UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 180

LE DOUBLE COMMUTATEUR

R. R. Coifman et Y. Meyer

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

n° 180

LE DOUBLE COMMUTATEUR

R. R. Coifman et Y. Meyer

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

LE DOUBLE COMMUTATEUR

par R. R. Coifman et Y. Meyer

Nous nous proposons de prouver les deux résultats suivants.

THEOREME 1. Soient a et b deux fonctions dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Désignons par A une primitive de a et par B une primitive de b. Alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{[A(x)-A(y)]\,[B(x)-B(y)]}{(x-y)^3} f(y)\, dy$$

existe pour presque tout x. Si l'on appelle $\mathscr{C}(a,b,f)(x)$ cette limite, on a

$$(2) \qquad \|\mathscr{C}(a\,,b\,,f)\|_2 \leq C\|a\|_\infty \|b\|_\infty \|f\|_2 \,.$$

THEOREME 2. Plus généralement, supposons que a et b soient deux fonctions à oscillations moyennes bornées ($a \in BMO$, $b \in BMO$). Alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(3) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{[A(x)-A(y)-(x-y)a(y)]\,[B(x)-B(y)-(x-y)b(y)]}{(x-y)^3} f(y)\, dy$$

existe presque partout et, en appelant $T(a\,,b\,,f)(x)$ cette limite, on a

$$(4) \qquad \|T(a,b,f)\|_2 \leq C\|a\|_{BMO} \|b\|_{BMO} \|f\|_2 .$$

Remarquons que le théorème 1 est déjà démontré dans [7]. Nous en donnons une preuve différente et beaucoup plus simple. Le théorème 2 est nouveau.

Le paragraphe 1 est consacré à la preuve de l'inégalité (2) dans le cas particulier où a, b et f appartiennent à $\mathcal{D}(R)$; alors l'existence de la limite (1) ne pose aucun problème. La preuve de (2) provient de la construction d'une famille analytique T_z d'opérateurs bornés de $L^2(R)$ telle que

(a) $\sup\limits_{\mathrm{Re}\, z \geq 0} \|T_z\| < +\infty$ (si a et b appartiennent à $\mathcal{D}(R)$)

(b) si $z = 1$, T_z soit le double commutateur

(c) si z est imaginaire pur, T_z soit un opérateur "classique" tel que $\|T_z\| \leq C\|a\|_\infty \|b\|_\infty$.

Il ne reste plus alors qu'à appliquer à T_z le principe du maximum.

Au paragraphe 2 nous étudions le cas général $a \in L^\infty(R)$, $b \in L^\infty(R)$ et $f \in L^2(R)$. Nous énonçons, au paragraphe 3, quelques corollaires du théorème 1 nécessaires à la démonstration du théorème 2, donnée au paragraphe 4. Les méthodes employées ci-dessous ou dans [7] ne permettent pas, semble-t-il, d'étudier les opérateurs plus généraux $\displaystyle\int \frac{[A(x) - A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}} f(y)\, dy$ où $A' = a \in L^\infty(R)$ et $n \geq 3$.

1. Dans un premier temps, nous allons supposer que a, b et f appartiennent à l'espace $\mathcal{D}(R)$ des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts et nous allons utiliser une modification plus maniable de l'opérateur $\mathcal{C}(a, b, f)$ définie par

$$(5) \qquad \widetilde{\mathcal{C}}(a, b, f)(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int \frac{[A(x)-A(y)]\,[B(x)-B(y)]}{x-y} f'(y)\, dy \right\}.$$

Désignons par H la transformée de Hilbert et par $\mathcal{C}_1(a, f)$ le commutateur de

Calderón :

$$(6)\qquad \mathcal{C}_1(a\,,\,f)(x) = \int \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}\, f(y)\,dy \qquad \text{et} \qquad H(f)(x) = \int \frac{f(y)}{x-y}\,dy\,.$$

Une simple intégration par parties donne

$$(7)\qquad \tilde{\mathcal{C}}(a,b,f)(x) = 2\,\mathcal{C}(a,b,f)(x) + b(x)\,H(af)(x) + a(x)\,H(bf)(x) - a(x)\,\mathcal{C}_1(b,f)(x)$$
$$- b(x)\,\mathcal{C}_1(a,f)(x) - \mathcal{C}_1(a,bf)(x) - \mathcal{C}_1(b,af)(x).$$

Nous voulons montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, toute fonction $b \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on ait

$$(8)\qquad \|\mathcal{C}(a\,,\,b\,,\,f)\|_2 \le C\|a\|_\infty\,\|b\|_\infty\,\|f\|_2.$$

