UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 188 26001

Calculs de dimension de Hausdorff

J. Peyrière

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

CALCULS DE DIMENSION DE HAUSDORFF

par Jacques Peyrière

Ce travail est divisé en trois parties. D'abord, généralisant un résultat de P. Billingsley ([1] p. 144) on donne un procédé de calcul de la dimension de Hausdorff des ensembles linéaires, ensuite on utilise ce procédé pour évaluer la dimension d'ensembles définis par des propriétés de certains développements en séries, enfin on montre un résultat en relation avec le modèle de turbulence de B. Mandelbrot [4], [3].

1. Dimension de Hausdorff des ensembles linéaires.

1.1. On note $\mathbf{T}$ l'espace compact $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on l'identifiera souvent, comme ensemble, à l'intervalle $[0,1[$. La mesure de Lebesgue d'un intervalle I de $\mathbf{T}$ sera notée $|I|$.

Soient $\mathfrak{F}$ une famille d'intervalles de $\mathbf{T}$ et μ une mesure de Radon positive sur $\mathbf{T}$. Si E est une partie de $\mathbf{T}$ et ε un nombre strictement positif on appelle $(\varepsilon, \mathfrak{F}, \mu)$-recouvrement de E tout recouvrement de cet ensemble par des éléments de $\mathfrak{F}$ de μ-mesures inférieures à ε. Pour tout nombre strictement positif α on pose

$$H^{\alpha}_{(\varepsilon,\,\mathfrak{F},\,\mu)}(E) = \inf \Sigma\, (\mu(I_j))^{\alpha}\ ,$$

cette borne inférieure étant prise pour tous les $(\varepsilon, \mathfrak{F}, \mu)$-recouvrements $\{I_j\}$ de E.

$H^{\alpha}_{(\varepsilon,\,\mathfrak{F},\,\mu)}(E)$ est une fonction décroissante de ε, on pose

$$H^{\alpha}_{\mathfrak{F},\mu}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{(\varepsilon,\,\mathfrak{F},\,\mu)}(E)\ ,$$

c'est un élément de $[0, +\infty]$.

Si $H^{\alpha}_{\mathfrak{F},\mu}(E)$ est fini, $H^{\beta}_{\mathfrak{F},\mu}(E)$ est nul lorsque β est strictement supérieur à α. On pose

1.1.1. $$\dim_{\mathfrak{F},\mu}(E) = \inf\left\{\alpha > 0\ ;\ H^{\alpha}_{\mathfrak{F},\mu}(E) = 0\right\}.$$

Si l'on omet l'indice μ, c'est que cette construction a été faite en utilisant la mesure de Lebesgue, si l'indice $\mathfrak{F}$ manque c'est que la famille d'intervalles utilisée est constituée de tous les intervalles de $\mathbb{T}$. Avec ces notations $\dim E$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble E.

1.1.2. Dorénavant nous utiliserons des familles $\mathfrak{F}$ ayant les propriétés suivantes :

a) $\mathfrak{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{F}_n$,

b) chaque $\mathfrak{F}_n$ est une partition finie de $\mathbb{T}$,

c) $\mathfrak{F}_{n+1}$ est un raffinement de $\mathfrak{F}_n$, plus précisément tout élément I de $\mathfrak{F}_{n+1}$ est contenu dans un élément de $\mathfrak{F}_n$, son père, noté $p(I)$. On suppose que $p(I)$ contient strictement I.

1.1.3. Lorsque nous aurons une telle famille d'intervalles nous noterons $I_n(x)$ l'élément de $\mathfrak{F}_n$ contenant x.

Rappelons le théorème suivant dû à P. Billingsley [1].

1.1.4. THEOREME. Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'intervalles satisfaisant les hypothèses précédentes. On considère deux mesures de Radon sur $\mathbf{T}$, μ et ν, positives et diffuses. Si M est une partie de $\mathbf{T}$ contenue dans l'ensemble $\left\{x\in\mathbf{T} \; ; \; \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \nu(I_n(x))}{\log \mu(I_n(x))} \geq \delta\right\}$ on a $\dim_{\mathfrak{F},\mu} M \geq \delta \dim_{\mathfrak{F},\nu} M$.

