P U B L I C A T I O N S   M A T H E M A T I Q U E S   D ' O R S A Y

S E M I N A I R E

D'A L G E B R E   N O N   C O M M U T A T I V E

2ème Partie

\- Année 1970/71 -

Mathématiques (425)
(Service des Publications-
Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France).

P U B L I C A T I O N S   M A T H E M A T I Q U E S   D ' O R S A Y

S E M I N A I R E

D'A L G E B R E   N O N   C O M M U T A T I V E

2ème Partie

- Année 1970/71 -

Mathématiques (425)
(Service des Publications-
Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France).

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 8 du 25.1.1971

ANNEAUX PRESIMPLIFIABLES ET ANNEAUX ATOMIQUES

par Alain BOUVIER

-:-:-:-:-:-:-

Dans ce travail, nous présentons les anneaux présimplifiables, anneaux dont le demi-groupe multiplicatif est présimplifiable (5). Ils sont définis par la condition :

$$x \neq 0 \text{ et } y \notin \mathcal{U}(A) \Longrightarrow xy \neq x \ .$$

Cette notion généralise la notion d'anneau intègre. Indépendemment de nous, elle a été introduite par Fletcher (10), dans le cas des anneaux unitaires, sous le nom de pseudo-domaine.

Nous étudions les anneaux atomiques, - anneaux dans lesquels tout élément non nul et non immersible admet une factorisation en éléments irréductibles, - et plus particulièrement les anneaux de fractions des anneaux atomiques. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un anneau de fractions d'un anneau atomique soit atomique ; nous terminons en montrant que deux résultats démontrés dans (4) et (12) sont inexacts et nous en donnons un énoncé correct.

Terminologie et notations.

* Les anneaux considérés sont commutatifs, non nécessairement unitaires.

* Si A est un anneau, on désigne par A^1 le demi-groupe multiplicatif de A si A est unitaire ; sinon, A^1 est le demi-groupe obtenu par adjonction à A d'un élément neutre (8). On note $\mathcal{U}(A^1)$ le groupe des unités du demi-groupe multiplicatif A^1 . On convient que pour tout $x \in A$ $x^o = 1$.

* On note $\mathcal{U}(A)$ ou $\mathcal{U}$ le groupe des unités de A lorsque A est

unitaire ; sinon, on pose $\mathcal{U} = \emptyset$.

* Si $a, b \in A$, si $bA^1 \subseteq aA^1$, on écrit $a|b$ et l'on dit que <u>a divise b</u>. La relation ainsi définie est un préordre compatible avec la multiplication dans A.

* On désigne par $\mathcal{R}$ l'équivalence d'association définie sur A par : $(a \mathcal{R} b) \Longleftrightarrow (a|b \text{ et } b|a) \Longleftrightarrow (aA^1 = bA^1)$. Elle est compatible avec la multiplication dans A . On note $\bar{a}$ la classe de a modulo $\mathcal{R}$.

* $A/\mathcal{R}$ est canoniquement ordonné par $\bar{a} \leqslant \bar{b} \Longleftrightarrow a|b$. Si A est unitaire $\mathcal{U}$ est une classe modulo $\mathcal{R}$ et le plus petit élément de $A/\mathcal{R}$

* On dit que $p \in A-\mathcal{U}$ est <u>premier</u> si l'idéal principal pA^1 qu'il engendre dans le demi-groupe A est un idéal premier ; cela équivaut à affirmer que $(p|ab) \Longrightarrow (p|a \text{ ou } p|b)$.

On dit que $p \in A-\mathcal{U}$ est <u>irréductible</u> si $\bar{p}$ est minimal dans $A-\mathcal{U}|\mathcal{R}$ c'est-à-dire si $(a|p) \Longrightarrow (a \in \mathcal{U} \text{ ou } a \mathcal{R} p)$.

On dit que $p \in A-\mathcal{U}$ est <u>indécomposable</u> (7) si $(p = a_1 a_2 \ldots a_n) \Longrightarrow (\exists\, i \in [1,n]\ p|a_i)$. Fletcher (9) appelle ces éléments des éléments irréductibles.

Les éléments premiers et les éléments irréductibles sont indécomposables ; mais un élément indécomposable n'est pas nécessairement premier ou irréductible. Par exemple, dans $\mathbb{Z}$, 0 est indécomposable mais réductible ; si $A = 3\mathbb{Z}$, 6 est irréductible donc indécomposable ; 6 n'est pas premier car :

$$18 = (-3)(-6) \in 6A^1 \quad \text{alors que} \quad -3 \notin 6A^1 \quad \text{et que} \quad -6 \notin 6A^1 \ .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \text{Premier} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & \text{indécomposable} \\ \text{Irréductible} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

§1. ANNEAUX PRESIMPLIFIABLES.

Définition : On dit que A est un anneau présimplifiable si

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xy = x \Longrightarrow x = 0 \text{ ou } y \in \mathcal{U})$$

c'est-à-dire si et seulement si le demi-groupe multiplicatif de A est présimplifiable (5).

Exemples : 1) Tout anneau intègre est présimplifiable : Si A est un anneau intègre, si $xy = x$ et si $x \neq 0$ alors si $z \in A$ $xyz = xz \Longrightarrow yz = z$. Donc y est neutre dans A.

2) A est présimplifiable si et seulement si A est un pseudo domaine (10) : dans (10) Fletcher pose, pour tout $x \in A$:

$$\mathcal{U}(x) = \{y \in A \; ; \; \exists z \in A \quad xyz = x\} \text{ . } \mathcal{U}(x) \text{ peut être vide.}$$

Un anneau A est appelé un pseudo-domaine si :

$$\forall x \in A^* \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}$$

Un anneau non unitaire est donc un pseudo-domaine si et seulement si

$$\forall x \in A^* \; \mathcal{U}(x) = \emptyset \, .$$

Si A est présimplifiable, si $x \in A^*$, $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}$. En effet, on a toujours $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}(x)$; réciproquement, si $y \in \mathcal{U}(x)$, il existe $x \in A$ tel que $xyz = x$. Comme $x \in A^*$ $yz \in \mathcal{U}$ donc $y \in \mathcal{U}$

Si A est un pseudo-domaine, si $xy = x$ avec $x \neq 0$, montrons que $y \in \mathcal{U}$

$$xy = x \Longrightarrow xyy = x \Longrightarrow y \in \mathcal{U}(x) = \mathcal{U} \, .$$

3) Tout ℓ-anneau de Gluskin (11) est présimplifiable :

Gluskin (11) appelle ℓ-anneau tout anneau unitaire tel que les idéaux du demi-groupe multiplicatif de A soient des idéaux de l'anneau A. Un tel anneau est présimplifiable. En effet, on sait (11) que :

$$A = \mathcal{U} \cup (\mathcal{U} + 1) \, .$$

Donc si $xy = x$ et $y \notin \mathcal{U}$ alors $y \in \mathcal{U}+1$ donc $y = u+1$ avec $u \in \mathcal{U}$
$x = xy = x(u+1) = xu+x$ donc $xu = 0$.

Alors $x = (xu)u^{-1} = 0$.

4) <u>Si $n \in \mathbb{N}^*$ est primaire, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est présimplifiable</u>

(On dit que n est primaire (12) si n est une puissance d'un nombre premier).
En effet, si $n = p^k$ avec $k > 1$ et p premier, si $\overline{xy} = \bar{x}$ avec $\bar{x} \neq \bar{0}$ alors

$$xy-x = x(y-1) = \lambda p^k \text{ avec } \lambda \in \mathbb{Z} .$$

Comme x n'est pas divisible par p^k, $y-1$ est divisible par p ; il existe $h \in \mathbb{N}$ et $\mu \in \mathbb{Z}$ tels que $y-1 = \mu p^h$. Si $(\alpha,\beta) = 1$ veut dire que α et β sont étrangers :

$$(y,p^h) = 1 \Longrightarrow (y,p^k) = 1 \Longrightarrow y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) .$$

Remarque : Réciproquement, si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est présimplifiable, alors n est primaire (1). On peut voir directement que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas présimplifiable puisque, par exemple, $\bar{2}.\bar{4} = \bar{2}$ avec $\bar{2} \neq \bar{0}$ et $\bar{4} \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

5) <u>Si $n \geqslant 2$ et si $m \geqslant 2$, alors $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ est présimplifiable</u> : $(x,y)(x',y') = (x,y) \Longrightarrow xx' = x$ et $yy' = y \Longrightarrow x = y = 0$.

Les exemples précédents ont prouvé qu'un anneau intègre est présimplifiable, mais que la réciproque est inexacte. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'un anneau présimplifiable soit intègre.

<u>Théorème 1.1.</u> :

<u>Pour qu'un anneau présimplifiable A soit intègre, il suffit que $A/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale et que A possède un élément premier simplifiable.</u>

<u>Démonstration</u> : On suppose que A n'est pas un corps et que $A \neq \{0\}$ sinon le résultat est trivial. Soit p un élément premier simplifiable de A.

Tout élément x de A peut s'écrire $x = p^n s$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \notin pA^1$.

. Si $x \notin pA^1$, il suffit de prendre $n = 0$ et $s = x$.

. Si $x \in pA^1$, $x = px_1$. Si $x_1 \notin pA^1$, il suffit de prendre $n = 1$ et $s = x_1$. Si $x_1 \in pA^1$ $x_1 = px_2$. Ce procédé est fini. Sinon, par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $x_n = px_{n+1}$. La suite $(\bar{x}_n)_{n \geqslant}$ de $A/\mathcal{R}$ est décroissante donc stationnaire. Par conséquent, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\bar{x}_n = \bar{x}_{n+1}$. On en déduit qu'il existe $y \in A^1$ tel que $x_{n+1} = x_n y$. Alors

$$x_n = x_n py .$$

Comme A est présimplifiable, deux cas sont possibles :

. $x_n = 0$; alors $x = 0$: absurde

. $yp \in \mathcal{U}$; alors $p \in \mathcal{U}$: absurde.

A est intègre ; sinon, il existe $x \in A^*$ et $y \in A^*$ tels que $xy = 0$. D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$x = p^n s \quad \text{et} \quad y = p^m t \quad \text{avec} \quad n,m \in \mathbb{N} \,,\ s \notin pA^1 \quad \text{et} \quad t \notin pA^1 .$$

. On a $n \geqslant 1$ ou $m \geqslant 1$, sinon

$0 = st \in pA^1$ alors que pA^1 est un idéal premier, que $s \notin pA^1$ et que $t \notin pA^1$.

. Donc, $0 = p^{n+m} st$ avec $n+m \geqslant 1$ et $st \notin pA^1$ donc $st \neq 0$. Il en résulte que p est un diviseur de zéro dans A, ce qui est absurde.

<u>Rappels</u> : 1) Dans un anneau unitaire, si $u \in \mathcal{U}$

$$a = bu \Longrightarrow a \,\mathcal{R}\, b .$$

La réciproque est inexacte (9). Si K est un corps, si :

$$A = K[x,y,z]/(x-xyz)$$

$\bar{x} \mid \overline{xy}$; $\overline{xy} \mid \bar{x}$ car $\overline{xy}.\bar{z} = \bar{x}$.

Mais quel que soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ $\overline{xu} \neq \overline{xy}$.

2) Si p est irréductible, il n'est pas toujours vrai que

$$ab = p \Longrightarrow a \in \mathcal{U} \quad \text{ou} \quad b \in \mathcal{U}$$

Dans $Z/6Z$, 2 est irréductible. Pourtant, on a :

$$2.4. = 2 \quad \text{avec} \quad 2 \notin \mathcal{U} \quad \text{et} \quad 4 \notin \mathcal{U}$$

Proposition 1.2. : Si A est un anneau présimplifiable

a) 1 est le seul idempotent éventuel autre que 0

b) $(x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow (\exists\, u \in \mathcal{U}(A^1) x = yu)$

c) $p \in A^* - \mathcal{U}$ est irréductible si et seulement si

$$(p = ab) \Longrightarrow (a \in \mathcal{U} \text{ ou } b \in \mathcal{U})$$

Démonstration : (a) est évident.

(b) il est clair que si $x = yu$ avec $u \in \mathcal{U}(A^1)$ alors $x\mathcal{R}y$. Réciproquement, si $x\mathcal{R}y$, il existe $a,b \in A^1$ tels que $x = yb$ et $y = xa$. Si $a = 1$ ou $b = 1$, le résultat est évident. Sinon
$x = xab \Longrightarrow x = 0$ ou $ab \in \mathcal{U}$.

Si $x = 0$ alors $\bar{x} = \{0\}$ et le résultat est vrai. Si $x \neq 0$ alors $ab \in \mathcal{U} \Longrightarrow a \in \mathcal{U}$ et le résultat est envore vrai.

(c) La condition est suffisante pour que p soit irréductible. Réciproquement si p est irréductible et si $p = ab$, alors $a|p$ si $a \notin \mathcal{U}$, on a $a\mathcal{R}p$ donc $a = pu$ avec $u \in \mathcal{U}$. Alors $p \neq 0$ et $p = pub$ entraînent $b \in \mathcal{U}$.

Proposition 1.3. : Si A est un anneau présimplifiable, tout élément indécomposable non nul est irréductible.

Démonstration :si $p \in A^* - \mathcal{U}$ est indécomposable, si $a|p$ alors $p = ab$. Si $p \nmid a$ on a $b\mathcal{R}p$ donc $b=pu$ avec $u \in \mathcal{U}$. Alors $p \neq 0$ et $p = pau \Longrightarrow au \in \mathcal{U}$ donc $a \in \mathcal{U}$.

Remarque : Dans un anneau présimplifiable, si $p \in A^* -$

$$p \text{ premier} \Longrightarrow \begin{array}{c} p \text{ irréductible} \\ \Updownarrow \\ p \text{ indécomposable} \end{array}$$

<u>Proposition 1.4.</u> : <u>Dans un anneau artinien présimplifiable unitaire, tout élément non inversible est nilpotent.</u>

<u>Démonstration</u> : Si A est présimplifiable artinien, si $x \in A-\mathcal{U}$ puisque $(x^nA)_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante d'idéaux, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^nA = x^{n+1}A$. x^n et x^{n+1} sont associés donc il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que :

$$x^n = x^{n+1}u .$$

Comme $x \notin \mathcal{U}$, $xu \notin \mathcal{U}$ donc $x^n = 0$

En particulier, <u>tout domaine d'intégrité artinien est un corps, et dans tout anneau présimplifiable fini, les éléments non universibles sont nilpotents.</u>

(Le résultat est encore vrai si A n'est pas unitaire ; car dans ce cas, si $x \in A$, le demi-groupe cyclique qu'il engendre dans A est fini. Donc il existe deux entiers r et s tels que $1 \leqslant r \leqslant s$ et $x^r = x^s$. Comme A est sans élément neutre, nécessairement $x^r = 0$) .

<u>Remarques</u> : Si A est un anneau présimplifiable, $A[X]$ n'est pas nécessairement présimplifiable et si I est un idéal de A , A/I n'est pas nécessairement présimplifiable :

. $\mathbb{Z}$ est présimplifiable ; $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ne l'est pas.

. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est présimplifiable ; $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$ ne l'est pas puisque $(3+2X)(4+4X) = 4+4X$ alors que $4+4X \neq 0$ et $3+2X \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X])$.

On peut toutefois énoncer :

<u>Proposition 1.5.</u> : <u>Si I est un idéal primaire d'un anneau unitaire A , alors A/I est présimplifiable.</u>

<u>Démonstration</u> : Supposons que $\overline{x}\overline{y} = \overline{x}$ avec $\overline{x} \neq \overline{0}$. Puisque $\overline{y}-\overline{1}$ et soit nul, soit un diviseur de zéro dans A/I . Dans le premier cas, $\overline{y} \in \mathcal{U}(A/I)$. Dans le second cas, $\overline{y}-\overline{1}$ est nilpotent (12). Donc il existe $n \geqslant 1$ tel que :

$$(\bar{y}-\bar{1})^n = \bar{0}$$

$$(y-1)^n \in I$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} y^k \in I \Longrightarrow (-1)^n + \alpha y \in I$$

$$\overline{ay} = \bar{1} \quad \text{ou} \quad \overline{ay} = -\bar{1}$$

$$\bar{y} \in \mathcal{U}(A/I)$$

Nous ignorons si la réciproque est exacte. Toutefois, elle l'est dans $\mathbf{Z}$; si $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est présimplifiable, alors n est primaire.

On dit qu'un anneau unitaire est <u>local</u> s'il possède un unique idéal maximal propre.

<u>Proposition 1.6.</u> : <u>Tout anneau local est présimplifiable.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit A un anneau local et $\mathfrak{m}$ son unique idéal maximal propre. Si $xy = x$ avec $x \neq 0$ et $y \in \mathcal{U}$, alors $y \in \mathfrak{m}$.

Puisque $x(y-1) = 0$ avec $x \neq 0$, $y-1$ est un diviseur de zéro dans A, donc $y-1 \in \mathfrak{m}$. Alors $1 = y+(1-y) \in \mathfrak{m}$: absurde.

§2. <u>ANNEAUX ATOMIQUES.</u>

<u>Définition</u> : On dit que $d = p_1 p_2 \ldots p_n$ <u>est une factorisation complète de d</u> si tous les p_i sont irréductibles. Si tout élément de $A^* - \mathcal{U}$ admet une factorisation complète, on dit que A <u>est atomique.</u> [F_1] .

<u>Exemples</u> : 1) Tout anneau factoriel est atomique.

2) Tout anneau présimplifiable à factorisation unique au sens de Fletcher (9) est atomique.

3) Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est atomique. En effet : Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ où les p_i sont premiers, alors $\bar{p}_i$ est irréductible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$:

. $(n,p_i) \neq 1 \Longrightarrow \bar{p}_i \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

. $\bar{a}|\bar{p}_i \Longrightarrow \exists\, x, \lambda \in \mathbb{Z} \quad ax-p_1 = \lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$

$$ax = p_1[1+\lambda p_1^{\alpha_1 -1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}] .$$

Deux cas sont possibles : $p_1|a$ alors $\bar{p}_1|\bar{a}$ et $\bar{p}_1 \mathcal{R} \bar{a}$ ou bien $p_1 \nmid a$; alors $(p_1,a) = 1$ et $p_1|x$. Donc il existe y tel que $ap_1y = p_1[1+\frac{n}{p_1}]$ $ay = 1 + \lambda\frac{n}{p_1} \Longrightarrow (a, \frac{n}{p_1}) = 1$. Comme $(a,p_1) = 1$

$$(a,n) = 1 \Longrightarrow \bar{a} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) .$$

Si $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Z}$: $n = u \prod_{p \in P} p^{v_p(x)}$ où P est l'ensemble des nombres premiers. Comme $(p,n) = 1 \Longrightarrow \bar{p} \in \mathcal{U}$ et $(p,n) \neq 1 \Longrightarrow \bar{p}$ irréductible, nous voyons que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x}$ admet une factorisation complète.

<u>Remarque</u> : Un anneau atomique n'est pas nécessairement présimplifiable : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est atomique mais n'est pas présimplifiable.

Le théorème suivant permet de donner d'autres exemples d'anneaux atomiques.

<u>Théorème 2.1.</u> : <u>Si A est un anneau présimplifiable, si $A/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale, alors A est un anneau atomique.</u>

<u>Démonstration</u> : Si $A = \{0\}$ ou si A est un corps, le résultat est trivial. On suppose donc que $A^*-\mathcal{U}$ n'est pas vide. Soit x un élément de $A^*-\mathcal{U}$.

* x possède un diviseur irréductible ; sinon, nous pourrtions, par récurrence, construire une suite strictement décroissante de $A/\mathcal{R}$:

$$\bar{x} > \bar{x}_1 > \bar{x}_2 > \dots > \bar{x}_n > \bar{x}_{n+1} > \dots$$

ce qui est absurde.

* Si x est irréductible, x possède trivialement une factorisation complète. Sinon, il existe p_1 irréductible et $x_1 \in A^*- \mathcal{U}$ tels que $x = p_1x_1$. Si x_1 est irréductible x possède une factorisation complète. Sinon, $x_1 = p_2x_2$ avec p_2 irréductible et $x_2 \in A^*- \mathcal{U}$. Ce procédé est fini, sinon, on pourrait construire, par récurrence, deux suites $(p_n)_{n \geqslant 1}$ et $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de $A/\mathcal{R}$ est décroissante, donc stationnaire. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in A$ tels que $x_{n+1} = x_ny$.

Comme $x_n \neq 0$ et que A est présimplifiable

$$x_n = x_nyp_{n+1} \Longrightarrow yp_{n+1} \in \mathcal{U}$$

Si A est non unitaire, c'est absurde. Si A est unitaire, alors $p_{n+1} \in \mathcal{U}$ ce qui est également absurde.

Corollaire 2.2. : a) tout anneau unitaire noethérien présimplifiable est atomique,

b) tout anneau unitaire principal présimplifiable est atomique.

En particulier, $n\mathbb{Z}$ avec $n \geqslant 1$ est atomique ainsi que $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ si $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$.

Définition : On appelle base d'un anneau atomique tout système représentatif d'éléments irréductibles. Deux bases sont équipotentes. Le cardinal d'une base est appelé la dimension de l'anneau.

Si B est une base de l'anneau atomique A

$$\dim A = \text{Card } B$$

Proposition 2.3. : Soit B une base d'un anneau atomique. Si A est unitaire en présimplifiable tout élément de A^* peut s'écrire $x = u \prod_{p \in B} p^{\alpha_p}$ avec $u \in \mathcal{U}(A^1{}^\circ$, $a_p \in \mathbb{N}$, le produit étant à support fini.

Démonstration : Il suffit de pouvoir affirmer que deux éléments irréductibles associés diffèrent d'une unité. C'est le cas si A est présimplifiable (proposition 1.2.). C'est aussi le cas si A est unitaire [(7) Th. 3.2. page 604].

§3. COMPLEMENTS SUR LES ANNEAUX DE FRACTIONS.

Soit S une partie non vide d'un anneau A. On dit que (B, φ) est un anneau de fractions de A par rapport à S si :

1) $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme.
2) B est unitaire et $s \in S \Longrightarrow \varphi(s) \in \mathfrak{U}(B)$.
3) Pour tout couple (B', φ') vérifiant les deux conditions précédentes, il existe un unique homomorphisme

   $\sigma : B \to B'$ tel que

   $\varphi' = \sigma \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\sigma"] \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Deux anneaux de fractions de A par rapport à S sont isomorphes. Dans ce qui suit, on les identifie et l'on note $(A[\bar{S}^1], \varphi_S)$ l'anneau des fractions de A par rapport à S. Par abus de language, nous parlerons de l'anneau de fractions $A[\bar{S}^1]$. Dans tous les cas, l'homomorphisme canonique $\varphi_S : A \to A[\bar{S}^1]$ est un épimorphisme de demi-groupes (6) donc un épimorphisme d'anneaux.

On note $\langle S\rangle$ le demi-groupe multiplicatif engendré par S dans A. Tout élément $\xi \in A[\bar{S}^1]$ s'écrit :

$$\xi = \varphi_S(a)\ \varphi_S(s)^{-1} \quad \text{avec} \quad a \in A \quad \text{et} \quad s \in \langle S\rangle .$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, on écrit $\xi = \frac{a}{s}$. On sait que

$$(\varphi_S(a) = \varphi_1(b)) \Longleftrightarrow (\exists\ \sigma \in \langle S\rangle \quad \sigma a = \sigma b) .$$

<u>Remarque</u> : Dans ce qui précède, le cas où $0 \in \langle S \rangle$ n'a pas été exclu. Lorsque cela arrive, alors $\text{Card } A[\bar{S}^1] = 1$ et pour tout élément $a \in A$, $\varphi_S(a)$ est inversible dans $A[\bar{S}^1]$.

Si S est une partie non vide de A, on pose :

$$J(S) = \{x \in A \; ; \; \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])\} .$$

<u>Proposition 3.1.</u> : a) <u>$J(X)$ est un sous-demi-groupe consistant dans A et contenant $\mathcal{U}(A)$.</u>

b) <u>$(x \in J(X)) \iff (\exists\, a \in A \quad ax \in \langle X \rangle)$.</u>

<u>Démonstration</u> :

a) $J(X)$ est un sous-demi-groupe consistant :

. $a,b \in J(X) \Longrightarrow \varphi_S(a), \varphi_S(b) \in \mathcal{U} \Longrightarrow \varphi_S(ab) \in \mathcal{U} \Longrightarrow ab \in J(X)$

. $ab \in J(X) \Longrightarrow \varphi_S(a).\varphi_S(b) \in J(X) \Longrightarrow \varphi_S(a)$ et $\varphi_S(b) \in \mathcal{U}$

$\Longrightarrow a$ et $b \in J(X)$.

$\mathcal{U}$ est évidemment contenu dans $J(X)$ car $\varphi_S(1) = 1$ si A est unitaire.

b) si $xa \in \langle X \rangle$ $xa \in J(X)$ donc $x \in J(X)$.

si $x \in J(X)$, il existe $(a,s) \in A \times X$ tel que $\varphi_S(x)\varphi_S(a)\varphi_S(s)^{-1} = \varphi_S(s)\varphi_S(s)^{-1}$. Donc il existe $\sigma \in \langle X \rangle$ tel que

$$\sigma xas = \sigma s^2 \in \langle X \rangle .$$

<u>Remarque</u> : D'après (b) $0 \in J(X) \iff 0 \in \langle X \rangle$. Donc si S est un sous-demi-groupe tel que $S \subseteq A^*$ alors $0 \notin J(S)$.

Dans ce qui suit, si $A[\bar{X}^1]$ et $A[\bar{Y}^1]$ sont deux anneaux de fractions et s'il existe un isomorphisme σ de $A[\bar{X}^1]$ sur $A[\bar{Y}^1]$ tel que $\varphi_Y = \sigma \circ \varphi_X$, alors, nous identifierons les anneaux $A[\bar{X}^1]$ et $A[\bar{Y}^1]$ et nous écrirons :

$$A[\bar{X}^1] = A[\bar{Y}^1] .$$

On sait (6) que nécessairement $\sigma(1) = 1$.

<u>Proposition 3.2.</u> : a) <u>$A[\bar{X}^{1}] = A[\bar{Y}^{1}] \Longleftrightarrow J(X) = J(Y)$</u>

b) <u>$X \mapsto J(X)$ est une fermeture dans l'ensemble des parties de A.</u>

c) <u>$A[\bar{X}^{1}] = A[J(X)^{-1}] = A[\langle X\rangle^{-1}] = A[(X \cup \mathcal{U})^{-1}]$.</u>

<u>Démonstration</u> :

a) *Par définition, si $A[\bar{X}^{1}] = A[\bar{Y}^{1}]$, il existe un isomorphisme $\sigma : A[\bar{X}^{1}] \to A[\bar{Y}^{1}]$ tel que $\sigma(1) = 1$ et tel que $\varphi_Y = \sigma \circ \varphi_X$. Alors, de façon évidente, $J(X) = J(Y)$.

$$\begin{tikzcd} & A[\bar{X}^{1}] \arrow[d, shift right, "\sigma"'] \\ A \arrow[ur, "\varphi_X"] \arrow[dr, "\varphi_Y"'] & \\ & A[\bar{Y}^{1}] \arrow[uu, shift right, "\zeta"'] \end{tikzcd}$$

* si $J(X) = J(Y)$ et si $x \in X$ alors $\varphi_Y(x) \in \mathcal{U}(A[\bar{Y}^{1}])$. Donc il existe un unique homomorphisme :

$\sigma : A[\bar{X}^{1}] \to A[\bar{Y}^{1}]$ tel que $\sigma \circ \varphi_X = \varphi_Y$

De même, il existe un unique homomorphisme

$\zeta : A[\bar{Y}^{1}] \to A[\bar{X}^{1}]$ tel que $\zeta \circ \varphi_Y = \varphi_X$.

Comme φ_X et φ_Y sont des épimorphismes, σ et ζ sont section et rétraction l'un de l'autre ; σ est un isomorphisme.

b) Il est clair que $X \subseteq J(X)$ et que $X \subseteq Y \Longrightarrow J(X) \subseteq J(Y)$. Montrons que $J(J(X)) = J(X)$. En effet, si $x \in J(J(X))$, il existe $a \in A$ tel que $ax \in \langle J(X)\rangle = J(X)$. Comme $J(X)$ est consistant, $x \in J(X)$.

c) On a $X \subseteq \langle X\rangle \subseteq J(X)$ et $X \subseteq X \cup \mathcal{U} \subseteq J(X)$; donc $J(X) \subseteq J(J(X))$ et $J(X) \subseteq J(X \cup \mathcal{U}) \subseteq J(J(X))$ d'où $J(X) = J(\langle X\rangle) = J(X \cup \mathcal{U})$

<u>Remarque</u> : (1) il ne faudrait pas identifier deux anneaux de fractions seulement isomorphes, car ils ne seraient pas nécessairement solution du même problème universel.

<u>Exemple</u> (1) : Pour les demi-groupes, $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$: deux demi-groupes cycliques infinis ; sur $D = \langle a\rangle \cup \langle b\rangle \cup \{0\}$, on définit la loi commutative prolongeant celle de $\langle a\rangle$, de $\langle b\rangle$ et telle que $a^u * b^p = 0$. Si $S = \langle a\rangle$ et $T = \langle b\rangle$ $D[\bar{S}^1]$ et $D[\bar{T}^1]$ sont isomorphes bien que

$$S = J(S) \neq J(T) = T .$$

§ 4. <u>ANNEAUX A FACTORISATION UNIQUE. ANNEAU D-ATOMIQUES.</u>

On note S_n le groupe des permutations sur $\{1, 2, \ldots, n)$.

<u>Définitions</u>: 1) On dit que deux factorisations de d, $d = a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_m$ sont <u>isomorphes</u> si $n = m$ et s'il existe $\zeta \in S_n$ tel que $p_i \mathcal{R} q_{\zeta\, i}$.

2) On appelle <u>anneau à factorisation unique</u> tout anneau tel que :

$[F_2]$ deux factorisations complètes d'un élément de $A^* - \mathcal{U}$ sont isomorphes.

<u>Exemples</u> : 1) Tout anneau factoriel est à factorisation unique.

2) Tout anneau présimplifiable à factorisation unique au sens de Fletcher (9).

3) Tout anneau à factorisation unique au sens de Fletcher est somme directe finie d'anneaux à factorisation unique en notre sens (10). En particulier, <u>tout anneau principal est somme directe finie d'anneaux à factorisation unique.</u>

4) Si n est primaire alors $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est à factorisation unique. Nous savons que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est atomique ; si $n = p^k$ avec p premier et $k > 1$, $\bar{p}$ est le seul irréductible de $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Tout élément de $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ s'écrit $\bar{x} = \overline{up}^\alpha$ avec $\bar{u} \in \mathcal{U}$ et $\alpha < k$. Si :

$$\overline{up}^\alpha = \overline{vp}^\beta \quad \text{avec} \quad \alpha < \beta < n \quad \text{on a :}$$

$$up^\alpha - vp^\beta = \lambda p^n$$

$$u - vp^{\beta-\alpha} = \lambda p^{n-\alpha} .$$

Dans $p|u \Longrightarrow (u,p^k) \neq 1 \Longrightarrow \bar{u} \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$: absurde.

5) Si $n \geqslant 2$, bien qu'atomique et simplifiable, $n\mathbb{Z}$ n'est pas à factorisation unique. Par exemple, dans $2\mathbb{Z}$, $4 = 2.2 = (-2)(-2)$ avec 2 et -2 irréductibles non associés.

<u>Remarques</u> : 1) Réciproquement, si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est à factorisation unique, alors n est primaire (1) .

2) Un anneau à factorisation unique n'est pas nécessairement intègre, donc n'est pas nécessairement un anneau factoriel. On peut même préciser davantage : un anneau à factorisation unique n'est pas nécessairement une somme directe d'anneaux factoriels : si $n \geqslant 2$, si p est premier, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et à factorisation unique mais n'est pas une somme directe d'anneaux factoriels.

<u>Proposition 4.1.</u> : <u>Tout anneau à factorisation unique est présimplifiable.</u>

<u>Démonstration</u> : Si $xy = x$, xi $x \neq 0$ et si $y \notin \mathcal{U}$ alors $x \in A^* - \mathcal{U}$ et $y \in A^* - \mathcal{U}$; donc, en faisant apparaître les factorisations complètes de x et de y : $(p_1 p_2 \ldots p_n)(q_1 q_2 \ldots q_m) = p_1 p_2 \ldots p_n$. D'où une contradiction.