Le théorème de Calderón [3], ou bien une transcription de la preuve donnée ci-dessous, montrent que

$$(9)\qquad \|\mathcal{C}_1(a\,,\,f)\|_2 \le C\,\|a\|_\infty\,\|f\|_2.$$

Compte tenu de (7) et (9), pour prouver (8) il suffit de vérifier que

$$(10)\qquad \|\tilde{\mathcal{C}}(a,b,f)\|_2 \le C\|a\|_\infty\,\|b\|_\infty\|f\|_2.$$

Si f_1, f_2, f_3 sont trois fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ dont les transformées de Fourier appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, on a, de façon évidente,

$$(11)\qquad f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x) = \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i(\alpha+\beta+\gamma)x}\,\hat{f}_1(\alpha)\hat{f}_2(\beta)\,\hat{f}_3(\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

où la mesure de Haar $d\alpha\,d\beta\,d\gamma$ sur $\mathbb{R}^3$ a été correctement normalisée.

Appliquant cette remarque à chacun des quatre morceaux de

$$\int \frac{[A(x)-A(y)]\,[B(x)-B(y)]}{x-y}\, f'(y)\,dy = A(x)B(x)\,H(f')(x) - A(x)\,H(Bf')(x) - B(x)\,H(Af')(x) + H(AB\,f')(x),$$

il vient

$$(12)\qquad \tilde{\mathcal{C}}(a,b,f)(x) = -\,i\pi \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta}\,\chi(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{ix(\alpha+\beta+\gamma)}\;\hat{a}(\alpha)\,\hat{b}(\beta)\,\hat{f}(\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

où $\chi(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{sign}(\alpha+\beta+\gamma) - \mathrm{sign}(\alpha+\gamma) - \mathrm{sign}(\beta+\gamma) + \mathrm{sign}\,\gamma$. Une simple observation géométrique montre que, presque partout sur $\mathbb{R}^3$,

$$\chi \neq 0 \Rightarrow \frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta} \in [-1\,,\,0]. \tag{13}$$

Soit P le demi plan fermé $\mathrm{Re}\, z \geq 0$. Posons $z = \sigma + i\tau$. Pour tout $z \in P$, soit F_z la fonction de $L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$F_z(x) = i\pi \iiint_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta}\right|^z \chi(\alpha,\beta,\gamma) e^{ix(\alpha+\beta+\gamma)}\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{b}(\beta)\, \hat{f}(\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Montrons que si a, b et f appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $F_z \in L^2(\mathbb{R})$ et que $z \to F_z$ est une application de P dans $L^2(\mathbb{R})$ continue sur P et holomorphe à l'intérieur de P.

On a en effet $$F_z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}\, G_z(s)\, ds$$

où s désigne $\alpha + \beta + \gamma$ et où, grâce à (13),

$$|G_z(s)| \leq 2\pi \iint |\hat{f}(s-\alpha-\beta)\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{b}(\beta)|\, d\alpha\, d\beta \in L^2(ds).$$

Les deux autres propriétés de l'application $z \to F_z$ sur P résultent de (13) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Remarquons que $\sup\limits_{z\in P} \|F_z\|_2 < +\infty$ et que

$$F_1(x) = \tilde{\mathscr{C}}(a\,,\,b\,,\,f)(x). \tag{14}$$

Soit m un entier positif. En appliquant à la fonction holomorphe vectorielle $(1+z)^{-m} F_z$ le principe du maximum, nous pouvons majorer $\|\tilde{\mathscr{C}}(a,b,f)\|_2$ par $2^m \sup(1+\tau^2)^{-m/2}\|F_{i\tau}\|_2$. Il reste à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, si m est assez grand, on ait, pour toute valeur du nombre réel τ,

$$\|F_{i\tau}\|_2 \leq C(1+\tau^2)^{m/2}\, \|a\|_\infty\, \|b\|_\infty\, \|f\|_2. \tag{15}$$

Cette dernière inégalité résulte très simplement de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de $\mathscr{C}_0(R)$ dont les transformées de Fourier appartiennent à $L^1(R)$. Si $f \in \mathscr{D}(R)$, on pose

$$(16) \qquad \Gamma(u,v,f)(x) = \int \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{x-y} f(y)\, dy .$$

Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, v et f telle que

$$(17) \qquad \|\Gamma(u\,,\,v\,,\,f)\|_2 \le C \|u\|_{BMO} \|v\|_{BMO} \|f\|_2 .$$

Admettons provisoirement ce résultat et démontrons (15).

Si $z = i\tau$, $\left|\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta}\right|^{i\tau} = |\gamma|^{i\tau} |\alpha+\beta+\gamma|^{i\tau} |\alpha|^{-i\tau} |\beta|^{-i\tau}$.

