

Faculté des Sciences - Centre d'Orsay

PUBLICATIONS DU SEMINAIRE
DE MATHEMATIQUES D'ORSAY

1re année : 1961-62

12508



Secrétariat Mathématique d'Orsay

1963

SEMINAIRE D'ORSAY

1961/1962

Table des matières

DELANGÉ (Hubert).- Théorèmes Taubériens. (6 exposés)

DENY (Jacques).- Les Potentiels Newtoniens d'Energie Finie. (4 exposés)

Synthèse Spectrale dans les Espaces de Dirichlet. (3 exposés)

KAHANE (Jean-Pierre).- Espaces de Suites, Invariants par Translation. (5 exposés)

MALGRANGE (Bernard).- Géométrie Différentielle Complexe. (5 exposés).



Théorèmes tauberiens

I. Définition1) Convergence des séries au sens d'Abel

Théorème d'Abel : $\sum_0^{\infty} u_n$ est convergente et de somme $S \implies \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^{\infty} u_n x^n \text{ converge pour } |x| < 1 \\ \text{sa somme } S(x) \text{ tend vers } S \text{ quand } x \rightarrow 1-0 \end{array} \right.$

La réciproque est fautive (cf. $u_n = (-1)^n$). Cependant

Théorème de Tauber :

$\sum_0^{\infty} u_n x^n$ converge pour $|x| < 1$
 Sa somme tend vers une limite S quand $x \rightarrow 1-0$
 $\sum_1^N n u_n = o(N)$ quand $n \rightarrow \infty$

$\implies \sum_0^{\infty} u_n$ est convergente et de somme S

(la troisième hypothèse est en particulier vérifiée lorsque $u_n = o(\frac{1}{n})$ quand $n \rightarrow \infty$).

Le théorème d'Abel justifie un procédé de sommation des séries divergentes défini de

la façon suivante :

On dira qu'une série $\sum_0^{\infty} u_n$ est sommable et de somme S au sens d'Abel si $\sum_0^{\infty} u_n x^n$ converge pour $|x| < 1$, et si sa somme tend vers une limite finie S quand $x \rightarrow 1-0$

(Grâce au théorème d'Abel, toute série convergente est aussi sommable).

2) Généralisation

On peut, plus généralement, définir un procédé de sommation d'une série $\sum_0^{\infty} u_n$ de la façon suivante : soient $\varphi(n, x)$ une fonction réelle définie pour n entier $\gg 0$ et $x \in E \subset \mathbb{R}$, et $x_0 \in \bar{E}$.

On dira que la série $\sum_0^{\infty} u_n$ a une somme généralisée S si $\sum_0^{\infty} \varphi(n, x) u_n$ est convergente pour tout $x \in E$, et si sa somme $S(x)$ tend vers S quand $x \rightarrow x_0$ en restant dans E .

Cette définition est justifiée si le théorème suivant, que l'on qualifiera d'Abélien,

est vrai :

$$\sum_0^{\infty} u_n \text{ est convergente et de somme } S \implies \begin{cases} \sum_0^{\infty} \varphi(n,x) u_n \text{ converge } \forall x \in E \\ \text{sa somme } S(x) \text{ tend vers } S \text{ quand } x \rightarrow x_0 \text{ en restant sur } \end{cases}$$

Elle n'a d'intérêt que si la réciproque de ce théorème est fausse.

Exemples. Procédé d'Abel : $\varphi(n,x) = x^n$; $E =]-1, +1[$; $x_0 = 1$

_____ de Lambert : $\varphi(n,x) = \frac{x^n(1-x)}{1-x^{n+1}}$; $E =]-1, +1[$; $x_0 = 1$

_____ de Borel : $\varphi(n,x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^p e^{-x}}{p!}$; $E = \mathbb{R}$; $x_0 = +\infty$

3) Cas des intégrales sur un intervalle ouvert

f étant une fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur tout intervalle $[0, T]$, on peut généraliser ainsi la définition de $\int_0^{\infty} f(t) dt$: soient $\varphi(t,x)$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^+ \times E$, et $x_0 \in \bar{E}$.

On dira que f admet une intégrale généralisée S sur $[0, +\infty[$, si $\int_0^{\infty} \varphi(t,x) f(t) dt$ converge pour tout $x \in E$, et tend vers la limite S quand $x \rightarrow x_0$ en restant dans E.

Cette définition est justifiée si on a un "théorème abélien", et n'a d'intérêt que si la réciproque de ce théorème est fausse.

4) Lien entre les cas des séries et des intégrales

Ces cas ne sont pas essentiellement distincts. Dans les deux cas, on considère une fonction s(t) définie pour $t \geq 0$, et à variation bornée dans tout intervalle $[0, A]$:

pour les séries, $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \sum_{n \leq t} v_n & \text{si } t > 0 \end{cases}$, et pour les intégrales : $s(t) = \int_0^t f(u) du$.

On veut définir une limite généralisée S de s(t) quand $t \rightarrow +\infty$.

Pour cela, on considère une fonction $\varphi(t,x)$ définie pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et un point $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que s(t) a une limite généralisée S quand $t \rightarrow \infty$, si

l'intégrale de Stieltjes $Ts(x) = \int_0^{\infty} \alpha(t,x) ds(t)$ existe pour tout $x \in E$, et tend vers la limite S quand $x \rightarrow x_0$ en restant dans E .

La définition est justifiée si le "théorème abélien" suivant est vrai :

$$s(t) \rightarrow S \text{ quand } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \begin{cases} Ts(x) \text{ existe pour tout } x \in E \\ Ts(x) \rightarrow S \text{ quand } x \rightarrow x_0 \end{cases}$$

Elle n'a d'intérêt que si la réciproque de ce théorème est fautive.

Il se peut que si s vérifie une condition supplémentaire (C), la réciproque du théorème abélien soit vraie. Le théorème : " s vérifie (C) \implies réciproque du théorème abélien vraie" sera dit taubérien.

5) Définition d'un théorème abélien et d'un théorème taubérien.

On est finalement amené à la définition suivante :

Soit T une transformation $s \rightarrow Ts$ définie sur une certaine classe de fonctions.

Le théorème : " s a une propriété (P) $\implies Ts$ a une propriété (P')" sera dit abélien ;

Le théorème : " Ts a une propriété (P₁) et s vérifie une condition (C) $\implies s$ a une propriété (P₁)" sera dit taubérien.

Dans les exemples précédents, on avait $P_1 = P'$ et $P'_1 = P$, ce qui ne sera pas toujours le cas : un théorème taubérien peut n'être pas associé à un théorème abélien. D'autre part, les propriétés P considérées peuvent ne pas concerner l'existence de limites, mais d'autres propriétés asymptotiques.

Exemple : Soit s une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^+ et à variation bornée sur tout intervalle fini.

$$\left. \begin{array}{l} s(t) \sim At^\alpha \text{ quand } t \rightarrow \infty \implies \int_0^{\infty} e^{-xt} ds(t) \sim A \cdot \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha} \text{ quand } x \rightarrow +0 \\ \int_0^{\infty} e^{-xt} ds(t) \sim C x^{-\alpha} \\ s(t) \text{ croissante} \end{array} \right\} \implies s(t) \sim \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \text{ (taubérien)} \quad \text{(abélien)}$$

Autre exemple : théorème de Ikehara

Soit s une fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur tout intervalle fini. $f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} s(t) dt$ converge pour $\Re(z) > a > 0$

il existe A tel que pour tout y réel : $f(z) - \frac{A}{z-a}$ tend vers une limite quand $z \rightarrow a + iy$

la fonction s est croissante

$\Rightarrow s(t) \sim Ae^{at}$ quand $t \rightarrow +\infty$

Ce théorème taubérien n'est pas associé à un théorème abélien.

II. Théorème de Hardy et Littlewood

1) Théorème

soit $\sum_0^{\infty} u_n$ une série à termes réels.

$\sum_0^{\infty} u_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$

sa somme $S(x) \rightarrow S$ quand $x \rightarrow 1-0$

$nu_n \gg -M$ pour tout n entier ($M > 0$ fixe)

$\Rightarrow \sum_0^{\infty} u_n$ converge et a pour somme S .

Pour démontrer ce théorème, on utilisera les trois propositions suivantes.

Proposition 1 (Tauber).

$\sum_0^{\infty} u_n x^n$ converge pour $|x| < 1$, sa somme $\rightarrow S$ quand $x \rightarrow 1-0$

$\frac{1}{N} \sum_1^N nu_n \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \sum_0^{\infty} u_n$ converge et a pour somme S .

Proposition 2 (Hardy et Littlewood).

$\sum_0^{\infty} u_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et a pour somme $S(x)$,

$S(x) \sim \frac{A}{(1-x)}$ quand $x \rightarrow 1-0$

$u_n \gg 0$ pour tout n

$\Rightarrow \sum_0^N u_n \sim A.N$ quand $n \rightarrow +\infty$

Proposition 3.

f est une fonction définie et 2 fois dérivable sur $]0, 1[$

$f(x) \rightarrow S$ quand $x \rightarrow 1-0$

$(1-x)^2 f''(x) \gg -M$ ($M > 0$ fixe) pour $0 < x < 1$

$\Rightarrow (1-x)f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1-0$.

2) Démonstration du théorème, les propositions 1, 2, 3 étant admises.

Soit $\sum_0^{\infty} u_n$ une série à termes réels, satisfaisant aux hypothèses du théorème.

$f(x) = \sum_0^{\infty} u_n x^n$ est définie et deux fois dérivable dans $]0, 1[$, et en utilisant

la troisième hypothèse :

$$f''(x) = \sum_2^{\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} \gg -M \sum_2^{\infty} (n-1)x^{n-2} = -\frac{M}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, f satisfait aux hypothèses de la proposition 3, et par suite $(1-x)f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1-0$. Autrement dit :

$$(1-x) \sum_1^{\infty} nu_n x^{n-1} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 1-0.$$

Donc : $(1-x) \sum_0^{\infty} (nu_n + M)x^{n-1} = (1-x) \sum_1^{\infty} nu_n x^{n-1} + M \rightarrow M$ quand $x \rightarrow 1-0$.

soit : $\sum_1^{\infty} (nu_n + M)x^{n-1} \sim \frac{M}{(1-x)}$ quand $x \rightarrow 1-0$.

La série $\sum_1^{\infty} (nu_n + M)$ vérifie donc les hypothèses de la proposition 2, et par suite :

$\sum_1^N (nu_n + M) \sim NM$ quand $N \rightarrow \infty$, c'est à dire : $\frac{1}{N} \sum_1^N nu_n \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

On peut donc appliquer la proposition 1, ce qui achève la démonstration.

3) Démonstration de la proposition 3

On pourrait le faire directement. Mais, en remplaçant $f(x)$ par $f(1-x)$, on est ramené à montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ définie et 2 fois dérivable pour } 0 < x < 1 \\ f(x) \rightarrow S \text{ quand } x \rightarrow +0 \\ x^2 f''(x) \gg -M \text{ pour } 0 < x < 1, (M \geq 0 \text{ fixe}) \end{array} \right\} \Rightarrow x f'(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +0.$$

Soit $h > 0$. Pour $0 < x < \frac{1}{1+h}$, la formule de Taylor donne :

$$f(x+hx) = f(x) + hxf'(x) + \frac{h^2}{2} x^2 f''(\xi) \quad , \quad x < \xi < x + hx < 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} x.f'(x) &= \frac{1}{h} [f(x+hx) - f(x)] - \frac{h(x)}{2} \xi^2 f''(\xi) \\ x.f'(x) &\leq \frac{1}{h} [f(x+hx) - f(x)] + \frac{h}{2} \cdot M \end{aligned}$$

d'où $\limsup_{x \rightarrow 0} x f'(x) \leq M \frac{h}{2}$, et puisque $h > 0$ est arbitraire : $\limsup_{x \rightarrow 0} x f'(x) \leq 0$.

Prenons ensuite $0 < h < 1$ et $0 < x < 1$ et appliquons la formule de Taylor :

$$f(x - hx) = f(x) - hx f'(x) + \frac{h^2 x^2}{2} f''(\xi) \quad 0 < x - hx < \xi < x < 1.$$

$$x f'(x) = \frac{1}{h} [f(x) - f(x - hx)] + \frac{h(x)^2}{2} \frac{1}{\xi^2} f''(\xi)$$

$$x f'(x) \geq \frac{1}{h} [f(x) - f(x - hx)] - \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{(1-h)^2} \cdot M$$

d'où $\liminf_{x \rightarrow 0} x f'(x) \geq 0$ puisque h est arbitrairement petit.

En groupant les deux résultats, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$, C.Q.F.D.

4) Démonstration de la proposition 1.

On va démontrer plus généralement ceci :

Soit $s(t)$ une fonction définie pour $t \geq 0$ et à variation bornée dans tout intervalle fini $[0, T]$.

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^\infty e^{-xt} ds(t) \text{ converge pour tout } x > 0 \text{ et } = f(x) \\ \int_0^t u ds(u) = o(t) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies f\left(\frac{1}{t}\right) - s(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

on retrouve la proposition 1 en posant $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \\ \sum_{n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0 \end{cases}$ et en remplaçant x par e^{-x} .

Posons $\delta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u ds(u)$ pour $t > 0$. L'hypothèse entraîne que $|\delta(t)| \leq M$ fixe pour $t > 0$ et que $\delta(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. On a $\delta(t) = s(t) - \frac{1}{t} \int_0^t s(u) du$ (intégration par parties).

Posons encore : $S(t) = \int_0^t s(u) du$.

Si t et x sont > 0 , on obtient en intégrant par parties :

$$\int_x^{tx} \frac{s(u)}{u} du = \frac{S(tx)}{tx} - \frac{S(x)}{x} + \int_x^{tx} \frac{S(u)}{u^2} du,$$

$$\text{d'où : } \frac{S(tx)}{tx} - \frac{S(x)}{x} = \int_x^{tx} \left[\frac{s(u)}{u} - \frac{S(u)}{u^2} \right] du = \int_x^{tx} \frac{\delta(u)}{u} du ,$$

$$\text{d'où } s(tx) - s(x) = \delta(tx) - \delta(x) + \int_x^{tx} \frac{\delta u}{u} du$$

On obtient donc la majoration :

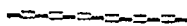
$$|s(tx) - s(x)| \leq M[2 + |\log t|]$$

De plus, pour t fixé, $s(tx) - s(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Ceci étant, on a :
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-t/x} s(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} s(xt) dt$$

d'où
$$f\left(\frac{1}{x}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} [s(xt) - s(x)] dt.$$

Pour tout x fixé la fonction sous le signe somme est majorée par $M(2 + |\log t|)e^{-t}$ sommable, et pour tout $t > 0$ fixé, elle tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. D'après Lebesgue, l'intégrale tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.



Théorèmes taubériens (suite)

J'ai commencé à établir le théorème taubérien suivant : (H et L)

$$\left. \begin{array}{l} \sum_0^{+\infty} u_n x^n \text{ conv. pour } |x| < 1 \text{ et } = P(x) \\ f(x) \rightarrow S \text{ quand } x \rightarrow 1-0 \\ n u_n \gg -M \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_0^{+\infty} u_n \text{ converge et } = S$$

Il restait à démontrer le résultat suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \sum_0^{+\infty} u_n x^n \ll \frac{A}{1-x} \text{ quand } x \rightarrow 1-0 \\ u_n \gg 0 \end{array} \right) \Rightarrow u_0 + u_1 + \dots + u_n \ll A n \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

ceci $\ll \sum_0^{+\infty} u_n e^{-nx} \ll \frac{A}{x}$ quand $x \rightarrow +0$

ou $\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) \ll \frac{A}{x}$ avec $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } t = 0, \\ \sum_{n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0 \end{cases}$

On va établir plus généralement le résultat suivant :

Soit $s(t)$ croissante pour $t \gg 0$, avec $s(0) = 0$

on suppose que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t)$ converge pour $x > 0$ et que, quand $x \rightarrow +0$,

$\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) \ll A x^{-\alpha}$, avec $\alpha > 0$. Alors, quand $t \rightarrow +\infty$, $s(t) \ll \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha$

Noter que ceci est une réciproque d'un théorème abélien :

si s est à v. b. sur H intervalle fini $[0, T]$ et si, quand $t \rightarrow +\infty$,

$$s(t) \ll B t^\alpha,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) \text{ converge pour } x > 0 \text{ et, quand } x \rightarrow +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) \ll B \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha}$$

on voit qu'il y a convergence et que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} s(t) dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} s\left(\frac{t}{x}\right) dt$$

$$\rightarrow x^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t} x^\alpha s\left(\frac{t}{x}\right) dt$$

En changeant au besoin $s(t)$ au voisinage de 0, on peut supposer $|s(t)| \leq M t^\alpha$.

Alors $|x^\alpha s(\frac{t}{x})| \leq M t^\alpha$

et, quand $x \rightarrow +0$, $x^\alpha s(\frac{t}{x}) \rightarrow B t^\alpha$.

Démonstration de Karamata :

$$1) \text{ quand } x \rightarrow +0, \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)xt} ds(t) \sim \frac{A}{(n+1)^\alpha x^\alpha}$$

$$\rightarrow x^\alpha \int_0^{+\infty} (e^{-xt})^n e^{-xt} ds(t) \rightarrow \frac{A}{(n+1)^\alpha} = \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-(n+1)u} du$$

$$\rightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (e^{-u})^n u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

Pour tout polynome P ,

$$x^\alpha \int_0^{+\infty} P(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} P(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

2) ceci entraîne que, $\forall g$ continue sur $[0, 1]$,

$$x^\alpha \int_0^{+\infty} g(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} g(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

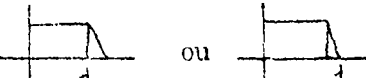
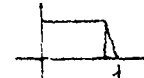
En effet, il existe P_1 et P_2 tels que, pour $X \in [0, 1]$,

$$g(X) - \varepsilon \leq P_1(X) \leq g(X) \leq P_2(X) \leq g(X) + \varepsilon$$

$$x^\alpha \int_0^{+\infty} P_1(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t) \leq x^\alpha \int_0^{+\infty} g(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t) \leq x^\alpha \int_0^{+\infty} P_2(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t)$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} P_1(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du \leq \liminf \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} P_2(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} g(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du - A\varepsilon \leq \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} g(e^{-u}) u^{\alpha-1} e^{-u} du + A\varepsilon$$

3) Prendre $g(u)$ tel que $e^{-u} g(e^{-u}) =$  ou 

$$x^\alpha s(\frac{1}{x}) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} du = \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Remarque : au lieu de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} ds(t) \sim \frac{A}{x^\alpha}$, on pourrait supposer

$$\sim \frac{A}{x^\alpha} L(\frac{1}{x}), \quad L \text{ "à croissance lente"}$$

(et $\alpha \geq 0$ au lieu de $\alpha > 0$)

$$\text{quand } \alpha = 0, \quad \frac{1}{L(\frac{1}{x})} \int_0^{+\infty} g(e^{-xt}) e^{-xt} ds(t) \rightarrow Ag(1)$$

Autre remarque : La même méthode de démonstration donne le théorème suivant (établi effectivement par Hardy et Littlewood) :

Soit la série de Dirichlet $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$,

où $0 \ll \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lim \lambda_n = +\infty$ et $\lim \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$.

Si la série converge pour $x > 0$ et $= f(x)$, si $f(x) \rightarrow S$ qd $x \rightarrow +0$, et si,

pour $n \gg 1$, $a_n \gg -M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$,

$\sum_0^{+\infty} a_n$ converge et $= S$.

Pour $x > 0$, $f'(x) = \sum_0^{+\infty} -\lambda_n a_n e^{-\lambda_n x}$

$$f''(x) = \sum_0^{+\infty} \lambda_n^2 a_n e^{-\lambda_n x} \gg \lambda_0^2 a_0 e^{-\lambda_0 x} - M \sum_1^{+\infty} \lambda_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-\lambda_n x}$$

$$\sum_1^{+\infty} \lambda_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-\lambda_n x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\sigma(t),$$

$$\text{où } \sigma(t) = \sum_{\substack{\lambda_n \leq t \\ n \gg 1}} \lambda_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

$$\rightarrow \sigma(t) \ll \frac{t^2}{2} \rightarrow \sum_1^{+\infty} \lambda_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-\lambda_n x} \ll \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} x^2 f''(x) \gg -M$$

$$\rightarrow \text{le lemme} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} x f'(x) = 0$$

$$\rightarrow x \sum_0^{+\infty} \lambda_n a_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow 0$$

$$x \sum_1^{+\infty} [\lambda_n a_n + M(\lambda_n - \lambda_{n-1})] e^{-\lambda_n x} \rightarrow M$$

$$\text{car } \sum_1^{+\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-\lambda_n x} \ll \frac{1}{x}.$$

$$\rightarrow \sum_{\substack{\lambda_n \leq t \\ n \gg 1}} [\lambda_n a_n + M(\lambda_n - \lambda_{n-1})] \ll M t$$

$$\rightarrow \sum_{\lambda_n \leq t} \lambda_n a_n = o[t]$$

Je vais maintenant faire une théorie générale des théorèmes inverses des procédés de sommation. Je me bornerai toutefois à des procédés de sommation d'un certain type, que je vais indiquer.

On a vu qu'un procédé de sommation pouvait se ramener à définir une limite généralisée pour $t \rightarrow +\infty$ pour une fonction $s(t)$, nulle pour $t = 0$ et à v. b. sur ^{tout} H intervalle fini.

On considérait en général $\int_0^{+\infty} \Psi(t, x) ds(t)$
 $s(t)$ a la limite généralisée S si cette intégrale converge pour $x \in$ un certain ensemble E et $\rightarrow S$ quand $x \rightarrow$ un certain x_0 .

Les théorèmes inverses à démontrer sont alors :

si $\int_0^{+\infty} \Psi(t, x) ds(t)$ converge pour $x \in E$ et $\rightarrow S$ quand $x \rightarrow x_0$,
et si s satisfait à une condition C , $s(t) \rightarrow S$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Je vais me borner ici au cas où

$$\Psi(t, x) = K(xt), \quad K(t) = \int_t^{+\infty} N(u) du, \quad N \in L(0, +\infty) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} N(u) du = 1$$

Alors $E =$ ens. des nombres > 0 , $x_0 = 0$.

Je note d'abord que, si $K(xt)s(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, on a par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} K(xt) ds(t) = \int_0^{+\infty} xN(xt)s(t) dt.$$

En effet, comme $K(xt) = \int_{xt}^{+\infty} N(u) du = \int_t^{+\infty} xN(xu) du$,

$$\int_0^T K(xt) ds(t) = K(xT)s(T) + \int_0^T xN(xt)s(t) dt$$

Ceci montre, en premier lieu, que l'on a bien le théorème abélien voulu, car on peut

encore écrire

$$\int_0^{+\infty} xN(xt)s(t) dt = \int_0^{+\infty} N(t)s\left(\frac{t}{x}\right) dt$$

Si $s(t) \rightarrow S$, $|s(t)| \leq M \rightarrow \left| N\left(\frac{t}{x}\right) s\left(\frac{t}{x}\right) \right| \leq M|N(t)|$

et $s\left(\frac{t}{x}\right) \rightarrow S$ quand $x \rightarrow 0$.

De plus, ceci va me permettre de considérer

$$\int_0^{+\infty} xN(xt)s(t)dt \text{ au lieu de } \int_0^{\infty} K(xt)ds(t).$$

On établira des théorèmes du type suivant :

$$\text{Hyp.} \begin{cases} s \text{ bornée et intégrable sur } H \text{ intervalle fini} \\ N \in L(0, \infty), \int_0^{+\infty} N(u)du = 1 \end{cases}$$

$$\left(\int_0^{+\infty} xN(xt)s(t)dt \text{ converge pour } x > 0 \text{ et } \rightarrow S \text{ quand } x \rightarrow 0 \right. \\ \left. s \text{ satisfait à une condition C.} \right.$$

Conclusion : $s(t) \rightarrow S$ quand $t \rightarrow +\infty$

Ceci entrainera le résultat voulu car, ou bien la condition C entrainera

$\lim_{t \rightarrow +\infty} K(xt)s(t) = 0$, ou bien on aura $N(u) \geq 0$ et dans ce cas, la convergence de

$\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t)$ entraine à elle seule la même chose. Il n'y a à considérer que le cas où

$H u > 0$ pour tout $u > 0$ (On voit que, si φ est continue pour $t \geq 0$, décroissante, avec $\varphi(t) > 0$,

et $\rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(t)ds(t)$ entraine $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)s(t) = 0$.

En effet, soit $\int_0^{+\infty} \varphi(t)ds(t) = I$, $\int_0^t \varphi(u)ds(u) = \sigma(t)$

$$\text{on a } s(t) = \int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} d\sigma(u) = \int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} d[\sigma(u) - I] \\ = \frac{\sigma(t) - I}{\varphi(t)} + \frac{I}{\varphi(0)} - \int_0^t [\sigma(u) - I] d\left[\frac{1}{\varphi(u)}\right]$$

On va appliquer une méthode semblable à celle de Karamata



Théorèmes taubériens

I. 1. Position du problème

Dans tout ce qui suit, $s(t)$ désigne une fonction réelle ou complexe définie pour $t \gg 0$, mesurable et bornée sur tout intervalle $(0, T)$ où $0 < T < +\infty$.

$N(t)$ est une fonction sommable sur $(0, +\infty)$, avec $\int_0^{+\infty} N(t) dt = 1$

x est une variable réelle > 0 .

On rappelle qu'on a le théorème abélien suivant :

Si $s(t) \rightarrow S$ quand $t \rightarrow +\infty$, $\int_0^{+\infty} x N(xt) s(t) dt \rightarrow S$ quand $x \rightarrow 0$

En effet, $\int_0^{+\infty} x N(xt) s(t) dt = \int_0^{+\infty} N(t) s\left(\frac{t}{x}\right) dt$.

Or $|s(t)| \ll M$ entraîne : $|N(t) s\left(\frac{t}{x}\right)| \ll M \cdot N(t)$ sommable sur $(0, +\infty)$. Quand $x \rightarrow 0$, $N(t) s\left(\frac{t}{x}\right) \rightarrow SN(t)$, d'où le résultat.

On se propose d'établir des théorèmes Taubériens du type suivant :

Les hypothèses

(H₁) : $\int_0^{+\infty} x N(xt) s(t) dt$ existe pour $x > 0$ et $\rightarrow S$ quand $x \rightarrow 0$

(H₂) : $s(t)$ satisfait à une certaine condition C

entraînent le résultat

(R) : $s(t) \rightarrow S$ quand $t \rightarrow +\infty$.

2. Conséquence de l'hypothèse (H₁)

En remplaçant x par αx ($\alpha > 0$) dans (H₁) et en observant que

$\int_0^{+\infty} N(\alpha u) du = \frac{1}{\alpha}$, on a

quand $x \rightarrow 0$: $\int_0^{+\infty} \alpha x N(\alpha xt) s(t) dt \rightarrow S$

donc $\int_0^{+\infty} x N(\alpha xt) s(t) dt \rightarrow S \int_0^{+\infty} N(\alpha u) du$.

Le caractère linéaire de l'intégrale définie entraîne que,

si $G(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j N(\alpha_j t)$, ($\alpha_j > 0$ et β_j quelconque),

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} x G(xt) s(t) dt \longrightarrow S \int_0^{+\infty} G(u) du.$$

En désignant par \mathcal{N} le sous espace vectoriel de $L_1(0, +\infty)$ engendré par les fonctions $N(\alpha x)$ ($\alpha > 0$), on peut dire que la relation (1) est encore vraie pour toute $G \in \mathcal{N}$.

3. Une hypothèse supplémentaire.

Si on suppose établi le résultat (R_1) : $s(t)$ est bornée, alors on voit que la relation (1) vaut encore si G appartient à $\overline{\mathcal{N}}$ (adhérence de \mathcal{N} dans $L_1(0, +\infty)$).

En effet, supposons que $|s(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$.

Soit $G \in \overline{\mathcal{N}}$. Il existe une suite $\{G_n\}$ d'éléments de \mathcal{N} telle que $G_n \rightarrow G$ dans $L_1(0, +\infty)$.

Comme

$$\left| \int_0^{+\infty} x G_n(xt) s(t) dt - \int_0^{+\infty} x G(xt) s(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} x [G_n(xt) - G(xt)] s(t) dt \right|$$

$$\leq M \int_0^{+\infty} x |G_n(xt) - G(xt)| dt = M \|G_n - G\|,$$

quand $n \rightarrow +\infty$, $\int_0^{+\infty} x G_n(xt) s(t) dt$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers $\int_0^{+\infty} x G(xt) s(t) dt$.

Pour chaque n , quand $x \rightarrow 0$, $\int_0^{+\infty} x G_n(xt) s(t) dt \rightarrow S \int_0^{+\infty} G_n(u) du$.

De plus, $S \int_0^{+\infty} G_n(u) du \rightarrow S \int_0^{+\infty} G(u) du$ car

$$\left| S \int_0^{+\infty} G_n(u) du - S \int_0^{+\infty} G(u) du \right| \leq |S| \|G_n - G\|.$$

Donc, quand $x \rightarrow 0$, $\int_0^{+\infty} x G(xt) s(t) dt \rightarrow S \int_0^{+\infty} G(u) du$.

L'idée est d'appliquer ce résultat à la fonction G_0 définie par $G_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1. \end{cases}$

Si $G_0 \in \overline{\mathcal{N}}$, on a

$$\int_0^{+\infty} x G_0(xt) s(t) dt = x \int_0^{1/x} s(t) dt \rightarrow S \text{ quand } x \rightarrow 0$$

ou en changeant x en $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{t} \int_0^t s(u) du \rightarrow S$ quand $t \rightarrow \infty$ résultat noté (R_2) .

Pour cela il faut supposer que $G_0 \in \overline{\mathcal{N}}$. On voit que cela entraîne que la fonction caractéristique de tout intervalle appartient à $\overline{\mathcal{N}}$, et qu'il en est de même de toute fonction en escalier de $L_1(0, +\infty)$.

Les fonctions en escalier étant denses dans L_1 , il revient au même de faire l'hypothèse supplémentaire suivante :

Hypothèse (W) (Wiener) : L'espace \mathcal{N} des fonctions $\sum \alpha_j N(\beta_j t)$ ($\alpha_j > 0$) est dense dans $L_1(0, +\infty)$.

On a donc établi le

Lemme 1. Si

$$(H_1) : \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x N(xt) s(t) dt = S,$$

$$(R_1) : s(t) \text{ est bornée pour } t \gg 0,$$

$$(W) : \mathcal{N} \text{ est dense dans } L_1(0, +\infty),$$

alors

$$(R_2) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t s(u) du = S.$$

4. Schéma de la démonstration du théorème.

Le théorème sera établi, si en plus du lemme 1, on peut montrer :

Lemme 2.

$$\left. \begin{array}{l} (H_1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} N(xt) s(t) dt = S \\ (H_2) \quad s \text{ satisfait à la condition C} \end{array} \right\} \implies s(t) \text{ bornée (résultat } (R_1))$$

Lemme 3.

$$\left. \begin{array}{l} (R_2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t s(u) du = S \\ (H_2) \quad s \text{ satisfait à la condition C} \end{array} \right\} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = S \text{ (résultat } (R))$$

Le théorème résultera des implications :

$$\left. \begin{array}{l} (H_1) \\ (H_2) \end{array} \right\} \implies (R_1) \qquad \left. \begin{array}{l} (H_1) \\ (R_1) \\ (W) \end{array} \right\} \implies (R_2) \qquad \left. \begin{array}{l} (R_2) \\ (H_2) \end{array} \right\} \implies R.$$

II. Cas où $s(t)$ est complexe

1. Condition C.

Pour $\lambda > 1$, posons $W(t, \lambda) = \sup_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| \quad (t > 0)$

et $w(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} W(t, \lambda).$

$W(t, \lambda)$ est finie ≥ 0 quels que soient t et λ et c'est une fonction croissante de λ .

Donc on a $0 \leq w(\lambda) \leq +\infty$ et w est croissante.

En outre si λ_1 et $\lambda_2 > 1$, pour $t \leq t' \leq \lambda_1 \lambda_2 t$

on a $|s(t') - s(t)| \leq W(t, \lambda_1) + W(\lambda_1 t, \lambda_2),$

donc $W(t, \lambda_1, \lambda_2) \leq W(t, \lambda_1) + W(\lambda_1 t, \lambda_2).$

Si on suppose $w(\lambda_1)$ et $w(\lambda_2) < +\infty$, en prenant $\overline{\lim}$ pour $t \rightarrow +\infty$, on obtient

$$w(\lambda_1 \lambda_2) \leq w(\lambda_1) + w(\lambda_2).$$

Il résulte de là que si $w(\lambda_0) < +\infty$, alors $w(\lambda_0^n) \leq n w(\lambda_0) < +\infty$ pour tout

$n \in \mathbb{N}.$

Comme w est croissante, on en déduit $w(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda > 1.$

Donc ou $w(\lambda) = +\infty$ pour tout $\lambda > 1,$

ou $w(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda > 1.$

Ceci étant posé, on va montrer qu'on peut prendre comme condition (C) dans le cas où

$N(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty):$

$w(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda > 1$

et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0.$

2. Lemmes. Les lemmes 2 et 3 que nous avons en vue seront impliqués par les lemmes

suivants :

Lemme 2' : Si $N(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, si $\int_0^{+\infty} x N(xt) s(t) dt$

existe pour $x > 0$ et est bornée quand $x \rightarrow 0$, si $w(\lambda) < +\infty$, alors

$s(t)$ est bornée.

On pose $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt.$

On a déjà observé que $\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)s(t)dt = \int_0^{+\infty} N(t)s(xt)dt$

donc

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} N(t) [s(xt) - s(x)] dt.$$

On établit maintenant le fait suivant : si $w(\lambda) < +\infty$, il existe A et B tels que $|s(t'') - s(t')| \leq A + B \left| \log \frac{t''}{t'} \right|$ quels que soient t'' et $t' > 0$.

En effet pour un λ fixé, $W(t, \lambda)$ est borné supérieurement pour $t > 0$, donc il existe A tel que $W(t, \lambda) \leq A$, c'est à dire que, si $0 < t' \leq t'' \leq \lambda t'$:

$$|s(t'') - s(t')| \leq A.$$

Alors, si $0 < t' \leq t''$, il existe un entier n tel que

$$\lambda^n t' \leq t'' < \lambda^{n+1} t'$$

et on a $|s(t'') - s(t')| \leq (n+1)A \leq A + \frac{A}{\log \lambda} \log \frac{t''}{t'}$.

En posant $B = \frac{A}{\log \lambda}$, on a la majoration voulue, qui donne

$$\left| \Phi\left(\frac{1}{x}\right) - s(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} |N(t)| [A + B |\log t|] dt < +\infty.$$

Comme $\Phi(x)$ est bornée pour $x \rightarrow 0$, ceci entraîne que $s(t)$ est bornée quand $t \rightarrow +\infty$, donc est bornée partout.

Lemme 3' = Lemme 3 avec la condition (C) : $w(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0$.

En effet, posons $S(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(u)du.$ ($t > 0$)

Si $\lambda > 1$ et $t > 0$, on a

$$\lambda t S(\lambda t) - t S(t) = \int_t^{\lambda t} s(u)du = (\lambda - 1)t s(t) + \int_t^{\lambda t} [s(u) - s(t)] du,$$

$$s(t) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} S(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1} S(t) - \frac{1}{(\lambda - 1)t} \int_t^{\lambda t} [s(u) - s(t)] du,$$

$$s(t) - S = \frac{\lambda}{\lambda - 1} [S(\lambda t) - S] - \frac{1}{\lambda - 1} [S(t) - S] - \frac{1}{(\lambda - 1)t} \int_t^{\lambda t} [s(u) - s(t)] du,$$

d'où

$$|s(t) - S| \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} |S(\lambda t) - S| + \frac{1}{\lambda - 1} |S(\lambda t) - S| + W(t, \lambda).$$

les $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ vérifient la même inégalité, d'où

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |s(t) - S| \leq w(\lambda) \text{ qui tend vers } 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 1.$$

Ceci entraîne bien $s(t) \rightarrow S$.

III. Cas où $s(t)$ est réelle.

1. Condition (C)

Pour $\lambda > 1$, on pose $\Pi(t, \lambda) = - \inf_{t \leq t' \leq \lambda t} [s(t') - s(t)]$

$$\text{et } \varpi(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t, \lambda)$$

La fonction $\varpi(\lambda)$ a les mêmes propriétés que $w(\lambda)$:

ϖ est une fonction croissante, $0 \leq \varpi(\lambda) \leq +\infty$, et on a

ou $\varpi(\lambda) = +\infty$ pour tout $\lambda > 1$,

ou $\varpi(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda > 1$.

(les raisonnements sont les mêmes que ceux faits plus haut pour $w(\lambda)$).

Remarque. Si on pose $\Pi'(t, \lambda) = \sup_{\frac{t}{\lambda} \leq t' \leq t} [s(t') - s(t)]$

$$\text{alors on a } \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \Pi'(t, \lambda) = \varpi(\lambda)$$

En effet, si $\Pi(t, \lambda) \leq K$ pour $t \geq t_0$, $s(t') - s(t) \geq -K$ si $t \geq t_0$ et $1 \leq \frac{t'}{t} \leq \lambda$,

donc $\Pi'(t, \lambda) \leq K$ pour $t \geq \lambda t_0$.

Inversement, si $\Pi'(t, \lambda) \leq K$ pour $t \geq t_0$, $\Pi(t, \lambda) \leq K$ pour $t \geq t_0$.

On va montrer qu'on peut prendre comme condition (C), dans le cas où $N(t) \geq 0$ et

$N(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$

$$\varpi(\lambda) < +\infty \text{ pour tout } \lambda > 1$$

$$\text{et } \lim_{\lambda \rightarrow 1} \varpi(\lambda) = 0$$

2. Lemmes. Là encore, on va démontrer des lemmes qui impliqueront les lemmes 2 et 3.

Lemme 3'' = lemme 3 avec la condition (C) : $\varpi(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \varpi(\lambda) = 1$.

De même que dans II, on écrit, pour t et $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$,

$$s(t) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} S(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1} S(t) - \frac{1}{(\lambda - 1)t} \int_t^{\lambda t} [s(u) - s(t)] dt,$$

et pour $\lambda > 1$ on obtient la majoration

$$s(t) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} S(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1} S(t) + \Pi(t, \lambda),$$

d'où, en prenant les $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq S + \omega(\lambda),$$
d'où, en faisant tendre λ vers 1,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq S.$$

Pour $\lambda < 1$, on obtient la minoration

$$s(t) \geq \frac{\lambda}{\lambda-1} S(\lambda t) - \frac{1}{\lambda-1} S(t) - \Pi'(t, \frac{1}{\lambda})$$

en remarquant que

$$\frac{1}{(\lambda-1)t} \int_t^{\lambda t} [s(u) - s(t)] dt = \frac{1}{(1-\lambda)t} \int_{\lambda t}^t [s(u) - s(t)] du \leq \Pi'(t, \frac{1}{\lambda}).$$

Comme ci-dessus, il en résulte

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq S - \omega(\lambda), \text{ où on fera tendre } \lambda \text{ vers } 0.$$

Ce qui démontre le résultat.

Lemme 2". Si $N(t)$ est ≥ 0 , si $N(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, si $\int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ existe pour $x > 0$ et est bornée quand $x \rightarrow 0$, si $\omega(\lambda)$ est fini, alors $s(t)$ est bornée.

Ce lemme résultera en réalité du lemme 2' et de la proposition suivante :

Si $\int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ existe pour $x > 0$ et est bornée quand $x \rightarrow 0$, si $\omega(\lambda) < +\infty$,

alors on a $\omega(\lambda) < +\infty$.

On pose $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ et on rappelle que $\Phi(\frac{1}{x}) = \int_0^{+\infty} N(t)s(xt)dt$.

Soit λ fixé > 1 . Alors l'hypothèse $\omega(\lambda) < +\infty$ entraîne que $\Pi(t, \lambda)$ est bornée,

donc qu'il existe $A > 0$ tel que

$$s(t') - s(t) \geq -A \text{ pour } 0 < t \leq t' \leq \lambda t.$$

Soient maintenant a et b tels que $1 < \frac{b}{a} < \lambda$

$$\text{et } \int_a^b N(t)dt > 0.$$

D'après les hypothèses, il existe $x_0 > 0$ et $M > 0$ tels que

$$|\Phi(x)| \leq M \text{ pour } 0 < x \leq x_0.$$

Maintenant on va montrer que, si $u \geq \frac{b}{x_0}$ et $u \leq u' \leq \lambda \frac{a}{b} u$, alors $|s(u') - s(u)|$

est majoré par une certaine constante.

Pour cela, on forme

$$A + \Phi\left(\frac{a}{u'}\right) - \Phi\left(\frac{b}{u}\right) = \int_0^{+\infty} N(t) \left[s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s\left(\frac{u}{b} t\right) + A \right] dt$$

Comme

$$\frac{ut}{b} \leq \frac{u'}{a} t \leq \lambda \frac{u}{b} t, \text{ alors } s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s\left(\frac{u}{b} t\right) \geq -A$$

On obtient la minoration

$$A + \Phi\left(\frac{a}{u'}\right) - \Phi\left(\frac{b}{u}\right) \geq \int_a^b N(t) \left[s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s\left(\frac{u}{b} t\right) + A \right] dt.$$

Mais $\frac{a}{u'} < \frac{b}{u} \leq x_0$, donc le premier membre est majoré par $A + 2M$ soit

$$A + 2M \geq \int_a^b N(t) \left[s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s\left(\frac{u}{b} t\right) + A \right] dt.$$

Maintenant, pour $a \leq t \leq b$, on a

$$u' \leq \frac{u'}{a} t < \lambda u' \quad \text{et} \quad \frac{u}{b} t \leq u < \lambda \frac{u}{b} t,$$

qui entraînent

$$s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s(u') \geq -A \quad \text{et} \quad s(u) - s\left(\frac{u}{b} t\right) \geq -A,$$

d'où

$$s\left(\frac{u'}{a} t\right) - s\left(\frac{u}{b} t\right) \geq s(u') - s(u) - 2A$$

On arrive alors à

$$A + 2M \geq \int_a^b N(t) \left[s(u') - s(u) - A \right] dt = \left[s(u') - s(u) - A \right] \int_a^b N(t) dt.$$

On tire

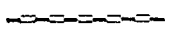
$$s(u') - s(u) \leq A + \frac{2M + A}{\int_a^b N(t) dt}$$

Comme $s(u') - s(u) \geq -A$,

$$\text{on a} \quad |s(u') - s(u)| \leq A + \frac{2M + A}{\int_a^b N(t) dt}.$$

$$\text{Ainsi, pour } u \geq \frac{b}{x_0}, \quad W\left(u, \lambda \frac{a}{b}\right) \leq A + \frac{2M + A}{\int_a^b N(t) dt}$$

Donc $w\left(\lambda \frac{a}{b}\right) < +\infty$, ce qui établit le résultat voulu.



Théorèmes taubériens

Dans tout l'exposé N est une fonction sommable sur $(0, +\infty)$ t. q.

$$\int_0^{+\infty} N(t) dt = 1$$

Condition (W)

On dit que N satisfait à la condition W si le sous-espace de $L_1(0, +\infty)$ engendré par les fonctions de la forme $N(\alpha t)$, $\alpha > 0$, est partout dense dans L_1 .

On se propose d'étudier la condition W .

Définition des translatées de f

$T_h f$ translatée de f est définie par :

$$t \rightarrow f(t - h)$$

N sommable sur $(0, +\infty) \iff N(e^u)e^u$ sommable sur $(-\infty, +\infty)$. La condition (W) est équivalente à :

Le sous-espace engendré par les translatées de $N(e^u)e^u$ est partout dense dans L_1 .

En effet :

$$\int_0^{+\infty} \left| G(t) - \sum_1^N \alpha_j N(\beta_j t) \right| dt \ll \varepsilon \quad (t = e^u)$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \left| G(e^u)e^u - \sum_1^N \alpha_j N(\beta_j e^u)e^u \right| du \ll \varepsilon$$

$N(\beta_j e^u)e^u$ est une translatée de $N(e^u)e^u$ multipliée par une c^{te} .

On est donc ramené au problème suivant (problème de Wiener)

Etant donnée une fonction $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, à quelle condition le sous-espace de

L_1 engendré par les translatées de f est-il partout dense dans $L_1(-\infty, +\infty)$?

Soit $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt$

la C.N.S. est $\hat{f}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La condition est nécessaire

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt = 0,$

$$\forall h \int_{-\infty}^{+\infty} (t-h)e^{itx_0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t)e^{itx_0} e^{-ith} dt = 0$$

c'est à dire $\hat{f}(x_0) = 0 \implies \widehat{T_h f}(x_0) = 0, \forall h$. Mais $f \rightarrow \hat{f}(x_0)$ est une fonction continue, donc $\hat{g}(x_0) = 0 \quad \forall g \in$ sous-espace ou à son adhérence.

Avant d'examiner la réciproque indiquons quelques propriétés des translations.

- 1^o) T_h est un opérateur linéaire dans L_1 ; $\forall f \in L_1$ l'adhérence du sous-espace vectoriel de L_1 engendré par les $T_h f$ est
- 2^o) $\|T_h f\| = \|f\|$ ↓
⇒
↓ invariant par les translations.
- 3^o) $T_{h_1} \circ T_{h_2} = T_{h_1+h_2}$

1^o) et 3^o) \implies le sous-espace est invariant

2^o) \implies son adhérence l'est aussi

4^o) $(T_h f) * g = f * (T_h g) = T_h (f * g)$

(on rappelle que $(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x)g(x)dx$,

$$f * g \in L_1$$

$$\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|).$$

5^o) $\forall f \in L_1$ l'application $h \rightarrow T_h f$ est une application continue de \mathbb{R} dans L_1 ,

en effet :

f : fonction caractéristique d'un intervalle

$$\|T_{h'} f - T_h f\| \leq |h' - h|$$

\implies vrai pour une fonction en escalier

f quelconque $\in L_1$

$\exists \{f_n\}$ fonction en escalier $f_n \rightarrow f$

$$\implies T_h f_n \rightarrow T_h f \text{ unif}^t \text{ en } h \text{ car } \|T_h f_n - T_h f\| = \|f_n - f\|$$

donc vérifié $\forall f \in L_1$.