Par conséquent, si A est un anneau à factorisation unique :

. 1 est le seul idempotent éventuel de A autre que 0 .

. $(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (\exists\, u \in \mathcal{U}(A^1) \quad x = yu)$.

. si B est une base de A, tout élément $x \in A^*$ s'écrit de façon unique à une unité près :

$$x = u \prod_{p \in B} p^{\alpha_p} \quad \text{avec} \quad u \in \mathcal{U}(A^1) \quad \text{et} \quad \alpha_p \in \mathbb{N} .$$

Cette dernière propriété est caractéristique des anneaux à factorisation unique :

<u>Proposition 4.2.</u> : <u>Pour qu'un anneau A soit à factorisation unique, il suffit qu'il existe une partie</u> $B \subseteq A^* \mathcal{U}$ <u>d'éléments non deux à deux associés tel que tout élément x de A^* s'écrive $x = u \prod_{p \in B} p^{n_p}$ avec</u> $u \in \mathcal{U}(A^1)$ <u>et telle que</u> $u \prod_{p \in B} p^{n_p} = v \prod_{p \in B} p^{m_p} \Longrightarrow \forall p \in B \quad n_p = m_p$.

Démonstration :La condition est nécessaire comme nous l'avons fait remarquer. Elle est suffisante car les éléments de B sont irréductibles. Si B est une base d'un anneau à factorisation unique A , si $p \in B$, on pose $v_p(0) = \infty$ et si $x = u \prod\limits_{p \in B} p^{\alpha_p} \in A^*$, $v_p(x) = \alpha_p$

Le résultat suivant donne les règles d'utilisations des fonctions v_p et le mode de calcul dans les anneaux à factorisation unique.

Proposition 4.3. : a) $xy \neq 0 \Longrightarrow v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

b) si $p, q \in B$ $v_p(q) = \delta_{p,q}$; symbole de Kronecker.

c) $(x|y) \Longleftrightarrow (\forall p \in B)\ v_p(x) \leqslant v_p(y))$.

d) $(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (\forall p \in B)\ v_p(x) = v_p(y))$.

e) $(x \in \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (\forall p \in B)\ v_p(x) = 0$

f) $xy = xz \neq 0 \Longrightarrow y \mathcal{R} z$

Remarques : 1) v_p n'est pas nécessairement une valuation d'anneaux ; mais c'est une valuation de demi-groupe (3).

2) Si I est un idéal d'un anneau à factorisation unique A, A/I n'est pas à factorisation unique. Par exemple, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ qui n'est pas présimplifiable n'est pas à factorisation unique bien que $\mathbf{Z}$ soit à factorisation unique.

3) L'anneau des polynômes d'un anneau à factorisation unique n'est pas à factorisation unique. $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ est à factorisation unique ; $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}[X]$ ne l'est pas puisqu'il n'est pas présimplifiable.

Définition : On appelle anneau D-atomique (1) tout anneau atomique A tel que : $[F_3]$ tout élément irréductible est premier.

Exemples : 1) Tout anneau factoriel est D-atomique.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un anneau D-atomique (1)

3) Tout anneau arithmétique (7) est un anneau D-atomique.

On voit donc qu'un anneau D-atomique n'est pas nécessairement présimplifiable ni nécessairement à factorisation unique.

$$\begin{tikzcd} & \text{Factorisation unique} \arrow[dr] & \\ \text{Factoriel} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Atomique} \\ & \text{D-atomique} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>Théorème 4.4.</u> : <u>Soit A un anneau atomique et S un sous-demi-groupe de A^*. Si A est à factorisation unique ou D-atomique, il en est de même de $A[\bar{S}^1]$.</u>

<u>Démonstration</u> : Si $\operatorname{Card} A[\bar{S}^1] = 1$, le résultat est trivial. On suppose que $\operatorname{Card} A[\bar{S}^1] > 1$

a) <u>A est à factorisation unique</u> : Soit B une base de A. On pose :

$B_o = \{p \in B \, , \, \varphi_S(p) = 0\}$; $B_1 = B \cap J(S) = \{p \in B \, ; \, \exists s \in S \;\; p|s\}$

$$B_S = B - (B_o \cup B_1)$$

*Unités de $A[\bar{S}^1]$: $(\frac{d}{s} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \forall p \in B\text{-}B_1 \;\; v_p(a) = 0)$

. Si $\frac{a}{s} \in \mathcal{U}$, il existe $\frac{b}{t}$ tel que $\frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{s}{s}$ Donc :

$$\exists \sigma \in S \quad \sigma\, abs = \sigma s^2 t \in S \subseteq A^* .$$

Alors, si $p \in B\text{-}B_1$, d'après la proposition 4.3. :

$$v_p(a) + v_p(b) = 0 \text{ donc } v_p(a) = 0 .$$

. Si $\forall p \in B\text{-}B_1 \;\; v_p(a) = 0$, on a :

$$a = u \prod_{p \in B_1} p^{v_p(d)} \text{ donc } \varphi_S(a) \in \mathcal{U} .$$

*Soit $\frac{d}{s} \in A[\bar{S}^1]^*$. On a $d \neq 0$ et $s \neq 0$. Donc $d = u \prod_{p \in B} p^{v_p(d)}$ et $s = v \prod_{p \in B_1} p^{v_p(s)}$. Alors :

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u)\varphi_S(v)^{-1} \prod_{p \in B} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} .$$

On est assuré que si $p \in B_o$ $v_p(d) = v_p(s) = 0$. (Si $v_p(s) \neq 0$ alors Card $A[\bar{S}^1] = 1$). On peut donc mettre $\frac{d}{s}$ sous la forme $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B_S} \varphi_S(p)^{v_p(d)}$ avec $\omega \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$.

*Nous allons appliquer la proposition 4.2. Pour cela, montrons que si $p, q \in B_S$, si $p \neq q$ alors $\varphi_S(p)$ et $\varphi_S(q)$ ne sont pas associés dans $A[\bar{S}^1]$. Sinon, il existe $\frac{x}{\sigma}$ tel que :

$$\varphi_S(p) = \varphi_S(q)\frac{x}{\sigma} \Longrightarrow \exists \zeta \in S \qquad \zeta\sigma p = \zeta qx$$

$$(\zeta\sigma \in S \text{ et } p \notin B_o) \Longrightarrow (\zeta\sigma p \neq 0). \text{ Alors, d'après la}$$

propisition 4.3., si $b \in B$

$$\zeta\sigma p = \zeta qx \neq 0 \Longrightarrow \sigma p \mathcal{R} qx \Longrightarrow v_b(\sigma) + v_b(p) = v_b(q) + v_b(x).$$

Prenons $b = q \in B_S$. Alors :

$$0 = v_q(p) = v_q(q) + v_q(x) \geqslant 1 : \text{ absurde.}$$

*Montrons enfin que si $\frac{d}{s} \in A[\bar{S}^1]^*$, si $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B_S} \varphi_S(p)^{\alpha_p}$ avec $\omega \in \mathcal{U}$ et $\alpha_p \in \mathcal{U}$ alors $\forall p \in B_S$ $\alpha_p = v_p(d)$.

Puisque $\omega \in \mathcal{U}$, $\omega = \frac{a}{t}$ avec $\forall p \notin B_1$ $v_p(a) = 0$

Si $d' = \prod_{p \in B_S} \varphi_S(p)^{\alpha_p}$ alors, si $p \in B_S$, $v_p(d') = \alpha_p$.

D'autre part : $\frac{d}{s} = \frac{ad'}{t} \Longrightarrow \exists \sigma \in S$ $\quad \sigma dt = \sigma sad'$

$$\frac{d}{s} \neq 0 \text{ et } \sigma t \in S \Longrightarrow \sigma dt \neq 0. \text{ Alors, si } p \in B_S$$

$$\sigma ds = \sigma sad' \neq 0 \Longrightarrow v_p(d) = v_n(d') = \alpha_p$$

b) <u>A est D-atomique</u> : On note I l'ensemble des éléments irréductibles de A. On pose :

$$I_o = \{p \in I \,;\, \varphi_S(p) = 0\}, \quad I_1 = \{p \in I \quad \exists s \in S \quad p|s\} = I \cap J(S)$$

et $$I_S = I - (I_o \cup I_1).$$

Soit $\frac{d}{s} \in A[\bar{S}^1]^* - \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$. On a $d \in A^* - \mathcal{U}$ et $\in A^*$.

Donc $d = p_1 p_2 \ldots p_n$ et $s = up'_1 p'_2 \ldots p'_m$ avec $u \in \mathcal{U}(A^1)$, les p_i et les p'_j étant irréductibles. Par définition de I_o, aucun des éléments précédents ne lui appartient. On peut écrire :

$\frac{d}{s} = \omega\varphi_S(q_1)\varphi_S(q_2) \ldots \varphi_S(q_p)$ avec $\omega \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$, q_i irréductible, et $\varphi_S(q_i) \notin \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$. On a donc : $q_i \in I_S$.

Pour montrer que $A[\bar{S}^1]$ est atomique, il nous suffit de prouver que les $\varphi_S(q_i)$ avec $q_i \in I_S$ sont irréductibles.

Par définition de I_S $\varphi_S(q_i) \notin \mathcal{U}$

. Si $\frac{x}{t} | \varphi_S(q)$, $\frac{x}{t} \cdot \frac{x'}{t'} = \varphi_S(q)$ donc

$$\exists \sigma \in S \quad \sigma q t t' = \sigma x x'$$

Puisque A est D-atomique, l'élément irréductible q est premier

$$q | \sigma x x' \Longrightarrow q | \sigma \text{ ou } q | x \text{ ou } q | x'$$

- puisque $q \notin I_1$ et que $\sigma \in S$, on ne peut pas avoir $q|\sigma$
- si $q|x$ alors $\varphi_S(q) | \varphi_S(x)$ donc $\varphi_S(q) | \frac{x}{t}$

$$\varphi_S(q) \mathcal{R} \frac{x}{t}$$

- si $q|x'$, il nous faut prouver que $\frac{x}{t} \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$ ou $\frac{x}{t} \mathcal{R} \varphi_S(q)$

$$q|x' \Longrightarrow \exists d \in A^1 \quad qd = x'$$

$$\sigma q t t' = \sigma x x' = \sigma x q d .$$

Puisque $q \notin I_o$ et que $\sigma t t' \in S$, on est assuré que $\sigma x q d \neq 0$, donc que $x \neq 0$. Si $x \in \mathcal{U}(A)$, $\frac{x}{t} \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$.

Supposons que $x \in A^* - \mathcal{U}$. Puisque A est atomique, $x = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_\lambda$ avec ρ_i irréductible donc premier. Alors :

$$\sigma q t t' = \sigma q d \, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\lambda .$$

Pour tout i $\rho_i|\sigma q t t' \Longrightarrow \rho_i|\sigma t t'$ ou $\rho_i|q$. Deux cas sont possibles :

1) $\forall i$ $\rho_i|\sigma t t'$. Alors $\rho_i \in I_1$ et $\frac{x}{t} \in \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$

2) $\exists i$ $\rho_i \not| \sigma t t'$. Alors $\rho_i|q$ donc $\rho_i \mathcal{R} q$.

$\rho_i \mathcal{R} q \Longrightarrow q|\rho_i \Longrightarrow q|\rho_1\rho_2 \dots \rho_\lambda = x$

$\varphi_S(q)|\frac{x}{t} \Longrightarrow \varphi_S(q) \mathcal{R} \frac{x}{t}$.

*Montrons que $A[\bar{S}^1]$ est D-atomique. Faisons le en deux étapes :

. si $q \in I_S$, $\varphi_S(q)$ est premier car

$\varphi_S(q)|\frac{x}{s}.\frac{x'}{s'} \Longrightarrow \varphi_S(q)\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{x}{s}\frac{x'}{s'}$

$$\exists \zeta \in S \quad \zeta q\, \alpha s s' = \zeta \sigma x x' .$$

Comme q est irréductible donc premier, que

$$\zeta\sigma \in S \text{ et } q \in I_S \Longrightarrow q \not| \zeta\sigma$$

on a $q|x$ ou $q|x'$ donc

$$\varphi_S(q)|\frac{x}{s} \quad \text{ou} \quad \varphi_S(q)|\frac{x'}{s'}$$

. soit $\frac{x}{s} \in A[\bar{S}^1] - \mathcal{U}(A[\bar{S}^1])$ un élément irréductible. $\varphi_S(x)$ qui est associé à $\frac{x}{s}$ est irréductible. Puisque $\varphi_S(x) \notin \mathcal{U}$ on a $x \notin \mathcal{U}$.

- si $x = 0$ alors $\varphi_S(x) = 0$ est irréductible donc $A[\bar{S}^1]$ est un corps et le résultat est trivial.

- si $x \neq 0$ $x \notin \mathcal{U}$ car $\frac{x}{s} \notin \mathcal{U}$ donc $x = p_1 p_2 \dots p_n$ avec $p_i \in I_S$. Donc : $\varphi_S(x) = \varphi_S(p_1)\, \varphi_S(p_2) \dots \varphi_S(p_n)$.

Comme $\varphi_S(p_1)$ est irréductible, $\varphi_S(p_1)|\varphi_S(x) \Longrightarrow \varphi_S(p_1) \mathcal{R}\, \varphi_S(x)$. Mais $\varphi_S(x)$ associé à l'élément premier $\varphi_S(p_1)$ est lui-même premier.

C.Q.F.D.

§ 5. ANNEAUX DE FRACTIONS DES ANNEAUX ATOMIQUES.

Dans [(12) p. 47] , il est dit : Si A est un anneau intègre atomique, si B est une base de A , il existe une bijection entre l'ensemble des parties de B et l'ensemble des anneaux de fractions de A , cette bijection étant définie par $X \to A[\bar{X}^1]$.

Dans (4) nous avons énoncé un résultat analogue pour les demi-groupes simplifiables. Le contre-exemple suivant prouve que ces deux résultats sont inexacts.

Contre-exemple : $A = Z(i\sqrt{5})$ est un anneau intègre. Comme $A/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale, il est atomique. 3, $2+i\sqrt{5}$ et $2-i\sqrt{5}$ sont trois éléments irréductibles, non associés deux à deux. Soit B une base les contenant. Posons $X = \{3\}$ et $Y = \{2+i\sqrt{5}\ ,\ 2-i\sqrt{5}\}$. Puisque

$$9 = 3.3 = (2+i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5}) \in J(X) \cap J(Y) \quad .$$

On a $3 \in J(Y)$, $2+i\sqrt{5} \in J(X)$, $2-i\sqrt{5} \in J(X)$; donc $X \subseteq J(Y)$, $Y \subseteq J(X)$ d'où $J(X) = J(Y)$ soit :

$$A[\bar{X}^1] = A[\bar{Y}^1] \quad \text{avec} \quad X \neq Y \quad .$$

Nous avons prouvé qu'il existe deux parties distinctes de B dont les images par $S \mapsto A[\bar{S}^1]$ sont égales.

Notations : Si B est une base d'un anneau atomique présimplifiable A, on pose :

$$F_A^* = \{A[\bar{X}^1] \ ; \ X \subseteq A^* \ \text{et} \ X - \mathcal{U} \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{F}^*(B) = \{X \ ; \ \emptyset \subset X \subseteq B\} \ .$$

Théorème 5.1. : Soit B une base d'un anneau atomique présimplifiable ou unitaire A . Il existe une bijection entre F_A^* et $\{J(X) \cap B\}_{X \in \mathcal{F}^*(B)}$.

Démonstration : Ce résultat est trivial lorsque $A = \{0\}$ ou lorsque A est un corps. Ecartons ces deux éventualités. Alors $0 \notin B$.

Les éléments irréductibles, par définition, ne sont pas inversibles.

Donc, si $X \in \mathcal{F}^*(B)$

$$X - \mathcal{U} = X \neq \emptyset \Longrightarrow A[\bar{X}^1] \in F_A^*$$

$\Phi : X \mapsto A[\bar{X}^1]$ est une application de $\mathcal{F}^*(B)$ dans F_A^*. Nous noterons encore Φ sa restriction à $\{J(X) \cap B\}_{X \in \mathcal{F}^*(B)}$. Remarquons que $J(X) \cap B \supseteq X \cap B = X \neq \emptyset$.

On a toujours $\langle (J(X) \cap B) \cup \mathcal{U} \rangle = J(X)$.

D'une part $J(X) \cap B \subseteq J(X)$, $\mathcal{U} \subseteq J(X)$ et $J(X)$ est un demi-groupe ; donc $\langle (J(X) \cap B) \cup \mathcal{U} \rangle \subseteq J(X)$.

Réciproquement, si $x \in J(X)$, deux cas sont possibles :

- 1) $x = 0$. Alors $0 \in \langle X \rangle$ donc $0 = x_1 x_2 \dots x_n$ avec $x_i \in X$. Comme $0 \notin X$, on a $n \geqslant 2$. Comme B est une base de A, d'après la proposition 2.3, $x_i = u_i b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k} \in X \subseteq J(X)$ avec $u_i \in \mathcal{U}(A^1)$ et $b_{i_j} \in B$. On a donc $b_{i_j} \in B \cap J(X)$ et

$$0 = x_1 x_2 \dots x_n \in \langle (J(X) \cap B) \cup \mathcal{U} \rangle .$$

- 2) $x \neq 0$. Alors $x = ub_1 b_2 \dots b_n \in J(X)$ avec $b_i \in B$ et $u \in \mathcal{U}(A^1)$. On a donc encore : $x \in \langle (J(X) \cap B) \cup \mathcal{U} \rangle$.

*Φ est surjective car si $A[\bar{X}^1] \in F_A^*$ alors :

$$A[\bar{X}^1] = A[J(X)^{-1}] = A[\langle (J(x) \cap B) \cup \mathcal{U} \rangle^{-1}] = A[J(X) \cap B^{-1}] = A[\Phi(X)^{-1}]$$

*Φ est injective car

si $A[(J(X) \cap B)^{-1}] = A[(J(Y) \cap B)^{-1}]$ alors $J(X) \cap B = J(Y) \cap B$. En effet

$$x \in J(X) \cap B \Longrightarrow x \in J(J(Y) \cap B) .$$

Donc il existe $a \in A$ et $y_1, y_2, \dots, y_n \in J(Y) \cap B$ tels que

$$xa = y_1 y_2 \dots y_n .$$

On a donc $x \in J(Y)$, soit $x \in J(Y) \quad B$. D'où :

$$J(X) \quad B \subseteq J(Y) \quad B \ .$$

On montrerait l'inclusion opposée de la même amnière.

<u>Corollaire 5.2.</u> : <u>Soit A un anneau atomique, présimplifiable ou unitaire, qui n'est pas un corps. Pour que les anneaux de fractions de A soient</u> $A[\bar{A}^1]$ <u>et A si A est unitaire, il faut et il suffit que A soit de dimension 1</u>.

<u>Théorème 5.3.</u> : <u>Si B est une base d'un anneau D-atomique présimplifiable ou unitaire, il existe une bijection de F^*_A sur</u> $\mathcal{F}^*(B)$.

<u>Démonstration</u> :Il nous suffit de prouver que si X et Y sont deux parties non vides de B :

$$(J(X) \cap B = J(Y) \cap B) \Longleftrightarrow (X = Y)$$

Si $J(X) \cap B = J(Y) \cap B$ et si $x \in X$, comme $X \subseteq J(X) \cap B$ on a $x \in J(Y) \cap B$ donc il existe $a \in A$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \langle Y \rangle$ tels que $x = y_1 y_2 \ldots y_n$. Comme x est irréductible donc premier, x divise l'un des y_i . Alors $x | y_i \Longrightarrow x \mathcal{R} y_i$. Comme ils appartiennent l'un et l'autre à B , nécessairement :

$$x = y_i \in Y$$

$$X \subseteq Y \ .$$

L'inclusion opposée se prouve de la même façon.

<u>Remarques</u> : 1) le théorème 5.3. affirme que si A est atomique, unitaire ou présimplifiable pour qu'il existe une bijection entre F^*_A et $\mathcal{F}^*(B)$, <u>il suffit</u> que A vérifie la condition $[F_3]$.

Dans un travail non encore publié (1) J.C. ALLARD a montré que <u>cette condition est nécessaire</u>.

2) Le théorème 5.3. donne une condition suffisante pour que le résultat erroné dont nous avons parlé plus haut devienne exact. Dans le

cas des anneaux intègres (cas envisagé dans (12)) d'après ce résultat et celui de J.C. ALLARD dont nous venons de parler, <u>les anneaux factoriels sont les seuls anneaux pour lesquels existe cette bijection entre F^*_A et $\mathfrak{F}^*(B)$</u> .

- BIBLIOGRAPHIE -

(1) J.C. ALLARD - Demi-groupes D-atomiques. Séminaire P. LEFEBVRE 1970/71. (A paraître) Dép. Fac. Sciences - Lyon.

(2) A. BOUVIER - Demi-groupes de type (R) . Demi-groupes commutatifs à factorisation unique. Comptes-rendus 268 - Série A - 1969 - p.372.

(3) A. BOUVIER - Factorisation dans les demi-groupes. Comptes-rendus 271 - Série A - 1970 - p. 53.

(4) A. BOUVIER - Factorisation dans les demi-groupes de fractions. Comptes-rendus 271 - Série A - 1970 - p. 924.

(5) A. BOUVIER - Demi-groupes de type (R). Thèse de 3ème Cycle 1970.

(6) A. BOUVIER et A. FAISANT - Propriétés des demi-groupes de fractions. Pub. Dépt. Math. Fac. Sciences Lyon (A paraître).

(7) A.H. CLIFFORD - Arithmetic and Ideal theory of commutative semi-groups. Annals of Math. 39 - N° 3 - 1938 - p. 594.

(8) A.H. CLIFFORD et G.B. PRESTON - The Algebraic theory of semi-groups. Amer. Math. Soc. 1961 -

(9) C.R. FLETCHER - Unique factorization rings. Proc. Comb. Phil. Soc. 1969 65 - p. 579.

(10) C.R. FLETCHER - The strucutre of unique factorization rings. Proc. Comb. Phil. Soc. 1970 - 67 - p. 535.

(11) L.M. GLUSKIN - Ideals in rings and their multiplicative semi-groups.

(12) O. ZARISKI et P. SAMUEL - Commutative algebra Von Nostrand.

FACULTE DES SCIENCES D' ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 9 du 3.2.1971
et Conférence n° 12 du 3.3.1971

DERIVATIONS D'ORDRE SUPERIEUR I et II

par Pierre LEROUX

-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est de présenter une double généralisation de la notion de dérivation (classique) d'un anneau, d'une part, en introduisant les dérivations d'ordre supérieur, et, d'autre part, en étendant ces notions aux catégories (pré-) additives. De plus nous voulons esquisser la solution de quelques problèmes universels posés par cette généralisation. Les résultats présentés ici sont tirés des travaux de P. Ribenboim [7] et de P. Leroux et P. Ribenboim [6] .

1. DERIVATIONS D'ORDRE SUPERIEUR DANS LES ANNEAUX.

Une dérivation (que nous qualifions de <u>classique</u>) sur un anneau A est une application additive $\delta : A \to A$ telle que

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

quels que soient $a, b \in A$. Posant $d_o = 1_A$, l'application identité sur A , et $d_1 = \delta$, on a :

$$d_o(ab) = d_o(a)d_o(b)$$
$$d_1(ab) = d_o(a)d_1(b) + d_1(a)d_o(b) .$$

La généralisation suivante apparaît donc de façon naturelle. On la retrouve essentiellement dans la littérature, par exemple dans le Livre de N. Jacobson ([4], pp.191 ss.) et dès 1937 dans [2] .

Soit S, un segment initial de $\mathbb{N} = (0,1,2,\ldots)$; ou bien $S = \mathbb{N}$, ou bien $S = (0,1,2,\ldots,s)$.

<u>Définition 1.1.</u> : Soient A et B deux anneaux. <u>Une dérivation d'ordre S</u> d de A vers B est une famille $d = \{d_\nu\}_{\nu \in S}$ d'applications additives $d_\nu : A \to B$ telle que $\forall\, a,b \in A$ et $\forall\, \nu \in S$,

$$(*) \qquad d_\nu(ab) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} d_\lambda(a)d_\mu(b) \quad \left(\text{ou encore } = \sum_{\lambda=0}^{\nu} d_\lambda(a)d_{\nu-\lambda}(b)\right).$$

<u>Remarques 1.2.</u> :

1) L'additivité exprime que $d_\nu(a+b) = d_\nu(a) + d_\nu(b)$ et entraîne que $d_\nu(0) = 0$ et $d_\nu(-a) = - d_\nu(a)$. On peut étendre la définition 1.1. aux C-algèbres en demandant que les applications d_ν soient C-linéaires.

2) Pour $\nu = 0$ la relation $(*)$ entraîne que $d_0(ab) = d_0(a)d_0(b)$, i.e. que d_0 est un homomorphisme d'anneaux. Lorsqu'on se restreint aux anneaux avec éléments unités, on exige aussi habituellement que $d_0(1) = 1$. On a alors $d_\nu(1) = 0$ pour $\nu > 0$.

3) La relation $(*)$ se généralise à la formule :

$$d_\nu(a_n \ldots a_1) = \sum_{\lambda_n+\ldots+\lambda_1=\nu} d_{\lambda_n}(a_n) \ldots d_{\lambda_1}(a_1).$$

4) La définition 1.1. n'utilise pas l'associativité de la multiplication et peut donc s'étendre aux anneaux non-associatifs, par exemple aux anneaux de Lie (i.e. ceux dont la multiplication est anticommutative et satisfait l'identité de Jacobi).

<u>Exemples 1.3.</u> :

1) Tout homomorphisme d'anneaux $f : A \to B$ peut être considéré comme une dérivation $(f,0,0,\ldots)$ d'ordre S de A à B, que nous noterons aussi par f.

2) Les dérivations classiques $\delta : A \to A$ sont en bijection avec les

dérivations d d'ordre $(0,1)$ de A à A pour lesquelles $d_0 = 1_A$, en posant $d_1 = \delta$. Plus généralement, si S est le plus grand segment initial de $\mathbb{N}$ pour lequel l'expression :

$$d_\nu = \frac{1}{\nu!}\delta^\nu$$

a du sens $\forall \nu \in S$, alors $d = \{d_\nu\}_{\nu \in S}$ est une dérivation d'ordre S de A vers A . Par exemple, si $A = K[X]$ et si δ est la dérivation habituelle des polynômes, on obtient ainsi une dérivation $d = \{d_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ d'ordre $\mathbb{N}$ de A vers A , où $\forall \nu$, d_ν est l'unique application K-linéaire déterminée par la relation :

$$d_\nu(X^\mu) = \binom{\mu}{\nu}X^{\mu-\nu} ,$$

convenant que $\binom{\mu}{\nu} = 0$ si $\nu > \mu$.

3) (N. Heerema [3]). Si K est un corps, il existe une bijection entre les familles $\{\delta_\nu\}_{\nu \in S-(0)}$ de dérivations classiques sur K et les dérivations $d = \{d_\nu\}_{\nu \in S}$ d'ordre S de K à K pour lesquelles $d_0 = 1_K$. Si K est de caractéristique 0 , la bijection est explicitement donnée par les relations :

$$d_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu!} \Big(\sum_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_\mu=\nu \\ \lambda_j \geqslant 1}} \delta_{\lambda_1} \cdots \delta_{\lambda_\mu} \Big) ,$$

$$\delta_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu} \Big(\sum_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_\mu=\nu \\ \lambda_j \geqslant 1}} d_{\lambda_1} \cdots d_{\lambda_\mu} \Big) , \qquad \nu = 1,2,\dots .$$

Il est clair que dans ce cas, la bijection s'étend aux dérivations de K-algèbres. Lorsque K est de caractéristique $p \neq 0$, la démonstration suit de ce que K possède une p-base et s'étend au cas des anneaux libres.

4) A tout élément a d'un anneau A correspond une dérivation classique $[a,-] : A \to A$ définie par :

$$[a,-](x) = [a,x] = ax - xa .$$

Cet exemple se généralise de la façon suivante : soit $\{a_\nu\}_{\nu \in S-(0)}$, une famille d'éléments de A ; on lui associe une dérivation $d = \{d_\nu\}_{\nu \in S}$ de A vers A en posant :

$$d_0(x) = x \,, \quad d_1(x) = [a_1,x] \,, \quad d_2(x) = [a_2,x] - [a_1,x].a_1 \,,$$

$$d_3(x) = [a_3,x] - [a_2,x]a_1 - [a_1,x](a_2-a_1a_1) \,, \ldots\ldots$$

$$d_\nu(x) = [a_\nu,x] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} [a_{\nu-\mu},x](a_\mu - \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\mu} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^\mu \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{\mu-1}=\mu} a_{\lambda_1}\ldots a_{\lambda_{n-1}} + (-1)^{\mu+1}a_1^\mu) \,.$$

5) Une dérivation $\Pi^{\mathbb{N}} = \{\Pi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ d'ordre $\mathbb{N}$ de $A[[X]]$ vers A est définie en posant :

$$\Pi_\nu(\sum a_\mu X^\mu) = a_\nu \,.$$

Cela provient de la règle de multiplication dans $A[[X]]$:

$$(\sum_\nu a_\nu X^\nu)(\sum_\nu b_\nu X^\nu) = \sum_\nu(\sum_{\lambda+\mu=\nu} a_\lambda b_\mu)X^\nu \,.$$

Si $S = (0,1,\ldots,s)$, alors la famille $\Pi^{\mathbb{N}}$ induit une dérivation $\Pi^S = \{\Pi^S_\nu\}_{\nu \in S}$ d'ordre S de $A[[X]]/_{(X^{s+1})}$ vers A.

6) Si $d = \{d_\nu\}_{\nu \in S}$ est une dérivation d'ordre S de A vers B et si $d' = \{d'_\nu\}_{\nu \in S'}$ est une dérivation d'ordre S' de B vers C, on définit une dérivation $d'' = d' \circ d$ d'ordre $S'' = S \cap S'$ de A vers C en posant

$$(d' \circ d)_\nu = \sum_{\lambda+\mu=\nu} d'_\lambda d_\mu \,, \quad \nu \in S \cap S' \,.$$

Par exemple, si $d = f : A \to B$ est un homomorphisme $d_0 = f$ et $d_\nu = 0$ si $\nu > 0$ (c.f. exemple 1), on obtient une dérivation $d' \circ f$ de A vers C avec $(d' \circ f)_\nu = d'_\nu f$. De même, si $d' = g : B \to C$ est un homomorphisme, on obtient une dérivation $g \circ d$ de A vers C avec $(g \circ d)_\nu = g\, d_\nu$. En particulier, l'homomorphisme composé $g\, f$, considéré comme dérivation, coïncide avec la dérivation composée $g \circ f$.

On remarque de plus que la composition des dérivations est associative.

2. <u>DERIVATIONS UNIVERSELLES ET CO-UNIVERSELLES.</u>

Soit S un segment initial de $\mathbb{N}$. Des propriétés de la loi de composition introduite dans l'exemple 1.3.,6), on conclut que les dérivations d'ordre S sont les morphismes d'une catégorie Annd_S dont les objets sont les anneaux (avec élément unité) et que l'on a un plongement évident

$$T_S : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Annd}_S \quad ,$$

où Ann désigne la catégorie des anneaux (avec élément unité) et homomorphismes. Le foncteur T_S est l'identité sur les objets et réinterprète les homomorphismes d'anneaux comme des dérivations d'ordre S .

Les deux problèmes universels que nous considérons ici s'expriment en termes de foncteurs adjoints à gauche et à droite pour T_S .

<u>Proposition 2.1.</u> : Pour chaque anneau A , il existe un anneau $\mathrm{Dif}_S(A)$ et une dérivation $d_S : A \to \mathrm{Dif}_S(A)$ d'ordre S tels que pour tout anneau B et toute dérivation $d : A \to B$ d'ordre S , il existe un unique homomorphisme $f : \mathrm{Dif}_S(A) \to B$ tel que $f \circ d_S = d$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Dif}_S(A) \arrow[d, dashed, "f"] \\ A \arrow[ur, "d_S"] \arrow[r, "d"'] & B \end{tikzcd}$$

L'anneau $\mathrm{Dif}_S(A)$, unique à isomorphisme près, s'appelle <u>l'anneau différentiel d'ordre S de A</u> et d_S , <u>la dérivation universelle d'ordre S de A</u> . Pour une discussion détaillée de cette construction, voir [7] , où le problème est aussi résolu pour d'autres classes d'anneaux ; le cas des algèbres commutatives est également traité dans [5] , voir aussi [1] , où la situation classique est considérée. Ici le résultat est un cas particulier d'un théorème plus général

(Th. 3.7.) donné dans la section suivante.