Appelons M_τ l'opérateur de convolution associé au multiplicateur $|\alpha|^{i\tau}$: $M_\tau(f) = g$ si $\hat{g}(\alpha) = |\alpha|^{i\tau} \hat{f}(\alpha)$, $\alpha \in R$. Posons $a_\tau = M_{-\tau} a$, $b_\tau = M_{-\tau} b$. On a ([8])

$$(18) \qquad \|a_\tau\|_{BMO} \le C(1 + |\tau|) \|a\|_\infty$$

et

$$\|b_\tau\|_{BMO} \le C(1 + |\tau|) \|b\|_\infty$$

(on peut améliorer les inégalités (18) mais dans notre cas $1 + |\tau|$ est suffisant).

Enfin $F_{i\tau} = - M_\tau \left\{ \int \frac{[a_\tau(x) - a_\tau(y)]\,[b_\tau(x) - b_\tau(y)]}{x-y} f_{-\tau}(y)\, dy \right\}$.

Les inégalités (17) et (18) entraînent (15) avec $m = 2$.

La démonstration suivante de la proposition 1 est due à R. Rochberg ([9]). Nous allons, en fait, utiliser le lemme 1 ci-dessous pour prouver un résultat plus général (lemme 2).

LEMME 1. Il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in BMO$ telle que $\|u\|_{BMO} \le \delta$, le noyau $K(x,y) = \frac{e^{u(x)-u(y)}}{x-y}$ soit borné sur L^2.

Si u est à valeurs réelles, ce résultat est prouvé dans [6] : le poids $e^{u(x)} = \omega(x)$ vérifie la condition A_2 de Muckenhoupt. Si $u = u_1 + iu_2$ où u_1 et u_2 sont réels, on a $K(x,y) = e^{iu_2(x)} K_1(x,y)\, e^{-iu_2(y)}$: le noyau K_1 est borné sur L^2 et est composé avec deux opérateurs unitaires sur L^2 ; K est borné sur L^2.

LEMME 2. Pour toute fonction $u \in BMO$ et tout entier $k \geq 0$, le noyau $\dfrac{[u(x)-u(y)]^k}{x-y}$ est borné sur L^2.

On peut évidemment se restreindre au cas où $\|u\|_{BMO} \leq \frac{\delta}{2}$. On écrit alors

$$\frac{[u(x)-u(y)]^k}{x-y} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{e^{\zeta [u(x)-u(y)]}}{x-y} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}}$$

et l'on applique le lemme 1.

2. Preuve du théorème 1 dans le cas général.

Nous venons de terminer la démonstration de l'inégalité (8). Pour finir la preuve du théorème 1, nous allons introduire la notion de "noyau de Calderon-Zygmund" et rappeler une inégalité due à Cotlar ([10] p.218).

Un noyau de Calderón-Zygmund est une fonction $k(x,y)$, à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la diagonale D et possédant les trois propriétés a), b) et c) suivantes.

(a) $k(x,y) \in \Lambda_1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$; plus précisément il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, on ait

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right| \leq C(y-x)^{-2} \quad , \quad \left|\frac{\partial k}{\partial y}\right| \leq C(y-x)^{-2} \quad \text{et} \quad |k(x,y)| \leq C(y-x)^{-1}.$$

(b) pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} k(x,y)\, f(y)\, dy$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on ait $\|T(f)\|_2 \leq C \|f\|_2$; $T(f)(x)$ est la limite définie par b).

Soit f^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de f et désignons par $T_* f$ l'opérateur maximal associé à T et défini par

$$T_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|y-x| \geq \varepsilon} k(x,y)\, f(y)\, dy \right| .$$

Si $k(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund, la norme de k, notée $\|k\|$, est, par définition, la borne inférieure des constantes $C > 0$ pouvant figurer dans a) et c)

PROPOSITION 2 (Cotlar). Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout noyau $k(x,y)$ de Calderón-Zygmund et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ on ait, pour presque tout x réel,

$$(T_* f)(x) \leq C_1 \|k\|\, f^*(x) + C_1 (Tf)^*(x).$$

COROLLAIRE 1. Sous les hypothèses de la proposition 2, il existe une constante C_2 telle que $\|T_* f\|_2 \leq C_2 \|k\|\, \|f\|_2$.

COROLLAIRE 2. Si $k(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund et si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} k(x,y)\, f(y)\, dy$ existe pour presque tout x.

