles ?

Une autre question qui se pose à ce sujet est :

"Trouver les identités polynômiales de degré minimal d de $M_n(k)$ - où k est un corps commutatif - et décrire l'espace vectoriel de ces identités".

Il résulte du théorème de Posner tel qu'il a été énoncé, que $d \geq 2n$.

En fait, Amitsur et Levitzki ont montré qu'on a exactement $d = 2n$ [2] :

THEOREME 2.

1°) *Il existe une I.P. de degré 2n de $M_n(k)$, à savoir le polynôme standard :*

$$S_{2n}(X_1, \ldots, X_{2n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(2n)}$$

(où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ).

2°) L'espace vectoriel des I.P. de degré 2n de $M_n(k)$ est engendré par les polynômes $S_{2n}(X_{i_1},\dots,X_{i_{2n}})$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_{2n})$ -sauf pour $k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ et $n = 1$ ou 2 -

En particulier, on voit que, mis à part les cas particuliers ($k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $n = 1$) et ($k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $n = 2$), toute identité polynômiale de degré minimal $d = 2n$ de $M_n(k)$ est une somme de monômes portant tous sur $2n$ indéterminées distinctes. Il n'existe donc pas d'identité polynômiale de degré $d = 2n$, de $M_n(k)$, portant sur moins de $2n$ indéterminées. Ceci a conduit Procesi à poser les questions suivantes [10] :

Problème 5. Soient m et n deux entiers positifs ($m \geq 2$), et soit l'algèbre libre $\mathcal{M} = k < X_1,\dots,X_m >$ (k est un corps commutatif).

a) Déterminer le degré minimal d des I.P. de $M_n(k)$ en $X_1,\dots,X_m$.

b) Décrire le sous-espace vectoriel V_d de $\mathcal{M}$, des I.P. de degré d de $M_n(k)$. Quelle est sa dimension ?

Compte tenu du théorème de Amitsur et Levitzki, on sait résoudre ce problème pour $m \geq 2n$. On a alors $d = 2n$ et, mis à part les cas particuliers ($k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $n = 1$) et ($k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $n = 2$), V_d est un espace vectoriel de dimension $\frac{m!}{(2n)!(m-2n)!}$, il a pour base les polynômes standards $S_{2n}(X_{i_1},\dots,X_{i_{2n}})$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2n} \leq m)$.

Par contre, on ne connaît pas de résultat aussi précis lorsque $m < 2n$. Compte tenu des remarques faites précédemment, on peut seulement dire que $d > 2n$. On peut, par ailleurs, majorer d puisqu'on connait des I.P. non triviales de $M_n(k)$ portant uniquement sur deux variables. Pour en construire, nous introduisons la notion suivante :

Pour tout entier $p > 0$, et tout système $X_1,\dots,X_p, Y_1,\dots,Y_{p-1}$ de $2p-1$ indéterminées, on appelle polynôme standard généralisé en $X_1,\dots,X_p, Y_1,\dots,Y_{p-1}$, et on note $T_p(X_1,\dots,X_p,Y_1,\dots,Y_{p-1})$, le polynôme $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon(\sigma)\, X_{\sigma(1)} Y_1 X_{\sigma(2)} Y_2 \ldots X_{\sigma(p-1)} Y_{p-1} X_{\sigma(p)}$.

Ceci est un polynôme multilinéaire et alterné par rapport aux X_i. Il s'annule donc lorsqu'on remplace les Y_i et les X_i par des matrices $n \times n$ y_i et x_i telles qu'il existe une relation de dépendance linéaire sur k entre les x_i.

Par exemple, $T_{n^2+1}(X_1, \ldots, X_{n^2+1}, Y_1, \ldots, Y_{n^2})$ est une I.P. de $M_n(k)$.

Si x et y sont deux matrices de $M_n(k)$, les matrices $I = x^o, x, x^2, \ldots, x^n$ sont linéairement dépendantes sur k d'après le théorème de Hamilton-Cayley, et on a

$$T_{n+1}(I, x, \ldots, x^n, \underbrace{y, \ldots, y}_{n \text{ fois}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma)\, x^{\sigma(o)} y\, x^{\sigma(1)} y \ldots x^{\sigma(n-1)} y\, x^{\sigma(n)} = 0 .$$

D'où une I.P. non triviale de $M_n(k)$, portant sur deux indéterminées :

$$\underline{Q_n(X,Y) = T_{n+1}[1, X, \ldots, X^n, Y, \ldots, Y] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(o)} Y \ldots X^{\sigma(n-1)} Y X^{\sigma(n)}} .$$

Son degré en Y est n et son degré en X est $\frac{n(n+1)}{2}$. Son degré total est donc $\frac{n(n+3)}{2}$.

Par ailleurs, $Q_n(X, Y_1 + \ldots + Y_{m-1})$ est une I.P. non triviale de $M_n(k)$, de même degré total que la précédente, et en m indéterminées.

Nous en déduisons :

<u>PROPOSITION 3</u>. <u>Si</u> $2 \leq m < 2n$ <u>et si</u> k <u>est un corps commutatif, le degré minimal</u> d <u>des I.P. de</u> $M_n(k)$ <u>en</u> m <u>indéterminées est tel que</u>

$$2n \leq d \leq \frac{n(n+3)}{2} .$$

De plus, si on suppose qu'on n'est pas dans le cas particulier $(k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}},\ n = 2)$, on a $2n < d \leq \frac{n(n+3)}{2}$.

Donc, si $n = 2$ et $k \neq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, on a $4 < d \leq 5$, soit $d = 5$.

Nous pouvons donc énoncer :

<u>COROLLAIRE 4</u>. <u>Si</u> $k \neq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, <u>le degré minimal des</u> I.P. <u>de</u> $M_2(k)$ <u>en</u> 2 <u>ou</u> 3 <u>indéterminées est</u> $d = 5$.

<u>Remarque</u> : si $k = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, le degré minimal des I.P. de $M_2(k)$ en 2 ou 3 indéterminées est $d = 4$. En effet, on démontre que le polynôme suivant est une I.P. de $M_2(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$:

$$XY^3 + YXY^2 + Y^2XY + Y^3X + XY^2 + Y^2X .$$

Ceci nous conduit à poser la question suivante :

<u>Problème 6</u>. Déterminer toutes les I.P. de degré 5, à 2 ou 3 indéterminées de $M_2(k)$, pour $k \neq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

(Ce problème a peut-être une solution assez simple, en caractéristique zéro, compte tenu des résultats de Razmyslov [11]).

Le théorème de Amitsur et Levitzky montre que les polynômes standards $S_{2n}[X_1, \dots, X_{2n}]$ jouent un rôle très important dans toute cette théorie. On pensait, initialement que les I.P. de $M_n(k)$ étaient peut être toutes conséquences de l'I.P. $S_{2n}[X_1, \dots, X_{2n}]$. En fait il n'en est rien comme le montre le résultat suivant dû à Amitsur [1] :

<u>PROPOSITION 5</u>. <u>Quel que soit le corps commutatif</u> k <u>et l'entier</u> $n \geq 2$, <u>l'identité polynômiale</u> $Q_n(X_1, X_2)$ <u>de</u> $M_n(k)$ <u>n'est pas conséquence de l'identité standard</u> $S_{2n}(X_1, \dots, X_{2n})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. AMITSUR, Polynomial Identities. Israel J. of Math. (19). 1974, p. 183-199.

[2] S.A. AMITSUR and J. LEVITZKI, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. (1), 1950, p. 449-463.

[3] W.D. BLAIR, Right noetherian rings integral over their centers. J. of Algebra (27). 1973, p. 187-198.

[4] G. CAUCHON, Anneaux semi-premiers, noethériens, à identités polynômiales (A paraître).

[5] N. JACOBSON, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree. Ann. of Math. (46). 1945, p. 695-707.

[6] I. KAPLANSKY, Rings with a polynomial identity. Bull. Amer. Math. Soc. (54). 1948, p. 575-580.

[7] I. KAPLANSKY, Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc. (68). 1950, p. 334-336.

[8] J. LEVITZKI, On a problem of Kurosh. Bull. Amer. Math. Soc. (52). 1946, p. 1033-1035.

[9] A. PAGE, Centre des anneaux à identités polynômiales. Séminaire d'algèbre non commutative. Conférences n° 6 et 7. 1974. Publications Mathématiques d'Orsay.

[10] C. PROCESI, Rings with polynomial identities. Marcel Dekker, 1973.

[11] P. RAZMYSLOV, Finite basis of the identities of a matrix algebra at second order over a field of characteristic zero. Algebra i Logika (12). 1973, p. 83-113.

[12] G. RENAULT, Algèbre non commutative. Gauthier-Villars, 1975.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

<u>CENTRE D'ORSAY</u>

<u>SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE</u>

Conférence n° 3 du 1.12.1975

SUR LES ANNEAUX SEMI-PREMIERS NOETHERIENS BILATERES A IDENTITE POLYNOMIALE.

par

Christian ROY

-:-:-:-:-:-:-:-

Nous allons exposer ici un résultat obtenu par G. Cauchon en 1975 :
<u>Tout anneau semi-premier à identité polynômiale noethérien bilatère est noethérien à gauche et à droite</u> (Théorème A).

Cela répond à un problème posé par Small :

"Si un anneau à I.P. est noethérien à gauche est-il noethérien à droite ? "

<u>Rappel</u>. Un anneau A de centre C est dit à identité polynômiale s'il vérifie une identité polynômiale $P(X_1 \dots X_n) = 0$ où P est un polynôme à coefficients dans C des n indéterminées non commutatives $X_1 \dots X_n$ ainsi que ses quotients par tout idéal bilatère propre.

Pour un anneau premier il suffit qu'il vérifie une I.P. ([1]).

On utilisera ici le <u>THEOREME DE POSNER</u> : (Théorème B) (voir [1]).

<u>Soit</u> A <u>un anneau de centre</u> C <u>premier à</u> I.P. (<u>de degré</u> d), <u>alors si</u> $S = C - \{0\}$, $S^{-1}A$ <u>est un anneau de matrices</u> $\simeq M_n(D)$ <u>de dimension</u> $\leq [\frac{d}{2}]^2$ <u>sur son centre qui est</u> $F = S^{-1}C$.

I. CAS DES ANNEAUX PREMIERS.

On démontre le théorème suivant :

THEOREME C. Si A est un anneau premier à I.P., noethérien bilatère il est noethérien à gauche.

Il suffira de considérer sur A le produit $a * b = ba$ pour obtenir qu'il est également noethérien à droite donc pour démontrer le théorème A dans le cas où A est premier.

1ère étape. On suppose $S^{-1}A \simeq M_n(D)$ avec D commutatif. Posons

$$u_{ij} = i \begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 .. & 0 & .. 0 \\ 0 .. & 1 & .. 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \end{array}\right) \end{array} : \text{les } u_{ij} \text{ forment une base de } M_n(D).$$

PROPOSITION D. $\exists\, s \in C$ tel que si $x = \sum_{i,j} d_{ij} u_{ij}$ et $x \in A$ alors $s^2 d_{ij} \in C$.

Démonstration.

On peut écrire $\forall ij$, $u_{ij} = s_{ij}^{-1} a_{ij} \begin{cases} s_{ij} \in C \\ a_{ij} \in A \end{cases}$. Posons $s = \prod_{i,j} s_{ij}$

$s\, u_{ij} \in A \begin{cases} \forall i, \\ \forall j \end{cases}$ et $\forall i, j, k$ $s u_{ki}\, x\, u_{jk} s = s^2 d_{ij} u_{kk} \in A$. Formons la somme $\sum_k s\, u_{ki}\, x\, u_{jk} s = s^2 d_{ij}$: c'est un élément central de A donc un élément de C d'où (D).

N.B. : (la commutativité de D intervient dans cette démonstration).

Point clé de la démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une chaîne $J_1 \subsetneq J_2 \ldots \subsetneq J_k$ strictement croissante d'idéaux à gauche dans A. On peut alors trouver des X_ℓ dans $J_\ell - J_{\ell-1}$ $\forall \ell$ et écrire $X_\ell = \sum_{i,j} d_{ij}^\ell u_{ij}$.

Pour aboutir à une contradiction il suffit de prouver qu'il existe des y_i $(i = 1 \ldots k) \in A$ tels que $X_k = \sum_{\ell=1}^{k-1} y_\ell X_\ell$ et $k \in \mathbb{N}^*$, ou encore tels que $d_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^{k-1} y_\ell d_{ij}^\ell$.

L'idée de G. Cauchon pour obtenir ce résultat est de travailler dans le bimodule $A \times \overset{n^2 \text{ fois}}{\ldots} \times A \simeq A \oplus \ldots \oplus A$.

A est bilatère donc $A \times \ldots \times A$ est un A-bimodule noethérien.

Considérons les sous bimodules N_ℓ engendrés par les

$$\omega_k = \underset{i,j}{\oplus} s^2 d_{ij}^k \qquad k = 1 \ldots \ell$$

$\exists\, k$ tel que $N_k = N_{k-1}$ $(A \times \ldots \times A$ est noethérien)

donc $\exists\, y_1 \ldots y_{k-1}$ dans A tels que $\forall\, i\, j$ $\cancel{s^2} d_{ij}^k = s^2 \sum_{\ell=1}^{k-1} d_{ij}^\ell y_\ell$

$\longrightarrow d_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^{k-1} d_{ij}^\ell y_\ell$ ce qui est bien la contradiction attendue et

<u>nous pouvons à présent affirmer que A est noethérien à gauche</u>.

<u>N.B.</u> la commutativité de D intervient encore ici pour pouvoir établir que les

N_ℓ sont du type

$$N_\ell = \underset{i,j}{\oplus} A s^2 d_{ij}^\ell \,.$$

<u>$2^{\text{ème}}$ étape</u>. D n'est plus supposé commutatif. On pose $F = S^{-1}C$ = centre de D $\simeq$ centre $M_n(D)$. On va évidemment se ramener au cas précédent :

il existe un sous corps commutatif maximal K de D qui est une extension séparable donc monogène de F [2]. Ecrivons $K = F(b)$. Prouvons que l'on peut choisir un "b" tel que b soit entier sur C. A priori b vérifie une équation algébrique sur F

$$\sum_0^m b^i \left(\frac{c_i'}{c_i}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad c_m \neq 0 \quad c_i \in C, \quad c_i' \in S \quad \forall\, i.$$

En posant $\gamma_i = (\prod_{j \neq i} c_j)\, c_i'$ on obtient l'équation $\sum_{i=0}^m \gamma_i b^i = 0$ $(\gamma_m \neq 0)$.

Soit $b_1 = \gamma_m b$: $K = F(b) = F(b_1)$.

b_1 vérifie : $b_1^m + \gamma_m \gamma_{m-1} b_1^{m-1} + \gamma_m^2 \gamma_{m-2} b_1^{m-2} + \ldots \gamma_m^m \gamma_0 = 0$

donc b_1 <u>est entier sur</u> C. De là on déduit facilement que tout puissance de b_1 appartient à $C[b_1]$.

Intéressons nous à l'anneau $L = M_n(D) \otimes_F K \simeq M_{nm}(K)$ [2].

L est un anneau à I.P. puisque $M_n(D)$ l'est.

Posons alors $\tilde{A} = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} a_i \otimes b_1^i \;;\; a_i \in A \right\}$.

$\tilde{A}$ est un sous anneau de L.

Nous allons prouver que $\tilde{A}$ vérifie les hypothèses de la $1^{\text{ère}}$ étape.

α) $\tilde{A}$ est à I.P. (c'est un sous anneau de L)

β) $\tilde{A}$ a pour centre $\tilde{C} = \left\{ \sum_{0}^{m-1} c_i \otimes b_1^i \; ; \; c_i \in C \right\}$ c'est un calcul simple

γ) $\tilde{A}$ est un A-bimodule noethérien donc est noethérien bilatère comme anneau

δ) enfin $\tilde{S}^{-1}\tilde{A} \simeq M_{nm}(K)$ avec $\tilde{S} = \tilde{C} - \{0\}$ (les éléments de $\tilde{S}$ sont réguliers car centraux non nuls dans $M_{nm}(K)$ ce qui permet de définir $\tilde{S}^{-1}\tilde{A}$).

Démontrons le point δ : il suffit de prouver que tout élément de L s'écrit $\tilde{s}^{-1}\tilde{a}$ $\tilde{s} \in \tilde{S}$, $\tilde{a} \in \tilde{A}$. A priori un élément X de L s'écrit $X = \sum_{i=0}^{m-1} (s_i^{-1} a_i) \otimes b^i$ avec $s_i \in S$, $a_i \in A$

$$X = \Big(\prod_{i=0}^{m-1} s_i \otimes 1\Big)^{-1} \times \Big(\sum_{i=1}^{m-1} \big(\prod_{j\neq i} s_j\big)\, a_i \otimes b_1^i\Big)$$

ce qui s'écrit $\tilde{s}^{-1} \times \tilde{a}$ avec $\tilde{s} = \Big(\prod_{i=0}^{m-1} s_i \otimes 1\Big)$ $\tilde{a} = \sum_{i=0}^{m-1} \big(\prod_{j\neq i} s_j\big)\, a_i \otimes b^i$.

ε) $\tilde{A}$ est premier puisque $\tilde{S}^{-1}\tilde{A}$ l'est, donc

d'après la $1^{\text{ère}}$ étape $\tilde{A}$ est noethérien à gauche.

Prouvons à présent que A est noethérien à gauche.

L'application ρ définit sur l'ensemble des idéaux à gauche de A par

$$\rho(J) = \tilde{J} = \Big(\sum_{k=1}^{m-1} j_k \otimes b^k \; ; \; j_k \in J \Big) \quad \text{(idéal à gauche de } \tilde{A}\text{)}$$

est une application croissante injective de l'ensemble des idéaux à gauche de A de l'ensemble des idéaux à gauche de $\tilde{A}$. On en déduit donc que A vérifie la condition de chaîne pour les idéaux à gauche.

Le théorème est à présent démontré pour A premier.

II. CAS DES ANNEAUX SEMI-PREMIERS.

THEOREME E. *Un anneau semi-premier à I.P. noethérien bilatère est noethérien à gauche et à droite.*

L'idée est de montrer que A est un A-module noethérien à gauche et à droite en le plongeant dans un produit fini $\prod_{i=1}^{n} A/P_i$ (P_i idéal premier de A).

<u>LEMME F. Si</u> A <u>est noethérien bilatère il existe un nombre fini d'idéaux premiers de</u> A. <u>Soient</u> $P_1, \ldots, P_n$ <u>tels que</u> $P_1 \times P_2 \ldots \times P_n = 0$.

On raisonne par l'absurde. Soit F la famille des idéaux bilatères B de A tels que A/B ne vérifie pas le lemme.

Par hypothèse $F \neq \emptyset$ $(F \supset \{0\})$. A est noethérien bilatère donc F a un élément maximal B.

0 ne peut être premier dans A/B donc $\exists\, B_1$ et $B_2 \begin{cases} B_1 \supsetneqq B \\ B_2 \supsetneqq B \end{cases}$ tels que $B_1 B_2 \subset B$

B étant maximal A/B_1 et A/B_2 vérifient le lemme, donc il existe

$$\left.\begin{matrix} P_1 \ldots P_k \\ P'_1 \ldots P'_{k'} \end{matrix}\right\} \text{ idéaux premiers de } A \text{ tels que } \begin{cases} (P_1 \times \ldots \times P_k) \subset B_1 \\ (P'_1 \times \ldots \times P'_{k'}) \subset B_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_1 \times \ldots \times P_k \times P'_1 \times \ldots \times P'_{k'} \subset B_1\, B_2 \subset B.$$

Mais ceci est impossible puisque B est dans F.

Cette contradiction prouve le lemme.

<u>Démontrons le théorème</u> $P_1 \times P_2 \ldots P_n = 0 \Longrightarrow P_1 \cap P_2 \ldots \cap P_n$ est nilpotent.

Mais A est semi-premier donc $P_1 \cap P_2 \ldots \cap P_n = 0$. Donc

$\rightarrow$ A s'injecte (par morphisme de A-modules) dans $\prod_{i=1}^{n} A/P_i$.

Pour tout i : P_i est premier donc A/P_i est premier à I.P. noethérien bilatère donc noethérien à gauche et à droite.

<u>Il en résulte que A est noethérien à gauche et à droite.</u>

Nous avons ainsi prouvé le théorème dans le cas semi-premier.

III. <u>PREMIERE GENERALISATION</u>.

Nous allons donner une <u>CNS pour qu'un anneau à I.P. noethérien bilatère soit noethérien à gauche</u>.

Remarquons d'abord que le théorème E ne peut être étendu à tout anneau noethérien bilatère à I.P.

Par exemple l'anneau $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; a \times b \in \mathbb{Q}^2 , c \in \mathbb{Z} \right\}$ est noethérien à gauche et à I.P. mais n'est pas noethérien à droite voir ([1], p. 67).

<u>THEOREME G.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau à I.P. noethérien bilatère</u>. N <u>son radical premier, alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

(1) A <u>est noethérien à gauche</u>

(2) N/N^2 <u>est un</u> A-<u>module à gauche noethérien</u>.

Le théorème découle du lemme suivant :

<u>LEMME H.</u> <u>Si</u> B <u>est un idéal bilatère nilpotent d'un anneau</u> A <u>il y a équivalence entre</u>

i) A <u>est noethérien à gauche</u>

ii) A/B^2 <u>est noethérien à gauche</u>.

<u>Démonstration</u>. i $\Rightarrow$ ii évident.
ii $\Rightarrow$ i $\exists$ p tel que $B^p = 0$:
il suffit de montrer que B^2 est noethérien à gauche

et comme $B^p = 0$ cela sera établi, si nous prouvons que B^k/B^{k+1} est noethérien à gauche $\forall k \leq p-1$.

Or A/B^2 est noethérien à gauche donc B/B^2 est un A-module de type fini. Si $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ est un système générateur. Les produits $\bar{b}_{i_1} \times \ldots \times \bar{b}_{i_k}$ engendrent B^k/B^{k+1}. Si nous notons $e_1, \ldots, e_{r_k}$ ces éléments, on en déduit qu'il existe un homomorphisme de A-module surjectif

$$A^{r_k} \longrightarrow B^k/B^{k+1} \quad \text{dont le noyau contient} \quad \overbrace{B^2 \times \ldots \times B^2}^{r_k \text{ fois}}$$
$$(a_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{r_k} a_i e_i \ .$$

Par conséquent B^k/B^{k+1} s'identifie à un sous-module de $(A/B^2)^{r_k}$ qui est noethérien à gauche.

Donc B^k/B^{k+1} est noethérien à gauche ce qui prouve d'après la remarque préliminaire que A est noethérien à gauche.

Nous pouvons alors établir le théorème G.

D'après le lemme F $\exists$ des idéaux premiers $P_1 \dots P_n$ tels que

$$P_1 \times \dots \times P_n = 0 \implies P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \text{ est nilpotent.}$$

Or N est inclus dans cette intersection donc N est nilpotent. D'autre part l'anneau A/N satisfait aux hypothèses du théorème E donc est noethérien à gauche.

Ainsi N/N^2 noethérien à gauche $\implies A/N^2$ noethérien à gauche $\implies$ A noethérien à gauche d'après le lemme H d'où $2 \implies 1$ et $1 \implies 2$ est évident.

IV. PEUT-ON TROUVER UNE AUTRE GENERALISATION DU THEOREME EN N'EXIGEANT PLUS LA CONDITION ANNEAU A I.P. ?

IV.1. Un anneau à I.P. noethérien à gauche étant un T anneau, nous pouvons a priori nous demander si le théorème est valable pour les T anneaux.

L'exemple suivant (inspiré d'un exemple de Jategaonkar) prouve que non.

Remarque. Pour la caractérisation des T anneaux nous utiliserons la condition de Krause [3] :

Un anneau noethérien à gauche est un T anneau s'il satisfait à la condition suivante (Krause) : Pour tout idéal premier P de R et tout idéal à gauche $X \supset P$ tel que X/P soit essentiel dans A/P, il existe un idéal bilatère B tel que $P \subsetneq B \subset X$.

Etude de l'exemple.

Soit $D = F_p(u)$ corps des fractions rationnelles à une déterminée sur F_p. σ l'homomorphisme $d \xrightarrow{\sigma} d^p$ et $A = D([[X]], \sigma) = \{\sum_0^\infty d_i X^i\}$ muni du produit $(\sum_0^\infty y_i X^i) \times (\sum_0^\infty z_i X^i) = \sum_{n=0}^\infty [\sum_{i=0}^n y_i \sigma^i(z_{n-i})] X^n$. Posons enfin pour $Z = \sum_0^\infty z_i X^i$, $Z \neq 0$, $V(Z) = \inf(i, z_i \neq 0)$.

1. On vérifie immédiatement que si $Z \neq 0$, $Z' \neq 0$, $V(Z \times Z') = V(Z) + V(Z')$ en particulier A est intègre (donc premier).

2. LEMME I.

$$\begin{cases} \forall\ Z \neq 0 \quad \exists\, Y \in A \text{ tq. } YZ = X^{\delta} \\ \delta = V(Z). \end{cases}$$

On peut écrire $Z = Z_1 \times X^{\delta}$, $V(Z_1) = 0$.

Il suffit donc d'établir le lemme pour $V(Z) = 0$, $Z = \sum_{0}^{\infty} z_i X^i$; $z_o \neq 0$.

Soit $Y = \sum_{0}^{\infty} y_j X^j$, $YZ = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y_o\, z_o = 1 \\ \vdots \\ y_n \sigma^n(z_o) = -\sum_{0}^{n-1} y_i \sigma^i(z_{n-i}) \quad \forall\, n > \delta\,. \end{cases}$

Les équations précédentes permettent de définir la suite y_j par récurrence et d'obtenir y. D'où le lemme.

Application.

3. A est principal à gauche

Soit I un idéal à gauche $\neq 0$ et $\delta = \inf\{V(Z)\ ;\ Z \in I\}$

$I \subset A\, X^{\delta}$

et $\exists\, Z$ tq. $V(Z) = \delta$ or $\exists\, Y$ tq. $YZ = X^{\delta} \in I \Rightarrow A\,X^{\delta} \subset I$ donc $I = AX^{\delta}$.

Nous voyons donc que A est principal à gauche et que tout idéal à gauche est bilatère.

A vérifie donc Krause : c'est un T anneau.

4. A n'est pas noethérien à droite

On pose $a_i = \sigma^i(u) = u\, P^i$.

Considérons la chaîne d'idéaux $I_n = \sum_{i=o}^{n} a_i\, X^{i+1} A$. C'est une chaîne croissante d'idéaux à droite.

Si $I_n = I_{n-1}$, on peut écrire $\sigma^n(u)\, X^{n+1} = \sum_{0}^{n-1} \sigma^i(u)\, X^{i+1} V^i \quad V^i \in A$ (1)

écrivons $V^i = \sum_{0}^{\infty} v_k^i\, X^k$.

L'égalité (1) entraîne (2) : $\sigma^n(u) = \sum_{0}^{n-1} \sigma^i(u)\, \sigma^{i+1}(v^i_{n-i})$.

Les v^i_{n-i} ne peuvent être tous nuls donc il existe j tel que

$$v^j_{n-j} \neq 0 \quad \text{et} \quad v^k_{n-k} = 0 \quad \text{si} \quad k < j .$$

(2) entraîne : $\sigma^n(u) - \sum_{j+1}^{n-1} \sigma^i(u)\, \sigma^{i+1}(v^i_{n-i}) = \sigma^j(u)\, \sigma^{j+1}(v^j_{n-j})$ ce qui entraîne que $\sigma^j(u)$ appartient à l'image de σ^{j+1} donc que $u \in \operatorname{im} \sigma$.