Il suit de la proposition que Dif_S s'étend à un foncteur

$$\mathrm{Dif}_S : \mathrm{Annd}_S \to \mathrm{Ann} ,$$

adjoint à gauche de T_S .

Le problème universel dual est résolu par l'exemple 1.3.,5). Si $S = \mathbb{N}$, on pose $E^S(B) = B[[X]]$; autrement, si $s = \sup(S) < \infty$, on pose $E^S(B) = B[[X]]/_{(X^{s+1})}$

<u>Proposition 2.2.</u> : La dérivation d'ordre S $\Pi_S = \{\Pi_\nu\}_{\nu \in S} : E^S(B) \to B$ définie par :

$$\Pi_\nu \Big(\sum_{\nu \in S} b_\nu X^\nu \Big) = b_\nu$$

est <u>co-universelle</u> dans le sens suivant : pour tout anneau A et toute dérivation $d : A \to B$ d'ordre S , il existe un unique homomorphisme $g : A \to E^S(B)$ tel que $\Pi^S \circ g = d$

$$\begin{tikzcd}
E^S(B) \arrow[dr, "\Pi^S"] & \\
& B \\
A \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

La démonstration est immédiate; g est donné par

$$g(a) = \sum_{\nu \in S} d_\nu(a) X^\nu \quad .$$

Ainsi E^S s'étend de la façon habituelle à un foncteur :

$$E^S : \mathrm{Annd}_S \to \mathrm{Ann}$$

adjoint à droite de T_S . On montre facilement qu'un homomorphisme $h : E^S(A) \to E^S(B)$ est de la forme $E^S(d)$ si et seulement si $h(X^\nu) = X^\nu$, $\forall \nu \in S$.

<u>Corollaire 2.3.</u> : Le foncteur composé :

$$\mathrm{Dif}_S \circ T_S : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ann}$$

commute aux limites inductives (générales).

En effet, Dif_S et T_S sont adjoints à gauche de T_S et E^S respectivement.

3. DERIVATIONS DANS LES CATEGORIES ADDITIVES.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite additive (ou pré-additive) si pour tout couple d'objets C, C' de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}(C,C')$ des morphismes de C à C' dans $\mathcal{C}$ est muni d'une structure de groupe abélien de telle sorte que la distributivité à droite et à gauche soit valide, lorsqu'applicable. Cependant, nous n'exigeons pas que $\mathcal{C}$ possède des produits ou des sommes (co-produits).

Cette notion généralise celle d'anneau avec élément unité : une catégorie additive avec un seul objet est tout simplement la donnée d'un anneau, celui des endomorphismes de cet objet. C'est en ce sens que nous généralisons les dérivations d'ordre supérieur aux catégories additives.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $|\mathcal{C}|$ désigne la classe des objets de $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, la classe de tous les morphismes de $\mathcal{C}$.

Soit S, un segment initial de $\mathbb{N}$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, deux catégories additives.

Définition 3.1. : Une dérivation d'ordre S de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est une famille $D = \{D_\nu\}_{\nu \in S}$ d'applications du type $D_\nu : \mathrm{Mor}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ telle que :

D-1 : D_o préserve les identités et induit donc une application

$$D_o : |\mathcal{B}| \to |\mathcal{C}|$$

D-2 : La restriction $D_\nu^{BB'}$ de D_ν à $\mathcal{B}(B, B')$ prend ses valeurs dans $(D_o(B), D_o(B'))$ et est un homomorphisme de groupes abéliens, pour chaque $B,B' \in |\mathcal{B}|$ et $\nu \in S$.

D-3 : Si le composé gf est défini dans B,

$$D_\nu(gf) = \sum_{\lambda+u=\nu} D_\lambda(g)\, D_u(f) , \qquad \forall \nu \in S .$$

On remarque alors que D_o est un foncteur additif et que pour $\nu > 0$, $D_\nu(1_B) = 0 \quad \forall B \in |\mathcal{B}|$, où $1_B : B \to B$ est l'unité correspondant à l'objet B.

Exemples 3.2. :

1) Si $\mathfrak{B}$ et $\mathcal{C}$ n'ont qu'un seul objet, les dérivations d'ordre S de $\mathfrak{B}$ vers $\mathcal{C}$ coïncident avec les dérivations d'ordre S de $\mathfrak{B}$ vers $\mathcal{C}$ considérés comme anneaux. Par ailleurs tous les exemples donnés dans la section 1, sauf peut-être l'exemple 1.3.,3), se généralisent aux catégories additives quelconques.

2) Tout foncteur additif $F : \mathfrak{B} \to \mathcal{C}$ induit une dérivation d'ordre S D de $\mathfrak{B}$ vers $\mathcal{C}$ pour laquelle $D_o = F$ et $D_\nu = 0$ pour $\nu > 0$. Nous noterons de nouveau cette dérivation par F.

3) Soit $\alpha = \{\alpha_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$, un élément de l'anneau produit $E_{\mathfrak{B}} = \prod_{B \in |\mathfrak{B}|} (B,B)$. On lui associe une dérivation D^α de B vers $\mathfrak{B}$ d'ordre $(0,1)$ avec $D_o^\alpha = Id_{\mathcal{C}}$ et $D_1^\alpha = [\alpha,-]$, défini de la façon suivante : si $f : B \to B'$ est un morphisme de B :

$$[\alpha,-](f) = [\alpha,f] = \alpha_{B'}f - f\alpha_B .$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_B"'] & B' \arrow[d, "\alpha_{B'}"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

On remarque que α est une transformation naturelle de $Id_{\mathfrak{B}}$ à $Id_{\mathfrak{B}}$ si et seulement si $[\alpha,-] = 0$; on dit alors que α est <u>central</u>.

4) Si $D : \mathfrak{B} \to \mathcal{C}$ et $D' : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ sont des dérivations d'ordre S, on définit la dérivation composée $D' \circ D : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ comme dans le cas des anneaux :

$$(D' \circ D)_\nu = \sum_{\lambda+\mu=\nu} D'_\lambda \circ D_\mu$$

On obtient ainsi une catégorie Déra_S dont les objets sont les catégories additives et les morphismes sont les dérivations d'ordre S et un plongement, de nouveau noté par $T_S : \text{Cadd} \to \text{Déra}_S$ où Cadd dénote la catégorie des catégories (petites) additives et foncteurs additifs.

On est ainsi de nouveau amené à chercher des adjoints à gauche et à droite pour T_S. Nous explicitons d'abord le plus facile, l'adjoint à droite. Pour cela nous introduisons la catégorie $\mathcal{C}[[X]]$ des séries formelles sur une catégorie additive $\mathcal{C}$ et obtenons comme sous-produit la catégorie des polynômes $\mathcal{C}[X]$.

Considérons une catégorie additive $\mathcal{C}$ et un segment initial S de $\mathbb{N}$. La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}^S$ est construite de la façon suivante : les objets de $\tilde{\mathcal{C}}^S$ sont ceux de $\mathcal{C}$; un morphisme $\tilde{f} : C \to C'$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$ est une suite $\tilde{f} = \{f_\nu\}_{\nu \in S}$ où chaque f_ν est un morphisme de $\mathcal{C}$, $f_\nu : C \to C'$; si $\tilde{g} = \{g_\nu\}_{\nu \in S} : C' \to C''$ est un autre morphisme dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$, le composé $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ est défini par $\tilde{h} = \{h_\nu\}_{\nu \in S}$ où :

$$h_\nu = \sum_{\lambda+\mu=\nu} g_\lambda f_\mu$$

Il est clair que l'on obtient bien ainsi une catégorie additive $\tilde{\mathcal{C}}^S$ qui contient $\tilde{\mathcal{C}}^{(0)} = \mathcal{C}$, si l'on identifie $f : C \to C'$ dans $\mathcal{C}$ avec la suite (indicée par S) $(f,0,0,\ldots) : C \to C'$, morphisme de $\tilde{\mathcal{C}}^S$.

Supposons $S \neq (0)$. Pour chaque $C \in |\mathcal{C}|$, désignons par X_C le morphisme $(0,1_C,0,0,\ldots) : C \to C$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$. On a alors $X_C^2 = (0,0,1_C,0,0,\ldots)$, $X_C^3 = (0,0,0,1_C,0,0,\ldots)$, etc... On pose $X_C^0 = 1_C,0,0,\ldots)$; si $V > \mathrm{Sup}(S)$, $X_C^\nu = 0$.

<u>Remarque 3.3.</u> : $\forall\, \tilde{f} = \{f_\nu\}_{\nu \in S} : C \to C'$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$, et $\forall \nu \geqslant 0$, on a : $X_{C'}^\nu \tilde{f} = \tilde{f} X_C^\nu$.

Si $s = \sup(S) < \infty$, tout morphisme $\tilde{f} = \{f_\nu\} : C \to C'$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$ s'écrit de façon unique comme une somme :

$$\tilde{f} = \sum_{\nu \in S} f_\nu X_C^\nu \quad \text{ou} \quad \sum_{\nu \in S} X_{C'}^\nu f_\nu \quad .$$

Par ailleurs, si $S = \mathbb{N}$, cette écriture devient formelle et la composition (formelle) de séries formelles habituelle se transporte dans le cas présent pour donner la composition dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$. On est donc justifié de poser $\mathcal{C}[[X]] = \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}}$

On note par $\mathcal{C}[X]$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}[[X]]$ déterminée par les morphismes $= \{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de support fini, i.e. pour lesquels $f_\nu = 0$ sauf pour un nombre fini de ν. $\mathcal{C}[[X]]$ (resp. $\mathcal{C}[X]$) est appelée la catégorie des séries formelles (resp. des polynômes) en $X = \{X_C\}_{C \in |\mathcal{C}|}$ sur $\mathcal{C}$.

<u>Remarque 3.4.</u> : $X = \{X_C\}_{C \in |\mathcal{C}|}$ est central dans $\mathcal{C}[X]$ (cf. exemple 3.2. - 3)). De plus $\mathcal{C}[X]$ est obtenue de $\mathcal{C}$ par "adjonction libre" d'un élément central X , i.e. si $\alpha = \{\alpha_D\}_{D \in |\mathcal{D}|}$ est central dans $\mathcal{D}$, tout foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se prolonge de façon unique en un foncteur additif $\bar{F} : \mathcal{C}[X] \to \mathcal{D}$ tel que $\bar{F} * X = \alpha * F$ (i.e. $\forall\, C \in |\mathcal{C}|$, $\bar{F}(X_C) = \alpha_{F(C)}$) .

D'autre part, on définit une dérivation d'ordre S :

$$\Pi^S : \tilde{\mathcal{C}}^S \to \mathcal{C}$$

en posant $\Pi_o^S(C) = C$ si $C \in |\mathcal{C}|$ et $\Pi_\nu^S(\tilde{f}) = f_\nu$ si $\tilde{f} = \{f_\nu\}_{\nu \in S}$.

<u>Théorème 3.5.</u> : La dérivation $\Pi^S : \tilde{\mathcal{C}}^S \to \mathcal{C}$ d'ordre S est co-universelle dans le sens suivant : pour toute dérivation D d'ordre S de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, il existe un unique foncteur additif $F_D : \mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{C}}^S$ pour lequel $\Pi^S \circ F_D = D$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{C}}^S \arrow[dr, "\Pi^S"] & \\ \mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "F_D"] \arrow[rr, "D"'] & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Explicitement, si $g : B \to B' \in \mathcal{B}$ on a :

$$F_D(g) = \sum_{\nu \in S} D_\nu(g)\, X^\nu_{D_o(B)} .$$

Ainsi posant $E^S(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{C}}^S$, E^S s'étend à un foncteur adjoint à droite de T_S : Cadd $\to$ Dera_S .

La construction de l'adjoint à gauche est plus délicate. On doit utiliser le fait suivant :

<u>Remarque 3.6.</u> : Toute catégorie additive est quotient d'une catégorie additive libre.

Nous rappelons maintenant comment ce résultat s'obtient. Pour nous, un <u>graphe orienté</u> $\mathfrak{J}$ est la donnée d'une classe $|\mathfrak{J}|$ d'"objets" et, pour chaque couple $(C,C') \in |\mathfrak{J}| \times |\mathfrak{J}|$, d'un ensemble $\mathfrak{J}(C,C')$ possiblement vide de "flèches". Si $f \in \mathfrak{J}(C,C')$, on pose $\alpha(f) = C$, $B(f) = C'$. Ainsi toute catégorie (additive) $\mathcal{C}$ possède un graphe orienté sous-jacent, oubliant les unités et la composition (et l'addition). La catégorie additive libre $\mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ engendrée par un graphe orienté $\mathfrak{J}$ peut être décrite de la façon suivante : les objets de $\mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ sont ceux de $\mathfrak{J}$; un morphisme de C à C' dans $\mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire de composés formels de forme :

$$x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$$

où $x_k \in \mathfrak{J}$, $\alpha(x_1) = C$, $\alpha(x_1) = \beta(x_{k-1})$ $k = 2,\dots,n$, et $\beta(x_n) = C'$. On convient d'admettre la combinaison vide, que l'on identifie à $0 : C \to C'$; cependant un terme de la combinaison peut être un composé vide seulement si $C = C'$ et alors ce terme est identifié à 1_C. La composition dans $\mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ se fait en proclamant la distributivité et l'addition est évidente. Alors $\mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ est une catégorie additive qui a la propriété universelle suivante : pour toute catégorie additive $\mathfrak{D}$, tout "homomorphisme de graphe orienté" $F : \mathfrak{J} \to \mathfrak{D}$ s'étend de façon unique en un foncteur additif $F' : \mathcal{C}[\mathfrak{J}] \to \mathfrak{D}$.

Pour nous, un <u>idéal</u> $\mathfrak{d}$ d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ est un sous-graphe orienté de $\mathcal{C}$ tel que :

a) $|\mathfrak{d}| = |\mathcal{C}|$,

b) $\forall\, C, C' \in |\mathcal{C}|$, $\mathfrak{d}(C,C')$ est un sous-groupe abélien de $\mathcal{C}(C,C')$,

c) $\mathcal{C}\circ\mathfrak{d}\circ\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$, i.e. si $k \in \mathfrak{d}$, tous les composés gkf sont dans d.

Si $\mathfrak{d}$ est un idéal de $\mathcal{C}$, on obtient une <u>catégorie quotient</u> $\mathcal{C}/\mathfrak{d}$ et un foncteur additif :

$$P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathfrak{d}$$

de façon évidente : P est l'identité sur les objets et $\forall\ C, C'$, l'application $\mathcal{C}(C,C') \to \mathcal{C}/_{\mathcal{J}}(C,C')$ induite par P est un épimorphisme de groupes abéliens (dont le noyau est $\mathcal{J}(C,C')$) ; c'est d'ailleurs essentiellement la seule façon d'obtenir de tels foncteurs.

La remarque 3.6. est alors facile à vérifier ; on peut prendre, par exemple, la catégorie additive libre engendré par le graphe orienté (sous-jacent à) $\mathcal{C}$.

<u>Théorème 3.7.</u> : Pour toute catégorie additive $\mathcal{C}$ et tout segment initial S de $\mathbb{N}$, il existe une catégorie additive $\mathcal{C}_S$, dite <u>catégorie différentielle de $\mathcal{C}$ d'ordre S</u> et une dérivation $D_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ d'ordre S , dite <u>dérivation universelle de $\mathcal{C}$</u> pour la raison suivante : pour toute catégorie additive $\mathcal{D}$ et toute dérivation d'ordre S D de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur additif $F : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ tel que $F \circ D_S = D$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_S \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "D_S"] \arrow[rr, "D"'] & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Ainsi, posant $\mathrm{Dif}_S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_S$, Dif_S s'étend à un foncteur adjoint à gauche de T_S .

<u>Démonstration</u> : <u>1er cas</u> – $\mathcal{C} = \mathcal{C}[\mathfrak{J}]$ est une catégorie additive libre sur un graphe orienté $\mathfrak{J}$.

On construit alors un nouveau graphe orienté $\mathfrak{J}_S$ ayant les mêmes objets que $\mathfrak{J}$ en posant :

$$\mathfrak{J}_S(C,C') = \mathfrak{J}(C,C') \times S = \{x_\nu \mid x \in \mathfrak{J}(C,C'),\ \nu \in S\} .$$

Alors $\mathcal{C}_S$ est la catégorie additive libre $\mathcal{C}[\mathfrak{J}_S]$ et $D_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ est obtenue de la façon suivante : utilisant l'additivité et des relations du type donné dans la remarque 1.2., 3), on montre qu'il existe une dérivation

$D_S : \mathcal{C}[\mathcal{J}] \to \mathcal{C}[\mathcal{J}_S]$ uniquement déterminée par les relations :

$$(D_S)_o(C) = C \ , \quad (D_S)_\nu(x) = x_\nu \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{J} \ .$$

La propriété universelle de D_S est alors facile à vérifier : si $D : \mathcal{C}[\mathcal{J}] \to \mathcal{D}$ est une dérivation d'ordre S , $F : \mathcal{C}[\mathcal{J}_S] \to \mathcal{D}$ est le seul foncteur additif tel que $F(C) = D_o(C)$ et $F(x_\nu) = D_\nu(x)$, si $x \in \mathcal{J}$, $\nu \in S$.

<u>2ème cas</u> - Cas général : $\mathcal{C} = \mathcal{C}[\mathcal{J}]_{/\mathfrak{d}}$ est quotient d'une catégorie additive libre $\mathcal{C}[\mathcal{J}]$ par un idéal $\mathfrak{d}$.

Notons par $D'_S : \mathcal{C}[\mathcal{J}] \to \mathcal{C}[\mathcal{J}_S]$ la dérivation universelle d'ordre S de $\mathcal{C}[\mathcal{J}]$ obtenue dans le premier cas et soit $\mathfrak{d}_S$, l'idéal de $\mathcal{C}[\mathcal{J}_S]$ engendré par les éléments de la forme $(D'_S)_\nu(k)$, où $k \in \mathfrak{d}$ et ν parcourt S . La catégorie différentielle d'ordre S $\mathcal{C}_S$ sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}[\mathcal{J}]_{/\mathfrak{d}}$ est alors la catégorie quotient $\mathcal{C}[\mathcal{J}_S]_{/\mathfrak{d}_S}$. Notons par $P : \mathcal{C}[\mathcal{J}] \to \mathcal{C}$ et $P_S : \mathcal{C}[\mathcal{J}_S] \to \mathcal{C}_S = \mathcal{C}[\mathcal{J}_S]_{/d_S}$, les foncteurs canoniques. On vérifie facilement que l'on obtient une dérivation $D_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ de la façon suivante : si $\bar{f} = P(f) \in \mathcal{C}$, où $f \in \mathcal{C}[\mathcal{J}]$, on pose : $(D_S)_\nu(\bar{f}) = P_S((D'_S)_\nu(f))$.

De plus, D_S est bien la dérivation universelle d'ordre S de $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D} \\
\mathcal{C}[\mathcal{J}_S] \arrow[r, "P_S"] \arrow[urr, dashed, bend left, "F'"] & \mathcal{C}_S \arrow[ur, dashed, "F"] & \\
\mathcal{C}[\mathcal{J}] \arrow[u, "D'_S"] \arrow[r, "P"] & \mathcal{C} \arrow[u, "D_S"] \arrow[uur, bend right, "D"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, si $D : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une dérivation d'ordre S , il existe un unique foncteur additif $F' : \mathcal{C}[\mathcal{J}_S] \to \mathcal{D}$ correspondant à la dérivation $D \circ P : \mathcal{C}[\mathcal{J}] \to \mathcal{D}$, i.e. tel que $F' \circ D'_S = D \circ P$; mais alors si $k \in \mathfrak{d}$, $F'(D'_S)_\nu(k) = D_\nu(P(k)) = D_\nu(0) = 0$ de sorte que l'idéal $\mathfrak{d}_S$ est contenu dans le "noyau" de F' . Il existe donc un unique foncteur additif $F : \mathscr{C}_S \to \mathscr{D}$ tel que $F \circ P_S = F'$; il est facile de vérifier que F est le seul foncteur additif pour lequel $F \circ D_S = D$.

<u>Corollaire 3.8.</u> : Restreignant cette construction aux catégories additives ayant un seul objet, on obtient une démonstration de la proposition 2.1.. Par ailleurs, le corollaire 2.3. étendu aux catégories additives est encore valide.

-:-:-:-:-:-

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] CARTIER P., Dérivations dans les corps. Séminaire H. Cartan - C. Chevalley. E.N.S. 1955-56.

[2] HASSE H. et SCMIDT F.K., Noch eine Begründung .... Jour. f.d. reine u.d. angew. Math., 177 (1937), 215-237.

[3] HEEREMA N., Derivations and Embeddings of a field in its Power Series Ring, I, Proc. Am. Math. Soc. 11 (1960), 188-191, II, Mich. Math. J., 8 (1961), 129-134.

[4] JACOBSON N., Lectures in Abstract Algebra, Vol. III. D. Van Nostrand Comp. 1964.

[5] KAWAHARA Y. et YOKOYAMA Y., On Higher Differentials in commutative rings. TRU Mathematics, 2 (1966), 12-30. (On peut trouver cette revue à la Bibliothèque du C.N.R.S. à Paris).

[6] LEROUX P. et RIBENBOIM P., Dérivations d'ordre supérieur dans les catégories semi-additives. Cahiers de topologie et géométrie différentielle XI (1970), 437-466.

[7] RIBENBOIM P., Higher Derivations of rings, Queen's Mathematical Preprints n° 1969-20, Kingston, Ontario.

-:-:-:-:-:-:-

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 10 du 10.2.71

GROUPE DES UNITES DES ANNEAUX SIMPLES

D'après C. LANSKI

par Mme E. BERREBI

-:-:-:-:-:-:-

Exposé non rédigé.

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 11 du 17.2.1971

NORMALISATION DANS LES CORPS

par Paul VAN PRAAG.

-:-:-:-:-:-:-

1. TERMINOLOGIE, NOTATIONS, INTRODUCTION et BUT DE CE TEXTE (n° 1.4.).

1.1. K est un corps et Z est son centre. Pour tout sous-corps L de K nous notons respectivement L^*, $[K:L]_d$ et $[K:L]_g$: le groupe multiplicatif de L, la dimension linéaire à droite de K sur L et la dimension linéaire à gauche de K sur L. Si $[K:L]_g = [K:L]_d$, alors on pose : $[K:L]_g = [K:L]$. Pour toute partie P de K, nous noterons respectivement $[P]$, $\bar{P}$, $C_K(P)$ et $N_K(P)$ le sous-anneau de K engendré par P, le sous-corps de K engendré par P, le centralisateur de P dans K et le normalisateur de P dans K. Si aucune confusion n'est à craindre on posera : $C_K(P) = C(P) = C$ et $N_K(P) = N(P) = N$. Si $x \in K^*$ et $a \in K$, alors on écrit : $I_x(a) = a^x = x^{-1}ax$.

A cause du grand nombre de centralisateurs dans ce texte, l'inclusion ensembliste se notera $\leq$. Si G est un groupe, et H un sous-groupe normal de G, alors on écrira : $H \lhd G$ ou $G \rhd H$.

1.2. Soit L un sous-corps de K. Nous dirons que K est une γ-extension de L ou que L est un γ-sous-corps de K si et seulement si $L \geq C_K(L)$.

Exemples : 1) pour tout sous-champ F de K, $C_K(F)$ est un γ-sous-corps de K. (lorsque $[K:Z] < \infty$, tous les γ-sous-corps de K peuvent être construits ainsi : on sait (par ex. [3] p. 165) que dans ce cas $L = C_K C_K(L)$, quel que soit le sous-corps L de K qui contient Z. Dès lors si $C(L) \leq L$, alors $F = C(L)$ est commutatif et $L = C(F)$. Si K est de rang infini sur Z, alors K peut contenir des γ-sous-corps qui ne soient pas le centralisateur d'un sous-champ comme le montre l'exemple suivant dû à J. DIEUDONNE ([2], p. 179).

2) K_o est un champ de caractéristique $\neq 2$, $K_1 = K_o((X))$ est le champ des séries formelles en X à coefficients dans K_o , K est le corps des séries formelles $\sum_n a_n(X)Y^n$ en Y où les coefficients sont dans K_1 , avec la loi :

$$Y^n a(X) = a(2^n X)Y^n .$$

L est le sous-corps de K formé des séries formelles qui ne comportent que des puissances paires de Y . Tout élément de K s'écrit d'une façon unique $Ya+b$, avec a et b dans L . L'application $Y \mapsto -Y$ définit un automorphisme involutif σ de K dont L est le corps des éléments fixes. Donc K est galoisien sur L . De plus, K_o est à la fois le centre de K , le centralisateur de L dans K et le centre de L , donc K est galoisien extérieur sur L ([3], p. 166) et il résulte d'un théorème de Jacobson (voir citation précédente) que le groupe de Galois de K sur L est $\{1, \sigma\}$ et que σ n'est pas un automorphisme interne de K .

L est un γ-sous-corps de K , mais L n'est le centralisateur d'aucun sous-corps de K : sinon soit $L = C_K(P)$, pour tout $x \in P$, I_x induit l'identité sur L , donc $I_x \in \{1, \sigma\}$. Mais σ n'est pas un automorphisme interne, donc $I_x = 1$ et $x \in Z$. Par conséquent $P \leq Z$ et $L = C(P) = K$ ce qui ne va pas.

Cet exemple est un cas particulier du suivant : soit K un surcorps de L tel que $[K:L]_d = 2$ Fixons $t \in K \setminus L$, les transformations S et D de L définies par $at = t.aS + aD$ pour tout $a \in L$ sont respectivement un endomorphisme et une S-dérivation de K . Si S n'est pas un automorphisme interne de L , alors L est un γ-sous-corps de K .

3) les γ-sous-corps L de K sont trivialement caractérisés par la propriété suivante : K contient une partie P telle que $\overline{P \cup C_K(P)} = L$.

1.3. Soit L un γ-sous-corps de K, nous dirons que L est un nγ-sous-corps de K ou que K est une nγ-extension de L si et seulement si $\overline{N_K(L)} = K$.

Exemples : 1) soit $[K:Z] < \infty$, les nγ-sous-corps de K sont alors les centralisateurs dans K des sous-champs F de K qui sont des extensions galoisiennes de Z. Montrons cela : soit L un γ-sous-corps de K, on sait par 1 (exemple 1)) que $L = C_K(F)$ où F est un sous-champ de K qui contient Z. Par le théorème de Skolem-Noether, nous savons que tout automorphisme de F, fixe sur Z est la restriction à F d'un automorphisme interne de K. De plus, deux automorphismes internes I_x et I_y coïncident sur F si et seulement si $x^{-1}y \in C_K(F)$. Donc $G(F/Z) \simeq N_K(F)^*/C_K(F)^*$ $(N_K(F)^* = N_K(F) \setminus \{o\})$. Pour toute partie P de K, on a $N_K(P) \leq N_K(C_K(P))$, dès lors : $N(L) \leq N(CL) \leq N(CCL) = N(L)$, d'où : $G(F/Z) \simeq N(L)^*/L^*$.

On a : $N(L) = N(F) \geq C(F)$, donc $CN(L) \leq CCF = F$, dès lors, le sous-champ de F fixe par $G(F/Z)$ est $CN(L)$, donc : F est galoisien sur Z si et seulement si $CN(L) = Z$. Par la théorie de Galois non commutative finie ([3] p. 165), il vient enfin : L est un nγ-sous-corps de K si et seulement si $1 = [K:\overline{N(L)}] = [C\overline{N(L)}:Z] = [CN(L):Z]$, si et seulement si $F = C_K(L)$ est galoisien sur Z).

2) le théorème suivant est dû à E.V. Schenkman [4] : soit b un élément de K tel que $b^s \in Z$ et si $r < s$, alors $b^r \notin Z$. Supposons que si b^s n'est pas une racine de l'unité, alors Z contient une racine primitive s^e de 1. Dès lors le centralisateur L de $Z(b)$ dans K est un nγ-sous-corps de L.

3) si K et L sont les corps de séries formelles de l'exemple 3) du n° 1, alors K est une nγ-extension de L.

Soit plus généralement K une extension quadratique (à droite) de L, $t \in K \setminus L$ et S et D définies comme au n° 1. On montre facilement que $\overline{N(L)} = K$ (c'est-à-dire ici : $N(L) \neq L$) si et seulement si D est une S-dérivation interne de L, (c'est-à-dire qu'il existe $x \in L$ tel que pour tout $a \in L$: $aD = x.aS - ax$).

En caractéristique $\neq 2$, il résulte d'un théorème de P.M. COHN ([1],p. 538) que K est galoisien sur L si et seulement si D est une S-dérivation interne de L. Donc si la caractéristique de K est différente de 2, et si K est une extension quadratique galoisienne de L telle que S ne soit pas un automorphisme interne de L, alors K est une $n\gamma$-extension de L.

1.4. Soit K une $n\gamma$-extension de L. Nous noterons $H_K(L)$ l'ensemble des sous-corps de K qui sont des $n\gamma$-extensions de L, et nous identifierons l'ensemble $sg(N^*/L^*)$ des sous-groupes de $N_K(L)^*/L^*$ à celui des sous-groupes de $N_K(L)^*$ qui contiennent L.

Le but principal de ce texte est de prouver l'énoncé suivant :
l'application $G \mapsto \bar{G}$ est une bijection de $sg(N^*/L^*)$ sur $H_K(L)$, la bijection réciproque est $P \mapsto N_P(L)$. De plus, $\bar{G}$ est un $n\gamma$-sous-corps de K si et seulement si $G \triangleleft N^*$.

Lorsque $[K:Z] < \infty$, cet énoncé est une conséquence immédiate des théories de Galois commutative et non commutative : identifions N^*/L^* à $G(F/Z)$ (où $F = C_K(L)$), dès lors la composée des applications :

$$G \mapsto \text{Fix } G \mapsto C_K(\text{Fix } G)$$

est une bijection de $sg(N/L^*)$ sur $H_K(L)$ (Fix G est bien entendu le sous-champ de F fixe par G). Or Fix $G = F \cap C_K(G) = C_K(G)$, et $C_K\, C_K(G) = \bar{G}$. La seconde partie de l'énoncé provient du renversement des inclusions produit par C_K.

Notre démonstration est indépendante de toute théorie de Galois, cela me semble naturel, vu l'exemple 1.3)

1.5. Soit V un vectoriel à droite sur K et P une partie de P.

Nous dirons que P est <u>demi-libre</u> (sur K) si et seulement si toute partie A de P dont toutes les paires sont libres sur K est libre sur K. On montre sans peine que P est demi-libre sur K si et seulement si il existe une famille libre $(e_i)_{i \in I}$ de V et une famille $(K_i)_{i \in K}$ de parties de K indicées par I telles que $P = \bigcup_{i \in I} e_i K_i$. En particulier, toute famille libre de l'espace projectif de V est une partie de V, demi-libre sur K.