La démonstration, dans un cadre très légèrement différent, se trouve à la page 144 du livre précédemment cité. On adopte la convention suivante $\log 0/\log 0 = \log 1/\log 1 = 1$.

Nous utiliserons ce théorème lorsque l'une des deux mesures est celle de Lebesgue Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff si l'on a $\dim = \dim_{\mathfrak{F}}$. Nous allons maintenant exhiber de telles familles.

1.2. Des familles d'intervalles permettant le calcul de la dimension de Hausdorff.

1.2.1. Nous conservons les hypothèses 1.1.2. Pour des raisons de commodité nous supposons que chaque $\mathfrak{F}_n$ est une partition finie de $[0,1[$ en des intervalles semi-ouverts. Nous définissons sur $\mathfrak{F}$ une fonction k ainsi

$$k(I) = \sup\left\{\frac{|I|}{|J|} \; ; \; J \in \bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{F}_n \quad \text{et} \quad p(J) = I\right\}$$

et nous faisons les hypothèses suivantes :

a) pour tout x de $[0,1[$, pour tout nombre strictement positif ε il existe un élément I de $\mathfrak{F}$ contenant x et dont la longueur est inférieure à ε,

b) pour tout nombre strictement positif α, $|I|^{\alpha} k(I)$ tend vers 0 lorsque $|I|$ tend vers 0, I restant dans $\mathfrak{F}$.

Cette dernière hypothèse équivaut à $\limsup_{I \in \mathfrak{F},\ |I| \to 0} |I|^{\alpha} k(I) \leq 1$ pour tout nombre strictement positif α.

1.2.2. THEOREME. Sous les hypothèses précédentes la famille $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff.

Avant de démontrer ce théorème établissons d'abord quelques lemmes.

1.2.3. LEMME. $\sup\left\{|I| \ ;\ I \in \mathfrak{F}_n\right\}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, il existerait un nombre strictement positif ℓ et une suite $\left\{I_n\right\}$ d'intervalles de longueurs supérieures à ℓ telle que I_n appartienne à $\mathfrak{F}_{N_n}$ (N_n croissant vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$). Nécessairement l'une au moins des chaînes de l'ensemble $\left\{I_n\right\}$ ordonné par inclusion serait infinie. On pourrait construire une suite $\left\{J_n\right\}_{n\geq 0}$ telle que l'on ait $J_n \in \mathfrak{F}_n$, $J_{n+1} \subset J_n$, $|J_n| \geq \ell$ pour tout n ; il existerait alors un point x de $[0,1[$ qui ne serait pas recouvert par des intervalles de longueurs arbitrairement petites, appartenant à $\mathfrak{F}$.

1.2.4. LEMME. Pour tout ε strictement positif, il existe un nombre strictement positif η tel que les hypothèses $I \in \mathfrak{F}$ et $|I| < \eta$ entraînent $|p(I)| \leq \varepsilon$.

Démonstration. En vertu du lemme 1.2.3 on peut choisir un nombre n tel que l'on ait $\sup\left\{|I| \ ;\ I \in \mathfrak{F}_n\right\} < \varepsilon$. Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$, constitué des intervalles de longueurs inférieures à ε appartenant à $\bigcup_{j\leq n} \mathfrak{F}_j$, ordonné par inclusion. Les éléments maximaux de $\mathcal{A}$ forment une partition finie $J_1, J_2, \ldots, J_N$ de

$[0,1[$. Posons $\eta = \inf\{|J_k|;\ k = 1, 2, \ldots, N\}$. Si maintenant I appartient à $\mathfrak{F}$ et a une longueur strictement inférieure à η il est strictement contenu dans l'un des intervalles $J_1, J_2, \ldots, J_N$, donc $p(I)$ est contenu dans l'un de ces intervalles et l'on a $|p(I)| \leq \varepsilon$.