6^o) Soit $k \in L_1$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} k(t)dt = 1$.

on pose $k_\lambda(t) = \lambda k(\lambda t) \quad (\lambda > 0)$

Alors $\forall f \in L_1 \quad f * k_\lambda \rightarrow f \quad \text{quand} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$

En effet :

$$(f * k_\lambda)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) k_\lambda(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda(u) du = 1 \quad \text{D'où :}$$

$$(f * k_\lambda)(t) - f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t-u) - f(t)] k_\lambda(u) du$$

$$|(f * k_\lambda)(t) - f(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-u) - f(t)| |k_\lambda(u)| du$$

$$\|f * k_\lambda - f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * k_\lambda)(t) - f(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-u) - f(t)| |k_\lambda(u)| du.$$

D'après le théorème de Fubini

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-u) - f(t)| |k_\lambda(u)| du = \int_{-\infty}^{+\infty} |k_\lambda(u)| du \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-u) - f(t)| dt.$$

La dernière intégrale étant égale à $\|T_u f - f\|$, on a

$$\begin{aligned} \|f * k_\lambda - f\| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_u f - f\| |\lambda k(\lambda u)| du, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_{t/\lambda} f - f\| |k(t)| dt. \end{aligned}$$

Ceci $\rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. En effet $T_{t/\lambda} f \rightarrow f$ quand $\lambda \rightarrow \infty$ (d'après 5^e)

$$\|T_{t/\lambda} f - f\| |k(t)| \leq 2 \|f\| |k(t)| \quad \text{sommable.}$$

Donc $\|f * k_\lambda - f\| \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Faisons de $L_1(-\infty, +\infty)$ une algèbre de Banach en définissant la multiplication comme étant la convolution.

Proposition. Idéal fermé = sous-espace vectoriel fermé invariant par les translations.

1^o) Soit I un idéal fermé dans L_1 .

$\Rightarrow I$ sous-espace vectoriel fermé.

Il suffit de montrer que I est invariant par les translations

i.e. $f \in I \Rightarrow T_h f \in I \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

Soit $f \in I$

Soit k vérifiant la condition indiquée dans 6^e).

Alors $f * T_h k_\lambda \in I$

$$\implies \text{d'après 4}^e, \quad T_h f * k_\lambda \in I.$$

Mais $T_h f * k_\lambda \rightarrow T_h f$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

$$I \text{ fermé} \implies T_h f \in I$$

2^e) Soit I un sous-espace vectoriel fermé de L_1 invariant par les translations.

Il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} f &\in I \\ g &\in L_1 \implies f * g \in I. \end{aligned}$$

Il suffit même de montrer que ceci a lieu pour g continue à support compact.

Soit donc g continue et nulle en dehors de l'intervalle fermé $[a, b]$.

Posons $x_n = a + n \frac{b-a}{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, et

$$\lambda_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} g(u) du.$$

$$\text{On a} \quad (f * g)(t) = \int_a^b f(t-u)g(u)du = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t-u)g(u)du,$$

d'où

$$(f * g)(t) - \sum_{n=1}^N \lambda_n f(t-x_n) = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} [f(t-u) - f(t-x_n)] g(u) du,$$

d'où

$$\left| (f * g)(t) - \sum_{n=1}^N \lambda_n f(t-x_n) \right| \leq \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(t-u) - f(t-x_n)| \cdot |g(u)| du.$$

En intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| f * g - \sum_{n=1}^N \lambda_n T_{x_n} f \right\| &\leq \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \|T_{x_n - u} f - f\| \cdot |g(u)| du \\ &\leq \omega\left(\frac{b-a}{N}\right) \int_a^b |g(u)| du, \end{aligned}$$

où $\omega(x) = \text{Max}_{0 \leq h \leq x} \|T_h f - f\|$.

Comme la fonction $\sum_{n=1}^N \lambda_n T_{x_n} f$ appartient toujours à I et $\omega\left(\frac{b-a}{N}\right)$ tend vers zéro pour N infini, on voit que $f * g \in I$.

$\Rightarrow \forall \varphi$ fonction continue à support compact

$$\varphi * f \in I$$

$\forall g \in L_1 \quad \exists \{ \varphi_n \}$ suite de fonctions continues à support compact $\rightarrow g$

I fermé $\Rightarrow g * f \in I$

On se propose maintenant de démontrer le théorème suivant :

Soit I un idéal fermé de L_1
 On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in I$ t. q. $\left. \begin{array}{l} \hat{f}(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I = L_1$

Soit A l'image de L_1 par la transformée de Fourier

" \hat{I} " " I " " "

Il suffit de prouver que \hat{I} contient toutes les fonctions de A à support compact.

En effet si l'on prend

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

$$k_\lambda(t) = \lambda k(\lambda t)$$

\hat{k}_λ est à support compact

$\forall f \in L_1$ on a $f \wedge k_\lambda = \hat{f} \cdot \hat{k}_\lambda$ à support compact
 donc $f \wedge k_\lambda \in I$

la transformation étant bijective $\Rightarrow f \wedge k_\lambda \in I$.

si $\lambda \rightarrow \infty, f \wedge k_\lambda \rightarrow f \in I$ (I fermé)

Il suffit de montrer que, $\forall f \in L_1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exists V_x$ voisinage de x et une

fonction $u_x \in I$ t. q. $\hat{u}_x(t) = \hat{f}(t) \quad \forall t \in V_x$.

En effet

$$f \in L_1 \quad \text{t. q.} \quad \hat{f}(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b] \quad \Rightarrow \hat{f} \in \hat{I} ?$$

On peut prendre pour V_x un intervalle ouvert contenant x .

\exists un nombre fini d'intervalles V_x recouvrant $[a, b]$

Pour chaque V_x

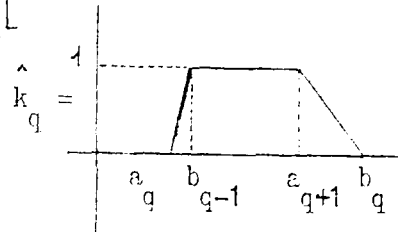
$$\exists u_x \in I \quad \text{t. q.} \quad \hat{u}_x(t) = \hat{f}(t) \quad \forall t \in V_x.$$

On peut recouvrir $[a, b]$ par la suite d'intervalles $]a_q, b_q[$ t. q.

$$a_q < b_{q-1} < a_{q+1} < b_q \quad q = 1, \dots, n$$

$$\exists u_q \in I \quad \text{t. q.} \quad \hat{u}_q(x) = \hat{f}(x) \quad \forall x \in]a_q, b_q[$$

Soit k_q t. q.



Une telle fonction \exists . On peut prendre

$$k_q(t) = \frac{1}{2\pi t^2} \left[\frac{e^{-ib_{q-1}t} - e^{-ia_q t}}{b_{q-1} - a_q} - \frac{e^{-ib_q t} - e^{-ia_{q+1}t}}{b_q - a_{q+1}} \right]$$

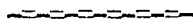
On a

$$\sum_1^n \hat{k}_q(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi = \sum_1^n u_q * k_q \in I \quad (u_q \in I)$$

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_1^n \hat{u}_q(x) \hat{k}_q(x) = \sum_1^n \hat{f}(x) \hat{k}_q(x) = \hat{f}(x).$$

D'où $\hat{f} \in \hat{I}$.



Théorèmes taubériens

Dans cet exposé nous montrons comment on peut transformer la condition W précédemment étudiée, puis nous énonçons 2 théorèmes taubériens que nous appliquons au procédé de sommation de Lambert.

I. RAPPEL

A la séance précédente on avait considéré un idéal I fermé dans L_1 , l'opération interne dans L_1 étant la convolution. On rappelle que l'on avait normé L_1 par $f \in L_1 \implies \|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ et que \hat{f} représentait la transformée de Fourier de f .

Nous voulions démontrer le théorème suivant.

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in I \text{ tel que } \hat{f}(x) \neq 0) \implies I = L_1$$

et pour cela il nous restait à montrer la proposition suivante :

Proposition. Etant donnée $f \in L_1$, pour tout x réel, il existe un voisinage V_x de x et une fonction U_x de I tels que $\hat{U}_x(t) = \hat{f}(t)$ pour tout $t \in V_x$.

Pour cela il faut démontrer deux lemmes.

Lemme 1. Si f et g appartiennent à L_1 et si $\|g\| < 1$, alors $\hat{f} \cdot (1-\hat{g})^{-1}$ appartient à l'ensemble A image de L_1 par la transformation de Fourier.

En effet, posons $g_1 = g$ $g_n = g_{n-1} * g$ pour $n \gg 2$. Alors $\|g_n\| \leq \|g\|^n$ et $\hat{g}_n = (\hat{g})^n$. La série $f + f * g_1 + f * g_2 + \dots + f * g_n + \dots$ est donc absolument convergente. La transformée de Fourier de sa somme est égale à $\hat{f}(x) + \hat{f}(x)\hat{g}(x) + \hat{f}(x)(\hat{g}(x))^2 + \dots + \hat{f}(x)(\hat{g}(x))^n + \dots = \frac{\hat{f}(x)}{1-\hat{g}(x)}$. Ainsi $\frac{\hat{f}(x)}{1-\hat{g}(x)}$ est bien la transformée de Fourier d'une fonction de L_1 . C.Q.F.D..

Lemme 2. Soient f et $g \in L_1$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\hat{\Phi}$ définie par $\hat{\Phi}(x) = [\hat{f}(x) - \hat{f}(a)]\hat{g}(x-a)$ qui appartient évidemment à l'ensemble A vérifie la condition suivante : $\hat{\Phi} = \hat{\phi}$, où $\|\phi\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \cdot \|T_u g - g\| du$.

En effet :

$$\begin{aligned} \hat{g}(x-a) & \text{ est la transformée de Fourier de } e^{-iat} g(t) \\ \hat{f}(x)\hat{g}(x-a) & \text{ ----- } \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)e^{ia(u-t)} du \\ \hat{f}(a)\hat{g}(x-a) & \text{ ----- } \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t)e^{ia(u-t)} du \\ \hat{\Phi}(x) & \text{ ----- } \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia(u-t)} f(u) [g(t-u)-g(t)] du \end{aligned}$$

On a $|\varphi(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \cdot |g(t-u)-g(t)| du,$

d'où $\|\varphi\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-u)-g(t)| dt$ d'après le théorème de

Fubini.

T_u étant l'opérateur de translation, il vient

$$\|\varphi\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \|T_u g - g\| du \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition annoncée.

Soit $f \in L_1$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $h \in I$ tel que $\hat{h}(a) \neq 0$.

Soit d'autre part $p \in L_1$ tel que $\hat{p}(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ (un tel p existe. Il suffit de poser $p(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{\pi t^2}$ et l'on vérifie que $\hat{p}(x)$ est représenté par la

figure 1)

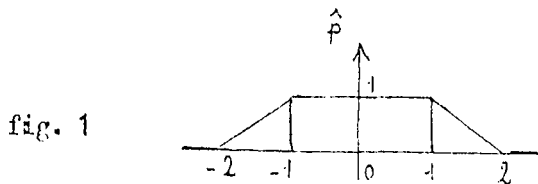


fig. 1

Posant $p_\lambda(t) = \lambda p(\lambda t)$ il vient $\hat{p}_\lambda(t) = \hat{p}(\frac{x}{\lambda})$. Soit alors

$$G(x) = \frac{\hat{f}(x)}{h(a) + [\hat{h}(x) - \hat{h}(a)] \hat{p}_\lambda(x-a)}$$

Nous voulons montrer qu'il est possible de choisir λ assez petit pour que $G(x) \in A$.

$$G(x) = \frac{[\hat{h}(a)]^{-1} \hat{f}(x)}{1 - [\hat{h}(a)]^{-1} [\hat{h}(x) - \hat{h}(a)] \hat{p}_\lambda(x-a)}$$

Le lemme 2 montre que $[\hat{h}(x) - \hat{h}(a)] \hat{p}_\lambda(x-a) = \hat{\psi}(x)$, où $\|\varphi\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)| \|T_u p_\lambda - p_\lambda\| du$

Or $\|T_u p_\lambda - p_\lambda\| = \|T_{u\lambda} p - p\| \leq 2 \|p\|$ et, quand λ tend vers 0, $\|T_{u\lambda} p - p\|$

tend vers 0, donc par le théorème de Lebesgue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)| \|T_u p_\lambda - p_\lambda\| du \rightarrow 0$$

On pourra donc choisir λ assez petit pour que $\|\varphi\| < |\hat{h}(a)|$. Le lemme 1 montre

alors que $G(x) = \frac{[\hat{h}(a)]^{-1} \hat{f}(x)}{1 - [\hat{h}(a)]^{-1} \hat{\varphi}(x)}$ appartient à A . Autrement dit $G(x) = \hat{g}(x)$.

Mais p a été choisi de façon que $|x - a| \leq \lambda \implies \hat{p}_\lambda(x-a) = 1$. On voit donc que,

pour $|x-a| \leq \lambda$, $\hat{g}(x) = \frac{\hat{f}(x)}{h(x)}$. Comme, par hypothèse, $h \in I$, $h * g \in I$. De plus

$\hat{h} * \hat{g} = \hat{h} \hat{g}$ et par suite, pour $|x-a| \leq \lambda$, $\hat{h} * \hat{g}(x) = \hat{f}(x)$.

Ainsi nous avons pu déterminer une fonction $U_a = h * g \in I$ telle qu'il existe un voisinage de a .

$V_a = \{x ; |x-a| \leq \lambda\}$ dans lequel $\hat{U}_a(t) = \hat{f}(t)$. C.Q.F.D.

Maintenant, le théorème énoncé au début implique le suivant :

Soit $f \in L_1$. Pour que le sous-espace engendré par les translatées de f soit dense dans L_1 , il faut et suffit que $\hat{f}(x) \neq 0$ pour tout x réel.

Revenons alors à la condition W considérée précédemment. On a vu qu'elle était équivalente au fait que $N(e^t)e^t$ satisfasse à la condition précédente relative aux translatées.

La condition W pour la fonction N est donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(e^t)e^t e^{itx} dt \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} N(u)u^{ix} du \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Récapitulation des théorèmes taubériens.

Dans toute la suite, les fonctions N et $s(t)$ satisfont aux hypothèses suivantes :

- 1) $N(t)$ est sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)dt = 1$
- 2) $s(t)$ est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , mesurable et bornée sur tout intervalle $[0, T]$ où $0 < T < +\infty$.

- 3) λ étant réel, $\lambda > 1$, on définit

$$W(t, \lambda) = \sup_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| \quad \text{et} \quad W(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} W(t, \lambda).$$

- 4) si $s(t)$ est réelle, on définit

$$-W(t, \lambda) = \inf_{t \leq t' \leq \lambda t} [s(t') - s(t)] \quad \text{et} \quad \varpi(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} W(t, \lambda)$$

Théorème 1. On suppose $N(t)\log t$ sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)t^{iu} dt \neq 0$
 $\forall u \in \mathbb{R}$. Si $\int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ existe pour $x > 0$ et tend vers S quand $x \rightarrow 0$,
et si $w(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = S$.

Théorème 2. On suppose $N(t)\log t$ sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)t^{iu} dt \neq 0$
 $\forall u \in \mathbb{R}$, et de plus $N(t) \geq 0$ pour $t > 0$. On suppose en outre $s(t)$ réel. Si
 $\int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ existe pour $x > 0$ et tend vers S quand $x \rightarrow 0$, et si $\omega(\lambda) < +\infty$
et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \omega(\lambda) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = S$.

Remarquons que, si $s(t)$ est supposée à variation bornée sur tout $[0, T]$, $0 < T < \infty$,
 avec $s(0) = 0$, ces deux théorèmes restent vrais en remplaçant l'hypo-

thèse portant sur $\int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt$ par les suivantes : K étant définie par
 $K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)du$, on suppose que $\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t)$ existe pour tout $x > 0$ et tend
 vers S quand $x \rightarrow +0$. En effet pour $t > 1$, $|K(t)\log t| \leq \int_t^{+\infty} |N(u)\log u|du$ et
 il en résulte que $K(t) = o(\frac{1}{\log t})$ pour t infini.

D'autre part, l'hypothèse $w(\lambda) < +\infty$ implique que, pour $t > 0$ et $t' > 0$,

$$|s(t') - s(t)| \leq A + B \left| \log \frac{t'}{t} \right|$$

et par suite $s(t) = O(\log t)$ (prendre $t' = 1$).

Par suite, si $w(\lambda) < +\infty$, le produit $K(xt)s(t)$ tend vers 0 pour t infini
 et, d'après ce qui a été vu précédemment, si $\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t)$ existe, on a

$$\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t) = \int_0^{+\infty} x N(xt)s(t)dt.$$

Ceci démontre notre assertion pour le théorème 1.

Pour le théorème 2, elle résulte de ce que $N(t) \geq 0$ entraîne que $K(t) \geq 0$ est une
 fonction décroissante qui tend vers 0 avec $\frac{1}{t}$.

Théorème 1'. On suppose $N(t)\log t$ sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)t^{iu} dt \neq 0$

$\forall u \in \mathbb{R}$. $s(t)$ est une fonction à variation bornée sur tout intervalle fini et s'annulant

à l'origine. K étant définie par $K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)du$,

si $\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t)$ existe pour tout $x > 0$ et tend vers S quand x tend vers 0 , et

si de plus $w(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = S$.

Théorème 2'. $N(t)\log t$ étant sommable sur $(0, \infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)t^{iu} dt \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$,
et de plus $N(t) \gg 0$ pour $t > 0$, on suppose que $s(t)$ est réel, s'annule à l'origine
et est à variation bornée sur tout intervalle fini. K étant défini par $K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)du$,
si $\int_0^{+\infty} K(xt)ds(t)$ existe pour tout $x > 0$ et tend vers S quand x tend vers 0 ,
et si de plus $w(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = S$.

3) APPLICATION AU PROCÉDÉ DE SOMMATION DE LAMBERT

On dit que la série $\sum_1^{\infty} u_n$ est sommable par le procédé de Lambert (ou sommable-L),
avec pour somme S , si la série $\sum_1^{\infty} \frac{n u_n x^n}{1-x^n}$ est convergente pour $|x| < 1$ et si quand
 $x \rightarrow 1-0$, $(1-x) \sum_1^{\infty} \frac{n u_n x^n}{1-x^n} \rightarrow S$.

Remplaçant x par e^{-x} , on voit que, si la série $\sum_1^{\infty} u_n$ est sommable-L, avec pour som-
me S , la série $\sum_1^{\infty} \frac{n u_n e^{-nx}}{1-e^{-nx}}$ est convergente pour $x > 0$ et, quand $x \rightarrow 0$,
 $x \sum_1^{\infty} \frac{n u_n e^{-nx}}{1-e^{-nx}} \rightarrow S$.

Posons $K(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ et $s(t) = \sum_{n \leq t} u_n$.

$$\sum_1^{\infty} \frac{nx e^{-nx}}{1-e^{-nx}} u_n = \int_0^{+\infty} K(xt)ds(t).$$

Nous allons voir si K et s vérifient les conditions du théorème 1' ou 2'.

Tout d'abord, on a $K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)du$, où $N(t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) = \frac{te^t - e^t + 1}{(e^t - 1)^2}$.

On a $N(t) \gg 0$ pour $t > 0$.

D'autre part $\int_0^{+\infty} N(t)dt = \left[\frac{-t}{e^t - 1} \right]_0^{+\infty} = 1$.

Maintenant $s(t)$ est bien définie pour $t \gg 0$, à variation bornée sur tout intervalle fini et $s(0) = 0$.

Ensuite si $|u_n| \leq \frac{M}{n}$, on a pour $0 < t \leq t' \leq \lambda t$ $|s(t') - s(t)| \leq \sum_{t < n \leq t'} |u_n| \leq M \sum_{t \leq n \leq \lambda t} \frac{1}{n}$. Par suite, pour $t > 0$, $w(t, \lambda) \leq M \sum_{t \leq n \leq \lambda t} \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $w(\lambda) \leq M \log \lambda$. Donc $w(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} w(\lambda) = 0$.

Ceci permet d'appliquer le théorème 1'.

D'un autre côté si on suppose U_n réel et $nU_n \gg -M$, on en déduit de façon semblable $\mathcal{W}(\lambda) \ll M \log \lambda$ d'où $\mathcal{W}(\lambda) < +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \mathcal{W}(\lambda) = 0$. Ainsi le théorème 2' pourra s'appliquer.

Si donc nous arrivons à démontrer que $\int_0^{+\infty} N(t)t^{iu} dt \neq 0$ pour tout u réel, alors, si la série $\sum_1^{\infty} u_n$ est sommable-L, avec pour somme S , et si, ou bien $u_n = O(\frac{1}{n})$ ou bien U_n est réel et $n u_n \gg -M$, nous pourrons affirmer que la série $\sum_1^{\infty} u_n$ est convergente et a pour somme S .

Avant de poursuivre, il nous faut rappeler quelques résultats simples sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Rappel de résultats sur la fonction $\zeta(s)$

Par définition $\zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s = \sigma + it$), La série est absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > 1$ et par suite ζ est holomorphe dans ce demi-plan. On sait que l'on peut prolonger ζ à tout le plan. Ici nous n'aurons besoin que du prolongement dans le demi-plan $\sigma > 0$, qui s'obtient de la façon suivante :

Pour $\sigma > 1$, $\zeta(s) = \sum_1^{\infty} e^{-s \log n} = \int_0^{+\infty} e^{-st} d[e^t]$, où $[x]$ représente la partie entière du nombre x .

$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} [e^t] dt$, par intégration par parties. $\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)t} dt - s \int_0^{+\infty} e^{-st} (e^t - [e^t]) dt$. Le 2ème intégrale du 2ème membre représente une fonction holomorphe H dans le demi-plan $\sigma > 0$. D'où $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + H(s)$.

Le calcul a été fait pour $\sigma > 1$ mais l'on voit que le 2ème membre est bien défini pour $s \neq 1$ et $\sigma > 0$. Ainsi donc $\zeta(s)$ a été prolongé à tout le demi plan positif. ζ admet un pôle simple en $s = 1$ avec résidu $+1$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Hadamard-de la Vallée Poussin :

$\zeta(s)$ n'a pas de zéro sur la droite $\sigma = 1$

En effet soit la fonction

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ où } p \text{ est premier} \\ 0 & \text{si } n \neq p^k. \end{cases}$$

Remarquons que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

Alors, pour $\sigma > 1$,
$$\left(\sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\right) \left(\sum_1^\infty \frac{1}{n^\sigma}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sum_{d|n} \Lambda(d)}{n^\sigma} = \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^\sigma} = -\zeta'(s)$$

et par suite $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}$. Ceci étant soient $\varepsilon > 0$ et t réel quelconque.

Formons
$$\Phi(\varepsilon) = 3 \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} + 4 \frac{\zeta'(1+\varepsilon+it)}{\zeta(1+\varepsilon+it)} + \frac{\zeta'(1+\varepsilon+2it)}{\zeta(1+\varepsilon+2it)}.$$

$$\Phi(\varepsilon) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}} \left[3 + \frac{4}{n^{it}} + \frac{1}{n^{2it}} \right]$$

$$\Re \Phi(\varepsilon) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{2\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}} \left[1 + \cos(t \log n) \right]^2 \leq 0$$

$$\varepsilon \Re \Phi(\varepsilon) = \Re \left[3\varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} + 4\varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon+it)}{\zeta(1+\varepsilon+it)} + \varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon+2it)}{\zeta(1+\varepsilon+2it)} \right] \leq 0.$$

Supposons que le point $1+it$ soit zéro de $\zeta(s)$. Soit $k \gg 1$ son ordre de multiplicité. Le point $1+2it$ est zéro d'ordre $h \gg 0$ (si $h=0$ cela voudra dire que $1+2it$ n'est pas zéro de ζ).

Faisons tendre $\varepsilon > 0$ vers 0 et tenons compte du fait que $s=1$ est pôle simple

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Re \Phi(\varepsilon) = -3 + 4k + h \gg -3 + 4 + 0 = 1$$

Ceci est absurde puisque $\varepsilon \Re \Phi(\varepsilon) \leq 0$. Ceci démontre le théorème (démonstration de

De la Vallée Poussin † 1962).

Théorèmes taubériens

(Suite de l'étude de la fonction zêta)

Pour $\Re s > 1$, on a la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s) \zeta(s).$$

En effet, pour $t > 0$,

$$\frac{t^{s-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{s-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^N t^{s-1} e^{-nt} + \frac{t^{s-1} e^{-(N+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

$$\text{Donc } \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-(N+1)t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Il suffit alors de majorer le module de la fonction sous le signe \int au 2ème membre

$$\text{par } \frac{t^{\Re(s)-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}}$$

et d'appliquer le théorème de Lebesgue, N tendant vers l'infini.

Suite de la démonstration du théorème :

"L-sommabilité" \implies sommabilité"
+ condition taubérienne

Il reste à montrer qu'avec $N(t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) = \frac{t e^{-t} + 1}{(e^t - 1)^2}$ on a pour tout u réel

$$\int_0^{\infty} N(t) t^{iu} dt \neq 0.$$

- Remarquons que $\int_0^{\infty} N(t) t^{iu} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} N(t) t^{\varepsilon + iu} dt$

$$\text{car } \left| \int_0^{\infty} N(t) t^{\varepsilon + iu} dt - \int_0^{\infty} N(t) t^{iu} dt \right| \leq \int_0^{\infty} N(t) (t^{\varepsilon} - 1) dt$$

qui tend vers zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, d'après Lebesgue.

- En intégrant par parties, on a

$$\int_0^{\infty} N(t) t^{iu} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} (\varepsilon + iu) t^{\varepsilon + iu} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon + iu) \int_0^{\infty} \frac{t^{\varepsilon + iu}}{e^t - 1} dt,$$

et, en utilisant la dernière formule vue pour $\zeta(s)$, on trouve

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon + iu) \Gamma(1 + \varepsilon + iu) \zeta(1 + \varepsilon + iu)$$

$$= \begin{cases} iu \Gamma(1+iu) \zeta(1+iu) & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

c'est donc non nul, puisque la fonction ζ n'a pas de zéros de partie réelle 1.

Remarque à propos de la L-sommabilité :

Si la série entière $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $\gg 1$, alors la série "de Lambert"

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$$

est absolument convergente pour $|x| < 1$.

On peut développer chacun de ses termes en série entière convergente pour $|x| < 1$:

$$\frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} a_n x^{nm} .$$

En reportant ces expressions dans la série initiale on obtient une série double absolument convergente. On peut grouper les termes où l'exposant de x à la même valeur, et on obtient ainsi pour $|x| < 1$

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_1^{\infty} b_n x^n \quad \text{où} \quad b_n = \sum_{d|n} a_d .$$

APPLICATIONS ARITHMETIQUES

1. Sommabilité de $\sum \frac{\Lambda(n)-1}{n}$ et conséquences.

Rappelons que $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ où } p \text{ est premier,} \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

Pour prouver la sommabilité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n}$, il suffit de prouver que, si $u_n = \frac{\Lambda(n)-1}{n}$,

- a) $\sum_1^{\infty} \frac{nu_n x^n}{1-x^n}$ converge pour $|x| < 1$
 - b) $(1-x) \sum_1^{\infty} \frac{nu_n x^n}{1-x^n} \rightarrow S$ quand $x \rightarrow 1-0$
- } "L-sommabilité"

- c) u_n réel et $nu_n \gg -M$
ou bien $u_n = \mathcal{O}(1/n)$
- } condition taubérienne.

La condition c) est satisfaite puisque : $\forall n, nu_n \gg -1$.

La condition a) aussi puisque , si $|x| < 1$,

$$\left| \frac{nu_n x^n}{1-x^n} \right| \sim n|u_n| |x|^n \ll \log n |x|^n.$$

Pour vérifier b), remarquons que

$$\sum_1^{\infty} \frac{nu_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad \text{avec } b_n = \sum_{d|n} (\Lambda(d)-1)$$

(voir remarque à la fin du précédent paragraphe).

On a vu que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$. Si donc $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n , on a :

$$b_n = \log n - d(n).$$

Dans le but d'appliquer le théorème abélien, réciproque du lemme de Hardy Littlewood,

évaluons, lorsque $x \rightarrow \infty$:

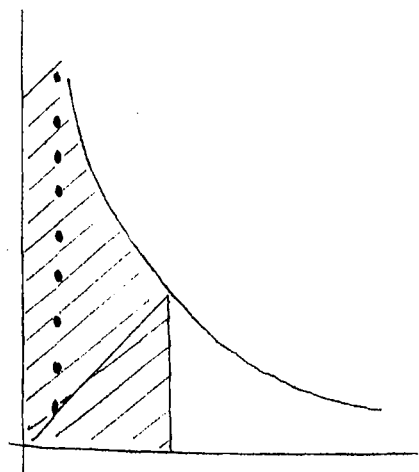
$$\sum_{n \leq x} b_n = \sum_{n \leq x} \log n - \sum_{n \leq x} d(n).$$

$E(t)$ désignant la partie entière de t , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log n &= \int_1^x \log t \, dE(t) \\ &= E(x) \log x - \int_1^x \frac{E(t)}{t} \, dt \end{aligned}$$

$$\text{qu'on écrit } = x \log x - x + 1 - (x-E(x)) \log x + \int_1^x \frac{t-E(t)}{t} \, dt$$

$$= x \log x - x + o(\log x) = x \log x - x + o(x).$$



Pour évaluer $\sum_{n \leq x} d(n)$, traçons 2 demi-axes Ou et Ov , et remarquons que $\sum_{n \leq x} d(n)$ est égal au nombre

de points à coordonnées entières situés sur les arcs d'hyperboles d'équations

$$uv = 1, uv = 2, \dots, uv = E(x)$$

c'est à dire situés entre les axes et l'arc de courbe d'équation $uv = x$.

Ce nombre est égal à deux fois le nombre de points à coordonnées entières situés dans le domaine hachuré diminué du nombre de points analogues situés dans le carré :

$$0 < u \leq \sqrt{x}, \quad 0 < v \leq \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) &= 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} E\left(\frac{x}{n}\right) - E^2(\sqrt{x}) \\ &= 2x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} + o(\sqrt{x}) - x + o(\sqrt{x}) \\ &= x \log x + 2\gamma x - x + o(x), \end{aligned}$$

où γ = constante d'Euler.

D'où $\sum_{n \leq x} b_n = -2\gamma x + o(x)$. Donc, par suite du théorème abélien évoqué ci-dessus,
 $\sum_1^{\infty} b x^n \sim \frac{-2\gamma}{1-x}$ quand $x \rightarrow 1-0$.

La série $\sum_1^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n}$ a donc pour somme -2γ .

Conséquence 1.

Appliquons à cette série le lemme suivant :

Si $\sum_1^{\infty} u_n = S$,

Alors $\sum_{n \leq x} n u_n = o(x)$ quand $x \rightarrow \infty$.

(il suffit d'écrire, en posant

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n \leq x} u_n, \\ \sum_{n \leq x} n u_n &= \int_0^x t d(s(t)-S) \\ &= (s(t)-S)x - \int_0^x [s(t) - S] dt \\ &= o(x) + o(x) = o(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n \leq x} (\Lambda(n)-1) = o(x)$.

Donc, si l'on pose

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

on a :

$$\Psi(x) \sim x \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

Conséquence 2.

De $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)-1}{n} = -2\gamma + o(1)$ quand $x \rightarrow \infty$,

on tire

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - 2\gamma + o(1) \\ &= \log x - \gamma + o(1). \end{aligned}$$

p désignant un nombre premier, on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\log p}{p^2} + \dots + \sum_{p \leq x^{1/q}} \frac{\log p}{p^q},$$

avec $q = E \left[\frac{\log x}{\log 2} \right]$.

Mais l'on remarque que les séries $S_k = \sum_p \frac{\log p}{p^k}$ convergent pour $k \gg 2$, et la série

$\sum_{k \geq 2} S_k$ formée par leurs sommes converge. Il existe donc une constante a telle que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + a + o(1).$$

2. Equivalence " $\Psi(x) \sim x$ " comme conséquence d'un théorème d'Ikehara que nous admet-

tons :

s , mesurable croissante, définie sur $[0, +\infty[$ est telle que

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} ds(t) \text{ converge pour } \Re(z) > a > 0.$$

S'il existe une constante A telle que $f(z) - \frac{\Lambda}{z-a}$ tend vers une limite finie quand

$z \rightarrow iy + a$, pour tout y réel, alors $s(t) \sim \frac{A}{a} e^{at}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Nous partons de $\sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ (pour $\Re(s) \gg 1$).

Comme $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$,

le premier membre s'écrit $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} d\Psi(x) = \int_0^\infty e^{-st} d\Psi(e^t)$.

$\Psi(e^t)$ est une fonction croissante de t .

Comme la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$ et a un pôle simple de résidu 1 pour $s = 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \text{ tend vers une limite finie quand } s \rightarrow iy + 1.$$

Donc $\Psi(e^t) \sim e^t$ et $\Psi(x) \sim x$.

3. Le théorème des nombres premiers comme conséquence de " $\Psi(x) \sim x$ "

NB. Le raisonnement ci-dessous n'est pas taubérien.

$\mathcal{O}(x)$ désigne le nombre de nombres premiers $\leq x$. Le théorème des nombres premiers

affirme que $\mathcal{O}(x) \sim \frac{x}{\log x}$. On a déjà posé $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$

$$\text{posons } \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} \psi(x) \sim x \\ \psi(x) \gg \vartheta(x) \gg C \end{array} \right\} \Rightarrow \theta(x) = \vartheta(x).$$

$$\text{De plus, si } q = E\left(\frac{\log x}{\log 2}\right), \text{ on a } \psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \dots + \vartheta(x^{1/q}).$$

ϑ est une fonction croissante de x

$$\text{Donc } \psi(x) - \vartheta(x) \leq q \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) \cdot \text{ soit } \psi(x) - \vartheta(x) = o(x^{\frac{1}{2}} \log x) = o(x).$$

$$\text{Donc } \vartheta(x) \sim x.$$

D'autre part, comme conséquence des définitions de ϑ et ϖ , on a

$$\vartheta(x) \leq \varpi(x) \log x \quad (x \gg 1)$$

et par ailleurs, si α est un nombre de $]0, 1[$,

$$\vartheta(x) \gg \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \gg \alpha \log x (\varpi(x) - x^\alpha),$$

$$\text{d'où } \varpi(x) \log x \leq \frac{1}{\alpha} \vartheta(x) + x^\alpha \log x.$$

D'où les inégalités :

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\varpi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{1-\alpha}}.$$

Faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$1 \leq \overline{\lim} \quad \text{ou} \quad \underline{\lim} \left(\frac{\varpi(x) \log x}{x} \right) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

En faisant tendre α vers 1, on voit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varpi(x) \log x}{x} = 1, \text{ donc } \varpi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

4. Fonction μ de Möbius.

$$\text{Posons } \text{ si } n = 1, \quad \mu(1) = 1,$$

si $n > 1$:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^q & \text{si } n \text{ est le produit de } q \text{ facteurs premiers tous différents} \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$\text{Montrons que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{ converge et } = 0.$$

Posant $u_n = \mu(n)$, il suffit de vérifier que

- a) $\sum \frac{n x^n}{1-x^n}$ converge pour $|x| < 1$ } la série $\sum u_n$ a pour "L-somme" 0
 b) $(1-x) \sum \frac{n x^n}{1-x^n} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1-0$ }
 c) $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$: condition taubérienne.

Les conditions a) et c) sont immédiatement vérifiées. On écrit par ailleurs

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{1-x^n} = \sum_{n \geq 1} b_n x^n,$$

$$\text{où } b_n = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=1 \\ 0 & \text{pour } n > 1. \end{cases}$$

En effet, si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, les diviseurs d de n , pour lesquels $\mu(d) = (-1)^q$ sont au nombre de C_k^q (avec $0 \leq q \leq k$) d'où $b_n = \sum_{q=0}^k C_k^q (-1)^q = (1-1)^k = 0$.

D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{1-x^n} = x$ et $(1-x) \sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{1-x^n} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1-0$.

Remarque : On peut montrer que

- cette propriété de $\mu(n)$ est équivalente au théorème des nombres premiers

$$-\sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x).$$

5. Fonction λ .

Posons $\lambda(1) = 1$ et, pour $n > 1$,

$\lambda(n) = (-1)^q$ si n est le produit de q facteurs premiers pas forcément différents.

On trouve $b_n = \sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

Donc $\sum_{n \leq x} b_n = E[\sqrt{x}] = o(x)$, et d'après un théorème abélien : $\sum_{n \leq x} b_n x^n = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ converge et $= 0$ et il en résulte que $\sum_{n \leq x} \lambda(n) = o(x)$.

Considérons $\sum_{n \leq x} \frac{1 + \lambda(n)}{2}$ et $\sum_{n \leq x} \frac{1 - \lambda(n)}{2}$. Chacune de ces quantités est équivalente à

$\frac{x}{2}$.



La première donne le nombre des entiers $\leq x$ qui sont le produit d'un nombre pair de facteurs premiers ; la deuxième, celui des entiers qui sont produits d'un nombre impair de facteurs premiers. Donc, lorsque $x \rightarrow \infty$, ces deux nombres sont équivalents (à $\frac{x}{2}$).

LES POTENTIELS NEWTONIENS D'ÉNERGIE FINIEFonctions surharmoniques et potentiels newtoniens

Introduction. Cette série de quatre exposés sert de préliminaires à l'étude d'un problème de synthèse spectrale dans les espaces de Dirichlet, étude qui fera l'objet des trois exposés suivants. On y donne les éléments de la théorie de Cartan [2], suivant d'assez près les premiers exposés d'un cours fait à Londres (London Math. Soc. Instructional Conference, Pâques 1961) ; le lecteur désirant approfondir cette question pourra consulter l'ouvrage de M. Brelot [3]. Le quatrième exposé esquisse une démonstration élémentaire d'un théorème de synthèse spectrale sur l'espace des distributions d'énergie newtonienne finie ; c'est ce résultat qui sera étendu aux espaces de Dirichlet, par des méthodes très différentes.

I -- Rappel sommaire sur les mesures de Radon

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact E à base dénombrable. Une mesure de Radon positive sur E est une fonction d'ensemble μ définie sur la tribu \mathcal{B} des ensembles boréliens de E , à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, telle $\mu(e) < +\infty$ pour tout ensemble compact e , et telle que, pour toute suite d'ensembles boréliens e_n deux à deux disjoints, on ait

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(e_n).$$

Si f est une fonction borélienne positive, on peut définir l'intégrale de f par rapport à la mesure de Radon positive μ , d'une façon analogue à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction numérique d'une variable réelle ; c'est un nombre $\mu(f)$, $0 \leq \mu(f) \leq +\infty$, qu'on notera aussi :

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu = \mu(f).$$

Si f est la différence de deux fonctions boréliennes positives, on définit l'intégrale de f par rapport à μ par :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

à condition que l'une au moins des intégrales du second membre soit finie ; f^+ et f^- désignent évidemment les parties positive et négative de f .

On utilisera constamment les résultats suivants :

1°) Théorème de convergence monotone. Etant donnée une suite monotone croissante de fonctions boréliennes positives f_n , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right] d\mu$$

que les deux membres soient finis ou égaux à $+\infty$.

2°) Théorème de Fubini. Soient E et F deux espaces localement compacts ; si μ est une mesure positive sur E et ν une mesure positive sur F , il existe une mesure positive λ sur $E \times F$ telle que, si e et e' sont des ensembles boréliens de E et F respectivement, on ait : $\lambda(e \times e') = \mu(e) \nu(e')$.

Si f est une fonction borélienne sur $E \times F$, on a :

$$\begin{aligned} \int f(x,y) d\lambda(x,y) &= \int \left[\int f(x,y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f(x,y) d\mu(x) \right] d\nu(y) \end{aligned}$$

et les deux fonctions $g(x) = \int f(x,y) d\nu(y)$ et $h(y) = \int f(x,y) d\mu(x)$ sont boréliennes.

On désigne par C l'ensemble des fonctions continues sur E , nulles hors d'un compact de E , et par C^+ l'ensemble des fonctions ≥ 0 de C . Le support d'une fonction $f \in C$ est par définition l'adhérence de l'ensemble (ouvert) des points x tels que $f(x) \neq 0$.

Etant donnée une mesure de Radon positive μ sur E , l'application $f \rightarrow \mu(f)$ est une forme linéaire positive sur C ; inversement à toute forme linéaire L positive sur C correspond une mesure μ positive et une seule telle que $L(f) = \mu(f)$ pour toute $f \in C$ (l'unicité de μ est une conséquence de l'hypothèse selon laquelle E est à base dénombrable).

Une mesure importante est la masse-unité au point $x \in E$; elle est définie par :

$$\varepsilon_x(e) = 1 \text{ si } x \in e \quad ; \quad \varepsilon_x(e) = 0 \text{ si } x \notin e.$$

On a donc : $f(x) = \int f(y) d\varepsilon_x(y)$ ($f \in C$) ; on peut donc définir ε_x comme la forme linéaire : $f \rightarrow f(x)$ sur C .

Le support S_μ d'une mesure de Radon positive μ est par définition le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle pour μ .

La masse totale de la mesure $\mu \geq 0$ est $\int d\mu$; c'est un nombre $\leq +\infty$. C'est aussi le nombre $\sup \mu(f)$, avec $f \in C^+$, $f(x) \leq 1$ pour tout x .

On peut définir une topologie sur l'ensemble M^+ des mesures de Radon positives sur E ; on se contentera ici de la notion de convergence d'une suite : on dira que la suite de mesures $\mu_n \in M^+$ converge vaguement vers la mesure μ si, pour toute $f \in C$, la suite $\mu_n(f)$ converge vers $\mu(f)$.

On utilisera à l'occasion la notion de mesure de Radon "avec signe" ; on appelle ainsi la différence de deux mesures de Radon positives.

Ensembles positivement riches de fonctions continues. Un ensemble F de C^+ est dit positivement riche si, quels que soient la fonction $f \in C^+$, le voisinage V du support S_f et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire finie

$$\psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$$

avec $\varphi_i \in F$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ et telle que

$$\|f - \psi\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad S_\psi \subset V$$

où $\|g\|$ désigne la norme uniforme de la fonction $g \in C$.

Exemples. 1°) L'ensemble de toutes les fonctions de la forme $\varphi(x)\psi(y)$, avec $\varphi \in C_E^+$ et $\psi \in C_F^+$ est positivement riche dans $C_{E \times F}^+$.

2°) Si Ω est un ouvert euclidien, l'ensemble D_Ω^+ des fonctions numériques positives indéfiniment dérivables à support compact dans Ω est positivement riche dans C_Ω^+ .

3°) Exemple utilisé par Cartan [2] en théorie du potentiel : soit F un sous-ensemble de $C_{\mathbb{R}^n}^+$ tel que :

(a) pour tout voisinage V de l'origine, il existe une fonction $\varphi \in F$ non identiquement nulle, à support contenu dans V ;

(b) si $\varphi \in F$, toute translatée $\tau_x \varphi$ de φ par un élément $x \in \mathbb{R}^n$ est dans F ; alors F est positivement riche.

En effet soit $f \in C^+$; on peut supposer que, pour toute $\varphi \in F$, on ait $\int \varphi(t) dt = 1$; on construit une suite de fonctions $\varphi_n \in F$ telle que, pour tout voisinage V de l'origine, on ait $S_{\varphi_n} \subset V$ pour n assez grand. Alors si on pose

$$g_n(x) = (f * \varphi_n)(x) = \int \varphi_n(x-t)f(t)dt$$

g_n converge uniformément vers f (lorsque n tend vers $+\infty$) et on a $S_{g_n} \subset S_f + V$ pour n assez grand. En remplaçant l'intégrale définissant g_n par une somme de Riemann convenable, on obtient une fonction réalisant l'approximation désirée de f .

Il est intéressant d'observer que, dans ce dernier exemple, on peut remplacer l'ensemble des translations par tous les éléments de \mathbb{R}^n par un ensemble dénombrable de translations partout dense dans \mathbb{R}^n , par exemple l'ensemble des translations par les éléments à coordonnées rationnelles; on utilisera cette remarque.

2 - Fonctions surharmoniques

Soit D un domaine euclidien, c'est à dire un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . On dit qu'une fonction numérique $u(x)$ telle que $-\infty < u(x) \leq +\infty$ ($x \in D$) est surharmonique si

- 1) $u \not\equiv +\infty$
- 2) u est semi continue inférieurement dans D
- 3) Si $B_{r,x_0} \subset D$, on a

$$u(x_0) \geq \int_{S_{r,x_0}} u(y) d\sigma_{r,x_0}(y) = \int_{S_r} u(x_0+y) d\sigma_r(y)$$

où S_{r,x_0} , B_{r,x_0} désignent respectivement la sphère $|x - x_0| = r$ et la boule fermée $|x - x_0| \leq r$, σ_{r,x_0} désigne la mesure uniformément répartie sur S_{r,x_0} de masse totale 1, et S_r , B_r , σ_r sont les notions correspondantes obtenues en prenant x_0 à l'origine.

On peut montrer qu'on ne change pas la définition si, dans 3), on remplace les valeurs

moyennes sur les sphères par des valeurs moyennes sur les boules.

Voici quelques résultats élémentaires concernant les fonctions surharmoniques (pour les démonstrations, voir par exemple [1])

1) L'ensemble des points où une fonction harmonique est finie est partout dense, et u est intégrable au sens de Lebesgue sur tout compact de D .

2) u ne peut pas atteindre un minimum dans D sans être constante dans D .

3) Si h est harmonique dans le domaine D , supposé relativement compact, et si $\liminf_{y \rightarrow x} (u(y) - h(y)) \geq 0$ pour tout $x \in \partial D$ (frontière de D), alors $u \geq h$ dans D .

4) La fonction

$$u_r(x_0) = \int_{S_r} u(x_0 + y) d\sigma_r(y)$$

est définie dans un ouvert $D_r \subset D$ et u est surharmonique et continue. De plus, pour tout x fixé, $u_r(x)$ est une fonction décroissante de r et on a $\lim_{r \rightarrow 0} u_r(x) = u(x)$.

5) La limite d'une suite croissante de fonctions surharmoniques est soit surharmonique soit identique à $+\infty$.

6) Si $u_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) sont des fonctions surharmoniques, il en est de même de $w(x) = \inf_{1 \leq i \leq n} [u_i(x)]$. Ce résultat n'est pas valable pour une famille infinie de fonctions surharmoniques ; en fait $w(x)$ n'est pas alors nécessairement semi-continue inférieurement.

3 - Potentiels Newtoniens.