COROLLAIRE 3. Soit $k_j(x,y)$, $j \geq 0$, une suite de noyaux de Calderón-Zygmund telle que $\sup\limits_{j \geq 0} \|k_j\| < +\infty$. Supposons qu'il existe une fonction $k(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$, vérifiant (a) et (b) et telle que $k_j(x,y) \to k(x,y)$ presque partout sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $k(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour presque tout x, $\int_{|y-x|\geq\varepsilon} k_j(x,y)\, f(y)\, dy \to \int_{|y-x|\geq\varepsilon} k(x,y)\, f(y)\, dy$ (puisque $|k_j(x,y)| \leq C\, |y-x|^{-1}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue). On a donc, en appelant T^j l'opérateur associé à k_j, $T_* f(x) \leq \underline{\lim}\, T_*^j f(x)$ presque partout. Le corollaire 1 et le lemme de Fatou entraînent alors $\|T_* f\|_2 \leq C\, \|f\|_2$; a fortiori $\|T f\|_2 \leq C \|f\|_2$ ce qu'il fallait démontrer.

La preuve du théorème 1 sera complète si nous démontrons le résultat suivant.

PROPOSITION 3. <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>deux fonctions de</u> $L^\infty(\mathbb{R})$, A <u>une primitive de</u> a <u>et</u> B <u>une primitive de</u> b. <u>Alors le noyau</u>
$k(x,y) = \dfrac{[A(x) - A(y)]\,[B(x) - B(y)]}{(x-y)^3}$ <u>est un noyau de Calderón-Zygmund</u>.

Nous allons d'abord montrer que $k(x,y)$ vérifie les propriétés a) et b) de la définition des noyaux de Calderón-Zygmund ; a) s'obtient sans peine. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a, en intégrant par parties,

$$\int_{|y-x|\geq\varepsilon} k(x,y)\, f(y)\, dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{(A(x)-A(y))(B(x)-B(y))}{(x-y)^2}\right]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{[A(x)-A(y)]\,[B(x)-B(y)]}{(x-y)^2}\, f'(y)\, dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{B(x)-B(y)}{(x-y)^2}\, a(y)\, f(y)\, dy + \frac{1}{2}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}\, b(y)\, f(y)\, dy.$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 pour presque tout x ; le second n'est plus une intégrale singulière : le noyau est devenu borné. Enfin les deux derniers termes sont les commutateurs d'ordre 1 de Calderón et ont des limites presque partout grâce aux résultats de [1].

Pour montrer (c), on appelle a_j et b_j deux suites de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\|a_j\|_\infty \leq \|a\|_\infty$, $\|b_j\|_\infty \leq \|b\|_\infty$, $a_j(x) \to a(x)$ presque partout et $b_j(x) \to b(x)$ presque partout $(j \to +\infty)$. Soit $k_j(x,y)$ le noyau $\dfrac{[A_j(x) - A_j(y)]\,[B_j(x) - B_j(y)]}{(x-y)^3}$ construit à l'aide des primitives A_j et B_j de a_j et b_j. L'inégalité (8) montre que k_j est une suite uniformément bornée de noyaux de Calderón-Zygmund. De façon évidente $k_j(x,y) \to k(x,y)$ pour tout x et tout $y \neq x$ $(j \to +\infty)$. Donc $k(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund.

3. <u>Résultats complémentaires utilisés dans la preuve du théorème</u> 2.

Supposons maintenant que a, b et f soient trois fonctions localement intégrables. On désigne par A une primitive de a et par B une primitive de b et l'on pose

(19) $$\mathcal{C}_*(a,b,f)(x) = \sup_{0<\varepsilon<T} \left| \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq T} \frac{[A(x)-A(y)]\,[B(x)-B(y)]}{(x-y)^3} f(y)\,dy \right| .$$

On a alors le résultat suivant.

LEMME 3. <u>Soit</u> $p \in \left]2, +\infty\right[$; <u>définissons</u> $q \in \left]1, +\infty\right[$ <u>par</u> $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$. <u>Il existe une constante</u> C_p <u>telle que pour toute fonction</u> $a \in L^p$, <u>toute fonction</u> $b \in L^p$ <u>et toute fonction</u> $f \in L^q$, <u>on ait l'inégalité de type faible</u>

(20) $$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} \, , \, \mathcal{C}_*(a,b,f)(x) > \lambda \right\} \right| \leq \frac{C_p}{\lambda} \|a\|_p \, \|b\|_p \, \|f\|_q .$$

En fait l'inégalité (20) découle d'un résultat plus précis : pour tout $r > 0$, on a

(21) $$\|\mathcal{C}_*(a,b,f)\|_r \leq C_r \|a^* \, b^* \, f^*\|_r .$$

Ici, comme plus haut, a^* est la fonction maximale de Hardy et Littlewood de a, etc.