2. DEMONSTRATION DE L'ENONCE 1.4.

2.1. Les γ-sous-corps :

2.1.1. <u>Lemme 1 : Si K est un corps et L un sous-corps de K, alors $L \geq C_K(L)$ si et seulement si $N_K(L)$ est demi-libre sur L.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) soit $L \geq C_K(L)$ et (n_i) une famille d'éléments de $N_K(L)$ dont toute paire est libre sur L. Supposons que cette famille ne soit pas libre sur L et notons s le plus petit entier positif r pour lequel il existe $n_1, \ldots, n_r \in N(L)^*$ et $a_1, \ldots, a_r \in L^*$ tels que $n_1 a_1 + \ldots + n_r a_r = 0$. Pour tout i définissons la transformation suivante de L :

$$f_i(X) = x^{n_i} a_i - a_i x^{n_1 a_1} .$$

Dès lors $f_1(x) = 0$. Si $i \geq 2$, alors $f_i \neq 0$, sinon on aurait : $x^{n_i} a_i = a_i x^{n_1 a_1}$, c'est-à-dire $n_i^{-1} x\, n_i a_i = a_i a_1^{-1} n_1^{-1} x\, n_1 a_1 a_i$, et donc $n_i a_i a_1^{-1} n_1^{-1} \in C(L)^* \leq L^*$, et par conséquent $n_i n_1^{-1} \in L^*$ contredisant l'hypothèse sur les n_i. Nous pouvons choisir $\bar{x} \in L$ pour lequel $f_2(\bar{x}) \neq 0$. Il vient dès lors :

$$
\begin{aligned}
n_2f_2(\bar{x}) + \dots + n_sf_s(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^{s} n_i f_i(\bar{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{s} n_i(\bar{x}^{n_i a_i} - a_i \bar{x}^{n_1 a_1}) \\
&= \bar{x}(\sum_{i=1}^{s} n_i a_i) - (\sum_{i=1}^{s} n_i a_i)\bar{x}^{n_1 a_1} \\
&= 0 .
\end{aligned}
$$

Puisque $f_2(\bar{x}) \neq 0$, il existe une partie non vide $\{2, i_1, \dots, i_t\}$ de $\{2, \dots, s\}$ et des éléments $f_2(\bar{x}), \dots, f_{i_t}(\bar{x})$ de L^* , tels que

$$n_2f_2(\bar{x}) + \dots + n_{i_t}(\bar{x}) = 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse sur s .

2) soit $L \not\supset C_K(K)$ et prenons $t \in C(L) \setminus L$. Toutes les paires de $A = \{1, t, 1+t\}$ sont libres sur L , mais A n'est pas libre sur L .

Remarques : 1) l'énoncé de ce lemme fait penser mais n'est pas une conséquence du "théorème de Dedekind non commutatif" : soit K un corps , L un sous-corps de K et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des automorphismes de K laissant L invariant. Si pour tous $i \neq j$, les restrictions à L de σ_i et de σ_j ne diffèrent pas par un automorphisme interne de L , alors les σ_i sont linéairement indépendants sur L (démonstration analogue au théorème de Dedekind - Lemme d'Artin).

2) Le lemme implique que les seuls sous-L-vectoriels non nuls de K et contenus dans $N_K(L)$ sont des droites. Ceci a été démontré par Schenkman dans 4], lorsque L est le centralisateur d'un sous-champ de K (si V est un vectoriel sur K et P une partie de V , le fait que les seuls sous-vectoriels non nuls de V contenus dans P soient des droites, n'implique bien entendu pas que P soit demi-libre sur K : soit $\dim_K V = 2$, $0 \neq x \in V$ et $P = V \setminus \{x\}$, P n'est pas demi-libre sur K mais les sous-vectoriels de V contenus dans P sont $\{0\}$ et les droites vectorielles ne contenant pas x).

2.1.2. Soit $L \geq C_K(L)$ et G un sous-groupe de $N_K(L)$. Le lemme implique que tout système de représentants (g_i) de $G/G \cap L^*$ est une base (à gauche et à droite) du vectoriel L^G (qui est un sous-anneau de K) engendré par G sur L. Si (n_j) est un système de représentants de N^*/L^*, alors chacun des g_i est dans un (et dans un seul des $n_j L^*$ et l'on peut donc supposer que la famille (n_j) contient les g_i Supposons que la combinaison linéaire finie $\Sigma\, g_i \ell_i$ $(\ell_i \in L)$ soit dans $N(L)$, dès lors il existe $\in N$ et $1 \in L$ tels que

$$\Sigma\, g_i \ell_i = n\ell \ .$$

La famille (n_j) étant libre, un au plus des ℓ_i n'est pas nuls, nous avons donc démontré le

Lemme 2 : Si $L \geq C_K(L)$ et G est un sous-groupe de $N_K(L)^*$, alors $L^G \cap N_K(L)^* = L^*.G$, et en particulier :

Lemme 3 : Si $L \geq C_K(L)$ et G est un sous-groupe de $N_K(L)^*$ contenant L^*, alors $[G] \cap N_K(L)^* = G$.

L'application $G \to [G]$ est donc injective.

2.2. Lemme 4 : Si K est une $n\gamma$-extension de L et G est un sous-groupe de $N_K(L)^*$ contenant L^*, alors $[G] = \bar{G}$.

Démonstration : soit (g_α) un système de représentants de G/L^* et (n_i, g_α) avec $n_i \notin G$, un système de représentants de N^*/L^* qui prolonge (g_α). Dès lors les g_α forment une base de $[G]$ sur L et les n_i et les g_α une base de K sur L (par le lemme 1).

$$\text{Soit} \quad 0 \neq x = \sum_\alpha g_\alpha \ell_\alpha \in [G] \quad \text{et}$$

$$x^{-1} = y + \sum_i n_i a_i$$

où $y \in [G]$ et les a_i sont dans L.

Donc $$1 = xy + \sum_i x\, n_i a_i \ , \text{ donc}$$

$$[G] \ni \sum_i x\, n_i a_i = \sum_{\alpha_i i} g_\alpha \ell_\alpha n_i a_i$$

$$= \sum_{\alpha_i i} g_\alpha n_i \ell_\alpha^{\,n_i} a_i \ .$$

Il existe donc des $b_\beta \in L$ tels que

$$\sum_{\alpha_i i} g_\alpha n_i \ell_\alpha^{n_i} a_i = \sum_\beta g_\beta \ell_\beta \quad (*)$$

Parmi les $g_\alpha n_i$ présents dans le premier membre de $(*)$ extrayons une base $\{g_\mu^*, n_j^*\}$ de $\Sigma\, g_\alpha n_i L$. L'égalité $(*)$ devient :

$$\sum_{\mu, j} g_\mu^* \, n_j^* a_{\mu j} = \Sigma\, g_\beta \ell_\beta \ .$$

Mais toutes les paires de l'ensemble $\{g_\mu^* n_j^* , g_\beta\}$ sont libres, donc (lemme 1) cet ensemble est libre et tous les coefficients de $(*)$ sont nuls. Donc $\sum_i x n_i a_i = 0$ et $x^{-1} = y \in [G]$, ce que nous voulions démontrer. Le lemme 3 implique dès lors le

<u>Lemme 5 : Si K est une $n\gamma$-extension de L et G un sous-groupe de $N_K(L)^*$ contenant L^*, alors $N_{\bar{G}}(L) = G$</u> .

<u>Lemme 6 : Si K est une $n\gamma$-extension de L et G un sous-groupe de $N_K(L)^*$ contenant L^*, alors $G \Delta N_K(L)^*$ si K est une $n\gamma$-extension de $\bar{G}$</u>.

<u>Démonstration</u> : $\bar{G}$ est trivialement un γ-sous-corps de K.

1) Soit $G \lhd N_K(L)^*$, dès lors :

$$N(L) \leq N(G) \leq N(\bar{G}) \quad ,$$

mais $\overline{N(L)} = K$ par hypothèse sur L, donc $\overline{N(\bar{G})} = K$.

2) Supposons que $\bar{G}$ soit un $n\gamma$-sous-corps de K, et soit $(\bar{n}_i)$ un système de représentants de $N_K(\bar{G})^*/\bar{G}^*$. Par le lemme 1, il vient : $K = \sum_i \bar{n}_i \bar{G}$. Soit dès lors $\bar{n}_1\bar{g}_1 + \ldots + \bar{n}_S\bar{g}_S$ un élément quelconque de $N_K(L)$ (les $\bar{g}_i$ sont dans L et on ne nuit pas à la généralité du raisonnement en prenant une telle numérotation).

Pour tout $a \in L$, il existe donc $a_1 \in L$ avec

$$(\bar{n}_1\bar{g}_1 + \ldots + \bar{n}_S\bar{g}_S)a = a_1(\bar{n}_1\bar{g}_1 + \ldots + \bar{n}_S\bar{g}_S) \ ,$$

donc :
$$\Sigma\, \bar{n}_i \bar{g}_i a = \Sigma\, \bar{n}_i a_1^{\bar{n}_i} \bar{g}_i \ .$$

Puisque $a_1 \in L \leq \bar{G}$, on a $a_1^{\bar{n}_i} \in \bar{G}$, par conséquent, pour tout i on peut écrire :

$$\bar{g}_i a = a_1^{\bar{n}_i} \bar{g}_i$$

ce qui donne : $\bar{n}_i \bar{g}_i \in N_K(L)$ pour tout i . Nous savons par le lemme 1 que si une somme d'éléments de $N(L)$ est dans $N(L)$, alors tout ces éléments sont L-proportionnels. Nous venons donc de montrer que $N_K(L) \leq N_K(\bar{G})$. $\bar{G} \leq N_K(\bar{G})$. Dès lors, en vertu du lemme 2 on a :

$$\bar{G}^{N(L)} \cap N(\bar{G})^* = \bar{G}^* . N(L)^* \ ,$$

mais

$$\bar{G}^{N(L)} \geq [N(L)] = \overline{N(L)} \qquad \text{(par le lemme 4)}$$

$$= K \qquad \text{(par hypothèse sur } L)$$

Donc $\qquad N(\bar{G})^* = \bar{G}^* N(L)$.

Il résulte dès lors d'un théorème d'isomorphisme d'Emmy Noether que $N(L) \triangleright G^* \cap N(L) = G$ en vertu du lemme 5 , c'est ce que nous voulions démontrer.

2.3. Soit L un nγ-sous-corps de K , ϕ et Ψ les applications respectivement de $sg(N^*/L^*)$ dans $H_K(L)$ et de $H_K(L)$ dans $sg(N^*/L^*)$ définies par :

$$\phi(G) = \bar{G} \qquad \text{et} \qquad \Psi(P) = N_P(L)$$

(ϕ a bien cette propriété, en effet $\bar{G} \geq C_K(\bar{G})$ et $N_{\bar{G}}(L)^* = G$ (lemme 5) donc $\overline{N_{\bar{G}}(L)} = \bar{G}$) .

On a : $\Psi\phi(G) = \Psi(\bar{G}) = N_{\bar{G}}(L) = G$ (lemme 5) et $\phi\Psi(P) = \phi\, N_P(L) = \overline{N_P(L)} = P$ (définition de $H_K(L)$) . Dès lors, en tenant compte du lemme 6 , l'énoncé 1.4. est démontré.

3. Soit toujours K une nη-extension de L . $N(L)$ induit par automorphismes internes un groupe $I_{N/CL}$ d'automorphismes de $C(L)$ dont le champ fixe est $C(L) \quad C(N) = Z$. L'application $n \to I_{n/CL}$ est donc un morphisme de $N(L)$ dans le groupe de Galois $G(CL/Z)$ de $C(L)$ sur Z . Le noyau est $N(L) \quad CCL$ (et donc, par le lemme 6, CCL est un nγ-sous-corps de K).

Supposons maintenant que $\underline{[K:L] < \infty}$. (vu l'hypothèse sur $N_K(L)$, $[K:L]_g = [K:L]_d$) .

Puisque $L \geq C_K(L)$, N^* et N^*/L^* induisent sur $C(L)$ le même groupe d'automorphismes, or par le lemme 1 : l'ordre $|N^*/L^*|$ de N^*/L^* est $[K:L]$ qui est fini. Il résulte dès lors d'un théorème d'Artin que :

Corollaire (du lemme 1) : Si K est une $n\gamma$-extension de degré fini de L , alors $C(L)$ est une extension galoisienne de Z et $N_K(L)^*/N_K(L)^* \cap C_K C_K L \simeq G(C(L)/Z)$.
La théorie de Galois commutative et l'énoncé 1.4. nous donnent dès lors la trijection canonique :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr] & & \bar{G} \arrow[dl] \\ & C(G)=C(\bar{G}) & \end{tikzcd}$$

où G parcourt $sg(N_K(L)^*/N_{CCL}(L)^*)$, $\bar{G}$ parcourt $H_K(C_K C_K L)$ et $C(G)$ l'ensemble des champs intermédiaires à $C_K(L)$ et Z . On obtient un énoncé plus parlant en supposant en outre que $CCL = L$ (ou K est galoisien interne sur L).

-:-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.M. COHN, Quadratic extensions of skew fields, Proc. London Math. Soc. (3) 11(1961) pp. 531-556.

[2] J. DIEUDONNE, les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications, Acta Mathematica, vol. 87(1952), pp. 175-242.

[3] N. JACOBSON, Structure of rings, Am. Math. Soc. Coll. Pub. vol. XXX VII , 1964.

[4] E.V. SCHENKMAN, Roots of centre elements of division rings, Journal London Math. Soc., 36 (1961), pp. 393-398.

-:-:-:-:-

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 13 du 10.3.1971

MODULES SUR DES ANNEAUX PREMIERS DE DEDEKIND

d'après D. EISENBUD et J.C. ROBSON [1]

par Melle J. CALAIS

-:-:-:-:-:-:-

RAPPELS.

Un anneau de fractions Q est un anneau unitaire, dans lequel tout élément régulier est inversible.

Un ordre à droite R dans Q est un sous-anneau de Q tel que tout élément de Q s'écrit ab^{-1}, avec a et b dans R, b étant régulier. On définit de façon analogue un ordre à gauche dans Q.

Si S et R sont deux ordres à droite dans Q, on dit qu'ils sont équivalents, s'il existe des éléments c, d, e, f réguliers dans Q tels que :

$$cRd \subseteq S \quad \text{et} \quad eSf \subseteq R .$$

R est un ordre à droite maximal dans Q, s'il n'est contenu dans aucun ordre à droite équivalent.

D'après un résultat de Goldie [2], tout anneau premier, noethérien (à droite et à gauche) est un ordre à droite et à gauche dans un anneau de fractions simple artinien.

Un anneau premier de Dedekind [4] est un anneau premier, héréditaire, noethérien(1) qui est un ordre maximal dans son anneau de fractions.

(1) héréditaire (resp^t noethérien) signifie héréditaire (resp^t noethérien) à droite et à gauche.

R étant un anneau premier de Dedekind, et M un R-module à droite, on dira [3] qu'un élément $x \in M$ est un <u>élément de torsion</u> si $\mathrm{Ann}\, x$ contient un élément régulier.

R vérifiant la condition de Ore, l'ensemble $t(M)$ des éléments de torsion de M est un sous-module de M [3] .

M est un R-module <u>de torsion</u>, si $t(M) = M$;

M est un R-module <u>sans torsion</u>, si $t(M) = \{o\}$.

I. ANNEAUX PREMIERS, HEREDITAIRES, NOETHERIENS.

Dans tout ce paragraphe R est un anneau premier, héréditaire, noethérien, que l'on suppose <u>non simple artinien</u>; son anneau de fractions Q est alors simple artinien.

1) <u>Rappels de résultats dûs à Goldie</u> [2] :

1° - un idéal à droite de R est essentiel si, et seulement s'il contient un élément régulier.

2° - un idéal à droite U de R est dit <u>uniforme</u> si $U \neq \{o\}$ et si quels que soient I_1, I_2 idéaux à droite de R, non nuls et contenus dans U, on a $I_1 \cap I_2 \neq \{o\}$.

3° - tout idéal à droite uniforme maximal est un annulateur à droite dans R, pour un élément de R.

4° - si U est un idéal à droite uniforme de R, il contient une copie de tout idéal uniforme V.

5° - R étant noethérien, R_R est un R-module à droite de dimension finie au sens de Goldie ; il vérifie donc les propriétés suivantes :

Il existe un entier positif n tel que :

a) toute somme directe d'idéaux à droite uniformes de R, de longueur maximale, a n termes,

b) toute somme directe d'idéaux à droite de R a au plus n termes,

c) un idéal à droite I de R est essentiel, si, et seulement s'il contient une somme directe de n idéaux à droite uniformes.

On appelle n <u>la dimension uniforme de R</u>.

D'une façon générale, un idéal à droite I, tel que toute somme directe d'idéaux à droite uniformes qu'il contient a, au plus, k termes, sera dit de <u>dimension uniforme k</u>.

6° - R étant un ordre dans Q simple artinien, I est un R-idéal à droite fractionnaire de Q, s'il existe $q \in Q$ tel que qI est un idéal à droite essentiel on a :

$$I^* = \{q \in Q \; ; \; qI \subseteq R\} \approx \mathrm{Hom}_A(I, R)$$
$$O_\ell(I) = \{q \in Q \; ; \; qI \subseteq I\} \approx \mathrm{Hom}_A(I, I)$$

I^* est un R-idéal à gauche fractionnaire de Q.

LEMME I.1. Un anneau premier noethérien qui contient un idéal minimal à droite est simple artinien.

LEMME I.2. Soit R un ordre dans un anneau simple artinien Q et soit I un R-idéal à droite fractionnaire. Alors I est projectif, si et seulement si $II^* = O_\ell(I)$ et dans ce cas I et I^* sont des R-modules de type fini.

2) Propriétés relatives à un anneau R premier, héréditaire, noethérien :

THEOREME I.3. R étant supposé non simple artinien, soient I et J deux idéaux à droite de R tels que $J \subseteq I$. Alors, I/J est un R-module à droite artinien, si, et seulement si J est essentiel dans I.

1° - Supposons I/J artinien et J non essentiel dans I.
Il existe alors un idéal à droite K ou R tel que :

$$K \subseteq I \quad \text{et} \quad J \oplus K \subseteq I \; ; \text{ d'où } \; \frac{J \oplus K}{J} \approx K \quad \text{et} \quad \frac{J \oplus K}{J} \subseteq I/J \; .$$

$\frac{I}{J}$ étant artinien, $\frac{J \oplus K}{J}$ contient un sous-module minimal, donc K contient un idéal minimal, ce qui contredit l'hypothèse : R non simple artinien (cf. Lemme I.1.).

2° - Supposons $J \measuredangle I$ (J essentiel dans I).
On remarque que si H est le sous-module complément de I dans R_R, on a $I \oplus H \measuredangle R$.

Or $J \measuredangle I \Longrightarrow J \oplus H \measuredangle I \oplus H$, et d'autre part, $\frac{I \oplus H}{J \oplus H} \approx \frac{I}{J}$.

On peut donc, sans restreindre la généralité supposer $J \measuredangle I \measuredangle R$.

Soit (1) $I \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots \supsetneq J$ une chaîne décroissante d'idéaux à droite essentiels contenant J. On en déduit la chaîne croissante :

(2) $I^* \subsetneq I_1^* \subsetneq I_2^* \subsetneq \cdots \subsetneq J^*$ formée de sous-modules du R-module à gauche J^* qui, d'après le lemme I.2. est de type fini. La chaîne (2) est donc finie.

En posant $I_i^{**} = \{q \in Q \; ; \; I_i^* q \subsetneq R\}$, on vérifie facilement que $I_i^{**} = I_i$ pour tout i, on en conclut que la chaîne (1) est finie, donc que I/J est artinien.

LEMME I.4. Tout R-module à droite projectif est isomorphe à une somme directe d'idéaux à droite uniformes.

a) On montre que R est somme directe finie d'idéaux à droite uniformes:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \text{ .}$$

On en déduit que tout idéal à droite I est aussi somme directe d'idéaux à droite uniformes

$$I = \bigoplus_{k=1}^{p} V_k \text{ , } V_k \text{ uniformes et } V_k \subseteq U_k \text{ .}$$

$$I \prec R \Longleftrightarrow p = n \text{ .}$$

b) Si M est un R-module à droite projectif, R étant héréditaire, on a $M \approx \bigoplus_{\lambda \in \Omega} M_\lambda$ avec $M_\lambda \approx I_\lambda$, les I_λ étant des idéaux à droite de k. Par suite :

M_λ est isomorphe à une somme directe d'idéaux à droite uniformes de R.

COROLLAIRE I.5. Si I et I' sont deux idéaux à droite de R, de même dimension uniforme, alors, I' est isomorphe à un sous-module essentiel de I [1].

II. STRUCTURES D'UN MODULE DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU PREMIER DE DEDEKIND.

1) Structure d'un module de type fini sur un anneau R premier, héréditaire, noethérien :

On suppose toujours R non simple artinien.

PROPOSITION II.1. Un R-module à droite de type fini M est de torsion, si, et seulement s'il est artinien.

Soit $M = \sum_{i=1}^{n} x_i R$, on a $x_i R \approx \frac{R}{\text{Ann } x_i}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

a) M de torsion $\Longrightarrow \text{Ann } x_i < R$, $\forall i = 1, \dots, n$, donc, d'après le théorème I.3., $\frac{R}{\text{Ann } x_i}$ est artinien.

M est alors une somme finie de R-modules à droite artinien, donc est artinien.

b) M artinien $\Longrightarrow xR$ artinien, $\forall x \in M$;

alors : $(\frac{R}{\text{Ann } x}$ artinien, $\forall x \in M) \Longrightarrow (\text{Ann } x \prec R$, $\forall x \in M)$, c'est-à-dire M de torsion.

<u>THEOREME II.2.</u> <u>R étant premier, héréditaire, noethérien, soit</u> M <u>un R-module à droite de type fini. Si</u> $t(M)$ <u>est le sous-module de torsion de</u> M , <u>alors</u> $\frac{M}{t(M)}$ <u>est projectif,</u> $t(M)$ <u>est artinien et</u> $M \approx t(M) \oplus \frac{M}{t(M)}$.

a) On utilise le résultat suivant : tout R-module à droite N de type fini et sans torsion est un sous-module d'un R-module libre de type fini [3] ; R étant héréditaire, on en conclut que N est projectif.

En particulier : $N = \frac{M}{t(M)}$ est <u>projectif</u>.

b) La suite exacte :

$$0 \to t(M) \xrightarrow{j} M \xrightarrow{p} \frac{M}{t(M)} \to 0$$

est scindée, puisque $\frac{M}{t(M)}$ est projectif, d'où :

$$\underline{M \approx t(M) \oplus \frac{M}{t(M)}} \ .$$

c) (M de type fini et $t(M)$ facteur direct dans M) $\Longrightarrow$ $t(M)$ de type fini. D'autre part, $t(M)$ est un module de torsion, donc, d'après la proposition II.1, $t(M)$ <u>est artinien</u>.

Le théorème précédent s'applique, en particulier, si R est premier de Dedekind, et dans ce cas, l'étude qui suit précise la structure du facteur projectif $\frac{M}{t(M)}$ et du facteur de torsion $t(M)$ d'un R-module M de type fini.

2) <u>Structure d'un module projectif sur un anneau R premier de Dedekind</u> :

<u>Rappel</u> [4] : R étant un anneau premier de Dedekind, R est en particulier un ordre d'Asano à droite, par suite, pour tout idéal à droite I de R , on a

$$I^*I = R \ ,$$

on en déduit le résultat suivant :

<u>LEMME II.3.</u> : <u>Soient</u> I <u>et</u> K <u>deux idéaux à droite de</u> R , <u>de même dimension uniforme, et</u> J <u>un idéal à droite quelconque, non nul, de</u> R . <u>Il existe alors, un idéal à droite</u> L <u>essentiel dans</u> J , <u>tel que</u> :

$$I \oplus J \approx K \oplus L \ .$$

D'après le corollaire I.5., on peut supposer I essentiel dans K et par suite, $\frac{K}{I}$ est artinien, d'après le théorème I.3.

D'autre part, R noethérien $\Longrightarrow$ $\frac{K}{I}$ noethérien, d'où $\frac{K}{I}$ de longueur finie.

Le lemme se démontre alors par récurrence sur la longueur de $\frac{K}{I}$, compte tenu du lemme de Schanuel [1] .

THEOREME II.4. : Soit R un anneau premier de Dedekind et P un R-module à droite projectif.

1) si P est de type fini, il existe un entier positif et un idéal à droite I de R tels que : $P \approx R^{(t)} \oplus I$.

2) si P n'est pas de type fini, alors P est libre.

P étant projectif, P est, d'après le lemme I.4., isomorphe à une somme directe d'idéaux à droite uniformes de R .

1er cas : P est de type fini.

Si la dimension uniforme de R est n , en groupant les facteurs uniformes de P par groupes I_k de n idéaux à droite, on obtient :

$$P \approx I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_t \oplus J$$

où les I_k $(1 \leqslant k \leqslant t)$ sont des idéaux à droite essentiels et J est un idéal à droite non nul de R de dimension uniforme $\leqslant n$.

En appliquant successivement, pour $k = 1, \dots, t-1$, le lemme II.3., on obtient :

$$I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_t \approx R^{(t-1)} \oplus L_{t-1} \text{ , où } L_{t-1} \prec R \text{ .}$$

Il existe alors $I \prec J$ tel que :

$$L_{t-1} \oplus J \approx R \oplus I$$

d'où :

$$P \approx R^{(t)} \oplus I \text{ .}$$

2ème cas : P n'est pas de type fini.

On groupe dans P les facteurs uniformes par groupes de n ; et on remarque qu'il suffit de démontrer qu'une somme directe dénombrable de tels groupements est un R-module libre.

On peut donc supposer :

$$P = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$$

où les I_k $(k \in \mathbb{N})$ sont des idéaux essentiels de R .

L'application du lemme II.3., conduit alors à écrire P sous forme d'une somme directe de R-modules libres, donc P est libre.

3) Structure d'un module de torsion, de type fini, sur un anneau R premier de Dedekind :

Rappels et définitions : Si M est un R-module à droite son annulateur :

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in R \text{ ; } xa = o \text{ , } \forall x \in M\}$$

est un idéal bilatère de R.

Si $\mathrm{Ann}(M) = \{o\}$, M est dit fidèle.

Si $\mathrm{Ann}(M) \neq \{o\}$, M sera dit non fidèle.

Enfin, M sera dit complètement fidèle, si tout sous-module de tout module quotient de M est fidèle.

LEMME II.5. : Soit M un R-module à droite de longueur finie et C un sous-module tel que $\frac{M}{C}$ soit cyclique.

a) si C est simple et si la suite exacte :

$$0 \to C \to M \to \frac{M}{C} \to o \quad \text{n'est pas scindée ,}$$

alors, M est cyclique.

b) si C est complètement fidèle, alors M est cyclique.

a) On montre que si $\bar{x}$ est un générateur de $\frac{M}{C}$, tout représentant x de $\bar{x}$ engendre M.

b) La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de C (voir [1]).

LEMME II.6. : Soit T un R-module de torsion et de type fini ; alors T est une extension d'un module complètement fidèle par un module non fidèle.

On remarque que T est de longueur finie ; en effet : T de type fini et R noethérien $\Longrightarrow$ T noethérien, d'autre part, T est artinien d'après la proposition II.1.

On démontre alors, que si C est un sous-module maximal complètement fidèle de T, $\frac{T}{C}$ est non fidèle. Pour cela il suffit de montrer que tout R-module de torsion, de type fini et fidèle contient un sous-module simple fidèle (Pour la démonstration de ce résultat, voir [1]). En effet, s'il en est ainsi, et si $\frac{T}{C}$ était fidèle, $\frac{T}{C}$ contiendrait un sous-module simple fidèle $\frac{T'}{C}$, mais T' serait complètement fidèle, ce qui contredit la maximalité de C.

THEOREME II.7. : R étant un anneau premier de Dedekind, un R-module T de torsion et de type fini est somme directe d'un module complètement fidèle et d'un module non fidèle.

D'après ce qui précède, C étant un sous-module maximal complètement fidèle de T, $\frac{T}{C}$ est non fidèle, T est donc extension d'un module complètement fidèle C par un module non fidèle $U \approx \frac{T}{C}$.

On démontre alors, que $\mathrm{Ext}^1_R(U,C) = \{o\}$ [1], d'où : $T \approx C \oplus U$.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] D. EISENBUD et J.C. ROBSON, "Modules over Dedekind prime Rings". J. of Algebra, 16, 67-85 (1970).

[2] A.W. GOLDIE, "Rings with maximum condition", mimeographed notes, Yale Univ. 1961.

[3] L. LEVY, "Torsion-free and divisible modules ober non-integral domains", Can. J. Math., 15(1963), pp. 132-151.

[4] J.C. ROBSON, "Non commutative Dedekind rings", J. of Algebra, 9(1968), pp. 249-265.

-:-:-:-:-:-:-

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D' ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 14 du 17.3.71

EXTENSION IDEALES D' ANNEAUX,

par P. ETRICH.

-:-:-:-:-:-

Exposé non rédigé.

FACULTE DES SCIENCES D' ORSAY

SEMINAIRE D' ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 15 du 24.3.71

UN TYPE D'ANNEAUX DE FRACTIONS d'après Amitsur,

par Mme M. BARLET

-:-:-:-:-:-:-

Exposé non rédigé.

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 16 du 12 mai 1971

SUR UNE CLASSE D'ANNEAUX CONTENANT LES ANNEAUX DONT LE TREILLIS DES IDEAUX A GAUCHE EST TOTALEMENT ORDONNE.

par Benoit LEMONNIER.

-:-:-:-:-:-:-:-

On se propose de donner quelques propriétés des anneaux tels que tout filtre du treillis des idéaux à gauche soit un intervalle. Imposer que ces filtres soient des intervalles fermés équivaut à la condition artinienne, c'est pourquoi on s'est permis d'appeler ces anneaux "quasi-artiniens à gauche".

§ 1. LA CONDITION QUASI-ARTINIENNE.

Soit L un treillis modulaire et complet ; son plus petit (resp. plus grand) élément est noté o (resp. M). L est dit quasi-artinien (Q.A.) quand pour toute suite décroissante (X_n) d'éléments de L et pour tout $Y \supset \cap X_n$, il existe n_o tel que $Y \geq X_{n_o}$. Un élément de L comparable à tous les autres sera dit comparable. Par exemple L est Q.A. s'il est artinien, ou bien s'il est totalement ordonné. Un filtre de L est une partie F de L stable par passage à la borne inférieure d'une famille finie d'éléments et par passage à des éléments plus grands.

LEMME 1. Si L est Q.A. toute suite décroissante où figure un élément non essentiel est stationnaire.

Soient (X_n) une suite décroissante, $X = \cap X_n$ et X_{n_o} un élément non essentiel : il existe $T \in L$, $T \neq o$ tel que $X_{n_o} \cap T = o$; alors $X \subset X \cup T$; la condition Q.A. donne X_{n_1} tel que $X_{n_1} \subseteq X \cup T$ et on peut choisir $n_1 \geqslant n_o$. On en déduit, par modularité, $X_{n_1} = X_{n_1} \cap (X \cup T) = X \cup (X_{n_1} \cap T) = X \cup o = X$.

LEMME 2. Si L est Q.A., pour toute suite strictement décroissante (X_n), $X = \bigcap X_n$ est un élément comparable de L.

Supposons qu'il existe $T \in L$ tel que X et T ne soient pas comparables entre eux. $T \supset X \cap T$ donc il existe n_o avec $X_{n_o} \cap T \subseteq T$; puisque $X \supset X \cap T$ le lemme 1 montre que $[X \cap T, T]$ est artinien, d'où n_1 tel que $X_{n_1} \cap T = X \cap T$. Puisque $T \supset X \cap T$ et que le treillis $[X \cap T, M]$ est Q.A., le lemme 1 montre que (X_n) est stationnaire, contrairement à l'hypothèse faite.

La condition Q.A. admet d'autres formulations qui montrent qu'elle n'est pas liée à l'aspect dénombrable de la définition donnée ci-dessus.

THEOREME 1. Pour un treillis modulaire et complet L les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° L est Q.A. ;

2° Pour toute famille filtrante décroissante (X_i) d'éléments de L et tout $Y \supset \bigcap X_i$ il existe i_o tel que $Y \supseteq X_{i_o}$;

3° Tout filtre de L est un intervalle.

1° $\Longrightarrow$ 3°. Soit F un filtre sans plus petit élément (si F a un plus petit élément, c'est fini) ; F contient donc des suites strictement décroissantes (X_n) ; deux cas se présentent :

1) pour l'une d'elles, $X = \bigcap X_n \notin F$; d'après L.2 X est comparable, en utilisant la condition Q.A. on vérifie que $F =]X, M]$.

2) pour toutes ces suites, $X = \bigcap X_n \in F$; alors $E = \{Y \in F | Y \text{ comparable}\} \neq \emptyset$ et $F = \{Z | \exists\, Y \in E,\ Y \subseteq Z\} =]I, M]$ où $I = \bigcap_{Y \in E} Y$; pour le voir on utilise le fait que I est encore comparable.

3° $\Longrightarrow$ 2°. Soit (X_i) une famille filtrante décroissante ; $F = \{Z \in L | \exists\, i, X_i \subseteq Z\}$ est un filtre, donc $F = |I, M]$ où $I \in L$; nécessairement $I \subseteq \bigcap X_i$. Donc $Y \supset \bigcap X_i \Longrightarrow Y \supset I \Longrightarrow Y \in F$ ce qui est précisément la condition 2°.