Le potentiel Newtonien est défini dans E^n de la façon suivante :

Posons

$$K(x) = \begin{cases} |x|^{2-n} & (x \neq 0), \quad +\infty \text{ si } x = 0, \text{ pour } n > 2 \\ \text{Log } \frac{1}{|x|} & (x \neq 0), \quad +\infty \text{ si } x = 0, \text{ pour } n = 2 \end{cases}$$

et $G(x,y) = K(x-y)$. Pour $n > 2$, G est la fonction de Green de l'espace total et alors K est positif.

Considérons une mesure positive μ (pour $n = 2$, on doit aussi supposer que μ est à support compact). Puisque $G(x,y)$ est une fonction de y semi-continue inférieure-

ment, $\int G(x,y)d\mu(y)$ existe ; on définit le potentiel Newtonien de μ par

$$U^\mu(x) = \int G(x,y)d\mu(y).$$

Si $d\mu = f \cdot dx$, on écrit U^f au lieu de U^μ .

Si $U^\mu \neq \infty$, U^μ est surharmonique dans R^n et harmonique dans $R^n - S\mu$.

La considération des médiations sphériques est très utile en théorie newtonienne .

Il est bien connu que

$$U^{\sigma_{r,x_0}}(x) = \begin{cases} K(x-x_0) & (|x-x_0| \gg r) \\ K(r) & (|x-x_0| \leq r) \end{cases}$$

Il en résulte que, si $r > r'$, $U^{\sigma_{r,x_0}} - U^{\sigma_{r',x_0}}$ est non négatif, partout continu, et s'annule à l'extérieur de la boule $|x-x_0| < r$. En faisant varier r, r' et x_0 , on obtient un ensemble positivement riche de fonctions continues. Si on restreint r, r' et x_0 à ne prendre que des valeurs rationnelles, on obtient l'ensemble dénombrable positivement riche utilisé par H. Cartan [2] en théorie newtonienne.

Pour éviter des difficultés techniques dues au potentiel logarithmique, qui nécessite une étude spéciale, on supposera dans toute la suite $n \gg 3$.

Un autre outil fondamental est la loi de réciprocité : si μ et ν sont deux mesures positives, on a

$$\iint G(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int U^\mu d\nu = \int U^\nu d\mu \leq +\infty.$$

Cela résulte immédiatement de la symétrie $G(x,y) = G(y,x)$ et du théorème de Fubini.

Prenant $\nu = \sigma_{r,x_0}$ et désignant par $U_r^\mu(x_0)$ la moyenne de U^μ sur S_{r,x_0} il vient :

$$U_r^\mu(x_0) = \int U^\mu d\sigma_{r,x_0} = \int U^{\sigma_{r,x_0}} d\mu \leq \int G(x_0,y)d\mu(y) = U^\mu(x_0).$$

Il en résulte facilement que si U^μ n'est pas identique à $+\infty$, c'est une fonction surharmonique.

Il en résulte aussi que U_r^μ est continue et que, pour tout $x \in R^n$, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_r^\mu(x) = U^\mu(x) \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} U_r^\mu(x) = 0.$$

Principe d'unicité des masses. Si μ et ν sont des mesures de Radon positives et si

$U^\mu = U^\nu \not\leq + \infty$, alors $\mu = \nu$.

En effet si on pose $\lambda = \sigma_{r, x_0}^- - \sigma_{r^i, x_0}^-$ on a

$$\int U^\mu d\lambda = \int U^\nu d\lambda$$

et, d'après la loi de réciprocité

$$\int U^\lambda d\mu = \int U^\lambda d\nu$$

(le théorème de Fubini s'applique encore, bien que λ ne soit pas une mesure positive, grâce à l'hypothèse faite $U^\mu \not\leq + \infty$). Le résultat énoncé est alors une conséquence immédiate du fait que les U^λ constituent un ensemble positivement riche.

Pour achever ces préliminaires, rappelons encore un résultat essentiel :

Théorème de décomposition de F. Riesz.

Forme locale. Soit u surharmonique dans D . Si $\omega \in D$ est un domaine borné avec $\bar{\omega} \subset D$, il existe une mesure de Radon positive μ sur $\bar{\omega}$ et une fonction harmonique h dans ω telle que $u = U^\mu + h$ dans ω .

Forme globale (énoncée seulement pour $E = \mathbb{R}^n$, $n > 2$). Si $u \gg 0$ est surharmonique dans \mathbb{R}^n tout entier, il existe une constante $C \gg 0$ et une mesure de Radon positive μ telle que $u = U^\mu + C$. De plus, μ et C sont déterminés de façon unique par u .

Bornons-nous à énoncer quelques conséquences fondamentales du théorème de Riesz :

a) Caractérisation des potentiels newtoniens. Une fonction surharmonique u dans \mathbb{R}^n est le potentiel d'une mesure de Radon positive si et seulement si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x_0) = 0.$$

b) Si $u \geq 0$ est surharmonique et $u \leq U^\mu$, où μ est une mesure de Radon positive, u est un potentiel newtonien.

c) $\inf(U^\mu, U^\nu)$ est un potentiel newtonien. Plus généralement, si u est surharmonique positive, $\inf(U^\mu, u)$ est un potentiel newtonien.

d) Un potentiel U^μ est la limite d'une suite croissante de potentiels continus (par exemple $U_{1/n}^\mu$).

Bibliographie

- [1] M. Brelot : Eléments de la Théorie Classique du Potentiel. Les Cours de la Sorbonne, Paris, 1959.

 - [2] H. Cartan : Théorie du potentiel newtonien : Energie, Capacité, Suites de Potentiels (Bull. Soc. Math. de France, 73 (1945) 74-106)'
-

LES POTENTIELS NEWTONIENS D'ÉNERGIE FINIEI - La notion d'énergie

Soit μ une mesure de Radon positive sur \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), et U^μ son potentiel newtonien. L'énergie de μ est par définition le nombre

$$I(\mu) = \int U^\mu d\mu \leq +\infty.$$

Evidemment, si U^μ est borné et si μ est à support compact, on a $I(\mu) < +\infty$.

L'énergie mutuelle des mesures μ et $\nu \geq 0$ est par définition

$$I(\mu, \nu) = \int U^\mu d\nu = \int U^\nu d\mu \leq +\infty.$$

On notera E^+ l'ensemble des mesures positives d'énergie finie, et E l'ensemble des mesures qui sont différence de deux mesures de E^+ .

Si $\mu = \mu_1 - \mu_2$, avec μ_1 et μ_2 dans E^+ , on pose

$$I(\mu) = I(\mu_1) + I(\mu_2) - 2I(\mu_1, \mu_2),$$

expression qui a un sens puisque les $I(\mu_i)$ sont $< +\infty$. On va voir que ce nombre est positif :

Théorème 1 (principe de l'énergie). Si $\mu \in E$, on a $I(\mu) \geq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $\mu = 0$.

Démonstration. Si μ est à densité suffisamment régulière ($d\mu = f dx$, avec f différentiable et à support compact), cela résulte de l'expression bien connue (conséquence de la formule classique de Green) :

$$I(f) = \frac{1}{a_n} \int |\text{grad } U^f|^2 dx,$$

où $a_n = (n-2)s_n$, s_n étant l'aire de la sphère unité.

Le cas général peut s'en déduire par des passages à la limite un peu laborieux. Il est préférable d'utiliser la formule de composition de Marcel Riesz :

$$(1) \quad \int |t|^{\alpha-n} \int |x-t|^{\beta-n} dt = C_{\alpha, \beta} |x|^{\alpha+\beta-n}$$

avec $C_{\alpha, \beta} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2}) \Gamma(\frac{n-\alpha-\beta}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2}) \Gamma(\frac{n-\beta}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})}$ et $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$, $\alpha+\beta < n$.

La vérification de (1) est élémentaire (simple question d'homogénéité). Le calcul effectif du coefficient $C_{\alpha, \beta}$ est un peu plus pénible, mais sa valeur exacte importe peu pour la théorie.

Appelons potentiel d'ordre α engendré par la mesure $\mu \gg 0$ la fonction U_{α}^{μ} définie par

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) = \int |x - t|^{\alpha-n} d\mu(t) \quad (0 < \alpha < n)$$

et énergie mutuelle d'ordre α des mesures μ et $\nu \gg 0$ le nombre

$$I_{\alpha}(\mu, \nu) = \int U_{\alpha}^{\mu} d\nu = \int U_{\alpha}^{\nu} d\mu \leq +\infty$$

(on posera $I_{\alpha}(\mu) = I_{\alpha}(\mu, \nu)$).

D'après (1) on a

$$\int |x - t|^{\frac{\alpha}{2}-n} |t - y|^{\frac{\alpha}{2}-n} dt = k_{\alpha} |x - y|^{\alpha-n} \quad (k_{\alpha} = C_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}}).$$

Intégrant les deux membres par rapport à la mesure produit $\mu \times \nu$ et appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\int U_{\frac{\alpha}{2}}^{\mu}(t) U_{\frac{\alpha}{2}}^{\nu}(t) dt = k_{\alpha} I_{\alpha}(\mu, \nu).$$

En prenant $\mu = \nu$ on voit donc que $I_{\alpha}(\mu)$ est finie si et seulement si $U_{\frac{\alpha}{2}}^{\mu}$ est de carré intégrable. L'inégalité de Schwarz entraîne alors :

$$\left[I_{\alpha}(\mu, \nu) \right]^2 \leq I_{\alpha}(\mu) I_{\alpha}(\nu)$$

et par suite :

$$I_{\alpha}(\mu - \nu) = I_{\alpha}(\mu) + I_{\alpha}(\nu) - 2I_{\alpha}(\mu, \nu) \geq 0.$$

Prenant $\alpha = 2$ on a bien prouvé que l'énergie newtonienne de toute mesure de E est ≥ 0 .

Supposons de plus que $I(\mu - \nu) = 0$. Alors, toujours d'après l'inégalité de Schwarz, il vient

$$\int U^{\lambda} d\mu - \int U^{\lambda} d\nu = I(\mu - \nu, \lambda) = 0$$

pour toute $\lambda \in E$. Comme l'ensemble des potentiels U^{λ} contient un ensemble positivement riche de fonctions continues à support compact (prendre $\lambda = \sigma_{r,x} - \sigma_{r',x'}$ avec $0 < r < r', x \in \mathbb{R}^n$), on en déduit $\mu = \nu$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

II - Théorème de Cartan

On vient de voir que l'énergie est une forme quadratique définie positive sur E.

La racine carrée de l'énergie est donc une norme hilbertienne sur l'espace vectoriel réel E. On notera $\|\mu\| = [I(\mu)]^{\frac{1}{2}}$ la valeur de cette norme pour la mesure $\mu \in E$ et $(\mu, \nu) = I(\mu, \nu)$ la valeur du produit scalaire associé.

Muni de ce produit scalaire, E est un espace préhilbertien. Des exemples simples montrent que E n'est pas complet. Un résultat essentiel, dû à Cartan (voir référence dans l'exposé n° 1) est que le cône E^+ est complet. Pour le démontrer, on va établir quelques lemmes préliminaires :

Lemme 1. Si μ et ν sont des mesures ≥ 0 telles que $U^\mu \leq U^\nu$, alors $I(\mu) \leq I(\nu)$.

En effet
$$I(\mu) = \int U^\mu d\mu \leq \int U^\nu d\mu = \int U^\mu d\nu \leq \int U^\nu d\nu = I(\nu).$$

Corollaire : sous les hypothèses précédentes, la relation $\nu \in E^+$ entraîne $\mu \in E^+$.

Lemme 2. Soit $\mu \in E^+$, et soit $\{U^{\mu_n}\}$ une suite monotone de potentiels engendrés par des mesures de E^+ , convergeant partout vers U^μ ; alors μ_n converge fortement (dans l'espace préhilbertien E) vers μ .

Démonstration. Dans tous les cas on a, d'après le théorème sur l'intégration des suites monotones :

$$\|\mu\|^2 = \int U^\mu d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int U^{\mu_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \mu).$$

On en déduit (inégalité de Schwarz) : $\|\mu\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|$ (ce qui est d'ailleurs évident d'après le lemme 1 dans le cas des suites décroissantes).

Montrons que $\|\mu_n\|$ converge vers $\|\mu\|$:

Si la suite U^{μ_n} est croissante, on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|^2 \leq \|\mu\|^2$ (lemme 1), d'où le résultat.

Si la suite est décroissante on a, pour $n \geq n_0$:

$$\|\mu_n\|^2 = \int U^{\mu_n} d\mu_n \leq \int U^{\mu_{n_0}} d\mu_n = (\mu_n, \mu_{n_0})$$

d'où :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \mu_{n_0}) = (\mu, \mu_0) ;$$

ceci ayant lieu pour tout $n_0 > 0$, on a encore : $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|^2 \leq \lim_{n_0 \rightarrow \infty} (\mu, \mu_{n_0}) = \|\mu\|^2$.

Le lemme 2 s'en déduit immédiatement, car :

$$\|\mu - \mu_n\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\mu_n\|^2 - 2(\mu, \mu_n) \text{ tend vers } 0.$$

Lemme 3. L'ensemble S des mesures de E qui engendrent un potentiel continu à support compact est partout dense dans E.

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'on peut approcher autant qu'on veut (au sens de la norme - énergie) toute mesure μ de E par une mesure de S.

On peut supposer $\mu \in E^+$, car toute mesure de E est différence de deux mesures de E^+ .

On peut supposer que μ est à support compact, car toute mesure de E^+ est, d'après le lemme 2, limite forte de ses restrictions aux boules $B(C, n)$, la suite des potentiels engendrés par ces restrictions étant monotone, convergeant vers le potentiel engendré par la mesure donnée.

On peut également supposer que U^μ est continu. En effet toute mesure $\nu \in E^+$ est limite forte des mesures ν_n définies par $U^{\nu_n} = U^\nu_{1/n}$ (voir conséquence (d) du théorème de décomposition de Riesz, exposé n° 4). La suite $\{U^{\nu_n}\}$ croît vers U^ν , donc ν_n converge fortement vers ν (lemme 2). On sait que les U^{ν_n} , obtenus par médiations sphériques, sont continus. Il reste à prouver que si ν est à support compact il en est de même de ν_n ; or cela résulte de ce que U^{ν_n} est harmonique hors d'un compact, ou, mieux, de ce que ν_n est le produit de composition $\nu * \sigma_{1/n}$.

Finalement, μ ayant les propriétés précédentes, il suffit d'approcher μ par les mesures (non positives) $\mu - \mu_n$, où $U^{\mu_n} = \inf(U^\mu, \frac{1}{n})$ (voir conséquence (c) du théorème de décomposition de Riesz). D'après le lemme 2, μ_n converge fortement vers 0. D'autre part U^{μ_n} est continu et nul hors d'un compact, puisque la mesure μ est à support compact, donc le potentiel U^μ tend vers 0 à l'infini.

Théorème 2 (Théorème de Cartan). Le cône E^+ est complet.

Démonstration. Soit $\{\mu_n\}$ une suite de Cauchy dans E^+ .

Cette suite admet une limite vague μ . En effet, pour toute mesure $\lambda \in E$, on a :

$$\left| \int U^\lambda d\mu_m - \int U^\lambda d\mu_n \right| = |(\lambda, \mu_m - \mu_n)| \leq \|\lambda\| \|\mu_m - \mu_n\|$$

donc la suite de nombres réels $\int U^\lambda d\mu_n$ est convergente. Comme l'ensemble des potentiels U^λ contient un ensemble positivement riche, la suite μ_n est vaguement convergente.

Cette limite vague est un élément de E^+ . En effet, d'après la semi-continuité inférieure de la fonction de deux variables $K(x-y)$ et la convergence vague de

$\mu_n \times \mu_n$ vers $\mu \times \mu$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mu\|^2 &= \iint K(x-y) d\mu(x) d\mu(y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \iint K(x-y) d\mu_n(x) d\mu_n(y) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

La suite μ_n converge faiblement vers μ (il s'agit de convergence faible au sens des espaces de Hilbert). En effet la suite des normes est bornée. D'autre part les potentiels continus à support compact sont partout denses dans E , et, pour un tel potentiel U^λ , on a, d'après la convergence vague :

$$(\mu, \lambda) = \int U^\lambda d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int U^\lambda d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \lambda).$$

La mesure μ étant une limite faible de la suite de Cauchy $\{\mu_n\}$, c'est aussi une limite forte, ce qui achève la démonstration.

III - Les principes du maximum pour les potentiels d'énergie finie

Voici une conséquence facile du principe de l'énergie et du théorème de décomposition de Riesz qui sera très utile dans l'étude du balayage et de l'équilibre :

Théorème 3 (Cartan). Soit μ une mesure de E^+ , et soit u une fonction surharmonique dans R^n ($n \geq 3$) ; si on a la relation $U^\mu(x) \leq u(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour μ , alors $U^\mu \leq u$.

En effet, il existe une mesure $\nu \geq 0$ telle que $U^\nu = \inf(U^\mu, u)$ (conséquence (c) du théorème de décomposition de Riesz). D'après le lemme 1, on a $\nu \in E^+$ et

$\|\nu\| \leq \|\mu\|$. Tout revient donc à montrer que $\mu = \nu$; or on a :

$$\|\mu - \nu\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2 - 2 \int U^\nu d\mu.$$

Comme on a : $U^\nu(x) = \inf(U^\mu(x), u(x)) = U^\mu(x)$ presque partout pour la mesure μ , il vient

$$\int U^\nu(x) d\mu(x) = \int U^\mu(x) d\mu(x) = \|\mu\|^2$$

d'où :

$$\|\mu - \nu\|^2 = \|\nu\|^2 - \|\mu\|^2 \leq 0$$

et finalement $\|\mu - \nu\| = 0$, d'où $\mu = \nu$, d'après le principe de l'énergie.

Remarque. Le théorème 3 pourrait tomber en défaut si la mesure $\mu \gg 0$ n'était pas d'énergie finie.

Les résultats appelés principes du maximum se déduisent immédiatement du théorème 3 en particulierisant la fonction surharmonique u ; il suffit de les énoncer :

Principe complet du maximum. Si μ et ν sont deux mesures de E^+ et a un nombre réel $\gg 0$ tels que $U^\mu(x) \leq U^\nu(x) + a$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour μ , alors $U^\mu \leq U^\nu + a$.

Principe de domination. Même énoncé, avec $a = 0$.

Principe classique du maximum. Même énoncé, avec $\nu = 0$.

BALAYAGE, EQUILIBRE, SUITES DE POTENTIELS.I - Le balayage

Définition. Un ensemble e de \mathbb{R}^n est dit exceptionnel s'il est de mesure nulle pour toute mesure de E^+ (ensemble des mesures positives d'énergie newtonienne finie).

Un tel ensemble est de mesure de Lebesgue nulle, car la restriction de la mesure de Lebesgue à tout compact est un élément de E^+ .

Si $\mu \in E^+$, l'ensemble des points x tels que $U^\mu(x) = +\infty$ est un ensemble exceptionnel, car $\int U^\mu d\nu < +\infty$ pour toute mesure $\nu \in E^+$.

Si une propriété a lieu en tout point de \mathbb{R}^n sauf aux points d'un ensemble exceptionnel, on dira qu'elle a lieu à peu près partout.

Notation. Soit F un fermé de \mathbb{R}^n . On notera E_F^+ l'ensemble des mesures de E^+ dont le support est contenu dans F (on dira : portée par F). Cet ensemble E_F^+ est évidemment un cône fermé et complet de E (cela résulte de ce que toute limite forte de mesures de E^+ est une limite vague).

Théorème 1 (du balayage). Etant donnée une mesure $\mu \in E^+$ et un fermé F , il existe une mesure unique $\mu' \in E_F^+$ telle que l'on ait

$$U^{\mu'}(x) \leq U^\mu(x) \quad \text{partout}$$

$$U^{\mu'}(x) = U^\mu(x) \quad \text{à peu près partout sur } F.$$

Démonstration. L'unicité de μ' est une conséquence immédiate du principe de l'énergie ; en effet si μ' et μ'' répondent aux conditions, on a évidemment $\|\mu' - \mu''\| = 0$ (d'après l'égalité à peu près partout sur E de $U^{\mu'}$ et $U^{\mu''}$) d'où $\mu' = \mu''$.

Pour établir l'existence de μ' , on utilise le fait que, d'après le théorème de Cartan, E_F^+ est un ensemble convexe non vide et complet. D'après un résultat très classique de la théorie des espaces de Hilbert, il existe un élément $\mu' \in E_F^+$ qui

réalise le minimum de la distance de μ à E_F^+ ; on va constater que cet élément μ' convient.

En effet cet élément μ' est caractérisé par

$$(\mu' - \mu, \nu' - \nu) \leq 0 \quad (\nu' \in E_F^+).$$

Pour toute $\nu \in E_F^+$ on a $\mu' + \nu \in E_F^+$, d'où

$$(1) \quad (\mu' - \mu, \nu) \geq 0 \quad (\nu \in E_F^+).$$

Comme la mesure nulle appartient aussi à E_F^+ , on a également :

$$(2) \quad (\mu' - \mu, \mu') \leq 0.$$

Ces relations (1) et (2) caractérisent μ' . Or l'inégalité (1) s'écrit :

$$\int U^{\mu'} d\nu \geq \int U^{\mu} d\nu \quad (\nu \in E_F^+)$$

ce qui entraîne

$$(3) \quad \int U^{\mu'}(x) \geq \int U^{\mu}(x) \quad \text{à peu près partout sur } F.$$

D'après (2) on a donc :

$$\int U^{\mu'} d\mu' \leq \int U^{\mu} d\mu'$$

d'où, en faisant $\nu = \mu'$ dans (1) :

$$\int U^{\mu} d\mu' = \int U^{\mu'} d\mu'.$$

Cette inégalité, jointe à la relation (3), entraîne $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ sauf sur un ensemble

de mesure nulle pour μ' . Le principe de domination entraîne alors $U^{\mu'}(x) \leq U^{\mu}(x)$

partout, d'où, en rapprochant de (3) :

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x) \quad \text{à peu près partout sur } F$$

ce qui démontre le théorème du balayage. Cette mesure unique μ' sera appelée

balayée de μ sur F .

Remarque 1. On a $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ en tout point intérieur à F , car deux fonctions surharmoniques qui sont égales presque partout dans un ouvert sont égales en tout point de cet ouvert. Ce résultat, moins précis que le théorème 1, est cependant loin d'être trivial.

Remarque 2. La mesure μ' , balayée de μ sur F , est la projection orthogonale de μ sur la variété linéaire (de E , ou plus généralement de l'espace \widehat{E} complété de E) engendrée par E_F^+ ; en effet les propriétés caractéristiques de μ' entraînent

$$(\mu' - \nu, \mu' - \nu) = 0 \quad (\nu \in E_F^+).$$

Les projections orthogonales dans un espace de Hilbert diminuant la norme, on aura donc

$$\|\mu'\| \leq \|\mu\|$$

ce qui est d'ailleurs une conséquence évidente de la relation $U^{\mu'} \leq U^\mu$ et du lemme 1 de l'exposé 2.

Remarque 3. Soient μ et ν deux éléments de E^+ , et soient μ' et ν' leurs balayés sur F . D'après un résultat classique sur les projections orthogonales dans un espace de Hilbert, on a

$$\int U^{\mu'} d\nu = \int U^{\nu'} d\mu = \int U^{\mu'} d\nu'.$$

Remarque 4. (Transitivité du balayage). Soient F et F' deux ensembles fermés de R^n , avec $F' \subset F$. Soit $\mu \in E^+$ et soient μ_F et $\mu_{F'}$ les balayées de μ sur F et F' respectivement. Alors $\mu_{F'}$ est la balayée de μ_F sur F' . Il s'agit là encore d'un résultat bien élémentaire lorsqu'on l'interprète en termes de projections dans les espaces de Hilbert (théorème des "trois perpendiculaires").

Remarque 5 (Continuité à droite du balayage). Soit μ une mesure de E^+ et soit F_0 un fermé de R^n . A tout nombre réel $\varepsilon > 0$ on peut associer un voisinage V de F_0 possédant la propriété suivante : pour tout fermé F tel que $F_0 \subset F \subset V$; on a

$$\|\mu_F - \mu_{F_0}\| \leq \varepsilon.$$

En effet, si $\{F_n\}$ est une suite décroissante de fermés tels que $\bigcap_n F_n = F_0$, les cônes $E_{F_n}^+$ sont décroissants et ont pour intersection $E_{F_0}^+$; il en résulte immédiatement que μ_{F_n} converge fortement vers μ_{F_0} .

II - Equilibre - Capacité

Théorème 2 (de l'équilibre). Etant donné un compact C de R^n , il existe une mesure $\gamma \in E_C^+$ et une seule qui possède les propriétés suivantes :

$$U^\gamma(x) = 1 \text{ à peu près partout sur } C ;$$

$$U^\gamma(x) \leq 1 \text{ partout dans } R^n.$$

Démonstration. La mesure $\mu = \sigma_r / K(r)$ est telle que $U^\mu(x) = 1$ pour $|x| \leq r$, $U^\mu(x) \leq 1$ pour tout $x \in R^n$. Il suffit alors de prendre r assez grand pour que la boule de centre 0 et de rayon r contienne le compact C ; la mesure γ , balayée de μ sur C , répond évidemment aux conditions du théorème ; une telle mesure est unique, d'après le principe de l'énergie.

Cette mesure γ est appelée distribution capacitaire de C . On vérifiera que c'est l'unique mesure de E_C^+ qui rend minimum l'intégrale de Gauss : $\int (U^\mu - 2) d\mu$. On aurait d'ailleurs pu montrer directement (à l'aide du principe classique du maximum) que la mesure de E_C^+ qui rend minimum l'intégrale de Gauss satisfait aux conditions du théorème 2.

Définition. On appelle capacité newtonienne du compact C la valeur commune des deux nombres $\|\gamma\|^2$ et $\int d\gamma$.

On vérifiera aisément les deux propositions suivantes :

La capacité du compact C est la borne supérieure des masses totales des mesures de E_C^+ dont le potentiel est partout ≤ 1 .

La capacité du compact C est nulle si et seulement si $E_C^+ = \{0\}$, c'est à dire si C est un ensemble exceptionnel. Sinon la capacité de C est l'inverse de la borne inférieure de l'énergie des mesures de E_C^+ dont la masse totale est 1.

La capacité intérieure d'un ensemble quelconque e est la borne supérieure des capacités des compacts contenu dans e ; un ensemble borélien (plus généralement "universellement mesurable") est donc exceptionnel si et seulement s'il est de capacité

intérieure nulle. La capacité extérieure de e est la borne inférieure des capacités (intérieures) des ouverts contenant e . On dit que e est capacitable si $\text{cap}_i(e) = \text{cap}_e(e)$.

Par définition, tout ouvert est capacitable. Il est très facile de montrer que tout compact est capacitable : cela résulte de la "continuité à droite" de la capacité, qui est une conséquence immédiate de la continuité à droite du balayage.

La capacité est évidemment une fonction croissante d'ensembles, c'est aussi une fonction sous-additive d'ensembles. En effet on montrera facilement que, pour une suite d'ensembles boréliens (plus généralement "universellement mesurables") e_n on a :

$$\text{cap}_i\left(\bigcup_n e_n\right) \leq \sum_n \text{cap}_i(e_n),$$

d'où il résulte que, pour une suite d'ensemble quelconques e_n , on a :

$$\text{cap}_e\left(\bigcup_n e_n\right) \leq \sum_n \text{cap}_e(e_n).$$

La capacité n'est pas une fonction additive d'ensembles. Cependant elle satisfait à la condition de convexité forte de Choquet : si C' et C'' sont deux compacts, on a

$$\text{cap}(C' \cap C'') + \text{cap}(C' \cup C'') \leq \text{cap}(C') + \text{cap}(C'') ;$$

c'est une conséquence assez facile du principe complet du maximum. La convexité forte et la continuité à droite entraînent un célèbre théorème de Choquet, qu'on ne démontrera pas ici : tout ensemble borélien (plus généralement tout ensemble analytique) est capacitable.

Observons encore que l'intersection de deux ensembles capacitable n'est pas nécessairement capacitable : en effet soit e un ensemble borné non capacitable (il existe de tels ensembles) ; soient S et S' deux sphères de même centre et de rayons différents contenant e dans leur intérieur ; les ensembles $S \cup e$ et $S' \cup e$ sont capacitables, leur intersection e ne l'est pas.

III - Suites de potentiels

Lemme. Soient μ et ν deux mesures positives d'énergie finie, et soit α un nombre réel > 0 ; on a l'inégalité :

$$\text{cap}_e \left\{ x \mid U^\mu(x) - U^\nu(x) \geq \alpha \right\} \leq \frac{\|\mu - \nu\|^2}{\alpha^2}$$

Démonstration. Si U^ν est continu, $U^\mu - U^\nu$ est semi-continu inférieurement, donc l'ensemble $\left\{ x \mid U^\mu(x) - U^\nu(x) > \alpha \right\}$ est ouvert. Soit e un compact contenu dans cet ensemble, et soit γ la distribution capacitaire de e . On a

$$\alpha \int d\gamma \ll \int (U^\mu - U^\nu) d\gamma \leq \|\mu - \nu\| \|\gamma\|$$

d'où

$$\text{cap}(e) = \int d\gamma = \|\gamma\|^2 \leq \frac{\|\mu - \nu\|^2}{\alpha^2},$$

et par suite :

$$\text{cap} \left\{ x \mid U^\mu(x) - U^\nu(x) > \alpha \right\} \leq \frac{\|\mu - \nu\|^2}{\alpha^2}.$$

Si maintenant ν est une mesure quelconque de E^+ , il suffit de considérer une suite croissante de potentiels continus U^{ν_n} convergeant partout vers U^ν . La suite de mesures $\nu_n \gg 0$ converge fortement vers ν (exposé 2, lemme 2), et comme la relation $U^\mu(x) - U^\nu(x) > \alpha$ entraîne $U^\mu(x) - U^{\nu_n}(x) > \alpha$ pour tout n , il vient, en appliquant la formule précédente à $U^\mu - U^{\nu_n}$, puis en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\text{cap}_e \left\{ x \mid U^\mu(x) - U^\nu(x) > \alpha \right\} \ll \frac{\|\mu - \nu\|^2}{\alpha^2}.$$

Pour avoir exactement la formule du lemme (avec l'inégalité large dans le premier membre), il suffit d'appliquer la formule précédente aux nombres réels $\alpha - \varepsilon$, puis de faire tendre ε vers 0.

Remarque. Du lemme précédent on déduit : si μ est une mesure (non nécessairement positive) de E , on a :

$$\text{cap}_e \left\{ x \mid |U^\mu(x)| \geq \alpha \right\} \ll 2 \frac{\|\mu\|^2}{\alpha^2}.$$

Une démonstration un peu plus compliquée permettrait de supprimer le coefficient 2 du second membre.

Théorème 3. Etant donnée une suite de mesures $\mu_n \in E^+$ dont les potentiels forment une suite décroissante, μ_n converge fortement vers une mesure μ , et on a

$$U^\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U^{\mu_n}(x)$$
sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle.

Démonstration : La suite μ_n est fortement convergente, car c'est une suite de Cauchy, comme cela résulte de la relation

$$\begin{aligned} \|\mu_{n+p} - \mu_n\|^2 &= \|\mu_{n+p}\|^2 + \|\mu_n\|^2 - 2 \int U^{\mu_n} d\mu_{n+p} \\ &\leq \|\mu_{n+p}\|^2 + \|\mu_n\|^2 - 2 \int U^{\mu_{n+p}} d\mu_{n+p} = \|\mu_n\|^2 - \|\mu_{n+p}\|^2. \end{aligned}$$

Soit alors μ la limite de μ_n ; d'après le lemme précédent on a

$$\text{cap}_e \left\{ x \mid U^{\mu_n}(x) - U^\mu(x) \gg \alpha \right\} \ll \frac{\|\mu_n - \mu\|^2}{\alpha^2}.$$

Cette quantité tend vers 0, et on achève aisément.

Remarque 1. La convergence (sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle) de U^{μ_n} vers un potentiel U^μ est encore valable même si les mesures $\mu_n \gg 0$ ne sont pas d'énergie finie (théorème de Brelot - Cartan). On suppose seulement que les potentiels U^{μ_n} ne sont pas tous identiques à $+\infty$.

Remarque 2. Toute suite croissante de potentiels de mesures positives converge partout vers $+\infty$ ou vers une fonction surharmonique (donc vers un potentiel de mesure positive si la suite est majorée par un potentiel). Cet énoncé, beaucoup plus facile que le théorème 3, résulte immédiatement du théorème de décomposition de Riesz et du fait que la limite d'une suite croissante de fonctions surharmoniques est une fonction surharmonique ou la constante $+\infty$.

Corollaire. Soit F un fermé de R^n , et soit μ_F la balayée sur F de la mesure $\mu \in E^+$. On a $U^\mu(x) = U^{\mu_F}(x)$ sur F , sauf aux points d'un ensemble de capacité extérieure nulle.

En effet il suffit de prendre une suite strictement décroissante de fermés F_n ($F_{n+1} \subset \text{intérieur de } F_n$) dont l'intersection est F . Alors μ_{F_n} converge fortement vers μ_F (voir la démonstration de la continuité à droite du balayage) et la suite $U^{\mu_{F_n}}$ est décroissante (d'après la transitivité du balayage, ou plus simplement d'après

le principe de domination). Comme on a $U_{F_n}^{\mu}(x) = U^{\mu}(x)$ en tout point x intérieur à F_n (remarque 1 suivant le théorème du balayage), donc en tout point de F , on conclut grâce au théorème 3.

Bibliographie. La plus grande partie des démonstrations de cet exposé est due à H. Cartan. Voir article cité dans l'exposé 1, et aussi :

H. Cartan : Théorie du balayage en potentiel newtonien (Ann. Univ. Grenoble, 22 (1946) 221-280).

Pour l'étude approfondie de la capacité et de la capacitabilité, voir :

G. Choquet : Theory of capacities (Ann. Inst. Fourier 5 (1953/1954) 131-295).

LES POTENTIELS NEWTONIENS D'ENERGIE FINIEDistributions d'énergie finie - Synthèse spectraleI - L'espace de Dirichlet classique

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^m ($m \geq 1$). On notera $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles (on pourrait considérer aussi bien des fonctions complexes) indéfiniment dérivables à support compact dans Ω . L'intégrale de Dirichlet d'une fonction u de $\mathcal{D}(\Omega)$

est

$$D(u) = \int |\text{grad } u|^2 dx.$$

La racine carrée de D est évidemment une norme hilbertienne sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi normé, $\mathcal{D}(\Omega)$ constitue un espace préhilbertien, noté $\mathcal{D}_1(\Omega)$.

Evidemment $\mathcal{D}_1(\Omega)$ n'est pas complet. On peut toujours considérer l'espace de Hilbert $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ obtenu par complétion. Mais cet espace n'offrira quelque intérêt pratique que s'il est un espace de fonctions (ou de distributions), c'est à dire s'il existe une application linéaire continue injective de $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ dans un espace fonctionnel déjà catalogué. On va montrer qu'il en est presque toujours ainsi :

Théorème 1. L'espace $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$, obtenu par complétion de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme de Dirichlet $D^{\frac{1}{2}}$ est un espace de fonctions dans les deux cas suivants :

1°) Ω est relativement compact ; alors les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ sont des classes de fonctions de carré intégrable sur Ω , et l'injection canonique : $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est continue.

2°) Ω est quelconque, mais le nombre de dimensions m est ≥ 3 ; alors les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ sont des classes de fonctions qui sont localement de carré intégrable dans Ω , et l'injection canonique $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega) \rightarrow L^2_{\text{Loc}}(\Omega)$ est continue.

Démonstration. 1°) Supposons Ω relativement compact, donc contenu dans un pavé centré à l'origine et de côté $2a$. Soit $u \in \widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ et soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega$.

On a (en désignant encore par u le prolongement de u par 0 hors de Ω) :

$$u(x) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_m) dt.$$

D'après l'inégalité de Schwarz on a donc :

$$|u(x)|^2 \leq 2a \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_m) \right|^2 dt$$

d'où, en intégrant sur le pavé :

$$\int |u(x)|^2 dx \leq 4a^2 \int \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx$$

d'où l'inégalité de Poincaré :

$$\int |u(x)|^2 dx \leq 4a^2 D(u).$$

On a donc $\|u\|_2 \ll C(\Omega) (D(u))^{\frac{1}{2}}$, où $C(\Omega)$ est une constante ne dépendant que de l'ouvert Ω . La première partie de l'énoncé s'en déduit immédiatement.

2°) Supposons Ω quelconque, et $m \geq 3$. On va d'abord établir une majoration élémentaire concernant l'énergie newtonienne :

Soit f une fonction de carré intégrable, à support compact S_f ; l'énergie newtonienne de la mesure de densité f est finie, car on a

$$I(f) = \iint |x-t|^{2-m} f(x) f(t) dx dt$$

d'où, par un calcul très simple :

$$I(f) \leq A(S_f) \int |f|^2 dx,$$

où la constante $A(S_f)$ ne dépend que du support de f .

Soit alors $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'après la formule classique de Poisson, u est le potentiel newtonien engendré par la mesure de densité $v = -\Delta u/a_m$, où a_m est un coefficient qui ne dépend que de la dimension m ($a_m = (m-2)s_m$, où s_m est l'aire de la sphère unité). D'après la formule de Green, l'énergie de v est :

$$I(v) = \int U^v v dx = -\frac{1}{a_m} \int u \Delta u dx = \frac{1}{a_m} \int |\text{grad } u|^2 dx.$$

Soit maintenant K un compact de Ω , et soit $f \in L^2(K)$. On a :

$$\int u f dx = \int U^v f dx = I(v, f)$$

où $I(v, f)$ est l'énergie mutuelle de v et f . D'après l'inégalité de Schwarz et les estimations précédentes, on a :

$$(I(v, f))^2 \leq I(v)I(f) \leq \frac{A(K)}{a_m} \int |f|^2 dx \int |\text{grad } u|^2 dx$$

d'où la majoration

$$\left| \int u f dx \right| \leq B(K) (D(u))^{\frac{1}{2}}.$$

Cette majoration ayant lieu pour toute $f \in L^2(K)$, on a finalement

$$\|u\|_{L^2(K)} \leq B(K) (D(u))^{\frac{1}{2}}$$

ce qui prouve entièrement la deuxième partie de l'énoncé.

Remarque 1. Si Ω est quelconque et si $m \geq 3$, on peut montrer, en utilisant le théorème de Soboleff (qui est beaucoup moins élémentaire que les considérations précédentes) l'existence d'une constante S telle que $\|u\|_{L^q} \leq S(D(u))^{\frac{1}{2}}$, avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$. Cela prouve que les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ sont des classes de fonctions de puissance q -ième intégrable.

Remarque 1. Si le nombre de dimensions m est 1 ou 2, et si Ω n'est pas relativement compact, l'espace $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$ peut ne pas être un espace de fonctions (ni même de distributions). Pour $m = 1$ cela se produit si et seulement si $\Omega = \mathbb{R}$. Pour $m = 2$ cela se produit en particulier si $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Définition. Dans toute la suite de cet exposé, on prendra $\Omega = \mathbb{R}^m$, avec $m \geq 3$. L'espace $\widehat{\mathcal{D}}_1 = \widehat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$ sera appelé l'espace de Dirichlet classique.

II - Les distributions d'énergie finie

On rappelle que E désigne l'espace (préhilbertien) des différences de mesures positives d'énergie finie. On notera \widehat{E} l'espace hilbertien complété de E . On va chercher à caractériser cet espace.

Lemme 1. Les fonctions indéfiniment dérivables qui engendrent un potentiel newtonien à support compact sont partout denses dans E (donc dans \widehat{E}).

Démonstration. En effet on a déjà vu (exposé 2, lemme 3) que l'ensemble des mesures qui engendrent un potentiel continu à support compact est partout dense dans E. Le lemme 1 s'en déduit immédiatement par "régularisation".

Donnons quelques précisions : soit $\mu = \mu' - \mu''$ (μ' et $\mu'' \in E^+$) une mesure de E dont le potentiel U^μ est continu et à support compact. A tout entier n associons une fonction indéfiniment dérivable $\alpha_n \geq 0$, nulle pour $|x| \gg 1/n$, et telle que $\int \alpha_n(x) dx = 1$. La régularisée $f_n = \alpha_n * \mu$, définie par $f_n(x) = \int \alpha_n(x-t) d\mu(t)$, est indéfiniment dérivable, et elle engendre la potentiel (indéfiniment dérivable et à support compact) $U_n^{f_n} = U^{\alpha_n * \mu} = \alpha_n * U^\mu$. Lorsque n tend vers l'infini, les mesures $\alpha_n * \mu'$ et $\alpha_n * \mu''$ convergent vaguement vers μ' et μ'' , et la fonction $U_n^{f_n}$ converge uniformément vers U^μ et s'annule hors d'un compact fixe. En se reportant à la définition de l'énergie sous forme d'intégrale ($I(\mu) = \int U^\mu d\mu$) on trouve alors immédiatement qu'on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu - \alpha_n * \mu) = 0$.

Théorème 2. L'application : $u \rightarrow -\Delta u/a_m$ de \mathcal{D}_1 dans E se prolonge en un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_1$ sur E. L'espace \widehat{E} est donc un espace de distributions de Schwartz, à savoir les laplaciens des fonctions de $\widehat{\mathcal{D}}_1$. Ces distributions seront appelées distributions d'énergie newtonienne finie.

Démonstration. A toute fonction $u \in \mathcal{D}(R^m)$ associons la fonction $v = -\Delta u/a_m$. La mesure de densité v est un élément de E et on a, d'après la formule de Green :

$$I(v) = \frac{1}{a_m} D(u)$$

c'est à dire :

$$\|v\|_E^2 = \frac{1}{a_m} \|u\|_{\mathcal{D}_1}^2 .$$

L'application linéaire $u \rightarrow v$ est donc proportionnelle à une isométrie de \mathcal{D}_1 dans E, et cette isométrie se prolonge évidemment en une isométrie de $\widehat{\mathcal{D}}_1$ sur E, car les fonctions u considérées sont, par définition, partout denses dans $\widehat{\mathcal{D}}_1$, et les fonctions $v = -\Delta u/a_m$ sont, d'après le lemme 1, partout denses dans E, car u est

le potentiel newtonien engendré par v .

Signalons, en vue des applications, les deux propositions suivantes :

Proposition 1. Toute suite de Cauchy dans E est convergente au sens des distributions.

Cela résulte de ce que la convergence dans $\hat{\mathcal{D}}_1$ entraîne la convergence dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ (théorème 1), donc la convergence au sens des distributions, et que la laplacien (comme toute dérivation) est un opérateur continu dans l'espace des distributions.

Proposition 2. Toute distribution d'énergie finie est limite forte dans E de ses régularisées.

En effet ce résultat a déjà été établi pour les mesures engendrant un potentiel continu à support compact (voir démonstration du lemme 1). La proposition s'en déduit si on observe que ces mesures sont partout denses dans E , et que, pour de telles mesures μ , l'application linéaire $\mu \rightarrow \alpha * \mu$ de E dans E diminue la norme si $\int |\alpha(x)| dx \ll 1$.

Remarque. Si une distribution de \hat{E} est une mesure, il n'est pas toujours vrai que cette mesure soit dans E (ses parties positive et négative peuvent être d'énergie infinie).

III. Synthèse spectrale des distributions d'énergie finie.

Théorème 3. Toute distribution d'énergie finie est limite forte de mesures qui sont des différences de mesures positives d'énergie finie portées par le support de T .

Démonstration. Soit F un fermé de \mathbb{R}^m . Introduisons les ensembles suivants : W_F est l'ensemble des distributions de E dont le support est contenu dans F ; V_F est l'adhérence de l'ensemble des mesures de E dont le support est contenu dans F .

Les ensembles V_F et W_F sont des sous-espaces fermés de E , et on a $V_F \subset W_F$. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1, d'où il résulte qu'une limite forte de distributions portées par F est une distribution portée par F .

Le théorème 3 affirme l'identité des sous-espaces V_F et W_F . On va montrer

cette identité seulement dans le cas où F est compact. Pour cela introduisons encore une notation:

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^m on pose :

$$V_{\Omega} = \overline{\bigcup_{K \subset \Omega} V_K}$$

(K décrivant l'ensemble des compacts de Ω). D'après la proposition 1, le support de toute distribution de V est contenu dans l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω .

Si F est compact, on a :

$$(1) \quad W_F = \bigcap_{\Omega \supset F} V_{\Omega} ;$$

en effet toute distribution $T \in \bigcap_{\Omega \supset F} V_{\Omega}$ a son support dans $\bigcap_{\Omega \supset F} \overline{\Omega}$, donc dans F ;

on a donc $T \in W_F$. Inversement si $T \in W_F$, elle est limite de ses régularisées (proposition 2) ; une telle régularisée est une fonction indéfiniment dérivable à support compact,

donc un élément de E ; comme ce support peut être choisi arbitrairement voisin de F,

il en résulte $T \in \bigcap_{\Omega \supset F} V_{\Omega}$; d'où la relation (1).

Soit maintenant $\mu \in E^+$, et soit μ_K sa balayée sur le compact K. L'interprétation du balayage comme projection orthogonale (remarque 2 de l'exposé n° 3) montre que μ_K n'est autre que la projection de μ sur V_K . Par définition de V_{Ω} , la projection de μ sur V_{Ω} est une mesure positive (puisque limite forte de mesures μ_K qui sont positives). D'après (1), la projection de μ sur W_F est encore une mesure positive.

C'est donc un élément de V_F .

On achève aisément : la projection sur W_F d'une mesure de $E = E^+ - E^+$ est donc la différence de deux mesures positives d'énergie finie, donc un élément de V_F . Comme E est partout dense dans \widehat{E} , il en résulte que la projection de tout élément de \widehat{E} sur W_F est un élément de V_F . On a donc $W_F \subset V_F$ et par suite $W_F = V_F$, C.Q.F.D.

Remarque 2. Si un ensemble fermé est de capacité nulle, il ne supporte aucune distribution d'énergie finie non nulle. C'est une conséquence évidente du théorème 3.

Remarque 3. Le théorème 3 est un théorème de synthèse spectrale. En effet soit

$L^2(1/|x|)^2$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de densité $1/|x|^2$ sur R^m . On peut montrer que la transformation de Fourier établit un isomorphisme entre $L^2(1/|x|^2)$ et l'espace \hat{E} des distributions d'énergie finie. Si on appelle spectre de la fonction $f \in L^2(1/|x|^2)$ le support de la distribution qui est la transformée de Fourier de f , on voit que le théorème 3 permet d'énoncer : tout élément $f \in L^2(1/|x|^2)$ peut être approché, au sens de la norme, par des combinaisons linéaires finies de transformées de Fourier de mesures positives portées par le spectre de f .