Nous allons rappeler brièvement la preuve de (21) donnée dans [7]. Tout d'abord on peut se restreindre dans (20) au cas où f, a et b appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Le cas général en découle en remarquant que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ et en appliquant le lemme de Fatou. La preuve du lemme (4.8), p. 330, fournit

$$(22) \qquad \left|\left\{x \in \mathbb{R}\ ,\ |\mathcal{C}(a,b,f)|(x) > \lambda\right\}\right| \leq C\left(\frac{\|a\|_1\ \|b\|_1\ \|f\|_1}{\lambda}\right)^{1/3}.$$

L'inégalité (22) et le lemme (4.2) de la page 327 de [7] entraînent

$$(23) \qquad \left|\left\{x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathcal{C}_*(a,b,f)(x) > \lambda\right\}\right| \leq C'\left(\frac{\|a\|_1\|b\|_1\|f\|_1}{\lambda}\right)^{1/3}.$$

Dès lors le lemme (4.5), page 328, donne (21).

4. <u>Preuve du théorème 2</u>. Fixons q dans $]1\ ,\ 2[$ (par exemple $q = 3/2$) et définissons p par $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $a \in BMO(\mathbb{R})$, on a

$$(24) \qquad \sup_I \left(|I|^{-1}\int_I |a(t) - m_I a|^p\, dt\right)^{1/p} < +\infty\ ;$$

la borne supérieure est prise sur tous les intervalles de longueur finie non nulle et $m_I a$ désigne la moyenne de a sur I (en particulier $m_{[x,y]}a$ désignera, ci-dessous, la moyenne de a sur l'intervalle $[x\ ,y]$). Au lieu de considérer l'opérateur "bilinéaire" $T(a,b,f)$, il suffit d'étudier l'opérateur "quadratique" $T(a,a,f)$ que nous noterons, pour abréger, $T(a,f)$. Enfin $T_*(a,f)$ désigne l'opérateur maximal associé. On a donc

$$(25) \qquad T(a,f)(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{(a(y) - m_{[x,y]}a)^2}{x - y}\, f(y)\, dy$$

et

$$(26) \qquad T_*(a,f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{(a(y) - m_{[x,y]}a)^2}{x-y} f(y)\,dy \right|.$$

Quitte à multiplier $a \in BMO$ par une constante, on peut supposer que le premier membre de (24) est égal à 1.

Nous allons d'abord vérifier que

$$(27) \qquad \| T_*(a,f)\|_2 \leq C\|f\|_2.$$

Nous prouverons ensuite l'existence, pour presque tout x, de la limite écrite au second membre de (25).

Pour montrer (27), il suffit évidemment de se restreindre à un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On pourra, par exemple, supposer que f est bornée et à support compact. Alors $T_*(a,f)(x) = 0(x^{-1}\log^2|x|)$, $|x| \to +\infty$. Définissons une variante de la fonction maximale de Hardy et Littlewood de f par

$$(28) \qquad M_q f(x) = \sup_{x\in I} \left(|I|^{-1} \int_I |f|^q(t)\,dt\right)^{1/q}.$$

Puisque $q < 2$, on a

$$(29) \qquad \|M_q f\|_2 \leq C\|f\|_2.$$

Ainsi (27) résulte d'une propriété plus générale : pour tout $r > 0$, il existe une constante C_r telle que

$$(30) \qquad \|T_*(a,f)\|_r \leq C_r\|M_q f\|_r.$$

L'inégalité (30) découle elle-même, grâce à la méthode introduite par Burkholder et Gundy ([2]), de l'inégalité "aux bons λ" suivante.

PROPOSITION 4. <u>Il existe un nombre réel</u> $\gamma_o > 0$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>tels que pour tout</u> $\lambda > 0$ <u>et tout</u> $\gamma \in \,]0, \gamma_o[$, <u>on ait</u>

(31) $$\left|\left\{T_*(a,f)(x) > 2\lambda \ ; \ M_q f(x) \le \gamma\lambda\right\}\right| \le C\gamma \left|\left\{T_*(a,f)(x) > \lambda\right\}\right|$$

Puisque f est bornée et a un support compact, l'ensemble Ω des x tels que $T_*(a,f)(x) > \lambda$ est un ouvert borné, réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $I_k =]\alpha_k, \alpha_k+\ell_k[$, $k \ge 0$. Nous appellerons J_k les intervalles $]\alpha_k - 3\ell_k, \alpha_k + 3\ell_k[$ associés.

Soit $E \subset \Omega$ l'ensemble des x tels que $T_*(a,f)(x) > 2\lambda$ et $M_q f(x) \le \gamma\lambda$; posons $E_k = E \cap I_k$. Pour démontrer (31), il suffit de vérifier que, pour tout $k \ge 0$,

(32) $$|E_k| \le C\gamma |I_k| .$$

Si $E_k = \emptyset$, (32) est évidente ; sinon il existe au moins un ξ dans I_k tel que $(M_q f)(\xi) \le \gamma\lambda$.