Un A-module M est dit Q.A. quand le treillis de ses sous-modules est Q.A. M est dit <u>semi-artinien</u> quand tous ses quotients non nuls ont un socle non nul.

LEMME 3. Soit M un module quasi-artinien; alors :

1° Tout sous-module et tout quotient de M est Q.A. ;

2° M est de dimension finie, au sens de Goldie ;

3° Si M est une somme directe, M est artinien ;

4° Si X et $Y \subset M$ ne sont pas emboités, $(X+Y)/X \cap Y$ est artinien ;

5° Si M est semi-artinien, il est artinien ;

6° M contient un sous-module artinien maximum, noté $C_1(M)$;

7° Si le socle de M/X est nul, X est comparable.

1° est évident. Pour 2°, si M contenait $\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} X_n$ avec $X_n \neq o$ pour tout n, en posant $Y_k = \overset{\infty}{\underset{k}{\oplus}} X_n$ on aurait $X_1 \supset \overset{\infty}{\underset{1}{\bigcap}} Y_k$ sans avoir $X_1 \supset Y_k$ pour un certain k ce qui contredirait la condition Q.A. . 3° découle de L.1. et 4° découle de 3° puisque $(X+Y)/X \cap Y \approx (X/X \cap Y) \oplus (Y/X \cap Y)$.

Pour démontrer 5° supposons avoir une suite (X_n) décroissante de sous-modules de M , le socle de $M/\cap X_n$ est non nul de longueur finie donc il existe n_o tel que $X_{n_o} = \cap X_n$, grâce à la condition Q.A. Pour 6° on utilise 5° et la stabilité par épimorphismes et sommes directes de la classe des A-modules semi-artiniens.

Pour 7° remarquer que si Y n'est pas comparable à X , $(X+Y)/X \cap Y$ étant artinien, le socle de M/X n'est pas nul.

§ 2. ANNEAUX UNITAIRES QUASI-ARTINIENS NON ARTINIENS, A GAUCHE.

Un tel anneau A sera dit Q.A' ; son radical de Jacobson est noté R .

THEOREME 2. Un anneau Q.A' est local. Il contient un plus grand idéal à gauche artinien qui est comparable à gauche, bilatère, de carré nul.

Soit $C = C_1({}_AA)$ (L. 3, 6°); C est bilatère comparable (L.3, 7°) . Si $c_1c_2 \neq o$ avec c_1 et $c_2 \in C$, c'est que $o \cdot . c_2 \subset C$; $Ac_2 \approx A/o \cdot . c_2$ est artinien ainsi que $o \cdot . c_2$ ainsi ${}_AA$ serait artinien contrairement à l'hypothèse.

On a $C \subseteq R$ puisque C est comparable. Pour montrer que A est local on peut donc supposer $C = o$. Soit $Aa \neq A$ avec a non nilpotent. Puisque socle $Aa = o$, $o \cdot . a$ est comparable (L.3, 7°) et $o \cdot . a \subset Aa^n$ pour tout n ; la suite décroît strictement (en effet $\frac{A}{Aa} \approx \frac{\frac{A}{a}}{Aa^2} \approx \ldots$) ; Aa^n est comparable (L.2.) ; l'identité $A = A(1-a) + Aa^n$ exige $\cap Aa^n \subset A(1-a)$; par Q.A. il existe n_o tel que $Aa^{n_o} \subseteq A(1-a)$, d'où $A(1-a) = A$. Ainsi tout idéal à gauche propre de A est dans R .

Exemple 1 : Soient p un entier premier et G la p-composante du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; posons $A = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} G \times G \times G$ en tant que groupe additif ; A muni du produit

$(h, g_1, g_2)(h', g'_1, g'_2) = (h \circ h' , hg'_1 + h'g_1, hg'_2 + h'g_2)$ devient un anneau commutatif Q.A' ; les idéaux de A sont : $A \supset pA \supset p^2A \ldots \supset \bigcap^{\infty} p^nA = 0 \times G \times G$ et les sous-groupes de $0 \times G \times G$, qui est un groupe artinien. Ici, $C_1(A) = 0 \times G \times G$.

LEMME 4. Soit A un anneau unitaire.
1° Si I est un idéal à gauche idempotent contenu dans R , I annule tout A-module semi-artinien à gauche.
2° Si T est une classe de A-modules à gauche stable par extensions et épimorphismes alors $G = \{a \in A | A/Aa \in T\}$ est un semi-groupe multiplicatif.

1° Soit ${}_A M$ semi-artinien; $J = IA$ est encore idempotent et $J \subseteq R$. Posons $M_o = 0 \mathbin{\dot{\cdot}_M} J$; si $M_o \neq M$, M/M_o contient un module simple S et $JS = S$ ce qui contredit $RS = o$. Donc $M_o = M$ et $I.M = IAM = o$.

2° Pour a_1 et $a_2 \in G$, $A/(Aa_1 + o \mathbin{\dot{\cdot}} a_2) \in T$ donc aussi Aa_2/Aa_1a_2 et finalement $A/Aa_1a_2 \in T$.

LEMME 5. Tout idéal bilatère non nul propre idempotent d'un anneau Q.A' est complétement premier.

D'abord I est comparable ; sinon (L.3, 4°) il existerait $J \subset I$ tel que I/J soit artinien et on aurait (L.4, 1°) $I^2 \subseteq J$ contredisant $I^2 = I$. Par suite $a \notin I \iff Aa \supset I$. La classe T des modules annulés par I est stable par extensions et épimorphismes donc $\{a \in A | A/Aa \in T\}$ est stable par multiplication (L.4,2°) mais $A/Aa \in T \iff I \subseteq Aa \iff I \subset Aa$, puisque $I = Aa$ impliquerait $RI \subset I$ et $I^2 \subset I$. Ainsi I est bien complétement premier.

Indice à gauche d'un idéal (à gauche ou à droite) I d'un anneau A : c'est le plus petit ordinal γ tel que $\alpha \geqslant \gamma \implies I^\alpha = I^\gamma$, où les puissances ordinales à gauche de I sont définies par $I^{\beta+1} = I.I^\beta$ et $I^\ell = \bigcap_{\beta<\ell} I^\beta$ si ℓ est limite.

THEOREME 3. Dans un anneau Q.A.', l'indice à gauche du radical de Jacobson est soit 1 soit un ordinal infini.

En effet si γ est fini, R^γ est idempotent, non nul puisque ${}_A A$ n'est pas artinien, R^γ est donc premier (L.5) ce qui exige $\gamma = 1$.

Exemple 2 : Soient K le corps premier de caractéristique p, $G = (Q/\mathbb{Z})_p$ $A = K[G]$ l'algèbre de groupe ; le treillis des idéaux de A est totalement ordonné et $R = R^2$.

LEMME 6. Soit I un idéal bilatère d'un anneau unitaire A. L'ensemble d'idéaux à gauche $]I,A]$ est topologisant ([3] p. 411) si et seulement si I est $\cap$-irréductible à gauche.

Supposons I $\cap$-irréductible, $I_1 \supset I$ et $a \in A$ alors $I_1 \cdot. a \supset I$; sinon on aurait $a \notin I$ et $I_1 \cdot. a = I$ d'où $I = (Aa + I) \cap I_1$, contradiction. La réciproque est évidente.

LEMME 7. Soit I un idéal à gauche d'un anneau A :

1° $[I, {}_AA]$ est topologisant $\Longleftrightarrow$ I est bilatère ;

2° $[I, {}_AA]$ est topologisant et idempotent $\Longleftrightarrow$ I est bilatère idempotent.

THEOREME 4. Soit E un ensemble d'idéaux à gauche d'un anneau quasi-artinien à gauche ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E est un filtre topologisant et idempotent ;

2° $E = [I, {}_AA]$ avec I bilatère idempotent, ou bien
$E =]J, {}_AA]$ avec J idéal bilatère complétement premier.

1° $\Longrightarrow$ 2° E est un intervalle d'après T.1. . Si $E = [I, A]$ c'est fini (L.7. 2°). Si $E =]J, A]$, ${}_AA$ est Q.A'. et J est comparable à gauche. J est bilatère, sinon il existerait $a \in A$ avec $Ja \supset J$ c'est-à-dire $Ja \in E$, d'où $I_1 = Ja \cdot. a \in E$ et $I_1 a = Ja$; prenant $i_1 \in I_1 \setminus J$ on aurait $i_1 a = ja$ $(j \in J)$ d'où $i_1 - j \in o \cdot. a \subset J$ puisque $Ja \neq o$, finalement $i_1 \in J$, contradiction. En prenant pour T la sous-catégorie localisante associée à E (c'est-à-dire $M \in T \Longleftrightarrow o \cdot. m \supset J \ \forall m \in M$) on voit (L.4, 2°) que J est complétement premier.

2° $\Longrightarrow$ 1° Si $E = [I, A]$ c'est L.7., 2° . Si $E =]J, A]$, E est topologisant (L.6.) parce que J est $\cap$-irréductible (A/J est intègre coïrréductible). Il reste à montrer que E est idempotent : soit I_1 un idéal à gauche tel que, pour tout $a \in A$, il existe $I' \supset J$ avec $I_1 \cdot. i'a \supset J$ pour tout $i' \in I'$ il s'agit de montrer ([3] p. 412) que $I_1 \supset J$; sinon on aurait $I_1 \subseteq J$ puisque J est comparable ; prenant $a = 1$, on aurait $(I_1 \cdot. i')\, i' \subseteq J$, on obtient une contradiction pour $i' \in I' \setminus J$ puisque J est complétement premier.

COROLLAIRE. Si A est Q.A.' l'ensemble des sous-catégories localisantes de la catégorie des A-modules à gauche est totalement ordonné.
En effet les idéaux complètement premiers sont comparables à gauche et on utilise L.5.

§ 3. QUELQUES EQUIVALENCES POUR LES ANNEAUX Q.A.

Le caractère intègre.

THEOREME 5. Si A est un anneau Q.A', les propriétés suivantes sont équivalentes : 1° L'idéal singulier à gauche de A est nul ; 2° A est réduit ; 3° A est intègre.

1° ⟹ 3° Soit C le plus grand idéal artinien de ${}_A A$, $C^2 = o$ et C est essentiel dans ${}_A A$ donc $C = o$ et ${}_A A$ est coirréductible. 3° ⟹ 2° est évident. 2° ⟹ 1° puisque les idéaux singuliers à gauche et à droite d'un anneau réduit sont nuls ([8]) .

COROLLAIRE. Un anneau Q.A' admet un plus petit idéal complètement premier.

Le caractère semi-héréditaire.

THEOREME 6. Pour un anneau unitaire A les propriétés suivantes sont équivalentes : 1° A est Q.A' et semi-héréditaire à gauche ;

2° A est intègre et le treillis de ses idéaux à gauche est totalement ordonné.

1° ⟹ 2° Pour $a \in A$, $o^{\cdot}.a$ est facteur direct, A étant local on a $o^{\cdot}.a = o$. Supposons Aa et Ab non emboités, alors on vérifie facilement que $\frac{Aa + Ab}{Ra + Rb} \approx \frac{Aa}{Ra} \oplus \frac{Ab}{Rb}$, module semi-simple de longueur 2 . Par ailleurs $Aa + Ab$ est projectif, donc libre, donc monogène, finalement $Aa + Ab = Ac$ est un A-module local : il ne peut avoir de quotient semi-simple de longueur 2 . On a donc prouvé que deux idéaux monogènes sont toujours emboités, d'où 2° .

2° ⟹ 1° est évident.

Exemple 3 ([6]) : Soient K un corps, $\mathfrak{B}$ la famille de parties $I \subset [o, +\infty[\subset \mathbb{R}$ qui sont bien ordonnées, A l'ensemble des "séries formelles" $\sum_{i \in I} k_i x^i$ où $k_i \in K$, $I \in \mathfrak{B}$; avec les opérations évidentes A est un anneau QA', héréditaire à gauche, non noethérien.

Le caractère héréditaire.

LEMME 8. Si A est un anneau local principal à gauche, A admet pour uniques idéaux à gauche les puissances ordinales à gauche de R.

${}_A A$ étant noethérien il existe un ordinal γ tel que $R^\gamma = o$. Pour $a \neq o$, soit α le plus petit ordinal tel que $a \notin R^\alpha$; α n'est pas limite ; $\alpha = \beta + 1$ et $Aa \subseteq R^\beta = Ar$; $a = ur$ où $u \notin R$ donc $Aa = R^\beta$.

THEOREME 7. Pour un anneau unitaire A les propriétés suivantes sont équivalentes : 1° A est Q.A' et héréditaire à gauche ;

2° A est local, intègre et principal à gauche.

1° $\Longrightarrow$ 2° A étant local, $o^{\cdot} . a = o$ comme dans T.6. . Tout idéal à gauche est projectif, donc libre, donc monogène. 2° $\Longrightarrow$ 1° résulte de L.8. .

Pour des exemples de tels anneaux où l'indice à gauche de R soit un ordinal quelconque, voir JATEGAONKAR, A.V. (J. Algebra 12, 1969).

THEOREME 8. Pour un anneau Q.A. les propriétés 1° A est parfait à gauche ; 2° A est parfait à droite ; 3° A est artinien à gauche ; sont équivalentes.

1° $\Longrightarrow$ 3° parce que R/R^2 est de type fini (L. 11 de [7]) ; 3° $\Longrightarrow$ 2° (T.P. de [1]) ; 2° $\Longrightarrow$ 1° ${}_A A$ est semi-artinien donc artinien (L.3, 5°).

Le caractère noethérien.

THEOREME 9. Un anneau Q.A. est noethérien à gauche si et seulement si $R^\gamma = o$ (γ indice à gauche de R). Il est alors complètement primaire à gauche [5]).

Supposons $R^\gamma = o$; soit α le plus petit ordinal tel que A/R^α ne soit pas noethérien. Nécessairement α est limite. Pour $I \supset R^\alpha$, il existe $\beta < \alpha$ tel que $I \subseteq R^\beta$ et A/I est noethérien. Ainsi α n'existe pas et ${}_A A$ est noethérien. La réciproque est évidente.

Si $ab = o$, $a \neq o$, il existe n tel que $o^{\cdot}.b \cap Ab^n = o$; Ab^n est artinien donc (T.2.) b est nilpotent.

THEOREME 10. Soit A un anneau unitaire intègre avec $R \neq o$ et tel que, pour tout idéal à gauche $I \neq o$, A/I soit artinien et I contienne un idéal bilatère non nul. 1° A est noethérien à gauche et $\bigcap\limits_1^\infty R^n = o$.
2° Si A est complet pour la topologie R-adique alors A est Q.A'.

1° est immédiat.

2° Soit I un idéal à gauche $\neq o$, il existe n tel que $I+R^n = I+R^{n+1} = \ldots$
$\ldots = J$ puisque A/I est artinien ; par suite $I+RJ = J$ et $R(J/I) = J/I$; le lemme de Nakayama montre que $I = J$ et $R^n \subseteq I$. Notamment tout idéal à gauche est fermé pour la topologie R-adique.

Soit (I_n) une suite strictement décroissante d'idéaux à gauche ; nécessairement $\cap I_n = o$. Supposons qu'il existe s tel que $I_n \not\subseteq R^s$, $\forall n$. Puisque A/R^s est artinien, la suite $(I_n+R^s)_n$ est stationnaire donc il existe $x_s \in (I_n+R^s) \setminus R^s$ pour tout n . Supposons avoir déjà construit x_t tel que $x_t - x_s \in R^s$ et $x_t \in (I_n+R^t) \setminus R^t$ pour tout n . $I_n \cap (x_t+R^t)$ n'est pas vide, donc $[(I_n+R^{t+1})/R^{t+1}] \cap (x_t+R^t/R^{t+1}) \neq \emptyset$ dans A/R^{t+1} ; cet anneau étant artinien il existe $\bar{x}_{t+1} \in (I_n+R^{t+1})/R^{t+1}$ et $\in \bar{x}_t+R^t/R^{t+1}$, pour tout entier n . Ainsi $x_{t+1}-x_t \in R^t$ et $x_{t+1} \in (I_n+R^{t+1}) \setminus R^{t+1}$, $\forall n$.

On construit ainsi une suite $(x_m)_{m \geqslant s}$ qui est de Cauchy, elle converge donc vers un élément x . Puisque $x_m - x_s \in R^s$ et que R^s est fermé on a $x-x_s \in R^s$ donc $x \notin R^s$. D'autre part $x_{m+k}-x_m \in R^m$ pour tout k , donc $x \in I_n+R^{m+1}$ pour tout n et pour tout $m \geqslant s-1$, donc $x \in I_n$ pour tout n (I_n étant fermé), donc $x \in \bigcap\limits_1^\infty I_n = o$ ce qui contredit $x \notin R^s$. Ainsi on a démontré que pour tout entier s il existe n tel que $I_n \subseteq R^s$.

Pour terminer montrons que A est Q.A' : si $I \supset \bigcap\limits_1^\infty I_n$ (=o) , il existe

n_1 tel que $R^{n_1} \subseteq I$ (début de 2°) ; ensuite il existe n_2 tel que $I_{n_2} \subseteq R^{n_1}$ donc $I_{n_2} \subseteq I$ ainsi la condition Q.A. est satisfaite.

Cette démonstration est inspirée du théorème 13, § 5, Ch. 8 de [10]).

§ 4. DEVIATION ORDINALE, ORDINAUX INDECOMPOSABLES. APPLICATIONS.

Définitions ([9] et [4]) : Etant donné un ensemble ordonné E non discret on définit une suite ordinale (D_α) de parties de $D = \{(e,e') \in E^2 | e \leqslant e'\}$ par $D_o = \{(e,e') \in D | [e,e'] \text{ artinien}\}$;

$$D_\alpha = \{(e,e') \in D | \forall (e \leqslant \dots e_{n+1} \leqslant e') \ \exists n_o \text{ avec } n \geqslant n_o$$
$$\implies [e_{n+1}, e_n] \in \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta\} .$$

On dit que E a une déviation définie s'il existe α avec $D = D_\alpha$. Le plus petit de ces α est appelé déviation de E (dév E).

LEMME 9. Si un ensemble ordonné E est noethérien, dév E est définie.

Raisonnons par l'absurde et supposons $D_\alpha = D_{\alpha+1} \neq D$. Soit $(e_o,e'_o) \in D$ et $\notin D_\alpha$ tel que e_o soit maximal pour cette propriété. Alors étant donné $e_o \leqslant \dots e_{n+1} \leqslant e_n \leqslant \dots \leqslant e'_o$, il existe n_o tel que $n \geqslant n_o \implies [e_{n+1},e_n] \in D_\alpha$, à cause de la maximalité de e_o, donc $(e_o,e'_o) \in D_{\alpha+1} = D_\alpha$, contradiction.

Ainsi pour tout ordinal λ, dév$[o,\lambda]^o$ existe où $[o,\lambda]^o$ désigne $[o,\lambda]$ muni de son ordre opposé. Ord B désignera l'ordinal associé à un ensemble bien ordonné B.

PROPOSITION 1 : Les ordinaux $\omega(k)$ définis par 1) $\omega(o) = 1$; 2) $\omega(\alpha+1) = \omega(\alpha) + \omega(\alpha) + \dots$; 3) $\omega(\beta) = \text{Ord} \bigcup_{\alpha<\beta} [o,\omega(\alpha)]$ si β est limite ; vérifient les conditions : a) $\lambda < \omega(k) \implies$ dév$[o,\lambda]^o < k$, b) dév$[o,\omega(k)]^o = k$.

$\omega(1) = \mathrm{Ord}\, \mathbb{N}$ donc l'énoncé est vrai pour $k = 1$; supposons le démontré pour $k' < k$. Si $k = k'+1$, 2) montre que $\text{dév}[o, \omega(k)]^o \geqslant k$; pour $\alpha < \omega(k)$, il existe un entier n tel que $\alpha < n\omega(k')$ donc $\text{dév}[o,\alpha]^o \leqslant k' < k$ et $\text{dév}[o, \omega(k)]^o = k$. Si k est limite, 3) montre que $\text{dév}[o, \omega(k)]^o \geqslant k$; pour $\alpha < \omega(k)$, il existe $k' < k$ tel que $\alpha < \omega(k')$ d'où a) et b) pour $\omega(k)$.

Un ordinal α est dit <u>indécomposable</u> [2] quand il n'existe aucun couple α', α'' tel que $\alpha' < \alpha$, $\alpha'' < \alpha$ et $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

<u>PROPOSITION 2</u> : Un ordinal est indécomposable si et seulement si il est de la forme $\omega(k)$.

Il est clair que tout $\omega(k)$ est indécomposable. Maintenant si i est indécomposable soit k' le plus petit ordinal tel que $i \leqslant \omega(k')$ et supposons $i \neq \omega(k')$; on voit que k' ne peut être limite, $k' = k + 1$ et $\omega(k) < i < \omega(k+1)$; d'où pour un entier n , $n\omega(k) < i < (n+1)\omega(k)$ (inégalités strictes puisque i est indécomposable) ; i étant indécomposable, $n\omega(k) + i = i$ d'où $2n\omega(k) + i = i$ ce qui contredit la définition de n .

<u>PROPOSITION 3</u> : Tout ordinal α s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha = n_1\omega(k_1) + \dots + n_q\omega(k_q)$ où $k_1 > k_2 > \dots > k_q$ (k_i ordinal) et $n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N} \setminus \{o\}$.

Si α est indécomposable $\alpha = \omega(k_1)$ et c'est fini (P.2.). Si α est décomposable on a, d'après la démonstration de P.2., $n_1\omega(k_1) \leqslant \alpha < (n_1+1)\omega(k_1)$, c'est-à-dire $\alpha = n_1\omega(k_1) + \alpha_1$; $k_1 = \text{dév}[o,\alpha]^o$, n_1 est unique ainsi que α_1 , de plus $\text{dév}[o,\alpha_1]^o < k_1$; on recommence sur α_1 , ce qui vient d'être fait pour α ; le processus s'arrête parce que les k_n décroissent strictement. L'unicité se vérifie aisément.

<u>LEMME 10.</u> Etant donné un idéal à gauche (ou à droite) I d'un anneau A quelconque les puissances ordinales à gauche de I vérifient $I^\alpha . I^\beta \subseteq I^{\beta+\alpha}$ pour tout couple d'ordinaux (α,β).

La propriété est vraie pour tout β quand $\alpha < \omega(1)$, d'après la définition des puissances à gauche. Supposons la vraie pour tout β quand $\alpha < \delta$.

Si $\delta = \delta'+1$, $I^\delta . I^\beta = I . I^{\delta'} . I^\beta \subseteq I . I^{\beta+\delta'} = I^{\beta+\delta'+1} = I^{\beta+\delta}$.

Si δ est limite, $I^\delta . I^\beta = (\bigcap_{1<\alpha<\delta} I^\alpha) . I^\beta \subseteq \bigcap_{1<\alpha<\delta} I^{\beta+\alpha}$; on démontre facilement que $\beta < \lambda < \beta+\delta$ implique $\lambda = \beta+\alpha$ avec $1 < \alpha < \delta$, donc

$$\bigcap_{1<\alpha<\delta} I^{\beta+\alpha} \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha<\beta+\delta} I^\lambda = I^{\beta+\delta} .$$

<u>Remarque</u> : Dans l'exemple 1, $(R^{\omega(1)})^2 = o$ et $R^{2\omega(1)} = R^{\omega(1)}$ puisque $R.(O\times G\times G) = O \times G \times G = R^{\omega(1)}$ ce qui est clair puisque $O \times G \times G$ est dépourvu de sous-idéaux maximaux. Ainsi l'inclusion peut être stricte.

La déviation d'un A-module étant celle de l'ensemble de ses sous-modules on a le

<u>THEOREME 11</u> : Soient A un anneau quasi-artinien à gauche unitaire et γ l'indice à gauche de R alors, pour tout ordinal $\alpha \leqslant \gamma$, $\text{dév}_A(A/R^\alpha) = \text{dév}[o,\alpha]^o$.

Puisque $\alpha \leqslant \gamma$, l'application $\beta \in [o,\alpha] \to R^\beta$ est strictement décroissante, donc $\text{dév } A/R^\alpha \geqslant \text{dév}[o,\alpha]^o$. Démontrons l'inégalité opposée par récurrence (elle est vraie pour $\alpha = 1$) en la supposant démontrée pour tout $\alpha' < \alpha$.

Si $\alpha = \alpha'+1$, $\text{dév } A/R^\alpha = \text{dév } A/R^{\alpha'} = \text{dév}[o,\alpha']^o = \text{dév}[o,\alpha]^o$ puisque $R^{\alpha'}/R^\alpha$ est un A/R-module de dimension finie donc artinien.

Si α est limite pour tout ${}_A I \supset R^\alpha$, il existe $\alpha' < \alpha$ tel que $R^{\alpha'} \subseteq I$ donc $\text{dév } A/I \leqslant \text{dév}[o,\alpha']^o$. Deux cas se présentent :

1° Si α est indécomposable, $\alpha = \omega(k)$ alors dév $A/I < k$ donc dév $A/R^{\alpha} \leqslant k =$ dév $[o,\alpha]^{o}$ (P.1.) ;

2° Si α n'est pas indécomposable, il existe un entier $n > 1$ et un ordinal k tels que $(n-1)\omega(k) < \alpha \leqslant n\omega(k)$; L.10 montre que $[R^{(n-1)\omega(k)}]^2 \subseteq R^{\alpha}$ donc (remarquer que d'après T.9, $R^{(n-1)\omega(k)}/R^{\alpha}$ est noethérien) dév $A/R^{\alpha} =$ dév $A/R^{(n-1)\omega(k)} =$ dév $[o,(n-1)\omega(k)]^{o} = k =$ dév $[o,\alpha]^{o}$.

COROLLAIRE 1. Dans un anneau QA' noethérien à gauche les seuls idéaux premiers (donc complètement premiers, T.9) sont les $R^{\omega(k)}$ où $R \in [o,$ dév $_{A}A]$.

Soit P un idéal premier, socle $_{A}(A/P) = o$ (T.2) donc (L.3,7°) P est comparable à gauche ; soit α le plus petit ordinal tel que $P \supseteq R^{\alpha}$, nécessairement α est limite (sinon L.10 montre que socle $A/P \neq o$) et la condition Q.A. exige $P = R^{\alpha}$. (T.11) et T.10 de [4] et P.1 montrent que α est de la forme $\omega(k)$ avec $k \leqslant$ dév $_{A}A$. Réciproquement la condition Q.A. et T.11 montrent que $A/R^{\omega(k)}$ est intègre.

COROLLAIRE 2. Un anneau Q.A' noethérien à gauche est intègre si et seulement si l'indice à gauche de son radical de Jacobson est indécomposable.

COROLLAIRE 3. Si A est un anneau Q.A' noethérien à gauche l'application $E \to$ Ass E qui à un type d'injectif indécomposable fait correspondre son idéal premier associé, est injective.

Il suffit de supposer A Q.A! et de montrer que $A/$Ass $E \subseteq E$. C'est évident si Ass $E = R$. Si Ass $E = R^{\omega(k)}$ avec $k \geqslant 1$ soit $e \in E$, $e \neq o$ tel que $R^{\omega(k)}.e = o$ alors $o^{\cdot}.e = R^{\omega(k)}$ parce que $o^{\cdot}.e$ est comparable (socle $Ae = o$) donc bilatère.

Dans [5] L. LESIEUR a posé la question : le coeur d'un anneau A noethérien complètement primaire isotypique (le tout à gauche) est-il égal à $O^{\cdot}D$, où D est le plus petit idéal complètement premier de A ? Pour un anneau local principal à gauche avec $\gamma = \omega(2) + \omega(1) + \omega(o)$, $0.{}^{\bullet}D = D = R^{\omega(2)}$ tandis que le coeur de ${}_AA$ est $R^{\omega(2)+\omega(1)}$; la réponse est donc négative. (Supposons $Da = o$, si $o{}^{\bullet}.\, a = D$ on a $C_1(Aa) = o$ ce qui est impossible puisque socle ${}_AA = R^{\omega(2)+\omega(1)} \neq o$, donc $o{}^{\bullet}.\, a \supset D$ donc dév $Aa < 2$ donc $a \in D$; on a bien $D^2 = o$, donc $0.{}^{\bullet}D = D$).

§ 4. SOUS-CATEGORIES LOCALISANTES C_α.

Définition des C_α : Soient A un anneau quelconque, mod A la catégorie des A-modules à gauche ; à tout ordinal $\alpha \geqslant 1$ on associe la classe F_α des A-modules à gauche dont tous les sous-modules non nuls ou bien sont de déviation $\geqslant \alpha$ ou bien n'ont pas de déviation. On vérifie que F_α est stable par produit direct, inclusion, extension et passage à l'enveloppe injective. On pose $C_\alpha = \{X \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(X,Y) = o \quad \forall Y \in F_\alpha\}$; c'est donc une sous-catégorie localisante et $X \in C_\alpha$ équivaut à la condition : tout quotient $\neq o$ de X contient un sous-module $\neq o$ de déviation $< \alpha$. On posera $C_o = \{o\}$. Par exemple C_1 est la classe des A-modules semi-artiniens.

LEMME 11. Pour un module M quasi-artinien les conditions 1° $M \in C_\alpha$; 2° dév $M < \alpha$; sont équivalentes.

2° $\Longrightarrow$ 1° évidemment.

1° $\Longrightarrow$ 2° : soit (X_n) une suite strictement décroissante de sous-modules de M et posons $X = \bigcap X_n$; puisque $M \in C_\alpha$ il existe $\bar{X} \supset X$ tel que dév $(\bar{X}/X) < \alpha$; la condition Q.A. montre qu'il existe n_o tel que $n \geqslant n_o \Longrightarrow X_n \subseteq \bar{X}$, donc dév $X < \alpha$.

THEOREME 12. Soit A un anneau Q.A! , $C_\alpha({}_AA) \neq A \Longrightarrow C_\alpha(A)$ est un idéal bilatère comparable de carré nul.

Cet énoncé prolonge la seconde partie de T.2. et se démontre de manière semblable ; L.11 montre en effet que $C_\alpha({}_A A)$ est le plus grand idéal à gauche de A qui soit de déviation $< \alpha$.

THEOREME 13. Si A est un anneau Q.A' noethérien à gauche, les seules sous-catégories localisantes de mod A sont les C_α où $\alpha \in [o, \text{dév}_A A+1]$; de plus les C_α sont toutes distinctes.

Soit $T \subset$ mod A , T localisante. Le filtre associé est $E =]I,A]$ avec I complètement premier (T.4.), en effet le cas $[I,A]$ est exclu puisque un anneau local noethérien à gauche ne peut contenir d'idéaux idempotents non triviaux. Alors $J \in E \Longleftrightarrow$ dév $A/J <$ dév $A/I = \alpha$ (I est comparable) $\Longleftrightarrow A/J \in C_\alpha$ (L.11). D'après C.1 de T.11, $I = R^{\omega(\alpha)}$, donc les C_α sont distinctes, les $R^{\omega(\alpha)}$ l'étant.

LEMME 12. Soit I un idéal à gauche T-nilpotent à droite d'un anneau A unitaire. Alors $A/I \in C_\alpha \Longleftrightarrow C_\alpha =$ mod A .

L'implication $\Longleftarrow$ est évidente ; montrons $\Longrightarrow$: tout module ${}_A M \neq o$ contient un sous-module $N \neq o$ tel que $IN = o$ à cause de la T-nilpotence à droite de I ; donc M contient $N' \neq o$ tel que dév $N' < \alpha$.

THEOREME 14. Soit A un anneau Q.A! , I son plus petit idéal complètement premier (Cor. de T.5.). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° dév ${}_A A = k$ où k est un ordinal ;

2° dév ${}_A(A/I) = k$ et I est nilpotent.

2° $\Longrightarrow$ 1° résulte des lemmes 11 et 12.