Un tel résultat s'énonce : la synthèse spectrale est possible dans $L^2(1/|x|^2)$.

La recherche des fonctions positives k telles que la synthèse spectrale soit possible dans $L^2(k)$ est un problème intéressant et difficile sur lequel on se propose de revenir dans le cadre de ce séminaire. Signalons seulement, pour l'instant, que la synthèse spectrale est possible dans $L^2(1/|x|^\alpha)$, avec $0 \ll \alpha \ll 2$ si $m \gg 3$, $0 \ll \alpha < m$ si $m = 1$ ou 2 .

Remarques bibliographiques. On n'a fait appel qu'au minimum de notions sur les distributions, et on n'a utilisé que la définition et les notions de support, de convergence des suites de distribution, et de dérivation. Pour ces éléments, on renvoie évidemment au livre de L. Schwartz, Théorie des Distributions, t. 1, Paris 1950.

Les distributions d'énergie finie ont été définies, d'une manière très différente (en utilisant la transformation de Fourier) dans :

J. Deny : Les potentiels d'énergie finie (Acta Mathematica, 82 (1950) 107-183).

Le théorème 3 a été démontré dans cet article, mais la démonstration, qui est celle de cet exposé, n'est pas valable pour les distributions à support non compact.

Pour la caractérisation des ouverts Ω de R et R^2 tels que $\hat{D}_1(\Omega)$ ne soit pas un espace de distributions, voir

J. Deny & J. L. Lions : Les espaces du type de Beppo Levi (Ann. Inst. Fourier,

Le problème général de synthèse spectrale auquel il est fait allusion dans la dernière remarque de cet exposé a été posé, et résolu dans un cas particulier, par :

A. Beurling : Sur le spectre des fonctions (Colloque d'Analyse Harmonique, Nancy, 1947).

Un résultat qui englobe ce théorème de Beurling et le théorème 3 est énoncé sans démonstration dans

A. Beurling et J. Deny : Dirichlet spaces (Proc. Nat. Acad. Of Sci. U.S.A. 45 (1959) 208-215).

Les prochains exposés de ce séminaire seront consacrés à la démonstration de ce résultat.

SYNTHÈSE SPECTRALE DANS LES ESPACES DE DIRICHLETNotions sur les espaces de Dirichlet réguliersI - Axiomes et premières conséquences

Contractions normales. Soit E un ensemble quelconque, soient u et v deux applications de E dans le corps C des complexes. On dit que v est une contraction de u si, pour tout couple de points x et y de E , on a :

$$|v(x) - v(y)| \leq |u(x) - u(y)|.$$

On dit que v est une contraction normale de u si on a en outre :

$$|v(x)| \leq |u(x)| \quad (x \in E).$$

Soit T une contraction normale du plan complexe, c'est-à-dire une application de C dans C qui diminue les distances et conserve l'origine ; alors si u est une application de E dans C , la fonction $v = Tu$ ($v(x) = T(u(x))$) est une contraction normale de u . On peut montrer inversement que si v est une contraction normale de u , il existe au moins une contraction normale du plan complexe, soit T , telle que $v = Tu$.

Les contractions normales du plan complexe qui seront le plus utilisées sont :

1°) L'application $z \rightarrow |z|$ (la contraction "module")

2°) La "projection" sur un ensemble fermé convexe du plan complexe contenant l'origine, en particulier la projection sur le segment $\{0, 1\}$ de l'axe réel. Cette dernière contraction est appelée la contraction fondamentale.

Définition des espaces de Dirichlet réguliers. Soit X un espace localement compact et ξ une mesure de Radon positive sur X . On supposera que ξ est partout dense, c'est-à-dire que tout ouvert non vide est de mesure > 0 pour ξ (sinon on remplace X par le support de ξ , et on ne s'intéresse pas à ce qui se passe en dehors de ce support). On notera C l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur X , à support compact.

Un espace de Dirichlet régulier $D = D(X, \xi)$ est un espace hilbertien de classes de fonctions localement intégrables pour ξ , qui satisfont aux axiomes suivants :

(a) pour tout compact K de X et pour toute fonction $u \in D$ il existe une constante $A(K)$ telle que

$$\int_K |u(x)| d\xi(x) \leq A(K) \|u\|.$$

(b) $C \cap D$ est partout dense dans D et partout dense dans C .

(c) si u est un élément de D et si v est une contraction normale de u , alors v est un élément de D et on a : $\|v\| \leq \|u\|$.

Remarques sur les axiomes. On a noté $\|u\|$ la norme de l'élément $u \in D$; le produit scalaire des éléments u et v sera noté (u, v) .

Les éléments de D ne sont pas des fonctions, mais des classes de fonction, deux fonctions ne diffèrent que sur un ensemble qui est localement de ξ -mesure nulle représentant le même élément de D . On dit que l'élément v est une contraction normale de l'élément u si, dans la classe de v , il existe une fonction qui est contraction normale d'une fonction représentant u . De même on dira qu'un élément u est continu si, dans la classe de u , il existe une fonction continue.

Dire que $C \cap D$ est partout dense dans C (deuxième partie de l'axiome (b)) signifie que, quels que soient $\varphi \in C$, $\varepsilon > 0$, et V , voisinage du support de φ , il existe un élément $u \in C \cap D$ de support contenu dans V et tel que $|u(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Exemples. Outre l'exemple banal $L^2(\xi)$, signalons seulement l'espace de Dirichlet classique $\hat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$ (voir le quatrième exposé sur les potentiels newtoniens d'énergie finie dans ce séminaire). La mesure ξ n'est autre que la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^m ($m \geq 3$). L'axiome 1 a été établi sous une forme plus précise : pour tout compact K il existe une constante $B(K)$ telle que $\int_K |u(x)|^2 dx \leq B(K) \|u\|^2$ pour tout $u \in \hat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$. L'axiome (b) est évident, puisque les fonctions indéfiniment dérivables à support compact sont, par définition, partout denses dans $\hat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$; enfin l'axiome (c) est bien intuitif : une con-

traction effectuée sur u diminue le module de gradient de u , donc son intégrale de Dirichlet ; cependant une démonstration rigoureuse n'est pas immédiate, car il faut considérer le gradient au sens des distributions ; cela demande un peu de technique, qu'on ne détaillera pas.

Au lieu de considérer $\widehat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$, on pourrait étudier $\widehat{\mathcal{D}}_1(\Omega)$, où Ω est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^m si $m \geq 3$, un ouvert relativement compact si $m = 1$ ou 2 . Le cas d'un intervalle ouvert borné I de \mathbb{R} est particulièrement simple, car les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_1(I)$ sont tous des "fonctions continues", à savoir les fonctions absolument continues nulles aux extrémités de I , dont la dérivée (qui existe presque partout) est de carré intégrable sur I .

Donnons maintenant quelques conséquences simples des axiomes, et tout d'abord une application immédiate de l'axiome (a) :

Lemme 1. Si f est une fonction mesurable bornée à support compact, il existe un élément $u_f \in D$ tel que, pour tout $u \in D$, on ait

$$(u, u_f) = \int u \bar{f} d\xi$$

L'ensemble de ces éléments u_f est partout dense dans D .

En effet, d'après l'axiome (a), on a

$$\left| \int u \bar{f} d\xi \right| \leq A(S_f) M_f \|u\|$$

où S_f est le support de f , et M_f la borne supérieure de $|f|$. La forme linéaire $u \rightarrow \int u \bar{f} d\xi$ est donc continue sur D ; c'est donc le produit scalaire par un élément $u_f \in D$. Ces éléments sont partout denses dans D , car si u est orthogonal à tous les u_f , on a $\int u \bar{f} d\xi = 0$ pour toute f mesurable bornée à support compact, d'où $u(x) = 0$ presque partout, d'où $u = 0$.

Voici maintenant quelques conséquences immédiates de l'axiome des contractions :

(1) Si $u \in D$, alors $\bar{u} \in D$ et $\|\bar{u}\| = \|u\|$.

En effet u est une contraction normale de \bar{u} et \bar{u} est une contraction de u .

(2) Si u et v sont deux éléments réels de D , le produit scalaire (u, v) est réel.

En effet, d'après (1), on a $\|u + iv\|^2 = \|u - iv\|^2$; il suffit alors de développer les deux membres.

(3) Si u est un élément borné de D , u^2 est un élément de D .

En effet, si on pose $w = u^2$ et si M est une borne supérieure pour le module de u , on a :

$$|w(x) - w(y)| \leq 2M|u(x) - u(y)| \quad (x \text{ et } y \in X)$$

donc $w/2M$ est une contraction normale de u .

(4) Si u et v sont deux éléments bornés de D , le produit uv appartient à D .

Cela résulte de la propriété (3) et de l'identité $4uv = (u+v)^2 - (u-v)^2$.

Voici encore trois lemmes importants pour les applications :

Lemme 2. $C^+ \cap D$ est positivement riche dans C^+ .

En effet soient $f \in C^+$, $\varepsilon > 0$, et V un voisinage du support de f . D'après l'axiome (b) il existe $\varphi \in C \cap D$ à support dans V et tel que $\sup_{x \in X} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

Mais alors $|\varphi| \in C^+ \cap D$ (axiome des contractions), $|\varphi|$ a son support dans V et

$$\sup_{x \in X} |f(x) - |\varphi(x)|| \leq \varepsilon .$$

Lemme 3. Si $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans D , et si T est une contraction normale du plan complexe, la suite $\{Tu_n\}$ converge faiblement vers Tu ; il y a convergence forte si $Tu = u$.

Démonstration. Soit f mesurable bornée à support compact ; d'après le lemme 1 on a

$$\leq (Tu_n, u_f) - (Tu, u_f) = \int \bar{f}(Tu_n - Tu) d\xi$$

d'où

$$|(Tu_n, u_f) - (Tu, u_f)| \leq \int |Tu_n - Tu| |f| d\xi \leq \int |u_n - u| |f| d\xi = (|u_n - u|, u_f)$$

$$\leq \| |u_n - u| \| \| u_f \| \leq \| u_n - u \| \| u_f \| .$$

Donc le produit scalaire (Tu_n, u_f) converge vers (Tu, u_f) ; comme $\|Tu_n\|$ est uniformément borné et que les éléments u_f sont partout denses dans D , on a bien la convergence faible de Tu_n vers Tu .

Si en outre $u = Tu$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\| = \|Tu\|$; on sait que

cette relation, jointe à la convergence faible, entraîne la convergence forte.

Remarque. La question de savoir si, lorsque $Tu \neq u$, il y a ou non convergence forte de Tu_n vers Tu n'est pas résolue.

Lemme 4. $C^+ \cap D$ est partout dense dans D^+ (cône fermé de D constitué par les éléments admettant un représentant $\gg 0$).

C'est une conséquence immédiate du lemme 3 ; en effet si u est un élément de D^+ et si φ_n est une suite d'éléments de $C \cap D$ convergeant fortement vers u (axiome (b)), la suite $|\varphi_n|$ converge fortement vers u .

II - Éléments de théorie du potentiel dans les espaces de Dirichlet

Définition. Un élément de $u \in D$ est appelé potentiel s'il existe une mesure de Radon μ telle que, pour toute fonction $\varphi \in C \cap D$, on ait :

$$(u, \varphi) = \int \bar{\varphi} d\mu.$$

S'il existe une telle mesure, elle est évidemment unique, d'après l'axiome (b).

On l'appellera mesure associée à u , et u sera noté u_μ .

Cette définition est en accord avec la situation rencontrée dans le cas de l'espace de Dirichlet classique $\hat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$. En effet soit $u \in \mathcal{D}_1$, et soit $T \in \hat{E}$ la "distribution d'énergie finie" associée à u dans l'application canonique de $\hat{\mathcal{D}}_1$ sur E (voir dans ce séminaire le quatrième exposé consacré aux potentiels newtoniens d'énergie finie) ; pour toute fonction φ indéfiniment dérivable à support compact, on avait la relation :

$$(u, \varphi)_{\hat{\mathcal{D}}_1} = a_m T(\bar{\varphi}).$$

Les éléments u_f étudiés dans le lemme 1 sont des potentiels (la mesure associée est la mesure de densité f par rapport à la mesure de base ξ) ; les potentiels sont donc partout denses dans D .

On s'intéressera surtout aux potentiels dont la mesure associée est positive ; un tel potentiel sera appelé potentiel pur. Notons à ce propos que si la mesure associée à un potentiel u est réelle, ses parties positive et négative ne sont pas nécessairement associées à des potentiels purs.

Voici une caractérisation importante des potentiels purs :

Théorème 1. Les potentiels purs sont positifs ; ce sont les éléments u de D qui satisfont à l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$(1) \quad \|u + v\| \geq \|u\| \quad \text{pour tout } v \in D \text{ avec } \operatorname{Re} v \geq 0 ;$$

$$(2) \quad \operatorname{Re}(u, v) \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in D \text{ avec } \operatorname{Re} v \geq 0.$$

Démonstration. Observons d'abord que les relations (1) et (2) sont équivalentes :

cela résulte immédiatement de la relation

$$\|u + tv\|^2 - \|u\|^2 = t^2 \|v\|^2 + 2t \operatorname{Re}(u, v) \quad (t > 0).$$

Montrons ensuite que tout élément de D vérifiant (1) ou (2) est positif. En effet soit $U = \{w \in D \mid \operatorname{Re}(w-u) \geq 0\}$; c'est évidemment un ensemble convexe, fermé (d'après l'axiome (a)) et non vide ; l'unique élément de U de norme minimum est u , d'après la propriété (1) ; or $|u|$ est aussi dans U et a une norme plus petite que u , d'après l'axiome des contractions ; par conséquent $u = |u|$, donc u est positif.

Il est immédiat que tout élément $u \in D$ vérifiant (2) est un potentiel pur : en effet l'application $\varphi \rightarrow (u, \varphi)$ est alors une forme linéaire positive sur l'ensemble positivement riche $C^+ \cap D$ (voir lemme 2) ; il existe donc une mesure de Radon positive μ telle que $(u, \varphi) = \int \bar{\varphi} d\mu$ pour toute $\varphi \in C \cap D$; autrement dit u est un potentiel pur.

Il reste à montrer que tout potentiel pur u satisfait à (1) ou (2) ; or si φ est un élément de $C^+ \cap D$, on a $(u, \varphi) = \int \varphi d\mu \geq 0$; d'après le lemme 4 on a donc $(u, v) \geq 0$ pour tout élément $v \in D^+$; si enfin v est un élément de D dont la partie réelle v_1 est positive, il suffit d'écrire $v = v_1 + iv_2$, et on conclut grâce au fait que le produit scalaire de deux éléments réels de D est réel.

Théorème 2 (de l'équilibre). Etant donné un ouvert relativement compact $\omega \subset X$, il existe au moins un potentiel pur u_μ tel que la mesure associée μ soit portée par l'adhérence $\bar{\omega}$ de ω ; et qu'on ait :

$$u_{\mu}(x) = 1 \text{ sur } \omega ;$$

$$u_{\mu}(x) \leq 1 \text{ sur } X.$$

Démonstration. Soit $U = \{u \in D \mid \operatorname{Re} u(x) \geq 1\}$ sur ω (évidemment dire qu'un élément de D est ≥ 1 sur un ensemble ouvert, c'est - par définition - dire que, dans la classe définie par cet élément, il y a un représentant qui est une fonction prenant des valeurs ≥ 1 en tout point de cet ouvert). L'ensemble U est convexe fermé et non vide, d'après les axiomes et le lemme 2. Soit u^* l'élément de U dont la norme est minima. Soit v un élément de D avec $\operatorname{Re} v \geq 0$; comme $u^* + v$ est dans U , on a : $\|u^* + v\| \geq \|u^*\|$, donc u^* est un potentiel pur (théorème 1).

Si maintenant T est la contraction fondamentale (projection sur le segment $(0,1)$ de l'axe réel), on a $0 \leq Tu^*(x) \leq 1$ partout, et $Tu^*(x) = 1$ sur ω ; donc Tu^* est un élément de U , dont la norme est inférieure à celle de u^* ; comme u^* est l'élément de norme minima, on a $Tu^* = u^*$, d'où $u^*(x) = 1$ sur ω , $0 \leq u^*(x) \leq 1$ partout.

Il reste à montrer que la mesure μ associée au potentiel pur u^* est portée par $\bar{\omega}$; or si φ est un élément de $C \cap D$ de support disjoint de $\bar{\omega}$, on a $u^* + t\varphi \in U$ pour tout nombre réel t ; on a donc $\|u^* + t\varphi\| \geq \|u^*\|$, d'où $(u^*, \varphi) = \int \varphi d\mu = 0$, d'où le résultat.

Remarque 1. Même dans le cas newtonien, il peut y avoir plusieurs potentiels purs satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Celui qu'on appelle potentiel d'équilibre de l'ouvert ω est celui de norme minima, c'est-à-dire l'élément u^* considéré au cours de la démonstration. On appelle capacité de ω le carré de la norme de cet élément.

Remarque 2. Si ω n'est pas relativement compact, le théorème 2 est encore valable à condition que l'ensemble U considéré ne soit pas vide; si cet ensemble est vide, on dira que ω est de capacité infinie. Dans tous les cas on posera donc :

$$\operatorname{cap}(\omega) = \inf_{\substack{u \in D \\ \operatorname{Re}(u) \geq 0}} \|u\|^2 .$$

Remarque 3. Si la capacité de l'ouvert ω est finie, elle est égale à la masse totale

de la mesure μ associée au potentiel d'équilibre u^* de ω .

En effet il est immédiat de voir que u^* est orthogonal à tout élément de D nul sur ω . Si ω est borné, il existe $\varphi \in C^+ \cap D$ égal à 1 sur $\bar{\omega}$ (appliquer la contraction fondamentale à un élément de $C \cap D$ dont la partie réelle est ≥ 1 sur $\bar{\omega}$); donc $\int d\mu = \int \varphi d\mu = (\varphi, u^*) = \|u^*\|^2 = \text{cap}(\omega)$. Le cas où ω n'est pas relativement compact est un peu plus délicat; il peut se traiter par un passage à la limite qu'on ne détaillera pas ici.

Remarque 4. On peut appeler capacité d'un fermé de X (plus généralement capacité extérieure d'un ensemble quelconque de X) la borne inférieure des capacités des ouverts contenant cet ensemble. Dans le cas de l'espace de Dirichlet classique, cette notion est identique (au facteur a_m près) à celle de capacité newtonienne.

Théorème 3 (principe de l'enveloppe inférieure). Si u et v sont deux potentiels purs, $\inf(u, v)$ est un potentiel pur.

Démonstration. Posons $E = \{w \in D \mid \text{Re}(w) \geq \inf(u, v)\}$, c'est un ensemble fermé convexe non vide; soit f l'élément de norme minima; on va montrer que $f = \inf(u, v)$.

En effet f est un potentiel pur, car pour tout $w \in D$ avec $\text{Re}(w) \geq 0$ on a $f + w \in D$, d'où $\|f + w\| \geq \|f\|$.

Comme f et u sont réels, on a $\inf(u, f) = \frac{1}{2}(u + f) - \frac{1}{2}|u - f|$, d'où

$$4\|\inf(u, f)\|^2 = \|u + f\|^2 + \|u - f\|^2 - 2(u + f, |u - f|).$$

Mais $u = f$ est un potentiel pur, donc $(u + f, |u - f|) \geq (u + f, u - f)$ (d'après le théorème 1), et d'autre part $\||u - f|\| \leq \|u - f\|$, donc on a :

$$\|4\inf(u, f)\|^2 \leq \|u + f\|^2 + \|u - f\|^2 - 2(u + f, u - f) = 4\|f\|^2.$$

Le fait que $\inf(u, f)$ appartient aussi à E entraîne donc $f = \inf(u, f)$; comme on a de même $f = \inf(v, f)$, on a donc $f \leq \inf(u, v)$ et finalement $f = \inf(u, v)$.

Théorème 4 (du balayage). Soit $u \in \mu$ un potentiel pur, et soit ω un ouvert quelconque de X ; il existe au moins un potentiel pur $u_{\mu'}$ dont la mesure associée μ' est portée par l'adhérence $\bar{\omega}$, et tel que

$$u_{\mu'}(x) = u_{\mu}(x) \text{ sur } \omega ;$$

$$u_{\mu'}(x) \leq u_{\mu}(x) \text{ sur } X.$$

Démonstration. L'ensemble $E = \left\{ w \in D \mid \operatorname{Re}(w) \geq u_{\mu} \text{ sur } \omega \right\}$ est fermé, convexe et non vide ; son élément f de norme minimum est un potentiel pur. D'après le théorème 3, $g = \inf(u_{\mu}, f)$ est un potentiel pur, et on a $\|g\| \leq \|f\|$ d'après le théorème 1 ; comme $g \in E$, on a donc $g = f$, d'où $f \leq u_{\mu}$ partout et $f = u_{\mu}$ sur ω car par définition $f \geq u_{\mu}$ sur ω .

Il reste à vérifier que la mesure associée à f est portée par $\bar{\omega}$; or si φ est une fonction de $C \cap D$ dont le support est disjoint de $\bar{\omega}$ on a, pour tout t réel, $f + t\varphi \in E$, d'où $\|f + t\varphi\| \geq \|f\|$ et par suite $(f, \varphi) = \int \varphi d\mu' = 0$, d'où le résultat.

Remarque. Le potentiel pur f considéré dans la démonstration précédente est appelé balayé de u_{μ} sur ω .

Le théorème de synthèse spectrale

On désigne par D un espace de Dirichlet régulier (voir exposé n° 1).

Définition 1. Un ouvert ω de X est dit régulier pour l'élément $u \in D$ si u est orthogonal à tout élément $\varphi \in C \cap D$ à support dans ω .

Lemme 1. La réunion de deux ouverts réguliers pour u est un ouvert régulier pour u .

Soient en effet ω_1 et ω_2 deux tels ouverts, et soit $\varphi \in C \cap D$ à support dans $\omega_1 \cup \omega_2$; il s'agit de montrer que $(u, \varphi) = 0$. Soit K le support de φ ; posons $K_2 = K \cap \omega_2$ et prenons un voisinage compact K_2' de K_2 qui soit contenu dans ω_2 . D'après les axiomes (b) et (c) il existe une fonction $f \in C^+ \cap D$ égale à 1 sur K_2' et nulle hors de ω_2 . La fonction φf représente un élément de $C \cap D$ (voir exposé n° 1, conséquences de l'axiome des contractions), et elle est nulle hors de ω_2 ; $\varphi - \varphi f$ est dans $C \cap D$ et nulle hors de ω_1 . On a donc $(u, \varphi) = (u, \varphi f) + (u, \varphi - \varphi f) = 0$, ce qui prouve que $\omega_1 \cup \omega_2$ est régulier pour u .

On dira qu'un point $x \in X$ est régulier pour u s'il existe un voisinage ouvert de x qui soit régulier pour u . D'après le lemme 1 et le théorème de Borel-Lebesgue l'ensemble des points réguliers pour u est le plus grand ouvert régulier pour u .

Définition 2. On appelle spectre de l'élément $u \in D$ le complémentaire $\sigma(u)$ du plus grand ouvert régulier pour u .

Il serait plus correct de dire "ensemble de singularité de u ". Les remarques suivantes sont immédiates :

- 1°) L'ensemble $\sigma(u)$ est fermé; il est vide si et seulement si $u = 0$.
- 2°) Le spectre du potentiel pur u_μ est le support de la mesure associée μ .
- 3°) Si D est l'espace de Dirichlet classique $\hat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$, le spectre de u est le support de la distribution d'énergie finie associée $T = -\Delta u/a_m$.

Notation. On désignera par $W_{(\omega)}$ le sous-espace de D qui est l'adhérence de l'ensemble des éléments de D dont le spectre est contenu dans l'ouvert $\omega \subset X$.

Si le spectre de u est contenu dans l'ouvert ω , on a par définition $(u, \varphi) = 0$ pour toute $\varphi \in C \cap D$ à support disjoint de ω ; par continuité cette propriété s'étend à tout élément $u \in W_{(\omega)}$; il en résulte que si u est un élément de $W_{(\omega)}$, le spectre de u est contenu dans l'adhérence de ω . On va préciser ce résultat :

Lemme 2. Tout élément $u \in W_{(\omega)}$ est orthogonal à tout élément $v \in D$ nul dans ω .

Démonstration. Il suffit de prouver qu'on a $(u, v) = 0$ pour tout $u \in D$ dont le spectre est contenu dans ω , et tout $v \in D$ nul sur ω . Pour cela, procédons par étapes :

1^o) soit $v \in C \cap D$, à support contenu dans le complémentaire de $\sigma(u)$; alors $(u, v) = 0$ par définition.

2^o) Supposons v bornée à support compact et positive; il existe une fonction $f \in C^+ \cap D$ qui soit $\gg v$ et dont le support soit disjoint de $\sigma(u)$. Soit alors $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de $C^+ \cap D$ convergeant fortement vers v . Posons

$$\psi_n = \inf(f, \varphi_n) = \frac{1}{2}(f + \varphi_n) - \frac{1}{2}|f - \varphi_n| \quad ;$$

c'est un élément de $C^+ \cap D$, dont le support est disjoint de $\sigma(u)$. Lorsque n augmente indéfiniment, $f + \varphi_n$ converge fortement vers $f + v$ et $|f - \varphi_n|$ converge faiblement (et même fortement) vers $|f - v| = f - v$, d'après le lemme 3 de l'exposé n^o 1. Donc ψ_n converge vers v , et comme $(u, \psi_n) = 0$, on a bien $(u, v) = 0$.

3^o) Supposons $v \gg 0$ à support disjoint du spectre $\sigma(u)$. Soit encore $\{\varphi_n\}$ une suite d'éléments de $C^+ \cap D$ convergeant fortement vers v . La fonction $\psi_n = \inf(\varphi_n, v)$ est bornée, positive, à support compact disjoint de $\sigma(u)$; on a donc $(u, \psi_n) = 0$ et comme $\psi_n = \frac{1}{2}(\varphi_n + v) + \frac{1}{2}|\varphi_n - v|$ converge faiblement vers v lorsque n tend vers l'infini (lemme 3 de l'exposé n^o 1), on a bien à la limite $(u, v) = 0$.

4^e) Si enfin v est seulement supposé nul dans ω , il suffit de l'écrire sous forme de combinaisons linéaires d'éléments positifs de D nuls dans ω pour pouvoir conclure.

Lemme 3. Si u est un élément de W_ω et si T est une contraction normale du plan complexe, la relation $u(x) = Tu(x)$ dans ω entraîne $u = Tu$.

En effet $u - Tu$ est nul dans ω , donc u est orthogonal à $u - Tu$ (lemme 2).

On a donc $\|u\|^2 = (u, Tu)$, d'où

$$\|u - Tu\|^2 = \|u\|^2 - 2 \operatorname{Re}(u, Tu) + \|Tu\|^2 = \|Tu\|^2 - \|u\|^2 \leq 0 \text{ d'où } u = Tu.$$

Théorème 1 (principe de l'enveloppe convexe). Si u est un élément de W_ω , alors l'image de X par la fonction u est contenue dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $u(\omega) \cup \{0\}$.

Démonstration. Il suffit d'appeler T la projection sur ce convexe et d'appliquer le lemme 3, car T est une contraction normale du plan complexe.

Remarque 1. Si u est continue et a un spectre $\sigma(u)$ compact, l'image $u(x)$ est contenue dans l'enveloppe convexe de $\sigma(u) \cup \{0\}$; cela résulte du théorème 1.

Remarque 2. Si u est un élément de W_ω on a, pour (presque) tout $x \in X$, $|u(x)| \leq \sup_{y \in \omega} u(y)$; cette application immédiate du théorème 1 généralise le principe du maximum en théorie newtonienne.

Lemme 4. La projection d'un potentiel pur sur W_ω est un potentiel pur.

Démonstration. Ce lemme résulte aisément des deux remarques suivantes :

1^e) Si v est un élément de D et si v' est sa projection sur W_ω , on a $v' = v$ dans ω . En effet pour toute fonction mesurable bornée f à support compact dans ω , on a $u_f \in W_\omega$, d'où $(v, u_f) = (v', u_f)$, d'où $\int v \bar{f} d\xi = \int v' \bar{f} d\xi$, d'où le résultat.

2^e) Si $\operatorname{Re}(v) \geq 0$, alors $\operatorname{Re}(v') \geq 0$. Cela résulte immédiatement du principe de l'enveloppe convexe (théorème 1) : puisque $\operatorname{Re}(v') \geq 0$ dans ω , $\operatorname{Re}(v') \geq 0$ partout.

Soit alors u un potentiel pur, et soit u' sa projection sur W_ω ; on a $(u', v) = (u, v')$ pour toute $v \in D$; si donc $\operatorname{Re}(v) \geq 0$, on a $\operatorname{Re}(v') \geq 0$, donc $\operatorname{Re}(u, v') \geq 0$, car u est un potentiel pur (exposé n° 1, théorème 1) ; on a donc $\operatorname{Re}(u', v) \geq 0$, donc u' est un potentiel pur.

Remarque. Cet élément u' n'est autre que la balayé de u sur ω (voir exposé n° 1, théorème 4).

Théorème 2 (de synthèse spectrale). Tout élément $u \in D$ est limite forte de combinaisons linéaires de potentiels purs dont les mesures associées sont portées par le spectre $\sigma(u)$.

Soit en effet F un fermé ; posons $W_F = \{v \in D \mid \sigma(v) \subset F\}$; il s'agit de prouver que les combinaisons linéaires de potentiels purs dont les mesures associées sont portées par F sont partout denses dans W_F . Or on a évidemment

$$W_F = \bigcap_{\omega \supset F} W$$

car le spectre d'un élément de W_ω est contenu dans l'adhérence de ω , et on a $F = \bigcap_{\omega \supset F} \bar{\omega}$. La projection d'un potentiel pur sur W_F est donc, d'après le lemme 4, une limite de potentiels purs, donc un potentiel pur. Comme les combinaisons linéaires de potentiels purs sont partout denses dans D , les projections de ces combinaisons linéaires sont partout denses dans W_F , d'où le résultat.

Remarque 1. Ce théorème contient le théorème de synthèse spectrale dans l'espace de Dirichlet classique ; à noter que la démonstration qu'on vient de donner ne suppose pas que le fermé F est compact.

Remarque 2. On peut déduire assez facilement des considérations précédentes que, pour qu'un élément $u \in D$ soit nul, il faut et il suffit que son spectre $\sigma(u)$ soit de capacité nulle.

SYNTHÈSE SPECTRALE DANS LES ESPACES DE DIRICHLET

Algèbres associées à certains espaces de Dirichlet

Si u et v sont deux fonctions représentant deux éléments d'un espace de Dirichlet D , leur produit uv ne représente pas nécessairement un élément de D (à moins toutefois que u et v ne soient toutes deux bornées ; voir exposé n° 1). Un contre-exemple simple est fourni par l'espace de Dirichlet classique $\widehat{\mathcal{D}}_1(\mathbb{R}^m)$ avec $m \gg 3$. Par contre si D est l'espace de Dirichlet classique $\widehat{\mathcal{D}}_1(I)$ sur un intervalle borné I de la droite réelle (c'est-à-dire l'espace des fonctions absolument continues sur I , tendant vers 0 aux extrémités de I , et dont la dérivée est de carré intégrable sur I), le produit de deux éléments de D est un élément de D ; dans ce cas, D est non seulement un espace de Hilbert, mais une algèbre normée.

On se propose de donner un système de conditions suffisantes simples pour qu'un espace de Dirichlet soit une algèbre de fonctions continues (i.e. tout élément de D aura un représentant qui sera une fonction continue), et on montrera que, dans une telle algèbre, tout idéal fermé est engendré par un seul élément.

Voici d'abord deux lemmes concernant les espaces de Dirichlet généraux :

Lemme 1. Soit u un élément de l'espace de Dirichlet D ; si T_ϵ est la contraction normale du plan complexe qui consiste en la "projection" sur le disque de centre 0 et de rayon ϵ , on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon u\| = 0$.

Démonstration. $T_\epsilon u$ converge faiblement vers 0 lorsque ϵ tend vers 0 : en effet les "potentiels" u_f engendrés par les fonctions mesurables bornées f à support compact étant partout denses dans D (exposé 1, lemme 1), et $\|T_\epsilon u\|$ étant majorée uniformément par $\|u\|$, il suffit de vérifier qu'on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T_\epsilon u, u_f) = 0$ pour toutes ces fonctions f ; or c'est évident, car on a :

$$|(T_\epsilon u, u_f)| = \left| \int T_\epsilon u \bar{f} d\xi \right| \ll \int |T_\epsilon u| |f| d\xi \ll \epsilon \int |f| d\xi.$$

2°) $T_\varepsilon u$ converge fortement vers 0 : en effet il suffit d'observer que $u - T_\varepsilon u$ est une contraction normale de u ; on a donc :

$$\|u - T_\varepsilon u\|^2 \ll \|u\|^2,$$

d'où, en développant le premier membre

$$\|T_\varepsilon u\|^2 \ll 2 \operatorname{Re}(u, T_\varepsilon u),$$

quantité qui tend vers 0 avec ε en vertu de la convergence faible.

Lemme 2 (théorème des contractions généralisées). Soit D un espace de Dirichlet ; si les fonctions u_1 et u_2 représentent deux éléments de D , et si la fonction u satisfait aux inégalités

$$|u(x)| \leq |u_1(x)| + |u_2(x)| \quad (x \in X)$$

$$|u(x) - u(y)| \leq |u_1(x) - u_1(y)| + |u_2(x) - u_2(y)| \quad (x, y \in X)$$

alors u représente un élément de D et on a $\|u\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$.

On admettra ce théorème, qui peut se déduire du théorème de représentation des "normes approchées" au moyen d'intégrales explicites, représentation dont on ne parlera pas ici. Une telle démonstration repose donc sur des résultats assez élaborés et, vu l'importance du lemme 2 pour les applications, il serait souhaitable de le déduire plus directement des axiomes.

Corollaire. Si u et v sont deux fonctions bornées représentant deux éléments de D , alors le produit uv représente un élément de D et on a :

$$\|uv\| \leq a\|v\| + b\|u\|$$

si a et b sont des majorants de $|u|$ et $|v|$ respectivement.

Démonstration. On sait déjà que uv représente un élément de D , mais la démonstration donnée (exposé n° 1) ne permettait pas une aussi bonne majoration pour $\|uv\|$. Celle du texte est indispensable pour notre objet.

Les hypothèses entraînent

$$|u(x)v(x)| \leq a|v(x)| + b|u(x)| \quad (x \in X)$$

$$\begin{aligned} |u(x)v(x) - u(y)v(y)| &\leq |u(x)|v(x) - v(y)| + |v(y)||u(x) - u(y)| \\ &\leq a|v(x) - v(y)| + b|u(x) - u(y)| \quad (x, y \in X). \end{aligned}$$

La majoration cherchée résulte alors immédiatement du lemme 2.

Une hypothèse complémentaire. Dans tout ce paragraphe, on supposera que l'espace de Dirichlet régulier D satisfait à l'hypothèse suivante :

(H) La capacité de l'ensemble réduit à un point est supérieure à un nombre fixe c .

On démontre que cette hypothèse entraîne la suivante, qu'on admettra : dans toute classe de D il existe une fonction continue.

Comme il existe au plus une fonction continue dans chaque classe, grâce à l'hypothèse que la mesure de base $\tilde{\xi}$ est partout dense, on voit qu'on peut considérer D comme un espace de fonctions continues. On va montrer qu'il s'agit d'une algèbre.

Théorème 1. Tout espace de Dirichlet régulier satisfai^{-sant} à l'hypothèse (H) est une algèbre normée.

Démonstration. Signalons d'abord un résultat valable dans tout espace de Dirichlet, et qui est évident dans le cas présent, où tous les éléments de D sont des fonctions continues : la capacité d'un compact $K \subset X$ est la borne inférieure du carré des normes des éléments de D représentés par des fonctions continues dont le module prend des valeurs ≥ 1 en tout point de K .

Il résulte alors de l'hypothèse (H) que, pour tout $u \in D$ et tout $x \in X$ tel que $u(x) \neq 0$, on a $\|u/u(x)\|^2 \geq c$ (car la fonction $u/u(x)$ prend la valeur 1 sur le compact réduit au point x), d'où la majoration fondamentale :

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \|u\| \quad (x \in X).$$

Tout élément de D est donc une fonction continue bornée sur X ; de plus la convergence dans D entraînant la convergence uniforme sur X , d'après la majoration précédente, et les éléments continus à support compact étant partout denses dans D (axiome (b) des espaces de Dirichlet réguliers), on voit même que les éléments de D sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit d'observer que la majoration précédente, jointe au corollaire du lemme 2, entraîne :

$$\|uv\| \leq \frac{2}{\sqrt{c}} \|u\| \|v\|.$$

Lemme 3. Soit I un idéal fermé de l'algèbre D ; soit E l'ensemble (fermé) des points de X où s'annulent tous les éléments de I ; si X est à base dénombrable, il existe un élément $f \in I$ qui est nul sur E et strictement positif hors de E.

Démonstration. Pour tout x de l'ouvert $\omega = \overline{E}$, il existe un élément $u \in I$ tel que $u(x) \neq 0$; comme \bar{u} est un élément de D et que I est un idéal, on a $|u|^2 = u\bar{u} \in I$; cette fonction $|u|^2$ est $\gg 0$, continue, non nulle en x ; d'après Borel-Lebesgue, à tout compact $K \subset X$, on peut associer une fonction $v \geq 0$ de I qui est strictement positive sur K .

Si on suppose maintenant que ω est réunion dénombrable de compacts K_n , et si v_n est une fonction associée au compact K_n comme il vient d'être dit, on voit que la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

répond aux conditions du lemme 3.

Théorème 2. Si X est à base dénombrable, tout idéal fermé de l'algèbre D est l'ensemble des éléments de D qui s'annulent sur un ensemble fermé de X ; un tel idéal est engendré par un seul élément de D.

Démonstration. Soit I un idéal fermé de D , soit E l'ensemble fermé de X constitué par les points en lesquels s'annulent tous les éléments de I , et soit f un élément de I nul sur E et strictement positif hors de E (lemme 3). Appelons I_f l'idéal fermé engendré par f , et I_E l'idéal des éléments de D qui s'annulent en tout point de E . On va montrer qu'on a $I = I_f = I_E$.

Les inclusions $I_f \subset I \subset I_E$ étant évidentes, tout revient à prouver l'inclusion $I_E \subset I_f$. A cet effet prenons un élément $u \in I_E$ et posons $u_\varepsilon = u - T_\varepsilon u$, T_ε étant la projection sur le disque de centre 0 et de rayon ε . Appelons v_ε la fonction continue définie par

$$v_\varepsilon(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

Cette fonction continue v_ε est un élément de D . En effet $T_\varepsilon u$ s'annule en tout point de E et on a même un support compact dans $(E$, car $u(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Posons

$$m_\varepsilon = \inf_{u_\varepsilon(x) \neq 0} f(x) \quad \text{et} \quad M_\varepsilon = \sup_{x \in X} |u_\varepsilon(x)| ;$$

on a :

$$|v_\varepsilon(x)| = \left| \frac{u_\varepsilon(x)}{f(x)} \right| \ll \frac{|u_\varepsilon(x)|}{m_\varepsilon} \ll \frac{M_\varepsilon}{m_\varepsilon} |f(x)| \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } u_\varepsilon(x) \neq 0$$

et a fortiori

$$|v_\varepsilon(x)| \ll \frac{|u_\varepsilon(x)|}{m_\varepsilon} + \frac{M_\varepsilon}{2} |f(x)| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

D'autre part, pour deux points x et y du support de u_ε

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| &= \left| \frac{u_\varepsilon(x) \cdot f(y) - u_\varepsilon(y) f(x)}{|f(x)| |f(y)|} \right| \ll \frac{|u_\varepsilon(x)| |f(y) - f(x)|}{|f(x)| |f(y)|} + \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|}{|f(x)|} \\ &\ll \frac{M_\varepsilon}{2} \frac{|f(x) - f(y)|}{m_\varepsilon} + \frac{1}{m_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|. \end{aligned}$$

Cette relation est encore valable si les points x ou y n'appartiennent pas au support de u_ε . Le lemme 2 entraîne alors que v_ε est bien un élément de D .

L'élément $u_\varepsilon = v_\varepsilon f$ est donc dans I_p . Mais comme u_ε converge fortement vers u lorsque ε tend vers 0 (lemme 1), on a également $u \in I_p$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Bibliographie. La plupart des résultats concernant les espaces de Dirichlet ont été énoncés dans une courte note :

A. Beurling et J. Deny : Dirichlet spaces (Proceedings Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 45 (1959) 208-215)

Les méthodes utilisées dans l'exposé n° 1 ont été développées, dans le cas où X est un espace fini, dans :

A. Beurling et J. Deny : Espaces de Dirichlet, I, le cas élémentaire (Acta Mathematica 99 (1958) 203-224).

On pourra trouver une démonstration du théorème de représentation des normes approchées, théorème dont on peut déduire le lemme 2 de cet exposé, dans

J. Deny : Formes et espaces de Dirichlet (Séminaire Bourbaki, 12me année, 1959/60, n° 187).

Les théorèmes 1 et 2 de cet exposé sont entièrement dus à A. Beurling et n'ont jamais été publiés.

Espaces de suites
invariants par translationExposé n° 11. Les espaces.

Z désigne l'ensemble des entiers relatifs (et Z^+ l'ensemble des entiers ≥ 0)

T désigne le tore $[0, 2\pi[$

C désigne l'ensemble des nombres complexes

On utilisera e, v pour espace vectoriel et e, v, t pour espace vectoriel topologique

Une suite $c = (c_n)_{n \in Z}$ est une application $Z \longrightarrow C$
 $n \rightarrow c_n$

Pour tout entier relatif p

$$c_{(p)} = (c_{n-p})_{n \in Z}$$

désigne la translatée de p de la suite c .

Pour toute suite c , $v(c)$ désigne le plus petit C -espace vectoriel invariant par translation contenant c (ses éléments sont des combinaisons linéaires finies à coefficients complexes de translatées de c)

Les C -espaces vectoriels topologiques de suites, qui seront considérés par la suite, sont répertoriés sur le tableau ci-après.

Dualité. Ces espaces sont deux à deux en dualité. Par exemple, il est clair que toute suite (d_n) de \mathcal{J}' définit une forme linéaire continue sur l'espace \mathcal{J} , à l'aide de la forme bilinéaire

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J}' \longrightarrow C$$

$$c, d \longrightarrow \langle d, c \rangle = 2\pi \sum c_n d_{-n}$$

(le facteur 2π et le signe moins de cette formule, dite de Parseval, se justifient par la théorie de la transformation de Fourier). Nous admettrons que réciproquement, à toute forme linéaire continue sur l'espace \mathcal{J} , il correspond une suite de l'espace \mathcal{J}' .

Les espaces de suite considérés

Symbole	Explications supplémentaires	Désignation détaillée	ce qui signifie	topologie
\mathcal{E}		evt de toutes les suites		définie par les semi-normes $c \rightarrow c_n $
\mathcal{S}		evt des suites à décroissance rapide	$\forall p, p \in \mathbb{Z}^+, \forall n, n \in \mathbb{Z}$ $n^p c_n = \mathcal{O}(1)$	définie par les semi-normes $c \rightarrow \sup_n (1+ n ^p) c_n $
ℓ^p	$1 \leq p < \infty$	evt des suites de puissance p^e sommable	$(\sum c_n ^p) < \infty$	espace de Banach avec la norme $\ c\ = (\sum c_n ^p)^{1/p}$
ℓ^∞		ev des suites bornées	$\sup_n c_n < \infty$	espace de Banach avec la norme $\ c\ = \sup c_n $
$\ell^p(\omega_n)$	$1 \leq p < \infty$ $\forall n, n \in \mathbb{Z}, \omega_n > 0$	evt des suites de puissance p^e sommable par rapport à la mesure définie par ω_n	$(\sum \omega_n c_n ^p) < \infty$	espace de Banach avec la norme $\ c\ = (\sum \omega_n c_n ^p)^{1/p}$
$\ell^\infty(\omega_n)$	$\forall n, n \in \mathbb{Z}, \omega_n > 0$	ev des suites " ω_n -bornées"	$\sup_n \omega_n c_n < \infty$	espace de Banach avec la norme ci-centre
les duals topologiques de ces espaces				
\mathcal{E}'		ev des suites à support fini	les coefficients d_n sont nuls sauf un nombre fini	la topologie faible pour l'espace \mathcal{E}' dual topologique de l'espace \mathcal{E} est définie par la forme bilinéaire
\mathcal{S}'		ev des suites à croissance lente	$\exists p, p \in \mathbb{Z}^+ d_n = \mathcal{O}(n ^p)$	$2\pi \sum c_n d_n = \langle c, d \rangle$
$\ell^q = (\ell^p)'$	$1 \leq p < \infty$ $1 \leq q < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	voir ci-dessus		avec $c \in \ell^p$ $d \in \ell^q$
$\ell^q(\omega_n) = (\ell^p(\omega_n))'$	$1 \leq p < \infty$ $1 \leq q < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	voir ci-dessus		

Topologies. Sur un ev de suites, nous pouvons donc avoir deux topologies. Par exemple, pour ℓ^∞ on a d'une part la topologie d'espace de Banach, d'autre part la topologie faible (ℓ^∞ étant considéré comme dual de ℓ^1), c'est à dire la moins fine des topologies d'ev qui rendent continues les applications

$$\begin{aligned} \ell^\infty &\longrightarrow c \\ c &\longrightarrow \langle c, d \rangle \end{aligned}$$

lorsque d parcourt ℓ^1 .

2. Les problèmes.

Nous considérons trois types de problèmes, la résolution de chacun d'eux supposant effectuée la résolution des précédents.

2.1. Le problème de totalité.

Question préalable. Considérant une suite c dans un certain espace \mathcal{E} , quand a-t-on $V(c)$ inclus dans \mathcal{E} ?

La réponse est évidemment affirmative dans le cas où \mathcal{E} est : $\mathcal{C}, \mathcal{L}, \ell^p$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Problème. Supposant c dans \mathcal{E} , ainsi que $V(c)$, quand $V(c)$ est-il dense dans \mathcal{E} ?

2.2. Les problèmes d'analyse et de synthèse.

Les problèmes abordés ci-après présentent une certaine analogie avec les problèmes de physique vibratoire : le physicien cherche alors, en étudiant une certaine fonction périodique, les oscillations pures de cette fonction - ce sont des fonctions sinusoidales - puis il cherche à recomposer la fonction à l'aide de ses harmoniques. Ici, les fonctions étudiées sont des suites, c'est à dire des fonctions à valeurs complexes définies sur le groupe \mathbb{Z} .