Dans ce dernier cas, on écrit $f = f_1 + f_2$ où $f_1 = f$ sur J_k et $f_1 = 0$ sur J_k^c.

Puisque le centre de J_k est α_k, on a

(33) $$T_*(a,f_2)(\alpha_k) \le T_*(a,f)(\alpha_k) \le \lambda .$$

L'inégalité (32) résultera alors des deux inégalités suivantes

(34) $$|T_*(a,f_2)(x) - T_*(a,f_2)(\alpha_k)| \le C_1 (M_q f)(\xi) \le C_1 \gamma\lambda$$

et

(35) $$\left|\left\{x \in I_k \ ; \ T_*(a,f_1)(x) > \lambda(1 - C_1\gamma)\right\}\right| \le C_2\gamma(1-C_1\gamma)^{-1} |I_k| .$$

Pour être plus explicite, on a $T_*(a,f) \le T_*(a,f_1) + T_*(a,f_2)$. Or, pour tout $x \in I_k$, il vient grâce à (33) et (34), $T_*(a,f_2)(x) \le \lambda + C_1\gamma\lambda$. Si donc $T_*(a,f)(x) > 2\lambda$, il est nécessaire que $T_*(a, f_1)(x) > \lambda - C_1\gamma\lambda$; grâce à (35),

$$|E_k| \le C_2\gamma(1 - C_1\gamma)^{-1} |I_k| \le C_3\gamma |I_k| \quad \text{si} \quad \gamma < \gamma_o .$$

Il reste à vérifier (34) et (35).

Nous commencerons par la preuve de (35) car c'est la plus simple.

Posons $K(x,y) = \dfrac{(a(y) - m_{[x,y]}a)^2}{x - y}$. Le noyau K a deux propriétés remarquables ; il ne change pas si l'on ajoute une constante à la fonction a ou si l'on remplace a par une fonction a_1 égale à a sur un intervalle contenant $[x,y]$. Pour prouver (35), on appelle $a_1(x)$ le produit de $a(x) - m_{J_k}a$ par la fonction caractéristique de J_k. Puisque $a \in BMO$ a été convenablement normalisée, on a $\|a_1\|_p \leq |J_k|^{1/p}$. D'autre part, si x et y appartiennent à J_k, $K(x,y)$ ne change pas si l'on remplace a par a_1. Ainsi, pour tout $x \in I_k$

$$T_*(a\ ,\ f_1)(x) = T_*(a_1\ ,\ f_1)(x).$$

Appelons $\mathscr{C}^2_*(a,f)$ l'opérateur maximal $\mathscr{C}_*(a,a,f)$ défini par (19) et $\mathscr{C}^1_*(a,f)$ l'opérateur maximal $\mathscr{C}_*(a,1,f)$ défini par (19). Soit q_1 l'exposant conjugué de p. Si $a \in L^p$ et $g \in L^{q_1}$, on a, grâce à (21),

$$(36) \qquad \left|\left\{x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathscr{C}^1_*(a,g)(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{C}{\lambda}\ \|a\|_p\ \|g\|_{q_1}.$$

Le développement de $(a_1(y) - m_{[x,y]}a_1)^2$ donne trois termes et l'on a donc $T_*(a_1,f_1)(x) \leq H_*(a_1^2\ f_1) + 2\ \mathscr{C}^1_*(a_1\ ,\ a_1 f_1) + \mathscr{C}^2_*(a_1,f_1)$. L'opérateur maximal associé à la transformée de Hilbert envoie L^1 dans L^1-faible. Les inégalités (20) et (36) entraînent alors (35).

Dans la vérification de (35), l'inégalité (20) et donc l'inégalité (2) ont été nécessaires ; ces deux inégalités expriment une propriété subtile des noyaux $k(x,y)$ et $K(x,y)$ nécessitant l'emploi de la variable complexe.

Au contraire la preuve de (34) n'utilisera que des propriétés plus superficielles de régularité du noyau provenant de ce que $a \in BMO$. Cette régularité du noyau est décrite par le remarque suivante.