Ceci est absurde ($d^o u = 1$).

Donc I_n est strictement croissante et A n'est pas noethérien à droite.

IV.2. On ne peut pas non plus remplacer la condition à I.P. par "vérifie une identité polynômiale". En effet si E est un K espace vectoriel de dimension infinie et P l'idéal des endomorphismes de rang fini

$$\mathcal{L}_K(E)/_P \times \mathbb{Z} \quad \text{est une anneau} \quad \begin{cases} \text{vérifiant une I.P.} \\ \text{noethérien bilatère} \\ \text{semi-premier} \end{cases}$$

mais n'est ni noethérien à gauche ni noethérien à droite.

IV.3. Peut-on remplacer la condition "à I.P." par une hypp. un peu moins forte ? On pourrait par exemple penser qu'un anneau premier noethérien à gauche tel que tout idéal contienne un élément central, est noethérien à droite. En fait cela n'est même pas vrai pour les anneaux quasi-simples.

IV.4. Problème ouvert.

Le théorème A reste-t-il vrai pour un anneau A :

- Semi-premier
- à identité polynômiale
- tel que les idéaux engendrés par les éléments du centre vérifient une condition de chaîne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. RENAULT, Algèbre non commutative.

[2] A. BLANCHARD, Les corps non commutatifs (P.U.F.)

[3] L. LESIEUR, Sur les T anneaux. Conférence n° 4 du Séminaire d'Algèbre non commutative, n° 27 (1973). Publications Mathématiques d'Orsay.

[4] JATEGAONKAR, Left principal ideal domains. J. of Algebra 8 (1968), p. 148-155).

[5] G. CAUCHON, Sur les anneaux semi-premiers noethériens à identité polynômiale (à paraître, Bull. Soc. Math., 1976).

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 4 du 8.12.1975

UNE NOTION DE RANG DANS LES FACTEURS REGULIERS AUTO-INJECTIFS A DROITE.

par

L. JEREMY

(d'après un article de J.M. GOURSAUD et L. JEREMY)

-:-:-:-:-:-

Après avoir donné une démonstration simple du résultat de K.R. Goodearl suivant lequel les idéaux bilatères d'un anneau régulier auto-injectif à droite sans idempotents centraux autres que 0 et 1 sont bien ordonnés, nous généralisons à ces anneaux la notion de rang connue pour les anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels (Théorème 2.3 et Remarque 2.5) ; ceci nous permet de montrer que la correspondance entre les idéaux bilatères et les cardinaux qui les déterminent est bijective (Proposition 2.6). Nous utilisons ensuite cette fonction de rang pour étudier les V-anneaux auto-injectifs (Corollaire) ; nous les caractérisons dans le cas de type I [cf. exposé suivant].

NOTATIONS. Sauf indication contraire tous les modules considérés sont des modules à droite, unitaires.

$N \underset{\sim}{\subset} M$ signifie que le A-module N est isomorphe à un facteur direct de M.

$N \sim M$ signifie que N est isomorphe à M.

$N < M$ signifie que N est essentiel dans M.

Si α est un cardinal αM désigne une somme directe, de cardinal α, de modules tous isomorphes à M ; donc si I est un ensemble de cardinal α nous avons $\alpha M \sim M^{(I)}$.

$E(M)$ est une enveloppe injective de M.

$|I|$, ou Card I, désigne le cardinal de l'ensemble I.

(a) est l'idéal bilatère engendré par l'élément a de l'anneau A.

Si S est un sous-ensemble d'un anneau A nous notons $r(S)$ (resp. $l(S)$) l'annulateur à droite (resp. à gauche) de S dans A.

PRELIMINAIRES. Si E et F sont deux A-modules injectifs tels que $E \underset{\sim}{\subset} F$ et $F \underset{\sim}{\subset} E$, alors $E \sim F$ [2].

Nous disons qu'un anneau est auto-injectif s'il est auto-injectif à gauche et à droite. Un anneau unitaire A est un anneau de Baer si l'annulateur à gauche (ou à droite, c'est équivalent) de tout sous-ensemble non vide de A est engendré par un idempotent. Un anneau régulier est de Baer si et seulement si le treillis de ses idéaux à droite (resp. à gauche) est complet. Dans ce cas la borne inférieure d'une famille $(e_iA)_{i\in I}$, où les $(e_i)_{i\in I}$ sont des idempotents de A, est leur intersection tandis que sa borne supérieure est $\bigcup_{i\in I} e_i A = lr(\sum_{i\in I} e_iA)$. Un anneau régulier auto-injectif (resp. continu) à droite est de Baer.

Soit A un anneau de Baer semi-premier ; pour $x \in A$ on a $r(xA) = (1-c(x))A$ où $c(x)$ est un idempotent central appelé couverture centrale de x. Un idempotent e de A est dit abélien si les idempotents de eAe sont centraux, fidèle si $c(e) = 1$. Un anneau est dit fini s'il vérifie la condition $(xy = 1 \Rightarrow yx = 1)$. Un élément $x \in A$ est fini s'il existe un idempotent e tel que $xA = eA$, l'anneau eAe étant fini.

Soit A un anneau auto-injectif à droite et fini. Un idempotent $e \in A$ est dit simple s'il existe un entier n et une famille (e_i), $1 \leq i \leq n$, d'idempotents orthogonaux tels que $e_iA \sim eA$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $c(e)A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iA$; dans ce cas l'entier n est parfaitement déterminé et l'on note $[c(e) : e] = n$. Si A est de type II on dit que e est fondamental s'il existe un entier n tel que $[c(e):e] = 2^n$.

(Un anneau de Baer est de type I s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type II s'il existe un idempotent fini et fidèle et s'il ne contient pas d'idempotents abéliens $\neq 0$, de type III s'il ne contient pas d'idempotents finis $\neq 0$. Tout anneau de Baer admet une décomposition unique en produit d'anneaux de Baer de type I, II et III).

Un anneau est dit <u>proprement infini</u> s'il n'admet pas de facteurs directs bilatères finis. Tout anneau de Baer se décompose en un produit d'un anneau fini par un anneau proprement infini.

Un <u>facteur</u> est un anneau sans idempotents centraux autres que 0 et 1.

Pour ces propriétés et définitions on pourra consulter [1] et [8].

Nous utiliserons souvent les résultats suivants obtenus par G. Renault dans [11] et [12] :

1) <u>THEOREME de comparabilité</u>. Soient e et f deux idempotents d'un facteur régulier auto-injectif à droite ; on a $eA \underset{\sim}{\subset} fA$ ou $fA \underset{\sim}{\subset} eA$.

2) Soit A un facteur régulier auto-injectif à droite ; alors il existe un facteur régulier auto-injectif à droite ; alors il existe un facteur régulier auto-injectif à droite B et un ensemble I tels que $A = \mathrm{End}_B\, E(B^{(I)})$ où A est de type I (resp. II, III) si et seulement si B est de type I fini (resp. II fini, III_α birégulier). (Un anneau birégulier est dit de type III_α, α étant un cardinal, si pour tout $x \in A$, α est le plus petit cardinal tel que $xA \not\precsim E(\alpha\ \ A)$).

Rappelons [4] qu'un facteur A auto-injectif à droite fini est muni d'une <u>fonction de rang</u> normalisée, c'est-à-dire d'une application R de A dans $[0,1]$ telle que

1) $R(a) \neq 0$ pour tout $a \neq 0$, $R(1) = 1$

2) $R(ab) \leq \mathrm{Inf}(R(a), R(b))$ pour tout $a, b \in A$

3) $R(e+f) = R(e) + R(f)$ si e et f sont des idempotents orthogonaux.

Il en résulte les propriétés suivantes :

4) $R(a) = 0 \iff a = 0$

5) $R(a) \leq R(b) \iff aA \subset bA$

6) $R(a+b) \leq R(a) + R(b)$.

Un V-anneau est un anneau pour lequel tout module simple à droite et à gauche est injectif [9].

Des idempotents $(e_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble bien ordonné, sont dits semi-orthogonaux à gauche (resp. à droite) si $e_ie_j = 0$ dès que $i<j$ (resp. $j<i$). Signalons que dans un anneau régulier A toute somme directe dénombrable $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} x_nA$ d'idéaux monogènes peut s'écrire $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} e_nA$ où les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des idempotents semi-orthogonaux à droite. Plus généralement s'il existe un cardinal m tel que A soit n-continu à droite pour tout $n<m$ (cf. § IV) alors toute somme directe d'idéaux à droite monogènes de cardinal m est engendrée par des idempotents semi-orthogonaux à droite. Nous donnons d'abord une démonstration simple d'un résultat de K.R. Goodearl.

I. IDEAUX BILATERES D'UN FACTEUR REGULIER AUTO-INJECTIF A GAUCHE A.

Il résulte du théorème de comparabilité que les idéaux bilatères de A sont totalement ordonnés ; en particulier A admet un idéal bilatère maximal unique et tout idéal bilatère est premier.

LEMME 1. Soit $x\in A$; si $xA\sim 2xA$, alors $xA\sim E(\aleph_0\, xA)$.

Soit $xA = x_1A \oplus y_1A$ où $x_1A \sim y_1A \sim xA$; puis de même, $y_1A = x_2A \oplus y_2A$; on construit ainsi par récurrence $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} x_nA \subset xA$, où $(\forall n)$ $x_nA \sim xA$. Donc $E(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} x_nA) \subset xA \lesssim E(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} x_nA)$. Alors [2], $xA\sim E(\aleph_0\, xA)$.

LEMME 2. Soit $x\in A$ et α un cardinal infini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $xA \sim E(\alpha x A)$

2) $\exists y \in xA,\ yA \sim E(\alpha y A)$

3) $\exists y \in xA,\ xA \supset E(\alpha y A)$

4) $\exists y \in xA,\ \exists \beta \geq \alpha,\ xA \sim E(\beta y A)$

$1 \Longrightarrow 2$ et $2 \Longrightarrow 3$ évident.

$3 \Longrightarrow 4$. Soit $\bigoplus_{i \in I} y_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite isomorphes à yA telle que, si $\beta = \mathrm{Card}\, I$, $\beta \geq \alpha$. Soit $xA = E(\bigoplus_{i \in I} y_i A) \oplus zA$; alors $yA \not\lesssim zA$, donc $zA \lesssim yA$, d'où $xA \lesssim 2E(\bigoplus_{i \in I} y_i A) \sim E(\bigoplus_{i \in I} y_i A) \lesssim xA$. Alors $xA \sim E(\bigoplus_{i \in I} y_i A)$ c'est-à-dire $xA \sim E(\beta y A)$.

$4 \Longrightarrow 1$. $E(\alpha x A) \sim E(\alpha \beta y A) = E(\beta y A) \sim xA$.

LEMME 3. Soient $a, b \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Il existe $x \in A$ et $y \in A$ tels que $x b y = a$.

2) $aA \lesssim bA$.

Dans ce cas, $(a) \subset (b)$.

$1 \Longrightarrow 2$. Si $a = xby$, aA est l'image de byA par la multiplication à gauche par x. Comme aA est projectif, $aA \lesssim byA \subset bA$.

$2 \Longrightarrow 1$. Soit φ un monomorphisme de aA dans bA et soit $by = \varphi(a)$; φ^{-1} est donné par la multiplication à gauche par un $x \in A$, donc $a = xby$.

DEFINITION. On définit une application ρ de A dans l'ensemble des cardinaux $\leq 2^{\mathrm{Card}\, A}$ en posant :

1) $\rho(0) = 0$

2) Si $0 \neq a \in A$, $\rho(A)$ est le plus petit cardinal infini $m \leq 2^{\mathrm{Card}\, A}$ tel que $aA \not\sim E(m a A)$.

LEMME 4. Si $a, b \in A$, on a $aA \lesssim bA \Longrightarrow \rho(a) \leq \rho(b)$.

Cela résulte immédiatement du lemme 2 ($2 \Longrightarrow 1$) et du fait que $xA \sim yA \Longrightarrow \rho(x) = \rho(y)$.

LEMME 5. Soient $a, b \in A$. Alors

1) $\rho(ab) \leq \mathrm{Inf}(\rho(a), \rho(b))$

2) Si $e = e^2$ est fini, $\rho(e) = \aleph_0$

3) Si $e = e^2$ et $f = f^2$ sont orthogonaux, $\rho(e+f) = \rho(e) + \rho(f) = \mathrm{Sup}(\rho(e), \rho(f))$.

4) $\rho(a+b) \leq \mathrm{Sup}(\rho(a), \rho(b))$.

1) résulte du lemme 4.

2) Si e est fini, pour tout cardinal $\alpha > 1$ on a $eA \not\sim E(\alpha e A)$

3) Si e et f sont finis, c'est évident. Sinon on a par exemple $eA \underset{\sim}{\subset} fA$ (donc $\rho(e) \leq \rho(f)$) et f n'est pas fini, d'où $fA \sim 2\, fA$ donc $eA \oplus fA \underset{\sim}{<} fA$. Alors [2], $(e+f)\, A \sim fA$ et $\rho(e+f) = \rho(f)$.

4) Supposons par exemple $aA \underset{\sim}{<} bA$; il existe des idempotents orthogonaux e et f tels que $eA = bA$, $f \in aA$ et $aA + bA = eA \oplus fA$. Alors $a+b \in aA + bA = (e+f)A$ d'où $\rho(a+b) \leq \rho(e+f) = \mathrm{Sup}(\rho(e), \rho(f)) = \rho(e) = \rho(b)$.

Remarque. $\rho(a) < \rho(b) \Rightarrow \rho(a+b) = \rho(b)$; sinon $\rho(a+b) < \rho(b)$ et comme $b = (a+b)-a$, $\rho(b) \leq \mathrm{Sup}(\rho(a), \rho(a+b))$. Contradiction.

DEFINITION. On pose pour tout cardinal infini $\alpha \leq 2^{\mathrm{Card}\, A}$, suivant [3], $H(\alpha) = \{a \in A \mid \rho(a) \leq \alpha\}$.

PROPOSITION 6. Les $H(\alpha)$ ainsi définis sont des idéaux bilatères.

Si $a, b \in H(\alpha)$, alors $a - b \in H(\alpha)$ (Lemme 5) et si $x \in A$, $ax \in H(\alpha)$ et $xa \in H(\alpha)$ (Lemme 5).

LEMME 7. Soient $a, b \in A$. On a

1) $\rho(a) < \rho(b) \Rightarrow aA \underset{\sim}{\subset} bA$

2) $\rho(a) = \rho(b) > \aleph_0 \Rightarrow aA \sim bA$.

1) résulte du théorème de comparabilité et du lemme 4.

2) Supposons par exemple $bA \precsim aA$; alors d'après le lemme 2 $(2 \Rightarrow 4)$, il existe un cardinal $\beta \geq \aleph_0$ tel que $aA \sim E(\beta b A)$; mais $\beta \leq \rho(a) = \rho(b)$ donc $E(\beta b A) \sim bA$ et $aA \sim bA$.

COROLLAIRE 8. Dans un anneau birégulier auto-injectif à droite de type III_α où α est un cardinal infini, tous les idéaux à droite monogènes sont isomorphes.

LEMME 9. Soient $a, b \in A$. Alors

1) $\rho(a) < \rho(b) \Longleftrightarrow (a) \subsetneq (b)$

2) $\rho(a) = \rho(b) \Longleftrightarrow (a) = (b)$.

1) Soient $\alpha = \rho(a)$ et $\beta = \rho(b)$. Si $\alpha < \beta$, alors $a \in H(\alpha)$ et $b \notin H(\alpha)$ donc $b \notin (a)$. Alors $(b) \not\subset (a)$; comme les idéaux bilatères sont totalement ordonnés il en résulte $(a) \subsetneq (b)$.

2) Si $\alpha = \beta > \aleph_0$ on applique le lemme 7.

Si $\alpha = \beta \leq \aleph_0$ supposons par exemple $aA \precsim bA$. Alors $a \in (b)$. Il est facile de voir que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\, aA \precsim bA$, alors bA n'est pas fini. Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\, aA \not\precsim bA$, donc $bA \precsim n\, aA$ et $b \in (a)$. Alors $(a) = (b)$.

Les réciproques s'en déduisent immédiatement.

LEMME 10. Soit α un cardinal infini et $a \in A$ tel que $\rho(a) = \alpha$. Alors $H(\alpha) = (a)$. En particulier tout élément fini engendre $H(\aleph_0)$.

En effet, d'après le lemme 9, (a) contient $\{x \in A \mid \rho(x) \leq \alpha\} = H(\alpha)$; comme on a évidemment $a \in H(\alpha)$, on a $H(\alpha) = (a)$.

THEOREME 11. Les idéaux bilatères de A sont les $H(\alpha)$.

On a vu que les $H(\alpha)$ sont des idéaux bilatères. Inversement soit H un idéal bilatère et soit α le plus petit cardinal $\leq 2^{\text{Card } A}$ tel que $H \subset H(\alpha)$. Ou bien tous les éléments de $H(\alpha)$ correspondent à la même valeur de ρ ; ils engendrent alors chacun $H(\alpha)$; donc $H = H(\alpha)$. Ou bien des éléments de $H(\alpha)$ donnent des valeurs distinctes de ρ ; dans ce cas soit $y \in H(\alpha)$ tel que $\rho(y)$ soit minimal et soit $x \in H(\alpha)$ tel que $\rho(y) < \rho(x)$. Alors $\rho(x) > \aleph_o$ et $xA \sim E(\aleph_o\, xA)$ donc (lemme 2) il existe un cardinal β infini tel que $xA \sim E(\beta y A)$; comme $xA \not\sim E(\alpha x A)$ on a donc $\beta < \alpha$ et $H \not\subset H(\beta)$. Soit $z \in H - H(\beta)$. Alors $zA \sim E(\beta z A)$. On a alors $xA \sim E(\beta yA) \precsim E(\beta z A) \sim zA$ donc $xA \precsim zA$ et $x \in H$. Alors $H = H(\alpha)$.

<u>COROLLAIRE</u>. <u>Les idéaux bilatères de</u> A <u>sont bien ordonnés et tous primitifs</u>.

II. <u>RANG D'UN ELEMENT D'UN FACTEUR REGULIER AUTO-INJECTIF A DROITE</u> A.

Si A est de type I c'est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel ; la notion de rang est connue dans ce cas.

Si A est de type II fini on utilise la fonction de rang telle qu'elle a été définie dans [4] (ou [5]).

1°) <u>Supposons</u> A <u>de type II infini</u> ; alors il existe un facteur régulier B auto-injectif à droite, de type II fini, et un ensemble infini I tels que $A = \mathrm{End}_B\, E(B^{(I)})$. Nous définissons pour tout $a \in A$ le rang $R(a)$ de a : nous posons d'abord $\underline{R(0) = 0}$. Soit p_i le projecteur canonique de $E(B^{(I)})$ sur la composante B_i de $B^{(I)}$; p_i est un idempotent fini de A tel que $p_i\, A\, p_i \sim B$. Nous posons $\underline{R(p_i) = 1}$.

Soit $e = e^2 \in B$; nous posons $\underline{R(e) = D(e)}$, où D est la fonction de rang définie sur B. Plus généralement si e est un idempotent fini de A il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un seul tel que $eA = \bigoplus_{i=1}^{n} q_i\, A \oplus k\,A$ où pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ $q_i A \sim p_o A$ et $kA \precnsim p_o A$, donc $kA \precnsim B$. Nous posons $\underline{R(e) = n + R(k)}$. Evidemment, si $xA \sim eA$ nous posons $\underline{R(x) = R(e)}$. Il reste à définir le rang d'un élément non fini ; pour cela nous établissons le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Soit* f *un idempotent non fini de* A. *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille d'idempotents orthogonaux tous isomorphes à une projection canonique* p_o, *telle que* $\underset{i\in I}{\oplus} e_i A < fA$; *alors le cardinal de* I *est bien déterminé*.

(Une telle famille d'idempotents existe d'après le lemme 1.2).

Soit $(e'_j)_{j\in J}$ une famille d'idempotents vérifiant les mêmes propriétés ; montrons que $|I| = |J|$. D'après le théorème de comparabilité, pour tout $i\in I$, l'idéal à droite $e_i A \cap (\underset{j\in J}{\oplus} e'_j A)$ est extension essentielle d'une somme directe engendrée par des idempotents isomorphes à des idempotents fondamentaux de B, c'est-à-dire de rang $\frac{1}{2^n}$ où $n\in\mathbb{N}$, soit $e_i A \cap (\underset{j\in J}{\oplus} e'_j A) > \underset{k_i\in K_i}{\oplus} g_{k_i} A$; alors, si $K = \underset{i\in I}{\cup} K_i$, on a $\underset{k\in K}{\oplus} g_k A < \underset{j\in J}{\oplus} e'_j A$; comme les e_i sont des idempotents finis chaque K_i est fini ou dénombrable donc $\mathrm{Card}\, K \leq \aleph_o \,\mathrm{Card}\, I = \mathrm{Card}\, I$. Inversement puisque les e_i ne sont pas nuls, $\mathrm{Card}\, K \geq \mathrm{Card}\, I$, donc $\mathrm{Card}\, K = \mathrm{Card}\, I$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous posons $I_n = \{k\in K \mid R(g_k) = \frac{1}{2^n}\}$. Alors $K = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I_n$ et comme les I_n sont disjoints, $\mathrm{Card}\, K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Card}\, I_n$. Par ailleurs, si $k\in K$, nous appelons support de k l'ensemble $\{j\in J \mid e'_j g_k \neq 0\}$. Alors si le support de $k\in K$ est $\{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$, comme un idempotent e' vérifiant $e'A = e'_{j_1} A \oplus \ldots \oplus e'_{j_p} A$ est fini $e'A$ ne contient qu'un nombre fini de g_k isomorphes ; autrement dit pour un entier n fixé, l'ensemble des $g_k \in e'A$ où $k\in I_n$ est fini. Appelons $L_{n,p}$ l'ensemble des $k\in I_n$ dont le support a p éléments. Alors $I_n = \underset{p\in\mathbb{N}^*}{\cup} L_{n,p}$ et comme les $L_{n,p}$ sont disjoints $\mathrm{Card}\, I_n = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Card}\, L_{n,p}$. Considérons l'application $L_{n,p} \to J^p$ qui à $k\in L_p$ fait correspondre le p-uplet dont les composantes sont les éléments de son support rangés dans l'ordre croissant (on suppose J bien ordonné). Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence associée. D'après la remarque précédente chaque classe a un nombre fini d'éléments. Soit α le cardinal de $L_{n,p}$ et β le cardinal de $L_{n,p}/\mathcal{R}$. Si α est fini on a $\alpha < \mathrm{Card}\, J^p$. Supposons α infini. Alors

$\alpha = \sum_{\bar{x} \in L_{nP/\mathcal{R}}} \text{Card } \bar{x} \geq \sum_{\beta} 1 = \beta$, $\alpha = \sum_{\bar{x} \in L_{nP/\mathcal{R}}} \text{Card } \bar{x} \leq \sum_{\beta} \aleph_o = \beta \aleph_o = \beta$ donc $\alpha = \beta$, mais la factorisation canonique de f donne une injection de $L_p/\mathcal{R}$ dans J^p d'où $\alpha \leq \text{Card } J^p = \text{Card } J$. Dans tous les cas nous avons donc $\text{Card } L_{n,p} \leq \text{Card } J$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Card } I_n = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \text{Card } L_{n,p} \leq \aleph_o \text{ Card } J = \text{Card } J$ et $\text{Card } K = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Card } I_n \leq \aleph_o \text{ Card } J = \text{Card } J$ donc enfin $\text{Card } I \leq \text{Card } J$. Les hypothèses sur I et sur J étant symétriques on a donc $\text{Card } I = \text{Card } J$.

DEFINITION. On pose, dans ce cas, $\mathcal{R}(f) = \text{Card } I$ et si $xA = fA$, $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(f)$.

COROLLAIRE 2.2. Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout module libre L sur A les bases de L sont équipotentes.

2) A contient un idempotent central fini $\neq 0$.

$1 \Rightarrow 2$. Sinon A est proprement infini et ${}_AA \sim {}_AA^2$ {11, proposition 4.2}, ce qui contredit 1).

$2) = 1$. Soit $A = B \times C$ où l'anneau B est fini, non nul, L et L' deux modules libres sur A, isomorphes. Alors les B-modules BL et BL' sont libres et isomorphes, et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de L sur A, c'est encore une base de BL sur B. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère maximal de B ; les $B/\mathfrak{m}$ modules $BL/\mathfrak{m}L$ et $B'L'/\mathfrak{m}L'$ sont libres et isomorphes $((\bar{e}_i)_{i \in I}$ est une base de $BL/\mathfrak{m}L)$; mais $B/\mathfrak{m}$ est un facteur fini régulier auto-injectif à droite. On retrouve alors une situation analogue à celle de la démonstration du lemme 2.1.

COROLLAIRE 2.3. Soit x un élément de rang infini d'un facteur A auto-injectif à droite de type II. Alors $R(x)$ est le plus grand cardinal α tel que $xA \sim E(\alpha xA)$.

Soit $\alpha = R(x) \geq \aleph_o$; alors $xA \sim E(\alpha x A)$; soit $\beta > \alpha$; si $xA \sim E(\beta x A)$, alors $R(x) \geq \beta$. Contradiction.

Remarque. Il en résulte que si α est un cardinal sans prédécesseur et si $\beta < \alpha$, $xA \sim E(\beta x A)$, alors $xA \sim E(\alpha x A)$. Autrement dit, si $R(x) \geq \aleph_o$, $\rho(x)$ est le suivant de $R(x)$.

THEOREME. *Soient x, y deux éléments d'un facteur régulier A auto-injectif à droite de type II. On a*

1) $R(x) = 0 \iff x = 0$

2) $R(x) \leq R(y) \iff xA \lesssim yA$

3) *Si* $e \perp f$, $R(e+f) = R(e) + R(f)$.

Ceci généralise la notion de rang connue dans le cas du type I. Ce théorème se déduit immédiatement de ce qui précède.

2°) *Supposons A de type III* ; si A est birégulier tous les idempotents sont isomorphes ; nous posons alors $R(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $R(x) = 1$. Si A n'est pas birégulier alors $A = \mathrm{End}_B E(B^{(I)})$. Soit α le plus petit cardinal tel que $B \not\sim E(\alpha B)$; on a avec les notations du paragraphe I, $\rho(1_B) = \alpha$. Alors $\mathrm{Card}\, I \geq \alpha$, sinon $E(B^{(I)}) \sim B$ et A serait birégulier. Donc l'idéal bilatère maximal de A est $H(\beta)$ où $\beta = \mathrm{Card}\, I$.

Soit p_o la projection de $E(B^{(I)})$ sur une composante B_o parallèlement à la somme directe des autres ; nous posons $R(p_o) = 1$. Plus généralement si $f = f^2 \in A$ et si fAf est birégulier nous posons $R(f) = 1$ sinon soit $fA > \bigoplus_{i \in I} e_i A$ où les $e_i A e_i$ sont biréguliers isomorphes à B, nous montrons comme dans le cas du type II que le cardinal de I est bien déterminé et nous posons $\underline{R(f) = \mathrm{Card}\, I}$.

Remarque 2.5. Cette fonction de rang vérifie encore le théorème 2.4, à ceci près que nous remplaçons le 3) par $R(e+f) = \sup(R(e), R(f))$.

PROPOSITION 2.6. *Soit* A *un facteur régulier auto-injectif à droite ; l'idéal bilatère minimal (resp. maximal) est défini par un cardinal* α *(resp.* β*) ; l'application* $\alpha \to H(\alpha) = \{a \in A \mid R(a) < \alpha\}$ *est une bijection du segment* $[\alpha, \beta]$ *sur l'ensemble des idéaux bilatères propres de* A.

