PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D' ORSAY

S E M I N A I R E

S U R L'E Q U I V A L E N C E R A T I O N N E L L E

PARIS-ORSAY 1971

Mathématiques (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (FRANCE).

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D' ORSAY

S E M I N A I R E

S U R L'E Q U I V A L E N C E R A T I O N N E L L E

PARIS-ORSAY 1971

Exposés de Pierre SAMUEL (rédigé par Marguerite FLEXOR et Jean-Jacques RISLER) et d' Alain LASCOUSE (rédigé par lui-même).

-:-:-:-:-:-

Mathématiques (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (FRANCE).

SEMINAIRE

SUR L'EQUIVALENCE RATIONNELLE.

-:-:-:-:-:-:-

§ 1. INTERSECTION DE CYCLES.

Soit k un corps algébriquement clos. Les variétés que nous supposerons toujours intègres sont par suite irréductibles. Nous appellerons cycle sur V, où V est une variété sur k, toute combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de sous-variétés de V. Un cycle X sera dit homogène si toutes les sous-variétés qui le définissent appelées encore les composantes de X, ont toutes même dimension.

Soient A et B deux sous-variétés de V et C une composante de $A \cap B$.

Nous allons définir la multiplicité d'intersection $i(C, A.B, V)$. Pour cela, considérons les variétés $A \times B$ et $V \times V$ et soit Δ la diagonale de $V \times V$. On a alors un isomorphisme canonique $A \cap B \simeq (A \times B) \cap \Delta$ et à l'aide de cet isomorphisme, C s'identifie à une sous-variété C_Δ de $A \times B$. Dans l'anneau local $\theta = \theta(C_\Delta, A \times B)$, anneau local du point générique de C_Δ dans $A \times B$, l'idéal q qui définit Δ est primaire pour l'idéal maximal et par définition on pose :

$$i(C, A.B, V) = e_\theta(q) \text{ , multiplicité de l'idéal } q \text{ dans } \theta .$$

Par la suite, on suppose que C est non singulière, c'est-à-dire que $\theta(C, V)$ est régulier ou encore, ce qui revient au même, que C n'est pas contenue dans le lien singulier de V. On a alors la formule suivante :

$$\mathrm{Codim}_V(C) \leqslant \mathrm{Codim}_V(A) + \mathrm{Codim}_V(B)$$

(cf. Serre. Algèbre locale et multiplicites . V.18, théorème 3 du § 6).

Si on a l'égalité, C est dite propre et dans le cas contraire C est dite excédentaire.

Cas particuliers : supposons C propre et B intersection complète au voisinage de C .

Soit $(F_1, \ldots, F_q)$ une suite régulière définissant B au voisinage de C . Posons $O' = \theta(C, A)$, q' l'idéal de O' engendre par les valeurs prises par les F_i sur A , qui forment manifestement un système de paramètres dans θ' si C est propre. On a alors $i(C, A.B, V) = e_{\theta'}(q')$ (cf. Samuel. Méthodes d'algèbre abstraite, chap. II, § 5, n° 7, b).

Si de plus A est lui aussi intersection complète au voisinage de C , $\theta' = \theta(C, A)$ est un anneau de Cohen-Macaulay donc dans ce cas, on a :

$$i(C, A.B, V) = \ell g(\theta'/_{q'}) .$$

Par la suite, nous placerons dans le cas où V est non singulière (synonyme : lisse). On définit pour deux sous-variétés A et B les cycles suivants :

$$A \top B = \sum_{C \text{ composante de } A \cap B} i(C, A.B, V)C$$

On pose $A \top B = A.B$ si toutes les composantes de $A \cap B$ sont propres. On dit encore dans ce cas que A.B est défini.

Par linéarité, on définit pour deux cycles le cycle $X \top Y$ et X.Y dans le cas où les composantes de X et Y se coupent proprement.

Nous allons énoncer maintenant une série de propriétés de cette intersection, que nous ne démontrerons pas. Pour les démonstrations, nous vous renvoyons à : Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique par P. Samuel, Springer 1955.

1) <u>Invariance par isomorphisme local</u> : Soient V et V' deux variétés , $\varphi : V \to V'$ un isomorphisme local, soient C', A', B' les images de C, A, B respectivement, alors :

$$i(C,\ A.B,\ V) = i(C',\ A'.B',\ V') \ .$$

2) <u>Associativité</u> : soient X, Y, Z trois cycles homogènes tels que toute composante de $\operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Supp} Y \cap \operatorname{Supp} Z$ soit de codimension $\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z$ alors $\underline{X.(Y.Z) = (X.Y).Z}$: en général, si l'un des deux membres est défini, l'autre l'est aussi.

3) <u>Produit</u> : Soient V et V' deux variétés lisses, X et Y deux cycles de V , X' et Y' deux cycles de V' . On a alors :

$$\underline{(X \times X') \underset{V \times V'}{\cdot} (Y \times Y') = (X \underset{V}{\cdot} Y) \times (X' \underset{V'}{\cdot} Y')}$$

et si l'un des deux membres est défini l'autre l'est aussi.

4) <u>Projection</u> : Soient V et V' deux variétés, A une sous-variété de $V \times V'$ et p la projection de $V \times V'$ sur V . Notons $A' = \overline{p(A)}$, la variété engendrée par $p(A)$. On a $\dim A' \leqslant \dim A$. Si on a l'inégalité stricte, on écrira $pr_V(A) = 0$. Si, au contraire $\dim A' = \dim A$, alors $k(A)$ est une extension finie de $k(A')$ et on pose :

$$pr_V(A) = [k(A) : k(A')]A' \ .$$

On a alors <u>la formule de projection</u>.

Supposons p propre (ce qui sera le cas si V' est projective). Soient X un cycle sur $V \times V'$, Y un cycle sur V . On a alors :

$$\underline{pr_V(X) \underset{V}{\cdot} Y = pr_V(X \underset{V \times V'}{\cdot} (Y \times V'))} \ .$$

Soient V et V' deux variétés, nous appellerons <u>correspondance entre V et V'</u> tout cycle sur $V \times V'$. Soit Z un tel cycle et soit X' un cycle sur V'. Regardons le cycle :

$$Z(X') = pr_V((V \times X').Z)$$

dans le cas où ceci a un sens (c'est-à-dire où $(V \times X').Z$ est défini).
En particulier si f est un morphisme $V \to V'$ et si Z est le graphe de f, pour tout cycle X' sur V', on note $f^{-1}(X') = Z(X')$.

<u>Théorème</u> : <u>Soient X' et Y' deux cycles sur V'. On a alors $f^{-1}(X'.Y') = f^{-1}(X').f^{-1}(Y')$ et si l'un des deux membres est défini l'autre l'est aussi.</u>

Le théorème est une conséquence des résultats précédents et du résultat suivant que l'on appliquera au cas $Z \subset V \times V'$, Z étant isomorphe à V par la projection sur le premier facteur :

<u>Formule d'induction</u> : <u>Soient $U \subset V$ deux variétés non singulières, X un cycle sur U, Y un cycle sur V, on a alors</u> $X \underset{V}{.} Y = X \underset{U}{.} (Y \underset{V}{.} U)$.

§ 2. RELATIONS D'EQUIVALENCES ADEQUATES.

Sauf mention expresse du contraire, la lettre V désignera une variété projective non singulière (i.e. lisse) ; nous noterons $g^d(V)$ le groupe des cycles de codimension d de V. Une relation d'équivalence R (notée $\sim_V$ ou $\sim$ si il n'y a pas de confusion possible) définie entre cycles de même codimension d'une même variété projective lisse V, sera dite adéquate si elle satisfait aux trois axiomes suivants :

$$(R\ A_I)\ X \sim X' \iff X - X' \text{ appartient à un sous-groupe de } g^d(V)$$

que nous noterons $g^d_\sim(V)$.

($R\ A_{II}$) , Z est un cycle sur $V \times V'$, et X' un cycle sur V' tel que $Z(X')$ soit défini, alors $X' \sim 0 \Longrightarrow Z(X') \sim 0$.

($R\ A_{III}$) ("moving lemma").