1.2.5. LEMME. Soit I un intervalle de $\mathbf{T}$, semi ouvert à droite (I n'appartient pas nécessairement à $\mathfrak{F}$) tel que l'on ait $|I| < \inf\{|J|\ ;\ J \in \mathfrak{F}_o\}$. De deux choses l'une

1. il existe un élément J de $\mathfrak{F}$ tel que l'on ait $J \subset I \subset p(J)$,
2. il existe deux éléments disjoints J_1 et J_2 de $\mathfrak{F}$ tels que l'on ait

$$J_1 \cup J_2 \subset I \subset p(J_1) \cup p(J_2).$$

Démonstration. Si J appartient à $\mathfrak{F}$ notons $g(J)$ le nombre entier tel que J appartienne à $\mathfrak{F}_{g(J)}$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{A} = \{J \in \mathfrak{F}\ ;\ J \subset I\}$ ordonné par inclusion. Choisissons parmi les éléments maximaux de $\mathcal{A}$ l'un de ceux pour lequel g est minimum, appelons J_1 cet élément. Si $p(J_1)$ contient I on est dans le premier cas. Supposons donc que $p(J_1)$ ne contienne pas I, comme J_1 est un élément maximal de $\mathcal{A}$, I ne contient pas $p(J_1)$. L'intervalle $\overset{\circ}{I}$ contient donc une et une seule des extrémités de $p(J_1)$. Considérons maintenant l'intervalle J_2 maximum dans l'ensemble $\{J \in \mathfrak{F};\ J \subset I \cap \complement p(J_1)$ et J est contigu à $p(J_1)\}$. le père de J_2 n'est pas contenu dans celui de J_1 puisque J_2 n'est pas contenu dans $p(J_1)$; le père de J_2 ne contient pas celui de J_1 puisque $g(J_1)$ est minimum. On a donc l'inclusion

$p(J_2) \supset I \cap \complement p(J_1)$ puisque J_2 est maximum. Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1.2.2.

Il est clair que l'on a $H^\alpha_\varepsilon \leq H^\alpha_{\varepsilon,\mathfrak{F}}$ et donc $\dim \leq \dim_{\mathfrak{F}}$.

Soit E une partie de $\mathbf{T}$ dont la dimension de Hausdorff est strictement inférieure à α ; on va montrer que pour tout β strictement positif on a $\dim_{\mathfrak{F}} E \leq \alpha(1+\beta)$.

Posons $\varphi_\beta(\varepsilon) = \sup\left\{|J|^\beta k(J) \; ; \; J\in\mathfrak{F} \text{ et } |J| \leq \varepsilon\right\}$, par hypothèse, pour tout β strictement positif, $\varphi_\varepsilon(\beta)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

Soit ε un nombre strictement positif, considérons un nombre η donné par le lemme 1.2.4. Il est clair que les intervalles semi-ouverts à droite permettent le calcul de $H^\alpha_\varepsilon(E)$. Considérons donc un η-recouvrement $\mathfrak{J}$ de E par des intervalles semi-ouverts à droite. Divisons $\mathfrak{J}$ en deux classes $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$ selon que la conclusion 1 ou 2 du lemme 1.2.5 est valable : à chaque I de $\mathfrak{J}_1$ on associe un J de $\mathfrak{F}$ tel que l'on ait $J \subset I \subset p(J)$, à chaque I de $\mathfrak{J}_2$ on associe deux éléments disjoints J_1 et J_2 de $\mathfrak{F}$ tels que l'on ait $J_1 \cup J_2 \subset I \subset p(J_1) \cup p(J_2)$. Clairement les intervalles $\{p(J)\}$, $\{p(J_1)\}$, $\{p(J_2)\}$ obtenus forment un $(\varepsilon,\ )$-recouvrement de E. On a

$$\sum_{I\in\mathfrak{J}_1} |p(J)|^{\alpha(1+\beta)} \leq \sum_{I\in\mathfrak{J}_1} |I|^\alpha \left(\frac{|p(J)|}{|J|}\right)^\alpha |p(J)|^{\alpha\beta} \leq (\varphi_\beta(\varepsilon))^\alpha \sum_{I\in\mathfrak{J}_1} |I|^\alpha$$

et

$$\sum_{I\in\mathfrak{J}_2} |p(J_1)|^{\alpha(1+\beta)} \leq \sum_{I\in\mathfrak{J}_2} |I|^\alpha \left(\frac{|p(J_1)|}{|J_1|}\right)^\alpha |p(J_1)|^{\alpha\beta} \leq (\varphi_\beta(\varepsilon))^\alpha \sum_{I\in\mathfrak{J}_2} |I|^\alpha ,$$

de même pour $\sum_{I\in\mathfrak{J}_2} |p(J_2)|^\alpha$.