Cette proposition dont la démonstration est évidente, généralise une propriété bien connue dans le cas du type I [7] . Cette fonction de rang R permet de retrouver le théorème 1.11 comme cela est fait dans [7] pour le cas du type I.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 5 du 15.12.1975

SUR LES V-ANNEAUX REGULIERS

par

J.M. GOURSAUD

(Suite de l'exposé précédent)

-:-:-:-:-:-

I. INTRODUCTION ET RAPPELS.

Il est bien connu que pour un anneau commutatif les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est un anneau régulier.

2) Tout A-module simple est injectif (i.e. A est un V-anneau). Cependant dans le cas non commutatif on obtient deux classes d'anneaux distinctes. En effet il existe des anneaux réguliers qui ne sont pas des V-anneaux (par exemple l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps K) et de V-anneaux qui ne sont pas réguliers (cf. Cozzens [15]).

Nous nous proposons ici d'étudier les anneaux réguliers injectifs qui sont des V-anneaux. Tout d'abord en utilisant la notion de rang dans les facteurs, introduite dans l'exposé précédent, nous généralisons les résultats de Osofsky [10], puis nous montrons qu'en général un facteur qui est un V-anneau est birégulier, enfin qu'un anneau injectif de type I est un V-anneau si et seulement si il est produit fini d'anneaux réguliers réduits auto-injectifs.

Tous les modules considérés sont des A-modules à droite. Si B est un facteur auto-injectif à droite, alors d'après [12] B est de la forme $B = \mathrm{End}_A E(A^{(I)})$

où a) A est un corps si B est de type I

b) A est de type II si B est de type II

c) A est birégulier si B est de type III.

Nous notons $\mathfrak{M} = H(\beta)$ l'idéal bilatère maximal de B et $\mathfrak{m} = H(\alpha)$ son idéal bilatère minimal.

Si B n'est pas quasi-simple, de type I ou II alors $\alpha = \aleph_0$ et si B est de type III alors α est le plus petit cardinal tel que A ne soit pas isomorphe à l'enveloppe injective de α copies de A. Si E est un ensemble nous notons $|E|$ son cardinal.

II. ANNEAUX QUOTIENTS D'UN FACTEUR NON BIREGULIER.

LEMME 1. On a : a) $|B| = |A|^{|I|}$

b) $|A| \leq 2^{|I|} \iff |B| = 2^{|I|}$.

En effet : $|\mathrm{End}_A E(A^{(I)})| \leq |\mathrm{Hom}(A^{(I)}, A^I)| \leq |\mathfrak{F}(I, A^I)| \leq |A|^{|I|}$

et $|\mathrm{End}_A E(A^{(I)})| \geq |\mathrm{Hom}(A^{(I)}, A)| = |\mathfrak{F}(I, A)| = |A|^{|I|}$

car $E(A^{(I)})$ s'injecte dans A^I.

LEMME 2. Si γ est un cardinal tel que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ et H un idéal à droite tel que $H(\gamma) \subset H$ alors :

a) $\forall a \in H(\gamma)$ $\mathrm{Hom}_B(aB, B/H) = (0)$

b) $\forall a \notin \mathfrak{M}$ $\mathrm{Hom}_B(aB, B/H) \neq (0)$.

a) Si $a \in H(\gamma)$ alors $a = ea$ avec $e \in H(\gamma)$, $e = ax$ d'où $f(a) = f(e)\, a \in \overline{O}$ si $f \in \mathrm{Hom}_B(aB, B/H)$.

b) Si $a \notin \mathfrak{M}$ alors $aB \simeq B$ d'où l'assertion.

Si $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble de I on note $e_{\mathfrak{a}}$ l'idempotent de B qui prolonge la projection canonique de $A^{(I)}$ sur $A^{(\mathfrak{a})}$. Si $\mathfrak{a} = \{i\}$ nous noterons $e_{\mathfrak{a}} = e_i$.

On vérifie facilement que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux sous-ensembles de I. On a :

$$e_{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{b}} = e_{\mathfrak{b}}\, e_{\mathfrak{a}} = e_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \quad \text{et} \quad R(e_{\mathfrak{a}}) = |\mathfrak{a}|\,.$$

LEMME 4 (Tarski). *Tout ensemble infini* I *est réunion d'une famille d'ensembles* J *tel que* $\operatorname{card} J = 2^{\operatorname{card} I}$, *les éléments de* J *étant tous de cardinal* $|I|$ *et le cardinal de l'intersection de deux d'entre eux est strictement inférieur à* $|I|$.

Pour démontrer ce lemme on utilise l'hypothèse généralisée du continu sauf dans le cas où $|I| = \aleph_0$.

THEOREME 1 [Théorème 1 de [10] dans le cas des espaces vectoriels]. *Si* $|A| \leq 2^{|I|}$, *le seul* B*-module monogène injectif annulé par l'idéal bilatère maximal est* (0).

Si $B = \operatorname{End}_A E(A^{(I)})$, le lemme précédent permet de définir 2^{β} idempotents $e_{\mathfrak{a}(\mu)}$ indépendants modulo $H(\beta) = \mathfrak{M}$. Soit H un idéal à droite tel que B/H soit injectif ; alors d'après le lemme 2 $\operatorname{Hom}(e_{\mathfrak{a}(\mu)}B, B/H) \neq 0$ pour tout élément $\mathfrak{a}(\mu)$ de J. Ceci nous permet donc de construire pour chaque $e_{\mathfrak{a}(\mu)}$ au moins deux morphismes de $e_{\mathfrak{a}(\mu)}B$ dans B/H et par conséquent au moins $2^{2^{\beta}}$ applications de $\mathcal{K} = \sum_{\mu \in J} e_{\mathfrak{a}(\mu)}B$ dans B/H. D'autre part $|B/H| \leq |B| = 2^{\beta}$ il y a donc au plus 2^{β} de ces applications qui se prolongent à B et B/H n'est pas injectif.

COROLLAIRE 1. [10]. *Soit* K *un corps de cardinal* $\leq 2^{\aleph_0}$ *et* V *un espace vectoriel de dimension dénombrable. Alors tout* B*-module monogène injectif est isomorphe à un facteur direct de* B.

Soit H un idéal à droite de B tel que B/H soit injectif et $H' = E(H)$ avec $H' \oplus M = B$. H'/H est un facteur direct de B/H et par conséquent H'/H est injectif. Or $H'/H \simeq B/H \oplus M$ et $H \oplus M$ est un idéal essentiel de B, donc $H \oplus M$ contient le socle de B et $B/H \oplus M = (0)$ d'après le théorème 1.

<u>THEOREME 2</u> [10]. <u>Soit</u> B <u>l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension</u> $\aleph \geq \aleph_0$ <u>sur un corps de cardinal</u> $\leq 2^{\aleph_0}$. <u>Alors tout</u> B-<u>module simple injectif est isomorphe à un idéal à droite de</u> B.

Soit B/H un B-module simple et e un idempotent de plus petit rang parmi les idempotents n'appartenant pas à H. On a alors : $eB + H = B$ et $B/H \simeq eB + H/H \simeq eB/eB \cap H$ d'où en posant $N = eB \cap H$ $B/H \simeq eB/N$. On va démontrer que $N = 0$ en remarquant que eBe/Ne est un eBe-module injectif.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal à droite de eLe et ψ un élément de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{J}, eBe/Ne)$, montrons que ψ se prolonge à eBe. Posons $M = \mathfrak{J}B$ et soit φ le morphisme défini par

$$\varphi : M \longrightarrow eB/N$$

$$\varphi\Big(\sum_{\sigma=1}^{n} i_\sigma r_\sigma\Big) = \sum_{\sigma=1}^{n} \psi(i_\sigma) r_\sigma \quad \text{avec } i_\sigma \in \mathfrak{J}\ .$$

φ est bien défini car si $\Sigma i_\sigma r_\sigma = 0$, il existe un idempotent f tel que $\Sigma i_\sigma e Be = f e Be$ et

$$\varphi(\Sigma i_\sigma r_\sigma) = \Sigma\, \varphi(f) i_\sigma r_\sigma = \psi(f) \Sigma i_\sigma r_\sigma = 0$$

B/H étant injectif, φ se prolonge en un élément g de $\mathrm{Hom}_B(B, eB/N)$ et la restriction de g à eBe prolonge ψ. De plus on vérifie facilement que l'idéal maximal de eBe est $\mathfrak{m}_{eBe} = \{x \in eBe/R(x) < R(e)\}$ et d'après la définition de e $\mathfrak{m}_{eBe} \subset Ne = H \cap eBe$. D'après le théorème 1 si R(e) est infini alors $eBe/Ne = (0)$ d'où $e \in Ne$ et $e \in H$ ce qui est impossible, on a donc $R(e) = 1$ et $eB \cap H = 0$ c'est-à-dire $B/H \simeq eB$.

<u>THEOREME 3</u> ([10] dans le cas des espaces vectoriels).

<u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal bilatère propre non nul d'un facteur auto-injectif à droite</u> B, <u>alors</u> $B/\mathfrak{a}$ <u>n'est pas un</u> B-<u>module injectif</u>.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de B, alors il existe un cardinal γ tel que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ et $\mathfrak{a} = H(\gamma)$. Divisons l'ensemble I en β sous-ensembles disjoints $(\mathfrak{a}_j)$, $j \in J$ tels que pour tout j, $|\mathfrak{a}_j| = \beta$. Les idempotents $e_{\mathfrak{a}_j}$ sont orthogonaux et indépendants modulo $\mathfrak{a}$ (Lemme 3). Soit S un système maximal d'idempotents indépendants modulo $\mathfrak{a}$ contenant $\{e_{\mathfrak{a}_j}, j \in J\}$.

Alors $S = \{e_{B_k}, k \in K\}$ avec $\forall\, k\ B_k \subset I$, $J \subset K$ et $\forall j \in J \quad B_j = \mathfrak{a}_j$.

Soit $\mathfrak{J} = \sum_{k \in K} e_{B_k} B$ et soit φ l'homomorphisme de J dans $B/\mathfrak{a}$ défini par :

$\varphi : \mathfrak{J} \longrightarrow B/\mathfrak{a}$

$$\varphi(e_{a_j}) = \overline{e_{a_j}} \qquad \forall\, j \in J$$

$$\varphi(e_{B_k}) = 0 \qquad \forall\, k \in K-J .$$

Si $B/\mathfrak{a}$ est injectif, φ se prolonge en $\psi \in \mathrm{Hom}_B(B, B/\mathfrak{a})$. Posons $\psi(1) = \overline{m}$.

Alors :

$$\forall\, j \in J, \quad \psi(e_{\mathfrak{a}_j}) = \overline{e_{\mathfrak{a}_j}} = \overline{m}\ e_{\mathfrak{a}_j} \qquad (1)$$

$$\text{et} \quad \forall\, k \in K-J, \psi(e_{B_k}) = \overline{m}\, e_{B_k} = 0 \qquad (2)$$

Montrons que si $r \in \mathfrak{a}$ alors $|\{e_i | e_i r \neq 0\}| < \gamma$.

En effet si B est de type I ou III on a :

$\mathfrak{a}B \cap \bigoplus_{i \in I} e_i B > \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha B$ où les g_α sont isomorphes au e_i, par conséquent d'après le lemme 2.1 de l'exposé précédent on a :

$$|\{e_i | e_i r \neq 0\}| < \gamma$$

si B est de type II

$rB \cap \oplus e_i B > \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha B$ où les g_α sont des idempotents fondamentaux ;

en posant comme dans le lemme 2.1 de l'exposé précédent $\Lambda_n = \{\alpha | \alpha \in \Lambda, R(g_\alpha) = \frac{1}{2^n}\}$ on a $|\Lambda_n| \leq \aleph_0 R(r)$ d'où

$$|\{e_i | e_i r \neq 0\}| = |\{e_i | e_i (\oplus g_\alpha B) \neq 0\}| \leq \aleph_0 |\Lambda| = \aleph_0 R(r) < \gamma .$$

En appliquant ce résultat à (1) et (2) on obtient :

$$(1)' \qquad \forall\, j \in J \,|\, \{e_i \,|\, e_i(m e_{\mathcal{A}_j} - e_{\mathcal{A}_j}) \neq 0\} \,| < \gamma$$

d'où
$$\forall\, j \in J \,|\, \{i \in \mathcal{A}_j \,|\, e_i m e_i - e_i \neq 0\} \,| < \gamma \qquad (3)$$

et
$$(2)' \qquad \forall\, k \in K-J \,|\, \{e_i \,|\, e_i\, m\, e_{B_k} \neq 0\} \,| < \gamma$$

et
$$\forall\, k \in K-J \,|\, \{i \in B_k \,|\, e_i\, m\, e_i \neq 0\} \,| < \gamma \qquad (4)$$

Comme $|\mathcal{A}_j| = \beta \geq \gamma$, on peut choisir un élément $i_{(j)}$ de $\mathcal{A}_j$ tel que $e_{i(j)} m e_{i(j)} = e_{i(j)}$.
Adjoignons à S l'idempotent e_D avec $D = \{i(j) \,|\, j \in J\}$ le système $S \cup \{e_D\}$ est lié car S est maximal. Or $|D| = \beta$, il existe donc un élément $k \in K-J$ tel que

$$|B_{k_o} \cap D| \geq \gamma \quad \text{(lemme 3)}$$

et $\{i \in B_{k_o} \,|\, e_i\, m\, e_i \neq 0\} \geq |B_{k_o} \cap D| \geq \gamma$ par conséquent $B/\mathcal{A}$ n'est pas injectif.

III. <u>V-ANNEAUX REGULIERS INJECTIFS</u>.

On sait que l'anneau A des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension infinie (c'est-à-dire un facteur régulier auto-injectif à droite de type I infini) n'est pas un V-anneau et plus précisément on sait que V est un A-module simple non injectif. Nous cherchons ce que devient cette propriété dans le cadre plus général d'un anneau régulier auto-injectif à droite.

<u>LEMME 5. Soit</u> A <u>un anneau auto-injectif à droite</u>, I <u>un ensemble infini</u>, $B = \mathrm{End}_A\, E(A^{(I)})$, $E = E(A^{(I)})$. <u>Alors</u> E <u>est un</u> B-<u>module à gauche monogène non injectif isomorphe à un facteur direct de</u> B.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de $A^{(I)}$, p_i la projection de E sur e_iA suivant cette base, pour tout $i \in I$, $p_i \in B$. Soit φ l'application B-linéaire de $\underset{i\in I}{\oplus} Bp_i$ dans E définie par $\varphi(p_i) = e_i$ pour tout $i \in I$; si φ se prolonge à B soit $x = \varphi(1)$; comme $A^{(I)} \subset A^I$ on peut supposer $E \subset A^I$ donc $x \in A^I$; soit $x = (x_i)_{i\in I}$.

Alors $\varphi(p_i) = e_i = p_i(x)$; donc pour tout $i \in I$, $x_i = 1$ et $x \notin E$, c'est une contradiction donc E n'est pas injectif.

Soit $y \in E$ et soit $i \in I$; comme $r_A(e_i) = 0$ il existe une application A-linéaire, soit f_i de e_iA dans yA telle que $f(e_i) = y$; f se prolonge en $g \in B$ et $g(e_i) = y$ donc $y \in B\, e_i$ et $E \subset B\, e_i$; comme $B\, e_i \subset E$ on a $E = B\, e_i$; or $1_B(e_i) = B(1-p_i)$ donc $B\, e_i \sim B/B(1-p_i)$ c'est-à-dire $B\, e_i \sim B\, p_i$.

<u>THEOREME 4. Soit A un anneau auto-injectif à droite ; soit c le plus petit cardinal qui majore strictement les cardinaux des sommes directes contenues dans A_A alors, si $|I| \geq C$, $B = \mathrm{End}_A\, E(A^{(I)})$ n'est pas un V-anneau.</u>

Soit $E = E(A^{(I)}) \subset A^I$ et soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche maximal de A ; alors $E\mathfrak{m} = \{x \in E \mid l_A\, r_A(x) \subset \mathfrak{m}\}$; c'est un sous B-module de E ; montrons qu'il est maximal. On sait, en reprenant les notations de la démonstration du lemme 3.3 que $E/E\mathfrak{m} = \overline{B\, e_i}$, il suffit donc de prouver que si $y \in E - E\mathfrak{m}$ on a $\overline{e_i} \in \overline{By}$; or $l\, r(y) \not\subset \mathfrak{m}$ donc il existe un idempotent e de A tel que $r(y) = e\,A$ avec $1 - e \notin \mathfrak{m}$; alors $A = Am + Aa(1-e)$ où $m \in \mathfrak{m}$ et il existe un idempotent f de Am tel que $A = Af \oplus A(1-e)$; alors il existe un idempotent f' tel que $Af = Af'$ et $A(1-e) = A(1-f')$, donc $f'A = r(y)$; il existe alors une application linéaire φ de yA dans $(1-f')A$ telle que $\varphi(y) = 1-f'$, donc une application linéaire φ_i de yA dans $e_i(1-f')A$ telle que $\varphi_i(y) = e_i(1-f')$; φ_i se prolonge en $\psi \in B$ et l'on a $e_i - \psi(y) = e_if'$ où l'on déduit $e_i - \psi(y) \in \mathfrak{m}E$ donc $\overline{e_i} = \overline{\psi(y)}$ c'est-à-dire $\overline{e_i} \in \overline{By}$. <u>$E/E\mathfrak{m}$ est donc un B-module simple</u> ; montrons qu'il n'est pas injectif.

Pour tout $i \in I$ on a $l\, r(e_i) = A$, donc $e_i \notin E\,\mathfrak{m}$ et $e_i \neq 0$. On considère l'application φ de $\bigoplus_{i \in I} Bp_i$ dans $E/E\mathfrak{m}$ définie par $\varphi(p_i) = \overline{e_i}$. Si $E/E\mathfrak{m}$ est injectif, φ se prolonge à B par ψ. Posons $\bar{x} = \psi(1)$. Alors comme $\bigoplus_{i \in I} e_i\, A < E$, on a $xA \cap \bigoplus_{i \in I} e_i\, A < xA$ il existe donc des éléments $(y_j)_{j \in J}$ de E

tels que $xA \cap \bigoplus_{i\in I} e_iA > \bigoplus_{j\in J} y_jA$ d'après l'hypothèse faite sur Card I, on a Card J < Card I, chaque y_j se décomposant sur un nombre fini de e_iA, on en déduit que : $\bigoplus_{j\in J} y_jA \subset \bigoplus_{j'\in J'} e_{j'}A$ avec $J' \subset I$ et card J' = card J, donc $xA = E(\bigoplus_{j\in J} e_jA) \subset E(\bigoplus_{j'\in J'} e'_jA)$ il existe donc un élément i_o de I tel que $p_{i_o}(x) = 0$; alors $\psi(p_{i_o}) = p_{i_o}(\psi(1)) = p_{i_o}\bar{x} = \overline{p_{i_o}(x)} = 0 = \overline{e_{i_o}}$, d'où $e_{i_o} \in E\mathfrak{M}$, ce qui est impossible, par suite $E/E\mathfrak{M}$ n'est pas injectif.

Des résultats qui précèdent on déduit le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE 2</u>. <u>Soit</u> A <u>un facteur auto-injectif à droite qui est un</u> V-<u>anneau</u>, <u>si</u> $B = \mathrm{End}_B(E(A^{(I)}))$,

1) <u>Si</u> B <u>est de type</u> I, <u>il est fini</u>.

2) <u>Si</u> B <u>est de type</u> II, <u>soit</u> $|I|$ <u>est fini</u>, <u>soit</u> $|I| = \aleph_o$ <u>et</u> $|A| > 2^{\aleph_o}$.

3) <u>Si</u> B <u>est de type</u> III, B <u>est birégulier</u>.

La deuxième assertion est une conséquance des théorèmes 3 et 4, la troisième s'obtient en remarquant que $B \simeq E(B^{(I)})$.

Ce corollaire ne donne que des résultats partiels sur les V-anneaux, cependant nous pouvons améliorer ces résultats dans le cas d'un anneau régulier auto-injectif à droite de type I.

<u>LEMME 6</u>. <u>Soit</u> A <u>un</u> V-<u>anneau régulier dont le socle est essentiel</u>, <u>alors</u> A <u>a même enveloppe injective à gauche et à droite</u>.

D'après [13] il suffit de démontrer que A vérifie les conditions K_l et K_r. Soit I un idéal à droite non essentiel de A, alors il existe un idéal simple S tel que $I \cap S = (0)$. Si x est un élément non nul de S, A étant un V-anneau, il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ contenant I et ne contenant pas x, par conséquent $\mathfrak{M} \cap S = (0)$ et I contenu dans un facteur direct propre de A.

<u>LEMME 7</u>. <u>Soit</u> e <u>un idempotent d'un anneau</u> A. <u>Si</u> A <u>est un</u> V-<u>anneau</u>, eAe <u>est un</u> V-<u>anneau</u>.

Soit I un idéal à droite de eAe et x un élément de eAe n'appartenant pas à I. L'ensemble des idéaux à droite J de A contenant (1-e)A et tel que eJe = I admet un élément maximal $\mathfrak{K}$, A étant un V-anneau il existe un idéal à droite maximal $\mathfrak{M}$ de A tel que $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$ et $x \notin \mathfrak{M}$, car x ne peut appartenir à $\mathfrak{K}$. De plus $e\mathfrak{M}e$ est un idéal à droite maximal de eAe.

<u>PROPOSITION 1</u>. <u>Un</u> V-<u>anneau auto-injectif à droite de type</u> I <u>est un produit fini d'anneaux de matrices sur des anneaux réguliers réduits auto-injectifs</u>.

Si A est produit fini d'anneaux de matrices sur des anneaux réguliers réduits auto-injectifs, alors A est un Σ-V-anneau d'après [6, Proposition 2.8]. Réciproquement, d'après [11, Proposition 2.9], si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal du cente de A, $A/\mathfrak{M}A$ est extension essentielle de son socle qui est isotypique. Par conséquent d'après le lemme 6, $A/\mathfrak{M}A$ est un anneau simple et A est produit fini d'anneaux de matrices sur des anneaux réguliers réduits auto-injectifs.

<u>COROLLAIRE 3</u>. <u>Il existe un</u> V-<u>anneau régulier dont l'enveloppe injective n'est pas un</u> V-<u>anneau</u>.

En effet soit K un corps, $B = \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n(K)$, le sous-anneau $A = \{x \in B / x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ \exists\, p, \forall\, m \geq p\ x_m = x_p \in K\}$, est un Σ-V-anneau dont l'enveloppe injective est B qui n'est pas un V-anneau d'après la proposition précédente.

Récemment B. Hartley a démontré que si G est un groupe dénombrable, et K un corps, alors KG est un V-anneau si et seulement si G est extension finie d'un groupe abélien et KG est un anneau régulier. Ceci nous permet de caractériser les Σ-V-anneaux de groupe.

Les seuls exemples connus de V-anneaux réguliers injectifs sont des anneaux de type I ; on peut alors se poser la question suivante :

Existe-t-il des V-anneaux réguliers injectifs de type II ou III ?

De plus les seuls V-anneaux réguliers que nous connaissons sont des Σ-V-anneaux (i.e. tout module simple est injectif). Pour les anneaux réguliers on a des réponses partielles dans le cas des anneaux de groupe.

PROPOSITION. *Soient* K *un corps commutatif,* G *un groupe localement fini dont l'ordre de tout élément est inversible dans* K . *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) KG *est un* Σ-V-*anneau*

2) G *est extension finie d'un groupe abélien.*

De plus si G *est dénombrable, ou si* $|K| > |G|$ *ces conditions sont équivalentes à :*

3) KG *est un* V-*anneau.*

L'équivalence des assertions 1) et 2) découle d'un résultat de B. Hartley dans le cas général et de [6] dans le cas où K est de caractéristique $p \neq 0$ ou de caractéristique 0 et contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ainsi que de Farkas et Snider dans le cas où le groupe est dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERBERIAN : Baer * rings, Springer-Verlag (1972).

[2] R.T. BUMBY : Modules which are isomorphic to submodules of each other. Arch. Math. 16 (1965) p. 184-185.

[3] K.R. GOODEARL : Prime ideal in regular self-injective rings. Can. J. Math. vol. XXV n° 4 (1973) p. 829-839.

[4] J.M. GOURSAUD et L. JEREMY : Fonction de dimension sur un anneau régulier auto-injectif à gauche fini. Séminaire d'algèbre de Poitiers (1972).

[5] J.M. GOURSAUD et L. JEREMY : Sur l'enveloppe injective des anneaux réguliers. Comm. in Algebra, 3 (9) (1975) p. 763-779.

[6] J.M. GOURSAUD et J. VALETTE : Sur l'enveloppe injective des anneaux de groupe réguliers. Bull. Soc. Math. France, 103 (1975), p. 91-102.

[7] N. JACOBSON : Structure of rings. Amer. Math. Soc. (1968).

[8] I. KAPLANSKY : Rings of Operators. W.A. Benjamin Inc (1968).

[9] G. MICHLER et O.E. VILLAMAYOR : On rings whose simple modules are injective. J. Algebra 25 (1973), p. 185-201.

[10] B. OSOFSKY : Cyclic injective modules of full linear rings. Proc. Amer. Math. Soc. 17-1 (1966) p. 247-253.

[11] G. RENAULT : Anneaux réguliers auto-injectifs à droite. Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), p. 237-254.

[12] G. RENAULT : Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite. J. Algebra vol. 36, n° 1, (1975), p. 77-84.

[13] Y. UTUMI : On rings of which any one-sided quotient ring are two-sided. Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), p. 141-147.

[14] Y. UTUMI : On the continuity and self-injectivity of a complete regular ring. Can. J. Math. 18 (1966), p. 404-412.

[15] J.H. COZZENS : Homological properties of the ring of differential polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 76, n° 1 (1970).

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D' ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 6 du 5.1.1976

SUR DES CONDITIONS DE CHAINES ASCENDANTES DANS DES MODULES LIBRES

par

G. RENAULT

-:-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Tous les anneaux considérés dans cet article sont unitaires et lorsque nous parlerons de module sans autre précision, il s'agira de module à droite unitaire. Soient M un A-module et $n \geq 1$ un entier. On dit que M est n-acc, si toute suite croissante de sous-modules de M engendrés par n générateurs est stationnaire.

Ces conditions de chaînes, étudiées en partie en théorie des groupes abéliens, jouent un rôle important dans la théorie des modules factorables de A.M. Nicolas [5,6].

Nous montrons qu'il existe des anneaux commutatifs intègres A non noethériens, tels que tout A-module libre soit n-acc pour tout $n \geq 1$ et qu'il existe une large classe d'anneaux noethériens à droite A tels que tout A-module libre soit n-acc. Mais il existe des anneaux noethériens à droite tels que les A-modules libres, qui ne sont pas de type fini, ne vérifient pas la condition de chaîne ascendante sur les sous-modules monogènes.

Rappelons qu'un anneau A est à idéal singulier (à droite) nul si l'annulateur à droite de tout élément $\neq 0$ de A n'est pas essentiel dans A. Un A-module M est de dimension de Goldie d, si son enveloppe injective est somme directe de d modules injectifs indécomposables. On trouvera par exemple dans [7] les compléments indispensables pour la compréhension de ce travail.

I. UN CONTRE EXEMPLE.

Nous allons montrer qu'il existe un anneau commutatif A non noethérien tel que tout A-module libre soit n-acc pour tout n.