Nous dirons qu'une suite est une "oscillation pure" si toutes ses translatées lui sont proportionnelles. Nous dirons que l'oscillation pure e est une oscillation pure d'une suite donnée d d'un espace \mathcal{E} si e est adhérent dans \mathcal{E} à $V(d)$. C'est donc dire que $e \in \overline{V_{\mathcal{E}}(d)}$ (le 2e membre désignant l'adhérence dans \mathcal{E} de $V(d)$).

Le problème de l'analyse.

Se donnant une suite c dans un espace \mathcal{E} et supposant que $V(c)$, sous espace de \mathcal{E} , n'est pas dense dans \mathcal{E} le problème de l'analyse consiste à rechercher les sous espaces de dimension fini de $\overline{V(c)}$, qui soient invariants par translation.

Recherche des sous-espaces de dimension 1, invariants par translation.

Si un tel sous espace est engendré par une suite c , on a :

$$c_{(1)} = ac \quad (a = \text{nombre complexe non nul}).$$

D'où pour tout n :

$$c_{n+1} = ac_n$$

donc

$$c_n = Ka^n \quad (K \text{ complexe}).$$

Une telle suite est appelée une exponentielle. Si elle est bornée, c'est que $a = e^{i\alpha}$ (α réel). L'ensemble des α tels que

$$(e^{in\alpha}) \in \overline{V(c)}$$

s'appelle le spectre de c .

La recherche de ces sous espaces invariants, de dimension 1, situés dans $\overline{V(c)}$ ne permet pas toujours de résoudre le problème de l'analyse.

Par exemple, considérant la suite

$$(c_n) = (P(n)e^{in\alpha})$$

avec $P =$ polynôme de degré $p-1$.

$\overline{V(c)}$ est un espace de dimension p qui ne peut pas être engendré par le seul sous espace vectoriel invariant par translation, de dimension 1, qu'il contient (espace engendré par $e^{i\alpha}$).

Recherche des sous espaces invariants de dimension finie.

On a forcément une relation linéaire à coefficients constants entre plusieurs translations d'une même suite c d'un tel espace. Soit :

$$a_p c_{(p)} + \dots + a_1 c_{(1)} + a_0 c = 0,$$

d'où $\forall n$:

$$a_p c_{n-p} + \dots + a_1 c_{n-1} + a_0 c_n = 0,$$

relation de récurrence dont les solutions sont combinaisons linéaires de solutions du type :

$$c_n = P(n) a^n$$

$$\text{où } \begin{cases} P = \text{polynôme} \\ a = \text{racine de } a_p Z^{n-p} + \dots + a_1 Z^{n-1} + a_0 Z^n = 0 \end{cases}$$

Ces solutions sont des exponentielles polynômes. Les sous espaces engendrés par translation par chacune de ces exponentielles polynômes sont irréductibles, ce qui signifie qu'ils ne sont pas décomposables en 2 sous espaces invariants (de dimension non nulle).

Problème de la synthèse pour une suite c d'un espace \mathcal{E} .

On en peut le résoudre que si l'analyse a été effectuée préalablement.

Il consiste à voir si $\overline{V_{\mathcal{E}}(c)}$ est engendré (topologiquement) par les exponentielles polynômes qu'il contient.

3. Les distributions sur T .

L'étude des problèmes de totalité nécessite la connaissance de quelques résultats sur les distributions sur le cercle, résultats que nous allons rétablir en utilisant en particulier la notion de mesure.

Si l'on considère une fonction φ , une mesure μ définies sur T , nous désignons leurs supports par les symboles $S\varphi$ et $S\mu$.

- Pour toute suite γ à décroissance rapide, on pose

$$\hat{\gamma}(t) = \sum \gamma_n e^{int}.$$

C'est une fonction complexe de classe C^m , définie sur T . On établit ainsi une

correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces fonctions et l'ensemble des suites à

décroissance rapide, la suite (φ_n) associée à une telle fonction φ étant donnée par

la formule

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt.$$

3.1. Définition d'une distribution.

Pour toute suite c à croissance lente, on peut poser

$$\hat{c}(t) \sim \sum c_n e^{int}.$$

Ce n'est pas une fonction en général. Nous dirons que c'est une distribution sur T

et que le 2ème membre est le développement en série de Fourier de cette distribution.

Ces distributions forment un C -ev. La distribution nulle a tous ses coefficients nuls.

3.2. Produit de convolution $\gamma * c$ avec $\gamma \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{F}'$.

Produit d'une distribution par une fonction C^∞ .

Pour toute suite γ de \mathcal{F} , et toute suite c de \mathcal{F}'

posons $d = (d_n) = \gamma * c$

avec $d_n = \sum_{p+q=n} \gamma_p c_q$.

Lemme 1. Si $\gamma \in \mathcal{F}$ et si $c \in \mathcal{F}'$, alors $d * c \in \mathcal{F}'$.

On a en effet $d_n = \sum_{p=-2n}^{+2n} \gamma_p c_{n-p} + \sum_{|p| > 2n} \gamma_p c_{n-p}$.

Or, il existe un α tel que $c_n = O(|n|^\alpha)$

et l'on a par exemple $\gamma_n = O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha+2}}\right)$.

D'où $|d_n| \ll \left(\sup_{-3n \leq j \leq +n} |c_j| \right) \sum_p |\gamma_p| + O\left(\sum_{|p| > 2n} \frac{|p|^\alpha}{|p-n|^{\alpha+2}}\right)$

$|d_n| = O(|n|^\alpha) + O(1) = O(|n|^\alpha)$

Notations : On pose alors $\hat{d} = \hat{\gamma} \hat{c}$.

On peut ainsi faire le produit d'une distribution \hat{c} et d'une fonction $\hat{\gamma}$ de classe C^∞ .

Remarquons que si pour tout entier relatif r , on a $e^{irx} \hat{c} = 0$, on a $c_n = 0$ pour tout n , donc $\hat{c} = 0$.

Lemme 2. γ et δ étant dans \mathcal{F} et c dans \mathcal{F}' , on a :
 $\hat{\gamma}(\hat{\delta} \hat{c}) = (\hat{\gamma} \hat{d}) \hat{c} = (\hat{\delta} \hat{\gamma}) \hat{c}$.

Ce lemme prouve que les distributions forment un module sur l'ensemble des fonctions de classe C^∞ . Il suffit de prouver l'égalité des n^e coefficients de Fourier des 2 premiers membres soit :

$$\sum_{p+s=n} \gamma_p \left(\sum_{q+r=s} \delta_q c_r \right) = \sum_{t+r=n} \left(\sum_{p+q=t} \gamma_p \delta_q \right) c_r.$$

Or le 1er membre s'écrit en intervertissant les sommations et en posant ensuite $n - r = t$

$$\sum_{q+r=s} \left(\sum_{p+s=n} \gamma_p \delta_q \right) c_r = \sum_{t+r=n} \left(\sum_{p+q=t} \gamma_p \delta_q \right) c_r.$$

3.3. Support d'une distribution.

Par définition on dit qu'une distribution \hat{c} est nulle sur un ouvert Ω de T si quelle que soit la fonction de classe C^∞ , γ , portée par Ω (c'est à dire nulle en dehors d'un compact inclus dans Ω), on a $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$.

Lemme 3. Etant donnée une famille d'ouverts Ω_i de T si la distribution \hat{c} est nulle sur chaque Ω_i , alors \hat{c} est nulle sur $\bigcup_i \Omega_i$.

Il faut montrer que pour toute fonction de classe C^∞ , soit φ , à support inclus dans $\bigcup_i \Omega_i$, on a $\varphi\hat{c} = 0$. On extrait de $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini $(\Omega_j)_{j \in J}$ du compact $S\varphi$ (support de φ). On fait une partition de l'unité sur $S\varphi$ par des fonctions de classe C^∞ , soient α_j , avec $S(\alpha_j) \subset \Omega_j$ d'où

$$\varphi\hat{c} = \left(\sum \alpha_j \varphi \right) \hat{c} = \sum (\alpha_j \varphi) \hat{c} = 0.$$

Définition du support.

Pour toute suite c de \mathcal{F} , on note $S\hat{c}$ et l'on appelle support de la distribution \hat{c} le plus petit fermé en dehors duquel \hat{c} est nul.

(notion coïncidant avec la notion habituelle pour une fonction continue).

Lemme 4. γ est une suite à décroissance rapide et c une suite à croissance lente telle que $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$. Alors $S(\hat{c}) \subset \gamma^{-1}(0)$ ($\hat{\gamma}$ est nulle sur le support de \hat{c}).

Il suffit de montrer que $S(\hat{c})$ ne coupe pas l'ouvert où $\hat{\gamma}$ est non nul. Or quelle que soit la fonction f , de classe C^∞ à support dans cet ouvert, on a

$$f\hat{c} = f(\hat{\gamma}\hat{c}) = 0$$

(en utilisant le lemme 2 et l'hypothèse)

Remarque : la réciproque est fautive en général :

Il suffit de considérer la suite $c = (n)_n \in \mathcal{Z}$.

Les $c_n = n$ sont les coefficients de Fourier de la distribution $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}(\delta)$ (δ = distribution de Dirac à l'origine).

\hat{c} a pour support l'origine et quelle que soit la fonction $\hat{\gamma}$, de classe C^∞ , telle que $\hat{\gamma}(0) = 0$ et $\hat{\gamma}'(0) \neq 0$ (c'est à dire que l'on a, si $\hat{\gamma} = \sum \gamma_p e^{ipx}$

$$\sum \gamma_p = 0 \quad \sum_p \gamma_p \neq 0)$$

on a $(\gamma * c)_n = \sum_p \gamma_{n-p} c_p = \sum_p \gamma_p^{(n-p)} = n \sum_p \gamma_p - \sum_p p \gamma_p$

différent de zéro donc $\hat{\gamma} \hat{c} \neq 0$.

La réciproque du lemme 4 est pourtant vraie dans le cas particulier où \hat{c} est une mesure. Soit :

Lemme 5. Si la fonction indéfiniment dérivable $\hat{\gamma}$ est nulle sur le support de la mesure \hat{c} , c'est à dire

$$S(\hat{c}) \subset \hat{\gamma}^{-1}(0)$$

alors

$$\hat{\gamma} \hat{c} = 0.$$

Notons d'abord que la relation de Parseval donne alors pour toute fonction $\hat{\psi}$ indéfiniment dérivable

$$\langle \psi, c \rangle = 2\pi \sum_p \psi_p c_{-p} = \int_{\pi} \psi(x) d\hat{c}(x).$$

Nous voulons montrer que pour tout n , on a :

$$\sum_p c_p \gamma_{n-p} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \sum_n c_p \gamma_{n-p} &= \sum \gamma_{-(p-n)} c_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_p \gamma_{p-n} e^{ipx} \right) d\hat{c}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}(x) e^{inx} d\hat{c}(x). \end{aligned}$$

C'est nul puisque $\hat{\gamma}$ est nulle sur le support de la mesure \hat{c} .

3.4. Régularisation et convolution.

E étant un fermé non vide du cercle, ρ un nombre positif, pour tout point x du cercle $d(x, E)$ désigne la distance de x et de E .

On pose
$$E_\rho = \{x | x \in T, d(x, E) \leq \rho\}$$

c'est un fermé.

α étant un nombre positif, Δ_α désigne une fonction de Schwartz : Δ_α est réelle positive, de classe C^∞ à support $[-\alpha, +\alpha]$ avec $\int \Delta_\alpha = 1$

$$\Delta_\alpha(t) = \sum \delta_{n\alpha} e^{int}.$$

Remarquons que, pour chaque n , $\delta_{n\alpha}$ tend vers $\frac{1}{2\pi}$ quand α tend vers 0.

On appelle produit de convolution de la distribution $T \sim \sum c_n e^{int}$ et de la fonction

Δ_α ou régularisée de T par Δ_α la fonction

$$T_\alpha = T * \Delta_\alpha = 2\pi \sum c_n \delta_{n\alpha} e^{int}$$

(fonction C^∞ puisque la suite de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide).

Lemme 6. On a la relation suivante entre les supports de la distribution T et de sa régularisée T_α (avec $\alpha > 0$)
 $S(T_\alpha) \subset (S(T))_\alpha.$

Preuve. Posons $S(T) = E$. φ étant une fonction de classe C^∞ à support disjoint de E_α il suffit de prouver $\varphi \cdot (T * \Delta_\alpha) = 0$

soit pour tout n :

$$\sum_p \varphi_{n-p} T_p \delta_{p\alpha} = \sum_p \varphi_{n-p} \delta_{p,\alpha} T_p = 0$$

c'est à dire puisque le $(n-p)^c$ coefficient de Fourier de $\Delta_\alpha(-t)e^{int}$ est $\delta_{p,\alpha}$,

que l'on a pour tout n : $(\varphi * \Delta_\alpha(-t)e^{int})T = 0.$

Il en est bien ainsi puisque les supports de $\varphi * \Delta_\alpha(-t)e^{int}$ et de T sont disjoints.

4. Problèmes de totalité.

4.1. Principe général des démonstrations de totalité.

Nous considérons les problèmes du type suivant :

Etant donnés une suite γ de \mathcal{J} et un espace \mathcal{L} contenant \mathcal{J} topologiquement⁽¹⁾,
 quand $V(\gamma)$ est-il dense dans \mathcal{L} ?

Nous raisonnerons ainsi :

- dire que $V(\gamma)$ est dense dans \mathcal{L}

(1) c'est à dire que l'injection canonique $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{L}$ est continue, autrement dit, que la topologie de \mathcal{J} est plus fine que celle induite par \mathcal{L} .

- c'est dire que la seule forme linéaire continue c sur \mathcal{L} perpendiculaire à $V(\gamma)$ est $c = 0$

- c'est dire que la seule suite c de \mathcal{L}' (donc \mathcal{J}') telle que

$$\text{" pour tout } r \sum \gamma_{p-r} c_{-p} = 0 \text{ " est } c = 0.$$

Comme la relation entre astérisques s'écrit aussi :

$$\text{" pour tout } n, \text{ pour tout } r \sum_{p+q=n} \gamma_{p-r} c_q = 0 \text{"}$$

ou bien : $\text{" pour tout } r, \hat{\gamma}_r \hat{c} = e^{irx} \hat{\gamma} \hat{c} = 0.$

On a donc le

Théorème 1 : γ étant une suite de \mathcal{J} $V(\gamma)$ est dense dans $\mathcal{L} \supset \mathcal{J}$ si et seulement si : la seule suite c de \mathcal{L}' telle que $\hat{\gamma} \hat{c} = 0$ est $c = 0$.

4.2. Pour une suite γ de \mathcal{J} , quand $V(\gamma)$ est-il dense dans \mathcal{J} ?

Théorème 2. Pour une suite γ de \mathcal{J} , $V(\gamma)$ est dense dans \mathcal{J} si et seulement si

$\hat{\gamma}$ ne s'annule pas (Wiener)

Preuve. Si $\hat{\gamma}$ s'annule, et si l'on prend une mesure c non nulle à support dans $\gamma^{-1}(0)$, d'après le lemme 5, on aura $\hat{\gamma} \hat{c} = 0$. Si $\hat{\gamma}$ ne s'annule pas et si c est une suite à croissance lente telle que $\hat{\gamma} \hat{c} = 0$, le lemme 4 montre que

$$S(\hat{c}) \subset \hat{\gamma}^{-1}(0) = \emptyset$$

\hat{c} a un support vide.

Donc pour tout r $e^{irx} \hat{c} = 0$

La remarque précédent le lemme 2 permet d'affirmer que $\hat{c} = 0$.



Espaces de suites, invariants par translation

4.3. Pour une suite γ de \mathcal{J} , quand $V(\gamma)$ est-il dense dans ℓ^2 ?

Théorème 3. Pour une suite γ de \mathcal{J} , $V(\gamma)$ est dense dans ℓ^2 si et seulement si l'ensemble des zéros de $\hat{\gamma}$ est de mesure de Lebesgue nulle (Wiener).

Preuve : On a ici : $\mathcal{E} = \ell^2 \supset \mathcal{J}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$

- Si $\hat{\gamma}$ est non nul presque partout et si c est une suite de ℓ^2 telle que $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$, alors \hat{c} est une fonction de carré sommable nulle presque partout, donc ses coefficients de Fourier sont nuls et l'on a $c = 0$.

- Si $\hat{\gamma}$ s'annule sur un ensemble de mesure non nulle, la fonction caractéristique \hat{c} de cet ensemble est une fonction de carré sommable à coefficients de Fourier non tous nuls, telle que $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$.

4.4. Pour une suite γ de \mathcal{J} , quand $V(\gamma)$ est-il dense dans $\mathcal{E} = \ell^2(\omega_n)$ avec $\omega_n = 1 + |n|^\alpha$ et $\alpha \gg 0$?

On sait que $\mathcal{E}' = \ell^2\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$. Nous distinguerons 2 cas :

Théorème 4. On se donne $\alpha > 1$; si γ est une suite de \mathcal{J} $V(\gamma)$ est dense dans $\ell^2(\omega_n)$, avec $\omega_n = 1 + |n|^\alpha$, si et seulement si $\hat{\gamma}$ ne s'annule pas.

Preuve : on vérifie d'abord que $\mathcal{J} \subset \ell^2(\omega_n)$

- Si $\hat{\gamma}$ ne s'annule pas.

considérons une suite c de $\mathcal{E}' = \ell^2\left(\frac{1}{1+|n|^\alpha}\right)$ telle que $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$.

Le lemme 4 montre que $S\hat{c} = \Phi$ donc $c = 0$.

- Si $\hat{\gamma}$ s'annule en un point a du tore, alors la distribution $2\pi \delta_a$ de coefficients de Fourier $c_n = e^{-ina}$ est dans $\mathcal{E}' = \ell^2\left(\frac{1}{1+|n|^\alpha}\right)$

car
$$\sum_n \frac{|c_n|}{1+|n|^\alpha} = \sum_n \frac{1}{1+|n|^\alpha} < \infty.$$

Donc, il existe c dans \mathcal{E}' , non nulle, telle que $\hat{\gamma} \hat{c} = 0$.

Ce raisonnement n'est plus valable si $0 < \alpha \leq 1$ et intuitivement, on peut s'attendre dans ce cas à une condition de densité portant sur les zéros de $\hat{\gamma}$, condition qui soit intermédiaire entre celle des cas

$\alpha = 0$: la mesure de Lebesgue de $\hat{\gamma}^{-1}(0)$ doit être nulle

$\alpha > 1$: $\hat{\gamma}$ ne doit pas s'annuler

Plus précisément, on a le

Théorème 5. On se donne α tel que $0 < \alpha \leq 1$. On pose $\omega_n = 1 + |n|^\alpha$. Pour toute suite γ de \mathcal{J} , $V(\gamma)$ est dense dans $\mathcal{P}^2(\omega_n)$ si et seulement si $\hat{\gamma}^{-1}(0)$ est de capacité nulle par rapport au noyau :

$$\frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|^{1-\alpha}} \quad \text{dans le cas où } 0 < \alpha < 1$$

$$\log \frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \quad \text{dans le cas où } \alpha = 1.$$

La preuve de ce théorème nous occupera un certain temps. On utilisera les notations suivantes. Pour tout fermé E du tore :

si $0 < \alpha < 1$, $C_{1-\alpha}(E)$ désigne la capacité de E par rapport au noyau $\frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|^{1-\alpha}}$

si $\alpha = 1$, $C_0(E)$ ou $C_{\log}(E)$ désigne la capacité de E par rapport au noyau $\log \frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|}$

(On dit que ce sont les capacités d'ordre $1-\alpha$ et la capacité logarithmique du fermé E)

D'après la méthode indiquée au n° 4.1., on voit que le théorème ci-dessus résulte des

2 propositions suivantes

E étant un fermé du tore et $0 < \alpha \leq 1$, alors

Proposition 1. $C_{1-\alpha}(E) > 0$ implique que E porte une mesure \hat{c} non nulle telle que $c \in \mathcal{P}^2\left(\frac{1}{1+|n|^\alpha}\right)$

Proposition 2. $C_{1-\alpha}(E) = 0$ implique que E ne porte aucune distribution \hat{c}

non nulle telle que $c \in \mathcal{L}^2\left(\frac{1}{1+|n|^\alpha}\right)$

Cela résulte de la théorie du potentiel sur le cercle que nous allons traiter maintenant.

§ 5. Théorie du potentiel sur le cercle.

Notations.

$\mathcal{M}(T)$ désigne l'ensemble des mesures sur T , (dual de l'espace des fonctions continues sur T), muni de la topologie faible

$\mathcal{M}^+(T)$ désigne l'ensemble des mesures ≥ 0 sur T .

Pour toute mesure μ , $S\mu = S(\mu)$ désigne son support et $\mu(T)$ sa masse.

sci est l'abréviation de "semi-continu(e) inférieurement".

5.1. Noyaux et potentiel

Noyau Φ :

C'est par définition une fonction positive, paire, convexe sur $[0, 2\pi[$, sommable sur T .

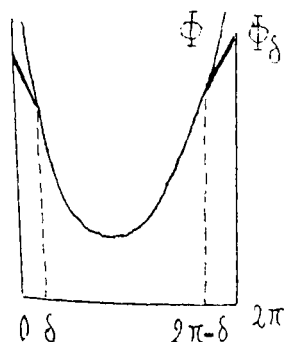
Dans la pratique, on utilise les noyaux

- dit logarithmique : $\Phi(t) = \log \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|}$

- dit d'ordre β ($0 < \beta < 1$) : $\Phi(t) = \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|^\beta}$

- On distingue les noyaux continus ($\Phi(0) < \infty$) et discontinus ($\Phi(0) = \infty$).

- étant donné un noyau Φ et un nombre δ ($\pi > \delta > 0$) on appelle noyau approché à δ du noyau Φ , et l'on note Φ_δ le plus petit noyau continu coïncidant avec



Φ sur l'intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$

(ces noyaux sont linéaires sur $[0, \delta]$ et $[2\pi - \delta, 2\pi]$)

μ étant une mesure positive (sur T) et Φ un noyau,

on appelle potentiel de μ par rapport au noyau Φ

la fonction :

$$U^\mu = \Phi * \mu$$

$$\text{soit } t \longrightarrow U^\mu(t) = \int_T \Phi(t.u) d\mu(u)$$

Sur tout intervalle contigu au support S_μ de μ la fonction $t \longrightarrow U^\mu(t)$ est convexe (intégrale de fonction convexe). Ceci prouve (par l'absurde) que le maximum de U^μ , s'il est atteint, l'est nécessairement sur S_μ . De plus, si Φ est continue, U^μ l'est aussi.

Proposition 1. Principe du maximum.

Quels que soient le noyau Φ et la mesure positive μ . U^μ est sci et sa borne supérieure sur T est égale à sa borne supérieure sur S_μ .

Preuve : considérons les noyaux approchés Φ_δ de Φ et posons $U_\delta^\mu = \Phi_\delta * \mu$.

si $\delta \downarrow 0$, alors $\Phi_\delta \uparrow \Phi$, donc $U_\delta^\mu \uparrow U^\mu$. Ceci prouve que U^μ , limite supérieure de fonctions continues est s.c.i.

De plus pour tout point θ du cercle :

$$U_\delta^\mu(\theta) \leq \sup_{t \in S_\mu} U_\delta^\mu(t) \leq \sup_{t \in S_\mu} U^\mu(t)$$

$$\text{donc } U^\mu(\theta) \leq \sup_{t \in S_\mu} U^\mu(t)$$

5.2. Capacité d'un fermé E de T.

On pose $N = \{ \mu \mid \mu \in \mathcal{M}^+(T), \mu(T) = 1, S_\mu \subset E \}$

C'est un convexe faiblement compact de $\mathcal{M}(T)$.

La capacité du fermé E est par définition la borne supérieure des masses des mesures positives portées par E dont le potentiel ne dépasse par 1, soit

$$C(E) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^+(T), S_\mu \subset E, U^\mu \leq 1} \mu(T) \quad \text{ou encore } C^{-1}(E) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(T), S_\mu \subset E, U^\mu \leq 1} 1/\mu(T)$$

Comme U^μ est proportionnel à μ :

$$C^{-1}(E) = \inf_{\mu \in N} \left(\sup_{t \in T} U^\mu(t) \right)$$

Remarque 1. Quand on considère les noyaux d'ordre α ($0 < \alpha \leq 1$) on peut écrire $c_\alpha(E)$ pour préciser qu'il s'agit de la capacité par rapport à ce noyau.

Remarque 2. Notons U_1^μ et U_2^μ les potentiels de la mesure μ par rapport aux noyaux Φ_1 et Φ_2

$$\Phi_1 \leq \Phi_2 \implies U_1^\mu \leq U_2^\mu \implies c_1(E) \geq c_2(E)$$

Remarque 3. Dire qu'un fermé E est de capacité nulle, c'est dire que quelle que soit la mesure μ / à support dans E , U^μ n'est jamais borné.

5.3. Séries de Fourier

Posons $\Phi \sim \sum \alpha_n e^{int}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int \Phi(t) e^{-int} dt$

$\mu \sim \sum c_n e^{int}$ avec $c_n = \frac{1}{2\pi} \int e^{-int} d\mu(t)$

$\Phi_\delta \sim \sum \alpha_{n\delta} e^{int}$ avec $\alpha_{n\delta} = \frac{1}{2\pi} \int \Phi_\delta(t) e^{-int} dt$

Alors $U^\mu \sim 2\pi \sum c_n \alpha_n e^{int}$

$U_\delta^\mu \sim 2\pi \sum c_n \alpha_{n\delta} e^{int}$

Lemme 1. Soit ψ une fonction paire, convexe et sommable sur $]0, 2\pi[$. Alors

ses coefficients de Fourier α_n sont positifs ou nuls.

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \cos nt dt$$

pour $n = 0$, on a $\alpha_0 > 0$

pour $n > 0$, on intègre par parties sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ et on passe à la limite quand

ε tend vers 0

$$\alpha_n = -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nt \psi'(t) dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\frac{k}{2n} 2\pi}^{\frac{k+1}{2n} 2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi/n} \sin nu \left(-\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} \psi'(u + \frac{k\pi}{n})\right) du$$

Si ψ est convexe, ψ' est croissante (au sens large), donc la parenthèse est $\gg 0$. Elle ne peut être nulle sur $[0, \frac{\pi}{n}]$ que si ψ' est constant sur chacun des intervalles $]0, \frac{2\pi}{n}[$, $] \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}[$, etc... . Le lemme est donc démontré, et l'on voit que $\alpha_n > 0$ (strictement) lorsque ψ n'est pas linéaire par morceaux.

Si $\alpha_n(\Phi) > 0$ quel que soit n , nous dirons que Φ est de type strictement positif ; nous ferons toujours dans la suite cette hypothèse sur le noyau Φ .

Appliquons ces résultats en prenant successivement

$$\psi = \Phi, \quad \Phi_\delta, \quad \text{puis} \quad \Phi - \Phi_\delta$$

donc pour tout n

$$\alpha_n > 0, \quad \alpha_{n\delta} \geq 0, \quad \alpha_n - \alpha_{n\delta} \geq 0$$

Donc quand δ décroît vers 0, $\alpha_{n\delta}$ tend en croissant vers α_n .

5.4. Energie d'une mesure.

L'énergie d'une mesure μ par rapport à un noyau Φ est le nombre

$$I^\mu = \int_{\mathbb{T}} U^\mu(t) d\mu(t) = \iint_{\mathbb{T}^2} \Phi(t-u) d\mu(t) d\mu(u)$$

si ce nombre est fini, μ est dite d'énergie finie. On a le principe de réciprocité pour

deux mesures μ et ν :

$$\int U^\mu d\nu = \int U^\nu d\mu \quad (\text{Fubini})$$

- Posant $I_\delta^\mu = \int U_\delta^\mu(t) d\mu(t)$

on a $I^\mu = \lim_{\delta \downarrow 0} I_\delta^\mu$ (Lebesgue)

- Avec les notations précédentes pour les coefficients de Fourier

on a

$$I^\mu = 4\pi^2 \sum \alpha_n |c_n|^2$$

Preuve. Dans $\Phi_\delta(t) = \sum \alpha_{n\delta} e^{int}$

quand $\delta \downarrow 0$, le 2ème membre converge absolument

car $\Phi_\delta(0) = \sum \alpha_{n\delta} < \infty$ et $\alpha_{n\delta} \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I_\delta^\mu &= \iint \sum \alpha_{n\delta} e^{in(t-u)} d\mu(t) d\mu(u) \\ &= \sum \alpha_{n\delta} \int e^{int} d\mu(t) \int e^{-inu} d\mu(u) \\ &= 4\pi^2 \sum \alpha_{n\delta} |c_n|^2 \end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire du lemme 1

$$\delta \downarrow 0 \implies \alpha_{n\delta} \uparrow \alpha_n \quad n$$

d'où
$$I^\mu = 4\pi^2 \sum \alpha_n |c_n|^2$$

Lemme 2. L'application $\mathcal{M}^+(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est s.c.i.

$$\mu \longrightarrow I^\mu$$

dans le sens suivant : si des mesures μ_j tendent faiblement vers μ , on a

$$I^\mu \leq \underline{\lim} I^{\mu_j}.$$

Preuve.

$$I^{\mu_j} = 4\pi^2 \sum \alpha_n |c_{n,j}|^2$$

avec, pour tout n ,

$$\lim c_{n,j} = c_n.$$

Donc, pour tout ν entier,

$$4\pi^2 \sum_{-\nu}^{\nu} \alpha_n |c_n|^2 \leq \underline{\lim} I^{\mu_j}$$

et l'on a le résultat en faisant tendre ν vers l'infini.

Lemme 3. Si μ_1 et μ_2 sont 2 mesures positives différentes et d'énergie finie

par rapport à un noyau de type strictement positif. Alors on a : $I \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} < \frac{1}{2}(I^{\mu_1} + I^{\mu_2})$
(inégalité stricte)

Preuve : d'après l'expression donnée ci-avant pour l'énergie il suffit de prouver

c_{n_1} et c_{n_2} étant les coefficients de Fourier de μ_1 et μ_2 que pour tout n

$$\left| \frac{c_{n_1} + c_{n_2}}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{2} |c_{n_1}|^2 + \frac{1}{2} |c_{n_2}|^2$$

avec inégalité stricte pour un n au moins. C'est une conséquence de l'inégalité du

parallélogramme $|c_{n_1} + c_{n_2}|^2 \leq 2|c_{n_1}|^2 + 2|c_{n_2}|^2 - |c_{n_1} - c_{n_2}|^2$ et du fait que 2 mesures ayant mêmes coefficients de Fourier sont identiques.

5.5. Mesure et potentiel d'équilibre d'un fermé.

On obtiendra les résultats habituels, relatifs à la mesure et au potentiel d'équilibre

la fonction test/

d'un fermé E de T en remplaçant ci-dessous $\sqrt{\varphi}$ par la fonction constante égale à 1.

Proposition 2. Soit Φ un noyau de type strictement positif, E un fermé de T ,

φ une fonction continue définie sur T , strictement positive.

On pose $N(\varphi) = \{ \mu \in \mathcal{M}^+(T), \text{ s } \mu \subset E, \langle \mu, \varphi \rangle = 1 \}$. Alors il existe dans
 $N(\varphi)$ une seule mesure minimisant I^μ .

(si $\varphi \equiv 1$, c'est la mesure d'équilibre μ_e et le potentiel correspondant est le potentiel d'équilibre U^{μ_e}).

(pour la topologie faible)

Preuve : $N(\varphi)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}(T)$: on peut le voir par le critère de l'ultrafiltre : si des $\mu_j \in N(\varphi)$ tendent faiblement vers μ , alors $\mu \in N(\varphi)$.

De plus l'application $\mu \rightarrow I^\mu$ est s.c.i. (lemme 2). Donc, la fonction I^μ atteint son minimum sur $N(\varphi)$ et le lemme 3 prouve (par l'absurde) que ce minimum est atteint en un seul point noté $\mu_{e\varphi}$.

Remarquons que $N = N(1)$.

On pose alors $I(E) = I^{\mu_e} = \inf_{\mu \in N} I^\mu$ et $I_\varphi(E) = I^{\mu_{e\varphi}} = \inf_{\mu \in N(\varphi)} I^\mu$.

Lemme 4. Avec les notations de la proposition 2, quelle que soit la mesure ν d'énergie finie, on pose

$$F_0(\varphi) = \{ t \mid t \in E, U^{\mu_{e\varphi}}(t) < I_\varphi(E) \cdot \varphi(t) \} \text{ (inégalité stricte)}$$

alors $F_0(\varphi)$ est de ν -mesure nulle.

Preuve. Avec $\varepsilon > 0$, posons

$$F_\varepsilon(\varphi) = \{ t \mid t \in E, U^{\mu_{e\varphi}}(t) \leq (I_\varphi(E) - \varepsilon) \varphi(t) \}$$

Comme le potentiel $U^{\mu_{e\varphi}}$ est une fonction s.c.i., F_ε est fermé. Si le lemme était faux,

il existerait une mesure ν d'énergie finie dont la restriction à $F_\varepsilon(\varphi)$ serait non nulle. En multipliant cette restriction par une constante, on obtient une mesure σ positive

telle que $\langle \sigma, \varphi \rangle = 1$, portée par $F_\varepsilon(\varphi)$ d'énergie finie. Comme $N(\varphi)$ est convexe,

$$\mu_\lambda = (1-\lambda)\mu_{e\varphi} + \lambda\sigma \in N(\varphi) \text{ quand } 0 < \lambda < 1.$$

D'où, en utilisant la relation de réciprocité :

$$I^{\mu_\lambda} = (1-\lambda)^2 I^{\mu_e \varphi} + \lambda^2 I^\sigma + 2\lambda(1-\lambda) \int U^{\mu_e \varphi} d\sigma$$

Or sur $S\sigma$: $U^{\mu_e \varphi} \leq (I_\varphi(E) - \varepsilon) \varphi$

d'où
$$I^{\mu_\lambda} \leq (1-\lambda)^2 I^{\mu_e \varphi} + \lambda^2 I^\sigma + 2\lambda(1-\lambda)(I_\varphi(E) - \varepsilon)$$

$$I^{\mu_\lambda} \leq I_\varphi(E) - 2\lambda\varepsilon + o(\lambda^2)$$

D'après la définition de $I_\varphi(E)$ ceci est impossible pour λ assez petit.

Lemme 5. Avec les mêmes notations, on a pour tout point t de $S(\mu_{e\varphi})$, on a :

$$U^{\mu_e \varphi}(t) \leq I_\varphi(E) \varphi(t).$$

Preuve : On pose pour tout $\alpha > 0$

$$G_{\alpha, \varphi} = \{t \mid t \in S(\mu_{e\varphi}), U^{\mu_e \varphi}(t) > (I_\varphi(E) + \alpha) \varphi(t)\}$$

C'est la trace d'un ouvert sur le fermé $S(\mu_{e\varphi})$

on a
$$I^{\mu_e \varphi} = \int_{S(\mu_{e\varphi})} U^{\mu_e \varphi}(t) d\mu_{e\varphi}(t) = \int_{G_{\alpha, \varphi}} + \int_{S(\mu_{e\varphi}) - G_{\alpha, \varphi}}$$

donc, d'après la définition de $G_{\alpha, \varphi}$ et le lemme 4,

$$I^{\mu_e \varphi} \gg (I_\varphi(E) + \alpha) \int_{G_{\alpha, \varphi}} \varphi d\mu_{e\varphi} + I_\varphi(E) \int_{S(\mu_{e\varphi}) - G_{\alpha, \varphi}} \varphi d\mu_{e\varphi}$$

$$I^{\mu_e \varphi} \gg I_\varphi(E) + \alpha \int_{G_{\alpha, \varphi}} \varphi d\mu_{e\varphi}$$

ce qui serait impossible si $G_{\alpha, \varphi}$ n'était pas vide

d'où
$$U^{\mu_e \varphi} \leq I_\varphi(E) \quad \text{sur} \quad S(\mu_{e\varphi}).$$

Corollaire. Dans le cas où $\varphi \equiv 1$, le principe du maximum (lemme 1) permet de déduire que

$$U^{\mu_e} \leq I(E) \quad \text{partout.}$$

L'intérêt d'avoir introduit la fonction φ apparaîtra plus tard.

Proposition 3. Avec les mêmes notations on a

$$C^{-1}(E) = I(E) = I^{\mu_e}.$$

Preuve : Partons de la relation de définition de $C(E)$

$$C^{-1}(E) = \inf_{\mu \in N} \sup_{t \in T} U^\mu(t)$$

on voit directement que pour toute μ de N

$$I^\mu = \int U^\mu d\mu \leq \sup_{t \in T} U^\mu(t)$$

$$\text{d'où} \quad C^{-1}(E) \geq \inf_{\mu \in N} I^\mu = I^{\mu_e} = I(E)$$

L'inégalité inverse est moins évidente et nécessite l'emploi du lemme 5 :

$$C^{-1}(E) \leq \sup_{t \in T} U^{\mu_e}(t) \leq I(E).$$

Récapitulons les résultats :

Proposition 4. Soit E un fermé du cercle, Φ un noyau de type strictement positif.

$$\text{Soit} \quad N = \left\{ \mu \mid \mu \in \mathcal{M}^+(T), \text{ spt } \mu \subset E, \int d\mu = 1 \right\}$$

$$I(E) = \inf_{\mu \in N} I^\mu.$$

Alors 2 éventualités sont possibles

- ou bien $I(E) = \infty$, c'est à dire qu'il n'existe pas de potentiels partout finis

correspondant à des mesures de masse $\gg 0$, portées par E . On a alors $C(E) = 0$

ou bien l'inverse et alors on a

$$C^{-1}(E) = \inf_{\mu \in N} \left(\sup_{t \in T} U^\mu(t) \right) = I(E).$$

Il existe alors une seule mesure μ_e de N minimisant I^μ . On a

$$U^{\mu_e} \leq I(E) \quad \text{partout et}$$

$$U^{\mu_e} = I(E) \quad \text{presque partout sur } E \text{ par rapport à toute}$$

mesure d'énergie finie.

5.6. Mode de croissance des coefficients de Fourier des noyaux d'ordre β $(0 < \beta \leq 1)$.Lemme 6. On désigne par (α_n) la suite des coefficients de Fourier du noyau Φ .Pour le noyau $\Phi(t) = \frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^\beta}$ ($0 < \beta < 1$) on a $\alpha_n = (A + o(1))|n|^{\beta-1}$. Pour lenoyau logarithmique $\Phi(t) = \log \frac{1}{(\sin \frac{t}{2})}$ on a $\alpha_n = \frac{B}{n} + o(\frac{1}{n})$.

En effet :

 Φ étant paire, on a dans les deux cas

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(t) \cos nt \, dt.$$

Il suffit de faire apparaître dans cette expression la partie principale Φ_0 de lorsque $t \downarrow 0$ et de considérer les 2 intégrales de l'expression suivante de α_n :

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_0(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\Phi - \Phi_0) \cos nt \, dt.$$

La première donne la partie principale de α_n , et la seconde, en intégrant par parties le mode de décroissance du terme complémentaire. (Par exemple, pour le 1er noyau,

$$\Phi_0(t) = \left(\frac{2}{t}\right)^\beta).$$

5.7. Espace hilbertien des distributions d'énergie finie.Par définition une distribution $T \sim \sum c_n e^{int}$ est dite d'énergie finie (par rapport au noyau $\Phi \sim \sum \alpha_n e^{int}$ de type strictement positif) si l'on a

$$I^T = 4\pi^2 \sum \alpha_n |c_n|^2 < \infty.$$

Supposons que l'on ait pour un $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha_n} \leq K|n|^\alpha$. Alors toute suite $\{c_n\}$ telle que $\sum \alpha_n |c_n|^2 < \infty$ est transformée de Fourier d'une distribution d'énergie finie.

Ces distributions forment un espace de Hilbert \mathcal{E} : $U \sim \sum_n d_n e^{int}$ étant une deuxième distribution d'énergie finie, on pose

$$\langle T, U \rangle_{\mathcal{E}} = 4\pi^2 \sum \alpha_n c_n d_n$$

(ne pas confondre ce produit scalaire avec celui de la formule de Parseval). La norme de

T est donnée par $\|T\|_{\mathcal{E}}^2 = I^T = 4\pi^2 \sum \alpha_n |c_n|^2$.

Lemme 7. Soit $T \in \mathcal{E}$, et T_α une régularisée de T^α , définie au n° 3.4. Dans \mathcal{E} (pour la topologie définie par la norme) T_α tend vers T quand $\alpha \rightarrow 0$.

Preuve. On sait que $T \sim \sum c_n e^{int}$
 $T_\alpha \sim 2\pi \sum c_n \delta_{n,\alpha} e^{int}$

donc $\|T_\alpha - T\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum \alpha_n |1 - 2\pi \delta_{n,\alpha}|^2 |c_n|^2$.

Comme $\forall n, \forall \alpha, 2\pi |\delta_{n,\alpha}| \leq 1$ et $\forall n \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\pi |\delta_{n,\alpha}| = 1$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha - T\|_{\mathcal{E}} = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 5. Soit $T \sim \sum c_n e^{int}$ une distribution d'énergie finie portée par un fermé E du cercle, telle que $\langle T, 1 \rangle = 2\pi c_0 = 1$.

Si μ_e désigne la mesure d'équilibre de ce fermé, on a :

$$I^T \geq I^{\mu_e}$$

Preuve. Comme précédemment, si $\rho > 0$, on pose

$$E_\rho = \{x | x \in T, d(x, E) \leq \rho\}$$

Pour $\alpha > 0$, considérons la régularisée T_α

$$T_\alpha \sim 2\pi \sum c_n \delta_{n\alpha} e^{int} = \sum t_{\alpha n} e^{int}$$

Si l'on pose

$$\mu_{e\rho} \sim \sum c_{ne\rho} e^{int} = \text{mesure d'équilibre du fermé } E_\rho$$

on sait que

$$U^{\mu_{e\rho}} \sim 2\pi \sum \alpha_n c_{ne} e^{int}$$

d'où

$$\langle T_\alpha, \mu_{e\rho} \rangle_{\mathcal{E}} = 4\pi^2 \sum_n \alpha_n t_{\alpha n} \overline{c_{ne\rho}}$$

Utilisant la formule de Parseval et l'expression ci-dessus des coefficients de Fourier de $U^{\mu_{e\rho}}$, il vient

$$\langle T_\alpha, \mu_{e\rho} \rangle_{\mathcal{E}} = \langle T_\alpha, U^{\mu_{e\rho}} \rangle.$$

Comme $S(T_\alpha) \subset E_\rho$ si $0 < \alpha < \rho$ (lemme 6)

et que sur E_ρ : $U^{\mu_{e\rho}} = I^{\mu_{e\rho}}$, presque partout par rapport à toute mesure d'énergie finie (proposition 4) on a

$$\langle T_\alpha, \mu_{e\rho} \rangle_{\mathcal{E}} = I^{\mu_{e\rho}} \langle T_\alpha, 1 \rangle = I^{\mu_{e\rho}}$$

car $\langle T_\alpha, 1 \rangle = 2\pi t_{\alpha_0} = 2\pi c_{\bullet} \cdot 2\pi \delta_{\bullet, \alpha} = 1 \cdot 1 = 1.$

Dans l'espace de Hilbert des distributions d'énergie finie cette relation nous prouve que $\mu_{e\rho}$ est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant T_α pour hypoténuse : en effet, l'inégalité de Schwarz donne alors :

$$I^{T_\alpha} I^{\mu_{e\rho}} \geq |\langle T_\alpha, \mu_{e\rho} \rangle_{\mathcal{E}}|^2 = (I^{\mu_{e\rho}})^2$$

d'où $I^{T_\alpha} \geq I^{\mu_{e\rho}}.$

L'inégalité s'obtient par deux passages successifs à la limite :

- si $\alpha \downarrow 0$, nous avons vu (lemme 7)

que $I^{T_\alpha} \rightarrow I^T$

d'où $I^T \geq I^{\mu_{e\rho}}$

- si $\rho \downarrow 0$, considérant un ρ_0 fixé et la partie compacte de l'evt $\mathcal{M}(T)$ formée par les mesures positives de masse 1 portées par le fermé E_{ρ_0} , on obtient un filtre $(\mu_{e\rho})_{\rho \downarrow 0}$ ayant un point adhérent μ^* . Utilisant le fait que le compact E_{ρ_0} est normal, on voit μ^* est portée par E .

Comme l'application

$$\mu \rightarrow I^\mu \quad \text{est s c i, on a :}$$

$$I^T \geq I^{\mu^*}$$

or $I^{\mu^*} \geq I^{\mu_e}$

d'où $I^T \geq I^{\mu_e}.$

Tous ces résultats nous permettent à présent de démontrer les propositions 1 et 2 énoncées à la fin du § 4.

5.8. Démonstration de la proposition 1 du § 4.

D'après le mode de croissance des coefficients de Fourier α_n des noyaux $\hat{\Phi}$ d'ordre β ($0 \leq \beta < 1$) dire que le fermé E porte une mesure

$$\hat{c} \sim \sum c_n e^{int}$$

telle que $c \in \mathcal{L}^2\left(\frac{1}{1+|n|^{1-\beta}}\right)$ c'est dire que E porte une mesure \hat{c} d'énergie finie

$$I_{\hat{c}} = 4\pi^2 \sum \frac{(c_n)^2}{1+|n|^{1-\beta}}$$

C'est par exemple affirmé par la proposition récapitulative 4, dès que $c_{\beta}(E) > 0$.

5.9. Démonstration de la proposition 2 du § 4.

S'il existait une distribution non nulle d'énergie finie portée par E , par multiplication par une exponentielle e^{inx} puis par un scalaire, on obtient une distribution

$$T \sim \sum c_n e^{int}, \text{ portée par } E \text{ telle que } \langle T, 1 \rangle = 2\pi c_0 = 1.$$

La proposition 5 prouverait alors que I^{μ_e} serait fini et la proposition récapitulative 4 que la capacité de E serait non nulle.

6. Les hyperdistributions sur le cercle.

Cette étude a pour but de généraliser la proposition 5 du § 5 aux hyperdistributions.

6.1. Définition. On dit qu'une suite c_n croît moins vite que toute exponentielle si quel que soit ε $|c_n| = O(e^{\varepsilon|n|})$ lorsque $n \rightarrow \pm \infty$.