Si W_j est un ensemble fini de sous-variétés non nécessairement lisses de V , X un cycle sur V , alors il existe un cycle X' sur V tel que $X' \sim X$ et que $X'.W_j$ soit défini pour tout j .

Voici quelques conséquences simples de l'axiome $R\ A_{II}$:

(a) $X \sim_V 0 \Longrightarrow X \times W \sim_{V \times W} 0$.

Il suffit de prendre le cycle $Z = \Delta_V \times W$ de $V \times V \times W$, Δ_V désignant la diagonale de $V \times V$, et d'appliquer $R\ A_{II}$ à $Z(X) = V \times W$.

(b) si X et Y sont deux cycles sur V tels que $X.Y$ soit défini, alors $X \sim 0 \Longrightarrow X.Y \sim 0$.

(c) si X est un cycle sur $V \times W$, alors

$$X \underset{V \times W}{\sim} 0 \Longrightarrow pr_V(X) \underset{V}{\sim} 0$$

(démonstrations analogues à celles de (a)).

<u>Remarque</u> : réciproquement, les conditions a, b, c impliquent $R\ A_{II}$ car, par définition $Z(X') = pr_V((V \times X').Z)$.

<u>Proposition 1</u> : soit X un cycle sur V , W une sous-variété de V telle que $X.W$ soit défini, alors :

$$X \underset{V}{\sim} 0 \Longrightarrow X.W \underset{W}{\sim} 0 \quad .$$

On a, en effet, $X.W = I(X)$ en notant I le graphe de l'injection canonique $W \rightarrow V$.

On voit de même que si Y est un cycle de $W \subset V$, alors :

$$Y \underset{W}{\sim} 0 \Longrightarrow Y \underset{V}{\sim} 0 \ .$$

<u>Théorème I. Le groupe</u> $\mathcal{C}(V) = \bigoplus_{d=0}^{d=\dim V} g^d(V)/_{\underset{\sim}{g}^d(V)}$ <u>est un anneau commutatif gradué, quand on le munit du produit défini par le produit d'intersection des cycles</u>.

Cela va résulter des propriétés du produit d'intersection et des axiomes ci-dessus en vertu du théorème plus précis suivant :

<u>Théorème II. Soit Z un cycle sur $V \times W$</u> .

a) l'application $X \longrightarrow Z(X)$ définit un homomorphisme additif gradué :

$$\mathcal{C}(V) \xrightarrow{Z*} \mathcal{C}(W) \text{ qui ne dépend que de la classe de } Z \ .$$

b) si Z est le graphe d'un morphisme $j : W \to V$ (donc si $Z(X) = j^{-1}(X)$) alors l'homomorphisme Z_* est multiplicatif et de degré zéro. On posera alors $j^* = Z_*$.

En effet, pour que a) ait un sens, il faut prouver que, quel que soit le cycle X sur V , il existe $X' \sim X$ tel que $Z(X')$ soit défini. Cela va résulter du lemme suivant :

<u>Lemme</u> : ("transversalité"). Pour tout nombre positif j , posons : $T_j = \{p \in V | \dim(P \times W \quad \mathrm{Supp}(Z)) > j\}$. Alors T_j est un fermé de V , et si un cycle X de V intersecte proprement toutes les composantes des T_j , $Z(X)$ est défini.

T_j est fermé dans V (Samuel : MAAGA[1] p. 36). Posons :

$X_j = (T_j - T_{j+1}) \cap X$. On voit facilement que

$\dim((X_j \times W) \cap Z) = \dim(X_j) + j$ puisque pour tout point p de X_j on a par définition $\dim((p \times W) \cap \mathrm{Supp}(Z)) = j$: il suffit alors de prendre un point $(p,q) \in (X_j \times W) \cap Z$ générique (p sera alors un point générique de X_j) et de compter les dimensions (MAAGA p. 56).

D'autre part, comme $X_j = (T_j, \ldots, T_{j+1}) \cap X$, on a :

$$\dim(X_j) \leqslant \dim(X) + \dim T_j - \dim V .$$

On a donné une

$$\dim((T_j \times W) \cap Z) = \dim T_j + j \quad \text{(en supposant } T_j \neq T_{j+1}) .$$

Or X est la réunion des X_j donc :

$$\dim((X \times W) \cap Z)) \leqslant \mathrm{Sup} \dim((X_j \times W) \cap Z)) \leqslant \mathrm{Sup}(\dim X + \dim T_j - \dim V + j)$$

$$= \mathrm{Sup}(\dim X + \dim((T_j \times W) \cap Z) - \dim V) = \dim(X \times W) + \dim((V \times W) \cap Z) - \dim(V \times W)$$

ce qui exprime bien que $Z(X)$ est défini.

Le b) du théorème II est maintenant facile, car si on a un morphisme $j : W \to V$ et deux cycles X et Y de V tels que $X.Y$ et $j^{-1}(X.Y)$ soient définis, on a : $j^{-1}(X.Y) = j^{-1}(X).j^{-1}(Y)$.

Le lemme de transversalité permet de trouver deux cycles X' et Y' équivalents à X et Y tels que $j^{-1}(X.Y)$ et $X.Y$ soient définis.

(1) Sigle désignant "Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique" (Erg.der Math.,NF, n° 4, Springer, 1955 et 1967).

§ 3. EQUIVALENCE RATIONNELLE.

Soient V une variété projective non singulière, X et X' deux cycles sur V. Nous dirons qu'ils sont rationnellement équivalents s'il existe un cycle Z sur $V \times \mathbb{P}_1$, deux points a et b de $\mathbb{P}_1$ tels que $Z(a)$, $Z(b)$ soient définis et tels que $X-X' = Z(a)-Z(b)$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1 : a) l'équivalence rationnelle est une relation d'équivalence adéquate.

b) c'est la plus fine des relations d'équivalence adéquates.

On voit tout de suite que b) résulte de a), de l'axiome (RA_{II}) des relations d'équivalence adéquateset du lemme suivant.

Lemme 1 : Soit $\sim$ une relation d'équivalence adéquate. Alors pour tout couple (a,b) de points de $\mathbb{P}_1$, on a $(a) \sim (b)$.

Soit a un point de $\mathbb{P}_1$. D'après le moving Lemma, il existe un cycle $Y = \Sigma\, n_i(b_i)$ sur $\mathbb{P}_1$ tel que $Y \sim (a)$ et $(a).Y$ soit défini, c'est-à-dire $a \neq b_i$ pour tout i. Construisons pour $b \neq a$, une application rationnelle g (donc un morphisme) de $\mathbb{P}_1$ sur $\mathbb{P}_1$ tel que $f(a) = a$ et $f(b_i) = b$. Par exemple, on prend a à l'infini et pour g le polynôme $x \rightsquigarrow b + \prod_i (x-b_i)$. Donc $g_*(a) = (a) \sim g_*(\Sigma\, n_i b_i) = n(b)$ où $n = \Sigma\, n_i$ et où g_* est l'application définie à partir de g de $\varepsilon(\mathbb{P}_1) \to \varepsilon(\mathbb{P}_1)$ (cf. théorème 1 du chapitre précédent) De même on construit un morphisme g' de $\mathbb{P}_1$ dans $\mathbb{P}_1$ tel que $g'(a) = b$ et $g'(b) = b$: on prend le polynôme $x \to b+(x-a)(x-b)$. Par g'_*, on a $b \sim nb$ et donc $a \sim b$.

Avant de montrer a), nous allons faire quelques remarques :

Remarques : Dans la définition de l'équivalence rationnelle, on peut remplacer $\mathbb{P}_1$ par n'importe quel espace projectif $\mathbb{P}_n$, par un produit de droites projectives et plus généralement par une variété dont deux points quelconques peuvent être joints par une courbe rationnelle. On montre que c'est le cas pour une variété unirationnelle, c'est-à-dire une variété dont le corps des fractions rationnelles est une sous-extension d'une extension pure de k ; mais nous n'utiliserons pas ce résultat dont la démonstration est assez "fine".