LEMME 1.1. *Pour un anneau A de radical de Jacobson nul, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *A est semi-simple.*

2) *Tout A-module semi-simple M est 1-acc.*

1) $\Longrightarrow$ 2) Car si $x \in M$, on a $L(Ax) \leq L(A)$, où $L(\ )$ désigne la longueur.

2) $\Longrightarrow$ 1) Soit M un module semi-simple isotypique de longueur infinie dont l'annulateur est P. Si A/P n'est pas simple, alors tout sous-module de longueur finie de M est monogène, donc M n'est pas 1-acc. On en déduit que pour tout idéal primitif P de A, A/P est simple.

Supposons qu'il existe une infinité de classes d'isomorphie de modules simples $(S_i)_{i\in I}$. On pose $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$; on vérifie facilement que tout sous-module de longueur finie de M est monogène, donc M n'est pas 1-acc, d'où la contradiction.

Nous allons donner une démonstration simple du résultat suivant dû à D. Jonah [4].

PROPOSITION 1.2. *Pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) A est parfait à droite.

2) Tout A-module M est n-acc pour tout $n \geq 1$.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-modules de $M \neq (0)$ engendrés par n éléments. On pose $N = \bigcup_i X_i$ et soit $(\bar{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'image de cette suite dans N/NR (R radical de A). Comme A/R est semi-simple et que $L(\bar{X}_i) \leq nL(A/R)$, il existe un entier p tel que $\bar{X}_p = N/NR$, soit $X_p + NR = N$; comme NR est superflu dans N [7, p. 130], on a $X_p = N$.

2) $\Rightarrow$ 1) Le lemme 1.1 prouve que A/R est semi-simple. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments du radical R. Soient F un module libre de base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et G le sous-module de F engendré par $(e_i - e_{i+1}\, a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. F/G étant 1-acc, on en déduit qu'il existe un entier n tel que $a_1 \ldots a_n = 0$. R est donc T-nilpotent à droite et A est parfait à droite [7, p. 130].

PROPOSITION 1.3. Soit A un anneau commutatif intègre vérifiant la condition suivante : pour tout idéal $I \neq 0$, l'anneau quotient A/I est parfait. Alors tout A-module libre L est n-acc pour tout $n \geq 1$.

Si $M \subset L$ est engendré par n éléments, son rang est $\leq n$. Il en résulte que si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-modules d'un module libre L, où les X_i sont engendrés par n éléments, il existe un entier p tel que pour $n \geq p$ X_n soit un sous-module essentiel de $N = \bigcup_i X_i$. X_p étant de type fini, il existe une base $(e_j)_{j\in J}$ de L tel que $X_p \subseteq Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_s = L'$. Soit q la projection canonique de L sur L' ; on a $\ker q \cap X_p = (0)$, d'où $\ker q \cap N = (0)$, ce qui prouve que N est isomorphe à $q(N) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} q(X_i)$. Il suffit donc de considérer le cas où $L = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_s$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-modules de L engendrés par n-éléments. Il existe un entier p tel que $N = \bigcup_i X_i$ soit extension essentielle de X_p. Soit $K = Ax_1 + \ldots + Ax_t$ un sous-module de type fini de L, tel que $X_p \oplus K$ soit essentiel dans L. Pour $q \geq p$ la suite $(X_q \oplus K)$ est une suite croissante de sous-modules engendrés par $n+t$ éléments et comme $X_p \oplus K$ est essentiel dans L on a $I = \mathrm{Ann}(L/(X_1 \oplus K)) \neq 0$. A/I étant parfait, la suite $(X_q \oplus K)$ est stationnaire (prop. 1.2), la suite (X_i) est donc stationnaire.

COROLLAIRE 1.5. *Il existe un anneau intègre A, non noethérien, tel que tout A-module libre soit n-acc pour tout* $n \geq 1$.

L'exemple suivant dû à Krull et utilisé dans la théorie des décompositions primaires [3], vérifie les conditions du corollaire 1.5.

Soit $K[X,Y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées sur un corps K. On pose :

$$A = \{f/g,\ f,\ g \in K[X,Y] / g(0,Y) \neq 0,\ \ f(0,Y)/g(0,Y) \in K\}$$

A est un anneau local intègre dont l'idéal maximal est $M = \{f/g \in A / f(0,Y) = 0\}$ et pour tout idéal $I \neq 0$ de A, il existe n avec $M^n \subset I$. Si l'on pose $a_i = X(Y+1)/Y^i$, la suite des idéaux $J_i = (a_1, \ldots, a_i)$ est strictement croissante et A n'est pas noethérien.

II. MODULES SUR LES ANNEAUX A IDEAL SINGULIER NUL.

PROPOSITION 2.1. *Soit A un anneau vérifiant l'une des conditions suivantes :*

1) *A est à idéal singulier nul et de dimension finie.*

2) *A est noethérien à gauche.*

Si M est un sous-module de dimension finie de A^I, *il existe une partie finie J de I telle que si p désigne la projection canonique de* A^I *sur* A^J, *alors p(M) soit isomorphe à M.*

M est extension essentielle d'un sous-module $x_1A \oplus \ldots \oplus x_nA$ et $M_n(A)$ vérifiant les propriétés 1) ou 2), le théorème de Morita permet de se ramener au cas où M est extension essentielle de xA. On pose $x = (x_i)_{i\in I}$; les deux conditions impliquent chacune qu'il existe un entier n tel que $r(x) = \bigcap_{i=1}^{n} r(x_i)$ où $r(\ )$ désigne l'annulateur à droite. Soit $J = [1, \dots, n] \subset I$; la relation $x\alpha \in \ker p$ entraîne $x\alpha = 0$ et comme $xA \cap \ker p = 0$ implique $M \cap \ker p = 0$, on en déduit la proposition.

THEOREME 2.2. *Soit A un anneau à idéal singulier nul et de dimension de Goldie finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) *Pour tout ensemble I, le A-module A^I est n-acc pour tout $n \geq 1$.*

2) *Tout A-module libre admettant une base finie est n-acc pour tout $n \geq 1$.*

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-modules de A^I engendrés par n éléments. On note $\dim(\ )$ la dimension de Goldie. On a $\dim X_i \leq n \dim A$ pour tout i et il existe donc un entier s tel que $N = \bigcup_i X_i$ soit extension essentielle de X_s. La propriété résulte alors de la proposition 2.1.

B. et G. Baumslag ont montré dans [1] que tout module libre sur un anneau noethérien à droite intègre est n-acc pour tout n. Voici une première généralisation de leur résultat.

COROLLAIRE 2.3. *Soit A un anneau noethérien à droite et à idéal singulier nul. Alors, pour tout ensemble I, le A-module A^I est n-acc pour tout n.*

COROLLAIRE 2.4. *Il existe un anneau commutatif intègre non noethérien A tel que tout A-module A^I soit n-acc pour tout $n \geq 1$.*

Cela résulte du corollaire 1.5 et du théorème 2.2.

La proposition 2.1 permet de généraliser un résultat classique sur les groupes abéliens [2, p. 168].

PROPOSITION 2.5. *Soit A un anneau noethérien semi-premier et héréditaire. Alors tout sous-module dénombrable d'un module A^I est projectif.*

A admet un anneau de fractions (th. de Goldie), en reprenant la méthode du cas commutatif, on prouve que tout A-module M de type fini à sous-module singulier nul se plonge dans un A-module libre, M est donc projectif. Soit E un sous-module dénombrable de A^I. D'après la proposition 2.1, tout sous-module de type fini de E, admet une extension essentielle maximale dans E qui est de type fini. On en déduit facilement que l'on a $E = \bigcup_n E_n$, où E_n est un sous-module de type fini de E tel que E_{n+1}/E_n soit à sous-module singulier nul, donc projectif d'après ce qui précède. On a alors $E \simeq \bigoplus_n E_{n+1}/E_n$.

PROBLEMES. A désigne un anneau commutatif noethérien intègre.

1. Soit M un A-module sans torsion de type dénombrable tel que tout sous-module de rang fini soit de type fini. M se plonge-t-il dans un A-module libre ? En particulier, tout sous-module de type dénombrable de A^I se plonge-t-il dans un A-module libre ? (cf. prop. 2.1, 2.5).

2. Soit M un A-module sans torsion qui est n-acc pour tout n. Tout sous-module de rang fini de M est-il de type fini ?

III. MODULES LIBRES n-acc SUR LES ANNEAUX NOETHERIENS A DROITE.

Nous allons montrer qu'il existe une large classe d'anneaux noethériens à droite tels que tout A-module libre soit n-acc pour tout $n \geq 1$. On désigne par $*$ la propriété suivante :

$*$ Tout A-module libre L est n-acc pour tout $n \geq 1$.

Pour tout entier k, on appelle *k-suite* S, une suite croissante de sous-modules X_i de L tels que X_i soit engendré par k éléments. On note *r(S)* l'idéal bilatère, annulateur de $X = \bigcup_i X_i$. Si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de L on note $\underline{I(S)}$ l'idéal à droite engendré par les composantes des éléments de X.

LEMME 3.1. *Soit A un anneau noethérien à droite qui ne vérifie pas* * *et soit* $S = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une k-suite strictement croissante de sous-modules du A-module libre L telle que r(S) soit maximal. Alors r(S) est un idéal premier P de A et l'on a* $P = r(I(S))$.

On a évidemment $r(S) = r(I(S))$, il suffit donc de prouver que $r(S)$ est un idéal premier. Sinon, il existe deux idéaux bilatères $I \supsetneq r(S)$, $J \supsetneq r(S)$ avec $I\,J \subset r(S)$. Comme I est un idéal à droite de type fini, la suite $S_I = (X_i I)_{i \in \mathbb{N}}$ est une k-suite et l'on a $r(S_I) \supset J$. Comme $r(S)$ est maximal, on en déduit que la suite S_I est stationnaire. On peut donc trouver un entier N tel que

$$n \geq N \implies X_n I = X_N I \,.$$

On pose $L = L_p \oplus L'_p$, où $L_p = e_1 A \oplus \ldots \oplus e_p A$ contient le sous-module X_N et soit q la projection canonique de L sur L'_p. La suite $S' = (q(X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une k-suite strictement croissante et l'on a $r(S') \supset I \supsetneq r(S)$ ce qui contredit le caractère maximal de $r(S)$.

THEOREME 3.2. *Soit A un anneau noethérien à droite vérifiant la condition suivante :*

** *Si P est un idéal premier de A tel que* $P = r(E)$, *où E est un sous-ensemble de A, alors il existe des éléments* $(x_i)_{1 \leq i \leq s}$ *de E tels que* $P = \bigcap_{i=1}^{s} r(x_i)$.

Alors tout A-module libre est n-acc pour tout $n \geq 1$.

Sinon, il existe une k-suite strictement croissante $S = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $P = r(S)$ soit maximal, donc premier (lemme 3.1.).

PROPRIETE 1. *Il existe un entier N tel que pour* $n \geq N$ *on ait*

$$r(X_n) = r(S) = \bigcap_{i=1}^{n} r(x_i) \quad \underline{\text{avec}} \quad x_i \in X_N, \ \underline{\text{pour}} \ \underline{\text{tout}} \ i.$$

La condition $(**)$ implique que $r(S) = r(I(S)) = \bigcap_{1=1}^{s} r(u_i)$ où les éléments u_i sont des composantes d'éléments $x_1, \ldots, x_s$ de $X = \bigcup_i X_i$; il existe un entier N tel que $x_i \in X_N$ pour tout n, on a alors

$$r(S) \subset r(X_N) \subset \bigcap_{1=1}^{s} r(x_i) = r(S)$$

d'où la propriété.

L'anneau A/P est un anneau premier, noethérien à droite, il est donc à idéal singulier nul. Si M est un A/P-module, on désigne par $j(M)$ son sous-module singulier. D'après la propriété 1, $j(X)$ n'est pas un sous-module essentiel de X et l'on a $X_n \cap j(X) = j(X_n)$. $X_n/j(X_n)$ est un A/P-module à sous-module singulier nul engendré par k-éléments.

On en déduit

$$\dim X_n/j(X_n) \leq k \dim A/P \qquad (1).$$

Soit K un complément de $j(X)$ dans X (K est maximal pour la propriété $K \cap j(X)=0$).

<u>PROPRIETE 2</u>. <u>Il existe un entier</u> N_1 <u>tel que pour</u> $n \geq N_1$, K <u>soit extension essentielle de</u> $X_n \cap K$.

En effet, la relation (1) implique que K est un A/P-module de dimension de Goldie finie.

On pose $L = e_1A \oplus \ldots \oplus e_pA \oplus L' = L_p \oplus L'$, avec $X_{N_1} \subset L_p$ et soit $q : L \to L'$ la projection canonique. Comme S est une suite telle que $r(S)$ soit maximal, la suite $S' = (X_i' = q(X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est telle que $r(S') = r(S)$, de plus S' est une suite strictement croissante.

<u>PROPRIETE 3</u>. <u>Si</u> $X' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i'$, <u>alors on a</u> $X' = j(X')$.

Soit $x \in X'$; il existe $m \in X$, $y \in L_p$ tels que $m = y + x$. D'après la propriété 2, X est extension essentielle de $j(X) \oplus (X_{N_1} \cap K) = Z$. Soit $J = \{a \in A / m\, a \in Z\}$. J est un idéal à droite essentiel modulo P ; si $xJ = 0$, alors $x \in j(X')$, sinon il existe $a \in J$, avec $x\,a \neq 0$, tel que $xa + ya = z+u$, $z \in j(X)$, $u \in X_{N_1} \cap K$. On a alors $x\,a = q(z) \in j(X')$, ce qui prouve que X' est extension essentielle de $j(X')$ et comme A/P est à idéal singulier nul on a $X' = j(X')$.

D'après la propriété 1, on a $P = \bigcap_{1=1}^{t} r(y_i)$, $y_i \in X'$ et les idéaux $r(y_i)$ sont essentiels modulo P, d'où la contradiction, ce qui achève la démonstration du théorème.

Rappelons [7, p. 95] qu'un anneau A noethérien à droite est dit <u>essentiellement borné à droite</u>, si pour tout idéal premier P, tout idéal à droite essentiel de A/P contient un idéal bilatère $\neq (0)$.

<u>COROLLAIRE 3.3. Soit</u> A <u>un anneau noethérien à droite. Alors tout</u> A-<u>module libre est</u> n-acc <u>pour tout</u> n <u>dans chacun des cas suivants</u> :

1) A <u>est noethérien à gauche</u>

2) A <u>est essentiellement borné à droite</u>.

1) Soit $E = (a_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble de A. Comme A est noethérien à gauche $\sum_{i \in I} A\,a_i = \sum_{i=1}^{s} A\,a_i$. On en déduit que $r(E) = \bigcap_{1=1}^{s} r(a_i)$.

2) C'est une conséquence d'un résultat de Cauchon [7, p. 95].

<u>Remarque</u>. Il est bien connu que la condition $**$ est réalisée, si A est un anneau à identité polynômiale.

Nous allons montrer qu'il existe des anneaux noethériens à droite, tels que si L est un A-module libre qui n'est pas de type fini, alors L n'est pas 1-acc.

Soit K un corps commutatif et soit $A_1(k)$ l'algèbre de Weyl : $A_1(k) = k[X,Y]$, $XY - YX = 1$. Il est bien connu que $A_1(k)$ est un anneau noethérien quasi-simple. Si J est un idéal maximal de $A_1(k)$, on désigne par M le A-module simple $M = A_1(k)/J$ et on considère l'anneau noethérien à droite B défini par

$$B = \begin{pmatrix} k & M \\ 0 & A_1(k) \end{pmatrix}$$

<u>PROPOSITION 3.4</u>. <u>Soit</u> L <u>un</u> B-<u>module libre qui n'est pas de type fini</u>. <u>Alors</u> L <u>n'est pas</u> 1-acc.

$P = \begin{pmatrix} k & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un idéal premier de B qui est l'annulateur de l'idéal à droite simple

$$I = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soient $y_i = \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $1 \leq i \leq n$ des éléments de I. On a

$$\bigcap_{1=1}^{n} r(y_i) = \begin{pmatrix} k & M \\ 0 & \bigcap_{i=1}^{n} r(x_i) \end{pmatrix}$$

et par suite B ne vérifie pas la condition (∗∗). Le B-module semi-simple $I^{(\mathbb{N})}$ est un sous-module de B-module libre $B^{(\mathbb{N})}$ et d'après la démonstration du lemme 1.1, $I^{(\mathbb{N})}$ n'est pas 1-acc.

<u>Remarque</u>. B est l'anneau quotient de l'anneau $C = \begin{pmatrix} k & A_1(k) \\ 0 & A_1(k) \end{pmatrix}$, par l'idéal bilatère $\begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que C vérifie ∗∗. On en déduit qu'un anneau quotient d'un anneau vérifiant ∗ , ne vérifie pas nécessairement ∗ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. et G. BAUMSLAG. On ascending chain conditions. Proc. London Math. Soc. (3), 22, 1971, p. 681-704.

[2] L. FUCHS. Abelian Groups. Pergamon Press (1967).

[3] R.W. GILMER. Rings in which the Unique Primary Decomposition Theorem Holds. Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), p. 777-781.

[4] D. JONAH. Rings with the minimum condition for principal right ideals have the maximum condition for principal left ideals. Math. Z. 113 (1970) p. 106-112.

[5] A.M. NICOLAS. Extensions factorielles et modules factorables. Bull. Sc. Math. (2), 98, 1974, p. 117-143.

[6] A.M. NICOLAS. Sur les conditions de chaînes ascendantes dans des groupes abéliens et des modules sans torsion. Séminaire d'algèbre (Aribaud, Dubreil, M.P. Malliavin) Paris, novembre 1975.

[7] G. RENAULT. Algèbre non commutative. Collection "Varia Mathematica" Gauthier-Villars 1975.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 7 du 12.1.1976

AUTOUR DE LA REGULARITE

par

R. RAPHAEL

-:-:-:-:-:-:-:-

Nous nous proposons d'étudier trois questions qui traitent ou qui touchent les anneaux réguliers. J'aimerais remercier les membres du séminaire pour leurs suggestions qui ont amélioré cette présentation ainsi que pour leur hospitalité. J'étais subventionné à Poitiers par mon université, le Conseil des Arts du Canada (W 750463) et le Conseil de Recherche du Canada (A 7752).

I.- SUR CERTAINES CATEGORIES D'ANNEAUX REGULIERS.

Rappelons qu'un anneau est régulier si étant donné a il existe un b tel que $a = aba$. Un anneau est fortement régulier si étant donné a il existe un b tel que $a = a^2b$. Il est clair que 0 est le seul élément nilpotent dans un anneau fortement régulier et puisque $(a - aba)^2 = 0$, un anneau fortement régulier est régulier. Nous notons que l'équation $a = aba$ implique que ab et ba sont des éléments idempotents. Si e est un élément idempotent d'un anneau réduit, par exemple d'un anneau fortement régulier, les équations $(ea - eae)^2 = 0$ et $(ae - eae)^2 = 0$ montrent que $ea = eae = ae$ ce qui indique que e est central dans l'anneau. Alors dans un anneau réduit, tous les idempotents sont centraux. Soit A régulier. Si $a \in A$, il existe un $b' \in A$ tel que $a = ab'a$. Si $b = b'ab'$ on vérifie tout de suite que $a = aba$, $b = bab$.

LEMME 1.1. *Si A est fortement régulier, il existe pour chaque $a \in A$ un élément b et un seul tel que* $a = aba$, $b = bab$.

Démonstration. On sait qu'il existe un $b \in A$ tel que $a = aba$, $b = bab$. Supposons qu'il y ait un $c \in A$ tel que $a = aca$, $c = cac$. ab, ba, ac et ca sont centraux parce qu'ils sont des idempotents. Alors $c = cac = c(aba)c = ca(ba)c = cac(ba) = cba = c(bab)a = cb(ab)a = c(ab)ba = c(abab)ba = bac\,abab = ba\,bab = b$.

Le lemme 1 montre que la catégorie des anneaux fortement réguliers peut être définie par opérations et équations. On ajoute aux opérations et aux équations pour la catégorie des anneaux, l'opération qui associe à chaque a un élément b tel que $a = aba$ et $b = bab$. Cette opération est préservée par tout homomorphisme y compris les monomorphismes à cause de l'unicité de b. Alors nous avons tout de suite :

PROPOSITION 1.2. *La catégorie des anneaux fortement réguliers est une catégorie algébrique au sens de Lawvere. En particulier elle est fermée sur le processus de prendre des égalisateurs (noyaux de doubles flèches) et des intersections. Le même résultat reste vrai pour la catégorie des anneaux réguliers commutatifs.*

Pour obtenir la catégorie des anneaux commutatifs réguliers il suffit d'ajouter l'équation $xy = yx$ aux autres équations.

La réciproque du lemme 1 est vraie :

LEMME 1.3. *Soit A un anneau tel que pour chaque a il existe un b et un seul tel que* $a = aba$ *et* $b = bab$. *Alors A est fortement régulier.*

Démonstration. On vérifie facilement les équations suivantes :

$$a = a(b+ba-ba^2b)a, \quad b+ba-ba^2b = (b+ba-ba^2b)a(b+ba-ba^2b),$$

$$a = a(b+ab-ba^2b)a, \quad b+ab-ba^2b = (b+ab-ba^2b)a(b+ab-ba^2b).$$

L'hpothèse implique que $b = b+ba-ba^2b = b+ab-ba^2b$, ce qui implique $ab = ba$. Alors $a = aba = a^2b$, et A est fortement régulier.

On peut maintenant se demander si la catégorie des anneaux réguliers avec les homomorphismes entre ces anneaux peut être définies par opérations et équations. On peut répondre que la catégorie est déjà définie comme cela - étant donné a il existe un b tel que $a = aba$, et cette équation est préservée par les homomorphismes. Mais la vraie question est la suivante : peut-on assigner un tel b à chaque a dans chaque anneau régulier de manière que l'assignation soit préservée par chaque homomorphisme d'anneaux ? Une situation dans laquelle on réussit à choisir un tel b est lorsque l'on sait que b est le seul élément qui satisfait certaines équations qui sont préservées par les homomorphismes. Au début l'auteur espérait qu'il existait un ensemble fini ou infini qui définirait b. Par conséquent la catégorie des anneaux réguliers serait algébrique et aurait toutes les limites en particulier les égalisateurs. Rappelons que l'égalisateur de deux applications $f, g : R \to S$ dans une catégorie d'anneaux est $\{r \in R \mid f(r) = g(r)\}$.

Je présente maintenant un exemple trouvé par mon ami Robert Paré qui montre que l'égalisateur de deux applications entre anneaux réguliers n'est pas nécessairement régulier. Dans un anneau A quelconque, un élément inversible u définit un automorphisme par $a \to uau^{-1}$. Soit $A = Q_{[2]}$ l'anneau des matrices carrées sur le corps rationnel. Soit $f : A \to A$ l'identité sur A et soit $g : A \to A$ l'application définie par la matrice inversible $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dont l'inverse est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $g\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -a-c+b+d \\ c & d \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est dans l'égalisateur de f et g si et seulement si on a $c = 0$ et $-a+d = 0$. Alors l'égalisateur est $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q\right\}$. Maintenant $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ce qui indique qu'on ne peut pas satisfaire l'équation de régularité pour l'élément $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans l'égalisateur. Alors l'égalisateur de f et g n'est pas régulier et la catégorie des anneaux réguliers n'est pas algébrique.

On peut se servir de cet exemple pour donner un exemple d'un anneau régulier avec deux sous-anneaux réguliers dont l'intersection n'est pas régulière. Soit $A = Q_{[4]}$ l'anneau des matrices 4×4 sur le corps rationnel. Soit B le sous-anneau de la forme $\left[\begin{array}{c|c} Q_{[2]} & 0 \\ \hline 0 & Q_{[2]} \end{array}\right]$ et soit C le sous-anneau de la forme $\left[\begin{array}{c|c} g(Q_{[2]}) & 0 \\ \hline 0 & Q_{[2]} \end{array}\right]$ où g est l'application ci-haut.

$B \cap C$ n'est pas régulier. On ne peut pas satisfaire l'équation de régularité pour $\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ dans $B \cap C$.

Cette question est discutée dans [3]. Nous notons que Kennison [2] a montré que la catégorie des anneaux réguliers réduits est la complétion de la catégorie des produits de corps et homomorphismes entre eux. Il a montré que chaque anneau régulier réduit est l'égalisateur de deux homomorphismes entre produits de corps.

Dans le cas commutatif il montre que la catégorie des anneaux réguliers commutatifs est la complétion de la catégorie des produits de corps. Alors on peut bien poser :

<u>Question</u> 1.1. Quelle est la variété engendrée par la catégorie des anneaux réguliers

Dernièrement Herstein [1] a défini la notion de l'hypercentre d'un anneau. Si A est un anneau, l'hypercentre de A noté, $T(A)$ est $\{a \in A \mid ab^n = b^n a\}$ où n est un nombre naturel qui dépend de a et b. L'hypercentre contient le centre mais n'est pas nécessairement commutatif. Un anneau est commutatif précisément quand il coïncide avec son centre. Disons qu'un anneau est hypercommutatif s'il coïncide avec son hypercentre, et qu'il est n-hypercommutatif si on a $ab^n = b^n a$ pour chaque a et b dans A où n ne dépend que de l'anneau. Il est évident que pour chaque n, la catégorie des anneaux n-hypercommutatifs est une variété. Puisque les anneaux commutatifs sont une variété, nous demandons :

<u>Question</u> 1.2. Quelle est la variété engendrée par les anneaux hypercommutatifs ?

Les lemmes 1.1. et 1.3. nous suggèrent une question parallèle pour les demi-groupes. Si A est un demi-groupe régulier $a = aba$ pour un b, il est évident qu'on peut choisir b tel que $b = bab$ et si les idempotents de A sont centraux, b est bien déterminé.

Question 1.3. Soit A un demi-groupe tel que pour chaque a il existe un b et un seul tel que $a = aba$, $b = bab$. Est-ce que les idempotents de A sont centraux ?

Question 1.4. Si l'anneau A est hypercommutatif (n-hypercommutatif) et si x est une indéterminée, est-ce que l'anneau $A[x]$ est hypercommutatif, (n-hypercommutatif) ?

Références :

[1] I.N. Herstein, On the hypercentre of a ring, Jour. Alg. 36, (1975), 151-157.

[2] J.F. Kennison, Structure and Costructure for strongly regular rings, J. Pure. Appl. Alg. 5, (1974), 321-332.

[3] R. Raphael, Some remarks on regular and strongly regular rings, Can. Math. Bull. (A paraître).

II.- ANNEAUX INJECTIFS ET EFFACEMENTS INJECTIFS.

Ce sujet est suggéré par l'intérêt dans le processus de la localisation aux injectifs dans les catégories complètes étudiées en général par Lambek et Rattray.

Ce processus a suggéré l'enquête des injectifs dans certaines catégories complètes d'anneaux. Les catégories intéressantes sont la catégorie des anneaux, la catégories des anneaux commutatifs, la catégorie des anneaux réguliers commutatifs, la catégorie des anneaux réduits réguliers, la catégorie des p-anneaux pour chaque premier p et la catégorie des anneaux n-hypercommutatifs. Nous allons présenter certains résultats qui indiquent une méthode que nous avons utilisée dans [3] et [4].

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet I de $\mathcal{C}$ est injectif si chaque diagramme

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

où f est un monomorphisme peut être fermé commutativement par une application $h : B \to I$. Il est évident que l'anneau (0) appartient à toutes les catégories que nous avons mentionnées et qu'il est injectif. Nous allons voir qu'il est souvent le seul objet injectif.