1° $\Longrightarrow$ 2° le filtre $E = \{X \subseteq {}_A A \mid \text{dév } A/X < k\}$ est de la forme $]J,A]$ où J est complètement premier (T.4. et L.5) et comparable. Nous allons d'abord montrer que J est T-nilpotent à droite. Nécessairement $J.C_1(A) = o$, en effet si $jc \neq o$ ($j \in J$), $c \in C_1(A)$) c'est que $o^{\cdot}.c \subset J$ d'où dév $A/o^{\cdot}.c = k$ mais dév Ac = o ce qui contredit $k \neq o$ ($_A A$ est supposé non artinien). On peut donc supposer $C_1(A) = o$ et utiliser le fait que dans ce cas les idéaux annulateurs à gauche sont comparables (L.3, 7°). S'il existait une suite $(j_n) \subseteq J$ telle que $j_n j_{n-1} \dots j_1 \neq o$ pour tout n c'est-à-dire $o \cdot\!\!. \, j_{n-1} \dots j_1 \subset Aj_n$ d'où $Aj_{n-1} \dots j_1 / Aj_n j_{n-1} \dots j_1 \approx A/Aj_n$. Mais dév $A/Aj_n = k$; en effet si $E =]J,A]$ c'est évident puisque $j_n \in J$, si $E = [J,A]$ J étant idempotent ne peut être principal donc $Aj_n \subset J$ et dév $A/Aj_n = k$. On aboutit ainsi à une contradiction avec $\text{dév}_A A = k$. Ainsi J est T-nilpotent à droite, c'est donc le plus petit idéal complètement premier de A.

Supposons que J ne soit pas nilpotent, la T-nilpotence à droite implique $o \cdot\!\!._A J \subset 0 \cdot\!\!._A J^2 \subset \dots$ donc $J \supset J^2 \supset J^3 \dots$ est strictement décroissante ; par suite il existe un entier n_o tel que $n \geqslant n_o \Longrightarrow \text{dév}[J^n/J^{n+1}) < k$, notamment $\text{dév}(J^{n_o}/J^{n_o+2}) < k$, donc, par construction de J, $J^{n_o+2} \cdot\!\!. \, i \supseteq J$ $\forall i \in J^{n_o}$ ou encore $J.J^{n_o} = J^{n_o+2}$; l'idéal J^{n_o+1} est donc idempotent, donc complètement premier ce qui contredit le fait que le plus petit idéal complètement premier de A est J. Conclusion, J est bien nilpotent.

Le théorème précédent permet de voir que dans l'exemple 2, A n'a pas de déviation (sinon R étant nil on aurait dév A = dév $A/R = o$, ce qui est impossible).

<u>Remarque</u> : il est possible de donner un mode de construction d'anneaux QA' de déviation arbitraire entière qui notamment ne soient pas noethériens et pour lesquels le théorème 13 demeure valable.

Cet exposé explicite le contenu de deux notes aux comptes-rendus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS, H. Trans. Am. Math. Soc. 95, 1960, pp. 466-488.

[2] BOURBAKI, N. Théorie des Ensembles, Ch. III.

[3] GABRIEL, P. Bull. Soc. Math. Fr., 90, 1962, pp. 323-448.

[4] KRAUSE, G. Math. Z. 118, 1970, pp. 207-214.

[5] LESIEUR, L. J. für Matematik, 241, 1970, pp. 86-106.

[6] LEVY, L.S. Pacific J. Math. 18, N° 1, 1966, pp. 149-153.

[7] OSOFSKY, B.L. J. Algebra, 4, 1966, pp. 373-387.

[8] RENAULT, G. J. Math. pures et appl. 46, 1967, pp. 203-214.

[9] RENTSCHLER, R. et GABRIEL, P. Comptes rendus 265 Ser. A, 1967, p. 712.

[10] ZARISKI et SAMUEL, Commutative Algebra, vol. II.

-:-:-:-:-:-:-:-

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 17 du 19.5.71

DECOMPOSITION G-PRIMAIRE ET DECOMPOSITION TERTIAIRE POUR LES ANNEAUX SEMI-ARTINIENS.

par ION D. ION

-:-:-:-:-:-:-

Dans cet exposé nous allons établir que dans la catégorie des modules sur un anneau semi-artinien on a une théorie de décomposition primaire au sens de Goldman [2] et que cette théorie coïncide avec la décomposition tertiaire donnée par C. NASTASESCLU [6] dans le même cadre.

1. DEFINITIONS. RAPPELS.

Dans tout ce qui suit, A sera un anneau unitaire. Soit ${}_A C$ la catégorie des modules (à gauche) sur A. Un foncteur covariant $\tau : {}_A C \to {}_A C$ est dit <u>ker-foncteur</u> si :

(1) $\tau(M)$ est un sous-module de M pour tout A-module M.

(2) si $M' \xrightarrow{f} M$ est un morphisme de ${}_A C$, alors $f(\tau(M')) \subseteq \tau(M)$ et $\tau(f)$ est égal à la restriction de f à M.

(3) si M' est un sous-module de M, alors $\tau(M') = M' \cap \tau(M)$.

On dit que τ est un ker-foncteur <u>idempotent</u> si on a aussi :

(4) $\tau(M/\tau M) = 0$ pour tout A-module M.

Si τ et σ sont deux ker-foncteurs, on pose $\tau \leqslant \sigma$ si et seulement si $\tau(M) \subseteq \sigma(M)$ pour tout module M.

Soit Q un A-module. Pour tout A-module M, soit

$$\tau_Q(M) = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_A(M,E(Q))} \mathrm{Ker}\, f$$

où $E(Q)$ est une enveloppe injective de Q. Alors $\tau_Q : {}_A C \to {}_A C$ ainsi défini est un ker-foncteur idempotent. On a $\tau_Q(Q) = 0$ et si σ est un ker-foncteur alors $\sigma \leqslant \tau_Q$ si et seulement si $\sigma(Q) = 0$.

Si $\tau : {}_A C \to {}_A C$ est un ker-foncteur idempotent et Q est égal à la somme directe de tous les A-modules A/I, où I est un idéal à gauche de A tel que $\tau(A/I) = 0$, alors on a $\tau = \tau_Q$.

On dit qu'un module $P \neq 0$ est <u>τ-support</u> si $\tau(P) = 0$ et $\tau(P/X) = P/X$ pour tout sous-module $X \neq 0$ de P.

On dit qu'un ker-foncteur π est <u>premier</u> si on a un π-support P tel que $\pi = \tau_P$. Si S est un A-module simple, alors τ_S est premier parce que S est un τ_S-support. Si A est commutatif et p est un idéal de A alors $\tau_{A/p}$ est premier si et seulement si p est un idéal premier de A [2].

On dit qu'un A-module $Q \neq 0$ est <u>stable</u> si M est une extension essentielle de $\sigma(Q)$ pour tout ker-foncteur idempotent $\sigma > \tau_Q$. Tout module co-irréductible est stable. Un module $Q \neq 0$ est stable si et seulement si on a $\tau_Q = \tau_N$ pour tout sous-module $N \neq 0$ de Q.

On dit qu'un A-module $Q \neq 0$ est <u>G-primaire</u> (primaire au sens de Goldman) si Q est stable et τ_Q est premier. Un module co-irréductible et noethérien est G-primaire. Si A est commutatif et q est un idéal de A alors A/q est un A-module G-primaire si et seulement si q est un idéal primaire de A au sens classique [2].

On dit que A est un anneau <u>semi-artinien</u> (à gauche) si tout A-module (à gauche) $M \neq 0$ contient un sous-module simple. Si A est semi-artinien et I

est un idéal bilatère de A , alors A/I est un anneau semi-artinien.

Si $M \neq 0$ est un A-module, on note par $\mathrm{Ass}(M)$ l'ensemble des éléments maximaux dans

$$\{\mathrm{Ann}\ N | N \subset M \ , \ N \neq 0\} \ .$$

Les éléments de $\mathrm{Ass}(M)$ sont des idéaux premiers de A . Si M est un module sur un anneau semi-artinien, alors $\mathrm{Ass}(M)$ est égal à l'ensemble des idéaux $p = \mathrm{Ann}\ S$, S sous-module simple de M . Dans ce cas, on a $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $M \neq 0$.

2. DECOMPOSITION G-PRIMAIRE POUR LES ANNEAUX SEMI-ARTINIENS.

Dans [5] G. Michler a montré que tout module de type fini G-primaire sur un anneau noethérien à gauche est tertiaire. La réciproque est vraie si et seulement si la correspondance $E \longmapsto \mathrm{Ass}(E)$ induit une bijection entre les types des modules injectifs indécomposables et le spectre premier de A . Alors, le résultat suivant va nous servir à démontrer que les notions de module G-primaire et de module tertiaire coïncident dans le cas des anneaux semi-artiniens.

PROPOSITION 2.1. : *Si A est un anneau semi-artinien, alors l'application $E \longrightarrow \mathrm{Ass}\ E$ induit une bijection α entre les types des modules injectifs indécomposables et le spectre premier de A .*

Démonstration : soit p un idéal premier de A . Alors A/p est un anneau semi-artinien et premier. Soit S un idéal à gauche minimal de A/p . Alors S est un A/p-module simple. S est aussi un A-module simple (on utilise la restriction des scalaires via le morphisme canonique d'anneaux $A \to A/p$). Il est clair que $p \subseteq \mathrm{Ann}_A S$. Puisque A/p est premier, on a $p = \mathrm{Ann}_A S$. Si $E = E(S)$, alors E est injectif indécomposable et $p = \mathrm{Ass}(E)$, donc l'application α est surjective.

Soient E et E' deux injectifs indécomposables tels que $\mathrm{Ass}(E) = \mathrm{Ass}(E') = \{p\}$. Soient S, S' deux modules simples, $S \subset E$, $S' \subset E'$. On a $\mathrm{Ann}\, S = \mathrm{Ann}\, S' = p$. Puisque A/p est aussi semi-artinien, on peut supposer que $p = 0$. Soit X un idéal à gauche minimal de A. On a $XS \neq 0$, donc il existe un élément $y \in S$ tel que $Xy \neq 0$. Alors $Xy = S$ et l'application $x \longmapsto xy$ de X dans S est un isomorphisme. Il en résulte que $X \cong S$. De la même façon, on a $X \cong S'$, donc $S \cong S'$, d'où il résulte que $E = E(S) \cong E(S') = E'$ et α est aussi une injection.

<u>LEMME 2.2.</u> : <u>Si</u> $Q \neq 0$ <u>est un module sur un anneau semi-artinien, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) Q <u>est G-primaire.</u>

(2) Q <u>est stable.</u>

(3) $\tau_Q = \tau_S$ <u>pour tout sous-module simple S de Q</u>.

<u>Démonstration</u> : Elle résulte du fait que tout sous-module $N \neq 0$ de Q contient un sous-module simple S et du fait que τ_S est premier.

<u>THEOREME 2.3.</u> : <u>Soit</u> $Q \neq 0$ <u>un module sur un anneau semi-artinien. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) Q <u>est G-primaire.</u>

(2) $\mathrm{Ass}(Q) = \{p\}$.

(3) Q <u>est tertiaire.</u>

<u>Démonstration</u> : (1) $\Longrightarrow$ (2). Si Q est G-primaire et S, S' sont deux sous-modules simples de Q, alors $\tau_S = \tau_{S'}$ d'après le Lemme 2.2. Mais $\tau_S(S) = 0$, donc $\tau_{S'}(S) = 0$. Alors il existe un morphisme $S \xrightarrow{f} E(S')$, $f \neq 0$. Puisque S est simple, f est un monomorphisme, donc $S \cong \mathrm{Im}\, f$. Puisque $E(S')$ est une extension essentielle de S', on a $S' \cap \mathrm{Im}\, f \neq 0$, donc $\mathrm{Im}\, f = S'$, d'où il résulte que $S \cong S'$. Alors $\mathrm{Ann}\, S = \mathrm{Ann}\, S'$ et (2) est vrai.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Puisque A est semi-artinien, $Soc(Q)$ est essentiel dans Q, d'où il résulte :

$$\tau_{Soc(Q)} = \tau_Q .$$

Soit $\{S_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-modules simples de Q telle que $Soc(Q) = \bigoplus_{i\in I} S_i$. Puisque $Ass(Q) = \{p\}$ on a $Ann\ S_i = p$ pour tout $i \in I$. Alors pour tout $i,j \in I$ on a $S_i \cong S_j$ d'après la Proposition 2.1., donc $\tau_{S_i} = \tau_{S_j}$. Alors :

$$\tau_{Soc(Q)} = \tau_{S_i}$$

pour tout $i \in I$ ([2], Proposition 5.4.), donc $\tau_Q = \tau_{S_i}$ pour tout $i \in I$.

Soit S un sous-module simple de Q. Alors $S \subset Soc(Q)$; donc il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que :

$$S \subset S_{i_1} \oplus \ldots \oplus S_{i_n}$$

et par suite, on obtient $\tau_S = \tau_Q$ ([2], Proposition 6.7.). D'après le Lemme 2.2., Q est G-primaire.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Soit $a \in A$ tel que $aN = 0$ pour un sous-module $N \neq 0$ de Q. Soit S un sous-module simple de N. Alors $aS = 0$. Puisque $Ass(Q) = \{p\}$, il vient : $a(Soc(Q)) = 0$, donc $a \in ter(Q)$ (le radical tertiaire de Q) parce que $Soc\ E$ est essentiel dans Q.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Soient S, S' deux sous-modules simples de Q et $a \in A$. Puisque Q est tertiaire, on a $aS = 0$ si et seulement si $aS' = 0$. Donc $Ass(Q) = \{p\}$, où $p = Ann\ S = Ann\ S'$.

<u>LEMME 2.4.</u> : <u>Soit</u> $M \neq 0$ <u>un module sur un anneau semi-artinien</u> A. <u>Si</u> $p \in Ass(M)$, <u>alors il existe un sous-module</u> Q_p <u>de</u> M <u>tel que</u> $Ass(Q_p) = Ass(M) - \{p\}$ <u>et</u> $Ass(M/Q_p) = \{p\}$.

<u>Démonstration</u> : Soit Σ l'ensemble de tous les sous-modules X de M tels que $\mathrm{Ass}(X) \subseteq \mathrm{Ass}(M) - \{p\}$. On a $0 \in \Sigma$, donc $\Sigma \neq \emptyset$. Il est immédiat que Σ ordonné par l'inclusion est un ensemble inductif. On applique le Lemme de Zorn et on trouve ainsi un élément maximal Q_p dans Σ. Puisque $\mathrm{Ass}(Q_p) \subseteq \mathrm{Ass}(M) - \{p\}$ on a $Q_p \neq M$, donc $M/Q_p \neq 0$, d'où il résulte que $\mathrm{Ass}(M/Q_p) \neq \emptyset$. Soit q un élément de $\mathrm{Ass}(M/Q_p)$. Il existe un sous-module Q de M tel que $\mathrm{Ass}(Q/Q_p) = \{q\}$. Puisque la suite

$$0 \to Q_p \to Q \to Q/Q_p \to 0$$

est exacte, on a $\mathrm{Ass}(Q) \subseteq \mathrm{Ass}(Q_p) \cup \mathrm{Ass}(Q/Q_p) = \mathrm{Ass}(Q_p) \cup \{q\}$. Si $q \neq p$, on a $Q \in \Sigma$ ce qui n'est pas possible parce que $Q_p \subset Q$ et Q_p est maximal dans Σ. Donc $q = p$, et $\mathrm{Ass}(M/Q_p) = \{p\}$. Puisque $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(Q_p) \cup \mathrm{Ass}(M/Q_p) = \mathrm{Ass}(Q_p) \cup \{p\} \subseteq (\mathrm{Ass}(M) - \{p\}) \cup \{p\} = \mathrm{Ass}(M)$, on a aussi $\mathrm{Ass}(Q_p) = \mathrm{Ass}(M) - \{p\}$.

<u>THEOREME 2.5.</u> : <u>Soit</u> $M \neq 0$ <u>un module sur un anneau semi-artinien</u> A. <u>Alors il existe une famille</u> $\{Q_p\}_{p \in \mathrm{Ass}(M)}$ <u>de sous-modules</u> Q_p <u>de</u> M <u>telles que</u> :

$$0 = \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(M)} Q_p \qquad \text{(intersection réduite)}$$

<u>et pour tout</u> $p \in \mathrm{Ass}(M)$ M/Q_p <u>est G-primaire.</u>

<u>Si</u> $\{X_i\}_{i \in I}$ <u>est une famille de sous-modules</u> X_i, <u>de</u> M <u>telle que</u> $0 = \bigcap_{i \in I} X_i$ (<u>intersection réduite</u>), M/X_i <u>est G-primaire pour tout</u> $i \in I$, <u>et</u> $\mathrm{Ass}(M/X_i) \neq \mathrm{Ass}(M/X_j)$ <u>pour</u> $i \neq j$, <u>alors</u> $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ass}(M))$ <u>et</u>

$$\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(M/X_i) .$$

<u>Démonstration</u> : Pour tout $p \in \mathrm{Ass}(M)$ soit Q_p un sous-module de M tel que $\mathrm{Ass}(Q_p) = \mathrm{Ass}(M) - \{p\}$ avec $\mathrm{Ass}(M/Q_p) = \{p\}$. Alors M/Q_p est G-primaire (théorème 2.3.). Soit X un sous-module de M tel que :

$$X \subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(M)} Q_p .$$

Alors $\mathrm{Ass}(X) \subseteq \mathrm{Ass}(Q_p) = \mathrm{Ass}(M) - \{p\}$ pour tout $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Puisque on a aussi $\mathrm{Ass}(X) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$ il en résulte $\mathrm{Ass}(X) = \emptyset$, donc $X = 0$. Alors on a $0 = \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(M)} Q_p$

Soit $q \in \mathrm{Ass}(M)$ et supposons que $\bigcap_{p \neq q} Q_p = 0$. Soit S un sous-module simple de Q tel que $q = \mathrm{Ann}\ S$. Il existe $p \neq q$ tel que $S \cap Q_p = 0$ puisque dans le cas contraire $S \subseteq Q_p$ pour tout $p \neq q$, donc $S = 0$, ce qui est absurde. De $S \cap Q_p = 0$ il résulte $S \subseteq M/Q_p$, donc $q = p$, ce qui est aussi absurde. On en déduit $\bigcap_{p \neq q} Q_p \neq 0$, donc l'intersection $0 = \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(M)} Q_p$ est réduite.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, soit $j \in I$ et $Y_j = \bigcap_{i \neq j} X_i$. On a $Y_j \neq 0$ et $Y_j \cap X_j = 0$. Soit p_j un idéal premier de A tel que $\mathrm{Ass}(M/X_j) = \{p_j\}$. On a $0 \neq Y_j \subseteq M/X_j$, d'où $\mathrm{Ass}(Y_j) = \mathrm{Ass}(M/X_j) = \{p_j\}$. Mais $\mathrm{Ass}(Y_j) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$, donc $p_j \in \mathrm{Ass}(M)$ pour tout $j \in I$. Soit $p \in \mathrm{Ass}(M)$ et soit S un sous-module simple de M tel que $p = \mathrm{Ann}\ S$. Il existe $j \in I$ tel que $S \cap X_j = 0$ puisque dans le cas contraire $S \subseteq X_j$ pour tout $j \in I$, donc $S = 0$, ce qui est absurde. Alors $S \subseteq M/X_j$, d'où $\{p\} = \mathrm{Ass}(S) = \mathrm{Ass}\{M/X_j\} = \{p_j\}$. Alors il est clair que $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ass}(M))$ et $\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(M/X_i)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. FORT, Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, Math. Z. 103 (1968), pp. 363-388.

[2] O. GOLDMAN, Rings and Modules of Quotients, Journal of Algebra, 13(1969), pp. 10-47.

[3] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative, Fasc. 154, Mémorial des Sc. Math., Paris 1963.

[4] E. MATLIS, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math. 8(1958), pp. 511-528.

[5] G. MICHLER, Goldman's Primary Decomposition and the Tertiary décomposition, Journal of Algebra, 16(1970), pp. 129-137.

[6] C. NASTASESCU, Décomposition primaire dans les anneaux semi-artiniens, Journal of Algebra, 1970.

-:-:-:-:-:-:-

FACULTE DES SCIENCES D' ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 18 du 26.5.1971

Q-ANNEAUX, ou ANNEAUX TELS QUE TOUT PRODUIT DE COPIES D'UN MODULE QUASI-INJECTIF SOIT QUASI-INJECTIF.

par Claude TISSERON.

-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

On étudie ici les anneaux A tels que tout produit de copies d'un A-module quasi-injectif soit un A-module quasi-injectif. Disons qu'un tel anneau est un Q-anneau. Ces anneaux ont été introduits dans (6) et (32) et étudiés dans (6), (32) puis dans (29), (30) et (31). On trouvera ici des démonstrations des résultats publiés dans les notes (30) et (31).

Pour que l'exposé soit complet on donne ici quelques résultats importants sur les Q-anneaux, démontrés par Renault dans une note (29) postérieure à la note (30) et qui permettent de retrouver comme corollaire le théorème 3.6. de (30) dont la preuve directe est difficile.

Sauf mention du contraire tous les idéaux et les modules considérés sont des idéaux et des modules à gauche. Les anneaux et les modules sont unitaires. On dira qu'un anneau A est noethérien (respectivement artinien, etc...) si A est un anneau noethérien à gauche (respectivement artinien à gauche, etc...).

Q- ANNEAUX.

Soit A un anneau, pour une partie X de A et une partie Y d'un A-module M on pose $\ell_A(Y) = \{a \in A : aY = 0\}$ et $r_M(X) = \{x \in M : Xx = 0\}$. Si cela ne présente pas d'ambiguité on écrira $\ell(Y)$ et $r(X)$ respectivement au lieu de $\ell_A(Y)$ et $r_M(X)$.

On désigne toujours par R(A) ou R , le radical de Jacobson de l'anneau A.

On notera $E_A(M)$ ou $E(M)$ une enveloppe injective du A-module M ; et on notera Mod_A la catégorie des A-modules à gauche.

1. GENERALITES.

Rappelons qu'un A-module M est dit Σ-quasi-injectif si pour tout ensemble I le module $M^{(I)}$ somme d'une famille de copies de M indexée par I est quasi-injectif (6). On définit de même les notions de Π-quasi-injectivité, Σ-injectivité et Π-injectivité, etc...

1.1. Proposition : Pour un A-module M les assertions suivantes sont équivalentes :

a) le module M est Π-quasi-injectif;

b) le module M est un $A/\ell(M)$-module injectif ;

c) on a $M = r_{E(M)}(\ell(M))$.

Ceci résulte immédiatement de la proposition 2.7. de (16) et du théorème 1.2. de (6).

1.1. Définition : Soit A un anneau, si tout A-module quasi-injectif M vérifie les conditions de la proposition 1.1. on dit que A est un Q-anneau à gauche.

On définit de même la notion de Q-anneau à droite; lorsque cela ne présentera pas d'ambiguité on dira Q-anneau au lieu de Q-anneau à gauche.

Si A est un Q-anneau on montre facilement comme dans le corollaire 1.4. de (6) que pour un A-module M l'enveloppe quasi-injective de M dans E(M) - i.e. le plus petit sous-module quasi-injectif de E(M) contenant M - est $r_{E(M)}(\ell(M))$.

1.1. Exemple : Il résulte du corollaire 1.3. de (6) ou de la proposition 2.8. de (16) qu'un anneau artinien (à gauche) est un Q-anneau.

1.2. Proposition : Soit A un Q-anneau et $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux à unité ; si φ est surjectif ou est un épimorphisme plat à gauche (11) alors B est un Q-anneau.

C'est la proposition 1.3.3. de la page 71 de (32).

En particulier pour toute partie multiplicative S d'un Q-anneau commutatif A , l'anneau $A[S^{-1}]$ est un Q-anneau.

1.3. Proposition :Tout produit fini de Q-anneaux est un Q-anneau.

Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A e_i$ où les e_i sont des idempotents centraux orthogonaux de A et où chaque $A e_i$ est un Q-anneau. Tout idéal $\mathfrak{a}$ de A s'écrit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{a} e_i$ et tout A-module M s'écrit $M = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i M$.

Supposons que M soit un A-module quasi-injectif et soit $\mathfrak{a} = \ell(M)$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les structures de A-module et de $A e_i$-module de $e_i M$ coïncident et on a $\mathfrak{a} e_i = \ell(e_i M)$ où $e_i M$ est considéré comme $A e_i$-module, de plus $e_i M$ est un $A e_i$-module quasi-injectif, comme $A e_i$ est un Q-anneau $e_i M$ est donc un $A e_i / \mathfrak{a} e_i$-module injectif, on vérifie alors aisément que M est un $A/\mathfrak{a}$-module injectif.

Ceci prouve que A est un Q-anneau et achève la preuve.

1.4. Remarque : Cette proposition ne s'étend pas à un produit quelconque comme le montre l'exemple suivant: soit K un corps commutatif et soit I un ensemble infini. Il résulte de l'exemple 1.1. que K est un Q-anneau. Désignons par A l'anneau produit K^I et par M le A-module $K^{(I)}$, alors M est un A-module quasi-injectif et fidèle (i.e. d'annulateur nul) qui n'est pas injectif ; ce qui prouve que A n'est pas un Q-anneau.

2. ETUDE DES Q-ANNEAUX SANS RADICAUX.

2.1. Proposition : Soit A un Q-anneau, tout produit de A-modules semi-simples est un A-module quasi-injectif.

Si $(S_i)_{i \in I}$ est une famille de modules semi-simples, le A-module $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ est un module semi-simple donc quasi-injectif ; posons pour $i \in I$, $S = S^i = S_i \oplus P_i$, comme S^I est quasi-injectif par hypothèse et que $S^I = \prod_{i \in I} S^i = (\prod_{i \in I} S_i) \oplus (\prod_{i \in I} P_i)$ on voit que $\prod_{i \in I} S_i$ est quasi-injectif.

2.2. Lemme : Soit A un Q-anneau, tout A-module simple est un A/R module injectif.

Soit $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ la famille des idéaux maximaux de A, posons $S_i = A/\mathfrak{m}_i$ pour $i \in I$. Il suffit de démontrer que chaque S_i est un A/R-module injectif où R est le radical de Jacobson de A.

L'anneau A/R est un Q-anneau d'après 1.2. et $S = \prod_I S_i$ est un A/R-module quasi-injectif d'après 2.1. qui contient un sous-module isomorphe à A/R , ainsi S est injectif d'après le critère de Baer et chaque S_i est aussi un A/R-module injectif.

> <u>2.3. Proposition</u> : Soit A un anneau, les assertions suivantes sont équivalentes :
>
> a) A est un Q-anneau sans radical ;
>
> b) A est produit fini de Q-anneaux quasi-simples ;
>
> c) tout A-module quasi-injectif est injectif.

On dit ici qu'un anneau A est quasi-simple si 0 et A sont les seuls idéaux bilatères de A.

Rappelons également qu'un anneau A est un <u>V-anneau</u> s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes : (cf (20) page 130) :

1) tout A-module simple est injectif ;
2) tout idéal est l'intersection des idéaux maximaux le contenant.

Montrons la proposition.

a) $\Longrightarrow$ b) : Si A est un Q-anneau sans radical alors A est un V-anneau d'après le lemme 2.2. et la condition 1) ci-dessus. Montrons que A est noethérien (à gauche). Soit S un module semi-simple somme d'un module simple de chaque type, S est fidèle car A est sans radical. Pour tout ensemble I le module $S^{(I)}$ est quasi-injectif et fidèle donc est injectif puisque A est un Q-anneau et ainsi S est Σ-injectif. Il résulte alors de la proposition 3 page 184 de (26) que les idéaux de A annulateurs de parties de S vérifient la condition de chaîne ascendante. D'après la condition 2) ci-dessus tout idéal est l'annulateur d'une partie de S et ainsi A est noethérien.

Comme A est sans radical A n'a pas d'idéal bilatère nilpotent non nul puisqu'un tel idéal est toujours contenu dans $R(A)$ et ainsi A est un V-anneau noethérien semi-premier ; donc d'après (20) page 130, A est produit fini de V-anneaux noethériens quasi-simples qui sont des Q-anneaux comme quotients de A.

b) $\Longrightarrow$ c) : Supposons d'abord que A soit un Q-anneau quasi-simple ; soit M un A-module non nul alors l'annulateur de M est un idéal bilatère donc est nul et M est fidèle, si de plus M est quasi-injectif alors M est injectif car A est un Q-anneau, et tout A-module quasi-injectif est injectif. Montrons que cette dernière propriété est stable par produit. Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A\, e_i$ où les e_i sont des idempotents centraux orthogonaux et où pour $1 \leqslant i \leqslant n$ tout $A\,e_i$-module quasi-injectif est injectif. Soit M un A-module quasi-injectif, montrons que M est injectif ; on peut écrire $M = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i\,M$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les structures de A-module et de $A\,e_i$-module de $e_i\,M$ coïncident et $e_i\,M$ est un $A\,e_i$-module quasi-injectif, donc injectif par hypothèse et on vérifie alors aisément que M est un A-module injectif.

c) $\Longrightarrow$ a) : Si tout A-module quasi-injectif est injectif il est clair (avec 1.1.) que A est un Q-anneau et un V-anneau, et un V-anneau est toujours sans radical.

<u>2.4. Corollaire</u> : Pour tout Q-anneau A l'anneau A/R est un V-anneau noethérien.

<u>Remarque</u> : les deux résultats précédents ont été trouvés en même temps par Renault et figurent sous une forme un peu différente dans (29).

<u>2.5. Corollaire</u> : Un anneau commutatif et sans radical est un Q-anneau si et seulement si il est produit fini de corps.

<u>2.6. Proposition</u> : Un Q-anneau réduit A est produit direct d'un produit fini de corps et d'un Q-anneau réduit à socle nul.

Soit S un idéal simple de A, comme A est réduit donc sans élément nilpotent on a $S = A\,e$ où $e = e^r$ est un idempotent de A, cet idempotent est central car A est réduit et ainsi le socle (gauche) G de A s'écrit $G = \bigoplus_{i \in I} A\,e_i$ où les $(e_i)_I$ sont des idempotents centraux orthogonaux. Comme A est réduit on a $G \cap R = 0$ car si $x \in G \cap R$ et $x \neq o$ l'idéal Ax contient un idéal simple non nul engendré par un idempotent non nul ce qui est absurde car R ne contient aucun idempotent non nul. Le socle G s'injecte donc dans l'anneau A/R qui est noethérien d'après 2.4. ce qui prouve que I est fini, et $G = A\,e$ où $e = \sum_{i \in I} e_i$ est un idempotent central. Ainsi G est facteur direct de A ; d'autre part G est un anneau semi-simple réduit donc est produit fini de corps d'après le lemme 6.1. page 213 de (14). Si $A = G \times B$ l'anneau B est un Q-anneau à socle nul d'où la proposition.

<u>2.7. Proposition</u> : Un Q-anneau A semi-premier ou sans radical dont le socle est essentiel est semi-simple.

Soit G le socle de A, alors $G \cap \ell(G) = G \cap R$ est un idéal bilatère de carré nul d'après l'exercice 4 du § 6 de (3). Comme A est semi-premier ou sans radical on a $G \cap \ell(G) = 0$ et par essentialité de G dans A on a $\ell(G) = 0$.

Comme A est un Q-anneau le module quasi-injectif et fidèle G est injectif, et $G = A$ car G est essentiel dans A.

3. CO-GENERATEURS.

Soit A un anneau, un A-module M est un <u>co-générateur</u> de Mod_A si et seulement si tout A-module N s'injecte dans un produit de copies de M.

Lorsque M est un A-module injectif ceci équivaut à dire que M contient une copie de chaque type de module simple. Soit $\mathcal{S}$ une famille de représentants de l'ensemble des types de modules simples, et soit $S = \bigoplus_{T \in \mathcal{S}} T$; l'enveloppe injective $E(S)$ de S est un co-générateur de Mod_A contenu, à un isomorphisme près, dans tout co-générateur de Mod_A. (Ceci résulte par exemple du théorème 1.8. de l'exposé 6 de (33)).

On dira que $E(S)$ est le <u>co-générateur minimal</u> de Mod_A. Ce module est fidèle comme d'ailleurs tout co-générateur.

Remarquons qu'un co-générateur injectif est ce que Ballet appelle dans (22) un module fidèlement injectif.

<u>3.1.</u> <u>Lemme</u> : Soit A un anneau, soit E un co-générateur de Mod_A, alors pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a $\mathfrak{a} = \ell\, r_E(\mathfrak{a})$.

En effet pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A il existe une injection f de $A/\mathfrak{a}$ dans un produit E^I de copies de E, pour $x \in A/\mathfrak{a}$ posons $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ et soit $X = \{f_i(1+\mathfrak{a}),\ i \in I\}$. On a alors $\mathfrak{a} = \ell(X)$ avec $X \subset E$, donc $X \subset r_E(\mathfrak{a})$ et on a : $\mathfrak{a} \subset \ell\, r_E(\mathfrak{a}) \subset \ell(X) = \mathfrak{a}$ d'où le résultat.