En effet, on a le résultat suivant :

Lemme 2 : (changement de paramètres) : Soient Z un cycle sur $V \times R$ où V et R sont deux variétés non singulières et r un point de R tel que $Z(r)$ soit défini.

Soient S une variété non singulière, f un morphisme de S dans R et s un point de $f^{-1}(r)$. Notons $f' = 1_V \times f$. Alors $Z' = f'^{-1}(Z)$ et $Z'(s)$ sont définis et $Z'(s) = Z(r)$.

Comme $Z(f(s))$ est défini, $(V \times f(s)).\ Z$ est défini.

Soit Δ la diagonale de $V \times V$, le graphe Δ' de f' est alors $F \times \Delta$ où F est le graphe de f.

Par définition, on a :

$$\begin{cases} f'^{-1}(Z) = pr_{V\times S}((V\times S\times Z) \underset{V\times S\times V\times R}{.} (F\times\Delta)) = Z' \\ Z'(s) = pr_V((V\times s).Z') \\ \qquad = pr_V(pr_{V\times s}((V\times s\times V\times R).(V\times S\times Z.F\times\Delta)) \end{cases}$$

Or $F \times \Delta = (F\times V\times V).(S\times R\times\Delta)$. On est donc ramené à montrer que le produit :

$$T = (V\times s\times V\times R).(V\times S\times Z).(F\times V\times V).(S\times R\times\Delta)$$

est défini et que sa projection sur V est $Z(r)$. Or $(V\times s\times V\times R).F\times V\times V = V\times s\times V\times r$.
On est donc ramené à montrer que :

$$T = (V\times S\times Z).(V\times s\times V\times r)\ (S\times R\times\Delta)$$

est défini et que sa projection sur V est $Z(r)$.

Or $(V\times r).Z$ est défini et égal à $Z(r) \times r$ donc

$$T = (V\times s\times Z(r)\times r).(S\times R\times\Delta)$$
$$= (s\times r)\times(V\times Z(r).\Delta)$$

qui est bien défini et a bien $Z(r)$ pour projection.

On a même un résultat plus précis.

Théorème 2 : Soit X un cycle ~ 0 pour l'équivalence rationnelle. Alors il existe deux points a et b de $\mathbb{P}_1$, un cycle positif sur $V\times\mathbb{P}_1$ tel que $T(a)$ et $T(b)$ soient définis et tel que $X = T(a)-T(b)$.

La démonstration est analogue à celle de (RA_I) ci-dessous.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 1. Nous prendrons en général $\mathbb{P}_1$ comme espace de paramètres et nous noterons $\sim$ l'équivalence rationnelle.

Montrons (RA_I). Soient X et X' deux cycles équivalents à zéro sur V et de même codimension d. Ecrivons $X = Z(a) - Z(b)$, $X' = Z'(a') - Z'(b')$ avec $a,b,a',b' \in \mathbb{P}_1$ et Z et Z' des cycles de $V\times\mathbb{P}_1$. Regardons sur $\mathbb{P}_1\times V\times\mathbb{P}_1$ le cycle $Z\times\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1\times Z'$ on a :

$$U(a\times a') - U(b\times b') = Z(a) - Z'(a') -\big(Z(b) - Z'(b')\big)$$
$$= X - X' .$$

Donc $X - X' \sim 0$ (ici l'espace de paramètres est $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ et il est élémentaire que deux quelconques de ses points peuvent être joints par une courbe rationnelle) ; d'où $X - X' \in g^d(V)$. Montrons maintenant RA_{II} ; nous aurons besoin pour celà des deux résultats suivants :

Proposition 1 : Soient V et W deux variétés non singulières, X un cycle sur V équivalent à 0. Alors $V\times W \sim 0$ sur $V\times W$.

Par linéarité on voit que l'on aura $X\times Y \sim 0$ pour tout cycle Y sur W.

Ecrivons $X = Z(a) - Z(b)$ avec Z cycle sur $V\times\mathbb{P}_1$ et $a,b \in \mathbb{P}_1$. En utilisant la formule d'intersection sur un produit, on voit que $Z'(a)$ est défini et que $Z'(a) = Z(a)\times W$. De même $Z'(b)$ est défini et $Z'(b) = Z(b)\times W$, d'où $X\times W = Z'(a) - Z'(b)$.

Proposition 2 : Soient V et W deux variétés non singulières, X un cycle sur $V \times W$. Alors si $X \sim 0$ $pr_V(X) \sim 0$ sur W.

Soient Z un cycle sur $V \times W \times \mathbb{P}_1$, a et b deux points de $\mathbb{P}_1$ tels que $X = Z(a) - Z(b)$. Posons $Z' = pr_{V\times\mathbb{P}_1}(Z)$. On vérifie par la formule de projection que $pr_V(Z(a))$ est défini et que $pr_V(Z(a)) = Z'(a)$. De même pour b, de sorte que $pr_V(X) = Z'(a)-Z'(b)$.

Pour démontrer (RA_{II}), il nous suffit donc de montrer la proposition suivante :

Proposition 3 : Soient X et Y deux cycles sur une variété non singulière V. Si $X \sim 0$ et si $X.Y$ est défini, alors $X.Y \sim 0$.

Ecrivons encore $X = Z(a) - Z(b)$ où Z est un cycle sur $V \times \mathbb{P}_1$ et a et b deux points de P_1. Supposons $Z(a).Y$ défini, alors si $X.Y$ est défini, $Z(b).Y$ l'est aussi et $X.Y = Z(a).Y - Z(b).Y$.

On regarde alors le cycle $Z' = (Y\times\mathbb{P}_1).Z$ et on a, par la formule de projection $Z'(a) = Z(a).Y$ $Z'(b) = Z(b).Y$ et $X.Y = Z'(a) - Z'(b)$.

Il s'agit donc de se ramener au cas où $Z(a).Y$ est défini. Pour celà nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 4 :(MOVING LEMMA FORT) : Soient X un cycle sur une variété non singulière V, $(W_j)_{j\in J}$ et $(T_k)_{k\in K}$ des sous-variétés de V en nombre fini telles que les $T_k.X$ soient définis. Alors il existe un cycle X' sur V équivalent à X tel que :

a) $X'.W_j$ et $X'.T_k$ sont définis pour tout j et tout k,

b) il existe un cycle S sur $V \times \mathbb{P}_1$, deux points $a,b \in \mathbb{P}_1$ tels que : $X-X' = S(a)-S(b)$ et que $S(a).T_k$ et $S(b).T_k$ sont définis pour tout k.

Terminons la démonstration de RA_{II}. On applique le moving lemma fort, au cycle Y, aux composantes de $Z(a)$ et $Z(b)$ (elles joueront le rôle des W_j), et pour (T_k) on prendra la famille des composantes de X. Il existe donc un cycle Y' sur V équivalent à Y tel que :

a) $Y'.Z(a)$, $Y'.Z(b)$, $Y'.X$ soient définis, donc d'après ce que l'on a vu plus haut $X.Y' \sim 0$,

b) il existe un cycle S sur $V \times P_1$, a' et b' deux points de P_1 tel que : $Y-Y' = S(a')-S(b')$, $S(a').X$ et $S(b').X$ sont définis.

Donc $X.(Y-Y')$ est défini, et d'après ce que l'on a vu plus haut $X.(Y-Y') \sim 0$ donc $X.Y \sim 0$.

De plus le moving lemma fort entraîne le moving lemma. Il suffit donc de le démontrer pour terminer la démonstration du théorème 1.

Reprenons son énoncé.

Moving lemma fort : Soit X un cycle sur une variété V lisse et projective ; soient $(W_j)_{j \in J}$ et $(T_k)_{k \in K}$ des sous-variétés de V en nombre fini telles que $X.T_k$ soit défini pour tout $k \in K$.

Alors il existe un cycle X' sur V tel que :

1) $X \sim X'$,

2) $X'.W_j$ et $X'.T_k$ soient définis pour tous $j \in J$, et $k \in K$,

3) il existe un cycle Z sur $V \times \mathbb{P}_1$ tel que $X-X' = Z(a)-Z(b)$ avec $Z(a).T_k$ (et donc $Z(b).T_k$) défini pour tout $k \in K$).