LEMME 4. Soient ξ, x et y trois nombres réels et $\ell > 0$ tels que $|x-\xi| \leq \ell$ et $|y-\xi| \geq 2\ell$. Alors

$$|K(x,y) - K(\xi, y)| \leq \frac{C\ell}{(y-\xi)^2} |a(y) - m_{[\xi,y]}a|^2 + \frac{C\ell}{(y-\xi)^2} |a(y) - m_{[\xi,y]}a| \log \left|\frac{y-\xi}{\ell}\right| + \frac{C\ell^2}{|y-\xi|^3} \log^2 \left|\frac{y-\xi}{\ell}\right|. \tag{37}$$

Comme ci-dessus $a \in BMO$ est normalisée ; C désigne une constante absolue. La preuve du lemme 4 ne présente aucune difficulté et sera donnée dans un instant. Vérifions d'abord que (37) implique (34). Rappelons que ℓ_k est la longueur de I_k. Il suffit de montrer que, pour tout $x \in I_k$,

$$|T_*(a,f_2)(x) - T_*(a,f_2)(\xi)| \leq C(M_q f)(\xi) \ ; \tag{38}$$

l'inégalité (38) découle elle-même de l'inégalité correspondante pour les opérateurs tronqués

$$|T_\varepsilon(a, f_2)(x) - T_\varepsilon(a, f_2)(\xi)| \leq C(M_q f)(\xi). \tag{39}$$

Si $\varepsilon > 2\ell_k$, soit χ la fonction caractéristique de $|y-x| \geq \varepsilon$ et soit χ' celle de $|y-\xi| \geq \varepsilon$. Alors

$$|T_\varepsilon(a, f_2)(x) - T_\varepsilon(a, f_2)(\xi)| = |T(a,\chi f_2)(x) - T(a, \chi' f_2)(\xi)| \leq |T(a, \chi f_2)(x) - T(a, \chi f_2)(\xi)| + |T(a, \chi_1 f_2)(\xi)| \quad \text{où} \quad \chi_1 = \chi - \chi'.$$

Définissons D par $\frac{\varepsilon}{2} \leq |y-\xi| \leq \varepsilon$; alors $J_k^c \cap \operatorname{supp} \chi_1 \subset D$. Donc $|T(a, \chi_1 f_2)(\xi)| \leq \int_D \frac{|a(y)-m_{[\xi,y]}a|^2}{|\xi-y|} |f(y)|dy \leq C(M_q f)(\xi)$, grâce à l'inégalité de Hölder et à (24). Il reste à majorer $|T(a,\chi f_2)(x) - T(a,\chi f_2)(\xi)|$. Si $0 < \varepsilon \leq 2\ell_k$, $T_\varepsilon(a\ ,\ f_2)(x) = T(a\ ,\ f_2)(x)$ pour tout $x \in I_k$. Finalement (39) résulte du lemme suivant (appliqué à f_2 ou à χf_2).

LEMME 5. <u>Si une fonction</u> g <u>est identiquement nulle sur</u> J_k, <u>on a</u>, <u>pour</u> x <u>et</u> $\xi \in I_k$,

(40) $$|T(a,g)(x) - T(a,g)(\xi)| \leq C(M_q g)(\xi).$$

On a, en fait $T(a,g)(x) - T(a,g)(\xi) = \int [K(x,y) - K(\xi,y)]\, g(y)\, dy$. L'inégalité (37) conduit à trois termes dont les majorations sont semblables ; c'est pourquoi nous n'examinerons que le premier. On a

(41) $$C\ell \left| \int_{J_k^c} \frac{(a(y)-m_{[\xi,y]}a)^2\, g(y)}{(\xi - y)^2}\, dy \right| \leq$$

$$C\ell \left(\int_{J_k^c} \frac{|a(y)-m_{[\xi,y]}a|^p}{(\xi - y)^2}\, dy \right)^{2/p} \left(\int_{J_k^c} \frac{|g(y)|^q}{(\xi - y)^2}\, dy \right)^{1/q}.$$

En découpant J_k^c en "couronnes" $2^j \ell_k \leq |\alpha_k - y| \leq 2^{j+1}\ell_k$ et en utilisant (24) et (28) on majore sans peine (41) par $C(M_q f)(\xi)$.

Il reste à prouver le lemme 4. Quelques remarques très simples sur BMO sont nécessaires. Soit a une fonction de BMO pour laquelle le premier membre de (24) est égal à 1 et soient I_1 et I_2 deux intervalles tels que $|I_1| \leq |I_2| \leq 2|I_1|$ et $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. On a alors, presque immédiatement, $|m_{I_2}a - m_{I_1}a| \leq 6$. Si maintenant $2^{N-1}|I_1| \leq |I_2| \leq 2^N|I_1|$, $N \geq 1$, et $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, il vient $|m_{I_2}a - m_{I_1}a| \leq 6N$. Enfin, soient x , x' , ξ et y quatre nombres réels tels que $|x - \xi| \leq \ell$, $|x' - \xi| \leq \ell$ et $|y - \xi| \geq 2\ell$. Alors