On a donc $H^{\alpha(1+\beta)}_{\varepsilon,\mathfrak{F}}(E) \leq 2(\varphi_\beta(\varepsilon))^\alpha H^\alpha_\eta(E)$, ce qui montre que $H^{\alpha(1+\beta)}_{\mathfrak{F}}(E)$ est nul, ce qui achève la démonstration.

2. Dimensions d'ensembles définis par des développements en séries.

Dans ce paragraphe, on considère une suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de nombres entiers supérieurs à 2 satisfaisant l'hypothèse suivante.

2.1. Pour tout nombre strictement positif α on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{(a_1 a_2 \ldots a_n)^\alpha} = 0.$

A cette suite, on associe une famille $\mathfrak{F} = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathfrak{F}_n$ d'intervalles ainsi :

$$\mathfrak{F}_0 = \{[0,1[\},$$

$$\mathfrak{F}_n = \left\{\left[\frac{k}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \frac{k+1}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right[;\ k = 1, 2, \ldots a_1 a_2 \ldots a_n - 1\right\}.$$

L'hypothèse 2.1 et le théorème 1.2.2 montrent que $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff.

2.2. Notons Ω_n l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ et considérons $\Omega = \prod\limits_{n\geq 1} \Omega_{a_n}$. A chaque élément $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ de Ω associons le nombre $x = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\varepsilon_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}$. On obtient ainsi tous les nombres de l'intervalle $[0,1]$; les nombres ayant plusieurs telles représentations forment un ensemble dénombrable. Les éléments de $\mathfrak{F}$ correspondent à certains cylindres de Ω. On identifiera une mesure diffuse sur Ω à une mesure sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, l'ensemble des x ayant deux représentations est alors négligeable.

Nous allons étudier des sous-ensembles de $[0,1]$ définis par des propriétés du développement 2.2.

2.3. THEOREME. On suppose que la suite $\{a_n\}$ tend vers $+\infty$. Quel que soit le nombre ℓ strictement compris entre 0 et 1 la dimension de l'ensemble $\left\{x \in [0,1] \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{a_j} = \ell \right\}$ est 1.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où ℓ appartient à $\left]0\,,\frac{1}{2}\right]$. Définissons, lorsque $2\ell n$ est supérieur à 1, une probabilité p_n sur Ω_n :

$$p_n(\{j\}) = \begin{cases} 1/[2\ell n] & \text{si} \quad 0 \leq j < [2\ell n] \\ 0 & \text{si} \quad [2\ell n] \leq j < n \end{cases}$$

($[2\ell n]$ désigne la partie entière de $2\ell n$).

Nous pouvons supposer que, pour tout n, $2\ell a_n$ est supérieur à 1. Munissons Ω de la probabilité $P = \bigotimes_{n\geq 1} p_{a_n}$ et considérons les variables aléatoires indépendantes ε_j. On a $E(\varepsilon_j) = ([2\ell a_j] - 1)/2$ et $E(\varepsilon_j - E(\varepsilon_j))^2 = ([2\ell a_j]^2 - 1)/12$. On en déduit que P-presque sûrement $\frac{1}{n} \sum_{1\leq j\leq n} \frac{1}{a_j}\left(\varepsilon_j - \frac{[2\ell a_j]-1}{2}\right)$ tend vers 0. Puisque a_j tend vers $+\infty$, $[2\ell a_j]/(2a_j)$ tend vers ℓ donc, P-presque sûrement, $\frac{1}{n} \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\varepsilon_j}{a_j}$ tend vers ℓ. Le théorème résulte alors du lemme suivant.

2.4. LEMME. Tout borélien A tel que $P(A)$ soit non nul a pour dimension 1.

Démonstration. P-presque sûrement on a pour tout n

$$\operatorname{Log} P(I_n(x)) = - \sum_{1\leq j\leq n} \operatorname{Log} [2\ell a_j], \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\operatorname{Log} P(I_n(x))}{\operatorname{Log} |I_n(x)|} = \frac{\sum_{1\leq j\leq n} \operatorname{Log} [2\ell a_j]}{\sum_{1\leq j\leq n} \operatorname{Log} a_j},$$ cette dernière expression tend vers 1 car a_j tend vers $+\infty$.