Il est clair que par linéarité on peut supposer X irréductible.

Lemme 1 : Supposons $W \subset V \subset \mathbb{P}^q$ et soit X une sous-variété de V. Soit L une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^q$ de dimension $l = q-x-w-v-1$ (par convention les variétés de dimensions négatives sont vides et la dimension de la variété désignée par une majuscule est la minuscule correspondante). Supposons $W_1 = L.W$ défini : alors : $X \cap W_1 = \emptyset \Longrightarrow X.W$ est défini .

On a $X.W_1 = X(L.W) = X.(W.L.) = (X.W.)L.$ et par hypothèse $X.(W.L)$ est défini, il en est donc de même de $X.W$ (cf. plus haut).

Remarquons qu'il existe toujours une variété linéaire de dimension donnée telle que $L.W$ soit défini. En raisonnant par récurrence sur la codimension, on peut supposer $\operatorname{codim} L = 1$, c'est-à-dire L définie par une équation. Il suffit alors de trouver L telle que $W \not\subset L$, ce qui est toujours possible.

Le lemme 1 nous permet ainsi de supposer que les W_j et les T_k sont de dimensions telles que :

$$X'.W_j \text{ défini} \iff X' \cap W_j = \emptyset \quad \text{et} \quad X'.T_k \text{ défini} \iff X' \cap T_k = \emptyset$$

(autrement dit, on peut supposer que $\dim W_j \leqslant v - x - 1$).

Définition : Soient A et B deux sous-variétés de $\mathbb{P}_q$. On appelle joint de A et B la sous-variété $J(A,B)$ de $\mathbb{P}_q$ telle que, si dans un ouvert affine on a posé,

$$k[A] = k[x_1 \ldots x_q]$$
$$k[B] = k[x_1 \ldots x'_q] ,$$

alors :

$$k[J(A,B)] = k[tx_1+(1-t)x'_1, \ldots, tx_q+(1-t)x'_q] .$$

Remarque : Ceci est un sous-anneau de $(k[x_1 \ldots x_4] \otimes_k k[x'_1 \ldots x'_q])[t]$. Géométriquement $J(A,B)$ est l'adhérence de la réunion des droites joignant un point de A à un point de B distinct du premier.

Lemme 2 : Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\dim J(A,B) = \dim A + \dim B + 1$, et l'inégalité $\dim J(A,B) \leqslant \dim A + \dim B + 1$ est valable sans hypothèse.

Remarquons en effet que l'on a $A \subset J(A,B)$ et $B \subset J(A,B)$ donc la formule des dimensions donne :

$$-1 \geqslant \dim A + \dim B - \dim J(A,B) \quad \text{soit}$$
$$\dim J(A,B) \geqslant \dim A + \dim B + 1 .$$

Comme d'autre part $\dim J(A,B) \leqslant \dim A + \dim B + 1$ (puisque $k[J(A,B)] \subset k[A] \otimes_k k[B][t]$), on a bien l'égalité. Posons alors :

$$W'_j = J(X,W_j) \qquad \forall j \in J \ ,$$
$$T'_k = J(X,T_k) \qquad \forall k \in K \ .$$

Soit L une variété linéaire de dimension $q-v-1$ telle que :

1) $L \cap W'_j = L \quad T'_k = \emptyset$ quels que soient $j \in J$ et $k \in K$,

2) $L \cap V = \emptyset$,

3) $L \cap P_i = \emptyset$, où dans chaque composante des $X \quad W_j$, on a choisi un point x_i : alors P_i désigne la variété linéaire (de dimension v) tangente à V en x_i .

On a $\dim W'_j \leqslant \dim x + \dim W_j + 1$

$$\leqslant x + v - x - 1 + 1 = v \quad \text{et de même}$$

$\dim T'_k \leqslant V$.

Il est alors clair qu'on peut trouver une variété linéaire L de dimension $q-v-1$ réalisant les trois conditions ci-dessus : il suffit en effet d'exprimer que l'intersection de L avec un nombre fini de variétés de dimension $\leqslant v$ est définie. On note C le <u>cône</u> joint de X et de L ; il est de dimension $q+x-v$, donc sa codimension dans $\mathbb{P}_q$ est égale à celle de X dans V .

Soit $x_i \in X \cap W_j$, P_i la variété linéaire tangente à V en x ; la condition 3) ci-dessus signifie que la génératrice L' de C (variété linéaire de dimension $q-v$ qui joint x à L) est transverse à la variété linéaire P_i (soit $\dim L'.P_i = q-v+v-q = 0$) donc que $L' \cap P_i = \{x_i\}$.

<u>Lemme 3</u> : <u>Sous les conditions précédentes, X est composante avec multiplicité 1 de l'intersection C.V.</u>

Montrons d'abord que $C.V$ est définie ; celà montrera que X est composante de $C.V$, car il est clair que $X \subset C \cap V$.

Soit X_1 une composante de $C.V.$, on a :

$J(X_1,L) \subset C$ donc

$d = \dim(J(X_1, L)) \leqslant \dim C = q-v+x$

ceci donne $\dim(X_1) \leqslant x$, ce qui implique bien que $C.V$ est définie. On peut donc écrire :

$$C.V = X + R .$$

Il est alors impossible que X soit une composante de R , à cause de la condition 3) ci-dessus : soit $x_i \in X \cap W_j$ tel que la génératrice L' soit transverse à la variété linéaire P_i tangente à V en x_i : (x_i) est alors une composante de $L'.V$ avec multiplicité 1 (il suffit de regarder l'idéal de L' dans l'anneau local régulier de V en x_i) . En intersectant $C.V.$ avec L' on voit alors que le coefficient de X est nécessairement + 1 .

<u>Lemme 4</u> : <u>Toute composante de $R \cap W_j$ est contenue strictement dans une composante de $X \cap W_j$</u> .

Soit $a \in R \cap W_j$: par définition de C a est sur une droite joignant un point b de X à un point de L .

Supposons a différent de b ; alors $ab \subset W'_j = J(W_j, X)$ ce qui implique $W'_j \cap L \neq \emptyset$, ce qui est exclus par la condition 1) ci-dessus.

On a donc $a = b$, soit $a \in X \cap W_j$.

D'autre part, le raisonnement du lemme 3 , montre que l'on ne peut avoir $x_i \in R \cap W_j$ pour les x_i de la condition 3) ci-dessus. Ceci montre le lemme 4.

On a en particulier $\dim(R \cap W_j) < \dim(X \cap W_j)$. (On a de même $R \cap T_k = \emptyset$ puisque $X \cap T_k = \emptyset$).

Refaisons la même construction en remplaçant X successivement par chaque composante R' de R (toutes les composantes de R sont de dimension x : lemme 3). On trouve alors une relation de la forme :

$R+R_1 = C_1.V$ avec $\dim(R_1 \cap W_j) < \dim(R \cap W_j)$.

Au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient :

$R_{d-1}+R_d = C_d.V$ avec $R_d \cap W_j = \emptyset \quad \forall j \in J$.

On peut donc écrire $X = (-1)^{d-1}R_d+(C-C_1+\dots(-1)^d C_d).V$.

Nous allons maintenant faire "bouger" les cônes $C, C_1, \dots, C_d$ au moyen du lemme suivant :

<u>Lemme 5</u> : <u>Soit V une variété, G un groupe algébrique opérant transitivement sur V , W et W' des fermés de V . Alors l'ensemble H des $\sigma \in G$ tels que $\sigma(W) \cap W' \neq \emptyset$ est un fermé de codimension $\geqslant \dim(V)-\dim(W)-\dim(W')$.</u>

En particulier, si $\dim(W)+\dim(W') < \dim V$, les $\sigma \in G$ tels que $\sigma(W) \cap W' = \emptyset$ forment un ouvert non vide de G .