<u>3.2.</u> <u>Lemme</u> : Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A ; soit E un A-module injectif, alors $r_E(\mathfrak{a})$ est un $A/\mathfrak{a}$-module injectif. Si M est un sous-module essentiel de E et annulé par $\mathfrak{a}$ alors l'enveloppe injective sur $A/\mathfrak{a}$ du $A/\mathfrak{a}$-module M est $r_E(\mathfrak{a})$.

Pour montrer le premier point montrons que tout morphisme f d'un idéal $C/\mathfrak{a}$ de $A/\mathfrak{a}$ dans $r_E(\mathfrak{a})$ se prolonge à $A/\mathfrak{a}$. Le composé $G \to C/\mathfrak{a} \xrightarrow{f} r_E(\mathfrak{a})$ est un morphisme de A-modules nul sur $\mathfrak{a}$, qui se prolonge en un A-morphisme $g : A \to E$ nul sur $\mathfrak{a}$ donc qui se factorise par l'application canonique $A \to A/\mathfrak{a}$ pour donner un morphisme $v : A/\mathfrak{a} \to E$ qui prolonge f. Il est clair que $v(A/\mathfrak{a})$ est contenu dans $r_E(\mathfrak{a})$; donc $r_E(\mathfrak{a})$ est un $A/\mathfrak{a}$-module injectif.

Soit maintenant M un sous-module essentiel de E tel que $\mathfrak{a}M = 0$ alors $M \subset r_E(\mathfrak{a})$, et comme les structures de A-module et de $A/\mathfrak{a}$-module de $r_E(\mathfrak{a})$ coïncident, $r_E(\mathfrak{a})$ est extension essentielle de M comme $A/\mathfrak{a}$-module ; ce qui achève la preuve.

3.3. Lemme : Soit A un anneau et E un co-générateur de Mod_A alors A est noethérien dès que E est Σ-injectif.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A , on a $\mathfrak{a} = \ell(X)$ pour une partie X de E d'après 3.1., et le lemme résulte alors de la proposition 3 page 184 de (26).

3.4. Proposition : Soit A un Q-anneau et E le co-générateur minimal de Mod_A . Il existe des bijections décroissantes et inverses l'une de l'autre entre idéaux bilatères de A contenus dans $R(A)$ et sous-modules quasi-injectifs et essentiels de E définies par $\mathfrak{a} \mapsto r_E(\mathfrak{a})$ et $N \mapsto \ell(N)$.

D'après 1.1. on a $N = r_E(\ell(N))$ pour tout sous-module quasi-injectif et essentiel de E , de plus N contient alors le socle S de E avec $S = r_E(\ell(S)) = r_E(R)$ car S contient une copie de chaque type de module simple ; et on a $\ell(N) \subset \ell(S) = \ell\, r_E(R)$ avec $\ell\, r_E(R) = R$ d'après 3.1.

Réciproquement, pour un idéal bilatère $\mathfrak{a} \subset R$ on a $S = r_E(R) \subset r_E(\mathfrak{a})$ et $r_E(\mathfrak{a})$ est un sous-module quasi-injectif et essentiel de E ; on a alors $\mathfrak{a} = \ell\, r_E(\mathfrak{a})$ d'après 3.1.

Remarquons que la proposition peut aussi s'énoncer en prenant un co-générateur dont le socle est essentiel, ce co-générateur étant injectif.

4. MODULES Σ-QUASI-INJECTIFS ET Q-ANNEAUX.

4.1. Proposition : Pour un A-module quasi-injectif M il y a équivalence entre

a) M est Σ-quasi-injectif ;

b) pour toute partie finie X de M les annulateurs de parties de M qui contiennent $\ell(X)$ vérifient la condition de chaîne ascendante ;

c) pour toute partie finie X de M et pour tout idéal E contenant $\mathfrak{a} = \ell(X)$ l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M^{(F)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B/\mathfrak{a}, M^{(F)})$$

est surjective pour tout ensemble F .

Avec les notations de (16) page 1378 ou de (17) l'assertion c) signifie exactement que $\mathfrak{a} = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Ann}(x) \in I_{M^{(F)}}$. Comme $M^{(F)}$ est quasi-injectif si et seulement si $M^{(F)}$ est M-injectif ((17) proposition 1.1.9.), c'est-à-dire si et seulement si $I_{M^{(F)}} M = M$ on voit que a) et c) sont équivalents.

Montrons que b) $\Longleftrightarrow$ c)

b) $\Longrightarrow$ c) : soit F un ensemble fixé et $f : B/\mathfrak{a} \to M^{(F)}$ un morphisme, montrons que f se prolonge à $A/\mathfrak{a}$. Posons pour $a \in B$

$$f(a+\mathfrak{a}) = (\mathrm{pr}_i \circ f(a+\mathfrak{a}))_{i \in F}$$

où pour $i \in F$ $\mathrm{pr}_i : M^{(F)} \to M$ est la i-ème projection.

Pour tout $x \in M$ on a $\mathrm{Ann}(x) \in I_M$ car M est quasi-injectif et comme X est fini $\mathfrak{a} = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Ann}(x) \in I_M$ donc pour tout $i \in F$ le morphisme $\mathrm{pr}_i \circ f : B/\mathfrak{a} \to M$ se prolonge en un morphisme $u_i : A/\mathfrak{a} \to M$.

Pour $i \in F$ posons $x_i = u_i(1+\mathfrak{a})$, alors pour tout $a \in B$ on a

$$\mathrm{pr}_i \circ f(a+\mathfrak{a}) = u_i(a+\mathfrak{a}) = a\, x_i$$

et par conséquent :

$$f(a+\mathfrak{a}) = (\mu_i \circ f(a+\mathfrak{a}))_{i \in F} = (a\, x_i)_{i \in F} = a(x_i)_{i \in F} \in M^{(F)} .$$

Désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de F. L'ensemble $\mathfrak{G}$ des idéaux de A de la forme $\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j \in K})$ où $K \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(\{x_j\}_K)$ possède par hypothèse un élément maximal C qui s'écrit $C = \mathrm{Ann}(\{x_j\}_J)$.

Montrons que $B \subset C$. Supposons qu'il existe $a \in B-C$, on a vu que $a(x_i)_F \in M^{(F)}$ donc $K = \{i \in F \mid a\, x_i = 0\} \in \mathfrak{F}$ et $J \cap K \in \mathfrak{F}$ avec

$$\mathfrak{a} \subset C \subsetneq C + Aa \subset \mathrm{Ann}(\{x_j\}_{J \cap K})$$

ce qui contredit la maximalité de C.

Ainsi $B \subset C$ et pour tout $a \in B$ on a $a(x_i)_F = a(x_i)_{F-J}$ avec $(x_i)_{F-J} \in M^{(F)}$ et ainsi f se prolonge en un morphisme g de $A/\mathfrak{a}$ dans $M^{(F)}$ défini par $g(1+\mathfrak{a}) = (x_i)_{F-J}$.

c) $\Longrightarrow$ b) : soit $\mathfrak{a} \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ une suite strictement croissante d'idéaux de A contenant $\mathfrak{a} = \ell(X)$ pour une partie finie X de M, avec $I_n = \ell(X)$ et $X_n \subset M$ pour $n \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$ il existe $x_n \in r_M(I_n) - r_M(I_{n+1})$ car $I_n = \ell(X_n)$ $= \ell\, r_M(I_n)$. Soit $a \in B = \bigcup_{n \geqslant 1} I_n$, il existe q tel que $a \in I_q \subset I_{q+1} \subset \ldots$ et $a\, x_q = a\, x_{q+1} = \ldots \neq 0$.

Soit $f : B/\mathfrak{a} \to M^{(\mathbb{N})}$ le morphisme défini par $f(x+\mathfrak{a}) = (x\, x_n)_{n \geqslant 1}$, alors f se prolonge en $g : A/\mathfrak{a} \to M^{(\mathbb{N})}$ et il existe q tel que pour $n \geqslant q$ on ait $a\, x_n = 0$ pour tout $a \in B$, donc $B\, x_n = 0$ pour $n \geqslant q$ et en particulier $I_{q+1}\, x_q = 0$ ce qui est absurde.

4.2. Théorème (cf. (29)) (Renault) : Un Q-anneau (à gauche) parfait à gauche ou parfait à droite est artinien à gauche.

D'après le lemme 11 de (9) il suffit de prouver que R/R^2 est un A-module à gauche de type fini ; comme A/R^2 est un Q-anneau on peut supposer que $R^2 = 0$. Supposons donc que $R^2 = 0$, on va montrer que A est noethérien en utilisant le lemme 3.3. et ainsi R sera de type fini.

Soit $S_1, \ldots, S_n$ un système de représentants des types de modules simples. Ce système est fini car l'anneau A/R est semi-simple d'après le théorème P page 467 de (1). Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i)$ le co-générateur minimal de Mod_A, on va montrer que E est Σ-injectif. Comme E est injectif et fidèle et comme A est un Q-anneau il suffit de montrer que E est Σ-quasi-injectif.

Montrons que E est Σ-injectif en utilisant la proposition 4.1. b). Soit X une partie finie de E, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Ann}(x)$ est intersection finie d'idéaux irréductibles annulateurs d'un élément d'un module $E(S_i)$, donc $\ell(X)$ s'écrit $\mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_S$ où $\mathfrak{a}_i$ est irréductible pour $1 \leqslant i \leqslant S$, de plus $\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ann}(y)$ avec $y \in E(S_j)$ pour un certain j.

Montrons que les idéaux de A qui contiennent $\ell(X)$ vérifient la condition de chaîne ascendante. Soit $(B_n)_{n \geqslant 0}$ une suite croissante d'idéaux contenant $\mathfrak{a} = \ell(X)$. Comme $R^2 = 0$ et que A/R est semi-simple R est un module semi-simple donc $\mathfrak{a} \cap R$ est facteur direct de R et $R/\mathfrak{a} \cap R = \mathfrak{a} + R/\mathfrak{a}$ s'injecte dans

$A/\mathfrak{a}$, donc dans $\bigoplus_{i=1}^{S} A/\mathfrak{a}_i$; la somme $\bigoplus_{i=1}^{S} A/\mathfrak{a}_i$ s'injecte dans une somme finie de copies de E soit E^m donc le module semi-simple $R/\mathfrak{a} \cap R$ s'injecte dans le socle de E^m qui est de longueur finie et le supplémentaire de $\mathfrak{a} \cap R$ dans R est de longueur finie. Ceci prouve qu'il existe p tel que pour tout $q \geqslant p$ on ait $B_p \cap R = B_q \cap R$. D'autre part la suite d'idéaux $(B_n+R)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire dans l'anneau semi-simple A/R donc il existe t tel que pour $q \geqslant t$ on ait $B_q+R = B_t+R$.

Par modularité du treillis des idéaux de A on a donc $B_q = B_u$ pour tout $q \geqslant u = \max(p,t)$ et la suite (B_n) est stationnaire ce qui prouve la condition b) de 4.1. et achève la preuve.

4.3. __Corollaire__ : Soit A un Q-anneau tel que A/R soit semi-simple, alors pour tout entier n l'anneau A/R^n est artinien.

En effet l'anneau A/R^n est alors parfait d'après le théorème P de (1) et est un Q-anneau d'après 1.2.

4.3.bis. __Corollaire__ : Un Q-anneau semi-artinien est artinien.

On dit qu'un anneau A est semi-artinien si tout module non nul a un socle essentiel (cf. (10)).

Soit A un Q-anneau semi-artinien, alors A/R est aussi semi-artinien d'après la proposition 3.2. de (10), et de plus A/R est un Q-anneau sans radical donc est semi-simple d'après 2.7. Comme R est aussi T-nilpotent à droite d'après la proposition 3.2. de (10) l'anneau A est parfait à droite d'après le théorème (P) de (1) donc est artinien d'après 4.2.

4.4. __Remarque__ : Sur un anneau local commutatif A dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est de carré nul on peut construire un module quasi-injectif et fidèle non injectif de la façon suivante :

Comme $\mathfrak{m}^2 = 0$ le radical $\mathfrak{m}$ de A coïncide avec le socle et on a $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i\in I} A\, a_i$ où pour tout $i \in I$ on a $\mathrm{Ann}(a_i) = \mathfrak{m}$. Soit E l'enveloppe injective de $S = A/\mathfrak{m}$ et soit $x_o = 1+\mathfrak{m} \in S$. Pour tout $i \in I$ posons $\mathfrak{a}_i = \bigoplus_{j\neq i} A\, a_j$. Par injectivité de E l'application $g_i : \mathfrak{m} \to S$ définie par $g_i(\mathfrak{a}_i) = 0$ et $g_i(a_i) = x_o$ est de la forme $a \mapsto a\, x_i$ pour un élément x_i de E ; on a donc $\mathfrak{a}_i x_i = 0$ et $a_i x_i = x_o$. Pour $a \in A$ on a $a\, x_i \neq 0$ si $a \notin \mathfrak{m}$ car alors a

est inversible et si $a = \alpha a_i + \beta$ où $\beta \in \mathfrak{a}_i$ on a $a x_i = \alpha a_i x_i = \alpha x_o$, donc $a x_i = 0$ implique $\alpha \in \mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x_o) = \mathrm{Ann}(a_i)$, et alors $a = \beta \in \mathfrak{a}_i$; ce qui prouve que $\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$. Ceci pour tout $i \in I$.

De façon analogue l'application $g : \mathfrak{m} \to S$ définie par $g(a_i) = x_o$ est de la forme $a \mapsto aZ$ pour $Z \in E$. On a donc $a_i Z = x_o$ pour tout $i \in I$. Comme A est commutatif l'ensemble $N = \sum_{i \in I} r_E(\mathfrak{a}_i)$ est un sous-module de E, caractéristique, donc quasi-injectif. De plus pour tout $i \in I$ on a $x_i \in N$ donc N est fidèle car $\bigcap_I \mathfrak{a}_i = 0$.

Montrons que $Z \notin N$. Sinon on pourrait écrire $Z = \sum_{k=1}^{n} y_k$ où $y_k \in r_E(\mathfrak{a}_{i_k})$ et il existerait $i \in I$ tel que $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ car I est infini ; on a alors $a_i \in \mathfrak{a}_{i_k}$ pour $k = 1, \ldots, n$ et $a_i Z = \sum_k a_i y_k = 0$ or $a_i Z = x_o \neq 0$; cette absurdité montre que $Z \notin N$.

Ainsi N est quasi-injectif, fidèle et non injectif.

Autrement dit, pour un anneau local et commutatif ceci fournit une autre démonstration de 4.2.

<u>4.5. Lemme</u> : Soit A un Q-anneau, de radical R, et E le co-générateur minimal de Mod_A, si $\bigcap_{n \geq 0} R^n = 0$ on a $E = \bigcup_{n \geq 0} r_E(R^n)$.

Soit $E' = \bigcup_{n \geq 0} r_E(R^n)$, l'ensemble des éléments de E annulés par une puissance de R ; alors E' est un sous-module quasi-injectif de E car E' est un sous-module caractéristique de E. De plus pour tout entier n on a $R^n = \ell\, r_E(R^n)$ d'après 3.1., et $\ell(E') = \bigcap_{n \geq 0} R^n$ donc E' est fidèle dès que $\bigcap_{n \geq 0} R^n = 0$, comme A est un Q-anneau E' est alors injectif donc égal à E car E' contient le socle $r_E(R)$ de E qui est essentiel dans E.

<u>4.6. Théorème</u> (Renault) (cf. (29)) : Soit A un Q-anneau tel que A/R soit semi-simple, posons $\mathfrak{a} = \bigcap_{n \geq 0} R^n$ alors $A/\mathfrak{a}$ est un anneau noethérien.

On peut évidemment supposer grâce à 1.2. que $\mathfrak{a} = 0$. D'après le lemme 4.5. pour tout $x \in E$ il existe alors n tel que $R^n \subset \mathrm{Ann}(x)$ comme d'après 4.3. l'anneau A/R^n est artinien ceci prouve que $A/\mathrm{Ann}(x)$ est de longueur finie comme A-module ou comme A/R^n-module. Pour toute partie finie X de E le module $A/\mathrm{Ann}(X)$ s'injecte dans $\bigoplus_{x\in X} A/\mathrm{Ann}(x)$ qui est aussi de longueur finie, ce qui prouve que les idéaux de A qui contiennent $\ell(X) = \mathrm{Ann}(X)$ vérifient la condition de chaîne ascendante. Donc E est Σ-quasi-injectif d'après la proposition 4.1. Comme E est fidèle et que A est un Q-anneau E est aussi Σ-injectif et A est noethérien d'après la proposition 3.3. ; ce qui achève la démonstration.

Remarquons que $A/\bigcap_{n\geqslant 0} R^n$ peut être noethérien sans que A/R soit semi-simple comme le montre l'exemple d'un Q-anneau sans radical noethérien non semi-simple donné dans la deuxième partie de l'exposé (25), (voir aussi (29) page 13).

5. APPLICATIONS.

Soit A un Q-anneau de radical R, on va voir que lorsque A/R est semi-simple, les résultats du paragraphe précédent permettent de présenter le séparé complété de A pour la topologie R-adique comme un certain anneau d'endomorphismes.

On désigne toujours par E le co-générateur minimal de $\mathbf{Mod}_A$.

Soit $\mathbb{C}$ une sous-catégorie fermée de $\mathbf{Mod}_A$ au sens de (27), chapitre III, paragraphe 4 ; pour tout A-module M on note $T_{\mathbb{C}}(M)$ la topologie linéaire sur M ayant pour sous-modules ouverts les sous-modules N de M tels que M/N soit objet de $\mathbb{C}$.

5.1. Proposition : Soit A un Q-anneau tel que A/R soit semi-simple et $\bigcap_{n\geqslant 0} R^n = 0$, alors (1) le séparé complété de A pour la topologie R-adique est un A-module à droite plat ;

(2) si $\mathbb{C}$ est la catégorie fermée définie par la famille topologisante des idéaux de A qui contiennent une puissance de R la condition suivante est vérifiée :

(R) pour tout A-module M et tout sous-module N de M la topologie $T_{\mathbb{C}}(N)$ coïncide avec la topologie induite sur N par $T_{\mathbb{C}}(M)$.

D'après 4.3. et 4.6. l'anneau A est noethérien, et pour tout entier n l'anneau A/R^n est artinien, donc la topologie R-adique est artinienne.

(1) D'après 4.5. on a $E = \bigcup_{n\geqslant 0} r_E(R^n)$ et comme tout idéal ouvert de A contient une puissance de R on a aussi $E = \bigcap_{\mathfrak{a}\text{ ouvert}} r_E(\mathfrak{a})$; ce qui peut encore s'écrire, puisque pour tout idéal $\mathfrak{a}$ les A-modules $r_E(\mathfrak{a})$ et

$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E)$ sont canoniquement isomorphes $E = \varinjlim_{\mathfrak{a} \text{ ouvert}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E)$. D'après la proposition 7 de (23) le séparé complété de A pour la topologie R-adique est donc un A-module à droite plat.

(2) Il est clair que E est objet de $\mathfrak{C}$. Pour montrer que la condition R est vérifiée il suffit de prouver que $\mathfrak{C}$ est stable par enveloppes injectives comme il résulte de la proposition 9 page 427 de (27).

Soit donc M un objet de $\mathfrak{C}$, pour tout $x \in M$ il existe n tel que $R^n x = 0$ donc $R^n A x = 0$, et Ax est un A/R^n-module. Comme A/R^n est artinien le socle de Ax, comme A-module ou comme A/R^n-module, est non nul ; ainsi le socle de M est essentiel dans M. L'enveloppe injective $E(M)$ de M est donc aussi l'enveloppe injective de son socle et $E(M)$ est facteur direct d'une somme directe de copies de E, comme $E \in \mathfrak{C}$ on a aussi $E(M) \in \mathfrak{C}$ ce qui achève la démonstration.

<u>5.2.</u> <u>Remarques</u> : Soit A un Q-anneau tel que $\bigcap_{n \geqslant 0} R^n = 0$; soit $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie R-adique. Le co-générateur minimal E de $\mathfrak{Mod}_A$ devient un $\hat{A}$-module de façon canonique de la façon suivante :

Soit $x \in E$ et $a \in \hat{A}$ défini par une suite de Cauchy (a_n) d'éléments de A, il existe n_o tel que $R^{n_o} x = 0$, et il existe p tel que pour tout $n \geqslant p$ on ait $a_n - a_p \in R^{n_o}$, i.e. $a_n x = a_p x$, on pose alors $ax = a_p x$; on vérifie aisément que ceci fait de E un $\hat{A}$-module. De plus E est un $\hat{A}$-module discret lorsque $\hat{A}$ est muni de la topologie définie par les $\widehat{R^n}$ pour $n \geqslant 0$, en effet si $x \in E$ il existe n tel que $R^n x = 0$ et il résulte immédiatement de la définition précédente que $\widehat{R^n} x = 0$.

La même démonstration montre que tout A-module discret devient un $\hat{A}$-module et est discret comme $\hat{A}$-module. Réciproquement tout $\hat{A}$-module discret M devient par restriction des scalaires à A un A-module noté M_A et M_A est un A-module discret.

Soit $\mathrm{Dis}\,A$ (resp. $\mathrm{Dis}\,\hat{A}$) la sous-catégorie fermée de $\mathfrak{Mod}_A$ (resp. $\mathfrak{Mod}_{\hat{A}}$) ayant pour objets les A-modules (resp. $\hat{A}$-modules) discrets ; la sous-catégorie $\mathrm{Dis}\,A$ (resp. $\mathrm{Dis}\,\hat{A}$) est définie par la famille topologisante des idéaux à gauche de A (resp. de $\hat{A}$) qui contiennent un idéal bilatère de la forme R^n (resp. $\widehat{R^n}$).

Supposons maintenant que $\hat{A}$ soit linéairement compact, d'après le théorème 2 de (24) on obtient un bon injectif de $\mathrm{Dis}\,\hat{A}$ en prenant l'enveloppe injective dans $\mathrm{Dis}\,\hat{A}$ de $S = \bigoplus_{T \in \mathcal{T}} T$ où $\mathcal{T}$ est un ensemble de représentants des types de $\hat{A}$-modules simples discrets. Comme tout A-module simple est discret et comme $\mathrm{Dis}\,A = \mathrm{Dis}\,\hat{A}$ on obtient un bon injectif de $\mathrm{Dis}\,A = \mathrm{Dis}\,\hat{A}$ en prenant l'enveloppe injective dans $\mathrm{Dis}\,A$ d'une somme de tous les types de A-modules simples, comme E est discret, E est une telle enveloppe injective et E est un bon injectif de $\mathrm{Dis}\,\hat{A}$.

Montrons que $\mathrm{End}_A E = \mathrm{End}_{\hat{A}} E$.

Il suffit de montrer que tout A-morphisme $f : E \to E$ est un $\hat{A}$-morphisme ; soit donc $f \in \mathrm{End}_A E$ et $x \in E$, pour $a \in \hat{A}$ défini par une suite de Cauchy (a_n) d'éléments de A il existe p et n_o tels que $R^{n_o} x = 0$ et $a_p - a_q \in R^{n_o}$ pour $q \geqslant p$ donc $R^{n_o} f(x) = 0$ et on a $af(x) = a_p f(x) = f(a_p x) = f(ax)$, ce qui prouve l'égalité cherchée.

En utilisant ce qui précède et le théorème 3 de (24) on a donc le résultat suivant :

<u>5.3. Proposition</u> : Soit A un Q-anneau tel que le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie R-adique soit linéairement compact et tel que $\bigcap_{n \geqslant o} R^n = 0$. Si E est le co-générateur minimal de Mod_A on a $\hat{A} = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_A E} E$.

<u>5.4. Corollaire</u> : Soit A un Q-anneau tel que A/R soit semi-simple, soit E le co-générateur minimal de Mod_A et $E' = \bigcup_{n \geqslant o} r_E(R^n)$, soit A' l'anneau quotient $A/\bigcap_{n \geqslant o} R^n$, alors le séparé complété de A pour la topologie R-adique s'identifie à l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_{A'} E'} E'$.

Il y a identité entre A-modules simples et A'-modules simples. Comme E' est quasi-injectif et essentiel dans E on a $E' = r_E(\ell(E'))$ d'après 1.1. ; or $\ell(E') = \bigcap_{n \geqslant o} R^n$, il résulte donc de 3.2. que E' est le co-générateur minimal de $\mathrm{Mod}_{A'}$. Si R' est le radical de A' le séparé complété de A pour la topologie R-adique coïncide avec le complété de A' pour la topologie R'-adique et on peut donc supposer que $\bigcap_{n \geqslant o} R^n = 0$. Alors pour tout entier n l'anneau A/R^n est artinien et la topologie R-adique est artinienne, donc $\hat{A}$ est strictement linéairement compact d'après les formules 21 page 49 et l'exercice 19 du § 2 du chapitre III de (21). Le corollaire résulte alors de la proposition.

6. Q-ANNEAUX NOETHERIENS COMMUTATIFS.

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont commutatifs.

6.0. Remarques : Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A . Soit $E = E(A/\mathfrak{m})$ l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{m}$. Soit $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ le séparé complété de $A_{\mathfrak{m}}$ pour la topologie $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$-adique. Le A-module E est muni d'une structure de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$-module de façon canonique (voir 5.2. et (7) page 522) et pour cette structure E est l'enveloppe injective de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\hat{A}_{\mathfrak{m}}$; E est aussi l'enveloppe injective sur $A_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. Les sous-A-modules quasi-injectifs de E coïncident avec les sous-$\hat{A}_{\mathfrak{m}}$-modules comme il résulte du théorème 3.7. de (7). En particulier tout sous-A-module quasi-injectif Q de E est un sous-$A_{\mathfrak{m}}$-module de E et on a, en notant $j : A \to A_{\mathfrak{m}}$ le morphisme canonique :

6.0.1. $$\ell_A(Q) = j^{-1}(\ell_{A_{\mathfrak{m}}}(Q)) .$$

De plus pour un idéal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ on vérifie aisément la relation :

6.0.2. $$r_E(\mathfrak{p}) = r_E(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}})$$

où chaque membre de l'égalité correspond à une structure de module de E .

6.1. Lemmes :

6.1.1. Pour un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ d'un anneau noethérien A il y a équivalence entre :

a) $\mathfrak{p}$ est le saturé de 0 dans A pour ;

b) $\mathfrak{p}$ est le seul idéal $\mathfrak{p}$-primaire ;

c) $E(A/p)$ est le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$;

d) $\mathfrak{p}$ figure dans une décomposition primaire réduite de 0 dans A .

Les implications a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) et b) $\Longrightarrow$ d) sont claires. L'implication d) $\Longrightarrow$ a) résulte de (21) chapitre IV, proposition 5 page 145. Montrons que c) $\Longrightarrow$ a) . On voit immédiatement avec (7) théorème 3.4. que l'on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(n)}$ pour tout entier n d'où l'on déduit que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = 0$; ce qui prouve que $\mathfrak{p}$ est le saturé de 0 dans A pour $\mathfrak{p}$.

6.1.2. Définitions :

1) On dira que l'anneau A possède la condition C_0 si tout entier premier minimal non maximal vérifie les conditions du lemme ci-dessus.

2) On dira que l'anneau A possède la condition C_1 si pour tout sous-module quasi-injectif N du co-générateur minimal E de Mod_A on a $N = r_{E(N)}(\ell(N))$.

3) On dira que l'anneau A possède la condition C_2 si tout idéal premier minimal de A est contenu dans un seul idéal maximal.

Il est clair d'après 1.1. qu'un Q-anneau possède la condition C_1 ; les lemmes suivants montrent qu'un Q-anneau noethérien vérifie les conditions C_0 et C_2.

<u>6.1.3.</u> Un Q-anneau noethérien vérifie C_0 et est de dimension de Krull $\leqslant 1$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non maximal de A et E le co-générateur minimal de Mod_A qui s'écrit $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \text{ maximal}} E(A/\mathfrak{m})$. Notons $A_1 = r_{E(A/p)}(p)$, alors A_1 est le corps des fractions de A/p d'après (7) théorème 3.4. On va montrer que A_1 est injectif et que $\mathfrak{p}$ est minimal ce qui prouvera le lemme.

Comme A est un Q-anneau il suffit de montrer que le module fidèle $N = E \oplus A_1$ est quasi-injectif pour que A_1 soit injectif. Pour montrer que N est quasi-injectif il suffit de prouver que tout morphisme $N \to E(N)$ a une image dans N ; comme $E(N) = E \oplus E(A/\mathfrak{p})$ on voit aisément qu'il suffit de prouver que tout morphisme $E \to E(A/\mathfrak{p})$ est nul. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A et $f : E(A/\mathfrak{m}) \to E(A/\mathfrak{p})$ un morphisme supposé $\neq 0$, alors il existe $x \in E(A/\mathfrak{m})$ tel que $f(x) \neq 0$, mais $\mathrm{Ann}(x)$ est $\mathfrak{m}$-primaire et $\mathrm{Ann}(f(x))$ est p-primaire donc il existe n tel que :

$$\mathfrak{m}^n \subset \mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(f(x)) \subset \mathfrak{p} ,$$

ce qui est absurde car $\mathfrak{p}$ est non maximal. Comme $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \text{ maximal}} E(A/\mathfrak{m})$ ceci prouve que tout morphisme $E \to E(A/\mathfrak{p})$ est nul et A_1 est injectif, ce qui prouve le premier point. Pour montrer que $\dim_K A \leqslant 1$ il faut prouver que $\mathfrak{p}$ est minimal, or on a $A_1 = E(A/\mathfrak{p})$ donc d'après (7) théorème 3.4. on a $\mathfrak{p} = \ell(A_1) = \ell(E(A/\mathfrak{p})) = \bigcap_n \mathfrak{p}^{(n)}$ et pour tout entier n on a $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}$, on en déduit aisément que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = 0$ donc l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps et $\mathfrak{p}$ est premier minimal.

<u>6.1.4.</u> Un anneau noethérien intègre qui vérifie C_1 est local.

Supposons le contraire, il existe deux idéaux maximaux distincts non nuls, soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Comme A est noethérien intègre on a $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$ et $E(A/\mathfrak{m})$ est un module fidèle ((7) proposition 3.4.), de même que $E(A/\mathfrak{n})$. Comme A est noethérien commutatif il résulte du théorème 4.9. de (13) que $\mathrm{Ass}_A(E(A/\mathfrak{m})) = \{\mathfrak{m}\}$, de plus on a $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{n}) = \{\mathfrak{n}\}$ et d'après la proposition 6.6. de (13) le module $E(A/\mathfrak{m}) \oplus A/\mathfrak{n}$ est quasi-injectif. Ce module est fidèle et A vérifie C_1 donc ce module est injectif et $A/\mathfrak{n}$ aussi, i.e. $A/\mathfrak{n} = E(A/\mathfrak{n})$ ce qui est absurde car $E(A/\mathfrak{n})$ est un module fidèle ; d'où le résultat.

6.1.5.
1) Si A est noethérien et vérifie C_1 alors tout anneau quotient de A vérifie C_1.
2) Si A est noethérien de dimension $\leqslant 1$ et vérifie C_0 alors tout anneau quotient de A vérifie C_0.
3) Les conditions C_0 et C_1 se conservent par localisation par rapport à un idéal maximal.

1) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de l'anneau noethérien A qui vérifie C_1. Soit E le co-générateur minimal de Mod_A, soit $R' = r_E(\mathfrak{a})$, alors d'après 3.2. E' est un $A' = A/\mathfrak{a}$-module injectif. D'autre part pour un idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $x \in E(A/\mathfrak{m})$ la relation $\mathfrak{a}x = 0$ implique $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{m}$ d'où la relation :

$$E' = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{m}\ \text{maximal} \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}}} r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{a}) \ ;$$

et ceci prouve que E' est le co-générateur minimal de $\mathrm{Mod}_{A'}$. Comme E' est contenu dans E tout sous-A'-module quasi-injectif de E' peut être considéré comme un sous-A-module quasi-injectif de E et on vérifie alors aisément que si A vérifie C_1 il en est de même de A'.