Ceci montre que l'ensemble $B = \left\{x \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} P(I_n(x))}{\operatorname{Log} |I_n(x)|} = 1\right\}$ a une probabilité égale à 1. On peut alors appliquer le théorème 1.1.4 à $A \cap B$ et utiliser le fait que $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff pour conclure.

Fin de la démonstration du théorème 2.3.

Dans le cas où ℓ appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ on utilise une autre probabilité sur Ω_n :

$$p'_n(\{j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j < [(2\ell-1)\,n] \\ \dfrac{1}{n-[(2\ell-1)\,n]} & \text{si } [(2\ell-1)\,n] \leqslant j < n. \end{cases}$$

Le reste de la démonstration est analogue.

Nous allons maintenant étudier la dimension de l'ensemble des x de $[0,1]$ tels que, pour chaque ν et k, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \ ; \ a_j = \nu \ \text{ et } \ \varepsilon_j = k\}$ ait une densité donnée.

2.5. Nous ferons sur la suite $\{a_j\}_{j \geq 1}$ des hypothèses supplémentaires. Posons $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E_\nu = \{j \in \mathbb{N}^* \ ; \ a_j = \nu\}$ $(\nu \geq 2)$.

2.5.1. On suppose qu'il existe une suite $\{d_\nu\}_{\nu \geq 2}$ de nombres réels positifs telle que, pour tout ν, on ait

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_\nu) = d_\nu .$$

2.5.2. On suppose qu'il existe un nombre strictement positif c tel que, pour tout ν, on ait

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_\nu) \leq c\, d_\nu .$$

2.5.3. On suppose que $\sum_{\nu \geq 2} d_\nu (\operatorname{Log} \nu)^2$ est fini.

2.6. LEMME. Sous les hypothèses précédentes, on a

a) $\sum_{\nu\geq 2} d_\nu = 1$

b) $\sum_{j\in E_\nu} \frac{1}{j^2} \leq 2cd_\nu$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Log}(a_1 a_2 \ldots a_n) = \sum_{\nu\geq 2} d_\nu \,\mathrm{Log}\, \nu$.

Démonstration. Il est manifeste que l'on a $\sum_{\nu\geq 2} d_\nu \leq 1$ et $\sum_{\nu\geq 2} \frac{1}{n} \mathrm{card}(F_n \cap E_\nu) = 1$ cette dernière série est majorée terme à terme par la série convergente $\sum_{\nu\geq 2} c\, d_\nu$ et, lorsque n tend vers $+\infty$, chacun de ses termes a une limite, on a donc $\sum_{\nu\geq 2} d_\nu = 1$.

La seconde assertion résulte d'une sommation par partie, montrons la troisième. On a $\frac{1}{n} \mathrm{Log}(a_1 a_2 \ldots a_n) = \sum_{\nu\geq 2} \frac{1}{n} \mathrm{card}(F_n \cap E_\nu).\mathrm{Log}\, \nu$, les hypothèses faites permettent le passage à la limite.

2.7. LEMME. a) On a $\sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \,\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_j} \;;\; p_j \geq 0,\; \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\} = \mathrm{Log}\, n$.

b) Il existe un nombre C tel que pour tout entier n supérieur à 2, on ait

$$\sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j\Big(\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_j} - \sum_{k=1}^{n} p_k \,\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_k}\Big)^2 \;;\; p \geq 0,\; \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\} \leq C(\mathrm{Log}\, n)^2.$$

Démonstration. La première assertion est classique en théorie de l'information, pour montrer la seconde on utilise l'inégalité $\sum_{j=1}^{n} p_j\Big(\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_j} - \sum_{k=1}^{n} p_k \,\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_k}\Big)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} p_j\Big(\mathrm{Log}\, \frac{1}{p_j}\Big)^2$ et l'on majore cette dernière expression (on montre que si n est assez grand cette expression est maximum si tous les p_j sont égaux).

Le résultat suivant généralise un théorème dû à Eggleston ([2], [1] p. 142).