En effet, soit j le morphisme de $G \times W$ dans V défini par $j(\sigma,a) = \sigma(a)$ pour $a \in W$. Les stabilisateurs des éléments de V sont tous conjugués dans G (car G opère transitivement) ; leur dimension s satisfait à

$$\dim(G) = s + \dim(V) .$$

D'autre part, pour $b \in V$, le fermé $j^{-1}(b)$ est fibré sur W (par pr_W) avec des fibres de dimension s . On a donc :

$$\dim(j^{-1}(b)) = \dim(W) + s$$

d'où
$$\dim(j^{-1}(W')) = \dim W' + \dim W + s .$$

Or, par définition, $H = pr_G(j^{-1}(W'))$: H est donc un fermé de dimension telle que :

$$\dim(H) \leqslant \dim(j^{-1}(V)) = \dim W' + \dim W + s$$
$$= \dim W' + \dim V + \dim G - \dim V .$$

Ce lemme montre que l'on peut prendre des cônes $C', C'_1, \dots, C'_d$, déduits des C_i par des transformations projectives $(G = PGL(q))$ tels que :

$$C'_i.V,\ C'_i.W_j,\ C'_i \dots T_k \text{ soient définis.}$$

Posons : $X' = (-1)^{d-1}R_d + (C'-C'_1+\dots+(-1)^d C'_d).V$.

On a : $X-X' = (\sum_{i=0}^{d} (-1)^i (C_i-C'_i)).V$.

On peut ainsi écrire $C_i = T_i(a)$, $C'_i = T_i(b)$, où a et b $\in G$, T_i étant un cycle de $G \times P_q$ (a représente la projectivité identique, et b la projectivité qui fait passer de C_i à C'_i). Comme $G = PGL(q)$ est une variété telle que deux quelconques de ses points peuvent être joints par une courbe rationnelle ("bien connu"), C_i et C'_i sont rationnellement équivalents ; il en est de même de X et X' et l'on a :

$$X-X' = \left(\sum_{i=o}^{d} (-1)^i (T_i(a) - T_i(b))\right).V = (\Sigma(-1)^i T_i(a)).V - (\Sigma(-1)^i T_i(b)).V \ .$$

Or, $(T_i(a).V).T_k$ est défini pour tout i puisque $(T_i(a).V).T_k = (C_i.V).T_k$ est défini (c'est-à-dire vide) par construction.

Ceci achève de montrer le "Moving Lemma fort".

EQUIVALENCE RATIONNELLE : LA DIMENSION ZERO

Dans les six premiers paragraphes, nous rappelons des propriétés et démontrons les lemmes dont nous aurons besoin par la suite. Le corps de base est $\mathbb{C}$.

§ 1. FORMES DIFFERENTIELLES.

1.1. Sur une variété réduite, on définit les modules Ω^i des i-formes différentielles. Localement, si X est la variété affine d'anneau

$$\Omega^o = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(P_1, \ldots, P_r) ,$$

Ω^1 est le Ω^o-module engendré par $dx_1, \ldots, dx_n$ avec comme relations $dP_1 = \ldots = dP_r = 0$ et Ω^i est la i-ième puissance extérieure de Ω^1 . De même pour les modules $\mathcal{M}^q$ de formes différentielles méromorphes : localement, on note $\mathcal{M}^o$ l'anneau total des fractions de Ω^o et on pose $\mathcal{M}^q = \mathcal{M}^o \otimes \Omega^q$.

Le sous-module de torsion T^q est le noyau de $\Omega^q \to \mathcal{M}^q$; comme Ω^q est localement libre aux points de lissité, la torsion a son support contenu dans le lieu singulier de la variété.

A un morphisme $f : X \to Y$, on associe un morphisme de faisceaux sur X f^* :

$$f^*(\Omega^q_Y) \to \Omega^q_X .$$

1.2. LEMME : pour un morphisme dominant de variétés réduites, $X \to Y$, on a une application injective :

$$f^* : \mathcal{M}^q_Y \to \mathcal{M}^q_X .$$

f^* est définie, une forme méromorphe étant définie par sa restriction à un ouvert dense, par exemple un ouvert U où elle est holomorphe. Soit donc ω une section de $\mathcal{M}^q_Y$. $f^*(\omega|U)$ est holomorphe sur l'ouvert dense $f^{-1}(U)$ de X et se prolonge en une forme méromorphe unique sur X .

1.3. LEMME : soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés réduites. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & T_Y^q & \to & \Omega_Y^q & \to & \mathfrak{M}_Y^q \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & T_X^q & \to & \Omega_X^q & \to & \mathfrak{M}_X^q \end{array} ,$$

de sorte que l'on a un morphisme $T_Y^q \to T_X^q$.

Démonstration de Hironaka : on éclate l'adhérence de $f(X)$ dans Y et on résoud les singularités, d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & Y' \\ \text{dominant} \downarrow & & \downarrow \text{birationnel} \\ X & \to & Y \end{array} \quad \text{avec } Y' \text{ lisse.}$$

Si $\omega \in T_Y^q$, l'image réciproque de ω sur Y' est nulle dans un ouvert dense, donc nulle puisque Y' est lisse. A fortiori l'image réciproque sur X' est nulle dans $\mathfrak{M}_{X'}^q$. Comme $\mathfrak{M}_X^q \to \mathfrak{M}_{X'}^q$ est injective, $f^*\omega$ est de torsion.

§ 2. NOMBRES DE BETTI.

2.1. Pour une variété différentielle réelle X, on pose $b_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X,\mathbb{C})$, i-ème nombre de Betti.

Dans le cas d'une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et plus généralement d'une variété kählérienne, on a une décomposition $H^i = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}$, ce qui permet de poser $b_{p,q} = \dim H^{p,q}$. Rappelons (voir Be. que $H^{p,q} \approx H^q(X,\Omega^p)$.

La dualité de Serre et celle de Poincaré se traduisent par

$b_{p,q} = b_{n-p,\, n-q} = b_{q,p}$.

2.2. Cas d'une surface algébrique :

$$b_o = 1 \ , \quad b_1 = 2b_{1,o} \ , \quad b_2 = 2b_{2,o} + b_{1,1} \ , \ b_3 = b_1 , \quad b_4 = 1 \ .$$

$b_{1,o}$ est l' "irrégularité" de la surface, $b_{2,o}$ son genre géométrique, noté aussi p_g .

§ 3. CLASSES DE CHERN. ANNEAU DE CHOW.

Soit X une variété algébrique projective et lisse.

3.1. Définition : l'anneau de Chow est l'anneau des classes d'équivalence rationnelle de cycles (algébriques). C'est un anneau gradué par la codimension $A(X) = \oplus A^i(X)$.

3.2. A un fibré vectoriel F sur X , on associe un élément $c(F)$ de $A(X)$ qui sera dit sa classe de Chern (voir Groth.) : $c(F) = c_o(F) + \ldots + c_i(F) + \ldots$ vérifiant les axiomes :

i) $c_o(F) = X$ noté 1 .

ii) pour une suite exacte

$0 \to F' \to F \to F'' \to o$, $c(F) = c(F').c(F'')$.

iii) fonctorialité par rapport au changement de base

$f : Y \to X \qquad c(f^*F) = f^*(c(F))$.

iV) sur $\mathbb{P}^1$, $c(S) = 1 + 1$ point, S étant le fibré standard correspondant au faisceau $O_{\mathbb{P}}(1)$.

Etant donné un fibré F , il existe une variété lisse Y , et un morphisme $f : Y \to X$, sur laquelle F se décompose en quotients successifs F_j , F_j/F_{j+1} étant de rang 1 , et telle que $A(X)$ soit identifié par f^* à un sous-anneau de $A(Y)$. On peut prendre par exemple pour Y la variété des drapeaux de F . D'où on pourra, en utilisant ii) supposer que $c(F) = \Pi(1+\gamma_i)$ avec $\gamma_i \in A^1(X)$.

3.3. Dans le cas d'un fibré inversible, $c(F) = 1 + \mathrm{div}(s)$, s étant une section méromorphe de $F(\neq o)$. On vérifie que si s, s' sont deux telles sections

$s \otimes s'^{-1}$ est une section du fibré trivial $F \otimes F^*$ (F^* ou F^{-1}, dual de F), donc $\mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s')$ est linéairement équivalent à 0.