(42) $$\left| m_{[x',y]}a - m_{[x,y]}a \right| \le C \frac{\ell}{|y-\xi|} \log \frac{|y-\xi|}{\ell} .$$

La vérification de (42) est facile. On appelle I_1 l'intervalle $[\xi - \ell , \xi + \ell]$ et I_2 l'intervalle $[x,y]$; on remplace, dans le membre de gauche de (42), a par $a - m_{I_1} a$. Alors, on remarque que

$$\left| m_{[x',y]}a - m_{[x,y]}a \right| \le \left| \frac{x'-x}{y-x'}(m_{I_2}a - m_{I_1}a) \right| +$$

$$\left| \frac{1}{y-x} \int_{x'}^{x} (a(t) - m_{I_1}a)dt \right| \le C \frac{\ell}{|y-\xi|} \log \frac{|y-\xi|}{\ell} + C \frac{\ell}{|y-\xi|}$$

La preuve du lemme 4 résulte maintenant dans difficulté de l'inégalité (42) et la preuve de (27) est complète.

Pour terminer notre programme, il faut encore vérifier que si $a \in BMO$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \ge \varepsilon} \frac{(a(y) - m_{[x,y]}a)^2}{x-y} f(y)\,dy$ existe presque partout. Compte tenu de (27), il suffit d'examiner le cas $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En développant $(a(y) - m_{[x,y]}a)^2$, on obtient trois termes que nous examinerons successivement à l'aide du

LEMME 6. <u>Soient</u> b <u>et</u> g <u>deux fonctions de</u> $L^2(\mathbb{R})$. <u>Appelons</u> B <u>une primitive de</u> b. <u>Alors</u>

(43) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \ge \varepsilon} \frac{B(x) - B(y)}{(x-y)^2} g(y)\,dy$$

<u>existe presque partout</u>.

La preuve du lemme est très simple : l'opérateur maximal associé envoie L^2 dans L^1 (grâce à (21) où $a = 1$). Il suffit de considérer le cas particulier où

$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dans ce cas une intégration par parties donne

$$-\left[\frac{B(x)-B(y)}{x-y}\,g(y)\right]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{b(y)g(y)}{x-y}\,dy - \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{B(x)-B(y)}{x-y}\,g'(y)\,dy\ ;$$

les deux premiers termes ont des limites presque partout et le troisième n'est plus une intégrale singulière.

Revenons à la preuve de l'existence presque partout de (25). En développant $(a(y) - m_{[x,y]}a)^2$ on obtient trois termes. Le premier conduit à

$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{a^2(y)f(y)}{x-y}\,dy$; cette limite existe presque partout car $a^2(y)f(y) \in L^2$.

Le second conduit à $-2\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}(af)(y)\,dy$; appelons $[-n\,,\,n]$, $n\in\mathbb{N}$, un intervalle contenant x et le support de f et définissons une fonction $b \in L^2(\mathbb{R})$ par $b = a$ sur $[-n\,,\,n]$, $b = 0$ ailleurs. Soit B une primitive de b. On a

$$\int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}(af)(y)\,dy = \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{B(x)-B(y)}{(x-y)^2}(af)(y)\,dy$$

et l'on peut alors appliquer le lemme 6.

Le dernier terme $\int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{|A(x)-A(y)|^2}{(x-y)^3}\,f(y)\,dy$ s'étudie par intégration par parties (comme au § 2) et l'on est ramené à des termes semblables à ceux étudiés au cas précédent.

Bibliographie

[1] BAJSANSKI, B. M. and COIFMAN, R. On singular integrals. Proc. Sympos. Pure Math. vol. 10. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1967).

[2] BURKHOLDER, D. L. and GUNDY, R. F. Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. vol. 124 (1970), 249-304.

[3] CALDERON, A. P. Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 53 (1965), 1092-1099.

[4] CALDERON, A. P. On algebras of singular integral operators. Proc. Sympos. Pure Math., vol. 10. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1967), 18-55.

[5] CALDERON, C. P. On commutators of singular integrals. Studia Math. 53 (1975), 139-174.

[6] COIFMAN, R. and FEFFERMAN, Ch. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[7] COIFMAN, R. and MEYER, Y. Commutators of singular integrals. Trans. Amer Math. Soc. 212 (1975), 315-331.

[8] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. H^p spaces of several variables. Acta Math. 29 (1972), 137-193.

[9] ROCHBERG, R. Communication orale (Washington University).

[10] STEIN, E. and WEISS, G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press (1971).

[11] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Vol. I and II, C.U.P. (1968).

Department of Mathematics
Washington University
ST-LOUIS, MO, 63130, U.S.A.

Université Paris-Sud
Centre Scientifique d'Orsay
Bâtiment 425
91405 ORSAY (France)