2.8. THEOREME. On suppose que la suite $\{a_j\}_{j\geq 1}$ vérifie les hypothèses 2.1 et 2.5. Soit $\{p_{\nu,k}\}_{\nu\geq 2, 0\leq k\leq \nu}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que pour tout ν supérieur à 2, on ait $\sum_{0\leq k<\nu} p_{\nu,k} = 1$. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{x\in [0,1[\ ;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}\left\{j\in F_n\cap E_\nu\ ;\ \varepsilon_j = k\right\} = d_\nu\, p_{\nu,k} \text{ pour tout couple } (\nu,k)\right\}.$$

La dimension de Hausdorff de A est

$$-\Big(\sum_{\nu\geq 2} d_\nu \sum_{0\leq k<\nu} p_{\nu,k} \operatorname{Log} p_{\nu,k}\Big)\Big/\Big(\sum_{\nu\geq 2} d_\nu \operatorname{Log} \nu\Big).$$

(On rappelle que l'on a écrit x sous la forme $\sum_{j\geq 1} \frac{\varepsilon_j}{a_1 a_2 \dots a_j}$).

Démonstration. Posons, pour alléger l'écriture,

$$h_\nu = -\sum_{0\leq k<\nu} p_{\nu,k} \operatorname{Log} p_{\nu,k} \quad \text{et} \quad \lambda = \Big(\sum_{\nu\geq 2} d_\nu h_\nu\Big)\Big/\Big(\sum_{\nu\geq 2} d_\nu \operatorname{Log} \nu\Big).$$

Montrons d'abord que la dimension de A est supérieure à λ. La suite $\{p_{a_j,k}\}_{0\leq k<a_j}$ définit sur Ω_{a_j} une probabilité, munissons Ω de la probabilité produit que nous désignerons par μ. D'après le théorème 1.1.4 il nous suffit de prouver que $\mu(A)$ égale 1 et que $\log \mu(I_n(x))/\operatorname{Log}|I_n(x)|$ tend vers λ pour μ-presque tout x (en effet $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff).

Fixons ν et k, considérons sur Ω les variables aléatoires indépendantes ainsi définies :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j = \nu \text{ et } \varepsilon_j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $E(X_j) = p_{\nu,k}\, 1_{E_\nu}(j)$, donc μ-presque sûrement, $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n$ tend vers $p_{\nu,k}\, d_\nu$. Ceci prouve l'égalité $\mu(A) = 1$.

Considérons maintenant sur Ω les variables aléatoires indépendantes $Y_j = -\operatorname{Log} p_{a_j,\varepsilon_j}$. On a $E(Y_j) = h_{a_j}$ et d'après 2.7.b, $E(Y_j - E(Y_j))^2 \leq C(\operatorname{Log} a_j)^2$. La série $\sum_{j\geq 1} (Y_j - E(Y_j))/\operatorname{Log}(a_1 a_2 \ldots a_j)$ converge μ-presque sûrement (le lemme 2.6 et l'hypothèse 2.5.3 montrent que la série des variances converge). On en déduit que μ-presque sûrement on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{Log} \mu(I_n(x))}{\operatorname{Log} |I_n(x)|} - \frac{h_{a_1}+h_{a_2}+\ldots+h_{a_n}}{\operatorname{Log}(a_1 a_2 \ldots a_n)} \right) = 0 .$$

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h_{a_j} = \sum_{\nu\geq 2} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_\nu).h_\nu ,$$

cette dernière série est majorée terme à terme par la série convergente $\sum_{\nu\geq 2} c\, d_\nu \operatorname{Log} \nu$ en vertu de 2.5 et 2.7. Le lemme 2.6 montre que $\left(\sum_{j=1}^{n} h_{a_j}\right)/\operatorname{Log}(a_1 a_2 \ldots a_n)$ tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci achève la première partie de la démonstration.