3.4. On utilise aussi les classes de Chern à valeurs dans la cohomologie ordinaire $H^{2i}(X,Z)$. C'est une théorie moins fine que la précédente en ce sens que l'application : fibré $\mapsto$ classe entière se factorise par fibré $\mapsto$ classe dans l'anneau de Chow $\mapsto$ classe entière. Il suffit de donner l'homomorphisme pour les fibrés en droites ; remarquant que le groupe (pour $\otimes$) des fibrés inversibles modulo isomorphisme est isomorphe au groupe des diviseurs (mod équivalence rationnelle) et à $H^1(X, (\Omega^o)^*)$, $(\Omega^o)^*$ étant le faisceau des fonctions holomorphes inversibles; la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \Omega^o \xrightarrow{\exp 2\Pi i} \Omega^{o*} \to 0$ donnera au signe près le morphisme cherché $A^1(X) \approx H^1(X, \Omega^{o*}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$.

§ 4. FAISCEAU CANONIQUE.

4.1. Définition : le faisceau Ω^n, n étant la dimension de la variété lisse X, est dit canonique et noté $\underline{\underline{K}}$; il est localement libre de rang 1.

On note K ou $K(X)$ le diviseur associé défini à équivalence linéaire près, et $\underline{K}$ le fibré en droites correspondant.

4.2. Proposition : si X est une hypersurface lisse de Y, alors $K(X) = K(Y).X + X.X$ dans l'anneau $A(Y)$.

En effet, on a la suite exacte $0 \to N^* \to T^*(Y)|_X \to T^*(X) \to 0$ avec N^* fibré conormal, $T^*(Y)$ fibré cotangent. En prenant la première classe de Chern, on remarque que $c_1(E) = c_1(\overset{e}{\Lambda} E)$ pour un fibré de rang e, et que $c_1(N^*) = - X.X$ (Be, 7.1.).

4.3. Corollaire : pour une hypersurface X de $\mathbb{P}^{n+1}$, de degré q, $K(X) = X.Z$ avec Z hypersurface de degré $q - (n+2)$.

En effet, soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^{n+1}$; $X \sim qH$ et $K(\mathbb{P}^{n+1}) \sim (n+2)H$.

Pour une courbe, il faut donc prendre son intersection avec les courbes de degré $q-3$; pour une surface, avec les surfaces de degré $q-4$.

4.4. Remarque : quand on éclate un point de X : $\pi : \tilde{X} \to X$, on a $K(\tilde{X}) = \pi^*(K(X)) + (n-1)E$, E étant le diviseur exceptionnel (Be., 8.15).

Pour une courbe, K est donc un invariant pour un morphisme birationnel, mais ce n'est plus vrai pour une surface ; les self-intersections sont liées par : $(K(\tilde{X}))^2 = \pi^*(K^2)-p$, p un point quelconque de E . Il faut donc considérer uniquement les modèles minimaux, dans chaque classe d'équivalence birationnelle de surfaces, pour décrire le faisceau canonique (2 surfaces sont dites équivalentes s'il existe une application birationnelle de l'une dans l'autre. X est dite minimale si tout morphisme birationnel $X \to X'$ est un isomorphisme).

4.5. Plurigenres : le faisceau canonique permet de définir des "invariants" de la variété (par invariant, on entend constant dans la classe d'équivalence birationnelle).

Définition : n-ième plurigenre $p_n = \dim H^0(X, K^n)$.

L'invariance résulte du lemme : soit une application birationnelle $f : X \to X'$ de deux variété lisses. Alors $p_n(X) \geqslant p_n(X')$.

En effet, f est un morphisme en dehors d'un ensemble de codimension $\geqslant 2$ sur X . L'image réciproque d'une forme différentielle sur X' est une forme méromorphe, régulière aux points de profondeur 1 , donc holomorphe (le pôle d'une forme méromorphe est un diviseur).

4.6. Surfaces réglées :

Définition : une surface est dite réglée si elle est birationnellement équivalente au produit $\mathbb{P}^1 \times C$, où C est une courbe lisse. Elle est dite géométriquement réglée si elle est isomorphe à $P(E)$, E étant un fibré vectoriel de rang 2 sur C et $P(E)$ le fibré en droites projectives associé.

Les surfaces réglées sont un bon exemple d'application du calcul des plurigenres.

Lemme : Pour une surface réglée, $p_n = o \quad \forall\, n \geqslant 1$.

En effet sur $\mathbb{P}^1 \times C$, le faisceau canonique est $q_1^*(\Omega^1(\mathbb{P}^1)) \otimes q_2^*(\Omega^1(C))$, q_1 et q_2 étant les deux projections. La non existence de sections globales de $\Omega^1(\mathbb{P}^1)^{\otimes n}$ entraîne la nullité de p_n.

Réciproquement, les "Italiens" ont montré que la nullité de p_{12} entraîne que la surface est réglée (voir démonstration rigoureuse dans Sa.). Signalons au lecteur surpris par le nombre 12 que l'on a le théorème plus facile :

Théorème : $p_1 = o$ et $b_{1,o} > 1 \Longrightarrow$ la surface est réglée (voir Sa.,p.54).

§ 5. SYSTEMES LINEAIRES.

5.1. Définition : on appelle système linéaire une famille de diviseurs positifs de la forme $D + \mathrm{div}(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$, $f_1, \dots, f_m$ fonctions méromorphes données.

On dit que le système est complet s'il est l'ensemble des diviseurs positifs linéairement équivalents à un diviseur donné. On note $|D|$ le système complet associé à D ; c'est l'espace projectif $\mathrm{Proj}(\mathscr{L}(D))$ avec $\mathscr{L}(D) = H^o(X,\underline{D})$. On pose $\ell(D) = \dim \mathscr{L}(D)$.

5.2. Définition : un système complet $|D|$ est dit spécial si $\ell(K-D) > o$; en d'autres termes, s'il existe $D' \geqslant o$, tel que $D'+D$ soit un diviseur canonique.

Par exemple, sur une courbe, un diviseur canonique étant de degré $2g-2$, tout diviseur de degré $\geqslant 2g-1$ est non spécial.

§ 6. THEOREME DE RIEMANN ROCH.

Nous ne le donnons que pour les courbes et les surfaces ; voir Hirzebruch pour le cas général des variété analytiques non singulières.

6.1. Définition : la caractéristique d'Euler Poincaré d'un fibré F sur la variété X est l'entier :

$$\chi(X,F) = \Sigma(-1)^i \dim H^i(X,F) .$$

Choisissons l'orientation canonique pour la variété complexe X, ce qui fournit un isomorphisme $H^{2n}(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ avec $n = \dim X$. Les classes de Chern dans $H^*(X,\mathbb{Z})$ de dimension maximale sont alors considérées comme des éléments de $\mathbb{Z}$.

6.2. Cas d'une courbe : soient X une courbe non singulière et F un fibré en droites. Alors $\chi(X,F) = c_1(F) - \frac{1}{2} c_1(K)$.

Ici, $c_1(F)$ est le degré du fibré et $c_1(K) = 2g-2$, avec g, genre de la courbe. Si F est le fibré associé à un diviseur D, en utilisant la dualité de Serre, le théorème prend la forme

$$\ell(D) + \ell(K-D) = \deg(D) - g-1 .$$

6.3. Cas d'une surface :(toujours pour un fibré en droites).

$$\chi(X,F) = \frac{1}{2} c_1^2(F) + c_1(F) \wedge c_1(T) + \frac{1}{12}(c_1^2(T) + c_2(T))$$

avec T fibré tangent.

Rappelons que $c_1(T) = - c_1(K)$.

Pour un diviseur D, on pose $P_a(D)$, genre arithmétique, $= 1 + \frac{1}{2}(D^2+KD)$.
Si D est une courbe irréductible non singulière, le fait que $P_a(D)$ soit le genre de la courbe résulte de 4-2 .