PROPOSITION 2.1. L'anneau zéro est le seul objet injectif dans la catégorie *des anneaux*.

Démonstration. Soit A un objet injectif. Considérez l'anneau $A[x]$ où x est un élément indéterminé et soit S l'ensemble des polynômes dans $A[x]$ dont le coefficient dirigeant est 1 et tous les coefficients sont dans le centre de A. S est un ensemble multiplicatif et tous les membres de S sont des non-diviseurs de zéro. Alors on peut localiser $A[x]$ à S et l'homomorphisme canonique $A[x] \to S^{-1} A[x]$ est un monomorphisme. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} A & & \\ A \arrow[u, "{}^{1}A"] \arrow[r] & A[x] \arrow[r] & S^{-1} A[x] \end{tikzcd}$$

où ${}^{1}A$ indique l'identite sur A. A est injectif et il y a un morphisme $f : S^{-1} A[x] \to A$ qui ferme le diagramme. Soit $f(x) = a$. a est central dans A parce que x est central dans $S^{-1} A[x]$ et f est surjectif. Alors $x - a \in S$ et $x - a$ est inversible dans $S^{-1} A[x]$. Maintenant $f(x-a)$ est inversible dans A. Mais $f(x-a) = f(x) - a = 0$. Alors A est un anneau dans lequel 0 est inversible. Alors A est l'anneau zéro.

COROLLAIRE 2.2. *L'anneau zéro est le seul objet injectif dans la catégorie des anneaux commutatifs*.

Pour présenter le cas régulier commutatif nous avons besoin d'un petit lemme.

LEMME 2.3. *Soit A un anneau commutatif semi-premier tel que pour chaque $a \in A$, $\exists\, b \in (a)^*$ tel que bA est essentiel dans $(a)^*$. Alors $Q_{c\ell}(A)$ est régulier où $Q_{c\ell}(A)$ indique le localisé de A à l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro*.

Démonstration. On affirme que $a+b$ n'est pas diviseur de zéro. Car si $c \in A$ tel que $(a+b)c = 0$, alors $abc + b^2c = 0$, $b^2c = 0$, $(bc)^2 = 0$ et $bc = 0 = ac$. Vu que $ac = 0$, $c \in (a)^*$. Mais $bc = 0$ implique $(bA) \cap (cA) = (0)$, ce qui contredit le fait que bA est essentiel dans $(a)^*$.

<u>COROLLAIRE 2.4</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif régulier</u>, x <u>une indéterminée</u>. <u>Alors</u> $Q_{c\ell}A[x]$ <u>est régulier</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n$ un élément de $A[x]$. Alors pour chaque i, $a_iA = e_iA$ pour un idempotent $e_i \in A$. Alors l'annulateur de $a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n$ est $[\prod_i (1-e_i)]\, A[x]$, un idéal principal.

<u>PROPOSITION 2.5</u>. <u>L'anneau zéro est le seul objet injectif dans la catégorie des anneaux commutatifs réguliers</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit A injectif. Par le corollaire 2.4., $Q_{c\ell}A[x]$ est régulier. Maintenant il faut répéter l'argument de la proposition 2.1.

Il y a deux autres aspects intéressants dans cette étude. Un monomorphisme $m : A \rightarrow B$ est régulier si l'image de A est l'égalisateur de deux morphismes $B \rightrightarrows C$ émanant de B. Un objet I dans une catégorie est injectif par rapport aux monomorphismes réguliers si on peut fermer chaque diagramme

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \uparrow & & \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

où la flèche $A \rightarrow B$ est un monomorphisme régulier. Cette distinction n'est pas nécessaire dans la catégorie des modules parce que chaque monomorphisme est régulier. Par contre dans la catégorie des anneaux l'application $Z \rightarrow Q$ est un monomorphisme qui n'est pas régulier.

On peut alors demander : est-ce qu'il y a des objets injectifs par rapport aux monomorphismes réguliers ? Nous avons montré dans [3] que les résultats sont les mêmes que pour les injectifs par rapport à tous les monomorphismes.

M. Barr m'a indiqué qu'il n'est pas nécessaire d'avoir des objets injectifs pour pouvoir localiser. Il suffit d'avoir des effacements injectifs. Indiquons par $\rightarrowtail$ un monomorphisme régulier. Un effacement injectif pour un objet A dans une catégorie est un morphisme $A \rightarrowtail I$ tel que tout le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & I \\ \uparrow & & \\ B & \rightarrowtail & C \end{array}$$

peut être fermé commutativement par un morphisme $C \longrightarrow I$. On vérifie tout de suite que $A \rightarrowtail I$ est un effacement injectif si I est injectif. En adaptant les démonstrations antérieures nous avons montré qu'on a les mêmes résultats que pour les injectifs - c.à.d. dans la catégorie des anneaux commutatifs, et des anneaux commutatifs réguliers le seul anneau avec un effacement injectif est l'anneau zéro, qui est son propre effacement injectif.

Dans la catégorie des anneaux de Boole, ou plus généralement la catégorie des p-anneaux, chaque anneau a un effacement injectif parce qu'il y a assez d'injectifs - c.à.d. on peut plonger chaque anneau dans un anneau injectif. Nous n'avons pas traité des effacements injectifs pour les anneaux réguliers réduits.

Question 2.1. A part l'anneau zéro, est-ce qu'il y a des objets injectifs ou des effacements injectifs dans la catégorie des anneaux n-hypercommutatifs ?

Références :

[1] M. Barr, Non-abelian torsion theories, Can. J. Math. 25 (1973) 1224-1237.

[2] J. Lambek and B.A. Rattray, Localization at injectives in complete categories, Mimeographed notes, Mc Gill University (1972).

[3] R. Raphael, Injective Rings, Comm. Alg. 1, (1974) 403-414.

[4] R. Raphael, No rings have injective effacements, Jour. Pure and Appl. Alg. (A paraître).

III.- ANNEAUX ENGENDRES PAR LEURS ELEMENTS INVERSIBLES.

Soit A un anneau et soit $U(A)$ le sous-anneau de A engendré par les éléments inversibles de A. Chaque élément de $U(A)$ est une somme finie d'éléments inversibles de A. Si $A = U(A)$ on dit que A est engendré par ses éléments inversibles. Nous nous sommes intéressés à ces anneaux par une question de Skornjakov : est-ce que chaque anneau régulier est engendré par ses éléments inversibles ?

L'anneau Z des entiers est engendré par ses éléments inversibles. Si A est un anneau local c.à.d. un anneau avec un seul idéal maximal à droite M, alors

A est engendré par ses éléments inversibles, puisque chaque élément de $A \setminus M$ est inversible, et chaque élément m de M se laisse écrire comme $m = (m+1) + (-1)$, une somme d'éléments inversibles. Si X est un espace topologique, l'anneau $C(X)$ de fonctions continues de X à $\mathbf{R}$ est engendré par ses éléments inversibles parce que l'on a l'équation

$$f(X) = (f(X) \vee 0 + 1) + (f(X) \wedge 0 - 1).$$

La catégorie des anneaux engendrés par leurs éléments inversibles est un exemple d'une sous-catégorie réflective de la catégorie des anneaux au sens de [3]. Les anneaux engendrés par ces éléments ont été le sujet de plusieurs articles dernièrement. Nous nous proposons de traiter un de ces aspects : les nilpotents. J'ai appris le lemme suivant de Stephenson [7].

LEMME 3.1. *Soit x un élément nilpotent d'un anneau A. Alors x est une somme d'éléments inversibles.*

Démonstration. Si $x^n = 0$, $(1+x)(1-x-\ldots-x^{n-1}) = 1 = (1-x-\ldots-x^{n-1})(1+x)$ alors $1+x$ est inversible et $x = (1+x) + (-1)$.

Alors un anneau engendré par ses éléments nilpotents est engendré par ses éléments inversibles.

LEMME 3.2. *Soit A un anneau et e un élément idempotent de A. Alors l'idéal $AeA(1-e)A$ est engendré par des éléments nilpotents.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un élément de la forme $aeb(1-e)c$ est engendré par des nilpotents dans $AeA(1-e)A$. Alors

$$aeb(1-e)c = [e+(1-e)][aeb(1-e)c][e+(1-e)] = [eaeb(1-e)][(1-e)ce] + eaeb(1-e)c\,(1-e)$$
$$+ (1-e)aeb(1-e)ce + [(1-e)ae][eb(1-e)c(1-e)]$$

dont les deuxième et troisième termes sont des produits de deux nilpotents et les premier et quatrième sont des nilpotents.

COROLLAIRE 3.3. *Soit A un anneau, et e un élément idempotent de A. Alors l'idéal $AeA(1-e)A + A(1-e)AeA$ est engendré par ses éléments nilpotents.*

<u>Démonstration</u>. Dans l'expression de $aeb(1-e)c$ ci-haut chaque nilpotent est dans $AeA(1-e)A$ ou $A(1-e)AeA$. La discussion pour $A(1-e)AeA$ est parallèle.

Le résultat suivant a été prouvé séparément par W. Stephenson et l'auteur.

<u>PROPOSITION 3.4</u>. <u>Soit A régulier tel que A/M_α n'est pas un corps pour chaque idéal bilatère maximal M_α de A. Alors A est engendré par ses éléments nilpotents</u>.

<u>Démonstration</u>. Si A/M_α n'est pas un corps il existe $x_\alpha \in A$, $x_\alpha \notin M_\alpha$ tel que $\bar{x}_\alpha \bar{A} \neq \bar{A}$. $x_\alpha A = e_\alpha A$ car A est régulier. $\bar{e}_\alpha \bar{A} \neq \bar{A}$ alors $e_\alpha - 1 \notin M_\alpha$. $e_\alpha A(1-e_\alpha) \not\subset M_\alpha$ parce que M_α est premier et $e_\alpha \notin M_\alpha$, $1-e_\alpha \notin M_\alpha$. Alors $Ae_\alpha A(1-e_\alpha)A \not\subset M_\alpha$ pour chaque α et l'idéal $\sum_\alpha Ae_\alpha A(1-e_\alpha)A$ n'est pas contenu dans aucun idéal. Alors $A = \sum_\alpha Ae_\alpha A(1-e_\alpha)A$ d'où la conclusion.

<u>COROLLAIRE 3.5</u>. <u>Soit A régulier avec un idéal maximal M tel que A/M n'est pas un corps. Alors A est engendré par ses éléments nilpotents</u>.

<u>PROPOSITION 3.6</u>. <u>Soit A régulier et auto-injectif à droite. Si A n'a pas d'idempotents abéliens non-zéro, A est engendré par ses éléments nilpotents</u>.

<u>Démonstration</u>. Si A possède un idéal maximal M tel que A/M est un corps, A/M a un idempotent abélien non-zéro. Renault [6] a montré qu'on peut relever un tel idempotent à un idempotent abélien non-zéro de l'anneau A. La conclusion est donnée par la proposition 3.4.

<u>COROLLAIRE 3.7</u>. <u>Les anneaux réguliers auto-injectifs de type II et III sont engendrés par leurs éléments nilpotents. Les facteurs de type II et III sont engendrés par leurs éléments inversibles</u>.

Utumi [8] et Jérémy [2] ont montré que ces anneaux sont engendrés par leurs éléments inversibles.

Nous discutons maintenant la génération des idéaux par leurs éléments nilpotents. Ce travail était suggéré par les résultats de Goodearl [1] sur la structure des idéaux dans les anneaux réguliers injectifs à droite.

LEMME 3.8. Soit A régulier et soit I un idéal de A tel que tous les idéaux de A contenus dans I sont premiers. Alors I est engendré par les éléments nilpotents contenus dans I.

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors $xA = eA$ pour un idempotent $e \in I$ et $AeA(1-e)A \subset I$ et $A(1-e)AeA \subset I$. $AeA(1-e)A$ est premier par hypothèse et $eA(1-e) \subset AeA(1-e)A$ alors $e \in AeA(1-e)A$ parce que $e \in I$, ce qui montre que $1-e \notin I$. Alors $xA = eA \subset AeA(1-e)A$. Le même argument montre que $xA \subset A(1-e)AeA$, alors $xA \subset AeA(1-e)A + A(1-e)AeA \subset I$. La conclusion résulte du corollaire 3.3.

PROPOSITION 3.9. Soit A régulier tel que tous les idéaux de A sont premiers. Alors chaque idéal de A est engendré par les éléments nilpotents qu'il contient. Chaque idéal dans un anneau régulier premier injectif à droite est engendré par ses nilpotents.

Démonstration. Le résultat est une conséquence du lemme 3.8. Renault [6] a montré que tous les idéaux d'un anneau régulier premier injectif à droite sont premiers.

En fait Goodearl et Renault ont monté que l'ensemble des idéaux premiers dans un anneau régulier premier injectif à droite est un ensemble bien ordonné et Goodearl a remarqué qu'un tel anneau est primitif, en réponse à une question de Kaplansky.

Un peu plus généralement, on note le résultat suivant :

PROPOSITION 3.10. Soit A un anneau dans lequel le radical de Jacobson est réduit à zéro, et l'ensemble de tous les idéaux est bien ordonné. Alors A est primitif.

Démonstration. Si A n'est pas primitif, chaque idéal maximal à droite M_β contient un idéal bilatère non-zéro I_β. L'ensemble $\{I_\beta\}$ a un premier élément I qui appartient à chaque idéal maximal à droite. Alors I est contenu dans le radical de Jacobson et $I = (0)$, une contradiction.

Il y a des exemples d'anneaux dans lesquels les idéaux bilatères sont totalement ordonnés, mais ayant des idéaux bilatères non premiers. Par exemple les idéaux bilatères sont totalement ordonnés dans un anneau de valuation et tous les idéaux dans un anneau de valuation sont premiers si et seulement si l'anneau est un corps. Un anneau régulier a la propriété que chaque idéal est semi-premier.

PROPOSITION 3.11. *Soit A un anneau dans lequel chaque idéal est semi-premier. Alors si l'ensemble des idéaux de A est bien ordonné, chaque idéal de A est premier.*

Démonstration. Soit I un idéal de A et soit J et K deux idéaux de A tel que $I \subset J$, $I \subset K$ et $JK \subset I$. Nous devons montrer qu'on a $K = I$ ou $J = I$. Vu que les idéaux sont totalement ordonnés $J \subset K$ ou $K \subset J$. Si $J \subset K$, $J^2 \subset JK \subset I$ alors $J^2 \subset I$. Mais I est semi-premier, alors $J \subset I$ et $J = I$. Si $K \subset J$ on a $K = I$ d'une façon parallèle.

Nous considérons maintenant les anneaux réguliers dans lesquels les idéaux sont bien ordonnés. Goodearl et Renault ont montré que les anneaux réguliers premiers et auto-injectifs ont cette propriété. De plus il y a des exemples d'anneaux réguliers premiers non-auto-injectifs à droite avec cette propriété parce que chaque image homomorphisque d'un anneau régulier premier auto-injectif à droite a cette propriété et Osofsky a montré que ces anneaux ne sont pas nécessairement auto-injectifs à droite [4]. Une propriété pour les idéaux bilatères d'un anneau régulier premier auto-injectif à droite a été présentée par Goodearl, Goursaud, Jérémy et Renault. On peut présenter une propriété différente qui s'applique aux anneaux non nécessairement auto-injectifs à droite de la manière suivante :

PROPOSITION 3.12. *Soit A un anneau régulier dans lequel les idéaux bilatères $\{I_\alpha\}$ forment un ensemble bien ordonné. Il existe des idempotents e_β dans A en correspondance bi-univoque avec les ordinaux non-limites tels que $I_\alpha = Ae_\alpha A(1-e_\alpha)A$ si α est un ordinal non-limite et $I_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} Ae_\beta A(1-e_\beta)A$ si α est ordinal limite. En plus $\{e_\beta\}$ est minimal par rapport à cette propriété.*

<u>Démonstration</u>. L'hypothèse implique que tous les idéaux de A sont premiers. Soit M l'idéal maximal de A et soit $x \in M$. Soit I_α le premier idéal de A qui contient x. α est un ordinal non-limite. On a $xA = eA$ pour un idempotent e de A. Alors $AeA(1-e)A \subset I_\alpha$. De plus $eA(1-e) \subset AeA(1-e)A$ qui est un idéal premier, et $1-e \notin AeA(1-e)A$ parce que $e \in I_\alpha$. Alors $e \in AeA(1-e)A$ et $x \in AeA(1-e)A \subset I_\alpha$. Mais I_α est le premier idéal qui contient x alors $I_\alpha = AeA(1-e)A$. Si on écrit e_α pour e le reste est clair.

Goodearl a montré que pour chaque ensemble totalement ordonné S il existe un anneau régulier premier auto-injectif à droite A et un idéal premier P de A tel que l'ensemble des idéaux bilatères de A/P contient S. En fait Renault [6] a montré que tous les idéaux de A/P sont premiers. Alors il est possible de trouver un anneau régulier dans lequel les idéaux sont totalement ordonnés et qui n'est pas une image homomorphique d'un anneau régulier premier auto-injectif à droite ou à gauche.

<u>Question 3.1</u>. Est-ce qu'il y a un exemple d'un anneau régulier dans lequel les idéaux bilatères forment un ensemble bien ordonné qui n'est pas une image homomorphique d'un anneau régulier auto-injectif à gauche ou à droite ?

REFERENCES

[1] K.R. GOODEARL, Prime Ideals in regular self-injective rings, Can. Jour. Math. Vol. 25 (1973), 829-839.

[2] L. JEREMY, Modules et anneaux quasi-continus, Can. Math. Bull. Vol. 17 (2), (1974). 217-228.

[3] B. MITCHELL, Theory of categories, New York, Academic Press 1965.

[4] B.L. OSOFSKY, Cyclic injective modules of full linear rings. Proc. Amer. Math. Soc. 17, (1966), 247-253.

[5] R. RAPHAEL, Rings which are generated by their units, J. Alg. Vol. 28, N° 1, (1974), 199-205.

[6] G. RENAULT, Anneaux réguliers auto-injectifs à droite, Bull. Soc. Math. France Vol. 101, (1973), 237-254.

[7] W. STEPHENSON, Rings which are generated by their nilpotents, idempotents or units. (typescript 1974).

[8] Y. UTUMI, On continuous regular rings and semi-simple self-injective rings, Can. J. Math. Vol. 12, 1960, 597-605.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 8 du 19.1.1976

SUR L'HYPERCENTRE D'UN ANNEAU

D'après HERSTEIN, Journal of Algebra 36. 151-157 (1975)

par

F. LELOUSTRE

-:-:-:-:-:-:-:-:-

R étant un anneau, $Z = Z(R)$ désignera son centre, $J = J(R)$ son radical de Jacobson et

DEFINITION. L'hypercentre $T(R)$ de R est

$$T = \{a \in R \,/\, \forall\, x \in R \;\; \exists\, n \geq 1 \;\; \text{t.q.} \;\; ax^n = x^n a\}.$$

Propriétés immédiates :

- $Z \subseteq T$
- T sous-anneau de R
- $\forall\ \varphi$ automorphisme de R, $\varphi(T) \subset T$.

On va s'attacher à trouver des conditions suffisantes pour que $Z = T$. Il est clair que la présence de nil idéaux va troubler l'égalité car si R est un nil anneau non commutatif $R = T \neq Z$, si $R = T$ on a soit $T = Z$, soit l'idéal dérivé est nil (théorème d'Herstein) [2], [4].

Nous allons d'ailleurs montrer que si R est sans nil-idéaux, alors $Z = T$.

I. CAS DES ANNEAUX SEMI-PRIMITIFS.

1.1. LEMME 1. *Si* D *est un corps*, $T(D) = Z(D)$.

Preuve. D étant un corps, T en est un sous-corps.

Comme $\varphi(T) \subset T$ pour tout automorphisme intérieur, le théorème de Cartan Hua Brauer [1] nous permet d'affirmer que

soit $T \subseteq Z$ et donc $T = Z$

soit $T = R$ et donc R commutatif d'où $T = Z$.

1.2. LEMME 2. *Si* $J(R) = 0$ *alors* $T(R) = Z(R)$.

Preuve. $J(R)$ étant nul, R est isomorphe à un produit sous-direct d'anneaux primitifs R_α.

$T(R)$ s'envoie dans $T(R_\alpha)$ et par conséquent l'égalité $T(R_\alpha) = Z(R_\alpha)$ pour tout α implique l'égalité $T(R) = Z(R)$. Nous pouvons donc supposer R primitif.

Soit donc V un R-module simple et fidèle de commutant D. Le théorème de densité nous permet d'affirmer que

$$\forall\, t \in T \setminus \{0\}, \forall\, v \in V \quad \exists\, \lambda(v) \in D \quad \text{tel que} \quad vt = \lambda(v)\, v$$

car si vt et v étaient D-linéairement indépendants il existerait $a \in R$ tel que

$$va = 0 \quad \text{et} \quad vta = vt \quad \text{d'où} \quad vta^n = vt$$

pour n tq $ta^n = a^n t$ et on aurait $vt = 0$.

Nous savons qu'à ce moment là $\lambda(v)$ est constant si $\dim_D V > 1$ et alors en écrivant pour tout x de R

$$(vx)t = v(xt) = \lambda(vx)$$

et $$(vt)x = v(tx) = \lambda(vx) = (\lambda v)x \quad \text{car} \quad vt = \lambda v$$

nous obtenons $v(xt - tx) = 0$ soit puisque V est fidèle

$$xt - tx = 0$$

donc $$t \in Z \quad \text{d'où} \quad Z = T.$$

Le lemme est donc démontré puisque dans le cas où $\dim_D V = 1$, R est alors un corps.

2. ELEMENTS NILPOTENTS DANS T(R).

2.1. LEMME 3. *Si* $a \in T(R)$ *et* a *nilpotent alors l'idéal à droite* aR *est un nil idéal.* (Et donc $aR \subset J(R)$).

Preuve. Soient a tels que $a \in T$
et $n \geq 2$ $a^n = 0$
$a^{n-1} \neq 0$.

Soit alors $x \in R$. Comme $a^{n-1} \in T$, il existe m tel que $(ax)^m a^{n-1} = a^{n-1}(ax)^m = 0$. Prenons donc i le plus petit des entiers tels que

$(ax)^u a^i = 0$ pour un entier $u \geq 1$.

Si $i = 1$ on a bien ax nilpotent $((ax)^{u+1} = 0)$

Si $i > 1$ alors $x(ax)^u a a^{i-1} = (xa)^{u+1} a^{i-1} = 0$

et comme $a^{i-1} \in T$, il existe $s \geq 1$ tq $a^{i-1}(xa)^{s(u+1)} = 0$. On obtient donc avec $r = s(u+1)$, $a^{i-2}(ax)^{r+1} = 0$ d'où l'on tire l'existence d'un $v > 1$ tel que $(ax)^{(r+1)v} a^{i-2} = 0$ ce qui contredit le choix de i.

$\forall x \in R$, ax est nilpotent, cqfd.

2.2. THEOREME 2. *Soit* R *un anneau premier sans nil idéaux. Alors,* $T(R)$ *est sans élément nilpotent (non nul).*

Preuve. Appelons N l'ensemble des éléments nilpotents de T. Grâce à Herstein [2], on sait que N est un idéal, en fait le plus grand nil idéal.

Il est clair que $\varphi(N) \subset N$ pour tout automorphisme de R, en particulier pour l'automorphisme $y \longmapsto (1+x)\,y(1+x)^{-1}$ où $x \in J(R)$.

a) Soit a un élément non nul de N tel que $a^2 = 0$.

Si $x \in R$, ax est nilpotent (lemme 3) et $(1+ax)^{-1} = 1 - ax + (ax)^2 + \ldots$ et donc $(1+ax)\,a(1-ax+(ax)^2\ldots) \in N$ soit $(1+ax)\,a \in N$ (car $a^2 = 0$) d'où $axa \in N$. En bref, $aRa \subset N$.

Si $y \in J(R)$ et $b \in N$ alors $(by-yb)(1+y)^{-1} = b-(1+y)\,b(1+y)^{-1} \in N$.
Dans le cas où $y = ax$, on obtient $(axb - bax)(1+y)^{-1} \in N$, d'où en multipliant par a

$$abax\,(1+ax)^{-1} \in N \qquad \forall x \in R$$

et donc $\quad aba\, J(R) \subset N$

car si $w \in J(R)$, $w = x(1-ax)^{-1}$ où $x = (wa+1)^{-1} w \in J(R)$.

Si $y \in J(R)$, $(1+y)\ (aba\, J(R))\ (1+y)^{-1} \subset (1+y)\, N(1+y)^{-1} \subset N$; or comme $J(R)(1+y)^{-1} \subset J(R)$

et $\quad aba\, J(R) \subset N \quad$ nous obtenons $y\, aba\, J(R) \subset N$, ceci $\forall\, y \in J(R)$, d'où $J(R)\, aba\, J(R) \subset N$.

Cet idéal est donc nil, par conséquent il est nul.

Ceci nous prouve que $aba = 0$. En effet, on a alors $J(R)\ (aba)\ J(R) = 0$ ce qui implique, R étant premier, que $J(R) = 0$ ou $aba = 0$ d'où le résultat car $aba \in J(R)$ (lemme 3). Nous obtenons donc le résultat suivant :

$$\{a \in T \quad \text{et} \quad a^2 = 0\} \Longrightarrow aNa = 0.$$

b) Maintenant si a et b sont dans N et tels que $a^2 = b^2 = 0$, nous avons $bRb \subset N$ et $aNa = 0$ donc

$$abRba = 0.$$

Comme R est premier, cela implique $ab = 0$ ou $ba = 0$. En particulier dans le cas où $b = (1+x)\, a(1+x)^{-1}$ avec $x \in J(R)$ (auquel cas on a bien $b \in N$ et $b^2 = 0$) nous obtenons soit $axa = 0$ soit $a(1+x)^{-1} a = 0$.

Je dis que <u>si</u> $x \in J(R)$ <u>et</u> x <u>nilpotent</u> alors on a toujours $axa = 0$. En effet, l'égalité $a(1+x)^{-1}a = 0$ entraîne l'égalité $axa = 0$. Raisonnons par récurrence sur l'indice de nilpotence de x.

Si $x^2 = 0$ alors $(1+x)^{-1} = 1-x$ et $-a(1+x)^{-1}a = -a^2+axa = +axa = 0$.

Supposons que pour $1 < i < n$, $x^i = 0 \Longrightarrow axa = 0$. Alors si $x^n = 0$, x^i a un indice de nilpotence $< n$ ceci pour $i = 2, \ldots n-1$ donc $ax^ia = 0$ et donc

$$a(1-x+x^2 \ldots + x^{n-1})a = -\, axa$$

l'égalité $a(1+x)^{-1}a = 0$ entraîne donc aussi $axa = 0$.

c) Appliquons ce résultat à br lorsque $b \in N$ et $b^2 = 0$ et $r \in R$ avec toujours $a^2 = 0$ et $a \in N$.

Nous obtenons grâce au lemme 3, $a(br)\, a = 0$.

Ainsi $abRa = 0$. D'où, comme R est premier, $ab = 0$.

Appliquons ce résultat à b lorsque $b = (1+x)\,a(1+x)^{-1}$ (on a bien $b^2 = 0$ et $b \in N$ lorsque $x \in J(R)$), nous obtenons $a(1+x)\,a(1+x)^{-1} = 0$ donc $axa = 0$.

Ainsi $aJ(R)a = 0$.

R étant premier, nous obtenons $a = 0$. Donc $N = 0$ cqfd.

2.3. LEMME 4. Soit R un anneau premier sans nil idéaux. Alors $T(R)$ est commutatif et tout élément non nul de $T(R)$ est régulier dans R.