Montrons maintenant que la dimension de A est inférieure à λ Considérons l'ensemble A_N défini comme A à ceci près que l'on impose que $\frac{1}{n} \operatorname{card}\left\{ j \in F_n \cap E_\nu \ ; \ \varepsilon_j = k \right\}$ tende vers $d_\nu p_{\nu,k}$ seulement pour $\nu = 2, 3, \ldots, N$. L'ensemble A est contenu dans A_N, nous allons montrer que la dimension de A_N tend vers λ lorsque N tend vers $+\infty$. Nous définissons sur Ω une probabilité μ_N en munissant chaque facteur Ω_{a_j} d'une probabilité et en faisant leur produit : si a_j est inférieur à N on considère sur Ω_{a_j} la probabilité que définit la suite $\left\{ p_{a_j,k} \right\}_{0\leq k<a_j}$, sur les autres facteurs on répartit également la masse 1 entre tous les points. Une démonstration précédemment faite montre que l'on a $\mu_N(A_N) = 1$, donc

$\dim_{\mu_N, \mathfrak{F}} A_N = 1$. Nous allons montrer que pour tout x dans A_N on a
$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu_N(I_n(x)) = \sum_{2\le\nu\le N} d_\nu h_\nu + \sum_{\nu>N} d_\nu \operatorname{Log} \nu$. Le théorème 1.2.4 et le lemme 2.6 permettent alors de conclure.

Considérons donc un point x de A_N et notons $E_{\nu,k}$ l'ensemble $\{j \in E_\nu \ ; \ \varepsilon_j - k\}$; par hypothèse $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_{\nu,k}) = d_\nu\, p_{\nu,k}$ lorsque ν est inférieur à N. On a

$$-\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu_N(I_n(x)) = -\sum_{\nu=2}^{N} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_{\nu,k}) \operatorname{Log} p_{\nu,k} + \sum_{\nu>N} \frac{1}{n} \operatorname{card}(F_n \cap E_\nu) \operatorname{Log} \nu$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \operatorname{Log} \mu_N(I_n(x)) = \sum_{\nu=2}^{N} d_\nu\, h_\nu + \sum_{\nu>N} d_\nu \operatorname{Log} \nu .$$

Ceci achève la démonstration.

2.9. EXEMPLE. La partition $\{2^n\mathbb{N}^* \setminus 2^{n+1}\mathbb{N}^*\}_{n\ge 0}$ de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ satisfait les hypothèses 2.5.

3. Application à un modèle aléatoire de turbulence.

3.1. On considère une variable aléatoire γ à valeurs entières supérieures à 2. On se donne une suite γ_o, $\{\gamma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\}_{n\geq 1, j_k \in \mathbb{N}}$ de variables indépendantes équidistribuées avec γ.

3.2. Cette suite de variables aléatoires permet de construire une famille aléatoire d'intervalles $\mathfrak{F} = \bigcup_{n\geq} \mathfrak{F}_o$ de la façon suivante

$$\mathfrak{F}_o = \{ [0,1[\}$$

$$\mathfrak{F}_1 = \left\{ \left[\frac{k}{\gamma_o}, \frac{k+1}{\gamma_o}\right[;\ 0 \leq k < \gamma_o \right\},$$

les éléments de $\mathfrak{F}_1$ seront notés $I(j_1)$ $(0 \leq j_1 < \gamma_o)$. On obtient $\mathfrak{F}_2$ à partir de $\mathfrak{F}_1$ en divisant chaque intervalle $I(j_1)$ en $\gamma(j_1)$ intervalles égaux notés $I(j_1\ , j_2)$ et ainsi de suite.

3.3. PROPOSITION. Si pour tout p de $[1,+\infty[$, $E(\gamma^p)$ est fini alors presque sûrement la famille $\mathfrak{F}$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff.

Démonstration. Appelons $\mathfrak{a}_o$ la plus petite tribu rendant mesurable γ_o et $\mathfrak{a}_n$ celle qui rend mesurables les variables γ_o et $\{\gamma(j\ , \ldots, j_p) ;\ p \leq n,\ j_k \in \mathbb{N}\}$.