Nous dirons qu'une telle suite caractérise une hyperdistribution

$$\hat{c} \sim \sum c_n e^{int}.$$

On obtient, par exemple, de telles hyperdistributions si, se donnant un noyau de coefficients $\alpha_n > 0$ tels que

$$\frac{1}{\alpha_n} = O(e^{\varepsilon|n|})$$

(pour tout $\varepsilon > 0$, $n \rightarrow \pm \infty$)

on étudie toutes les suites c_n telles que

$$\sum \alpha_n |c_n|^2 < \infty.$$

De telles hyperdistributions sont dites d'énergie finie par rapport au noyau

$\sum \alpha_n e^{\text{int}}$ et elles forment un espace de Hilbert tel que si $d \sim \sum d_n e^{\text{int}}$ est une hyperdistribution d'énergie finie, $\langle c, d \rangle = 4\pi^2 \sum \alpha_n c_n \bar{d}_n$.

6.2. Représentation de l'hyperdistribution $\sum c_n e^{\text{int}}$ par un couple de fonctions holomorphes.

Le mode de croissance des c_n prouve que les séries $\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$ et $\sum_0^{\infty} c_n z^n$ convergent respectivement pour $|z| > 1$ et $|z| < 1$. Les fonctions holomorphes ainsi obtenues sont notées $-\Phi^-$ et Φ^+ et le couple (Φ^+, Φ^-) représente l'hyperdistribution \hat{c} . Ce couple définit une fonction Φ holomorphe dans \mathbb{C} diminué du cercle où $|z| = 1$.

6.3. Fonctionnelle analytique.

Soit une fonction analytique f sur le cercle T . f est alors analytique dans un voisinage, relativement à \mathbb{C} de tout point du cercle. D'après Borel Lebesgue, f est analytique dans une couronne de rayons ρ et ρ' avec $\rho < 1 < \rho'$. La formule de Laurent montre alors que

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

la convergence étant normale dans une sous couronne contenant T , de rayons r_1 et r_2

$$\rho < r_1 \leq 1 \leq r_2 < \rho'.$$

Désignant par Γ le contour formé par le cercle $C(r_1)$ de rayon r_1 parcouru dans le sens direct et par le cercle $C(r_2)$ de rayon r_2 parcouru dans le sens inverse,

on voit que

$$\int_{\Gamma} \Phi(z) f(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{C(r_1)} \Phi^+ \dots + \frac{1}{i} \int_{C(r_2)} \Phi^- \dots = \frac{1}{i} \int_{C(r_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n c_p z^{n+p-1} dz -$$

$$- \frac{1}{i} \int_{C(r_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{-1} a_n c_p z^{n+p-1} dz = 2\pi \sum a_n c_{-n}$$

Toute hyperdistribution définit donc une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions analytiques sur T . On peut d'ailleurs mettre une topologie sur l'ensemble de ces fonctions de façon que l'ensemble des formes linéaires continues sur cet evt coïncide avec l'ensemble des hyperdistributions. Pour une hyperdistribution $H \sim \sum c_n e^{int}$ et une fonction analytique $\varphi \sim \sum a_n e^{int}$, nous poserons toujours

$$\langle H, \varphi \rangle = 2\pi \sum c_n a_{-n}.$$

6.4. Support.

Un point x_0 du cercle est dit régulier pour le couple $(\Phi^+, \Phi^-) = \Phi$ s'il existe dans C un voisinage $V(x_0)$ de x_0 où Φ^+ et Φ^- coïncident (Φ^+ se prolonge en Φ^- "à travers" $V(x_0)$). Cette définition implique que l'ensemble des points réguliers d'un couple Φ est ouvert. On dit que l'hyperdistribution \hat{c} est nulle au voisinage de chacun des points réguliers de Φ .

Le support $S\hat{c}$ de l'hyperdistribution \hat{c} est par définition l'ensemble des points non réguliers de Φ , autrement dit, le plus petit compact en dehors duquel elle est nulle (notion coïncidant avec la notion habituelle dans le cas où \hat{c} est une distribution sur le cercle).

Lemme 1. Une hyperdistribution \hat{c} de support vide $S\hat{c}$ est forcément nulle.

En effet : La fonction $z \rightarrow \tilde{\Phi}(z)$ est holomorphe dans C . Cette fonction est nulle à l'infini (à cause de la croissance des c_n dans l'expression $-\tilde{\Phi}^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$). D'après le théorème de Liouville cette fonction est nulle, donc tous les c_n sont nuls.

6.5. Régularisation par des noyaux de Poisson.

Le noyau de Poisson d'ordre α ($\alpha > 0$) est par définition la fonction définie sur T :

$$\Delta_\alpha(t) = \sum_n e^{-\alpha|n|} e^{int}.$$

Cette fonction, analytique sur T , se prolonge en une fonction analytique dans un ouvert

de C contenant T .

Si $H \sim \sum c_n e^{int}$ désigne une hyperdistribution sur le cercle, la régularisée de H par Δ_α est par définition

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha * H(t) &= 2\pi \sum c_n e^{-\alpha|n|} e^{int} \\ &= 2\pi \sum_{n \geq 0} c_n e^{\alpha n} e^{int} + 2\pi \sum_{n < 0} c_n e^{-\alpha n} e^{int} \\ &= -2\pi \Phi^-(e^\alpha e^{it}) + 2\pi \Phi^+(e^{-\alpha} e^{it}). \end{aligned}$$

Cette expression prouve que si α décroît vers 0, et que si t est régulier, $H_\alpha(t)$ tend vers 0. Plus généralement, en utilisant le théorème de Borel Lebesgue, on voit que $H_\alpha(t)$ tend vers 0 lorsque α tend vers zéro, uniformément, lorsque t décrit un compact formé de points réguliers de H (c'est à dire un compact disjoint de SH). Donc

Lemme 2. Quelle que soit la fonction φ sommable sur le tore, et dont le support est disjoint de celui de l'hyperdistribution H , alors

$$\langle H_\alpha, \varphi \rangle \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0.$$

6.6. La proposition 5 du § 5 se généralise ainsi aux hyperdistributions.

Proposition 1. Soit $\sum \alpha_n e^{int}$ un noyau tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait $(\alpha_n)^{-1} = O(e^{\varepsilon|n|})$.

Soit $H \sim \sum c_n e^{int}$ une distribution d'énergie finie par rapport à ce noyau, portée par le fermé E du cercle et telle que

$$\langle H, 1 \rangle = 2\pi c_0 = 1.$$

Alors, si μ_e désigne la mesure d'équilibre du fermé E

$$I^H \gg I^{\mu_e}.$$

Preuve. Elle est calquée sur celle de la proposition P 5. On considère encore E_ρ , avec $\rho > 0$ et l'on part de :

$$\langle H_\alpha, \mu_{e\rho} \rangle_\varepsilon = \langle H_\alpha, U^{\mu_e \rho} \rangle.$$

Mais ici, supposant $0 < \alpha < \rho$, on n'a plus la relation

$$S(H_\alpha) \subset E_\rho$$

mais si l'on écrit

$$\langle H_\alpha, U^{\mu_{ep}} \rangle = \langle H_\alpha, U^{\mu_{ep}}|_{E_\rho} \rangle + \langle H_\alpha, U^{\mu_{ep}}|_{C E_\rho} \rangle$$

en faisant intervenir les restrictions de $U^{\mu_{ep}}$ à E_ρ et à son complémentaire,

le 1er terme du 2e membre vaut $I^{\mu_{ep}}$ et le second, d'après le lemme précédent tend vers zéro lorsque $\alpha \downarrow 0$.

Comme $\langle H_\alpha, \mu_{ep} \rangle_\varepsilon \rightarrow \langle H, \mu_{ep} \rangle_\varepsilon$ quand $\alpha \downarrow 0$ (voir expressions à l'aide des coefficients de Fourier). On a $\langle H, \mu_{ep} \rangle = I^{\mu_{ep}}$. Le passage à la limite $\rho \downarrow 0$ s'effectue comme précédemment.

Espaces de Suites§ 7. Analyse et synthèse spectrale dans \mathcal{E} .7.1. Analyse. Etant donnée une suite c de \mathcal{E} , quand $V(c)$ est-il dense dans \mathcal{E} ?

Dire que les translatées de la suite $c = (c_n)$ ne forment pas un système total dans \mathcal{E} , c'est dire qu'il existe une forme linéaire continue sur \mathcal{E} , et non nulle (associée à une suite γ_n n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls) qui s'annule sur toutes les translatées $c(p)$ de c

$$\forall p \quad \sum_n \gamma_n c_{n-p} = 0.$$

Associons alors à la suite c_n la série formelle "généralisée" $\sum c_n z^{-n}$ (comportant des puissances négatives de l'indéterminée z) ; et de même associons à la suite finie γ_n le polynôme généralisé $\sum \gamma_n z^n$. La relation ci-dessus s'écrit

$$\left(\sum \gamma_n z^n \right) \left(\sum c_n z^{-n} \right) = 0.$$

Multipliant $\sum \gamma_n z^n$ par une certaine puissance de z on obtient un polynôme $P(z)$ tel que :

$$P(z) \sum_0^{\infty} c_n z^{-n} = \text{polynôme } Q(z)$$

$$P(z) \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^{-n} = \text{polynôme } -Q(z).$$

D'où le :

Théorème 1. L'ensemble des translatées d'une suite c quelconque est non total dans \mathcal{E} si et seulement si $\sum_0^{\infty} c_n z^{-n}$ et $-\sum_{-1}^{-\infty} c_n z^{-n}$ sont deux séries de puissances représentant la même fraction rationnelle $R(z) = \frac{P(z)}{R(z)}$.

7.2. Analyse et synthèse spectrales.

Prenons une suite c de \mathcal{E} avec $V(c)$ non dense dans \mathcal{E} . Le théorème 1 lui associe une fraction rationnelle $R(z)$.

Soit $\gamma \in \mathcal{E}'$ et soit $S(z)$ le polynôme associé à γ . Si $\gamma \perp V(c)$, alors $S R(z)$ est un polynôme, donc S a pour zéros tous les pôles de R . Plus précisément à tout pôle a d'ordre ν de $R(z)$, il correspond pour S un zéro a , d'ordre supérieur

v. D'où v relations :

$$\text{d'où} \quad \sum \gamma_n a^n = 0 \dots \sum_n n(n-1) \dots (n-v+1) a^{n-v} \gamma_n = 0$$

$$\text{ou bien} \quad \sum \gamma_n a^n = 0 \dots = \sum n \gamma_n a^{n-1} = 0$$

$$\text{ou bien} \quad \gamma \perp \{a^n\}, \dots \quad \gamma \perp \{n^{v-1} a^n\}.$$

On voit réciproquement que si γ est orthogonale à toutes les suites du type $a^n, \dots, n^{v-1} a^n$ associées à chaque pôle d'ordre v de R, alors SR est un polynôme

et que $\gamma \perp V(c)$. D'où le théorème :

Théorème 2. Soit c une suite de \mathcal{C} telle que $V(c)$ soit non dense dans \mathcal{C} .

Soit R la fraction rationnelle associée (voir théorème 1). A tout pôle a d'ordre v de R il correspond les exponentielles polynômes $(a^n) \dots (n^{v-1} a^n)$ de $\overline{V(c)}$.

Le spectre de c (voir exposé 1) est donc associé de manière évidente à l'ensemble des pôles de R; de plus $V(c)$ est engendré par ces exponentielles polynômes (la synthèse spectrale est possible).

Remarque. On peut généraliser ainsi les notions et les problèmes intervenant dans ce paragraphe.

On se donne un groupe topologique (G) et un certain $\text{evt}(\mathcal{E})$ de fonctions continues (à valeurs complexes) définies sur G. Une fonction f de (\mathcal{E}) est dite moyenne périodique si l'adhérence de l'ev engendré par les translatées de f est distincte de (\mathcal{E}) . Pour une telle fonction se pose alors de façon similaire les problèmes d'analyse et de synthèse spectrales.

Exemple 1. $G = Z^p$ (p = entier ≥ 1)

$\mathcal{E} = \text{e.v.t.}$ de toutes les polysuites c_n où n est un multiindice $(n_1 \dots n_p)$, avec la topologie des semi normes $c_n \rightarrow |c_n|$.

Voir Lefranc, GRAS t. 246 - 1948 - pp. 1949-1951.

Exemple 2. $G = R$

$\mathcal{E} = \text{e.v.t.}$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur R avec la topologie de la convergence compacte.

Voir par exemple :

- Lectures on Mean Periodic Functions by J.P. Kahane (Tata Institute of Bombay)

- et l'article original de Delsarte (Journal des Math. Pures et Appl. 14 (1935) pp. 403-453).

Exemple 3. $G = \mathbb{R}^2$.

Le problème de la synthèse est ouvert.

§ 8. Analyse et synthèse spectrales dans ℓ^∞ .

ℓ^∞ est muni de la topologie affaiblie (d'e.v.t. dual de ℓ^1). Un filtre (c_i) converge donc dans ℓ^∞ si quelle que soit la suite d de ℓ^1 , $\langle c_i, d \rangle$ converge dans \mathbb{C} .

Pour toute suite c de ℓ^∞ on pose

$$\hat{c}' \sim \sum e^{int} c_n : \text{on dit que } c \text{ est une pseudo-mesure.}$$

8.1. Analyse.

Théorème 1. Pour toute suite c de ℓ^∞ faible, le spectre $\text{Sp } c$ de c coïncide avec le support $S(\hat{c})$ de la distribution \hat{c} .

Preuve : Dire que $(e^{ina}) \notin \overline{V(c)}$ c'est dire qu'il existe γ dans ℓ^1 orthogonale aux $c(p)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et non perpendiculaire à (e^{ina}) , c'est à dire : il existe γ dans ℓ^1 avec pour tout p $\sum \gamma_n c_{p-n}$ et $\sum \gamma_n e^{ina} \neq 0$.

$$\text{Soit } \hat{\gamma} \hat{c} = 0 \text{ avec } \gamma \in \ell^1 \text{ et } \hat{\gamma}(a) \neq 0.$$

Or on sait (Wiener) que $\mathcal{F}(\ell^1)$ est une algèbre pour la multiplication des fonctions (c'est à dire la convolution des suites de leurs coefficients de Fourier) et que les éléments de cette algèbre qui ne s'annulent pas sont inversibles. Dans ces conditions

1°) Si $a \notin \text{Sp } c$, il existe $\hat{\gamma}$ dans $\mathcal{F}(\ell^1)$ avec $\hat{\gamma} \hat{c} = 0$ et $\hat{\gamma}(a) \neq 0$.

$\hat{\gamma}$ étant continue, soit $V(a)$ un voisinage de a où $\hat{\gamma}$ ne s'annule pas. Pour voir si $a \notin S(\hat{c})$ il suffit de montrer que pour toute fonction Δ , qui soit C^∞ et à support dans

$$V(a), \text{ on a } \Delta \hat{c} = 0.$$

Il suffit d'écrire le 1er membre

$$\left(\frac{\Delta}{\hat{\gamma}}\right)\hat{c} = \left(\Delta \cdot \frac{1}{\hat{\gamma}}\right)(\hat{\gamma}\hat{c}).$$

Une précaution supplémentaire est pourtant nécessaire pour appliquer le théorème de Wiener.

Dans la parenthèse $\left(\Delta \cdot \frac{1}{\hat{\gamma}}\right)$, il faut remplacer $\hat{\gamma}$ par " $\hat{\gamma}$ modifiée" qui soit dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$, ne s'annule pas et soit identique à $\hat{\gamma}$ dans $V(a)$; on a bien alors

$$\Delta \cdot \frac{1}{\hat{\gamma}} = \Delta \cdot \frac{1}{\hat{\gamma} \text{ modifiée}}.$$

2^o) Si $a \notin S(\hat{c})$, alors il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que toute fonction $\varphi \in C^\infty$, à support dans $V(a)$ soit telle que $\varphi \hat{c} = 0$.

Toutes ces fonctions φ sont dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ et il en existe bien une qui ne s'annule pas en a .

Remarque. Sp $c = \emptyset$ équivaut à $S(\hat{c}) = \emptyset$. Ceci équivaut encore à $\hat{c} = 0$, donc à $c = 0$. Donc le spectre d'une suite non nulle de \mathcal{L}^∞ n'est jamais vide et tout sous e.v. fermé de \mathcal{L}^∞ faible, qui soit invariant par translation contient au moins une exponentielle polynôme.

8.2. Problème de la synthèse dans \mathcal{L}^∞ faible.

Il s'énonce ainsi :

Pour toute suite c de \mathcal{L}^∞ faible, $\overline{V(c)}$ est-il engendré topologiquement par les exponentielles qu'il contient? ou bien

toute suite γ de \mathcal{L}^1 , orthogonale à (e^{ina}) chaque fois que $a \in \text{Sp } c = S(\hat{c})$ est-elle orthogonale aux translatées de c , c'est à dire telle que $\hat{\gamma}\hat{c} = 0$? ou bien

toute fonction $\hat{\gamma}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ s'annulant sur le support d'une pseudo-mesure quelconque \hat{c} , est-elle toujours orthogonale à cette pseudo-mesure?

Si \hat{c} est une mesure, la réponse est affirmative. Mais elle est négative dans le cas général.

Théorème (Malliavin). La synthèse spectrale n'est pas toujours possible dans \mathcal{L}^∞ faible.

Preuve. Existe-t-il une fonction f de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ et une pseudo mesure T telles que

$$\left. \begin{aligned} S(T) &< f^{-1}(0) \\ \langle T, f \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} ?$$

L'idée est de rechercher simultanément f et T en prenant T sous une forme qui dépende de f . Plus précisément, l'espace des pseudo mesures étant normé (la norme d'une pseudo mesure étant le sup des modules de ses coefficients de Fourier), on cherche une f réelle de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ et la pseudo mesure sous la forme notée

$$(1) \quad \delta^{(p)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} (iu)^p e^{iuf} du \quad (p \text{ entier } \geq 1)$$

qui, comme intégrale vectorielle à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)$ converge si

$$II \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^p \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)} du < \infty.$$

La notation $\delta^{(p)} f$ a été employée ici, car si $\delta^{(p)}$ désigne la dérivée p^e de la distribution de Dirac, l'intégrale (1) représente formellement $\delta^{(p)} f$.

$\delta^{(p)} f$ vérifie le lemme suivant :

Lemme 1. f désignant une fonction réelle de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$, posant (1) et supposant que f satisfait (II), alors

$$\langle f^p, \delta^{(p)} f \rangle = (-1)^p p! 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du.$$

$$S(\delta^{(p)} f) < f^{-1}(0)$$

$$\text{avec} \quad e^{iuf(t)} \pi \sum p_n(u) e^{int} \quad \text{et } p \text{ entier } \geq 1.$$

Preuve du lemme. Toute $g \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)$ et l'intégrale forte $\delta^{(p)} f$ étant a fortiori faible, on a

$$\begin{aligned} \langle g, \delta^{(p)} f \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle g(o), (iu)^p e^{iuf(o)} \rangle du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (iu)^p du \int_0^{2\pi} g(x) e^{iuf(x)} dx. \end{aligned}$$

D'où, grâce au théorème de Fubini et en prenant

$$g = hf^q \quad \text{avec} \quad q \geq 0 \quad \text{et} \quad h \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$$

$$\langle hf^q, \delta^{(p)}_f \rangle = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} h(x) f^{q-1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} if(x) e^{iuf(x)} (iu)^p du$$

d'où en intégrant par parties

$$\langle hf^q, \delta^{(p)}_f \rangle = -p \int h(x) f^{(q-1)}(x) dx \int e^{iuf(x)} (iu)^{p-1} du$$

$$\langle hf^q, \delta^{(p)}_f \rangle = -p \langle hf^{q-1}, \delta^{(p-1)}_f \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle f^p, \delta^{(p)}_f \rangle &= (-1)^p p! \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{iuf(x)} dx du \\ &= (-1)^p p! 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du. \end{aligned}$$

De même $\langle hf^q, \delta^p_f \rangle = 0$ si $q > p$.

Comme toute fonction à support disjoint de $f^{-1}(0)$ peut s'écrire d'après le théorème

de Wiener hf^q avec $h \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$

c'est que $\underline{S(\delta^{(p)}_f)} \subset f^{-1}(0)$.

Grâce ce lemme, le théorème de Malliavin résulte de la proposition suivante :

Proposition 1. Il existe une fonction réelle f de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ telle qu'en posant

$$e^{iuf(t)} \sim \sum_n p_n(u) e^{int} \quad (u \text{ réel})$$

on ait les relations :

I $\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du \neq 0$

II $\int_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)} |u|^p \|e^{iuf}\| du < \infty \quad (p \text{ entier } \geq 1).$

La condition II n'étant pas très maniable nous allons la remplacer par la condition

II'' plus forte, mais plus maniable.

Transformons d'abord II en écrivant

$$\|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)} = \sup_n |p_n(u)| \leq (\sum_n p_n(u)^4)^{1/4} = \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^4)}$$

De plus

$$|e^{iuf(t)}| \equiv 1$$

$$p_n(-u) = \overline{p_n(u)}.$$

On peut donc remplacer II par la condition suivante plus forte

$$\text{II}' \quad \int_1^\infty |u|^p \left(\sum |p_n(u)|^4 \right)^{1/4} du < \infty \quad (p \text{ entier } \geq 1).$$

Relation que l'on peut encore simplifier en utilisant l'inégalité de Hölder avec

$$p = p_1 + p_2$$

$$\int_1^\infty |u|^{p_1} |u|^{p_2} \left(\sum |p_n(u)|^4 \right)^{1/4} < \left(\int_1^\infty u^{4/3 p_1} du \right)^{3/4} \left(\int_1^\infty u^{4p_2} \sum |p_n(u)|^4 du \right)^{1/4}$$

Choisissant p_1 tel que la 1re intégrale du 2me membre converge on voit qu'il faut

(avec $\varepsilon > 0$)

$$4p_2 > 4p + 3 + \varepsilon \geq 8.$$

La proposition suivante, entraînant la proposition, démontre alors le théorème de Malliavin :

Proposition 2. Il existe une f réelle dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ telle qu'en posant

$$e^{iuf(t)} \sim \sum_n p_n(u) e^{int}$$

on ait les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du \neq 0$$

$$\text{II}'' \quad \int_1^\infty u^p \sum (p_n(u))^4 du < \infty \quad (p \text{ entier } \geq 8).$$

Cette proposition résulte du paragraphe suivant.

§ 9. Séries de Fourier aléatoires.

9.1. Définitions relatives au calcul des probabilités.

\mathcal{F} désigne un ensemble (appelé champ de probabilité)

ζ = tribu sur \mathcal{F} (un événement est un élément de la tribu)

μ = mesure positive de masse 1 sur (\mathcal{F}, ζ) .

La probabilité d'un événement est sa mesure.

Un événement est dit presque sûr (p. s.) si sa probabilité est 1.

Une variable aléatoire (VA) h réelle sur $(\mathcal{F}, \zeta, \mu)$ est une application mesurable

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto h(\omega) \end{aligned}$$

L'espérance mathématique $\xi(h)$ de la VA h est, si elle existe, la valeur de l'intégrale

$$\xi(h) = \int_{\mathcal{F}} h(\omega) d\omega.$$

La fonction caractéristique de la VA h est la fonction $R \rightarrow C$
 $u \rightarrow \xi(e^{iuh})$.

Exemple utilisé ci-après :

k est un entier fixé quelconque

$$\mathcal{F}_k = [0, 1]$$

\mathcal{C}_k = tribu borélienne sur \mathcal{F}_k

μ_k = mesure de Lebesgue sur \mathcal{F}_k

La relation

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

définit par inversion une fonction $\mathcal{F}_k \rightarrow R$

$$t \rightarrow \xi(t)$$

L'application correspondante est appelée "loi normale sur \mathcal{F}_k ". Nous la noterons

Z_k . Un calcul donne

$$\xi(e^{iuZ_k}) = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Indépendance : n variables aléatoires Ξ_1, \dots, Ξ_n définies sur le même espace de probabilité (\mathcal{F}, ζ, p) sont dites indépendantes si par l'application notée

$$\prod_{k=1}^n \Xi_k : \mathcal{F} \rightarrow \prod_{k=1}^n R$$

$$\omega \rightarrow \Xi_k(\omega).$$

L'image de la mesure p sur \mathcal{F} est égale au produit des images de p par chacune des applications Ξ_k .

Les VA $(\Xi_i)_{i \in I}$ en nombre quelconque, définies sur le même espace (\mathcal{F}, ζ, p) forment une famille de VA indépendantes si toute sous famille finie est formée de VA indépendantes.

Par exemple, dans l'hypercube $\mathcal{F} = \prod_1^{\infty} \mathcal{F}_k$ muni de la tribu borélienne et de la mesure μ produit des mesures de Lebesgue μ_k , si π_k désigne la projection canonique

de \mathcal{F}^1 sur \mathcal{F}_k , alors les VA

$$\Xi_k = Z_k \circ \Pi_k$$

sont indépendantes.

9.2. Définition d'une série de Fourier aléatoire. C'est une série de Fourier

$$\sum c_n e^{int}$$

où les c_n sont des variables aléatoires, à valeurs réelles ou complexes, définies sur un même espace de probabilité.

Ici, avec les notations ci-dessus, nous considérons les VA indépendantes réelles et normales Ξ_n définies sur l'hypercube \mathcal{F}^1 et l'on considère la série de Fourier aléatoire, réelle

$$(1) \quad f(x) \sim \sum_1^{\infty} r_n (\Xi_{2n-1} \cos nx + \Xi_{2n} \sin nx)$$

où $(r_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle, positive, sommable.

Les énoncés des lemmes ci-dessous se rapporteront tous à cette série de Fourier aléatoire.

9.3. Propriétés de la série de Fourier aléatoire du type (1).

Lemme 1. Pour la série (1), on a p. s.

$$\sum_1^{\infty} r_n (\Xi_{2n}) < \infty \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty} r_n |\Xi_{2n-1}| < \infty.$$

Prouvons par exemple la 1re inégalité.

Le théorème de Lebesgue nous montre puisque $\sum r_n < \infty$ et $\xi |\Xi_{2n}|$ uniformément borné en n que

$$\xi \sum r_n |\Xi_{2n}| = \sum r_n \xi |\Xi_{2n}| \text{ existe.}$$

C'est donc que

$$\text{p. s. } \sum r_n |\Xi_{2n}| < \infty.$$

Lemme 2. Pour la série (1), posons

$$e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u) e^{int} \quad (\text{avec } u \text{ réel}).$$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du \neq 0$ avec une probabilité positive.

On voit d'abord que

$$\begin{aligned}
 (e^{iuf(t)}) &= \left(e^{\sum_{n=1}^{\infty} iu(r_n \Xi_{2n-1} \cos nt + r_n \Xi_{2n} \sin nt)} \right) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{L} e^{iu r_n \Xi_{2n-1} \cos nt} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{L} (e^{iu r_n \Xi_{2n} \sin nt}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-r_n^2 u^2 \cos^2 nt}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-r_n^2 u^2 \sin^2 nt}{2}} \\
 &= e^{-Au^2}
 \end{aligned}$$

avec $A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$

d'où, grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
 E \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(p_0(u)) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^2 \mathcal{L}(e^{iuf(t)}) dt \\
 &= + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Au^2} du < \infty.
 \end{aligned}$$

Comme l'intégrale sur \mathcal{D} de $\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(u) du$ est finie non nulle c'est que cette quantité est non nulle avec une probabilité positive (strictement).

Espaces de suiteLemme 3. Relativement à la série (1) posant toujours

$$e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u) e^{int} \quad (u \text{ réel})$$

on a

$$\mathcal{L}\left(\sum |p_n(u)|^2 e^{int}\right) = e^{-2u^2} \sum r_n^2 \sin^2 \frac{kt}{2}.$$

En effet $\sum (p_n(u))^2 e^{int}$ est la série de Fourier de $\frac{1}{2\pi} e^{iuf(t)} * e^{-iuf(t)}$

d'où
$$\mathcal{L}\left(\sum |p_n(u)|^2 e^{int}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dw \sum e^{iu(f(w)-f(t-w))}$$

or
$$\begin{aligned} e^{iu(f(w)-f(t-w))} &= \prod_1^{\infty} e^{iu \left[\frac{1}{2n-1} r_n (\cos nw - \cos n(t-w)) \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n} r_n (\sin nw - \sin n(t-w)) \right]} \\ &= \prod_1^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} r_n^2 |e^{inw} - e^{in(t-w)}|^2} \\ &= \prod_1^{\infty} e^{-2u^2 r_n^2 \sin^2 \frac{nt}{2}} \end{aligned}$$

Lemme 4. Avec les mêmes notations, on a :

$$\mathcal{L} \sum_{-\infty}^{+\infty} |p_n(u)|^4 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} e^{-\varphi(x,t)u^2}$$

avec

$$\varphi(x,t) = 8 \sum_1^{\infty} r_n^2 \sin^2 \frac{nx}{2} \sin^2 \frac{nt}{2}.$$

Preuve. On remarque $\sum p_n^2(u) e^{int}$ est la série de Fourier de $\frac{1}{2\pi} e^{iuf} * e^{iuf}$ et que la fonction e^{iuf} est de carré sommable, d'où

$$\begin{aligned} \sum |p_n(u)|^4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu(f(y)-f(y-x))} dy \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} e^{iu(f(y)-f(y-x)-f(z)+f(z-x))} dx dy dz \end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{T}} e^{iu(f(y)-f(y-x)-f(z)+f(z-x))} = \prod_1^{\infty} \int_{\mathbb{T}} e^{in}$

avec $\int_{\mathbb{T}} e^{iu(\sum_{2n-1} r_n (\cos ny - \cos n(y-x) - \cos nz + \cos n(z-x)))}$
 $\times \int_{\mathbb{T}} e^{iu(\sum_{2n} r_n (\sin ny \dots))}$
 $= e^{-\frac{1}{2} \sum r_n^2 \rho_n^2 u^2}$

avec $\rho^n = |e^{iny} - e^{in(y-x)} - e^{inz} + e^{in(z-x)}|^2$
 $= |e^{iny} - e^{inz}|^2 |1 - e^{inx}|^2$
 $= 16 \sin^2 \frac{nx}{2} \sin^2 \frac{n(y-z)}{2}$

on en déduit que

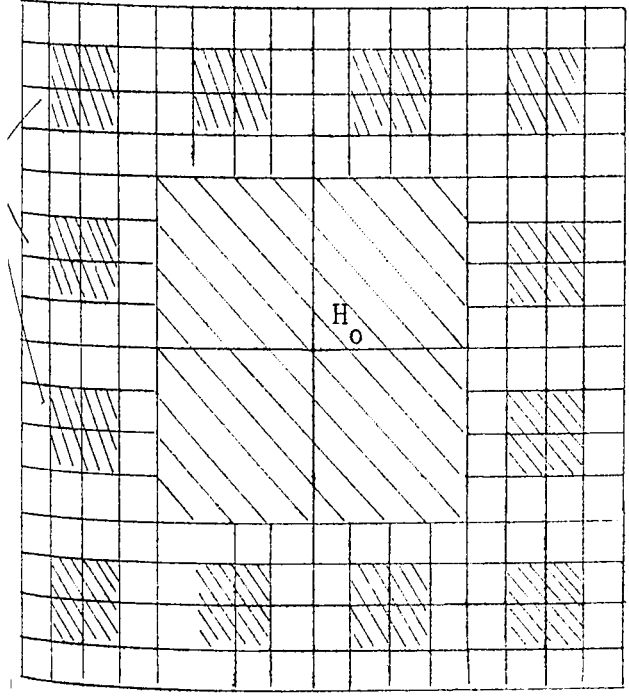
$$\int_{\mathbb{T}} (e^{iu(f(y)-f(y-x)-f(z)+f(z-x))}) = e^{-\varphi(x,y-z)u^2}$$

puis $\int_{\mathbb{T}} \sum |p_n(u)|^4 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} e^{-\varphi(x,y-z)u^2} dx dy dz$
 $= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} e^{-\varphi(x,t)} dx dt .$

9.4. Lemme 5. Il existe une suite r_n de nombres positifs tels que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x,t)^{-\frac{\rho+1}{2}} dx dt < \infty$$

avec $\varphi(x,t) = 8 \sum r_n^2 \sin^2 \frac{nx}{2} \sin^2 \frac{nt}{2}$ et p entier ≥ 8 .



Dans le carré $0 \leq x \leq 2\pi$
 $0 \leq t \leq 2\pi$
 considérons pour $j \in \mathbb{Z}^+$ l'ensemble G_j des points (x,t) satisfaisant aux relations
 $|\sin \frac{4jx}{2}| > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |\sin \frac{4jt}{2}| > \frac{\sqrt{2}}{2}$
 et désignons par H_j l'ensemble des points de G_j n'appartenant à aucun G_i pour $i < j$.
 On vérifie (voir figure) que H_j est la réunion

de 12^j carrés dont chacun a pour surface $\pi 4^{-2j}$ et que la réunion des H_j recouvre le carré $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ presque partout. Comme sur H_j , on a :

$$\varphi(x, t) > 8 r_{4j}^2 \sin^2 \frac{4^j x}{2} \sin^2 \frac{4^j t}{2} > 2 r_{4j}^2$$

et que la mesure de H_j est $\pi 3^j 4^{-j}$ la condition de l'énoncé du lemme est satisfaite

dès que $\sum_j (3/4)^j \frac{1}{(r_{4j})^{p+1}} < \infty$ ce qui est possible avec une suite a_n sommable telle que la sous suite r_{4j} ne tende pas trop rapidement vers zéro.

9.5. Démonstration de la proposition 2 du paragraphe 8.

Nous cherchons la fonction f de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$ sous la forme (1), la suite r_n satisfaisant à la condition du lemme 5.

Le lemme 1 nous apprend que p.s. $f \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1)$. Le lemme 2 affirme que la condition I est réalisée avec une probabilité positive.

Pour montrer que la condition II est réalisée p.s. il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty |u|^p \mathcal{E} \left(\sum |p_n(u)|^4 \right) < \infty$$

utilisant le lemme 4 il faut voir si

$$\int_0^\infty |u|^p e^{-\varphi(x,t)u^2} du < \infty.$$

Le changement de variable

$$\varphi(x,t)u^2 = v$$

fait apparaître la fonction Γ et la condition

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,t)^{-\frac{p+1}{2}} dx dt < \infty$$

qui est celle de l'hypothèse du lemme 5.

Ce mode de démonstration nous donne les deux corollaires suivants :

9.6. Impossibilité de la synthèse dans \mathcal{L}^∞ faible pour les distributions de

$\mathcal{L}^\gamma (\gamma > 2)$.

(si $\gamma = 2$, on a vu que la synthèse est possible).

Pour démontrer cette impossibilité, on reprend la démonstration ci-dessus du théorème de Malliavin. Il suffit de prouver alors que $\delta^p f$ peut être un élément de (\mathcal{F}^δ) c'est-à-dire qu'il existe p entier ≥ 1 , tel que

$$\int_0^\infty |u|^p \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\delta)} du < \infty.$$

Or
$$\sum_n |p_n(u)|^\delta \leq (\sup |p_n(u)|)^{\delta-2} \sum_n |p_n(u)|^2.$$

Comme la suite $(p_n(u))_n$ est dans \mathcal{L}^∞ et \mathcal{L}^2 on a

$$\|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\delta)} \leq \begin{cases} \text{Constante} \\ \text{ou } \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)}^{\delta-2/\delta} \end{cases}$$

Utilisant ces majorations sur les intervalles $0 \leq u \leq 1$, $u \geq 1$, il suffit de montrer que

$$\int_1^\infty u^p \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)}^{\delta-2/\delta} du < \infty.$$

Or p_1 et p_2 étant 2 réels de somme p , l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\int_1^\infty u^{p_1+p_2} \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)}^{\delta-2/\delta} \leq \left(\int_1^\infty u^{\frac{p_2\delta}{2}} du \right)^{2/\delta} \left(\int_1^\infty u^{\frac{p_2\delta}{\delta-2}} \|e^{iuf}\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)}^{\delta-2/\delta} du \right)^{\delta-2/\delta}.$$

Il suffit de prendre $\frac{p_2\delta}{2} < -1 - \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$) pour rendre convergente la 1re intégrale du 2me membre d'où

$$\frac{p_2\delta}{\delta-2} > \frac{\delta}{\delta-2} \quad (p + 1 + \varepsilon).$$

La théorie du § 8 nous prouve alors qu'il existe une f dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}^\infty)$ de façon que la 2me intégrale du 2me membre converge.

9.7. Condition suffisante portant sur un noyau $\Phi \sim \sum \alpha_n e^{int}$ pour qu'il existe une distribution d'énergie finie (par rapport à ce noyau) ne satisfaisant pas à la synthèse harmonique dans \mathcal{L}^∞ faible.

Cette condition est qu'il existe une suite sommable positive (r_n) telle que

$$\int_0^2 \Phi(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 \sin^2 \frac{nt}{2} \right)^{-\frac{5}{2}} dt < \infty.$$

En effet, avec la méthode qui nous a servi à démontrer le théorème de Malliavin, il suffit de montrer qu'il existe une f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{\infty})$ telle que $\delta'f$ soit une distribution d'énergie finie d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \left(\sum \alpha_n |p_n(u)|^2 \right)^{1/2} du < \infty$$

avec toujours $e^{iuf(t)} \sim \sum_n p_n(u) e^{int}$.

L'inégalité de Schwartz donne avec $p_1 + p_2 = 1$ et p_1 et p_2 réels

$$\int u^{2p_1} u^{2p_2} \left(\sum \alpha_n |p_n(u)|^2 \right)^{1/2} \ll \left(\int u^{2p_1} \right)^{1/2} \left(\int u^{2p_2} du \sum \alpha_n |p_n(u)|^2 \right)^{1/2}$$

il faut $2p_1 < -1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

d'où $2p_2 = 2 - 2p_1 > 3 + \varepsilon \gg 4$

soit $\int_0^{\infty} u^4 \sum_n \alpha_n |p_n(u)|^2 du < \infty$ p. s.

ce qui est impliqué par

$$\int_0^{\infty} u^4 \mathcal{L} \left(\sum_n |p_n(u)|^2 \alpha_n \right) du < \infty.$$

Le lemme 3 du § 8 nous prouve qu'en prenant (avec notations du § 8) f sous la forme (1),

on a

$$\mathcal{L} \left(\sum_n |p_n(u)|^2 e^{int} \right) = e^{-2u^2} \sum_n r_n^2 \sin^2 \frac{nt}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \mathcal{L} \left(\sum_n |p_n(u)|^2 e^{int} \right) &= \mathcal{L} \sum_{k,n} \int_0^{2\pi} \alpha_k |p_n(u)|^2 e^{i(n+k)t} dt \\ &= 2\pi \mathcal{L} \sum_k \alpha_k |p_k(u)|^2 \end{aligned}$$

il suffit donc que

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t) \int_0^{\infty} u^4 e^{-2u^2} \sum_n r_n^2 \sin^2 \frac{nt}{2} du < \infty$$

donc, en effectuant l'intégration par rapport à u , que

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t) \left(\sum r_n^2 \sin^2 \frac{nt}{2} \right)^{-5/2} dt < \infty.$$

10. Résultats complémentaires.

Le problème de synthèse considéré ci-après est différent des problèmes envisagés jusqu'ici.

Les données sont

- un noyau $\Phi \sim \sum \alpha_n e^{int}$ dont les coefficients de Fourier α_n sont > 0 ,
et tels que toute suite c_n telle que

$$I^c = \|c_n\|^2 = \sum \alpha_n |c_n|^2 < \infty$$

soit à croissance lente (resp. plus lente que toute exponentielle) c'est à dire la suite des coefficients de Fourier de la distribution (resp. hyper —)

$$c \sim \sum c_n e^{int}$$

I^c est dite l'énergie de c et ces distributions (resp. hyper —) forment l'espace de Hilbert H des distributions (resp. hyper —) d'énergie finie par rapport à Φ .

- E est un fermé du tore tel que $\text{Cap}_{\Phi} E > 0$

- On appelle \mathcal{H}_E la partie de \mathcal{H} formée par les distributions à support dans E :
sous ev faiblement fermé.

Dans ces conditions, on dit :

La synthèse est possible pour le noyau Φ si l'ensemble des mesures ponctuelles portées par E est total dans \mathcal{H}_E (dans un evt localement convexe, la totalité forte est équivalente à la totalité pour la topologie faible).

Nous établirons le théorème suivant.

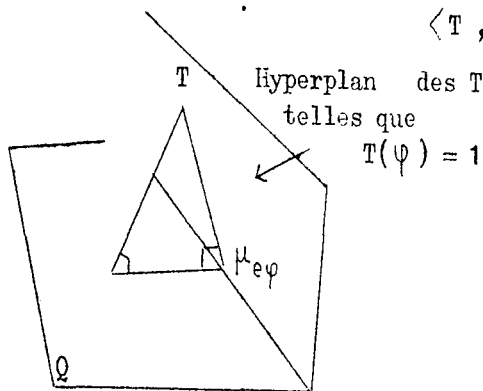
La synthèse est possible s'il existe une classe ζ de fonctions C^∞ , positives définies sur T , telle que

- ① Pour toute φ de ζ , il existe une mesure $\mu_{e\varphi}$ de \mathcal{H}_E qui minimise I^T ,
parmi toutes les T de \mathcal{H}_E telles que

$$\langle T, \varphi \rangle = 1.$$

② Pour toute $T \neq 0$ de \mathcal{H}_E , il existe une fonction φ de ζ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle \neq 0$$



Preuve. Dans \mathcal{H}_E , soit Q l'adhérence du sous e.v. engendré par les mesures.

Si Q différait de \mathcal{H}_E , il existerait

T de \mathcal{H}_E orthogonale à Q .

D'après l'hypothèse 2 du théorème il existe φ

dans ζ telle que, après multiplication de T

par une constante on ait : $\langle T, \varphi \rangle = 1$.

D'après l'hypothèse 1, il existerait une mesure $\mu_{e\varphi}$ dans l'intersection de Q et de l'hyperplan P des éléments T de \mathcal{H}_E telles que $\langle T, \varphi \rangle = 1$ et l'on aurait $\mu_{e\varphi}$ orthogonale à P .

D'où l'impossibilité puisqu'alors le triangle $OT \mu_{e\varphi}$ aurait deux angles droits.

Le théorème doit être complété par la preuve de l'existence de classes ζ satisfaisant aux hypothèses (1) et (2).

Remarquons préalablement que l'on peut prendre ζ réduite à la fonction identique à 1 sur T dans le cas particulier où l'espace \mathcal{H} est stable par la multiplication par une exponentielle ; c'est à dire lorsque pour toute suite c_n les conditions suivantes sont équivalentes

$$\sum \alpha_n |c_n|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum \alpha_n |c_{n+1}|^2 < \infty$$

(en effet, si dans le raisonnement précédent la distribution T orthogonale à Q est telle que son n^e coefficient de Fourier T_n est non nul alors

$$\left\langle \frac{1}{T_n} T e^{-int}, 1 \right\rangle = 1$$

et la mesure $\mu_{e\varphi}$ intervenant ci-dessus est la mesure d'équilibre).

Proposition 1. La condition (1) est impliquée par (1') :

(1') Pour toute φ de ζ , et pour toute réunion finie F d'intervalles (de longueurs > 0), le support de la mesure d'équilibre (de F par rapport à φ) charge tout F .

Preuve. Nous procédons comme au § 5. Considérons les nombres α et ρ tels que $0 < \alpha < \rho$, μ_ρ^φ désigne la mesure d'équilibre du fermé E_ρ , T étant une distributions d'énergie finie portée par E telle que $\langle T, \varphi \rangle = 1$. T_α désigne sa régularisée par Δ_α (cf § 3). Nous avons

$$\langle T_\alpha, \mu_\rho^\varphi \rangle_{\mathcal{E}} = 2\pi \sum_n \alpha_n T_{\alpha_n} (\overline{\mu_\rho^\varphi})_n = 2\pi \sum_n T_{\alpha_n} \alpha_{-n} (\mu_\rho^\varphi)_{-n} = \int U \mu_\rho^\varphi T_\alpha \text{ (Parseval).}$$

Or, nous avons vu (cf. § 5) que sur $S(\mu_\rho^\varphi)$, donc sur E_ρ d'après 1', on a

$$U \mu_\rho^\varphi = I \mu_\rho^\varphi \varphi$$

p.p. par rapport à toute mesure d'énergie finie donc p.p. par rapport à la mesure de Lebesgue, d'où

$$\langle T_\alpha, \mu_\rho^\varphi \rangle_{\mathcal{E}} = I \mu_\rho^\varphi \int T_\alpha \varphi.$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz au 1er membre, on trouve

$$I \mu_\rho^\varphi \int T_\alpha \varphi \leq I^{T_\alpha}.$$

Donc, si α tend vers zéro

$$I \mu_\rho^\varphi \leq I^T.$$

Comme précédemment, on voit, lorsque ρ tend vers zéro :

$$I \mu^\varphi \leq I^T.$$

Proposition 2. La condition (1') est impliquée par (1'') :

- toute φ de ζ est concave sur un intervalle I contenant le fermé E étudié

1'' - cet intervalle I a une longueur $\ell < \pi$

aux extrémités de I , et pour toute φ de ζ , on a $\frac{\varphi'}{\varphi} \leq \frac{\Phi'(\ell)}{\Phi(\ell)}$ (où Φ est le noyau).

Nous utiliserons le

Lemme. Le noyau Φ étant strictement convexe sur $]0, 2\pi[$, alors le potentiel

engendré par une mesure positive μ est strictement convexe sur tout intervalle ouvert w que ne charge pas μ .

Preuve du lemme. Soit $[a_1 a_2]$ dans w . Soit a_3 un point de $[a_1 a_2]$

$$a_3 = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \quad (0 < \lambda < 1).$$

Pour comparer les valeurs de U^μ aux points a_i ($i = 1, 2, 3$) partons de

$$U^\mu(a_i) = \int_{\pi} \bar{\Phi}(a_i - t) d\mu(t).$$

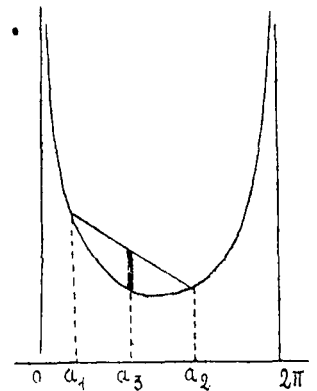
Les membres $\bar{\Phi}(a_i - t) = \bar{\Phi}(t - a_i)$ s'interprètent graphiquement comme les ordonnées des points de la courbe $\bar{\Phi}(\cdot)$ aux points A_i d'abscisses $a_i - t$. La fonction

$$\varepsilon(t) = \lambda \bar{\Phi}(a_1 - t) + (1 - \lambda) \bar{\Phi}(a_2 - t) - \bar{\Phi}(a_3 - t)$$

continue, > 0 , atteint son minimum $\varepsilon > 0$ sur le compact $S\mu$. Donc,

$$\forall t \in S\mu ; \bar{\Phi}(a_3 - t) \leq \lambda \bar{\Phi}(a_1 - t) + (1 - \lambda) \bar{\Phi}(a_2 - t) - \varepsilon.$$

D'où l'inégalité cherchée en intégrant par rapport à μ .