Preuve. L'idéal dérivé de T, devant être nul, il est nul d'après le théorème ci-dessus ; par conséquent T est commutatif.

Si $a \in T \setminus \{0\}$ et $au = 0$ pour un $u \in R$, on a alors avec $y = uxa$ $(x \in R)$, $y^2 = 0$ et $ay = 0$ et donc

$$(1+y)\,a(1+y)^{-1} = (1+y)\,a(1-y) \in T,$$

d'où l'on tire aisément $ya \in T$.

Mais comme $(ya)^2 = 0$, le th. 2 nous dit que $yu = 0$. Ainsi $\forall x \in R$, $uxa^2 = 0$. Comme $a^2 \neq 0$ et comme R est premier, nécessairement $u = 0$.

Nous avons donc montré : $au = 0 \Rightarrow u = 0$ c'est-à-dire le lemme 4.

3. THEOREME FONDAMENTAL.

3.1. THEOREME 3. Soit R un anneau sans nil idéaux, alors $T(R) = Z(R)$.

Preuve. a) R étant isomorphe à un produit sous-direct d'anneaux premiers sans nil idéaux, nous pouvons donc, comme au lemme 2, nous restreindre au cas où R est premier sans nil idéaux. Nous pouvons grâce au lemme 2, supposer que $J(R) \neq 0$. Dans ce cas, et comme R est premier, le centralisateur de J dans R est $Z(R)$ (si $\forall i \in J$, $ai = ia$ on a si $j \in J$ et $x \in R$, $aj = ja$ et $axj = xja$ donc $(ax - xa)j = 0$ donc $(ax - xa)J = 0$).

Pour montrer que $Z = T$, il suffit donc de montrer que T centralise J. Supposons le contraire et admettons l'existence de

$$a \in T,\ x \in J \quad \text{tels que } ax - xa \neq 0 .$$

Remarquons tout de suite que $0 \neq (ax - xa)(1+x)^{-1} = a-(1+x)\,a(1+x)^{-1} \in T$ et que d'autre part $x \in J \Longrightarrow (ax-xa)(1+x)^{-1} \in J$; ainsi $T \cap J \neq 0$.

Il suffit donc de montrer que $J \cap T \subset Z$ car alors on aurait $\forall\, b \in T$, $b(ax-xa)\,(1+x)^{-1} \in J \cap T \subset Z$ et $0 \neq (ax-xa)(1+x)^{-1} \in Z$ donc non diviseur de zéro, ce qui prouverait bien que $b \in Z$ $\left(\begin{matrix} byz = zby \\ \text{et } yz = zy \end{matrix} \Big| \Longrightarrow (zb-bz)\,y = 0\right)$.

Nous pouvons donc raisonner dans l'anneau $J(R)$ c'est à dire supposer que R <u>est un anneau premier, sans nil idéaux et tel que</u> $J(R) = R$.

b) Démontrons alors le résultat suivant :

Si $0 \neq a \in T$ et z et $x \in R$ sont tels que $za = az$ et $zx = xz$ alors $z(ax-xa) = 0$.

En effet, comme $(1+x)\,a(1+x)^{-1}$ et $(1+zx)\,a(1+zx)^{-1}$ sont dans T il existe a_1 et a_2 dans T tels que

$$(1+x)\,a = a_1(1+x)$$
$$(1+zx)\,a = a_2(1+zx),$$

égalités d'où l'on tire facilement $za - a = za_1 - a_2 + (a_1-a_2)\,zx$; mais z donc $za - a$ commute avec a ainsi que a_2 et a_1 (lemme 4) donc

$$(a_1 - a_2)\,z(xa - ax) = 0 .$$

Si $a_1 - a_2 \neq 0$, alors étant dans T ce n'est pas un diviseur de 0.

Si $a_1 = a_2$, alors $za - a = za_1 - a_1$ donc $(1-z)(a-a_1) = 0$ et ainsi $a = ax$. Dans les deux cas on obtient bien le résultat voulu.

Appliquons ce résultat pour montrer que, <u>si</u> $a \in T$, <u>alors</u> a <u>commute avec tout élément non nilpotent de</u> R.

En effet, si $x \in R$, il existe $r \geq 1$ tel que $ax^n = x^n a$; il est clair que x commute avec x^n, par conséquent

$$x^n(xa - ax) = 0 \quad \text{et donc} \quad x^n = 0\,;$$

si $xa - ax \neq 0$ car alors $(xa-ax)(1+x)^{-1} \in T \setminus \{0\}$ et n'est donc pas un diviseur de zéro.

c) En particulier a commute avec les non diviseurs de 0 tels $ay - ya$ quand ils sont non nuls.

Donc a commute avec $ay - ya$ $\forall\, y \in R$.

En caractéristique différente de 2, cela implique que $a \in Z$ [3].

En caractéristique 2, cela nous donne $a^2 \in Z$ et, d'après un résultat que nous venons de montrer, cela implique $0 = a^2(ax + xa)$ $\forall\, x \in R$, donc comme a n'est pas un diviseur de zéro, a est bien dans Z.

On a donc montré $T \subset Z$ d'où le théorème.

3.2. <u>THEOREME 3. Soit R un anneau, $T(R)$ son hypercentre. Si $a \in T(R)$ et si $x \in R$, alors $ax - xa$ engendre un nil idéal de R. En particulier, $ax - xa$ est nilpotent $\forall x \in R$.</u>

C'est une conséquence immédiate du th. 2.

Remarquons que la propriété: $ax-xa$ engendre un nil idéal pour tout x, n'est pas suffisante pour affirmer que a est dans T.

Ainsi avec $R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \; \alpha, \beta, \gamma \text{ entiers} \right\}$ alors si $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $ax - xa$ engendre un nil idéal de R pour tout x sans que a commute avec une puissance de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.3. <u>Lien avec le théorème de Lithman</u> [5].

<u>Soient R un anneau, A un sous-anneau commutatif tel que</u>

$$\forall\, x \in R, \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad x^n \in A.$$

<u>Alors, les éléments nilpotents de R forment un idéal N et R/N est commutatif.</u>

Herstein avait démontré ce résultat dans le cas où $A = Z$ mais ce théorème est un cas particulier du théorème 2.

Il est clair qu'il suffit de le montrer dans le cas où R est sans nil idéaux. Mais alors comme $A \subset T$ et que $T = Z$ (grâce au théorème 2) nous avons $A \subset Z$; il suffit alors d'appliquer le "vieux" résultat d'Herstein.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BRAUER. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) - 619-620.

[2] I.N. HERSTEIN. Canad. J. Math. 7 (1955) 411-412.

[3] Topics in ring Theory, p. 5.

[4] I. KAPLANSKY. A theorem on division rings. Canad. J. Math. 3 (1951) 290-292.

[5] A.I. LITHMAN. Rings that are radical over a commutative subring. Math. Sbornik (N.S.) 83 (1970), 513-523.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 9 du 26.1.1976

SUR LES EXTENSIONS POLYNOMIALES DES ANNEAUX DE JACOBSON

par

Melle de NARBONNE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Soit A un anneau, A[x] l'anneau des polynômes à une indéterminée x et à coefficients dans A.

On sait que certaines propriétés de l'anneau A se transfèrent à l'anneau A[x]. C'est par exemple le cas pour la propriété d'être intègre et celle d'être factoriel.

Le but poursuivi ici est de montrer que si A est un anneau de Jacobson il en est de même de A[x].

Définitions des anneaux de Jacobson.

Il y a plusieurs caractérisations des anneaux de Jacobson :

1°) Un anneau A est dit anneau de Jacobson si :

Dans chaque image homomorphe de A le radical de Jacobson coïncide avec le radical premier. On notera $\mathcal{J}(A)$ le radical de Jacobson et R(A) le radical premier.

2°) Un anneau A est dit anneau de Jacobson si :

Tout idéal premier de A est une intersection d'idéaux primitifs.

On dit aussi que tout idéal premier de A est un idéal semi-primitif.

3°) Un anneau A est dit anneau de Jacobson si :

Tout idéal premier de A est une intersection d'idéaux maximaux modulaire à droite.

On remarque que dans le cas où A possède un élément unité tout idéal étant modulaire la définition se réduit à :

Tout idéal premier de A est une intersection d'idéaux à droite maximaux.

Cette propriété de transfert a été déjà démontrée dans des cas particuliers.

Une démonstration directe dans le cas où A est un anneau de Jacobson commutatif, unitaire a été donnée par L. Lesieur (1967).

Goldman a démontré que, si A est un anneau de Jacobson commutatif, A[x] est aussi un anneau de Jacobson commutatif et Procesi a généralisé ce résultat en remplaçant la condition de commutativité par une condition sur A[x] qui doit satisfaire à une identité polynomiale.

L'article de J.F. Watters démontre que sans hypothèses supplémentaires : A est un anneau de Jacobson si et seulement si A[x] est un anneau de Jacobson.

QUELQUES PROPRIETES DES ANNEAUX DE JACOBSON.

Les propriétés sont les suivantes, seules les deux premières concernent la suite, la troisième est d'intérêt général mais sans rapport direct avec l'anneau des polynômes A[x].

PROPOSITION 1. *Si A est un anneau de Jacobson, alors tout idéal I de A est un anneau de Jacobson.*

Démonstration.

Soit A un anneau de Jacobson et I un idéal de A. Si I n'est pas un anneau de Jacobson (d'après la 3^e définition), il existe $\mathfrak{P}$ idéal premier de I tel que $I/\mathfrak{P}$ a un radical de Jacobson non réduit à zéro, $\mathfrak{P}$ étant un idéal de I et un idéal de A. On peut considérer $A/\mathfrak{P}$ dont le radical de Jacobson coïncide avec le radical premier puisque A est de Jacobson (1ère définition)

$$\mathcal{J}(A/\mathfrak{P}) \supset \mathcal{J}(I/\mathfrak{P}) \quad \text{donc} \quad \mathcal{J}(I/\mathfrak{P})$$

est un anneau radical premier (c'est-à-dire un anneau égal à son radical premier) et il est différent de zéro donc il contient un idéal nilpotent non nul, ce qui contredit l'hypothèse que $\mathfrak{P}$ est premier dans I; donc I est de Jacobson.

Les démonstrations des corollaires et des propositions suivantes sont connues :

<u>COROLLAIRE</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau</u>, I <u>un idéal de</u> A, <u>alors</u>

$$\mathcal{J}(I) = \mathcal{J}(A) \cap I .$$

Notons A^1 l'extension usuelle de A par $A \times \mathbb{Z}$ pour obtenir un anneau unitaire.

<u>PROPOSITION 2</u>. A^1 <u>est un anneau de Jacobson si et seulement si</u> A <u>est un anneau de Jacobson</u>.

<u>COROLLAIRE</u>.

$$\mathcal{J}(A^1) = [\mathcal{J}(A)]^1$$

<u>ce qui permet dans la suite de supposer que</u> A <u>est unitaire lorsqu'on en a besoin</u>.

Notons $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau des matrices carrées (n,n) à éléments dans A.

<u>PROPOSITION 3</u>. A <u>est un anneau de Jacobson si et seulement si pour tout</u> n, $\mathcal{M}_n(A)$ <u>est un anneau de Jacobson</u>.

<u>COROLLAIRE</u>.

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_n(A)) = \mathcal{M}_n(\mathcal{J}(A)).$$

Pour démontrer le théorème de transfert on introduit en premier lieu les 4 lemmes suivants.

<u>LEMME 1</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau</u>, I <u>un idéal non réduit à zéro de</u> $A[x]$. <u>Soit</u> P <u>un polynôme de degré minimum</u> ≥ 0 <u>dans</u> I <u>et soit</u> α <u>le premier coefficient de</u> P (<u>coefficient du terme de plus haut degré de</u> P). <u>Alors</u>

$$\alpha A[x] P = P A[x] \alpha$$

et $\forall r \in A \qquad \alpha r P = P r \alpha$.

Si $f \in I$ avec $f \neq 0$ et $°f = k$, alors $\exists q \in A[x]$, $\exists \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq k - n + 1$, où $n = °P$ tels que $f\alpha^{\ell} = qP$.

Démonstration.

- Pour tout r de A on a : $°(\alpha r P - P r \alpha) < n$. Or $\alpha r P - P r \alpha \in I$ et le degré minimum dans I est n donc $\alpha r P - P r \alpha = 0 \Rightarrow \alpha r P = P r \alpha$.

Par ce même raisonnement on a aussi $\alpha P = P\alpha$, donc $\alpha A[x] P = PA[x]\alpha$.

- Soit β le premier coefficient de f; faisons un raisonnement par récurrence sur k;

si $k = n$ on a $f\alpha - \beta P \in I$ et $°(f\alpha - \beta P) < n$ donc $f\alpha = \beta P$, ici $\ell = 1$ et $q = \beta$.

supposons le résultat vrai jusqu'à $k = m \geq n$.

soit f de degré $m+1$, alors $s = f\alpha - \beta P x^{m-n+1} \in I$ et $°(f\alpha - \beta P x^{m-n+1}) < m+1$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ce polynôme $s = f\alpha - \beta P x^{m-n+1}$, donc $\exists u \in \mathbb{N}$, $\exists g \in A[x] \quad s\alpha^{u} = gP$

$$f\alpha^{u+1} = s\alpha^{u} + \beta P x^{m+1-n}\alpha^{u} = gP + \beta P x^{m+1-n}\alpha^{u}$$

on a bien $\quad f\alpha^{\ell} = qP$ où $\ell = u+1$ et $q = g + \beta\alpha^{u} x^{m+1-n}$.

Soit D_m l'ensemble des polynômes de degré $\leq m$ dans $A[x]$.

LEMME 2. Soit A un anneau, $\mathcal{P}$ un idéal premier de $A[x]$ tel que $\mathcal{P} \cap A = 0$ et I un idéal de $A[x]$ avec $I \supseteq \mathcal{P}$. Si $\exists m \quad m \geq 0$ tel que $I \cap D_m = \mathcal{P} \cap D_m \neq 0$, alors $\forall k \geq m$ on a $I \cap D_k = \mathcal{P} \cap D_k$.

Démonstration. Ce résultat est aussi démontré par récurrence.

- Supposons que $I \cap D_k = \mathcal{P} \cap D_k$ pour un certain $k \geq m$.

- Soit $f \in I$, $g \in \mathcal{P}$ ayant respectivement pour premier coefficients α et β et tels que $°f = °g = k+1$. Alors : $\forall r \in A$, $f r \beta - \alpha r g \in I \cap D_k = \mathcal{P} \cap D_k$, donc $\forall r \in A$, $f r \beta \in \mathcal{P}$ c'est-à-dire $f A[x] \beta \subseteq \mathcal{P}$; on a donc soit $f \in \mathcal{P}$ soit $\beta \in \mathcal{P}$ puisque $\mathcal{P}$ est premier, mais puisque $\mathcal{P} \cap A = 0$, on a $\beta \notin \mathcal{P}$ donc

$f \in \mathcal{P}$ donc $f \in \mathcal{P} \cap D_{k+1}$ donc $I \cap D_{k+1} = \mathcal{P} \cap D_{k+1}$.

LEMME 3. Soit A un anneau de Jacobson premier (avec unité), $\mathcal{P}$ un idéal premier non réduit à zéro de $A[x]$ tel que $\mathcal{P} \cap A = 0$ et I un idéal de $A[x]$ avec $I \not\supseteq \mathcal{P}$, alors $I \cap A \neq 0$.

Démonstration. Soit P un polynôme de plus petit degré ≥ 0 dans I, si tout tel polynôme est dans $\mathcal{P}$ alors $I \cap D_n = \mathcal{P} \cap D_n$ où $n = {}^oP$. D'après le lemme 2 nous avons alors : $\forall\ k \geq n$, $I \cap D_k = \mathcal{P} \cap D_k$ d'où $I = \mathcal{P}$ ce qui est une contradiction.

Choisissons $P \notin \mathcal{P}$. Soit f un polynôme de plus petit degré dans $\mathcal{P}$ (donc $f \in I$), d'après le lemme 1 on a :

$\exists\, q \in A[x]$, $\exists\, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq m-n+1$ où $m = {}^of$ tels que $f\alpha^\ell = qP$.

Si β est un coefficient dans q tel que $\beta\alpha = 0$, alors $\beta P \in I$ et ${}^o(\beta P) < {}^oP \Rightarrow \beta P = 0$. Il y a donc 2 possibilités : soit $f\alpha^\ell \neq 0$ soit $f\alpha^\ell = 0$.
Dans le 1^er^ cas : il existe un polynôme q tel que pour certains de ses coefficients β, $\beta\alpha \neq 0$. Soit i le degré du terme de plus haut degré dont β est le coefficient, on aura $\qquad {}^oqP = i+n$.
D'autre part : $\mathcal{P} \supseteq f\alpha^\ell A[x]\alpha = qP\, A[x]\alpha = q\alpha\, A[x]P$, $q\alpha A[x]P \subseteq \mathcal{P}$ donc $q\alpha \in \mathcal{P}$ ou $P \in \mathcal{P}$ car $\mathcal{P}$ est premier, on a pris $P \notin \mathcal{P}$ donc $q\alpha \in \mathcal{P}$ et $q\alpha \neq 0$.
On a : ${}^oq \geq {}^oq\alpha \geq {}^of$, d'autre part : ${}^of \geq {}^of\alpha^\ell = {}^oqP \geq {}^oq$. Donc on a l'égalité et comme ${}^oqP = i+n$ et ${}^oq\alpha = i$, on a $i+n = i \Rightarrow n = 0$, c'est-à-dire ${}^oP = 0 \Rightarrow P \in I \cap A$ et puisque $P \neq 0$ on a donc $I \cap A \neq 0$.

Le lemme est ainsi prouvé dans le 1^er^ cas.
Il reste la possiblité $f\alpha^\ell = 0$ c'est-à-dire :

Pour tout f de degré minimum dans $\mathcal{P}$ dès que $f\alpha^\ell = qP$ alors $f^\alpha = 0$.

Montrons que c'est impossible.

Pour f et P donnés et w choisi tel que $f\alpha^w = 0$, mais $f\alpha^{w-1} \neq 0$, soit β le premier coefficient de f; alors $\beta\alpha^{w-1} \neq 0$. Ainsi $\forall\ r \in A$, on a $f\alpha^{w-1}r = 0$ (ce qui est exclu), soit $f\alpha^{w-1}r$ est de degré minimum dans $\mathcal{P}$. Alors $\exists u \leq m-n+1$

tel que $f\alpha^{w-1}r\alpha^{u} = 0$, donc $\forall r \in A$, $f\alpha^{w-1}r\alpha^{m-n+1} = 0$, et en particulier $\beta\alpha^{w-1}r\alpha^{m-n+1} = 0$. Cependant A est un anneau premier et $\beta\alpha^{w-1} \neq 0$, donc on doit avoir $\alpha^{m-n+1} = 0$, d'où : si $P \in I \setminus \mathcal{P}$ est de plus petit degré dans I avec α pour premier coefficient, alors $\alpha^{m-n+1} = 0$. Considérons les idéaux I_n = {l'ensemble des 1^{ers} coefficients des polynômes de degré n dans I} $\cup \{0\}$ et $\mathcal{P}_n$ défini de façon analogue par rapport à $\mathcal{P}$. On aura : I_n = {l'ensemble des 1^{er} coefficients des polynômes de $I \cap D_n$} $\cup \{0\}$ et $\mathcal{P}_n$ =(l'ensemble des 1^{ers} coefficients des polynômes de $\mathcal{P} \cap D_n$) $\cup \{0\}$.

Donc $I_n \supset \mathcal{P}_n$ et d'après ce qui précède $\alpha^{m-n+1} = 0$ donc $I_n/\mathcal{P}_n$ est un nil anneau.

L'anneau A est un anneau de Jacobson et d'après la proposition 1, I_n est un anneau de Jacobson. $I_n/\mathcal{P}_n \neq 0$ car $\mathcal{P}_n \not\supseteq I_n$ donc $I_n/\mathcal{P}_n$ est un anneau radical de Jacobson et aussi un anneau radical premier. Donc $I_n/\mathcal{P}_n$ contient un idéal nilpotent non nul.

Soit M cet idéal, $\exists P$ tel que $M^P = 0$ et $M^{P-1} \neq 0$, donc $0 \neq \mathcal{L} = M^{P'}$ est tel que $\mathcal{L}^2 = 0$, où $\begin{cases} 2P' = P \text{ pour } P \text{ pair} \\ 2P' = P+1 \text{ pour } P \text{ impair} \end{cases}$, donc il existe L idéal de A tel que

$$\mathcal{P}_n \subset L \subseteq I_n \quad \text{et} \quad L^2 \subseteq \mathcal{P}_n .$$

Choisissons $\alpha \in L - \mathcal{P}_n$ et $P \in I \cap D_n$ avec α pour premier coefficient. Alors $\forall r \in A$, $\alpha r \alpha \in L^2 \subseteq \mathcal{P}_n$ ainsi $\exists t \in \mathcal{P}$, dont le coefficient du terme en x^n est égal à $\alpha r \alpha$ et on a soit $^\circ t = n$, soit $t = 0$. $t = 0$ si $\alpha r \alpha = 0$ (exclu). On a donc $Pr\alpha - t \in I$ et $^\circ(Pr\alpha - t) < n$ donc $Pr\alpha - t = 0 \Rightarrow Pr\alpha = t$ et cela pour tout r de A. Donc $PA[x]\alpha \subseteq \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ étant premier et $P \notin \mathcal{P}$ on a donc $\alpha \in \mathcal{P}$ c'est-à-dire $\alpha \in \mathcal{P} \cap A = 0$, ce qui est une contradiction puisque $\alpha \notin \mathcal{P}_n$ et que $0 \in \mathcal{P}_n$.

La dernière possibilité est ainsi écartée et le lemme est démontré.

<u>LEMME 4. Soit</u> A <u>un anneau de Jacobson premier unitaire.</u> $\mathcal{P}$ <u>un idéal de</u> $A[x]$ <u>non réduit à zéro tel que</u> $\mathcal{P} \cap A = 0$. I <u>un idéal de</u> $A[x]$ <u>tel que</u> $I \supseteq \mathcal{P}$ <u>et</u> $I/\mathcal{P} = \mathcal{J}\left[A[x]/\mathcal{P}\right]$, <u>alors</u> $I \cap A = 0$.

<u>Démonstration</u>. Soit m le degré du polynôme de plus petit degré ≥ 0 dans $\mathcal{P}$.
L'idéal $\mathcal{P}_m$ de A est l'ensemble des premiers coefficients des polynômes de deg m dans $\mathcal{P}$.

Il y a une partition de l'ensemble des idéaux maximaux à droite de A en :

L'ensemble $\mathcal{M}_1$ de ceux qui ne contiennent pas $\mathcal{P}_m$

et

L'ensemble $\mathcal{M}_2$ de ceux qui contiennent $\mathcal{P}_m$.

Montrons que :

Si $M \in \mathcal{M}_1$ il existe M^* idéal maximal de $A[x]$ tel que $M^* \supseteq \mathcal{P}$ et $M^* \cap A = M$.

Pour $M \in \mathcal{M}_1$, $M + \mathcal{P}_m = A$ (puisque M est maximal) de sorte que $\exists \beta \in \mathcal{P}_m$, $\beta \neq 0$ et $1 - \beta \in M$.

Soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme de degré m avec β pour premier coefficient.
En appliquant le lemme 1 nous avons $\beta P = P\beta$. Si $g \in \mathcal{P}$, $\exists q \in A[x]$, $\exists\, \ell \in \mathbb{N}$ t.q. $g\beta^\ell = qP$, de plus $1-\beta^\ell \in M$.

Considérons l'idéal à droite $L = M[x] + \mathcal{P}$, idéal à droite de $A[x]$.
Si $L = A[x]$ alors $\exists\, s \in M[x]$ t.q. $1 = s+g$. On aurait donc $\beta^\ell = s\beta^\ell + g\beta^\ell = s\beta^\ell + qP$ et puisque $1-\beta^\ell \in M[x]$, on a donc $1-s\beta^\ell - qP \in M[x]$ donc $1-qP \in M[x]$ et puisque $1 \notin M[x]$, on a $q \notin M[x]$. Parmi tous les polynômes q tels que $1-qP \in M[x]$ choisissons en un de degré minimal k avec δ pour premier coefficient.

Puisque $\mathcal{P} \cap A = 0$ nous avons $°P > 0$ et aussi $1-qP \in M[x]$ ce qui entraîne $\delta\beta \in M$, d'autre part $1 - qP\beta = 1 - q\beta P \in M[x]$ (par le lemme 1), donc si $t = q\beta - \delta\beta x^k$ alors $1 - tP \in M[x]$ mais $°t < °q$, ce qui contredit la minimalité du degré de q donc nous concluons que $L \neq A[x]$.

Soit M^* un idéal maximal à droite de $A[x]$ contenant L alors $\mathcal{P} \subseteq M^*$ et aussi $M \subseteq M^*$ de sorte que $M^* \cap A = M$. Donc si $M \in \mathcal{M}_1$ alors $M = M^* \cap A \supseteq I \cap A$, car I est contenu dans tout idéal maximal contenant $\mathcal{P}$. D'autre part, si $M \in \mathcal{M}_2$ alors $M \supseteq \mathcal{P}_m$ de sorte que si nous considérons l'intersection de tous les idéaux maximaux à droite cette intersection contient $(I \cap A) \cap \mathcal{P}_m$,
$(I \cap A) \cap \mathcal{P}_m \supseteq (I \cap A)\mathcal{P}_m$. L'intersection de tous les idéaux maximaux à droite de A

est le radical de Jacobson et ici c'est zéro puisque A est un anneau de Jacobson premier, alors $(I \cap A).\mathcal{P}_m = 0$ et puisque $\mathcal{P}_m \neq 0$ on a $I \cap A = 0$, et le lemme est démontré.

<u>THEOREME</u>. A <u>est un anneau de Jacobson si et seulement si</u> $A[x]$ <u>est un anneau de Jacobson</u>.

<u>Démonstration</u>. Puisque toute image homomorphe d'un anneau de Jacobson est un anneau de Jacobson. Si $A[x]$ est un anneau de Jacobson, alors A est aussi un anneau de Jacobson.

Montrons que si A est un anneau de Jacobson, alors $A[x]$ aussi est un anneau de Jacobson. D'après la proposition 2, nous pouvons prendre A unitaire.

Montrons que pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de $A[x]$ le radical de Jacobson de $A[x]/\mathcal{P}$ est nul (d'après la 3^e définition).

Remarquons que nous pouvons prendre A anneau de Jacobson premier et $\mathcal{P}$ un idéal premier de $A[x]$ tel que $A \cap \mathcal{P} = 0$. En effet, si on n'était pas dans ce cas on pourrait s'y ramener par la considération suivante :

Pour tout $\mathcal{P}$ idéal premier de $A[x]$, $A \cap \mathcal{P}$ est un idéal premier de A donc $A/_{A\cap\mathcal{P}}$ est un anneau de Jacobson premier. D'autre part, il y a un homomorphisme naturel de $\left[A/_{A\cap\mathcal{P}}\right][x]$ sur $A[x]/\mathcal{P}$, de noyau N, on a : $N \cap A/_{A\cap\mathcal{P}} = 0$ et N est un idéal premier de $\left[A/_{A\cap\mathcal{P}}\right][x]$. On se ramène ainsi à un anneau de Jacobson premier et à un idéal de l'anneau des polynômes dont l'intersection avec l'anneau est 0. Donc pour A anneau de Jacobson premier, $\mathcal{P}$ idéal premier de $A(x)$ tel que $\mathcal{P} \cap A = 0$, soit $I/\mathcal{P} = \mathcal{J}\left[A[x]/\mathcal{P}\right]$; alors d'après le lemme 4 on a $I \cap A = 0$. D'autre part $I \supseteq \mathcal{P}$, donc d'après le lemme 3 on a $I = \mathcal{P}$ donc $I/\mathcal{P} = 0$ et $A[x]/\mathcal{P}$ a bien un radical réduit à zéro.