Soit β un nombre strictement positif, considérons l'événement A_n : l'un des intervalles $I(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ $(j_1 < \gamma_o,\ j_2 < \gamma(j_1), \ldots, j_n < \gamma(j_1, \ldots, j_{n-1}))$ est tel que

$$|I(j_1, \ldots, j_n)|^{\beta}\, \gamma(j_1, \ldots, j_n) > 1.$$

On a

$$1 - P(A_n | \mathfrak{a}_{n-1}) = \prod_{\substack{j_1<\gamma_o \\ j_2<\gamma(j_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ j_n<\gamma(j_1,\ldots,j_{n-1})}} P(\gamma(j_n) \leq (\gamma_o \gamma(j_1)\ldots\gamma(j_1,\ldots,j_{n-1}))^{\beta} | \mathfrak{a}_{n-1}).$$

Mais

$$P(\gamma(j_n) \leq (\gamma_o\gamma(j_1)\dots\gamma(j_1,\dots,j_{n-1}))^{\beta} \,|\, \mathcal{a}_{n-1})$$

$$\geq 1 - \frac{E(\gamma^{2/\beta})}{(\gamma_o\gamma(j_1)\dots\gamma(j_1,\dots,j_{n-1}))^2}$$

d'où

$$1 - P(A_n \,|\, \mathcal{a}_{n-1}) \geq 1 - \sum_{\substack{j_1<\gamma_o \\ \dots\dots\dots \\ j_n<\gamma(j_1,\dots,j_{n-1})}} \frac{E(\gamma^{2/\beta})}{(\gamma_o\gamma(j_1)\dots\gamma(j_1,\dots,j_{n-1}))^2}$$

par suite

$$P(A_n) \leq E(\gamma^{2/\beta})(E(\tfrac{1}{\gamma}))^n \; ;$$

le lemme de Borel-Cantelli permet d'obtenir $P(\limsup A_n) = 0$. Il suffit pour conclure de considérer une suite de nombres β tendant vers 0.

3.4. Soit maintenant une variable aléatoire positive w d'espérance 1. On considère une suite $\{w(j_1, j_2, \dots, j_n)\}_{n\geq 1, j_k \in N}$ de variables aléatoires equidistribuées avec w, mutuellement indépendantes et indépendantes de toutes les variables γ_o, $\gamma(j_1, \dots, j_n)$.

On appelle μ_n la mesure aléatoire sur $[0,1]$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$\sum_{\substack{j_1<\gamma_o \\ j_2<\gamma(j_1) \\ \dots\dots\dots \\ j_n<\gamma(j_1,\dots,j_{n-1})}} w(j_1)\, w(j\ ,j_2) \dots w(j\ ,j_2,\dots,j_n)\, 1_{I(j\ ,j_2,\dots,j_n)}.$$

On pose $Y = \lim_{n\to\infty} \|\mu_n\|$ (la convergence a lieu presque sûrement, il s'agit en en effet d'une martingale positive). Presque sûrement la suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers une mesure positive μ dont la masse est Y. Il s'agit d'une légère modification d'une construction de B. Mandelbrot [4].

3.5. THEOREME. 1. On a $E(Y) = 1$ si et seulement si $E(w \operatorname{Log} w) < E(\log \gamma)$

2. Soit $h > 1$, on a $0 < E(Y^h) < \infty$ si et seulement si $E(w^h)E(\gamma^{1-h}) < 1$.

Démonstration. Il suffit de reprendre les démonstrations données par J.-P. Kahane [3].

3.6. De même le théorème 4 de [3] s'étend dans ce cadre : si pour un $h > 1$ on a $E(w^h)\, E(\gamma^{1-h}) < 1$ on a presque sûrement $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log} \mu(I_n(x))}{\operatorname{Log} |I_n(x)|} = 1 - \dfrac{E(w \operatorname{Log} w)}{E(\operatorname{Log} \gamma)}$.

Ceci, compte tenu de 3.3 et 1.1.4 donne le résultat suivant.

3.7. THEOREME. S'il existe un $h > 1$ tel que $E(w^h)E(\gamma^{1-h}) < 1$, si γ a des moments de tous ordres la mesure μ est presque sûrement portée par un borélien dont la dimension est $D = 1 - \dfrac{E(w \operatorname{Log} w)}{E(\operatorname{Log} \gamma)}$. Presque sûrement tout borélien de dimension $< D$ est de μ-mesure nulle.

[1] BILLINGSLEY, P. Ergodic theory and information. Wiley 1965.

[2] EGGLESTON, H. G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. (Oxford series) 20 (1949), 31-36.

[3] KAHANE, J.-P. et PEYRIERE, J. Sur certaines martingales de B. Mandelbrot. A paraître dans Advances in Mathematics.

[4] MANDELBROT, B. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. C. R Acad. Sc. Paris 278 (1974), 289-292.