2) Soit A un anneau noethérien de dimension $\leqslant 1$ vérifiant C_0 et $A' = A/\mathfrak{a}$ un quotient de A. Un idéal premier minimal non maximal de A' est de la forme $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal non maximal de A, comme $\mathfrak{p}$ est le saturé de 0 dans A pour $\mathfrak{p}$ on vérifie aisément que $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ est le saturé de 0 dans A' pour $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$.

3) La stabilité de C_0 résulte de la caractérisation d) de 6.1.1. et de la proposition 6 page 146 du chapitre IV de (21). Montrons la stabilité de C_1. Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. L'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est local et le co-générateur minimal de $\mathrm{Mod}_{A_{\mathfrak{m}}}$ est $E_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ qui n'est autre que $E_A(A/\mathfrak{m}) = E$ d'après 6.0. Soit Q un sous-$A_{\mathfrak{m}}$-module quasi-injectif de E muni de sa structure de $A_{\mathfrak{m}}$-module, alors Q est aussi un sous-A-module quasi-injectif de E et d'après la condition C_2 on a $Q = r_E(\ell_A(Q))$ car E est un sous-module du co-générateur minimal de Mod_A. Il résulte alors des relations 6.0.1. et 6.0.2. que :

$$Q = r_E(\ell_A(Q)) = r_E(\ell_A(Q)A_{\mathfrak{m}}) = r_E(\ell_{A_{\mathfrak{m}}}(Q)) \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Dans ce qui suit on pourra noter $F_{\mathfrak{p}}$ le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ pour un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A.

Avec cette notation on a :

<u>6.1.6.</u> Soit A un anneau noethérien semi-local de dimension 1 vérifiant C_o, soit N un A-module quasi-injectif, alors il existe des parties Ω_o et Ω_1 de Spec(A) telles que :

(1) On a
$$N = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\Omega_o} F_{\mathfrak{p}}^{(I_{\mathfrak{p}})} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\Omega_1} N(\mathfrak{p})^{(J_{\mathfrak{p}})},$$
et les idéaux $\mathfrak{p}\in\Omega_o$ (resp. $\mathfrak{p}\in\Omega_1$) sont des idéaux premiers non maximaux (resp. premiers maximaux) et $N(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p}\in\Omega_1$ est un sous-module quasi-injectif de $E(A/\mathfrak{p})$;

(2) Si Ω est l'ensemble des $\mathfrak{p}\in\Omega_o$ tels que pour tout idéal premier non minimal $\mathfrak{m}\in\Omega_1$ on ait $\mathfrak{p}\not\subset\mathfrak{m}$ et si
$$M = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\Omega} F_{\mathfrak{p}} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\Omega_1} N(\mathfrak{p})$$
alors les annulateurs de M et de N coïncident.

D'abord soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et Q un sous-module quasi-injectif non nul de $F_{\mathfrak{p}}$, on va montrer que $Q = F_{\mathfrak{p}}$. Soit $x\in F_{\mathfrak{p}}$, par essentialité de Q dans $F_{\mathfrak{p}}$ il existe $a\in A$ tel que $ax\in Q$ et $ax\neq 0$; comme $\mathfrak{p}F_{\mathfrak{p}} = 0$ on a $a\notin\mathfrak{p}$; d'après le lemme 3.2. de (7) le morphisme $y\mapsto ay$ est un automorphisme de $E(A/\mathfrak{p})$, soit u son inverse, on a $u(ax) = x$ et comme Q est quasi-injectif on a $u(Q)\subset Q$ ce qui prouve que $x\in Q$ et $Q = F_{\mathfrak{p}}$.

(1) Soit maintenant N un A-module quasi-injectif, on décompose N en somme directe de modules quasi-injectifs indécomposables ; deux facteurs qui ont la même enveloppe injective sont isomorphes d'après le lemme 6.10. de (13) ; en utilisant la condition C_o, le fait que la dimension de A soit A et la proposition 3.1. de (7) on a la décomposition de (1).

(2) Soit $\mathfrak{p}\in\Omega_o$ tel que pour un idéal premier non minimal $\mathfrak{m}\in\Omega_1$ on ait $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$. Le module $F_{\mathfrak{p}}\oplus N(\mathfrak{m}) = Q$ est quasi-injectif comme facteur direct de N, donc est stable par les endomorphismes de $E(Q) = F_{\mathfrak{p}}\oplus E(A/\mathfrak{m})$. Soit $x\in r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p})$, on a $\mathfrak{p}\subset \mathrm{Ann}(x)$, donc il existe un morphisme :
$$A/\mathfrak{p}\to A/\mathrm{Ann}(x)\hookrightarrow E(A/\mathfrak{m})$$

qui se prolonge en un morphisme $u : F_{\mathfrak{p}} \to E(A/\mathfrak{m})$; prolongeons u par 0 sur $E(A/\mathfrak{m})$ on obtient alors un morphisme $v : E(Q) \to E(Q)$ tel que $v(Q) \subset Q$. En particulier $x = u(1+\mathfrak{p}) = v(1+\mathfrak{p}) \in Q$ et on a :

$$r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p}) \subset N(\mathfrak{m}) .$$

On en déduit la relation :

$$\ell(N(\mathfrak{m})) \subset \ell(r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p})) .$$

Montrons maintenant que $\ell(r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.

Posons $T = r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p})$, alors d'après 6.0.2. on a $T = r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}})$, donc d'après 3.1. $\ell_{A_{\mathfrak{m}}}(T) = pA_{\mathfrak{m}}$. Soit $j : A \to A_{\mathfrak{m}}$ le morphisme canonique, on a alors avec 6.0.1. la relation :

$$\ell_A(T) = j^{-1}(\ell_{A_{\mathfrak{m}}}(T)) = j^{-1}(pA_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{p} .$$

Finalement pour $\mathfrak{p} \in \Omega_0$ contenu dans un idéal premier non maximal $\mathfrak{m} \in \Omega_1$, on a la relation :

$$\ell(N(\mathfrak{m})) \subset \mathfrak{p} = \ell(F_{\mathfrak{p}}) ,$$

et la conclusion de (2) est alors claire.

Remarquons que ceci prouve que si N est quasi-injectif et s'écrit comme dans 6.1.6. (1) on a pour tout idéal premier non minimal $\mathfrak{m}$ la relation :

$$N(\mathfrak{m}) \supset \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\Omega_0 \\ \mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}}} r_{E(A/\mathfrak{m})}(\mathfrak{p}) .$$

Remarquons aussi que, avec les notations de 6.1.6. (1), l'ensemble $\Omega_0 \cup \Omega_1$ n'est autre que $\mathrm{Ass}_A(N)$ et le lemme 6.1.6. exprime que pour tout module quasi-injectif N sur un anneau noethérien semi-local de dimension 1 vérifiant C_0 on peut trouver un module quasi-injectif M qui est fidèle (resp. injectif) si et seulement si N l'est et de plus M n'a pas d'idéaux associés immergés.

<u>6.1.7.</u> Soit A un anneau noethérien semi-local de dimension 1 vérifiant les conditions C_0 et C_2 et tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ et pour tout sous-module quasi-injectif N de $E(A/\mathfrak{m})$ on ait $N = r_{E(A/\mathfrak{m})}(\ell(N))$ alors tout A-module quasi-injectif et fidèle est injectif.

Soit N un A-module quasi-injectif et fidèle. Supposons que N se décompose comme dans 6.1.6. et soient M, Ω_0, Ω_1, Ω définis comme dans 6.1.6. Pour montrer que N est injectif il suffit de montrer que le module quasi-injectif est fidèle M

l'est puisque l'anneau A est noethérien. Pour cela il suffit de montrer que pour tout idéal $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ le module $N(\mathfrak{m})$ est injectif.

(1) - Soit $\mathfrak{m}$ un idéal premier d'un anneau noethérien A et N un sous-module quasi-injectif de $E(A/\mathfrak{m})$, soit $\ell(N) = Q_1 \cap \dots \cap Q_u$ une décomposition primaire réduite de $\ell(N)$ dans A, alors pour $i = 1,\dots,n$ la racine de Q_i est contenue dans $\mathfrak{m}$.

En effet, d'abord $\ell(N)$ est saturé pour $\mathfrak{m}$ dans A car si $a \in A$ et $b \notin \mathfrak{m}$ sont tels que $baN = 0$ on a $aN = o$ d'après le lemme 3.2. de (7) et $a \in \ell(N)$. Ensuite il résulte de la proposition 6 (iii) page 146 du chapitre IV de (21) qu'une décomposition primaire réduite de $\ell(N)$ dans A soit $\ell(N) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ s'obtient à partir d'une décomposition primaire réduite de $\ell(N)_{\mathfrak{m}}$ dans $A_{\mathfrak{m}}$ soit $\ell(N)_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{i=1}^{n} Q'_i$ en prenant $Q_i = j^{-1}(Q'_i)$ où $j : A \to A_{\mathfrak{m}}$ est le morphisme canonique donc $Q_i \subset \mathfrak{m} = j^{-1}(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ et la racine de Q_i est aussi contenue dans $\mathfrak{m}$.

(2) - Soit $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ un idéal premier maximal et non minimal et soit $\ell(N(\mathfrak{m})) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ une décomposition primaire réduite de $\ell(N(\mathfrak{m}))$ dans A, il résulte de (1) que la racine $\mathfrak{p}_i^{\mathfrak{m}}$ de $Q_i^{\mathfrak{m}}$ est contenue dans $\mathfrak{m}$.

Soit $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ un idéal premier maximal et minimal, il résulte de (1) que $\{\ell(N(\mathfrak{m})\}$ est alors une décomposition primaire réduite de $\ell(N(\mathfrak{m})$ dans A.

Il résulte alors de la condition C_2, de la définition de Ω, et de ce qui précède que :

$$0 = \ell(N) = \ell(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Omega} \mathfrak{p} \cap \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\Omega_1 \\ \mathfrak{p}\text{ minimal}}} \ell(N(\mathfrak{p})) \cap \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\in\Omega_1 \\ \mathfrak{m}\text{ non minimal}}} \bigcap_{i=1}^{S_{\mathfrak{m}}} Q_i^{\mathfrak{m}}$$

est une décomposition primaire de 0 dans A telle que deux idéaux primaires distincts $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ intervenant dans cette décomposition aient des racines distinctes ; de plus ces racines sont incomparables (pour l'inclusion) sauf si il existe $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ et non minimal, et i,j avec $1 \leqslant i \leqslant S_{\mathfrak{m}}$, $1 \leqslant j \leqslant S_{\mathfrak{m}}$; tels que $\mathfrak{a}_1 = Q_i^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{a}_2 = Q_j^{\mathfrak{m}}$ et $\mathfrak{m}$ et la racine de $\mathfrak{a}_1$ ou de $\mathfrak{a}_2$.

(3) - Soit $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ il résulte de la proposition 3 page 141 du chapitre IV de (21) et de la proposition 10 page 89 du chapitre II de (21) que l'on a dans $A_{\mathfrak{m}}$ les relations :

$0 = \ell(N(\mathfrak{m})$ si $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ et si $\mathfrak{m}$ est premier minimal,

ou

$0 = \bigcap_{i=1}^{S_{\mathfrak{m}}} (Q_i^{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}}$ si $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ et si $\mathfrak{m}$ est non minimal.

Donc pour $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ on a $\ell(N(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m}} = 0$ dans $A_{\mathfrak{m}}$.

On a alors en utilisant la dernière hypothèse de 6.1.7. et la relation 6.0.2. les relations suivantes :

$$N(\mathfrak{m}) = r_{E(A/\mathfrak{m})}(\ell(N(\mathfrak{m}))) = r_{E(A/\mathfrak{m})}(0) = E(A/\mathfrak{m}) ,$$

qui prouvent que pour $\mathfrak{m} \in \Omega_1$ le module $N(\mathfrak{m})$ est injectif; ce qui achève la démonstration.

6.2. Etude du cas local :

Pour un anneau local noethérien A de radical $\mathfrak{m}$ notons $\hat{A}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de A et $E = E(A/\mathfrak{m})$. Il résulte de la structure de $\hat{A}$-module de E que tout sous-A-module de E en est un sous-$\hat{A}$-module et ainsi est quasi-injectif (6.0.).

Il résulte du théorème 4.2. de (7) que pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$ et pour tout sous-module N de E on a les relations :

6.2.0. $$\mathfrak{a}' = \ell_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}')) \quad \text{et} \quad N = r_E(\ell_{\hat{A}}(N)) .$$

6.2.1. Lemme :

Pour un anneau local noethérien A il y a équivalence entre :

a) pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$ on a $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{}$;

b) pour tout sous-module N de E on a $N = r_E(\ell_A(N))$.

a) $\Longrightarrow$ b). Soit N un sous-module de E. Comme $\ell_A(N) = \ell_{\hat{A}}(N) \cap A$ il résulte de a) que $\ell_{\hat{A}}(N) = \ell_A(N)\hat{}$. Soit $x \in E$ tel que $\ell_A(N)x = 0$ et $a \in \ell_A(N)\hat{}$, a est limite d'une suite de Cauchy (a_n) d'éléments de $\ell_A(N)$. Il existe n, p tels que $x \in A_n = r_E(\mathfrak{m}^n)$ et pour $q \geqslant p$ $a_p - a_q \in \mathfrak{m}^n$ et on a $a_p x = ax$ par définition de la structure de $\hat{A}$-module de E, mais $a_p x = 0$ car $a_p \in \ell_A(N)$ ce qui prouve que $\ell_A(N)\hat{}\, x = 0$ et ainsi on a :

$$r_E(\ell_A(N)) = r_E(\ell_A(N)\hat{}) = r_E(\ell_{\hat{A}}(N)) = N .$$

b) $\Longrightarrow$ a). On peut montrer aisément comme ci-dessus pour $\ell_A(N)$ que pour un idéal $\mathfrak{a}$ de A on a $r_E(\mathfrak{a}) = r_E(\hat{\mathfrak{a}})$. On a alors les relations suivantes avec 6.2.0. :

6.2.1.1. $$\hat{\mathfrak{a}} = \ell_{\hat{A}}(r_E(\hat{\mathfrak{a}})) = \ell_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a})) .$$

Appliquons l'hypothèse b) à $N = r_E(\mathfrak{a}')$ pour un idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$. On a avec 6.2.0. les relations :

$$\mathfrak{a}' = \ell_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}')) = \ell_{\hat{A}}(r_E(\ell_A(r_E(\mathfrak{a}')))) ;$$

soit avec 6.2.1.1. :

$$\mathfrak{a}' = \ell_A(r_E(\mathfrak{a}'))^\wedge = (\ell_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}')) \cap A)^\wedge = (\mathfrak{a}' \cap A)^\wedge$$

d'où le lemme.

<u>6.2.2.</u> <u>Corollaire</u> : Soit A un Q-anneau local noethérien de complété $\mathfrak{m}$-adique $\hat{A}$,
(1) la correspondance $\mathfrak{a} \mapsto \hat{\mathfrak{a}}$ définit une bijection entre les idéaux de A et ceux de $\hat{A}$.
(2) cette bijection conserve les idéaux premiers.

(1) Comme A est un anneau de Zariski pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique on a pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A la relation :

<u>6.2.2.0.</u> $\mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{a}} \cap A$.

D'autre part comme A est un Q-anneau, d'après 1.1. l'assertion b) du lemme 6.2.1. est vérifiée pour tous les sous-modules de E, on a donc pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$ la relation :

6.2.2.1. $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)^\wedge$.

Les relations 6.2.2.0. et 6.2.2.1. donnent la première assertion.

(2) Pour démontrer la seconde assertion on utilise le théorème 6.2.4. qui sera démontré plus loin ; comme aucun résultat avant 6.3.2. n'utilise cette assertion il n'y a pas de cercle vicieux. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A alors $A/\mathfrak{p}$ est un Q-anneau intègre, donc son complété $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$-adique $(A/\mathfrak{p})^\wedge$ est aussi intègre d'après 6.2.4. ; et comme $(A/\mathfrak{p})^\wedge = \hat{A}/\hat{\mathfrak{p}}$ d'après le corollaire 2 page 258 du Tomme II de "Samuel-Zariski" l'idéal $\hat{\mathfrak{p}}$ est premier dans $\hat{A}$. Il est clair que pour tout idéal premier $\mathfrak{a}$ de $\hat{A}$ l'idéal $\mathfrak{a} \cap A$ est premier dans A d'où la seconde assertion.

Cette seconde assertion de 6.2.2. est due à Renault.

Pour simplifier les énoncés on supposera <u>dans les deux résultats suivants</u> que l'anneau <u>A est non artinien</u>.

<u>6.2.3.</u> <u>Théorème</u> : Pour un anneau local noethérien A de radical et de complété $\mathfrak{m}$-adique $\hat{A}$ il y a équivalence entre :

a) A est un Q-anneau ;

b) A est de dimension 1, vérifie C_o, et pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$ on a $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)^\wedge$;

c) A est de dimension 1, vérifie C_o, et pour tout sous-module N de E on a $N = r_E(\ell_A(N))$.

L'implication a) $\Longrightarrow$ c) résulte de 1.1. et de 6.1.3. en se rappelant que tout sous-module non nul de $E = E(A/\mathfrak{m})$ est quasi-injectif et essentiel dans E. L'équivalence de b) et c) résulte immédiatement de 6.2.1.

Montrons que c) $\Longrightarrow$ a). Pour cela on utilise la proposition 2.9. b) de (16) i.e. on montre que pour tout quotient A' de A tout A'-module quasi-injectif et fidèle est injectif. Soit A' un quotient de A, si A' est artinien la conclusion résulte de 1.1.1. Sinon A' est un anneau local noethérien de dimension 1 qui vérifie C_o et C_1 d'après 6.1.5. et la conclusion résulte de 6.1.7.

On suppose toujours que l'anneau A n'est pas artinien, alors :

<u>6.2.4.</u> <u>Théorème</u> : Pour un anneau local noethérien intègre A il y a équivalence entre

a) A est un Q-anneau ;

b) A est de dimension 1 et le complété $\hat{A}$ de A est un anneau intègre.

a) $\Longrightarrow$ b). D'abord si $\mathfrak{m}$ est le radical de A tout idéal non nul de A est $\mathfrak{m}$-primaire d'après 6.1.3. Soit $\mathfrak{a}'$ un idéal de $\hat{A}$, non nul. Il résulte de 6.2.1. a) et de 1.1. que $\mathfrak{a}' \cap A \neq 0$ donc il existe n tel que $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}' \cap A$ d'où $\hat{\mathfrak{m}}^n = \hat{\mathfrak{m}}^n \subset (\mathfrak{a}' \cap A)^\wedge = \mathfrak{a}'$, et tout idéal non nul de $\hat{A}$ est $\hat{\mathfrak{m}}$-primaire ; ce qui prouve que $\hat{\mathfrak{m}}$ est le seul idéal premier non nul de $\hat{A}$, comme A n'est pas artinien $\hat{A}$ n'est pas artinien et 0 est donc premier dans $\hat{A}$ et d'après 6.2.3. b) on a donc a) $\Longrightarrow$ b).

b) $\Longrightarrow$ a). Comme A est de dimension 1 il en est de même de $\hat{A}$. Comme tout quotient propre de A est artinien donc est un Q-anneau, il suffit d'après la proposition 2.9. de (16) de montrer que tout A-module quasi-injectif et fidèle N est injectif. Comme un module quasi-injectif qui contient une copie de A est injectif on peut supposer en utilisant 6.1.6. et le fait que A soit intègre que N s'écrit $N = N_o^{(I)}$ où $N_o \subset E = E(A/\mathfrak{m})$ est un module fidèle. Le A-module N_o est un $\hat{A}$-module, si l'idéal $\ell_{\hat{A}}(N_o)$ est non nul c'est un idéal $\hat{\mathfrak{m}}$-primaire et il existe n tel que $\hat{\mathfrak{m}}^n = \hat{\mathfrak{m}}^n \subset \ell_{\hat{A}}(N_o)$ d'où :

$$\mathfrak{m}^n \subset \ell_{\hat{A}}(N_o) \cap A = \ell_A(N_o) .$$

Comme $\ell_A(N_o) = 0$ et comme A est intègre et non artinien ceci est absurde. On a donc $\ell_{\hat{A}}(N_o) = 0$ et $N_o = E$ d'après 6.2.0., ce qui prouve que N est injectif et achève la démonstration.

Il résulte de 6.1.4. qu'un Q-anneau noethérien intègre est local et ainsi le théorème précédent caractérise les Q-anneaux noethériens intègres.

6.2.5. Corollaire : Tout anneau de valuation discrète est un Q-anneau.

En effet, le complété d'un anneau de valuation discrète est encore un anneau de valuation discrète donc est intègre.

6.3. Cas général.

Remarquons d'abord qu'il résulte de 2.5. qu'un Q-anneau noethérien est semi-local, i.e. a un nombre fini d'idéaux maximaux. Les résultats de 6.2. permettent de caractériser les Q-anneaux noethériens commutatifs, complets pour la topologie R-adique.

On a le théorème suivant :

6.3.1. Théorème : Pour un anneau noethérien et complet A il y a équivalence entre :

a) A est un Q-anneau ;

b) A est un anneau semi-local, de dimension $\leqslant 1$ et vérifie C_0 ;

c) A est produit fini d'anneaux locaux complets, de dimension $\leqslant 1$ et vérifiant C_0 .

L'implication a) $\Longrightarrow$ b) résulte de 2.5. et de 6.1.3.

Montrons que c) $\Longrightarrow$ a) . D'après 6.2.3. c) et la seconde formule de 6.2.0. un anneau local noethérien de dimension 1 , complet et vérifiant C_0 est un Q-anneau; l'assertion c) $\Longrightarrow$ a) résulte alors de 1.1.1. et 1.3.

Montrons que b) $\Longrightarrow$ c) . Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de l'anneau semi-local A . D'après le corollaire de la page 59 du chapitre III de (21) on a $A = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Or $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ est un anneau local noethérien et complet pour la topologie définie par son radical ((21), chapitre III, proposition 1.9. page 53 et 8 page 70), la dimension de $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ est évidemment $\leqslant 1$ et $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ vérifie C_0 d'après 6.1.5.

6.3.2. Proposition : Soit A un Q-anneau noethérien de radical R , alors le complété R-adique de A est un Q-anneau.

Il résulte du corollaire de la page 59 du chapitre III de (21) et de 1.3. qu'il suffit de prouver la proposition lorsque A est local.

Soit donc A un Q-anneau local noethérien de radical $\mathfrak{m}$ et soit $\hat{A}$ son complété $\mathfrak{m}$-adique qui est local noethérien complet et de dimension $\leqslant 1$. Si $\hat{A}$ est de dimension 0 , alors $\hat{A}$ est artinien donc est un Q-anneau et on peut supposer que $\hat{A}$ est de dimension 1. Soit alors $\mathfrak{p}'$ un idéal premier minimal non maximal de

$\hat{A}$, alors d'après 6.2.2. on a $\mathfrak{p}' = \hat{\mathfrak{p}}$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, minimal et non maximal, de plus $\mathfrak{p}$ appartient à la décomposition primaire de 0 dans A, i.e. il existe un idéal $\mathfrak{a}$, non nul, de A tel que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{a} = 0$; on a donc dans $\hat{A}$ la relation $\mathfrak{p}' \cap \hat{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{p}} \cap \hat{\mathfrak{a}} = 0$ qui prouve que $\mathfrak{p}'$ est dans la décomposition primaire de 0 dans $\hat{A}$. Ainsi $\hat{A}$ vérifie la condition C_o et $\hat{A}$ est un Q-anneau d'après 6.3.1. c).

6.3.3. Remarques et exemples :

Soit A un anneau noethérien semi-local de dimension 1 et réduit (i.e. sans éléments nilpotents).

1. - Si A est un anneau complet pour la topologie R-adique il résulte de 6.3.1. que A est un Q-anneau.

2. - Si A n'est pas complet soit $\hat{A}$ le complété de A, si $\hat{A}$ est réduit il résulte de la remarque ci-dessus que $\hat{A}$ est un Q-anneau. Ceci se produit par exemple lorsque l'anneau A est excellent ((28), 7.8.2.), cependant même dans ce cas l'anneau A n'est pas toujours un Q-anneau comme le montre l'exemple suivant.

3. - Soit B l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$ et $p = X(X^2+Y^2) + X^2-Y^2$. On vérifie aisément que pB est un idéal premier de B et ainsi l'anneau B/pB est intègre, noethérien, et de dimension 1 car $0 \subset pB \subset XB + YB$ est une chaîne maximale d'idéaux premiers de B qui est de dimension 2. Soit $\mathfrak{n} = XB+YB$ et soit A l'anneau $(B/pB)_{\mathfrak{n}/pB}$. L'anneau A est local, noethérien, intègre, de dimension 1 et son complété pour la topologie $R(A)$-adique s'identifie au complété de B/pB pour la topologie $\mathfrak{n}/pB$-adique d'après la proposition 8 page 56 du chapitre III de (21) ; ce dernier complété n'est autre que $\hat{B}/p\hat{B}$ où $\hat{B} = \mathbb{C}[[X,Y]]$. L'anneau A est excellent d'après (28) 7.8.3.(i) et (iii). On va voir maintenant que $\hat{A} = \hat{B}/p\hat{B}$ n'est pas intègre. Pour cela il suffit de remarquer que dans l'anneau $\hat{B}$ on peut écrire les relations :

$$p = (X-1)Y^2 + X^2(X+1) = (X-1)(Y^2-X^2(X+1)(1+X+X^2+\ldots)) .$$

Ceci prouve que l'anneau A n'est pas un Q-anneau d'après 6.3.1., mais $\hat{A}$ est un Q-anneau d'après la remarque précédente. En particulier ceci montre que la proposition 6.3.2. n'admet pas de réciproque.

6.3.4. Proposition : Soit A un Q-anneau noethérien, si A est réduit alors $\hat{A}$ est réduit.

Cette proposition généralise d'une certaine façon, l'assertion a) $\Longrightarrow$ b) de 6.2.4.

Soit A un Q-anneau noethérien réduit, l'anneau $\hat{A}$ est un Q-anneau d'après 6.3.2., donc d'après 6.3.1. l'anneau $\hat{A}$ est produit fini des anneaux locaux $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ pour $\mathfrak{m}$ idéal maximal de A. Il suffit donc de montrer la proposition lorsque A est local d'idéal maximum $\mathfrak{m}$. D'après 6.2.2. (2) tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}'$ de $\hat{A}$ s'écrit $\hat{\mathfrak{p}}$ pour un idéal premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ qui est minimal dans A ; comme 0 est l'intersection des idéaux premiers minimaux de A on voit que 0 est aussi l'intersection des idéaux premiers minimaux de $\hat{A}$, ce qui prouve que $\hat{A}$ est sans élément nilpotent non nul donc est réduit.

6.3.5. Théorème : Pour un anneau noethérien A les assertions suivantes sont équivalentes :

a) A est un Q-anneau ;

b) A est semi-local, de dimension $\leqslant 1$ et tel que :

C_o) tout idéal premier minimal non maximal est dans la décomposition primaire de 0,

C_1) pour tout sous-module quasi-injectif N du cogénérateur minimal E de Mod_A on a $N = r_{E(N)}(\ell(N))$;

c) A est semi-local et tel que :

- pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est un Q-anneau, et

C_2) tout idéal premier minimal est contenu dans un seul idéal maximal ;

d) A est semi-local, de dimension $\leqslant 1$, vérifie les conditions C_o et C_2 ci-dessus et de plus, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ et tout sous-module quasi-injectif N de $E(A/\mathfrak{m})$ on a $N = r_{E(A/\mathfrak{m})}(\ell(N))$.

a) $\Longrightarrow$ b) résulte par exemple de 6.1.3.

b) $\Longrightarrow$ c). Il résulte de 6.1.5. (3) et de 6.2.3. c) que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est un Q-anneau. Pour un idéal premier minimal non maximal $\mathfrak{p}$ de A l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est intègre et vérifie C_1 d'après 6.1.5. donc est local d'après 6.1.4. et A vérifie C_2.

c) $\Longrightarrow$ d). A est de dimension $\leqslant 1$ d'après 6.1.3. Il résulte aussi de 6.1.3. que pour un idéal maximal $\mathfrak{m}$ l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ vérifie C_o En utilisant 6.1.1. b) et la proposition 3 page 141 du chapitre IV de (21) on en déduit que A vérifie la condition C_o. La dernière condition de d) résulte de la relation $E_A(A/\mathfrak{m}) = E_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et du fait que A est un Q-anneau.

d) $\Longrightarrow$ a) . D'après 6.1.5. tout anneau quotient de A vérifie C_o . On vérifie aisément que la condition C_2 et la dernière condition de d) sont vérifiées pour tout anneau quotient de A . Ainsi tout anneau quotient de A est artinien ou vérifie les conditions de d).

En utilisant 1.1.1. et 6.1.7. on voit alors que pour tout quotient A' de A tout A'-module quasi-injectif et fidèle est injectif et A est un Q-anneau d'après la proposition 2.9. de (16).

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE -

(1) H. BASS, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 1960, pp. 466-488.
(2) N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 2, Hermann 1962.
(3) N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 8, Hermann 1958.
(4) N. CHAPTAL, C.R. Ac. Sc. t. 264, (23 janvier 1967), série A, p. 173.
(5) J.Y. CHAMARD, C.R. Ac. Sc. t. 269, (6 octobre 1969), pp. 556-559.
(6) K.R. FULLER, Arch. Math. vol. XX, 1969, pp. 495-502.
(7) E. MATLIS, Pac. J. of Math., vol. 8, 1958, pp. 511-528.
(8) C. NITÃ, C.R. Ac. Sc., t. 268, (13 janvier 1968), p. 88.
(9) B. OSOFSKY, Journal of Algebra, 4, 1966, pp. 373-387.
(10) N. POPESCU, C. Nastasescu. Bull. Soc. Math. F. 96, 1968, pp. 357-368.
(11) N. POPESCU, T. Spircu. C.R. Ac. Sc. 268 (17 février 1969), p. 376.
(12) G. RENAULT, C.R. Ac. Sc. 267, (25 novembre 1968), p. 792.
(13) G. RENAULT, J. Fort. Séminaire d'Algèbre 67-68. Fac. des Sc. de Poitiers.
(14) G. RENAULT, J. Math. Pures et Appliquées, 46, 1967, pp. 203-214.
(15) E.A. RUTTER, Pac. J. of Math., vol. 30, n° 3, 1969, pp. 777-784.
(16) C. TISSERON, C.R. Ac. Sc., t. 268, (9 juin 1969), p. 1377.
(17) C. TISSERON, Pub. Dépt. Math. de la Fac. Sc. de Lyon, 1969, t. 6, fasc. 4.
(18) Y. UTUMI, J. of Algebra, 6, 1967, pp. 56-64.
(19) Y. UTUMI, C. Faith, Arch. Math. XV, 1964, pp. 166-174.
(20) C. FAITH, Lectures on injective modules and quotient rings. Springer Verlag, 1967.
(21) N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Hermann.
(22) B. BALLET, C.R. Ac. Sc. t. 266 (3 janvier 1968), p. 1.

(23) B. BALLET, C.R. Ac. Sc. t. 270 (11 mai 1970), p. 1209.

(24) . OBLOT, C.R. Ac. Sc. t. 270 (11 mai 1970), p. 1212.

(25) G. RENAULT, Sur les anneaux tels que tout module simple soit injectif, d'après J.H. Lozzens. Sem. d'Alg. non commutative, Orsay, 1969-70.

(26) C. FAITH, Nagoya Math. J. T. 27, 1966, pp. 179-191.

(27) P. GABRIEL, thèse, Bull. S.M.F. 1962, t. 90.

(28) A. GROTHENDIECK, E.G.A. IV, 2e partie, Paris P.U.F., 1965, (I.H.E.S. publ. mathématiques, n° 24).

(29) G. RENAULT, C.R. Ac. Sc. T. 271, (6 juillet 1970), p. 12.

(30) C. TISSERON, C.R. Ac. Sc. t. 270 (25 mai 1970), p. 1354.

(31) C. TISSERON, C.R. Ac. Sc. t. 271 (21 décembre 1970), p. 1208.

(32) C. TISSERON, thèse de 3e Cycle, Fac. Sc. de Lyon, 1969.

(33) Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1970, Pub. Math. d'Orsay.

(34) S.K. JAIN, S.H. Mohamed and Surject Singh, Pac. J. Math., 31, n° 1, 1969, pp. 73-79.

-:-:-:-:-:-