Si $\mathcal{P}$ était réduit à zéro, A étant un anneau de Jacobson premier n'a pas d'idéal nilpotents non nuls, en appliquant le Théorème de Amistur, on a donc $\mathcal{J}(A[x])=0$ et le théorème est ainsi démontré.

<u>COROLLAIRE</u>. <u>Si</u> A <u>est un anneau de Jacobson alors il en est de même de l'anneau</u> $A[x_1, x_2 \dots x_n]$ <u>où les</u> $x_1 \dots x_n$ <u>sont des indéterminées commutatives</u>.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 23.2.1976

ANNEAUX DE GROUPES NOETHERIENS

par

J. VALETTE

-:-:-:-:-:-:-

Soient K un corps commutatif et G un groupe. D.S. PASSMAN pose le problème suivant [7] : si l'anneau de groupe KG est noethérien le groupe G est-il polycyclique ? c'est-à-dire G possède-t-il une suite finie de sous-groupes $G = G_n \supset G_{n-1} \supset \dots \supset G_o = \{1\}$ tels que G_i soit normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i soit un groupe fini ou cyclique infini ? Nous donnons dans cet article une réponse partielle. Nous obtenons le résultat suivant :

Soit K un corps commutatif ou bien de caractéristique 0 ou bien extension non algébrique de son sous-corps premier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) KG est un T-anneau

b) G est extension finie d'un groupe abélien de type fini.

I. DEFINITIONS ET PROPRIETES ELEMENTAIRES.

1) On dit qu'un anneau A est essentiellement borné à gauche si pour tout idéal bilatère premier P de A, tout idéal à gauche essentiel de A/P contient un idéal bilatère non nul.

2) On dit qu'un anneau A est un T-anneau à gauche s'il est noethérien à gauche et essentiellement borné à gauche. Pour d'autres caractérisations on

pourra consulter [8, p. 95].

3) Soit G un groupe ; on désigne par ΔG le sous-groupe de G formé des éléments de G qui n'ont qu'un nombre fini de conjugués et par $\Delta^+ G$ le sous-groupe de torsion de ΔG. [5].

4) Si H est un sous-groupe de G, on désigne par $\omega(H)$ l'idéal à gauche de l'anneau KG engendré par les éléments 1-h où h décrit H.

5) Si M est un A-module à gauche (resp. à droite) $l(M)$ (resp. $r(M)$) désigne l'annulateur de M.

6) Un anneau A vérifie la propriété (P) si :

(P) "<u>tout idéal à gauche de A engendré par un élément régulier contient un idéal bilatère non nul</u>".

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

<u>LEMME 1.</u> <u>Soient KG un anneau de groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille infinie de sous-groupes de G telle que tout élément g de G n'appartienne qu'à un nombre fini de sous-groupe H_i. Alors</u> $\bigcap_{i\in I} \omega(H_i) = (0)$.

Soit x un élément non nul de $\bigcap_{i\in I} \omega(H_i)$. On peut écrire :

$$x = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j \qquad a_j \in K \qquad g_j \in G .$$

L'élément $g_l^{-1} g_j$ n'appartenant qu'à un nombre fini de sous-groupe H_i, il existe un indice i_o tel que pour tout l et tout j, $j \neq l$, $g_l^{-1} g_j$ n'appartienne pas à H_{i_o}. Mais x appartenant à $\omega(H_{i_o})$ s'écrit :

$$x = \sum_{j,h} a'_j g'_j (1-h) \quad h \in H_{i_o} ,$$

où $(g'_j)_{j\in J}$ forment un système de représentants de classes à gauche de G modulo H_{i_o}.

L'élément $g'^{-1}_j g'_j h$ appartenant à H_{i_o} on obtient une contradiction.

<u>LEMME 2</u>. <u>Soient</u> G <u>un groupe de type fini</u>, K <u>un corps commutatif de caractéristique</u> $p \geq 0$ <u>tel que l'anneau de groupe</u> KG <u>vérifie</u> (P) <u>alors</u> $G/\Delta G$ <u>est un groupe de torsion</u>.

Soient z un élément de G tel que $z\Delta G$ soit un élément sans torsion de $G/\Delta G$, H^n le sous-groupe de G engendré par z^n $n \geq 1$, $N(H^n)$ le normalisateur de H^n, L la réunion des sous-groupes $N(H^n)$. L est un sous-groupe propre de G d'indice infini. En effet, si x (resp. y) est un élément de $N(H^n)$ (resp. $N(H^m)$) alors xy^{-1} appartient à $N(H^{mn}) \subset L$. Si L est d'indice fini dans G, comme G est de type fini, L est de type fini [7, p. 20]. Il existe donc n tel que $N(H^n) = L$. $N(H^n)$ est donc d'indice fini. Comme $[N(H^n) : C(z^n)]$ est égal à 2, le centralisateur $C(z^n)$ de z^n est d'indice fini dans G et z^n appartient donc à Δ.

Nous allons construire une famille de sous-groupes de G vérifiant les hypothèses du lemme 1.

Soient g un élément de G-L tel que $H \cap gHg^{-1}$ soit différent de (1). On a donc :

$$z^n = g\, z^m\, g^{-1} \qquad\qquad (m,n) \in Z^2$$

m n'appartient pas à $\mathbb{Z}n$ car sinon g appartiendrait à $N(H^n)$. On pose $H_k = g^k H g^{-k}$ pour $k \geq 1$, $H_o = H$. Les sous-groupes H_k sont tous distincts et g est un élément sans torsion : en effet il est facile de montrer par récurrence que l'on a

$$g^k z^{m^k} g^{-k} = z^{n^k} \qquad (1)$$

et si H_1 est égal à H_k pour $k > 1$ alors

$$g^k z g^{-k} = \begin{cases} g^1 z g^{-1} \\ \text{ou} \\ g^1 z^{-1} g^{-1} \end{cases} .$$

Par suite g^{k-1} appartient à $N(H)$. La relation (1) appliquée à l'entier $k-1 > 0$ donne

$$z^{n^{k-1}} = g^{k-1} z^{m^{k-1}} g^{-(k-1)} = \begin{cases} z^{m^{k-1}} \\ \text{ou} \\ z^{m^{k-1}} \end{cases}$$

Comme z est sans torsion, ceci entraîne $m = \pm n$. On obtient ainsi une contradiction. Une démonstration analogue montrerait que g est sans torsion. Soit J une partie infinie de N alors $\bigcap_{i \in J} H_i = < 1 >$. Supposons que l'on ait $\bigcap_{i \in J} H_i \neq < 1 >$. Soient p le plus petit élément de J et $x \neq 1$ un élément de $\bigcap_{i \in J} H_i$. L'élément $g^{-p} x g^p$ appartient à $\bigcap_{i \in J} H_{i-p}$. On peut donc supposer que 0 appartient à J. Il existe un entier $\alpha > 0$ tel que z^α appartienne à $\bigcap_{i \in J} H_i$ et pour tout i de J il existe un entier p_i tel que $z^\alpha = g^i z^{p_i} g^{-i}$, ce qui implique :

$$z^{\alpha m^i} = (g^i z^{m^i} g^{-i})^{p_i} = z^{n^i p_i} .$$

Comme z est sans torsion on a $\alpha m^i = p_i n^i$ pour tout élément i de J. L'ensemble J étant infini on en déduit que $\alpha = 0$.

L'élément $1-z$ étant non diviseur de O dans KG l'idéal $KG(1-z)$ contient un idéal bilatère $B \neq 0$. B est alors contenu dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega(H_n)$. Les sous-groupes H_n vérifiant les conditions du lemme 1 on obtient une contradiction. Donc pour tout élément g de $G-L$ on a :

$H \cap g H g^{-1} = (1)$.

Soit $(g_i)_{i \in I}$ un système de représentants de classes à gauche de G modulo L. Alors on a :

$$g_i H g_i^{-1} \cap g_j H g_j^{-1} = \{1\}.$$

Posons $H_i = g_i H g_i^{-1}$. Il résulte du lemme 1 que $\bigcap_{i \in I} \omega(H_i)$ est nul. L'élément $1-z$ étant non diviseur de 0 dans KG ceci est impossible.

II - Dans cette partie nous allons donner une démonstration du théorème annoncé lorsque le corps K est de caractéristique 0.

Nous aurons besoin de la proposition suivante due à G. CAUCHON.

PROPOSITION 1. *Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre, M un A-module à gauche de type fini extension essentielle d'un A-module à gauche simple de dimension finie sur K. Si A est un T-anneau à gauche, $A/l(M)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.*

Il résulte de [8, p. 95] que l'on a

$$l(M) = \bigcap_{i=1}^{n} l(x_i) \qquad x_i \in M$$

$A/l(M)$ se plonge alors dans M^n. Par suite le socle gauche de $A/l(M)$ est un idéal bilatère B, de dimension finie et essentiel à gauche dans $A/l(M)$. On a donc :

$$r(B) = \bigcap_{i=1}^{m} r(y_i) \qquad y_i \in B.$$

$r(B)$ étant contenu dans le sous-module singulier de l'anneau noethérien $A/l(M)$, $r(B)$ est nilpotent. $(A/l(M))/r(B)$ se plongeant dans le K-espace vectoriel de dimension finie B^m, il en résulte que $A/l(M)$ est de dimension finie.

Rappelons que si p est un nombre premier, un groupe de torsion G est un <u>p' groupe</u> si l'ordre de tout élément de G n'est pas divisible par p.

<u>LEMME 3. Soient</u> K <u>un corps de caractéristique</u> p, G <u>un</u> p'<u>-groupe. Si</u> KG <u>est un</u> T<u>-anneau alors</u> G <u>est un groupe fini</u>.

Si G n'est pas fini, Δ^+G étant fini, $K[G/_{\Delta^+G}]$ est un T-anneau premier [2]. Il suffit donc sous les hypothèses du lemme de montrer que si KG est un T-anneau premier alors G est réduit à $\{1\}$. L'enveloppe injective E de $KG/\omega(G)$ étant un KG-module fidèle on a :

$$0 = \bigcap_{M \in L} 1(M),$$

où L est l'ensemble des sous-modules de type fini de E.

Soient M un sous-module de type fini de E, H le sous-groupe normal de G formé des éléments h de G tel que $1-h$ appartienne à $1(M)$. Il résulte de la proposition 1 que $KG/1(M)$ est de dimension finie sur K et par suite le groupe G/H est un sous-groupe de $GL(n,K)$. G/H étant de type fini et de torsion est fini [3]. $K[G/H]$ est donc un anneau semi-simple [2]. M est donc un KG-module semi-simple, mais E étant indécomposable on a $M = KG/\omega(G)$. Par suite E est égal à $KG/\omega(G)$. Comme $1(E)$ est nul, $\omega(G)$ est nul, et G est réduit à $\{1\}$.

<u>THEOREME 1. Soient</u> K <u>un corps de caractéristique</u> 0. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) KG <u>est un</u> T<u>-anneau</u>

b) G <u>est extension finie d'un groupe abélien de type fini</u>.

G étant noethérien Δ^+G est fini. Par suite $K[G/\Delta^+G]$ est un T-anneau premier [2]. Il résulte alors du lemme 2 que $G/\Delta G$ est un groupe de torsion. Le lemme 3 implique que $G/\Delta G$ est un groupe fini. ΔG est alors de type fini [7, p. 20] et le centre de ΔG est d'indice fini [5]. G est donc extension finie d'un groupe abélien de type fini.

La condition b) entraîne que KG est un anneau noethérien à identité polynomiale [4] et la propriété a) résulte de [1, th. 9].

III.- Dans cette partie K est un corps commutatif extension de son sous-corps premier k.

LEMME 4. *Soient A un anneau de Goldie premier, et S l'ensemble des non diviseurs de zéro de A. On a les propriétés suivantes :*

a) Si I est un idéal bilatère de $A[X]$ alors $S^{-1}I$ est un idéal bilatère de $S^{-1}A[X]$.

b) Tout idéal bilatère $\neq 0$ de $S^{-1}A[X]$ contient un élément central $\neq 0$.

c) Si $A[X]$ vérifie (P) alors $S^{-1}[X]$ vérifie (P) et $S^{-1}A$ est algébrique sur son centre.

Soit I un idéal bilatère de $A[X]$. Pour montrer que $S^{-1}I$ est un idéal bilatère, il suffit de montrer que si $b \neq 0$ est un élément de I et c un élément de S alors bc^{-1} est un élément de $S^{-1}I$.

Supposons cette propriété fausse et soit b un élément de I de degré minimum n tel que bc^{-1} n'appartienne pas à $S^{-1}I$.

$$b = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n .$$

Soit I_n l'ensemble des éléments a de A tel qu'il existe un polynôme P de degré n dont le coefficient de X^n est a et appartenant à I. $I_n \cup \{0\}$ est un idéal bilatère de A non nul. Il résulte de la condition de Ore :

$$a'_n c = d a_n \qquad a'_n \in A \qquad d \in S .$$

I_n étant essentiel dans A il existe $c' \in S$ tel que

$$c' a'_n \in I_n ,$$

$$c' a'_n = c' d a_n .$$

En changeant de notation on obtient :

$$a'_n c = d a_n \qquad a'_n \in I_n \qquad d \in S .$$

a'_n appartenant à I_n, il existe un polynôme Q de I tel que $Qc - dP$ soit un élément de I de degré strictement inférieur à n. Mais $(Qc - dP)c^{-1}$ n'appartient pas à $S^{-1}I$. On obtient ainsi une contradiction.

Soit B un idéal bilatère non nul de $S^{-1}A[X]$ et soit $P \neq 0$ un polynôme de degré minimum n de B :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad a_i \in S^{-1} A .$$

L'anneau $S^{-1}A$ étant simple, l'idéal $S^{-1}A\, a_n S^{-1}A$ est égal à $S^{-1}A$. On peut donc supposer que a_n est égal à 1. Comme P est de degré minimum, il en résulte immédiatement que les coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ appartiennent au centre de $S^{-1}A$. Tout idéal bilatère de $S^{-1}A[X] \neq 0$ contient donc un élément central $\neq 0$.

Si $A[X]$ vérifie (P) il résulte de a) que $S^{-1}A[X]$ vérifie (P). Si a est un élément de $S^{-1}A$, l'élément $X-a$ étant non diviseur de 0 dans $S^{-1}A[X]$ il résulte de b) qu'il existe un polynôme $P(X)$ tel que $P(X)(X-a)$

soit un élément central $h(X) \neq 0$. En identifiant les coefficients on en déduit que $h(a) = 0$ et a est algébrique sur le centre de $S^{-1}A$.

THEOREME 2. Soit $K|_k$ une extension non algébrique de k. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) KG est un T-anneau

b) G est extension finie d'un groupe abélien de type fini.

$K[G/\Delta G]$ étant un T-anneau et $\Delta^+(G/\Delta G)$ étant fini, d'après le lemme 2 et [5] il suffit de montrer que si G est un groupe de torsion et si KG est un T-anneau premier alors $G = \{1\}$. Il résulte des hypothèses que $k(X)[G]$ est un anneau noethérien vérifiant (P). Nous allons montrer que kG est algébrique sur son centre k, car $\Delta G = \{1\}$. a étant un élément de KG et $X-a$ étant non diviseur de 0 dans $B = k(X)[G]$, l'idéal à gauche $B(X-a)$ contient un idéal bilatère $I \neq 0$. Posant $C = KG[X]$ et $A = KG$, l'idéal $I_o = I \cap C$ est un idéal bilatère non nul de C. Soit $h(X)$ un élément $\neq 0$ de I_o de degré minimum n. On peut supposer que :

$$h(X) = a_o + a_1 X + \ldots + sX^n \qquad a_i \in A, \qquad s \in S$$

où S désigne l'ensemble des non diviseurs de 0 de $A = kG$.

Il résulte du lemme 4 que l'élément $s^{-1}h(X)$ de $S^{-1}I_o$ est un polynôme central de $S^{-1}A[X]$. $h(X)$ appartenant à I_o on peut écrire

$$p(X)\, h(X) = Q(X)\,(X-a) \qquad (1) \qquad P(X) \in k[X]$$
$$Q(X) \in A[X] = kG[X].$$

L'élément $s^{-1}Q(X)\,(X-a)$ est donc central. Ceci entraîne alors que a

est algébrique sur le centre de $S^{-1}A = S^{-1}kG$. D'après [6] a est algébrique sur k. kG est donc algébrique sur k. kG étant noethérien premier, le théorème de Goldie entraîne que kG est un anneau simple et le groupe G est égal à $\{1\}$.

Je remercie très sincèrement le Professeur G. Renault et G.M. Goursaud pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

REFERENCES

[1] S.A. Amitsur, Prime rings having Polynomial Identities with arbitrary coefficients. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 17 (1967), 470-486.

[2] I.G. Connell, On the group-ring. Cand. J. Math. 15 (1963), 650-685.

[3] I. Kaplansky. Fields and Rings. Chicago Lectures in Mathematics, Univ. Chicago Press. Chicago 1969.

[4] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 105-112.

[5] B.H. NEUMAN, Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. Lond. Math. Soc. 3 (1) (1951) 171.

[6] D.S. Passman, On the ring of quotients of group ring. Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972) 221-225.

[7] D.S. Passman, Infinite group rings. Marcel Dekker Inc. New York (1971).

[8] G. Renault, Algèbre non commutative. Gauthier-Villars Paris (1975).

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 11 du 1.3.1976

GEOMETRIE DE MATRICES

par

G. DORN

-:-:-:-:-:-:-

- non rédigée -

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 12 du 8.3.1976

MODULES π - PROJECTIFS

par

Louis JEREMY

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Dans tout cet article A est un anneau unitaire, E un A-module à gauche et B l'anneau des endomorphismes de E ; E est donc un B-module à gauche. Nous posons $E^* = \mathrm{Hom}_A(E_A, A)$ et, suivant H. Bass [1], si $x \in E$, $o_E(x) = \{f(x) | f \in E^*\}$. C'est un idéal à droite de A. Si E est un facteur direct d'un A-module F, alors $o_E(x) = o_F(x)$; nous écrivons simplement $o(x)$, et nous posons $T = \sum_{x \in E} o(x)$; T est donc un idéal bilatère de E. Si E est projectif on sait que pour tout $x \in E$, $x \in o(x)E$; on sait aussi que $o(x)$ est un idéal à droite de type fini. Plus précisément, si E est facteur direct du module libre L de base $(e_i)_{i \in I}$, et si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, alors $o(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i A$. De plus si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de A, on a $(x \in \mathfrak{a}E \iff o(x) \subset \mathfrak{a})$.

Le but de cet article est de dualiser la notion d'annulateur, de montrer en particulier que si E est projectif les $o(x)$ jouent le même rôle que les annulateurs des éléments pour un module injectif ; nous utilisons ensuite ces résultats pour étudier les modules E qui vérifient la condition de chaîne descendante sur les sous B-modules monogènes et nous montrons, plus particulièrement qu'un module π-projectif est somme directe de sous-modules π-projectifs indécomposables (théorème 3.7).

Nous écrivons en abrégé c.c.d. (resp. c.c.a.) pour condition de chaîne descendante (resp. ascendante). Tous les modules considérés sont supposés unitaires. Si $n \in \mathbb{N}$ nous désignons par p_i $(1 \leq i \leq n)$ (resp. q_i $(1 \leq i \leq n)$) la i^e-projection canonique (resp. la i^e- injection canonique) de E^n sur E (resp. de E dans E^n) ; si bien que $p_i q_i = 1_E$ $(1 \leq i \leq n)$. R désigne le radical de Jacobson de l'anneau A et $R(E)$ celui du module E.

On trouvera dans [7] l'essentiel des résultats utilisés dans cet article.

I. <u>CORRESPONDANCES ENTRE LES SOUS A-MODULES DE E ET LES IDEAUX DE B.</u>

1) Soit $X \subset E$. Posons $\underline{l_B(X) = \{f \in B \mid X \subset \operatorname{Ker} f\}}$. C'est un idéal à gauche de B et $l_B(X) = l_B(AX)$.

Soit $I \subset B$. Posons $\underline{r_E(I) = \bigcap_{f \in I} \operatorname{Ker} f}$. C'est un sous A-module de E et $r_E(I) = r_E(BI)$.

2) Soit $X \subset E$. Posons $\underline{g_B(X) = \{f \in B \mid \operatorname{Im} f \subset AX\}}$. C'est un idéal à droite de B et $g_B(X) = g_B(AX)$.

Soit $I \subset B$. Posons $\underline{d_E(I) = \sum_{f \in I} \operatorname{Im} f}$. C'est un sous A-module de E et $d_E(I) = d_E(IB)$.

<u>Remarque</u> : $X \subset Y \rightarrow l_B(X) \supset l_B(Y)$ et $g_B(X) \subset g_B(Y)$.

$I \subset J \longrightarrow r_E(I) \supset r_E(J)$ et $d_E(I) \subset d_E(J)$.

PROPOSITION 1.1.

a) Si E est un A-module quasi-injectif alors, pour tout idéal à gauche de type fini I de B, on a $l_B r_E(I) = I$.

b) Si E est un A-module quasi-projectif alors, pour tout idéal à droite de type fini I de B, on a $g_B\, d_E(I) = I$.

a) Soit $I = B f_1 + \ldots + B f_n$. Alors $r_E(I) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$ et

$$l_B\, r_E(I) = \left\{ f \in B \mid \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f \right\} \quad \text{donc } I \subset l_B\, r_E(I).$$

Inversement soit $f \in l_B\, r_E(I)$, π la surjection canonique $E \longrightarrow E/\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$; f se factorise en $f = \bar{f}\pi$; soit $h = \sum_{i=1}^{n} q_i f_i$; h se factorise en $h = \bar{h}\pi$. Il existe un endomorphisme g de E^n qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E/\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & E^n \arrow[ddl, dashed, "g"] \\
& E \arrow[d, "q_1"'] & \\
& E^n &
\end{tikzcd}$$

. Alors

$$q_1 \bar{f} = g\,\bar{h}$$

$$\bar{f} = p_1\, g\,\bar{h}$$

$$f = \bar{f}\pi = p_1 g h = p_1 g \sum_{i=1}^{n} q_i f_i = \sum_{i=1}^{n} (p_1 g q_i) f_i$$

Donc $f \in I$ et $I = l_B\, r_E(I)$.

b) Soit $I = f_1 B + \ldots + f_n B$. Alors $d_E(I) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$ et

$g_B\, d_E(I) = \left\{ f \in B \mid \operatorname{Im} f \subset \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i \right\} \supset I$. Soit $f \in g_B\, d_E(I)$. Il existe un endomorphisme g de E^n qui rend le diagramme suivant commutatif. Alors

$$\begin{tikzcd}
& E^n \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddl, dashed, "g"'] & \\
& E \arrow[d, "f"] & \\
E^n \arrow[r, "\sum_{i=1}^{n} f_i p_i"] & \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$f\, p_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i\, p_i\, g \quad \text{et}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(p_i\, g\, q_1) \in I, \text{ d'où}$$

$$I = g_B\, d_E(I).$$

<u>COROLLAIRE 1.2. Soit E un A-module à gauche quasi-injectif. Alors</u>

1) <u>Si E est noethérien, B est un anneau semi-primaire</u> [5].

2) <u>Si E est artinien, B est un anneau noethérien à gauche</u>.

La proposition 1.1 montre que si E est noethérien, B est un anneau parfait à droite donc $B|R(B)$ est semi-simple et $R(B)$ est T-nilpotent à droite. Alors $R(B)$ est nilpotent [5, théorème 2.1] et B est semi-primaire.

<u>COROLLAIRE 1.3. Soit E un A-module à gauche quasi-projectif. Alors si E est noethérien, B est noethérien à droite. (Rappelons [6] que si E est artinien alors B est artinien à droite).</u>

II. CORRESPONDANCE ENTRE LES SOUS B-MODULES DE E ET LES IDEAUX DE A.

1) Soit $X \subset E$. Posons $\underline{l_A(X) = \{a \in A \mid aX = 0\}}$. C'est un idéal à gauche de A et $l_A(X) = l_A(BX) = \bigcap_{x \in X} l_A(x)$.

Soit $I \subset A$. Posons $\underline{r_E(I) = \{x \in E \mid Ix = 0\}}$. C'est un sous B-module de E et $\underline{r_E(I) = r_E(AI) = \bigcap_{a \in I} r_E(a)}$.

2) Soit $X \subset E$. Posons $\underline{g_A(A) = \sum_{x \in X} o(x)}$. C'est un idéal à droite de E et $g_A(X) = g_A(BX)$.

Soit $I \subset A$. Posons $d_E(I) = IE = \sum_{a \in I} aE$. C'est un sous B-module de E et $d_E(I) = d_E(IA)$.

<u>Remarque</u> : $X \subset Y \Longrightarrow l_A(X) \supset l_A(Y)$ et $g_A(X) \subset g_A(Y)$.

$I \subset J \Longrightarrow r_E(I) \supset r_E(J)$ et $d_E(I) \subset d_E(J)$.

LEMME 2.1.

a) Soit E un A-module à gauche quasi-injectif. Alors si $x, y \in E$.

$$B\,y \subset B\,x \Longleftrightarrow l_A(x) \subset l_A(y).$$

b) Soit E un A-module à gauche projectif. Alors si $x, y \in E$,

$$B\,y \subset B\,x \Longleftrightarrow o(y) \subset o(x).$$

Démontrons b). Nous pouvons supposer E libre. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$. Alors $o(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A$ et il existe des $a_{ij} \in A$ $(1 \leq i, j \leq n)$ tels que $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}$. Alors l'application $f \in B$ de matrice (a_{ij}) dans la base $(e_i)_{i \in I}$ vérifie $f(x) = y$. Inversement si $f(x) = y$ et $\alpha \in o(y)$ il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\alpha = \varphi(y)$ donc $\alpha = \varphi f(x) \in o(x)$.

PROPOSITION 2.2.

a) Si E est un A-module quasi-injectif alors, pour tout sous B-module de type fini M de E on a $r_E l_A(M) = M$.

b) Si E est un A-module projectif alors, pour tout sous B-module de type fini M de E on a $d_E\, g_A(M) = M$.

a) Soit $M = B\,x_1 + \ldots + B\,x_n$. Alors $l_A(M) = \bigcap_{i=1}^{n} l_A(x_i)$ et

$$r_E l_A(M) = \left\{x \in E \mid \bigcap_{i=1}^{n} l_A(x_i) \subset l_A(x)\right\}.$$

Donc $M \subset r_E\, l_A(M)$. Inversement soit $x \in r_E\, l_A(M)$; soit π la surjection canonique de A sur $A/\bigcap_{i=1}^{n} l_A(x_i)$ et $\psi : A \longrightarrow E^n$ définie par $\psi(a) = (a x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si $\psi_i : A \longrightarrow E$ est telle que $\psi_i(a) = a\,x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, on a $\psi = \sum_{i=1}^{n} q_i \psi_i$. ψ se factorise en $\psi = \bar{\psi}\,\pi$. De même $\varphi : A \longrightarrow M$ définie par $\varphi(a) = ax$ se factorise en $\varphi = \bar{\varphi}\,\pi$. Il existe un endomorphisme g de

E^n qui rend le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A/\bigcap_{i=1}^{n} l_A(x_i) \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"'] & E^n \arrow[ddl, dashed, "g"] \\ & E \arrow[d, "q_1"'] & \\ & E^n & \end{tikzcd}$$

$g\bar{\psi} = q_1\bar{\varphi}$. Alors

$\varphi = p_1 g \psi$ et

$x = \varphi(1) = p_1 g\psi(1) = \sum_{i=1}^{n} p_1 g q_i(x_i) \in M$,

d'où $r_E l_A(M) = M$.

b) Soit $M = Bx_1 + \ldots + Bx_n$; alors $g_A(M) = \sum_{i=1}^{n} o(x_i)$ et $d_E g_A(M) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)E$ mais $x \in o(x)E$ donc $M \subset d_E\, g_A(M)$. Inversement soit $y \in d_E\, g_A(M)$; alors $y = y_1 + \ldots + y_n$ où $y_i \in o(x_i)E$ donc $o(y_i) \subset o(x_i)$ et d'après le lemme, $y_i \in B\, x_i$ d'où $M = d_E\, g_A(M)$.