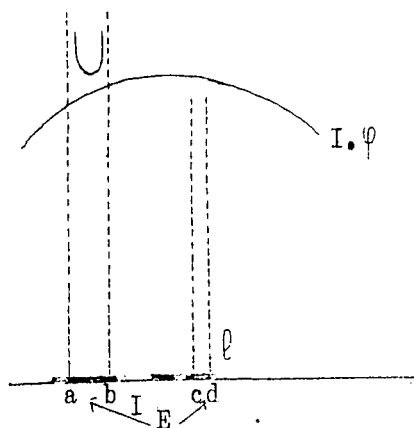
Preuve de la proposition 2. Pour simplifier l'exposé nous prenons l'origine sur T

en une extrémité de I et nous identifions le tore à l'intervalle $]0, 2\pi[$ de \mathbb{R} :

deux points se correspondant par ce "déroulement" s'ils ont même abscisse.

Raisonnons par l'absurde. L'ensemble des intervalles de \mathbb{R} coupant E et que ne charge pas μ_φ (mesure d'équilibre de E relativement à φ) est inductif vers le haut pour la relation d'inclusion. Parmi les intervalles maximaux nous distinguerons les intervalles finis et les demi-droites.

1°) Si le segment (ab) n'est pas chargé par μ_φ



$$U^{\mu\varphi} \gg I\varphi \quad \text{p.p. sur } E$$

(pour toute γ d'énergie finie)

$$U^{\mu\varphi} \leq I\varphi \quad \text{sur } S(\mu\varphi)$$

$U^{\mu\varphi}$ strictement convexe (et continu) sur $]a, b[$.

Donc sur $]a, b[$, le graphe de U^{μ} est strictement au dessus de celui de $I\varphi$; et $U^{\mu\varphi} = I\varphi$, v. p. p. ce-ci est en contradiction avec le principe du maximum.

2^o) Si μ_{φ} ne chargeait pas $(c, +\infty)$, (ou bien symétriquement, une demi-droite illimitée à gauche et contenant l'origine), alors quel que soit le point d à droite de

$$U^{\mu\varphi}(d) \gg I\varphi(d)$$

$$U^{\mu\varphi}(c) = I\varphi(c)$$

(ou bien une relation analogue dans le cas symétrique).

Ce qui s'écrit plus succinctement :

$$\exists c \in E \quad \forall d \text{ à droite dans } E \quad \frac{U(c)}{U(d)} \leq \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)}$$

ou bien condition symétrique.

Ceci est absurde si :

$$\forall c \in E \quad \exists d \text{ à droite} \quad \frac{U(c)}{U(d)} > \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)}$$

et condition symétrique.

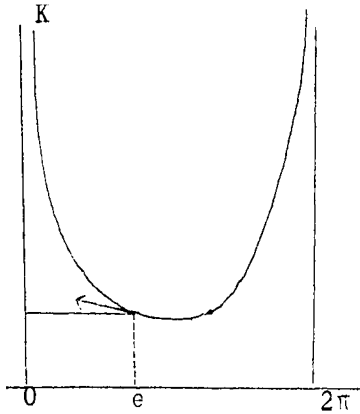
Mais en tenant compte de $U(x) = \int \Phi(x-t)d\mu(t)$ on peut remplacer l'inégalité par

$$\frac{\varphi(c)}{\varphi(d)} < \inf_{\substack{t \leq c \\ t \in E}} \frac{\Phi(c-t)}{\Phi(d-t)} .$$

Nous remarquons alors que :

- puisque φ "décroit à une extrémité de E " au moins on ne peut espérer réaliser cette condition si la longueur ℓ de I est $> \pi$

- dans l'inégalité ; on peut prendre pour d l'extrémité droite ℓ de E et alors il suffit que



$$\forall c \in E \quad \frac{\varphi(c)}{\varphi(\ell)} < \frac{\Phi(c)}{\Phi(\ell)}$$

et condition symétrique

- ceci est réalisé si le graphe de $\frac{\Phi(\ell)}{\varphi(\ell)} \varphi$ est au dessous de celui de Φ ; et puisque Φ est strictement convexe et que φ est concave, il suffit que

$$\frac{\varphi'(\ell)}{\varphi(\ell)} \leq \frac{K'(\ell)}{K(\ell)} \text{ (et condition symétrique)}$$

Le théorème de synthèse est donc établi pour les fermés E contenus dans un arc I de longueur $\ell < \pi$ et les fonctions φ pas trop concaves sur I "définies par (I'')" si l'on montre la

Proposition 3. L'hypothèse (I'') entraîne l'hypothèse (II).

Preuve. On prend pour origine sur le tore une extrémité de I l'abscisse θ d'un point de I variant entre 0 et π .

1^a) Dans le cas des distributions, considérons les fonctions φ_n suivantes sur T

$$\varphi_n(\theta) = \begin{cases} 1 - \varepsilon_n \theta^n & \text{sur un ouvert } \theta \text{ contenant } I \\ \text{n'importe quoi ailleurs} \end{cases}$$

L'application de déroulement du tore sur la droite, si on la restreint à 0 , est un isomorphisme de variétés C^∞ .

A une distribution T portée par E , et orthogonale aux φ_n , il correspond biunivoquement une distribution \hat{T} à support compact sur R (donc d'ordre fini m) et orthogonale aux polynomes $1 - \varepsilon_n x^n$.

Or, ces polynomes forment un système total dans $\mathcal{E}^m(R) = \text{ev}$ des fonctions de classe C^m sur R avec la topologie de la convergence compacte pour les dérivées d'ordre $\leq m$.

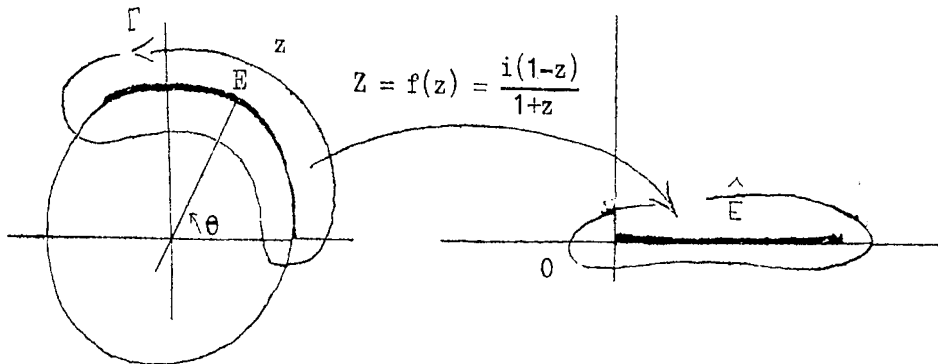
D'où $T = \hat{T} = 0$

2°) Dans le cas des hyperdistributions. (On aurait pu se dispenser du 1°).

Nous avons vu qu'une hyperdistribution T sur le fermé E de \mathbb{C} correspond à une forme linéaire continue sur les fonctions holomorphes sur E (considéré comme une partie de \mathbb{C}), définie de la façon suivante à partir d'une fonction T holomorphe dans \mathring{E}

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(z) \varphi(z) \frac{dz}{z}$$

Γ enlaçant une fois E



Par la transformation holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \rightarrow Z = \frac{i(1-z)}{1+z}$$

$$e^{i\theta} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

toute hyperdistribution T portée par E devient une hyperdistribution \hat{T} portée par un segment borné \hat{E} de \mathbb{R} . Supposons \hat{T} orthogonale aux polynômes $p_n = 1 - \varepsilon_m X^m$.

Les p_n se prolongent au plan Z en $1 - \varepsilon_m Z^m$ et comme ces polynômes forment un système total dans $\mathcal{H}(\hat{E}) = \text{ev}$ des fonctions holomorphes sur \hat{E} avec la topologie de la convergence uniforme sur \hat{E} (Mergelyan) ; alors $\hat{T} = 0$. Ceci équivaut à $T = 0$.

Et il en est ainsi si T est orthogonale aux fonctions $p_n \circ f = 1 - \varepsilon_m \operatorname{tg}^m \frac{\theta}{2}$. C'est bien le cas, si l'on choisit convenablement les ε_m

(Exposés de B. Malgrange)

Rappels sur les Variétés Différentiables

I. Variété topologique de dimension n .

C'est un espace topologique séparé V , localement homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Remarque. Un espace localement homéomorphe à \mathbb{R}^n n'est pas nécessairement séparé.

Germes de fonctions continues. On dit que deux fonctions, définies et continues dans un voisinage d'un point a de V , et à valeurs réelles, définissent le même germe en a si elles coïncident dans un voisinage de a . On notera f_a le germe défini par la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ (il est clair que la relation définie ici est une relation d'équivalence), et on aura ainsi l'espace vectoriel C_a^0 des germes de fonctions continues en a .

Transposée. Soient des homéomorphismes $f : V \rightarrow W$ et $g : W \rightarrow X$ entre trois variétés topologiques (de dimension n). On notera $f^*(g) = g \circ f$ l'application composée au sens de la théorie des ensembles, et on aura ainsi $(g \circ f)(a) = [f^*(g)](a)$. f^* s'appelle l'application transposée de f .

II. Variété de classe C^r et de dimension n .

A) Soit E un espace affine (sur \mathbb{R}) de dimension n . On suppose connue la notion de fonction r fois continuellement différentiable dans un ouvert θ de E ; elle est invariante par changement de coordonnées affines (r est un entier positif fini, ou $+\infty$). Avec la même relation d'équivalence que ci-dessus, on introduit la notion de germe de fonction r fois différentiable en $a \in E$; ces germes forment un espace vectoriel, noté C_a^r .

Espace des vecteurs en a . C'est l'espace vectoriel T_a des vecteurs d'origine a , dont les éléments sont les couples (a,b) avec $b \in E$ quelconque (c'est le sous-ensemble $\{a\} \times E$ de $E \times E$).

Application tangente. Soit $f : \Theta \rightarrow F$ une application de classe C^r d'un ouvert $\Theta \subset E$ dans un espace affine F . Son application linéaire tangente en a est l'application $f_a^T : T_a \rightarrow T_{f(a)}$ de l'espace des vecteurs en a dans l'espace des vecteurs au point correspondant $f(a)$, donnée par la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a))$ dans l'espace vectoriel associé.

r -difféomorphisme. C'est une application bijective d'un ouvert $\Theta \subset E$ sur un ouvert $\Omega \subset F$ qui est de classe C^r ainsi que son inverse.

B) Définition.

Une variété V de classe C^r et de dimension n est une variété topologique (de dimension n) sur laquelle est donné, pour tout $a \in V$, un sous-ensemble C_a^r de C_a^0 possédant la propriété suivante : Pour tout a il existe un voisinage ouvert Θ_a de a , et un homéomorphisme φ de Θ_a sur un ouvert Ω d'un espace affine (fixe) E , de dimension n , tel que $\forall b \in \Theta_a, \varphi^*(C_b^r) = C_b^r$.

Une telle application φ s'appelle un r -difféomorphisme de Θ_a sur Ω . Plus généralement, un homéomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ entre deux variétés de classe C^r sera appelé un r -difféomorphisme si les germes de fonctions de classe C^r se correspondent. Par définition, les éléments de C_a^r s'appellent germes de fonctions de classe C^r (ou r fois continuellement différentiables) en a ; une fonction f définie et continue dans un ouvert $\Theta \subset V$ est dite de classe C^r si, $\forall a \in \Theta, f_a \in C_a^r$.

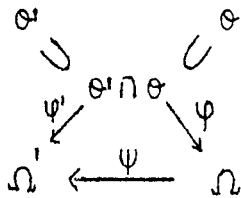
Une carte locale est un couple (Θ, φ) formé par un ouvert $\Theta \subset V$ et un r -difféomorphisme φ de Θ sur un ouvert Ω de l'espace affine E . En choisissant une origine dans E , et une base de l'espace vectoriel \vec{E} associé à E , on pourra exprimer φ à l'aide de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) .

Soient V et W deux variétés de classe C^r ; une application continue $f : V \rightarrow W$ est dite de classe C^r si l'on a, $\forall a \in V$, $f^*(C_{f(a)}^r) \subset C_a^r$ (si V et W sont deux ouverts dans des espaces affines, il est clair que cela coïncide avec la définition ordinaire).

Remarque. Si l'on a muni V d'une structure de variété de classe C^r , il existe évidemment une structure unique, de classe C^{r-1} , compatible avec la précédente. On pourra ainsi considérer une variété C^r comme étant aussi C^q , $0 \leq q \leq r$.

C) Vecteurs (en a) de V , variété de classe C^r ($r \geq 1$).

Ce sont des triplets $(\mathcal{O}, \varphi, X)$ où (\mathcal{O}, φ) est une carte locale : $a \in \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} \Omega \ni b = \varphi(a)$ (Ω ouvert affine de E) et où $X \in T_{\varphi(a)}$; modulo la notion d'équivalence $(\mathcal{O}, \varphi, X) \sim (\mathcal{O}', \varphi', X')$ si l'application ψ définie



par le diagramme ci-joint, (qui est évidemment un C^r -difféomorphisme) vérifie $\psi_b^T(X) = X'$.

L'ensemble T_a des vecteurs de V en a est muni d'une structure de R -espace vectoriel.

Ces vecteurs sont souvent appelés vecteurs tangents (à quoi ?). Nous n'emploierons pas cette terminologie.

D) Si l'on a une application de classe C^r $f : V \rightarrow W$ entre deux variétés de classe C^r , on en déduit (à l'aide des cartes locales) l'application linéaire tangente en a , $f_a^T : T_a \rightarrow T_{f(a)}$ où T_a (et $T_{f(a)}$) sont les espaces des vecteurs en a (et $f(a)$).

Théorème des fonctions composées. Si l'on a $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X$, f et g étant des applications de classe C^r , on aura (la propriété étant vraie sur les cartes locales) : $(g \circ f)_a^T = g_{f(a)}^T \circ f_a^T$. On pourra donc écrire $[f^*(g)]_a^T = g_{f(a)}^T \circ f_a^T = (f_a^T)^*(g_{f(a)}^T)$. On "oublie" en général le T dans $(f_a^T)^*$ et on écrira ainsi :

$$\underline{[f^*(g)]_a^T = f_a^*(g_{f(a)}^T)}.$$

On sous-entend souvent les points a et $f(a)$, lorsque cela ne prête pas à confusion, ce qui permet d'écrire $[f^*(g)]^T = f^*(g^T)$.

E) Différentielle.

Soient E un espace affine, b un point de E , T_b l'espace des vecteurs en b (ensemble des couples (b,c) où c décrit E) ; désignons par π_b l'application $T_b \rightarrow \vec{E}$, définie par $\pi_b(b,c) = \vec{bc}$, de T_b dans l'espace vectoriel \vec{E} associé à l'espace affine E .

Soit alors f une application d'une variété V de classe C^r dans un espace affine E . Si $a \in V$, on en déduit :

$$T_a \xrightarrow{f_a^T} T_{f(a)} \xrightarrow{\pi_{f(a)}} \vec{E}.$$

On désigne cette application composée, appelée différentielle en a de f , par $d_a f$.

En particulier, si $x : E \rightarrow E$ est l'application identique de E , on aura, si $b \in E$, $d_b x = \pi_b$. On écrira donc : $d_a f = d_{f(a)} x \circ f_a^T = f_a^*(d_{f(a)} x)$, soit en sous-entendant les points : $df = f^*(dx)$.

F) Soient V et W deux C^r -variétés, et $f : V \rightarrow W$ une application de classe C^r . Considérons la suite d'applications $a \in V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} E \ni g(f(a))$, qui donne, en passant aux tangentes et aux différentielles, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_a & \xrightarrow{f_a^T} & T_{f(a)} & \xrightarrow{d_{f(a)}g} & \vec{E} \\ & & \searrow g_{f(a)}^T & & \uparrow d_{g \circ f(a)} \\ & & T_{g \circ f(a)} & & \end{array}$$

On a donc (théorème des fonctions composées) $d_a(f^*(g)) = d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ f_a^T = f_a^*(d_{f(a)}g)$, soit, en sous-entendant les points : $d(f^*(g)) = f^*(dg)$.

C'est ce résultat que l'on désigne habituellement sous le nom de théorème de l'invariance de la différentielle.

Si l'on a un r -difféomorphisme $f : \mathcal{O} \longrightarrow F$ d'un ouvert affine $\mathcal{O} \subset E$ dans un espace affine F , et si $a \in \mathcal{O}$, on a alors :

$$\begin{array}{ccc}
 T_a & \xrightarrow{f'_a} & T_{f(a)} \\
 d_a x \downarrow & \searrow d_a f & \downarrow d_{f(a)} y \\
 \vec{E} & \xrightarrow{\quad} & \vec{F}
 \end{array}$$

(où x et y désignent les applications identiques dans E et F respectivement). On désignera par $f'(a)$ l'application de \vec{E} vers \vec{F} qui rend ce diagramme commutatif, et on aura $d_a f = f'(a) \circ d_a x$, soit, en sous-entendant les points : $df = f'dx$. f' est l'application dite jacobienne, ou "dérivée" (c'est effectivement la dérivée dans le cas où E et F sont de dimension 1, auquel cas on retrouve la formule classique).

G) Fonctions à valeurs réelles.

Soient V une C^r -variété, $a \in V$, \mathcal{O}_a un voisinage de a , et une fonction $f : \mathcal{O}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r en a . Dans ce cas, $d_a f : T_a \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e. $d_a f \in T_a^*$ (l'espace dual) de T_a). Réciproquement, si $h \in T_a^*$, i.e. $h : T_a \longrightarrow \mathbb{R}$, en prenant une carte locale (\mathcal{O}, φ) , avec $\mathcal{O} \ni a$, on vérifie aussitôt que tout élément de T_a^* est de la forme $d_a f$: les différentielles en a s'identifient donc aux covecteurs en a , i.e. aux éléments de T_a^* .

Soit X un vecteur en a : $X \in T_a$. On écrit $\langle X, d_a f \rangle = (\theta(X)f)(a)$. Le sens de cette notation sera précisé dans le 2e exposé. Si l'on considère des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) en a , on aura $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et, en notant $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour $\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a))$, où φ désigne l'homéomorphisme local défini par les coordonnées locales x_i [i.e. $\varphi(b) = (x_1(b), \dots, x_n(b))$ pour b voisin de a] :

$$\langle X, d_a f \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

III. Formes différentielles.

A) p-vecteurs, p-covecteurs.

Les p-vecteurs en a sont les éléments de $\Lambda^p T_a$. Les p-covecteurs en a sont les éléments de $\Lambda^p T_a^*$ (si $p > n$, ces ensembles sont vides).

Si on a une application de classe C^r $f : V \rightarrow W$ d'où $f_a^T : T_a \rightarrow T_{f(a)}$, on pourra définir, si $X_i \in T_a$ ($i = 1, \dots, p$) : $f_a^T(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = f_a^T(X_1) \wedge \dots \wedge f_a^T(X_p)$. On définira de même f_a^* sur $\Lambda^p T_{f(a)}^*$ par $f_a^*(d_{f(a)} g_1 \wedge \dots \wedge d_{f(a)} g_p) = d_a(f^*(g_1)) \wedge \dots \wedge d_a(f^*(g_p))$.

Champ de p-vecteurs. C'est une application $a \rightarrow \Lambda^p T_a$.

Champ de p-covecteurs. " " " $a \rightarrow \Lambda^p T_a^*$.

On dit encore, si ω est un champ de p-covecteurs sur une variété V, que c'est une forme différentielle extérieure de degré p sur V.

Si $(\mathcal{O}_a, (x_1, \dots, x_n))$ est une carte locale sur V variété de classe C^r ($a \in \mathcal{O}_a \subset V$), on pourra écrire de façon unique $\omega(a) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p}(a) d_a x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_a x_{i_p}$.

Si on fait un changement de cartes locales de classe C^r , donné par $x_i = f_i(y)$, où $y = (y_1, \dots, y_n)$, on aura, en posant $f = (f_1, \dots, f_n)$:

$$\omega(a) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p}(a) d_a f_{i_1} \wedge \dots \wedge d_a f_{i_p} \quad \text{soit}$$

$$\omega(a) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_p}(a) d_a y_{j_1} \wedge \dots \wedge d_a y_{j_p}$$

où
$$\tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p}(a) \frac{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{D(y_{j_1}, \dots, y_{j_p})}(a)$$

et où le jacobien est celui des fonctions $x_{i_1} \circ y^{-1}, \dots, x_{i_p} \circ y^{-1}$ par rapport aux y_{j_1}, \dots, y_{j_p} . On "perd" donc ainsi une dérivabilité : si les coefficients initiaux étaient de classe C^r , après changement C^r de variables, les nouveaux ne seront que C^{r-1} sur une variété de classe C^r . On ne peut donc parler que de formes de classe C^{r-1} (et non de classe C^r) sur une variété de classe C^r .

Si f est une fonction de classe C^r sur V , on note df la forme différentielle $a \rightarrow d_a f$. On fera d'autre part constamment l'abus de notation qui consiste à identifier une forme différentielle définie au voisinage de a avec son image dans une carte locale.

B) Différentielle extérieure d'une forme.

Soit \mathcal{O} un ouvert affine, ω une forme définie dans \mathcal{O} ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \text{ si l'on a pris des coordonnées } (x_1, \dots, x_n) \text{ dans } \mathcal{O}.$$

On définira $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_i} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. On définira de même

$$d\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \text{ (tout cela pour } \omega \text{ de classe } C^r, r \gg 1).$$

C) Propriétés de l'opération d .

1°) Elle est R -linéaire, et transforme une forme de degré p en une forme de degré $p+1$.

2°) Sur les fonctions à valeurs dans R (que l'on peut considérer comme des formes de degré 0) c'est l'opération $f \rightarrow df$.

3°) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$ si ω_1 est une forme de degré $p \geq 0$.

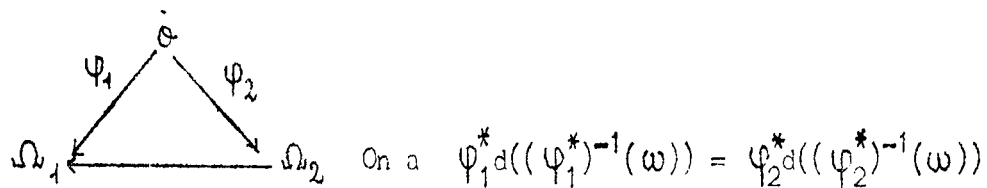
En particulier : 3 bis) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

4°) $d^2 = 0$, i.e. $dd\omega = 0 \quad \forall \omega$, de classe C^2 au moins. En particulier, on aura $ddf = 0 \quad \forall f \in C^2$.

5°) Si $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ est de classe C^2 au moins (Ω : ouvert affine), alors $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$.

Les propriétés 1, 2, 3, 4 découlent de la définition, par des calculs élémentaires. D'après 1 et 3, il suffit de vérifier 5 pour $\omega = f$ et $\omega = df$; pour $\omega = f$, c'est l'invariance de la différentielle; si $\omega = df$, $\varphi^*(d\omega) = 0$ par 4, et $\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df) = d\varphi^*(f)$, donc $d\varphi^*(\omega) = 0$ par 4 aussi. Elles sont de plus caractéristiques (il y a un seul opérateur les vérifiant toutes).

Les propriétés précédentes montrent aussitôt que la différentiation extérieure est une opération que ne dépend que de la structure C^2 de \mathcal{O} et non d'une structure d'ouvert d'un espace affine. On en déduit facilement que l'on pourra définir la différentielle extérieure sur une variété de classe C^r , $r \geq 2$ à l'aide de cartes locales. En effet, si on a deux cartes locales (\mathcal{O}_1, ψ_1) et (\mathcal{O}_2, ψ_2) , et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$:



puisque, en posant $\psi = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$, $\omega_1 = (\psi_1^*)^{-1}(\omega)$, $\omega_2 = (\psi_2^*)^{-1}(\psi_1^*(\omega_1))$ on a $\psi^*(d\omega_1) = d\psi^*(\omega_1)$; l'extension des propriétés 1, 2, 3, 4, 5 aux variétés différentiables de classe C^r (et l'examen des hypothèses à faire sur r) est laissée au lecteur.



(Exposés de B. Malgrange)

Transformations infinitésimales

I. Notion de produit intérieur.

A) Préliminaires. Soient E un espace vectoriel de dimension n , E^* son dual, et $\wedge E$ (respectivement $\wedge(E^*)$) l'algèbre extérieure de E , $\wedge^p(E)$ (resp. $\wedge^p(E^*)$) désigne les éléments de $\wedge(E)$ (resp. $\wedge(E^*)$) de degré p . Prenons des vecteurs x_1, \dots, x_p dans E , et x_1^*, \dots, x_p^* dans E^* , et considérons l'expression :

$$f([x_1, \dots, x_p], [x_1^*, \dots, x_p^*]) = \det(\langle x_i, x_j^* \rangle).$$

Pour des x_i^* fixés, c'est une forme alternée, donc ne dépendant que des $x_1 \dots x_p$. De même, pour des x_i fixés, f ne dépend que des $x_1^* \wedge \dots \wedge x_p^*$. On a ainsi une forme bilinéaire sur $\wedge^p E$ et $\wedge^p E^*$, que l'on notera :

$$\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_p, x_1^* \wedge \dots \wedge x_p^* \rangle = \det(\langle x_i, x_j^* \rangle).$$

Cette forme induit un isomorphisme entre $\wedge^p(E^*)$ et $(\wedge^p E)^*$, donc entre $\wedge(E^*)$ et $(\wedge E)^*$. En effet, si l'on considère un ensemble H d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ et des vecteurs e_{i_1}, \dots, e_{i_p} faisant partie d'une base de E , d'où $e_H = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \in \wedge^p E$, et si l'on considère de même $e_{H'}^* \in \wedge^p E^*$, on aura :

$$\langle e_H, e_{H'}^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } H = H' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus, si u est une application linéaire $E \rightarrow E$, et si u^* désigne sa transposée, on aura $\wedge^p u^* = (\wedge^p u)^*$.

B) Définition du produit intérieur gauche. [N.B. : c'est $(-1)^{pq}$ fois celle de Bourbaki].

Si $x \in \wedge^p E$, $y \in \wedge^q E$, et $x^* \in \wedge^{p+q} E^*$, on définit le produit intérieur gauche

$x \lrcorner x^*$ par la formule (pour tout $y \in \wedge^q E$) :

$$\underline{\langle x \wedge y, x^* \rangle = \langle y, x \lrcorner x^* \rangle.}$$

Le produit intérieur gauche est donc une application $x^* \rightarrow x \lrcorner x^*$ de $\wedge^{p+q} E^*$ dans $\wedge^q E^*$, transposée de l'application $y \rightarrow x \wedge y$ de $\wedge^q E$ dans $\wedge^{p+q} E$.

On n'a ici défini le produit intérieur du p -vecteur x et du q -vecteur x^* (on note ici q au lieu de $p+q$) que si $q \geq p$. Si $q = p$, la définition ci-dessus donne :

$$x \lrcorner x^* = \langle x, x^* \rangle.$$

Si $q < p$, on posera $x \lrcorner x^* = 0$.

C) Propriétés. Soient les $x \in \wedge E$ et les $x^* \in \wedge E^*$.

$$1^{\circ}) x_1 \lrcorner (x_2 \lrcorner x^*) = (x_2 \wedge x_1) \lrcorner x^*$$

$$2^{\circ}) e_H \lrcorner e_{H'}^* = 0 \text{ si } H \not\subset H'$$

$e_H \lrcorner e_{H'}^* = \rho_{HK} e_K^*$ si $H \subset H'$, $K = \overline{H'}$, ρ_{HK} étant le nombre d'inversions obtenues quand on écrit d'abord H , puis K . (cf. Bourbaki pour 1° et 2°).

3°) Le produit intérieur par $x \in E$ est une antidérivation de degré -1 , et l'on a, si $x^* \in \wedge^p E^*$ et $y^* \in \wedge^q E^*$:

$$x \lrcorner (x^* \wedge y^*) = (x \lrcorner x^*) \wedge y^* + (-1)^p x^* \wedge (x \lrcorner y^*).$$

C'est une opération de degré -1 car $i(x) : \wedge^p E^* \rightarrow \wedge^{p-1} E^*$, en désignant par $i(x)$ le produit intérieur par x . On vérifie la formule par un calcul explicite, en introduisant un $(p+q-1)$ vecteur $y \in \wedge^{p+q-1} E$, et en décomposant les y, x^* et y^* de façon à revenir à la définition.

D) Produit intérieur droit. Soient $x \in \wedge^{p+q} E$, $x^* \in \wedge^p E^*$, et $y^* \in \wedge^q E^*$. On définit le produit intérieur droit $x \llcorner x^*$ par : $\langle x, x^* \wedge y^* \rangle = \langle x \llcorner x^*, y^* \rangle$, pour tout $y^* \in \wedge^q E^*$. C'est pour x^* fixé une application $x \rightarrow x \llcorner x^*$ de $\wedge^{p+q} E$ dans $\wedge^q E$, transposée de l'application $y^* \rightarrow x^* \wedge y^*$ de $\wedge^q E^*$ dans $\wedge^{p+q} E^*$. On ne servira pas, par la suite, de cette notion.

II. Transformation infinitésimale associée à un champ de vecteurs.

A) Introduction. Soit V une variété de classe C^r , $r \geq 2$, de dimension, n , et X un champ de vecteurs de classe C^{r-1} sur V ; soient x_1, \dots, x_n des coordonnées locales au voisinage d'un point $a \in V$, avec par exemple $x_i(a) = 0$. Pour b voisin de a , soit $\xi_i(b)$ la base de T_b duale de la base $d_b x_i$ de T_b^* [i.e. $\langle \xi_i(b), d_b f \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b)$], et soit ξ_i le champ de vecteurs $b \rightarrow \xi_i(b)$.

Au voisinage de a , X s'écrit alors d'une manière et d'une seule ; $X = \sum a_i \xi_i$, les a_i étant des fonctions de classe C^{r-1} définies au voisinage de a , que l'on identifiera à des fonctions de (x_1, \dots, x_n) .

Pour $|t| \leq \xi(a)$, $\xi(a) > 0$ convenable, il existe une solution et une seule du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = a_i(y_1, \dots, y_n) \\ y_i(0) = 0 \end{cases}$$

On notera $\varphi_t(a)$ le point de V de coordonnées $(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Il est clair que $\varphi_t(a)$ ne dépend que de X et a et non des coordonnées locales particulières choisies, puisque les équations précédentes expriment que $\varphi_0(a) = 0$ et que, pour tout t , l'application tangente à $t \rightarrow \varphi_t(a)$ transforme le vecteur 1 en $X(\varphi_t(a))$.

D'après la théorie des équations différentielles, on peut choisir $\xi(a)$ de manière que, $\forall K$ compact CV , on ait $\inf_{a \in K} \xi(a) > 0$. Il existe donc un voisinage W de $V \times \{0\}$ dans $V \times \mathbb{R}$ tel que l'application (à valeurs dans V) : $(x, t) \rightarrow \varphi_t(x)$ soit définie dans W .

La théorie des équations différentielles montre que cette application est de classe C^{r-1} et qu'il existe un ouvert W' vérifiant $V \times \{0\} \subset W' \subset W$, tel qu'on ait

$$\forall (x, t_1) \in W', \forall (x, t_2) \in W' : (x, t_1 + t_2) \in W ; (\varphi_{t_1}(x), t_2) \in W \text{ et } \varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}(x).$$

Lorsque V est compacte, on déduit facilement de là que φ_t se prolonge en un groupe à un paramètre de difféomorphisme (de classe C^{r-1}) de V . Dans le cas où V n'est pas compacte, on ne pourra pas en général prolonger φ_t à $V \times \mathbb{R}$ entier de manière que la formule précédente soit vraie partout. Nous ne nous intéressons d'ailleurs qu'au germe en $V \times \{0\}$ de l'application φ_t (i.e. nous identifierons deux applications coïncidant au voisinage de $V \times \{0\}$) ; par abus de langage, nous l'appellerons "le germe de groupe à 1 paramètre de difféomorphismes de V défini par X ".

B) Transformation infinitésimale $\theta(X)$.

Soit f une fonction sur V , à valeurs réelles (on laisse au lecteur le soin d'examiner les hypothèses de différentiabilité à faire). Soit U un ouvert relativement compact dans V ; la restriction à U de φ_t est définie pour $|t| < \xi(U)$, $\xi(U) > 0$ (et c'est un difféomorphisme $U \rightarrow \varphi_t(U)$) ; la restriction à U de $\varphi_t^*(f)$ est alors définie. Dans des coordonnées locales, on aura, avec les notations du début de A) :

$$\varphi_t^*(f) = f(y_1(t), \dots, y_n(t)) ; \text{ d'où } \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(f) \right|_{a,0} = \sum \frac{dy_i}{dt} \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{a,0} = \langle X(a), d_a f \rangle$$

($a \in U$) et plus généralement $\left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(f) \right|_{t=0} = \langle X, df \rangle = \theta(X)f$ formule vraie dans U , ouvert relativement compact arbitraire de U , donc dans V tout entier. (Dans la suite, nous omettrons constamment de préciser que l'on doit se limiter à des ouverts relativement compacts pour la validité de certaines formules, jouant un rôle intermédiaire... et nous ferons aussi cette omission dans d'autres cas !).

Nous allons maintenant chercher à étendre $\theta(X)$ aux formes différentielles. On a déjà défini $\varphi_t^*(\omega)$, où ω est une p -forme ; si l'on a $\omega = \sum \alpha_{i_1 \dots i_p} dg_{i_1} \wedge \dots \wedge dg_{i_p}$, on aura $\varphi_t^*(\omega) = \sum \varphi_t^*(\alpha_{i_1 \dots i_p}) d(\varphi_t^*(g_{i_1})) \wedge \dots \wedge d(\varphi_t^*(g_{i_p}))$. Nous pouvons donc définir $\theta(X)\omega$ par :

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) \right|_{t=0} = \theta(X)\omega.$$

(Sur des ouverts relativement compacts), on aura :

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^* - \varphi_t^*}{h}(\omega) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\varphi_h^* - I}{h} \varphi_t^*(\omega)$$

et aussi $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_t^* \frac{\varphi_h^* - I}{h}(\omega)$ où I désigne l'identité φ_0^* . On aura ainsi

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) = \theta(X)(\varphi_t^*(\omega)) = \varphi_t^*(\theta(X)\omega).$$

Nous pouvons ainsi définir (formellement) $\theta(X)$ par $\left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \right|_{t=0} = \theta(X)$, et l'on aura alors,

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* = \theta(X) \varphi_t^* = \varphi_t^* \theta(X).$$

En coordonnées locales, d'après la définition de $\theta(X)$ et le premier exposé, nous écrivons

$$\theta(X) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{si} \quad X = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$$

(On fera toutefois attention que la formule $\theta(X)\omega = \sum a_i(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ est fausse en général, lorsque ω est de degré > 0 . Par exemple $\theta(X).df = d[\theta(X)f] = d\left[\sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] \neq \sum a_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$).

C) Propriétés de l'opérateur infinitésimal $\theta(X)$ associé au champ de vecteurs X .

1°) $\theta(X)$ est \mathbb{R} -linéaire (ou \mathbb{C} -linéaire, s'il s'agit de formes complexes) et transforme des p -formes en des p -formes. Si la variété V est de classe C^r , X et ω de classe C^{r-1} , alors $\theta(X)\omega$ sera de classe C^{r-2} ($r \geq 2$).

$$2^\circ) \theta(X)(\omega \wedge \omega') = (\theta(X)\omega) \wedge \omega' + \omega \wedge (\theta(X)\omega') \quad \text{car} \quad \varphi_t^*(\omega \wedge \omega') = \varphi_t^*(\omega) \wedge \varphi_t^*(\omega'),$$

d'où le résultat en dérivant par rapport à t .

$$3^\circ) \theta(X)d\omega = d(\theta(X)\omega).$$

D'après 1 et 2, il suffit de vérifier 3 bis (pour les fonctions) :

3 bis) $\theta(X)df = d(\theta(X)f)$, et ceci découle de l'invariance de la différentielle :

$$d(\varphi_t^*(f)) = \varphi_t^*(df) \quad \text{en dérivant par rapport à } t.$$

$$4^\circ) \theta(X)f = \langle X, df \rangle = X \lrcorner df.$$

Les propriétés 1, 2, 3 bis, 4 caractérisent l'opération θ , car, par 1 et 2, on se ramène à définir θ sur f et df , ce que font 3 bis et 4.

Remarquons que $\theta(X)\omega = 0$ (si et seulement si) on a $\varphi_t^*(\omega) = \text{constante (en } t) = \omega$.

Ainsi, une forme ω est invariante par le germe de groupe de transformations si $\theta(X)\omega = 0$.

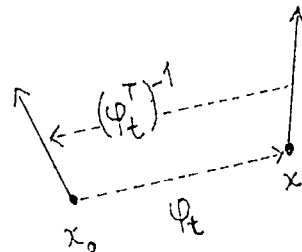
D) Formule fondamentale de Cartan. $\theta(X)\omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)$, ce qui s'écrit aussi:
 $\theta(X) = i(X)d + di(X)$.

Il suffit de voir que, si l'on prend cette formule pour définition, les propriétés caractéristiques 1, 2, 3, 4 sont vérifiées. 1^o) est évident. d étant une antidérivation de degré +1, et $i(X)$ une antidérivation de degré -1 (c'est le produit intérieur par un vecteur) leur anticommutateur $id + di$ est une dérivation de degré 0 d'où le 2^o). On a $d(X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)) = d(X \lrcorner d\omega) = X \lrcorner d(d\omega) + d(X \lrcorner d\omega)$ car $d^2 = 0$, d'où 3^o). Enfin, comme $X \lrcorner f = 0$ par définition du produit intérieur (car f peut être considérée comme une forme différentielle extérieure de degré 0) on aura 4^o).

E) Action d'une transformation infinitésimale sur un champ de vecteurs. Soient Y un champ de vecteurs et ω une forme de degré 1. $\langle Y, \omega \rangle$ est alors une fonction de V dans \mathbb{R} , et on peut parler de $\varphi_t^*(\langle Y, \omega \rangle)$. On voit aisément qu'on aura :

$$\varphi_t^*(\langle Y, \omega \rangle) = \langle (\varphi_t^T)^{-1}(Y), (\varphi_t^T)^*(\omega) \rangle \quad (\text{cf. croquis})$$

On notera alors S_t pour φ_t^* (défini sur des fonctions), S_t encore pour $(\varphi_t^T)^*$ (défini sur des formes ; on n'a d'ailleurs



explicité le T que pour mieux le faire disparaître), et S_t toujours pour $(\varphi_t^T)^{-1}$ (défini sur des champs de vecteurs). On aura donc la formule :

$$S_t \langle Y, \omega \rangle = \langle S_t Y, S_t \omega \rangle.$$

On aura aussi $\frac{dS_t}{dt} = \theta(X)S_t$, ce qui nous permettra d'écrire formellement $\exp(t\theta(X))$, ou $\exp(tX)$ au lieu de S_t ; cette notation, qui met en évidence le champ de vecteurs dont provient le germe de groupe de transformations, et qui met aussi en évidence $\theta(X)$ comme le générateur infinitésimal de ce (germe de) groupe (au sens de la théorie des groupes de

transformations), est parfois préférable.

En étendant la définition de $\theta(X)$ aux champs de vecteurs par la formule

$$\theta(X)Y = \left. \frac{d}{dt} S_t \right|_{t=0} \quad \text{nous aurons, en dérivant la relation précédente par rapport à } t :$$

$\theta(X)\langle Y, \omega \rangle = \langle \theta(X)Y, \omega \rangle + \langle Y, \theta(X)\omega \rangle$, ce que l'on peut d'ailleurs prendre pour définir $\theta(X)Y$. Nous allons nous en servir pour obtenir une expression explicite (par les coordonnées locales) du champ de vecteurs $\theta(X)Y$.

Posons en effet $X = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$, $Y = \sum_{i=1}^n b_i \xi_i$ et $\theta(X)Y = \sum_{j=1}^n c_j \xi_j$. Alors $\langle Y, \omega \rangle = \sum_{i=1}^n b_i \langle \xi_i, \omega \rangle$ et $\langle \theta(X)Y, \omega \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle \xi_j, \omega \rangle$ en vertu de la linéarité. De plus, $\theta(X)\langle Y, \omega \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \langle Y, \omega \rangle}{\partial x_i}$. Prenons alors $\omega = dx_j$ ($j = 1, \dots, n$). On a alors

$$\langle \xi_i, \omega \rangle = \langle \xi_i, dx_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{de Kronecker})$$

d'où $\langle Y, \omega \rangle = \sum b_i \delta_{ij} = b_j$ et de même $\langle \theta(X)Y, \omega \rangle = c_j$ dans ce cas.

De plus, $\theta(X)dx_j = d(\theta(X)x_j) = d\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) = da_j$ donc $\langle Y, \theta(X)dx_j \rangle = \langle Y, da_j \rangle = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$

et par conséquent $c_j = \sum_{i=1}^n (a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i})$ d'où

$$\theta(X)Y = \sum_{i,j} (a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \xi_j$$

Nous voyons donc que $\theta(X)Y = -\theta(Y)X$.

F) Crochet. Calculons $\theta(\theta(X)Y)f$. On a : $\theta(\theta(X)Y)f = \langle \theta(X)Y, df \rangle = \theta(X)\langle Y, df \rangle - \langle Y, \theta(X)df \rangle$ donc $\theta(\theta(X)Y)f = \theta(X)\theta(Y)f - \langle Y, d(\theta(X)f) \rangle$
 $= \theta(X)\theta(Y)f - \theta(Y)\theta(X)f$
 $= [\theta(X), \theta(Y)]f$.

(par définition du crochet de deux applications linéaires).

Or $\theta(\theta(X)Y)$, qui est le θ d'un champ de vecteurs, est une dérivation, et le crochet $[\theta(X), \theta(Y)]$ aussi, comme crochet de deux dérivations. θ commutant avec d , $\theta(\theta(X)Y)$ et

le crochet commutent aussi avec l'opérateur d . Donc la formule est vraie aussi pour une forme ω de degré quelconque au lieu de f .

De plus, $(\theta(\theta(X)Y)Z = \theta(X)(\theta(Y)Z) - \theta(Y)(\theta(X)Z)$, si Z est un autre champ de vecteurs. Pour le voir, on pourrait passer par les coordonnées, mais il suffit de vérifier que les θ des deux membres sont égaux (sur les formes) car $\theta(X)$ détermine évidemment X . Or nous venons d'établir que, sur les fonctions (et les formes) on a $\theta(\theta(X)Y) = [\theta(X), \theta(Y)]$.

Donc, sur les formes :

$$\begin{aligned} \theta(\theta(\theta(X)Y)Z) &= [\theta(\theta(X)Y), \theta(Z)] = [[\theta(X), \theta(Y)], \theta(Z)] \\ \theta(\theta(X)(\theta(Y)Z)) &= [\theta(X), \theta(\theta(Y)Z)] = [\theta(X), [\theta(Y), \theta(Z)]] \\ \theta(\theta(Y)(\theta(X)Z)) &= [\theta(Y), \theta(\theta(X)Z)] = [\theta(Y), [\theta(X), \theta(Z)]] \end{aligned}$$

et l'égalité à démontrer n'est autre que l'identité de Jacobi, qui est toujours vérifiée par le crochet de deux applications linéaires.

Par conséquent
$$\underline{\theta(\theta(X)Y) = [\theta(X), \theta(Y)]},$$

la formule étant vraie sur les fonctions, les formes et les champs de vecteurs.

Définition. On définit le crochet de deux champs de vecteurs (que, jusqu'ici, on ne pouvait définir, ne pouvant définir de produit XY) par :

$$[X, Y] = \theta(X)Y - \theta(Y)X,$$

c'est à dire, si ω est une forme de degré i :

$$\langle [X, Y], \omega \rangle = \theta(X) \langle Y, \omega \rangle - \langle Y, \theta(X)\omega \rangle.$$

On aura alors :
$$\underline{\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]}.$$

Le crochet de deux champs de vecteurs est une opération linéaire mais non associative ; elle vérifie par contre l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

cela s'écrit aussi :

$$\underline{\theta(X)[Y, Z] = [\theta(X)Y, Z] + [Y, \theta(X)Z]}.$$

Cette formule nous montre que les transformations infinitésimales opèrent sur des crochets comme des dérivations.

G. Autres formules. On peut de même démontrer la formule suivante (qui montre que $\theta(X)$ opère comme une dérivation, sur les produits intérieurs :

$$\theta(X)(Y \lrcorner \omega) = (\theta(X)Y) \lrcorner \omega + Y \lrcorner \theta(X)\omega$$

où X, Y sont des champs de vecteurs, et ω une forme différentielle extérieure, il suffit en effet de démontrer la dernière formule pour $\omega = df$ (pour $\omega = f$, elle est triviale) auquel cas elle s'écrit, car d et θ commutent

$$\theta(X)(\theta(Y)f) = \theta(\theta(X)Y)f + \theta(Y)(\theta(X)f), \text{ ce que l'on a déjà vu.}$$

On aura donc $[X, Y] \lrcorner \omega = \theta(X)(Y \lrcorner \omega) - Y \lrcorner \theta(X)\omega$, soit

$$i[X, Y] = \theta(X)i(Y) - i(Y)\theta(X)$$

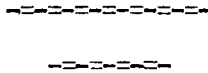
ce que l'on peut aussi écrire :

$$\underline{i(X, Y) = [\theta(X), i(Y)]}.$$

On pourra aussi définir $\theta(X)Y$ lorsque X est un champ de vecteurs et Y un champ de p -vecteurs, par le même procédé que nous avons déjà employé. On vérifie facilement les formules suivantes :

$$\theta(X)(Y \wedge Z) = [\theta(X)Y] \wedge Z + Y \wedge [\theta(X)Z] \quad (Y, Z \text{ champs de } p\text{-vecteurs})$$

$$\theta(\theta(X)Y)Z = [\theta(X), \theta(Y)]Z = \theta[X, Y]Z \quad \begin{array}{l} (Y \text{ champ de vecteurs} \\ Z \text{ champ de } p\text{-vecteurs}) \end{array}$$



(Exposés de B. Malgrange)

Systèmes de Pfaff

1. Compléments à l'exposé n° 2.

Soit une variété V de dimension n , de classe C^∞ . Etant donné le champ de vecteurs X sur V , on notera $\exp(tX)$ le (germe de) groupe infinitésimal à un paramètre de transformations que définit X . Pour la commodité on supposera dans toute la suite les champs de vecteurs, les formes différentielles, etc... de classe C^∞ .