Pour une courbe irréductible singulière, on résout les singularités par une suite finie d'éclatements de points de la surface ; supposons que D n'ait que des singularités quadratiques en nombre δ au points P_i $(i = 1, 2, \ldots, \delta)$ que l'on fait éclater. L'image réciproque D' est non singulière. De l'invariance du nombre d'intersection, on déduit $D^2 + KD = D'^2 + K(\tilde{X}).D' + 2\delta$, d'où la formule $P_a(D) = g + \delta$.

On peut donc réécrire Riemann-Roch :

$$\chi(X,\underline{D}) = \ell(D) + \ell(K-D) - \dim H^1(X,\underline{D}) = \frac{1}{2} D(D-K) + \chi(X,\underline{K})$$
$$= D^2 - P_a(D) + 1 + \chi(X,\underline{K}) .$$

<u>Remarque</u> : $\chi(X,\underline{K}) = \dim H^o(X,\Omega^2) - \dim H^1(X,\Omega^2) + \dim H^2(X,\Omega^2)$

$$= p_g - q + 1 \quad \text{en posant} \quad q = b_{2,1} = b_{1,o} .$$

Dans le cas général, on pose $\chi(X,\Omega^o) = \chi(X,\underline{K}) = P_a(X)$, <u>genre arithmétique</u> de la variété. Mais pour les surfaces, certains auteurs prennent $\chi(X,\Omega^o) - 1$.

<u>La caractéristique d'Euler Poincaré</u> de la surface, χ, est le nombre $\Sigma(-1)^i b_i$ (c'est la caractéristique du faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, par exemple).

$$\chi = 2 - 4q + b_2 = c_2(T) \quad \text{d'où} \quad \chi(X,\underline{K}) = \frac{1}{12}(K^2+\chi) .$$

§ 7. <u>SUR L'ARTICLE DE MUMFORD.</u>

<u>7.1.</u> <u>Position du problème</u> : Mumford se propose de montrer que pour une surface algébrique projective non singulière sur $\mathbb{C}$, la "finitude" du groupe A_o des classes de cycles de dimension 0, de degré 0, est équivalente au fait que la surface est réglée, contrairement à Séveri qui considérait cette finitude comme intuitivement évidente.

Rappelons les notations : X^n produit de n copies de la surface X, $S^n(X)$ n-ième produit symétrique $= X^n/_{\sigma_n}$ avec σ_n groupe des permutations : $A_o(X) = A^2(X)/_{\mathbb{Z}}$ est le groupe des 0-cycles de degré 0 $(= \{\Sigma n_i P_i \mid \Sigma n_i = 0\})$ modulo l'équivalence rationnelle.

7.2. Finitude de A_o : Par finitude, on entend les propriétés équivalentes suivantes :

1) Il existe n tel que pour tout 0-cycle A de degré $\geq n$, il existe un cycle positif équivalent à A.

2) Il existe n tel que l'application

$$S^nX \times S^nX \to A_o(X) \text{ est surjective}$$
$$(A,B) \to c\ell(A-B) .$$

3) Il existe n tel que pour tout $q > n$ et tout $A \in S^q(X)$, il existe une sous-variété W de S^qX contenant A, de codimension $\leq n$ formée de points rationnellement équivalents à A.

4) Il existe n tel que pour tout $q > n$, pour tout $A \in S^q(X)$, et tout $x \in X$, il existe $B \in S^{q-1}(X)$ tel que $B+x$ soit équivalent à A.

Démonstration de l'équivalence des conditions :

(1) <==> (2) <==> (4) est facile.

3) ==> 4) :

Soient $q \geq n+1$, $A \in S^q(X)$, W sous-variété de codimension $\leq n$ formée de points équivalents à A, et $W' = \Pi^{-1}(W)$.

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r] \arrow[d] & X^q \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ W \arrow[r] & S^qX & \end{tikzcd}$$

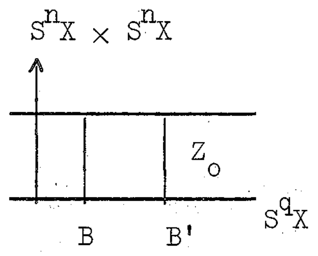
Je dis qu'il existe un des facteurs tel que $p_i(W') = X$. En effet $\dim(W') \leq \Sigma \dim p_i(W')$, d'où $\operatorname{codim}(W') \geq q$ si pour tout i, $p_i(W')$ est $\neq X$. D'où un point w' de W' et un indice i tel que $p_i(w') = x$; alors le cycle $\pi(w')$ est de la forme $B+x$ annoncée.

2) ==> 3) :

Fixons un point de base $x_o \in X$. L'ensemble

$$Z = \{(A_1, A_2, B) \in S^nX \times S^nX \times S^qX \mid A_1 - A_2 \sim B - qx_o\}$$

est une union dénombrable de sous-variétés. D'après 2), la projection de Z sur S^qX est surjective ; donc une des composantes Z_o de Z se projette sur S^qX. On prend pour W une des composantes de dimension maximale de $\{B' \in S^qX \mid \exists\, (A_1, A_2)$ tel que $(A_1, A_2, B') \in Z_o$ et $(A_1, A_2, B) \in Z_o\}$. La codimension de W est $\leqslant$ dimension $(S^nX \times S^nX) = 4n$



Nous renvoyons à Mumford pour les démonstrations de 7.3. et 7.4. . Nous nous contenterons d'en exposer la ligne directrice.

<u>7.3.</u> <u>Utilisation de formes induites</u> :

Si X est une surface non singulière, S^nX est singulière pour $n > 1$. Une forme différentielle holomorphe sur X^n, invariante par σ_n ne provient pas nécessairement d'une forme différentielle <u>holomorphe</u> sur S^nX ; par contre

$$\mathfrak{M}^q_{S^nX} = [\mathfrak{M}^q_{X^n}]^{\sigma_n} .$$

Pour avoir une forme holomorphe, on change de base.

<u>7.3.1.</u> <u>Lemme</u> : <u>Soient ω une forme holomorphe σ_n-invariante sur X^n, S lisse, f un morphisme $S \to S^nX$, Y le produit fibré réduit. Il existe une forme méromorphe unique η_f telle que $P^*\eta_f - \tilde{f}^*\omega$ soit de torsion</u>

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & X^n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & \xrightarrow{f} & S^nX \end{array}$$

En effet, il y a un ouvert dense S^o de S tel qu'un quotient H de σ_n agisse librement au-dessus de $f(S^o)$; alors $\tilde{f}^*\omega|P^{-1}(S^o)$ se descend de manière unique sur S^o (au-dessus de S^o, p est un revêtement étale), ce qui définit une forme méromorphe unique sur S, η_f.

La forme $p^*\eta_f - \tilde{f}^*\omega$ est nulle dans un ouvert dense, donc de torsion.

7.3.2. Lemme : η_f est holomorphe.

Dans la suite, on fixe une forme $\omega \in H^o(X, (\Omega^q)^{\otimes r})$ et on considère sur X^n la forme invariante $\omega^{(n)} = \Sigma\, p^*(\omega)$. Les deux lemmes précédents s'appliquent aussi bien, d'où une forme $\eta_f \in H^o(S, (\Omega^q_S)^{\otimes r})$.

7.3.3. Lemme : η_f est fonctorielle.

a) pour $S_1 \xrightarrow{h} S_2 \xrightarrow{f_2} S^nX$, $\eta_{f_1} = h^*(\eta_{f_2})$.

b) pour $S \xrightarrow{f * g} S^nX \times S^nX \longrightarrow S^{n+m}X$,

en notant $f * g$ l'application composée,

$$\eta_{f * g} = \eta_f + \eta_g .$$

7.4. Théorème central : si $f(S)$ est formée de points rationnellement équivalents, alors $\eta_f = 0$.

Remarque importante : la démonstration de Mumford, qu'il donne pour Ω^q s'applique aussi bien au faisceau $(\Omega^q)^{\otimes r}$, ce qui nous permettra de déduire du théorème des corollaires plus intéressants.

7.5. Application aux surfaces : soit X une surface, K son faisceau canonique, ω une section de K^r, $\omega^{(n)}$ la forme invariante $p_1^*(\omega)+\ldots+p_n^*(\omega)$, les p_i étant les projections de X^n sur X.