COROLLAIRE 2.3.

a) *Si E est quasi-injectif les annulateurs dans A des parties finies de E vérifient la c.c.a. si et seulement si les sous B-modules de type fini (resp. monogènes) vérifient la c.c.d.* .

b) *Si E est projectif les sommes finies de $o(x)$ $(x \in E)$ vérifient la c.c.d. si et seulement si les sous B-modules de type fini (resp. monogènes) vérifient la c.c.d.* .

PROPOSITION 2.4. *Soit E un A-module injectif tel que les annulateurs dans A des sous-ensembles de E vérifient la c.c.d. . Alors si E est noethérien, E est artinien et $A/l_A(E)$ est un anneau artinien à gauche.* (Cela généralise un résultat de [6]).

Il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $l_A(E) = \bigcap_{i=1}^{n} l_A(x_i)$; $A/l_A(E)$

est donc isomorphe à un sous-module de E^n. C'est donc un anneau noethérien à gauche dont l'enveloppe injective à gauche est de type fini ; alors, d'après le résultat non publié de Björk, c'est un anneau artinien à gauche.

Remarque : Soit E un module Σ-injectif de dimension finie ; on sait que les annulateurs des sous-ensembles non vides de E vérifient la c.c.a. . Mais B/RB est semi-simple [2] et B est un anneau semi-parfait. Si E est de type fini il est facile de voir qu'alors B est parfait à droite. On sait que si E est Σ-injectif il est somme directe de modules injectifs indécomposables [3]. En fait nous allons montrer qu'il suffit d'avoir la c.c.d. sur les sous B-modules monogènes pour obtenir une telle décomposition de E.

PROPOSITION 2.5. *Soit E un A-module injectif. Si E vérifie la c.c.d. sur les sous B-modules monogènes alors E est somme directe d'injectifs indécomposables.*

Soit $x \in E$ tel que Bx soit minimal. Alors $l_A(x)$ est maximal parmi les annulateurs des éléments de E et $E(Ax)$ est indécomposable [3]. E est donc extension essentielle d'une somme directe d'injectifs indécomposables soit $E > \bigoplus_{i\in I} E_i$. Soit $x \in E - \bigoplus_{i\in I} E_i$ un élément dont l'annulateur soit maximal et $0 \neq \alpha x \in \bigoplus_{i\in I} E_i$. Soit N tel que $E(A\alpha x) + Ax = E(A\alpha x) \oplus N$ et $x = x_1 + x_2$ la décomposition de x suivant cette somme directe. Alors $x_2 \notin \bigoplus_{i\in I} E_i$; or $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$ entraîne $\alpha x_2 = 0$ d'où $l_A(x) \subsetneq l_A(x_2)$ ce qui contredit la définition de x ; donc $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

III. MODULES π-PROJECTIFS.

PROPOSITION 3.1. *Si* P *est un* A-*module* π-*projectif les sous* B-*modules de type fini de* E *vérifient la c.c.d.* .

Ce résultat se démontre en adoptant la démonstration de S.U. Chase [4, th. 3.1].

Il suffit de montrer que les $o(x)$ vérifient la c.c.d.. On considère donc un ensemble I de cardinal $|I| \geq |A|$; on pose $Q = \prod_{i \in I} P_i$ où $P_i \sim P$ pour tout $i \in I$. On pose $L = Q \oplus Q' = \bigoplus_{j \in J} A_j$, où $A_j \sim_A A$ pour tout $j \in J$. Il existe une suite décroissante de sous-ensembles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I, tous de même cardinal que I vérifiant $I_o = I$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \prod_{i \in I_n} P_i$ et on suppose qu'il existe une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de P tels que la suite des $o(x_n)$ soit strictement décroissante. On considère alors les $\mathbb{Z}$-modules

$$Q_{n,k} = \frac{o(x_k)Q_n}{o(x_{k+1})Q_n}, \quad A_{j,k} = \frac{o(x_k)A_j}{o(x_{k+1})A_j} \quad \text{et} \quad P_{i,k} = \frac{o(x_k)P_i}{o(x_{k+1})P_i} .$$

En suivant la démonstration originale on établit ainsi la propriété

$$(\forall n)\ (\forall k)\ (\forall F \subset J,\ F \text{ fini})\ \ (\exists\, \bar{x} \in Q_{n,k})\ \ (\exists\, j \notin F)\ \ (f_{j,k}(\bar{x}) \neq 0).$$

On utilise ensuite ce résultat pour construire un élément $y \in Q$ qui a une infinité de composantes non nulles dans $\bigoplus_{j \in J} A_j$, ce qui est une contradiction.

COROLLAIRE 3.2. *Si* P *est* π-*projectif, et* -*injectif, alors* P *est* Σ-*injectif*.

D'après la proposition 2.5, P est somme directe d'injectifs indécomposables, ainsi que P^N et $P^{(\mathbb{N})}$; alors $P^{(\mathbb{N})}$ est facteur direct de P^N.

COROLLAIRE 3.3. *Si P est π-projectif, $T \cap R$ est T-nilpotent à gauche.*

Rappelons que $T = \sum\limits_{x \in E} o(x)$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $T \cap R$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous choisissons un idéal à droite $\mathfrak{a}_n \subset R$ qui est une somme finie de $o(x)$ et qui contient $b_n = a_{2n}a_{2n+1}$; ensuite nous posons $\mathfrak{b}_o = \mathfrak{a}_o$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathfrak{b}_n = b_o b_1 \ldots b_{n-1}\mathfrak{a}_n$. La suite des $\mathfrak{b}_n$, décroissante, est stationnaire ; il existe donc un entier N et un $a \in R$ tels que $b_o \ldots b_N = b_o \ldots b_N a$; alors $b_o \ldots b_N(1-a) = 0$ et $b_o \ldots b_N = 0$.

LEMME 3.4. *Soit P un module projectif. Soit $e = e^2 \in T$ tel que $A\bar{e}$ soit un A-module simple. Alors il existe un $\xi \in P$ tel que $o(\xi) = eA$.*

Posons $e = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(y_i)$ où $f_i \in P^*$ et $y_i \in P$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors Ae est isomorphe à un quotient de P^n et il existe un $x \in P^n$ et un sous-module Q tels que $P^n = Ax \oplus Q$ avec $Ax \sim Ae$. Mais alors $\left(\frac{P}{RP}\right)^n \sim \frac{Ax}{Rx} \oplus \frac{Q}{RQ}$ et il existe un $y \in P$ et $Q' \subset P$ tels que $\frac{P}{RP} = \frac{Ay}{Ry} \oplus \frac{Q'}{RQ'}$ avec $\frac{Ae}{Re} \sim \frac{Ay}{Ry}$. Considérons l'application canonique $\varphi : Ae \to Ae/Re$, l'application canonique $\pi : P \to P/RP$, la projection p de P/RP sur Ay/Ry parallèlement à Q'/RQ' et un isomorphisme θ de Ay/Ry sur Ae/Re. Il existe un morphisme $g : P \to Ae$ tel que $\psi g = \theta p \pi$.

$$\begin{tikzcd}
Ae \arrow[r, "\psi"] & Ae/Re \arrow[r] & 0 \\
 & P/RP \arrow[u, "\theta p"'] & \\
 & P \arrow[u, "\pi"'] \arrow[uul, dashed, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Ker $\psi = Re$ étant superflu dans Ae, g est surjective ; elle admet donc une section associée f et Ae est isomorphe à un facteur direct de P, soit Az.

Soit σ un isomorphisme de Az sur Ae et $\xi = \sigma^{-1}(e)$; alors $o(\xi) = eA$.

LEMME 3.5. *Soit* P *un* A-*module projectif et* $x \in P - RP$ *tel que* $o(x)$ *soit minimal parmi les* $o(x)$ *tels que* $x \in P-RP$; *alors* $o(x)$ *est engendré par un élément* $a \in A$ *et* $\bar{a}$ A/R *est simple*.

P est facteur direct d'un libre L de base $(\varepsilon_i)_{i\in I}$; soit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$; alors $o(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i A$. Soit p une projection de L sur P ; alors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i p(\varepsilon_i)$ et il existe donc un i_o tel que $a_{i_o} p(\varepsilon_{i_o}) \notin RP$; mais $o(a_{i_o} p(\varepsilon_{i_o})) \subset o(x)$ d'où $o(x) = a_{i_o} A$ que nous notons dorénavant $o(x) = a A$.

Soit $b \in A$ tel que, dans A/R, $\bar{a}\bar{b} \neq 0$. Il existe donc un $\lambda \in A$ tel que $ab\lambda ab \notin R$ donc $o(ab\lambda x) \notin R$ et $ab\lambda x \notin RP$. Or $o(ab\lambda x) \subset o(x)$ donc $o(ab\lambda x) = o(x)$ d'où $abA = aA$, $\bar{a}\bar{b}A/R = \bar{a}A/R$ et $\bar{a}$ A/R est simple.

LEMME 3.6. *Soit* P *un* A-*module* π-*projectif et* $\alpha \in T - T\cap R$; *alors* $\bar{\alpha}$ A/R *contient un module simple*.

Puisque $\alpha \in T$ il existe des $x_i \in P$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que $\alpha \in \sum_{i=1}^{n} o(x_i)$ donc $\alpha \in o(X)$ où $X \in P^n$; nous pouvons donc supposer que $\alpha \in o(x)$ où $x \in P$. Alors il existe un $\lambda \in A$ tel que $\alpha\lambda\alpha \notin R$ et en posant $y = \alpha\lambda x$ on montre facilement que $y \in P - RP$ et $o(y) \subset \alpha A$. En considérant alors un élément $y \in P-RP$ tel que $o(y)$ soit minimal dans αA on montre à l'aide du lemme 3.5 que $\bar{\alpha}A$ contient un module simple.

PROPOSITION 3.7. *Si* P *est* π-*projectif*, $T/T\cap R$ *est un anneau semi-simple. Il existe donc un idempotent* e *tel que* $\bar{e}$ *soit central dans* A/R *et* $T/T\cap R \sim A\bar{e}$.

D'après le lemme 3.6, $T/T\cap R$ est extension essentielle d'une somme directe de modules simples ; il suffit de montrer qu'elle est finie. Supposons qu'il existe une somme directe dénombrable de simples dans $T/T\cap R$ soit $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bar{e}_n A$ où les e_n sont des idempotents orthogonaux. Soit $x_n \in P$ tel que $o(x_n) = e_n A$ (lemme 3.4), $n \in \mathbb{N}$; considérons dans $P^{\mathbb{N}}$ les éléments $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $X_n = (0,\ldots,0,x_n,c_{n+1},\ldots)$; les $(BX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $B = \mathrm{End}_A P^{\mathbb{N}}$) constituent une suite décroissante donc il existe un N tel que $BX_N = BX_{N+1}$ donc $l_A(X_N) = l_A(X_{N+1})$; c'est une contradiction car $e_N \in l_A(X_{N+1}) - l_A(X_N)$, et $T/T\cap R$ est un A-module semi-simple de longueur finie. Dans la suite nous identifions $T/T\cap R$ et $T+R/R = A\bar{e}$ où $e = e^2$ et $\bar{e}$ est central.

<u>THEOREME 3.7. Tout module π-projectif est somme directe de modules projectifs indécomposables qui sont π-projectifs.</u>

P/RP est un A/R module ; c'est un $A/R\bar{e}$ module unitaire car si $x \in P$ et $o(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i A$ on a pour tout $i = 1,\ldots,n$ $\bar{a}_i = \bar{a}_i \bar{e}$ donc $(1-e)\, a_i \in R$ et $(1-e)\, x \in RP$ c'est-à-dire $\bar{x} = \bar{e}\bar{x}$. P/RP est donc un $A\bar{e}$-module semi-simple ; posons donc $\frac{P}{RP} = \bigoplus_{i\in I} S_i$ où chaque S_i est simple ; alors chaque S_i est isomorphe à un $A\bar{e}_i \subset A\bar{e}$ où $e_i = e_i^2$; les Ae_i sont donc des A-modules projectifs locaux. Pour tout $i \in I$ nous considérons les suites exactes

$0 \to Re_i \to Ae_i \xrightarrow{\varphi_i} S_i \to 0$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} Re_i \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} Ae_i \arrow[r, "\varphi = \sum_{i\in I}\varphi_i"] & \bigoplus_{i\in I} S_i \left(= \frac{P}{RP}\right) \arrow[r] & 0 \\
 & & & P \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit π la projection canonique de P sur P/RP. Comme P est projectif il existe un morphisme $g : P \to \bigoplus_{i\in I} Ae_i$ tel que $\varphi g = \pi$; mais $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est superflu dans $\bigoplus_{i\in I} Ae_i$ (corollaire 3.3) donc g est surjective et admet donc une section associée. Alors $\bigoplus_{i\in I} Ae_i$ est isomorphe à un facteur direct de P, soit $P \sim \bigoplus_{i\in I} Ae_i \oplus Q$; mais $\frac{Q}{RQ} = 0$ donc $Q = 0$ et $P \sim \bigoplus_{i\in I} Ae_i$.

BIBLIOGRAPHIE

1. BASS H., Projective modules over free groups are free. J. Algebra 1 (1964). 367-373.
2. CAILLEAU-PAGE A., Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 1040-1042 (12 juin 1967).
3. CAILLEAU-PAGE A., Une caractéristique des modules Σ-injectifs. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269 (24 novembre 1969), 997-999.
4. CHASE S.U., Direct products of modules. Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), p. 457-473.
5. FISHER Joe W., Nil subrings of endomorphism rings of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 34, 1 (1972), 75-78.
6. FISHER Joe W., Finiteness conditions for projective and injective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 40, 2 (1973), 389-394.
7. RENAULT G., Algèbre non commutative, Gauthier-Villars, Paris, 1975.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 13 du 15.3.1976

IDENTITES POLYNOMIALES DE $M_2(K)$

(d'après Y.U. RAZMYSLOV (*))

par

Mme A. PAGE

-:-:-:-:-:-:-

K est un corps de caractéristique 0.

NOTATIONS, DEFINITIONS.

Soit $\mathcal{P}$ l'algèbre des polynômes à une infinité d'indéterminées non commutatives $x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ à coefficients dans le corps K. On définit dans $\mathcal{P}$ un commutateur de poids $p > o$ par récurrence sur p :

$p = 1$: $c = x_1, \ldots, x_n, \ldots$

$p > 1$: $c = [u, v]$ où u est un commutateur de poids $p' < p$, et où v est un commutateur de poids $p - p'$.

Le K-espace vectoriel engendré par les commutateurs est stable par crochet : c'est l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$.

Une identité polynomiale (i.p.) de $M_2(K)$ est un polynôme $f \in \mathcal{P}$: $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$ pour $m_i \in M_2(K)$.

Une identité faible (i.f.) de $M_2(K)$ est un polynôme $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$ tel que $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$ pour $m_i \in SL_2(K)$ l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle.

Une identité de Lie (i.l.) de $SL_2(K)$ est un polynôme $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$ tel que $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$ pour $m_i \in SL_2(K)$.

(*) Y.U. Razmyslov : Finite Basing of the Identities of a Matrix Algebra of second Order over a Field of Characteristic zero. Algebra i Logika Vol. 12 N° 1, 1973.

Remarques.

- Soit $f \in \mathcal{L}$, f est une i.l. de $SL_2 \Leftrightarrow f$ est une i.f. de $M_2(K)$.

- Soit $f \in \mathcal{L}$ multilinéaire, f est une i.l. de $SL_2 \Leftrightarrow f$ est une i.p. de M_2.

- Les i.p. de $M_2(K)$ constituent un idéal V tel que

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in V \Rightarrow f(p_1, \dots, p_n) \in V \text{ pour tous } p_i \in \mathcal{P}.$$

Un tel idéal est un idéal verbal de $\mathcal{P}$.

- Les i.f. de $M_2(K)$ constituent un idéal faiblement verbal W :

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in V \Rightarrow f(c_1, \dots, c_n) \in V \text{ pour } c_i \in \mathcal{L}.$$

- Les i.l. de $SL_2(K)$ constituent un idéal de Lie verbal U de $\mathcal{L}$:

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in U \Rightarrow f(c_1, \dots, c_n) \in U \text{ pour } c_i \in \mathcal{L}.$$

Soient f_λ, $\lambda \in \Lambda$, des polynômes $\in \mathcal{P}$, f est conséquence (resp. conséquence faible) des f_λ, si f appartient à l'idéal verbal (resp. faiblement verbal) engendré par les f_λ. On a de même la notion de polynômes de Lie conséquence d'une famille de polynômes de Lie.

- L'expression $[p_1, \dots, p_n]$ où $p_i \in \mathcal{P}$ se définit par récurrence sur n par $[p_1, \dots, p_n] = [[p_1, \dots, p_{n-1}], p_n]$.

- On pose pour $p, q \in \mathcal{P}$, $p \circ q = pq + qp$.

- Pour $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \mathcal{P}$ et $a \in A$, où A est une K-algèbre on pose

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \Big/ x_{i_j} = a \;= f(x_{i_1}, \dots, x_{i_{j-1}}, a, x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_n}).$$

- Pour $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \mathcal{P}$, $s \in S_n$, $sf = f(x_{i_{s(1)}}, \dots, x_{i_{s(n)}})$.

IDENTITES FAIBLES DE $M_2(K)$.

- $m \in SL_2(K) \Rightarrow m^2$ central dans $M_2(K)$, d'où en linéarisant

LEMME. $[x_1 \circ x_2, x_3]$ est une i.f. de $M_2(K)$.

THEOREME 1. Les i.f. de $M_2(K)$ sont conséquences faibles de $[x_1 \circ x_2, x_3]$.

Schéma de la démonstration.

1) On peut se limiter aux i.f. multilinéaires.

2) Les i.f. multilinéaires de $M_2(K)$ sont de degré ≥ 3.

3) LEMME. Soit $f \in \mathcal{P}$, f multilinéaire de degré ≥ 2, alors pour tout couple i, j, $i \neq j$, il existe $g_{ij} \in \mathcal{P}$ multilinéaire dépendant de $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ tel que

$$f - \tau_{ij} f - g_{ij} \Big/ x_i = [x_i, x_j]$$

soit conséquence faible de $[x_1 \circ x_2, x_3]$.

4) La démonstration du théorème 1 s'effectue par récurrence sur le degré l de l'i.f. $f(x_1, \dots, x_n)$.

f i.f. de $M_2(K) \Rightarrow f - \tau_{ij} f$, i.f. de $M_2(K) \Rightarrow g_{ij} \Big/ x_i = [x_i, x_j]$ i.f. de $M_2(K) \Rightarrow g_{ij}$ i.f. de $M_2(K)$.

Par hypothèse de récurrence g_{ij} est conséquence faible de $[x_1 \circ x_2, x_3]$, il en est donc de même de $f - \tau_{ij} f$. Comme c'est vrai pour tous i, j, $i \neq j$, pour tout $s \in S_n$, $f - s(f)$ est conséquence faible de $[x_1 \circ x_2, x_3]$. Par suite

$$\sum_{s \in S_1} [f - s(f)]$$ appartient à l'idéal faiblement verbal engendré par $[x_1 \circ x_2, x_3]$. Or $\sum_{s \in S_\ell} [f - s(f)] = 1! f - a \sum_{S_\ell} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$; comme ceci est une i.f. de $M_2(K)$, on peut calculer a en posant $x_i = h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ quel que soit i. On trouve alors $a = o$, d'où le résultat.

IDENTITES DE LIE DE $SL_2(K)$.

LEMME. Les polynômes suivants sont des i.l. de $SL_2(K)$.

(1) $$\sum_{s \in S_3} \epsilon_s([x_4, x_{s(1)}, x_{s(2)}, x_{s(3)}, x_5] - [x_4, x_5, x_{s(1)}, x_{s(2)}, x_{s(3)}])$$

(2) $$[x_1, x_2, x_2, x_3, x_2] - [x_1, x_2, x_3, x_2, x_2]$$

(3) $\sum_{s\in S_3} \epsilon_s[x_4,x_5,x_{s(1)},x_{s(2)},x_{s(3)}] - ([x_4,x_1,x_3,x_5] + [x_4,x_3,x_1,x_5]$

$- [x_5,x_1,x_4,x_3] - [x_5,x_3,x_4,x_1])\ x_1 = [x_1,x_2].$

N.B. : On montre pour cela qu'ils sont conséquences faibles de $[x_1\circ x_2,x_3]$.

<u>THEOREME 2. Les i.l. de $SL_2(K)$ sont conséquences de (1), (2), (3).</u>

<u>Schéma de la démonstration.</u>

1) On peut se limiter aux i.l. multilinéaires.

2) Les i.l. multilinéaires de $SL_2(K)$ sont de degré ≥ 5.

3) Soit $f(x_1,\ldots,x_1) \in \mathfrak{L}$ multilinéaire de degré ≥ 5, il existe $c \in K$ et $v \in \mathfrak{L}$ multilinéaire dépendant de $(x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n)$ tels que

$$f - \tau_{ij}f - c\sum([x_i,x_{i_{s(1)}},\ldots,x_{i_{s(n-2)}},x_j] - [x_j,x_{i_{s(1)}},\ldots,x_{i_{s(n-2)}},x_i]) - v_{x_i} = [x_i,x_j]$$

soit combinaison linéaire de (1), (2), (3), après une substitution de crochets aux indéterminées.

4) Comme dans le théorème 1. 4) on montre que $c = o$, on achève la démonstration par récurrence.

N.B. : une i.l. multilinéaire de $SL_2(K)$ est une combinaison linéaire de (1), (2), (3) après substitution de crochets aux indéterminées.

<u>IDENTITES POLYNOMIALES DE $M_2(K)$.</u>

Soient f_1,f_2,f_3 les polynômes du paragraphe précédent, pour $i = 1,2,3$, on peut écrire $f_i = \sum \alpha_{ij}[u_{ij},v_{ij}]$ où u_{ij} et v_{ij} sont des commutateurs avec poids $u_{ij} \geq 2$. Introduisons les polynômes

$$f_i' = \sum \alpha_{ij}\, u_{ij} \circ [v_{ij},x_6].$$

Considérons d'autre part

(4) $[v_1 \circ v_2, x_5]$

(5) $4[x_5,x_6](v_1\circ v_2) - [x_5,V_1,V_2,X_6] - [X_5,V_2,V_1,X_6] + [x_6,V_1,x_5,V_2] + [x_6,V_2,x_5,V_1]$

avec $V_1 = [X_1,X_2]$, $V_2 = [X_3,X_4]$.

<u>LEMME. (4) et (5) sont des i.p. de $M_2(K)$.</u>

N.B. : On le déduit du fait que $[v_1 \circ v_2, x_3]$ est une i.p. de $M_2(K)$.

LEMME. Soient u_i et v_i des commutateurs en $x_1, \ldots, x_{l-1}$ avec poids $u_i \geq 2$. Alors $\sum \alpha_i [u_i, v_i]$ est une i.l. de $SL_2(K) \Leftrightarrow \sum \alpha_i u_i \circ [v_i, x_l]$ est une i.p. de $M_2(K)$.

LEMME. (1), (2), (3), (4), (5), f_1', f_2', f_3', S_4 sont des i.p. de $M_2(K)$.

THEOREME. Les i.p. de $M_2(K)$ sont conséquences de

$$m = [(1), (2), (3), (4), (5), f_1', f_2', f_3', S_4].$$

1) On peut se limiter aux i.p. multilinéaires.

2) Une i.p. multilinéaire de $M_2(K)$ est de $d^o \geq 4$.

3) Soit f une i.p. multilinéaire de $M_2(K)$, avec $d^o f = 4$, alors à un coefficient près $f = S_4$ (Amitsur-Levitski).

4) On raisonne par récurrence sur le degré de f. Pour $l = 4$ la propriété est vraie (cf. 3). Supposons-la vraie pour $l-1$, fausse pour l :

$\exists\, f(x_1, \ldots, x_n)$, i.p. multilinéaire de $M_2(K)$ qui n'est pas conséquence de m.

On peut supposer $f/_{x_i=1} = 0$ pour tout i : si

$f/_{x_1=1} = 0, \ldots, f/_{x_t=1} = 0$, $f/_{x_{t+1}=1} \neq 0$, le polynôme $g = f - f/_{x_{t+1}=1} \cdot x_{t+1}$ est une i.p. multilinéaire de degré l, telle que

$$g_{x_i=1} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, t+1.$$

Si g était conséquence de m, comme $f_{x_{t+1}=1}$ l'est il en serait de même de f.

5) Si $f/_{x_i=1} = 0$ pour tout i, f est combinaison linéaire des éléments $u_1 \ldots u_n$ où les u_i sont des commutateurs de poids ≥ 2. On peut alors montrer, qu'il existe des commutateurs u_k' et v_k' avec poids $u_k' \geq 2$ et un $v \in \mathcal{L}$ multilinéaire

$$f - \sum \alpha_k (u_k' \circ [x_k, x_l]) - v$$

soit conséquence de (4) et (5). On a de plus

- v i.f. de $M_2(K)$
- $\sum \alpha_k (u_k' \circ [x_k, x_2])$ i.f. $M_2(K)$.

v est alors une i.p. de $M_2(K)$ et par suite $\sum \alpha_k(u'_k \circ [x_k, x_1])$ en est une.
D'après le théorème 2, v est conséquence de (1), (2), (3), et $\sum \alpha_k(u'_k \circ [x_k, x_1])$ est une i.p. de $M_2(K)$ multilinéaire de degré 1, qui n'est pas conséquence de m.

6) $\sum \alpha_k [u'_k, x_k]$ est une i.l. de $SL_2(K)$, multilinéaire.

D'après le théorème 2

$$\sum \alpha_k [u'_k, x_k] = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \sum_j \alpha_{ij} [U_{ij}, V_{ij}]$$

où U_{ij} (resp. V_{ij}) s'obtient à partir de u_{ij} (resp. v_{ij}) en substituant des commutateurs aux indéterminées.

<u>LEMME</u>. <u>Soient</u> u_i <u>et</u> v_i <u>des commutateurs en</u> $x_1, \ldots, x_{l-1}$, u_i <u>de poids</u> $\geqslant 2$, <u>tels que</u> $\sum \delta_i [u_i, v_i] = 0$. <u>Alors</u> $\sum \delta_i u_i \circ [v_i, x_l]$ <u>est conséquence de</u> (4) <u>et</u> S_4.

Par suite

$$\sum \alpha_k u'_k \circ [x_k, x_l] - \sum_{i=1}^{3} \beta_i \sum \alpha_{ij} U_{ij} \circ [v_{ij}, x_l]$$

est dans m, et comme le deuxième terme est conséquence de f'_1, f'_2, f'_3, on aboutit à une contradiction.