Coordonnées adaptées à un champ X .

Théorème 1. Au voisinage d'un point a où $X(a) \neq 0$ il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) telles que $\theta(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Choisissons les coordonnées initiales de telle sorte que a ait pour coordonnées :

$$(0, 0, \dots, 0)$$

et que $X(a)$ ait pour composantes :

$$(1, 0, \dots, 0)$$

ce qui est possible puisque $X(a) \neq 0$.

Soient (ξ_1, \dots, ξ_n) les composantes de X au voisinage de a .

Soient φ_i les fonctions coordonnées de l'application $\exp(tX)$ exprimée dans le système de coordonnées locales choisi [i.e. $\varphi_i(t; x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées du point $\exp(tX)x$, $x = (x_1, \dots, x_n)$].

Considérons dans \mathbb{R}^n l'application qui au point (x_1, \dots, x_n) supposé voisin de 0 fait correspondre le point de \mathbb{R}^n de coordonnées

$$(1) \quad y_i = \varphi_i(x_1; 0, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Calculons le Jacobien de la transformation en a .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(0) = \xi_1(a) = 1 \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_i}(0) = \xi_i(a) = 0 ; \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(0) = \delta_{ij} \quad i \text{ et } j \gg 2, \text{ comme on le voit} \end{array} \right.$$

en dérivant l'identité en (x_1, \dots, x_n)

$$x_i = \varphi_i(0 ; x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Le Jacobien vaut 1 : il existe donc un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 sur lequel on puisse inverser l'application $(x_i) \longrightarrow (y_i)$. Ou encore il existe un ouvert de V contenant a sur lequel on puisse prendre pour coordonnées locales les x_i déterminés par les relations (1) au point dont les coordonnées locales dans le système initial sont les y_i .

Alors $\theta(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ car

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

en tout point de l'ouvert de définition des coordonnées locales (x_i) .

Interprétation de $[X, Y] = 0$.

Théorème 2. Etant donnés deux champs de vecteurs X et Y définis sur un ouvert de V , une condition nécessaire et suffisante pour que les transformations $\exp(tX)$ et $\exp(uY)$ commutent est que $[X, Y] = 0$.

1) La condition est nécessaire.

Par hypothèse, on a :

$$\exp(uY) \cdot \exp(tX) \cdot x = \exp tX \cdot \exp uY \cdot x$$

pour tout x au voisinage du point a de V . Soit f une fonction numérique quelconque différentiable au voisinage de a . On aura

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \exp(tX) \exp(uY) f \right]_{t=0} = \theta(X) \exp(uY) f ;$$

d'où
$$\left. \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \exp(tX) \exp(uY) f \right]_{t=u=0} = \theta(X) \theta(Y) f$$

de même :
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \left[\exp(uY) \exp(tX) f \right]_{u=t=0} = \theta(Y)\theta(X)f.$$

Donc
$$\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) = \theta[X, Y] = 0 .$$

D'où
$$[X, Y] = 0.$$

2) La condition est suffisante.

Supposons que $[X, Y] = 0.$

Soit a quelconque sur V et montrons que $\exp(tX)\exp(uY)a = \exp(uY)\exp(tX)a.$

a) Si $X(a) = Y(a) = 0$

a est alors invariant par $\exp tX$ et $\exp uY$: cela résulte du théorème d'unicité de la solution des systèmes différentiels.

b) Supposons que l'un au moins des deux champs n'est pas nul en a , soit $X(a) \neq 0.$

Par un changement de coordonnées locales, on peut supposer que $\theta(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ Y ayant pour composantes $(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$

$$\theta(X)Y = 0 \implies \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Les composantes de Y sont indépendantes de x_1 , le système différentiel définissant $\exp(uY)$ est alors invariant par toute translation parallèle à x_1 , le germe de groupe $\exp(uY)$ aussi. C.Q.F.D.

2. Systèmes de Pfaff.

Sous-variété. Soit V une variété de dimension n , de classe C^∞ . Un sous-ensemble W de V est une sous-variété de dimension $p \ll n$ si au voisinage de chacun des points de W il existe des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) sur V telles que W soit définie par les $n-p$ équations :

$$\begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ x_{p+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

W est localement fermée : car tout point de W possède un voisinage \mathcal{O} dans V dont la trace sur W est fermée dans \mathcal{O} . En tout point a de W , les germes de fonctions numériques de classe C^{∞} au voisinage de a sur W sont la restrictions à W des germes de fonctions numériques de classe C^{∞} au voisinage de a sur V .

Les p fonctions x_1, \dots, x_p induisent sur W un système de coordonnées locales : donc W est une variété de classe C^{∞} et de dimension p .

Soit i l'injection canonique de W dans V . Pour tout $a \in W$, son application linéaire tangente en a i_a^T permet de plonger l'espace $T_a(W)$ des vecteurs de W en a et nous dirons qu'un vecteur de V en a est tangent à W s'il appartient à l'image de $T_a(W)$ par l'application i_a^T [dans la suite, nous identifierons par abus de langage les vecteurs de $T_a(W)$ avec leur image dans $T_a(V)$].

Soit ω une forme différentielle sur V ; on appellera $i^*(\omega)$ "la restriction de ω à W ". Par abus de langage, on dira que " ω est nulle sur W " si $i^*(\omega) = 0$.

Système de Pfaff.

Soit Θ le module (sur l'anneau des fonctions de classe C^{∞} sur V) des champs de vecteurs sur V . Un système de Pfaff est, par définition, un sous module M de Θ . On fera une fois pour toute l'hypothèse suivante (hypothèse du rang constant) :

M_a désignant le sous-ensemble de T_a formé des vecteurs $X(a)$, avec $X \in M$, le rang de M_a est indépendant du point a .

En pratique, on ne s'intéressera qu'aux systèmes de Pfaff définis dans un voisinage (non précisé) d'un point a . (Il vaudrait d'ailleurs mieux parler alors de "germe de système de Pfaff en a ..."). Si le rang d'un tel système est p , il existe une base de M au voisinage de a , formée de p champs de vecteurs X_1, \dots, X_p ; complétons la en une base $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ de Θ . Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ la base duale du module des formes différentielles, (i.e. $\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$ en tout point). Il vient au même de se donner M ou le sous-module orthogonal M^\perp engendré par $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$.

Variétés intégrales.

Ce sont les sous variétés W de V (ou plus exactement, d'un ouvert de V dans lequel M est défini) dont tous les vecteurs tangents appartiennent à M , i.e. dont les vecteurs tangents en tout point $b \in W$ appartiennent à M_b .

Par dualité ce sont toutes les sous-variétés W sur lesquelles les $n-p$ formes $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$ s'annulent.

Existence des variétés intégrales.

Si $p \gg 1$, soit un champ $X \in M$ défini dans un ouvert $\Theta \rightarrow a$, et le groupe à un paramètre $\exp(tX)$ associé. Supposons $X_a \neq 0$.

L'application $t \rightarrow \exp(tX)a$ d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R} , dans l'ouvert Θ de V définit sur V un arc de courbe Γ_a passant par a .

Choisissons dans Θ des coordonnées locales adaptées au champ X , a étant le point $(0, \dots, 0)$.

Tout point de Γ_a est défini par les coordonnées $(t, 0, \dots, 0)$ et $\Theta(X) = \frac{\partial}{\partial t}$. Alors quel que soit f définie sur Γ_a $\Theta(X)f = \frac{df}{dt}$.

Conclusion : Γ_a est une variété intégrale de dimension 1.

Γ_a est appelé trajectoire du groupe à un paramètre $\exp(tX)$.

Intégrales premières d'un système de Pfaff (M)

Définition. Une fonction numérique est intégrale première du système (M) si elle est constante sur toutes les variétés intégrales de M .

Théorème 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrale première de (M) et que $df \in M^\perp$.

a) La condition est suffisante.

Soit W une variété intégrale quelconque de (M). Si $df \in M^\perp$, cela entraîne

$$\langle X, df \rangle = 0$$

$\forall X$ vecteur tangent à W .

Alors la restriction de df à W est nulle, donc f est constante sur W .

b) La condition est nécessaire.

$\forall X \in M$, f est constante sur les trajectoires du groupe à un paramètre $\exp(tX)$
 $\theta(X)f = \langle X, df \rangle = 0$ et $df \in M^\perp$.

Transformation infinitésimale d'un système de Pfaff.

Soit Y un champ de vecteur défini au voisinage de a .

Définition. Le module M des champs de vecteurs tangents à V est invariant par le groupe de transformations $\exp tY$ si

$$\forall X \in M \quad \exp(tY).X \in M.$$

On notera $\exp(tY).M \subset M$.

Par dualité, c'est équivalent à

$$\forall \omega \in M' : \exp(tY)\omega \in M'^\perp.$$

Théorème 4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $\exp(tY)M \subset M$, est $\theta(Y)M \subset M$.

Remarque. Cette dernière relation est équivalente par dualité à $\theta(Y)M^\perp \subset M'^\perp$.

a) La condition est nécessaire.

Par hypothèse $\forall X \in M$, $\exp(tY)X \in M$ $\exp(tY)X = \sum_{i=1}^p \lambda_i(x,t)X_i$ ($X_1 \dots X_p$ base de M)

et
$$\theta(Y)X = \frac{d}{dt} \left[\exp(tY)X \right]_{t=0} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} (x,0) X_i \quad \theta(Y)X \in M.$$

b) La condition est suffisante.

Montrons que la condition $\theta(Y)M^\perp \subset M'^\perp$ entraîne la condition $\exp(tY)M^\perp \subset M'^\perp$.

Considérons la base $\omega_1 \dots \omega_p \omega_{p+1} \dots \omega_n$ du module des formes de degré 1

$$\theta(\omega_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j(x) \omega_j$$

Par hypothèse si $i > p$ et $j \leq p$, $\alpha_i^j = 0$. Posons $\exp(tY)\omega_i = \sum_{j=1}^n \lambda_i^j(x,t) \omega_j$.

Les conditions initiales sont

$$\lambda_i^j(x, 0) = \delta_{ij}$$

Supposons $i > p$ et $j \leq p$, montrons que cela entraîne $\lambda_i^j(x, t) \equiv 0$. Or

$$\frac{d}{dt} [\exp(tY) \omega_i] = \theta(Y) \cdot \exp(tY) \omega_i.$$

En identifiant les coefficients de ces deux formes, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_i^j(x, t) = \sum_{k=1}^n \alpha_i^k(x) \lambda_k^j(x, t)$$

or $\alpha_i^k = 0$ si $k \leq p$ et $i > p$.

Le système d'équation qui nous intéresse s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_i^j(x, t) = \sum_{k=p+1}^n \alpha_i^k \lambda_k^j$$

$i = p+1, \dots, n$; j fixé, $\leq p$.

Il est linéaire homogène, de $n-p$ équations à $n-p$ inconnues. Il admet une solution unique qui prend la valeur

$$\lambda_i^j(x, 0) = 0$$

c'est donc la solution constamment nulle. C.Q.F.D.

Corollaire 1. Soient W une variété intégrale du système (M) et Y un champ de vecteurs vérifiant $\theta(Y)M \subset M$. Pour tout t (assez voisin de 0) $\exp(tY)W$ est une variété intégrale de (M) .

En effet, $\exp(tY)$ étant (localement) un difféomorphisme, $\exp(tY)W$ est une sous variété de V ; et il est clair que les vecteurs tangents à $\exp(tY)W$ appartiennent à $\exp(tY)M$, donc à M d'après le théorème précédent.

Corollaire 2. Outre les hypothèses précédentes, supposons qu'on ait $Y \notin M$ et que Y soit transversale à W (i.e. Y n'est tangent à W en aucun point ; en particulier, $Y \neq 0$ en tout point de W). Alors l'ensemble $\exp(tY)W$ est une variété intégrale de M de dimension égale à $\dim W + 1$.

Choisissons en effet, au voisinage d'un point $a \in W$, un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) avec $x_i(a) = 0$, tel que W soit défini par $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$; et supposons qu'on ait $Y(a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$.

Considérons l'application $(t, x_1, \dots, x_k) \rightarrow \exp(tY)x$ x étant le point de W de coordonnées (x_1, \dots, x_k) ; il est clair que cette application est de rang $k+1$ en a , donc $\exp(tX)W$ est une variété au voisinage de a . C'est une variété intégrale puisque les vecteurs tangents à $t = \text{constante}$ appartiennent à M (corollaire 1) et qu'un vecteur tangent à $x = \text{constante}$ est Y , et qu'on a $Y \in M$.

Ce corollaire amène à poser la définition suivante :

Définition. On appelle système caractéristique du système de Pfaff (M) le système (N) des champs de vecteurs V vérifiant

1. $Y \in M$
2. $\theta(Y)M \subset M$

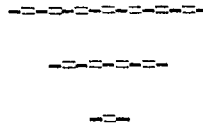
Ces conditions s'écrivent encore ainsi :

$$\forall \omega \in M^\perp \quad \begin{cases} \langle Y, \omega \rangle = 0 \\ \theta(Y)\omega \in M^\perp \end{cases}$$

et comme $\theta(Y)\omega = d\langle Y, \omega \rangle + Y \lrcorner d\omega$

$$\forall \omega \in M^\perp \quad \begin{cases} \langle Y, \omega \rangle = 0 \\ Y \lrcorner d\omega \in M^\perp \end{cases}$$

Il en résulte que (avec les hypothèses de rang constant), N^\perp est engendré par les $\omega \in M^\perp$ et les $X \lrcorner d\omega$, $X \in M$, $\omega \in M^\perp$.



 (Exposés de B. Malgrange)

Théorème de Frobenius

I. Théorème de Frobenius.

Rappel. Hypothèse de rang constant. Soit un système de Pfaff défini au voisinage de l'origine par la donnée d'un sous-module M du module Θ des champs de vecteurs sur V . L'hypothèse suivante sera toujours sous-entendue :

M_a désignant le sous-ensemble de T_a formé des vecteurs $X(a)$ avec $X \in M$, le rang de M_a est indépendant du point a (appartenant au voisinage de l'origine dans lequel le système de Pfaff est défini).

D'autre part, les fonctions, champs de vecteurs, etc... sont toujours supposés de classe C^∞ (pour simplifier).

Définition. Système complètement intégrable. M est dit complètement intégrable (on dit quelquefois complet), si M^\perp est engendré par des différentielles exactes. Soit p le rang de M . En rétrécissant au besoin le voisinage de l'origine dans lequel est défini le système de Pfaff, on peut donner la définition équivalente :

M est complètement intégrable si \exists $(n-p)$ fonctions numériques : $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$ telles que M^\perp soit engendré par $df_{p+1}, df_{p+2}, \dots, df_n$.

Les fonctions f_{p+1}, \dots, f_n sont des intégrales premières du système (M) .

Choisissons un système de coordonnées locales (x_1, x_2, \dots, x_n) tel que M^\perp soit engendré par $dx_{p+1}, dx_{p+2}, \dots, dx_n$. $\theta(M)$ est alors engendré par : $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$.

Théorème. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système M soit complètement intégrable est que :

$$(1) \quad \forall X \in M, \forall Y \in M, [X, Y] \in M.$$

Le système caractéristique étant l'ensemble $\{X \mid X \in M \text{ et } \Theta(X) (M) \in M\}$, il revient au même de dire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit complètement intégrable est qu'il soit son propre système caractéristique.

Lemme préliminaire. La condition (1) est équivalente à la suivante :

(2) \parallel Si $\omega \in M^\perp$, $d\omega \in \mathcal{J}$ où \mathcal{J} désigne l'idéal engendré par M^\perp dans l'algèbre extérieure du module des formes différentielles : $\wedge E^*$.

La condition (1) est équivalente par dualité à : $\Theta(X)M^\perp \subset M^\perp \quad \forall X \in M$.

Soient donc $X \in M$ et $\omega \in M^\perp$. D'après la formule de Cartan : $\Theta(X)\omega = X \lrcorner d\omega$, puisque $d(X \lrcorner \omega) = 0$.

Soient : X_1, X_2, \dots, X_p la base de M au voisinage de l'origine

$X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ la base complétée de Θ

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ la base duale du module E^* des formes différentielles

$(\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij} \text{ en tout point})$.

Décomposons $d\omega$ suivant la base de $\wedge^2 E^*$: $d\omega = \sum_{i < j} c_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$

$$\begin{aligned} X_i \lrcorner d\omega &= \sum_{j < k} c_{jk} X_i \lrcorner (\omega_j \wedge \omega_k) \\ &= \sum_{j < k} c_{jk} \left\{ [(X_i \lrcorner \omega_j) \wedge \omega_k] - \omega_j \wedge (X_i \lrcorner \omega_k) \right\} \\ &= \sum_{j > i} c_{ij} \omega_j - \sum_{j < i} c_{ji} \omega_j \end{aligned}$$

$\forall i \leq p, X_i \lrcorner d\omega \in M^\perp \iff \underline{c_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \text{ tel que } i \leq p \text{ et } j \leq p}$ c'est à dire

$c_{ij} \neq 0 \iff j \gg p + 1. \quad \text{C.Q.F.D.}$

Ces conditions sont nécessaires. Soient X et $Y \in M$.

$\forall df$ de la base de $M^\perp, \quad \Theta(X)f = 0 \text{ et } \Theta(Y)f = 0$

$\implies \Theta(X)\Theta(Y)f - \Theta(Y)\Theta(X)f = 0$ c'est à dire : $\langle [X, Y], df \rangle = 0$ donc

$[X, Y] \in M.$

Ces conditions sont suffisantes.

Choisissons les coordonnées initiales telles que, à l'origine :

$$\begin{cases} X_1(0) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \\ X_2(0) = (0 \ 1 \ \dots \ 0) \\ \vdots \\ X_p(0) = (0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \end{cases}$$

et posons : $a(x_{p+1}, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$.

Considérons dans \mathbb{R}^n l'application qui au point (x_1, x_2, \dots, x_n) supposé voisin de 0 fait correspondre le point (de coordonnées (y_1, y_2, \dots, y_n)) :

$$\exp(x_1 X_1) \exp(x_2 X_2) \dots \exp(x_p X_p) a(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n).$$

Calculons le Jacobien de la transformation à l'origine :

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{pour } j \leq p \quad \text{en vertu du choix des coordonnées de } X_1(0), \dots, X_p(0).$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{pour } i \text{ et } j \gg p+1 \quad (\text{évident}).$$

Le Jacobien vaut 1. Il existe donc un ouvert de V contenant l'origine sur lequel on puisse prendre pour coordonnées locales les x_i au point dont les coordonnées locales dans le système initial sont : y_1, y_2, \dots, y_n .

$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ étant fixés, l'ensemble :

$$W = \exp(x_1 X_1) \exp(x_2 X_2) \dots \exp(x_p X_p) a(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$$

est une variété intégrale de M de dimension p (il suffit d'appliquer $(p-1)$ fois le corollaire 2 - exposé 3 - à la trajectoire du groupe à 1 paramètre $\exp(x_p X_p)$ passant par le point $a(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$).

L'espace tangent à W est engendré par X_1, \dots, X_p et dans le système de coordonnées locales choisies, on a :

$$\theta(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\forall i = 1, 2, \dots, p)$$

M est donc bien complètement intégrable.

Notation. Les coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) seront dites "adaptées au système M".

Exemples de systèmes complètement intégrables.

1. Le système caractéristique d'un système de Pfaff quelconque est complètement intégrable.

En effet : $N = \{X \mid X \in M \text{ et } \theta(X)M \subset M\}$.

Soient X et $Y \in N$. $[X, Y] \in M$ et

$$\theta[X, Y]M = \theta(X)\theta(Y)M - \theta(Y)\theta(X)M \subset M \text{ donc } [X, Y] \in N.$$

2. Soit ω une forme différentielle de degré quelconque. Le système extrémal de ω , c'est à dire l'ensemble $\{X \mid \theta(X)d\omega = 0\}$ est complètement intégrable.

En effet, $\theta(X)d\omega = 0$ et $\theta(Y)d\omega = 0$ entraînent :

$$\theta[X, Y]d\omega = \theta(X)\theta(Y)d\omega - \theta(Y)\theta(X)d\omega = 0.$$

N.B. : On ne doit pas confondre le système précédent avec le système caractéristique du système de Pfaff M défini par $\omega = 0$ (ω est ici une forme de degré 1) qui est :

$$\left\{ X \mid X \in M \text{ et } \theta(X)\omega = \lambda\omega \right\} \text{ c'est à dire}$$

$$\left\{ X \mid X \in M \text{ et } X \lrcorner d\omega = \lambda\omega \right\} \text{ puisque } X \lrcorner \omega = 0.$$

II. Systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles avec second membre.

Soient p champs de vecteurs X_i et p fonctions g_i . On considère les p équations : $\theta(X_i)f = g_i$. (1)

1er cas. Le système M (engendré par les X_i) est complètement intégrable.

Si on utilise des coordonnées locales adoptées au système M , ces équations peuvent s'écrire : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = h_i$ et on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que : $\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \quad \forall i \text{ et } j \in [1, p]$. (2)

Cherchons la condition d'existence des solutions pour le système d'équations écrit en coordonnées non adaptées.

Condition nécessaire pour qu'il existe une solution.

Par hypothèse, il existe k fonctions α_{ij}^k telles que

$$[X_i, X_j] = \sum_k \alpha_{ij}^k X_k.$$

Si f est une solution du système (1), $\theta[X_i, X_j]f = \sum_k \alpha_{ij}^k \theta(X_k)f$. On en déduit :

$$\theta(X_i)g_j - \theta(X_j)g_i = \sum_k \alpha_{ij}^k g_k \quad (3).$$

Montrons que ces conditions sont suffisantes.

1ère méthode. On pourrait vérifier par un calcul fastidieux que les conditions (3) sont conservées dans un changement de coordonnées locales. En coordonnées adaptées au système, on obtient les conditions (2), dont on a vu qu'elles étaient suffisantes.

2me méthode. Si f est solution du système d'équations (1), la fonction

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ peut être considérée comme définie implicitement par une relation : $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, au voisinage des points $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ pour lesquels

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \text{ On a } \frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Soit alors X un champ donné sur V de composantes (a_i) .

$$\theta(X)f = g \iff \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = g \iff \sum_j a_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

équation de la forme : $\theta(\overline{\Sigma})f = 0$ où $\overline{\Sigma}$ est un champ (sur la variété $\subset V \times \mathbb{R}$)

dont les composantes sont : (a_1, \dots, a_n, g) .

Résoudre le système (1) équivaut donc à résoudre le système :

$$(4) \quad \begin{cases} \theta(\overline{\Sigma}_i)F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \end{cases}$$

Or le système de Pfaff \mathcal{M} engendré par les $\overline{\Sigma}_i$ est complètement intégrable. En effet,

si par abus de notation nous notons X le champ (défini sur la variété $\subset V \times \mathbb{R}$) de

composantes : $(a_1, a_2, \dots, a_n, 0)$,

$$\begin{aligned} \theta[\overline{\Sigma}_i, \overline{\Sigma}_j]F &= (\theta(X_i) + g_i \frac{\partial}{\partial z})(\theta(X_j)F - g_j \frac{\partial F}{\partial z}) - (\theta(X_j) + g_j \frac{\partial}{\partial z})(\theta(X_i)F - g_i \frac{\partial F}{\partial z}) \\ &= \theta[X_i, X_j]F + (\theta(X_i)g_j - \theta(X_j)g_i) \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned}$$

Le système de Pfaff M engendré par les X_i étant complètement intégrable et les conditions (3) étant supposées réalisées :

$$\theta \left[\sum_i, \sum_j \right] F = \sum_k \alpha_{ij}^k (\theta(X_k)F + g_k \frac{\partial F}{\partial z}) = \sum_k \alpha_{ij}^k \theta(\sum_k) F = 0 .$$

D'autre part, les X_k étant linéairement indépendant, le champ de composantes

$(0, 0, \dots, 1)$ n'appartient pas à \mathcal{M} . Il existe donc des solutions de $\theta(\sum_i) F = 0$ telles que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ à l'origine et par suite des solutions de $\theta(X_i)F = g_i$. C.Q.F.D.

2ème cas. Le système de Pfaff M engendré par les X_i n'est pas complètement intégrable.

Si M n'est pas complètement intégrable, nous pouvons obtenir d'autres équations linéaires du 1er ordre :

$$\theta[X_i, X_j]F = \theta(X_i)g_j - \theta(X_j)g_i$$

Soit M' le plus petit système de Pfaff contenant M est stable pour l'opération crochet (le théorème de Zorn permet de démontrer qu'il en existe un). Si nous faisons en outre, l'hypothèse de régularité suivante :

les relations de dépendance linéaire ayant lieu à l'origine dans l'ensemble des champs X_i et des champs obtenus à partir des X_i au moyen de l'opération crochet sont aussi vérifiées dans un voisinage de l'origine, le système de Pfaff M' vérifie l'hypothèse de rang constant. On peut alors résoudre le système d'équations avec second membre correspondant à M' et en déduire les solutions de M .

 =

(Exposés de B. Malgrange)

(rédigé par A. Douady)

Théorème de Frobenius complexe. I.

I. Vecteurs complexes.

Soit V une variété de classe C^∞ de dimension (réelle) n . Pour tout point a de V , T_a est l'espace des vecteurs de V en a (exposé 1), et on posera

$$\tilde{T}_a = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_a .$$

Les éléments de \tilde{T}_a s'appelleront vecteurs complexes de V en a . Un vecteur complexe $X \in \tilde{T}_a$ se décompose de façon unique sous la forme $X = X' + iX''$, où X' et X'' sont des vecteurs réels (i.e. X' et $X'' \in T_a$).

Les covecteurs complexes de V en a sont les éléments de

$$\tilde{T}_a^* = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_a^* = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T_a ; \mathbb{C}) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\tilde{T}_a ; \mathbb{C}) .$$

Si $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est une application C^∞ considérée comme application dans \mathbb{R}^2 sous-jacent à \mathbb{C} ; pour tout point a de V , $d_a f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T_a ; \mathbb{C}) = \tilde{T}_a^*$ est un covecteur complexe en a .

Les p-vecteurs complexes en a sont les éléments de

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^p(T_a) = \wedge^p_{\mathbb{C}}(\tilde{T}_a) .$$

Les p-covecteurs complexes en a sont les éléments de : $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^p(T_a^*) = \wedge^p_{\mathbb{C}}(\tilde{T}_a^*)$.

On peut aussi les représenter comme des formes p - \mathbb{R} -linéaires alternées de T_a dans \mathbb{C} .

On notera :

- Ω^0 l'anneau des fonctions de classe C^∞ sur V à valeurs dans \mathbb{R}
- $\tilde{\Omega}^0$ _____ \mathbb{C}
- Θ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} (Ω^0 -module) des champs de vecteurs (réels) de classe C^∞ sur V
- $\tilde{\Theta}$ _____ \mathbb{C} ($\tilde{\Omega}^0$ -module) _____ complexes _____
- Ω^p l'espace vectoriel sur \mathbb{R} (Ω^0 -module) des formes différentielles extérieures (réelles) de degré p de classe C^∞ sur V
- $\tilde{\Omega}^p$ _____ \mathbb{C} ($\tilde{\Omega}^0$ -module) _____ (complexes) _____ .

Pour tout champ de vecteurs complexes $X \in \tilde{\Theta}$, on définit l'opérateur $\theta(X)$: $\tilde{\Omega}^p \rightarrow \tilde{\Omega}^p$ par "extension des scalaires" à partir du cas réel, i.e.

$$\theta(X' + iX'')(\omega' + i\omega'') = \theta(X')(\omega') - \theta(X'')(\omega'') + i\theta(X')(\omega'') + i\theta(X'')(\omega')$$

On définit de même $d : \tilde{\Omega}^p \rightarrow \tilde{\Omega}^{p+1}$ par $d(\omega' + i\omega'') = d\omega' + id\omega''$, et

$$[X' + iX'', Y' + iY''] = [X', Y'] - [X'', Y''] + i[X', Y''] + i[X'', Y'].$$

La formule $\theta(X)(\omega) = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)$ est encore valable, le produit intérieur devant maintenant être pris dans l'algèbre extérieure $\bigwedge_{\mathbb{C}}(T_a^*)$ de T_a^* sur \mathbb{C} .

Enfin l'automorphisme $z \rightarrow \bar{z}$ de \mathbb{C} donne naissance à une application $\theta \rightarrow \bar{\theta}$ de $\tilde{\Theta}$ (resp. $\tilde{\Omega}^p$) dans lui-même, définie par $\overline{\theta' + i\theta''} = \theta' - i\theta''$. C'est un automorphisme pour la structure réelle sous-jacente, antilinéaire pour la structure complexe $\overline{\lambda\theta} = \bar{\lambda}\bar{\theta}$, et Θ (resp. Ω^p) s'identifie au sous-espace vectoriel sur \mathbb{R} de $\tilde{\Theta}$ (resp. $\tilde{\Omega}^p$) formé des θ tels que $\bar{\theta} = \theta$. On a $\overline{[\theta_1, \theta_2]} = [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ et $\overline{d\omega} = d\bar{\omega}$.

II. Systèmes de Pfaff complexes.

Soit $M \subset \tilde{\Theta}$ un sous- Ω^0 -module, i.e. un ensemble de champs de vecteurs complexes stable par addition et par multiplication par une fonction à valeurs complexes. Pour tout point $a \in V$, on note M_a le sous-espace vectoriel de \tilde{T}_a formé des valeurs prises en a par les champs de vecteurs de M . Sa dimension (sur \mathbb{C}) est le rang de M en a .

L'espace $M \cap \Theta$ des champs de vecteurs réels de M est un sous- Ω^0 -module de Θ . On a l'inclusion $\mathbb{C} \otimes (M \cap \Theta) \subset M$. M sera dit de type réel si $\mathbb{C} \otimes (M \cap \Theta) = M$. L'image \bar{M} de M par $\theta \rightarrow \bar{\theta}$ est encore un sous- Ω^0 -module de $\tilde{\Theta}$, et $M \cap \bar{M}$ est le plus grand sous-module de type réel contenu dans M . De même $M + \bar{M}$ est le plus petit sous-module de type réel contenant M .

Définition 1. Un système de Pfaff complexe sur une variété V de classe C^∞ de dimension (réelle) n est un sous- Ω^0 -module M de $\tilde{\Theta}$ tel que

- $$\begin{cases} (1) & M \text{ est de rang constant, i.e. } \dim M_a = p \text{ indépendant de } a. \\ (2) & \dim M_a \cap \bar{M}_a = q = p - r \text{ indépendant de } a. \end{cases}$$

Remarque : On a $(M \cap \bar{M})_a \subset M_a \cap \bar{M}_a$, mais on n'a pas l'égalité en général, et on ne peut pas remplacer la condition (2) par la condition "M \cap \bar{M} est de rang constant". Par contre on a bien $(M + \bar{M})_a = M_a + \bar{M}_a$, et la condition (2) est équivalente à : (2') M + \bar{M} est de rang constant p + r.

Soit M un système de Pfaff complexe sur V, un champ de vecteurs $X \in \mathcal{O}$ appartient à M si et seulement si $X(a) \in M_a$ pour tout point a de V. Soit U un ouvert de V, le système de Pfaff M_U induit par M sur U est le sous $\Omega^0(U)$ -module de $\mathcal{O}(U)$ engendré par les restrictions à U des champs de M. C'est aussi l'espace des champs de vecteurs X de classe C^∞ sur U tels que $X(a) \in M_a$ pour tout $a \in U$.

III. Systèmes de Pfaff complexes intégrables.

Définition 2. Le système de Pfaff complexe M sur V sera dit intégrable au voisinage d'un point a de V s'il existe un voisinage U de a et des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) définissant une carte $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tels que M_U soit le module engendré par

$$E_1, \dots, E_{p-r}, E_{p-r+1} + iE_{p+1}, \dots, E_p + iE_{p+r},$$

où E_i désigne le champ de vecteurs sur U tel que $\theta(E_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. M sera dit intégrable sur V s'il est intégrable au voisinage de chaque point de V.

Remarques. 1) p est le rang de M, p-r celui de $M \cap \bar{M}$. En particulier, un système de Pfaff complexe M de type réel est intégrable si et seulement si le système de Pfaff réel $M \cap \mathcal{O}$ dont il est le complexifié est intégrable.

2) Si M est intégrable, $M \cap \bar{M}$ et $M + \bar{M}$ sont intégrables : en effet, sur un ouvert U satisfaisant aux conditions de la définition 2, $(M \cap \bar{M})_U$ est engendré par E_1, \dots, E_{p-r} et $(M + \bar{M})_U$ par E_1, \dots, E_{p+r} .

3) Si M est un système intégrable, U un ouvert et (x_1, \dots, x_n) des coordonnées locales satisfaisant aux conditions de la définition 2, le sous module M_U^\perp de $\tilde{\Omega}^1(U)$ formé des formes ω telles que $\langle X, \omega \rangle = 0$ pour tout $X \in M$ est engendré par $dx_{p-r+1} + idx_{p+1}, \dots, dx_p + idx_{p+r}, dx_{p+r+1}, \dots, dx_n$.

Proposition 1. Soit M un système de Pfaff complexe intégrable sur V . Pour tous champ X et Y de $\tilde{\Omega}$,

$$(a) \quad X \in M \text{ et } Y \in M \implies [X, Y] \in M$$

$$(b) \quad X \in M + \bar{M} \text{ et } Y \in M + \bar{M} \implies [X, Y] \in M + \bar{M}.$$

Démonstration. M étant intégrable, soit (U_i) un recouvrement de V par des ouverts satisfaisant aux conditions de la définition 2. Pour tout champ $X \in \tilde{\Omega}$, $X \in M \iff (\forall i), X|_{U_i} \in M_{U_i}$; il suffit donc de démontrer la proposition pour de tels ouverts. Sur un tel ouvert, la condition $X \in M$ s'écrit

$$(1) \quad \begin{cases} \langle X, d(x_{p-r+1} + ix_{p+1}) \rangle = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \langle X, d(x_p + ix_{p+r}) \rangle = 0 \\ \langle X, dx_{p+r+1} \rangle = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \langle X, dx_n \rangle = 0 \end{cases}$$

La formule $\langle [X, Y], df \rangle = \langle X, d \langle Y, df \rangle \rangle - \langle Y, d \langle X, df \rangle \rangle$ montre que, si X et Y vérifient les équations (1), il en est de même de $[X, Y]$, d'où la partie (a) de la proposition. La partie (b) s'en déduit en remarquant que, si M est intégrable, $M + \bar{M}$ est aussi intégrable.

Le "Théorème de Frobenius complexe" dont la démonstration est le but de cette série d'exposés, est la réciproque de la proposition 1 : les conditions (a) et (b) sont aussi suffisantes pour que M soit intégrable.

Exercice : Montrer que la condition (a) est équivalente à (a') : l'idéal de l'algèbre $\tilde{\Omega}^*$ engendré par $M^\perp \subset \tilde{\Omega}^1$ est stable par d . Énoncé analogue pour la condition (b).

IV. Première réduction du problème. Considérons l'énoncé suivant, dépendant des entiers n, p, r : $F(n, p, r)$: Sur toute variété V de dim n , tout système de Pfaff complexe M de rang p tel que $M \cap \bar{M}$ soit de rang $p - r$ et qui vérifie les conditions (a) et (b) est intégrable.

Proposition 2. $F(n-p+r, r, r) \implies F(n, p, r)$.

Démonstration. Soit M un système de Pfaff complexe de rang p sur V , tel que $M \cap \bar{M}$ soit de rang $p - r$. Si M est stable par le crochet, il en est de même de \bar{M} et de $M \cap \bar{M}$, et du système de Pfaff réel $M \cap \Theta$ dont $M \cap \bar{M}$ est le complexifié. D'après le théorème de Frobenius réel, $M \cap \Theta$ est intégrable, et pour tout point a de V il existe une carte représentant un voisinage de a sur une boule ouverte U de centre 0 dans \mathbb{R}^n , tel que $(M \cap \Theta)_U$ soit le Ω_U^0 -module engendré par les premiers champs de vecteurs E_1, \dots, E_{p-r} de la base canoniquement définie par la carte, i.e.

$$(M \cap \Theta)_U = \left\{ X \in \Theta_U \mid \langle X, dx_i \rangle = 0 \text{ pour } i > p-r \right\}.$$

Lemme. Soit M un système de Pfaff complexe sur V , $X \in \Theta$ un champ de vecteurs réels sur V . Si $Y \in M \implies [X, Y] \in M$, M est invariant par $\exp(tX)$.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme analogue dont on s'est servi pour le théorème de Frobenius réel. Notons cependant que $\exp(tX)$ n'a de sens que pour X champ de vecteur réel.

Suite de la démonstration de la proposition 2.

Soit U_0 la trace de U sur le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par $x_1 = \dots = x_{p-r} = 0$, et M_0 le module des champs de vecteurs complexes Y sur U_0 tels que $Y(a) \in M_a$ pour tout $a \in U_0$. On vérifie que M_0 est un système de Pfaff complexe sur U_0 , de rang $(p-r)$, et tel que $M_0 \cap \bar{M}_0 = 0$.

Il résulte du lemme et de la condition (a) que M_U est invariant par les transformations $\exp(x_i E_i)$ pour $1 \leq i \leq p-r$, donc que M_U est l'image transposée de M_0 par la projection $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow H$, i.e. $Y \in M \iff \forall a \in U \quad \pi^T(Y(a)) \in (M_0)_{\pi(a)}$. D'autre part M_0 vérifie les conditions (a) et (b).

L'énoncé $F(n - p+r, r, r)$ dit qu'on peut trouver un voisinage U'_0 de 0 dans U_0 et des fonctions coordonnées y_{p-r+1}, \dots, y_n sur U'_0 tel que $(M_0)_{U'_0}$ soit l'ensemble des champs de vecteurs Y sur U'_0 tels que

$$\begin{aligned} \langle Y, d(y_{p-r+1} + iy_{p+1}) \rangle &= \dots = \langle Y, d(y_p + iy_{p+r}) \rangle = \langle Y, dy_{p+r+1} \rangle \\ &= \dots = \langle Y, dy_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $x_1, \dots, x_{p-r}, y_{p-r+1}, \dots, y_n$ forment des coordonnées sur $U' = U \cap \pi^{-1}(U'_0)$, et les champs de vecteurs $Y \in M_{U'}$ sont caractérisés dans $\Theta(U')$ par :

$$\langle Y, d(y_{p-r+1} + idy_{p+1}) \rangle = \dots = \langle Y, dy_n \rangle = 0,$$

et $M_{U'}$ est donc intégrable au voisinage de 0, ce qui est l'énoncé $F(n, p, r)$. Il en résulte que pour démontrer le théorème de Frobenius complexe, il suffira de le démontrer dans le cas où $p = r$.

V. Deuxième réduction.

Soit V une variété de dimension n , M un système de Pfaff complexe sur V de rang r , tel que $M \cap \bar{M} = 0$, et vérifiant (a) et (b). Il résulte de (b) que le système de Pfaff réel $(M + \bar{M}) \cap \Theta$ est intégrable, donc pour tout point a de V il existe une carte représentant un voisinage de a dans V sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^n , tel que $(M + \bar{M})_U$ soit le Ω_U^0 -module engendré par E_1, \dots, E_{2r} . On peut supposer U de la forme $U_0 \times U_1$, $U_0 \subset \mathbb{R}^{2r}$, $U_1 \subset \mathbb{R}^{n-2r}$. Pour chaque $t \in U_1$, M induit sur $U_0 \times t$, qui est de dimension $2r$, un système de Pfaff complexe M_t de rang r , avec $M_t \cap \bar{M}_t = 0$, et chaque M_t vérifie (a).

La famille $(M_t)_{t \in U_1}$ est une famille de systèmes de Pfaff complexes de rang r sur U_0 , dépendant de façon C^∞ de t au sens suivant : il existe r champs de vecteurs $X_{1,t}, \dots, X_{r,t}$ sur U_0 dépendant de t qui pour chaque t engendrent M_t , et pour chaque i , $X_{i,t}(a)$ dépend de façon C^∞ du couple $(u,t) \in U_0 \times U_1 = U$. Pour montrer que M est intégrable, on cherche des fonctions $y_i(u,t)$, $1 \leq i \leq 2r$, telles que les coordonnées $y_1, \dots, y_{2r}, x_{2r+1}, \dots, x_n$ satisfassent aux conditions de la définition 2. Or ceci est équivalent aux conditions :

$\alpha)$ y_i est de classe C^∞ par rapport au couple (u,t)

$\beta)$ Pour tout t , les coordonnées $y_{i,t}$ satisfont aux conditions de la définition 2 pour le système de Pfaff complexe M_t sur U_0 .

On voit donc que $F(n, r, r)$ sera une conséquence de $F(2r, r, r)$ complété de la façon suivante :

$F'(r)$: Sur toute variété V de dimension $2r$, tout système de Pfaff complexe M de rang r tel que $M \cap \bar{M} = 0$ et qui vérifie (a) est intégrable. De plus, si M dépend de façon C^∞ d'un paramètre $t \in W$, on peut trouver au voisinage de chaque point $a \in V$ et de chaque valeur $t_0 \in W$ du paramètre un système de coordonnées locales de V satisfaisant aux conditions de la définition 2 et dépendant de façon C^∞ de t .

Remarquons que la condition (b) est ici une conséquence triviale des hypothèses de rang, car $M + \bar{M} = \tilde{\mathcal{O}}$.

La démonstration du théorème de Frobenius complexe est donc ramenée à celle de $F'(r)$. Dans l'exposé oral, on se contentera de démontrer la première partie, laissant aux auditeurs et au rédacteur, voire au lecteur, le soin de vérifier que toutes les constructions faites dépendent de façon C^∞ de paramètres éventuels.

VI. Variétés presque-complexes.

Nous allons donner une interprétation de $F(2r, r, r)$.

Définition. Une structure presque-complexe sur une variété C^∞ V de dimension réelle $2r$ est la donnée, pour chaque point a de V , d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} sur $T_a(V)$, variant de façon C^∞ avec a (i.e. pour chaque carte, la matrice J_a qui correspond à la multiplication par i dépend de façon C^∞ de a).

Soient V et W deux variétés presque-complexes, une application de classe C^∞ $f : V \rightarrow W$ est dite holomorphe si, pour tout $a \in V$, l'application linéaire tangente $f^T : T_a(V) \rightarrow T_{f(a)}(W)$ est \mathbb{C} -linéaire.

Soit V une variété de dimension réelle $2r$, munie d'une structure presque complexe J . L'application identique $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'espace des champs de vecteurs réels sur V se prolonge de façon unique en une application \mathbb{C} -linéaire $\bar{i} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbb{R} étant

muni de sa structure d'espace vectoriel complexe naturelle, et \mathbb{C} de la structure d'espace vectoriel complexe définie par J . Le noyau M de \bar{i} est un système de Pfaff complexe sur V , de rang r , tel que $M \cap \bar{M} = 0$.

Réciproquement, si on se donne un système de Pfaff complexe M sur une variété V de dimension $2r$, tel que M soit de rang r et $M \cap \bar{M} = 0$, l'application composée : $\mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}/M$ est un isomorphisme de \mathbb{C} sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à l'espace vectoriel complexe $\tilde{\mathbb{C}}/M$. En transportant par cet isomorphisme la structure complexe de $\tilde{\mathbb{C}}/M$, on trouve une structure d'espace vectoriel complexe sur \mathbb{C} , qui provient d'une structure presque complexe unique sur V .

La donnée d'une structure presque complexe J sur V est donc équivalente à la donnée d'un système de Pfaff complexe M de rang r tel que $M \cap \bar{M} = 0$ (c'est à dire qu'il y a une bijection canonique entre l'ensemble des structures presque complexes sur V et l'ensemble des systèmes de Pfaff M satisfaisant à ces conditions de rang).

Définition. Une structure presque complexe J sur une variété V de dimension réelle $2r$ sera dite intégrable si elle est sous jacente à une structure analytique complexe de dimension r .

Pour que la structure presque-complexe J soit intégrable, il faut et il suffit que, pour chaque point $a \in V$, il existe une carte représentant un voisinage U de a sur un ouvert $U' \subset \mathbb{C}^r$ par une application holomorphe. La structure analytique complexe est alors unique, car les applications holomorphes d'un ouvert de \mathbb{C}^r dans un autre sont analytiques-complexes.

Proposition 3. Pour que la structure presque complexe J définie sur une variété V de dimension réelle $2r$ par un système de Pfaff M soit intégrable, il faut et il suffit que M soit intégrable.

Démonstration. Pour que des coordonnées locales (x_1, \dots, x_{2r}) sur un voisinage U de a satisfassent aux conditions de la définition 2, il faut et il suffit que l'application $(x_1 + ix_{r+1}, \dots, x_r + ix_{2r})$ de U dans \mathbb{C}^r soit holomorphe.

L'énoncé $F(2r, r, r)$ est donc équivalent au suivant :

Pour que la structure presque complexe J définie sur une variété V de dimension réelle $2r$ par un système de Pfaff complexe M de rang r tel que $M \cap \bar{M} = 0$ soit intégrable, il faut et il suffit que M soit stable par le crochet, i.e.

$$X \in M, Y \in M \implies [X, Y] \in M.$$

Pour démontrer le théorème de Frobenius complexe, il reste donc à démontrer cet énoncé, et à vérifier que la construction qu'on donnera de coordonnées holomorphes dans C^r dépend de façon C^∞ de paramètres éventuels.

Note sur les exposés de B. MALGRANGE

Les exposés 1 - 4 ont été faits d'après des notes prises à un cours de H. CARTAN à l'E.N.S. en 1948-49, et un cours (ronéotypé) de A. BLANCHARD à Montpellier, 1959-60.

Les résultats de l'exposé 5 sont dûs à L. NIRENBERG (A Complex Frobenius Theorem, New York University 1958).

Les exposés 6 - 7 - 8 étaient consacrés à la démonstration du théorème d'intégrability des structures presque complexes. Ils n'ont pas été rédigés et se limitaient à reproduire la démonstration originale de A. NEWLANDER et L. NIRENBERG (Complex Analytic coordinates in almost-complex manifolds, Ann. of Math., 65, 1957, p. 391-404).