Dans l'ouvert où $\pi : X^n \to S^nX$ est étale, $\omega^{(n)}$ se descend en une forme η. On considère le sous-ouvert $U = \{A = \sum_1^n x_i \,|\, \omega(x_i) \neq 0\}$.

7.5.1. Lemme : si S est une sous-variété de U et si $\eta|S = 0$, alors $\dim S \leqslant n$.

En un point de X , ω s'écrit $f(dx \wedge dy)^{\otimes r}$, avec (dx,dy) base locale de Ω^1_X . Au point $A = \Sigma x_j$ de U , $\eta = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,(dx_{(j)} \wedge dy_{(j)})^{\otimes r}$. Si $r = 1$, η peut être considérée comme une forme symplectique sur le fibré tangent à S et la nullité de η sur S équivaut au fait que en tout point de S , l'espace tangent est isotrope, donc de dimension $\leqslant n$ (l'espace tangent à S^nX étant de dimension $2n$).

Nous laissons à titre d'exercice le soin au lecteur de démontrer que la dimension de S est bornée par n pour $r > 1$.

7.5.2. Corollaire : <u>supposons le plurigenre (voir 4.4) $p_r > 0$. Soit $A \in U$; alors la codimension d'une variété irréductible formée de points équivalents à A est supérieure à n . Autrement dit, la condition 3) de 7.2. n'est pas vérifiée.</u>

D'après 7.5.1., si 3) est vérifiée, alors pour tout r , $p_r = 0$, ce qui entraîne que la surface est réglée (4.6.).

Réciproquement, la "finitude" de A_0 pour $\mathbb{P}^1 \times C$ est triviale : $A \sim B$ si et seulement si les cycles projetés sur C sont équivalents. Or sur une courbe, la condition 1) de 7.2. se traduit par : il existe n tel que pour tout diviseur A de degré $\geqslant n$, $|A|$ est non vide. D'après Riemann Roch, on peut prendre $n = g$ Pour terminer la démonstration du corollaire, il nous reste à montrer que la finitude est une propriété birationnelle.

7.5.3. Lemme : <u>soit f une application birationnelle de deux surfaces lisses : $X \to X'$. Alors $f^* : A_0(X') \to A_0(X)$ est un isomorphisme et $A_0(X)$ vérifie les conditions de finitude 7.2. si et seulement si $A_0(X')$ les vérifie.</u>

On a défini f^* pour un morphisme f ; on peut se ramener à ce cas par l'existence d'un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X' \end{tikzcd}$$

où h et h' sont deux morphismes birationnels. h induit un isomorphisme entre deux ouverts denses U" et U de X" et X . Or par le moving lemma toute classe de A_o est représentée par un cycle de U" (resp. U). Les homomorphismes $h_* : A_o(X'') \to A_o(X)$ et $h^* : A_o(X) \to A_o(X'')$ sont donc inverses l'un de l'autre.

Cela nous permet de définir $f^* : A_o(X') \to A_o(X)$ et son inverse f_* : soit $A \in A_o(X')$, f^*A est la classe de $f^{-1}(B)$, pour tout cycle B de U' équivalent à A .

Signalons qu'on peut réécrire la première partie du lemme sous la forme : <u>soient A,B deux 0-cycles. Alors $A \sim B$ si et seulement si $f(A) \sim f(B)$</u> . [en notant par f(x) tout point de $h'(h^{-1}(x))$] . La condition de finitude 2) de 7.2. est : "il existe n tel que $S^nX \times S^nX \to A_o(X)$ est surjectif".

Une classe α' de $A_o(X')$ se remonte en α qui peut s'écrire A-B avec A,B deux 0-cycles positifs de degré n , si X vérifie la condition de finitude. Alors f(A) - f(B) est un représentant de α' , avec f(A), f(B) positif de degré n , et vice versa.

<u>7.5.4.</u> <u>Théorème</u> : <u>Si X est une surface lisse et si $A_o(X)$ vérifie les conditions de finitude, alors X est une surface réglée et réciproquement.</u>

D'après 7.5.2., $p_r(X) = 0$ pour tout r . On conclut en utilisant la caractérisation des surfaces réglées (4.6.) par $p_{12} = 0$.

<u>7.5.5.</u> <u>Théorème</u> : <u>si $A_o(X) = \{0\}$, la surface est rationnelle et réciproquement.</u>

Si X est une surface réglée de base la courbe C , de genre g , $A_o(X) \approx A_o(C)$ et ce dernier groupe et nul si et seulement si g = 0 .

Remarque : l'équivalence rationnelle étant la plus fine, la nullité de $A_o(X)$ entraîne que la variété d'Albanese est de dimension $0 (= q = b_{1,o})$. L'hypothèse $q = o$ et $P_2 = o$ est équivalente au fait que la surface est rationnelle (Serre, d'après Kodaire).

Corollaire : une surface dont deux points quelconques peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles est rationnelle.

En effet, l'hypothèse entraîne que deux points quelconques sont rationnellement équivalents.

7.5.6. Cas où la surface n'est pas réglée : Nous savons donc que $A_o(X)$ ne vérifie pas les conditions de finitude. Explicitons sur l'exemple du produit de deux courbes C_1, C_2.

$$A_o(X) \xrightarrow{q=p_{1*}\times p_{2*}} A_o(C_1) \times A_o(C_2) \quad \text{est surjectif.}$$

Lemme : le noyau est l'ensemble des 0-cycles carrément équivalents à 0.

Définition : (voir Samuel). Un 0-cycle A est dit équivalent à 0 pour l'équivalence du carré s'il existe une courbe T, deux points a et b sur T, un cycle Z sur $T \times T \times X$, tels que

$$A = Z_{b\times b} + Z_{a\times a} - Z_{a\times b} - Z_{b\times a}$$

en notant par $Z_{a\times b} = pr_X((a\times b\times X).Z)$.

Sur une courbe, l'équivalence du carré est identique à l'équivalence rationnelle, ce qui prouve que le noyau de q contient les cycles carrément équivalents à 0. Réciproquement, un cycle A est carrément équivalent à un cycle porté par $(C_1 \times a) \cup (b \times C_2)$, à savoir $p_{C_1}(A) + p_{C_2}(A) - \deg A(a\times b)$. Pour un cycle de degré 0, l'appartenance de A au noyau de q est donc équivalente à la nullité de $p_{C_1}(A)$ dans $A_o(C_1)$ et de $p_{C_2}(A)$, ce qui démontre le lemme.

Malheureusement, nous ne connaissons pas assez bien l'équivalence du carré pour aller plus avant dans l'étude de $A_o(X)$.

7.5.7. Notons que l'hypothèse du théorème 7.5.4. est entraînée par d'autres. Par exemple si l'on suppose que la surface admet une courbe représentative, c'est-à-dire s'il existe sur X une courbe C telle que $A_0(C) \to A_0(X)$ soit surjectif. Ceci répond à un problème posé par Samuel (voir réf.).

On peut aussi donner des exemples de surfaces X telles que l'ensemble des points de X, qui sont rationnellement équivalents à un point donné, ne soit pas fermé : par exemple la variété de Kummer de $C \times C$, C étant une courbe elliptique ; ou encore une surface non singulière d'ordre 4 dans $\mathbb{P}_3$ (on a $p_g = 1$ dans les deux cas).

- REFERENCES -

BERGER : Variétés kählériennes compactes.
Lectures Notes 154. Springer (rédigé par Lascoux).

GROTHENDIECK : Exposés du Séminaire Chevalley (1958) dans Anneau de Chow.

HIRZEBRUCH : Topological methods in Algebraic Geometry - Springer.

MUMFORD : Rational equivalence of 0-cycles on surfaces J. Math. Kyoto Uni 9-2(1969). pp. 195-204.

SAFAREVIC : Algebraic surfaces. Proceedings of the Steklov. Institute of Mathematics 1965.

SAMUEL : Relations d'équivalence en Géométrie algébrique.
Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958, pp. 470-487.

SERRE : Critère de rationalité.
Séminaire Bourbaki. 1957 - Exp. 146.

-:-:-:-:-