

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

85-03

DOMAINES DE LAVRENTIEV

par

Michel ZINSMEISTER

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) : 30C60 - 30E20 - 31A25 - 42A55 - 42B30

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

85-03

DOMAINES DE LAVRENTIEV

par

Michel ZINSMEISTER

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I.- <u>Les espaces fonctionnels de base</u>	
1. Classe de Nevanlinna : fonctions extérieures et intérieures.....	9
2. Fonctions de Bloch.....	13
3. L'espace BMOA ( $\mathbb{R}_+^2$ ).....	22
CHAPITRE II.- <u>Généralités sur les fonctions univalentes</u>	
1. La théorie de Koebe.....	39
2. Fonctions univalentes et BMOA.....	42
3. Les théorèmes de distorsion de Pommerenke et Gehring-Hayman.....	46
4. Connexité locale.....	51
5. L'espace universel de Teichmüller.....	57
CHAPITRE III.- <u>Domaines à bord rectifiables</u>	
1. Généralités.....	65
2. Domaines non bornés.....	67
3. Domaines réguliers.....	69
4. La représentation conforme des domaines réguliers.....	79
5. Domaines réguliers et espace universel de Teichmüller.....	92

CHAPITRE IV.- Espace de Hardy généralisés

1. Définitions : Domaine de Smirnov.....	102
2. Intégrale de Cauchy et domaines réguliers.....	107
3. Domaines de Neuman.....	115
4. L'indice des domaines de Lavrentiev.....	123

BIBLIOGRAPHIE pour les chapitres I-IV.....	136
--	-----

CHAPITRE V.- Applications quasi conformes

1. Généralités.....	139
2. Le théorème de P. Jones.....	144
3. Une version n-dimensionnelle du théorème de de distorsion de Pommerenke.....	147
4. Une version quasi conforme du théorème de distorsion de Gehring-Hayman.....	154
5. Applications quasi conformes et domaines de type $\mathcal{E}$ .....	156

BIBLIOGRAPHIE pour le chapitre V.....	162
---------------------------------------	-----

ZINSMEISTER, Michel

Lavrentiev domains

### ABSTRACT

This thesis presents first the principal properties of the conformal mapping of a simply connected domain  $\Omega$  whose boundary  $\Gamma$  is regular in Ahlfors's sense. This permits to put a complex analytic structure on  $\mathcal{L}$ , the set of Lavrentiev's domains, similar to the universal Teichmüller space, the underlying Banach space being here BMO. The Cauchy operator  $C_\Gamma$ , operating on  $L^2(\Gamma, ds)$ , is then seen to depend analytically on  $\Gamma \in \mathcal{L}$ .

In a second part we study Neuman problem for rectifiable Jordan domains. We characterize those domains for which one can solve this problem with data in an  $L^p(\Gamma, ds)$  ( $p > 1$ ). We also construct, for each  $p > 1$ , a Lavrentiev domain for which one cannot solve Neuman problem with  $L^p$ -data.

In the last chapter we establish some quasiconformal analogues of the theory, permitting us to prepare a  $n$ -dimensional theory.

KEY WORDS : Conformal mapping - BMO space - Universal Teichmüller space - Cauchy integral - Neuman problem - Quasiconformal mapping - Lavrentiev curves - Ahlfors's regular curves.

## INTRODUCTION

### 1. Historique

Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan rectifiable de la sphère de Riemann passant par le point à l'infini. Nous désignons par  $s \mapsto z(s)$  une paramétrisation de  $\Gamma$  par la longueur d'arc et par  $L^2(\Gamma)$  l'espace des fonctions définies sur  $\Gamma$  et de carré intégrable par rapport à la mesure  $ds$ .

Quelles sont les courbes  $\Gamma$  pour lesquelles l'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2(\Gamma)$  ?

Ce problème, posé par Calderón dans les années 60, a été un des problèmes centraux de l'analyse pendant la dernière décennie. Son originalité réside dans le fait qu'il se situe au confluent des préoccupations de deux écoles mathématiques.

La première de ces écoles, que nous appellerons l'école de Calderón et Zygmund, privilégie essentiellement le côté "théorie des opérateurs" en liaison avec l'analyse réelle. Pour elle, le problème posé est le suivant : trouver les conditions minimales sur  $\Gamma$  pour que le noyau  $K(x, y) = \frac{1}{z(x) - z(y)}$  définisse un opérateur d'intégrale singulière borné sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Le problème trouve alors son cadre dans un programme plus vaste de caractérisation des opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

Le point de vue de la deuxième école est tout différent ; il part de

l'observation suivante : si  $f \in L^2(\Gamma)$ , l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}$$

définit deux fonctions holomorphes  $F_1(\zeta)$  et  $F_2(\zeta)$  dans les deux composantes de  $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ . Si  $\Gamma$  est une droite ou bien est le graphe d'une fonction de  $C_0^\infty(\mathbf{R})$ ,  $F_1$  et  $F_2$  ont des valeurs au bord presque partout sur  $\Gamma$  et l'on a

$$(1) \quad \begin{aligned} f(z) &= F_1(z) - F_2(z) \text{ p. p. (ds) sur } \Gamma, \\ \|F_j\|_2 &\leq C \|f\|_2. \end{aligned}$$

Le problème de Calderón est alors de trouver les courbes  $\Gamma$  les plus générales pour lesquelles on a (1). Plus synthétiquement, les "courbes de Calderón" sont celles pour lesquelles  $L^2(\Gamma)$  est somme directe des deux espaces de Hardy  $H^2(\Omega_1)$  et  $H^2(\Omega_2)$  où

$$H^2(\Omega_j) = \{f \in L^2(\Gamma) ; F_j \equiv 0\}.$$

Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  désignent des représentations conformes de  $\mathbf{R}_+^2$  et  $\mathbf{R}_-^2$  respectivement sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec  $\Phi_j(\infty) = \infty$ , l'application  $F \mapsto F \circ \Phi_j (\Phi_j!)^{1/2}$  réalise (dans les "bons" cas) un isomorphisme naturel entre  $H^2(\Omega_1)$  et  $H^2(\mathbf{R}_+^2)$  (resp.  $H^2(\Omega_2)$  et  $H^2(\mathbf{R}_-^2)$ ).

La "philosophie" de la deuxième école, que nous appellerons école de variable complexe ou d'analyse géométrique, est alors d'étudier intensément la représentation conforme dans le but d'obtenir des renseignements sur les espaces de Hardy  $H^2(\Omega_1)$  et  $H^2(\Omega_2)$ . Plus précisément, le travail consiste à traduire en termes analytiques sur la représentation conforme les propriétés géométriques de  $\Gamma$ . Cette école hérite d'une riche tradition partant de F. et M. Riesz (caractérisation de la rectifiabilité) et poursuivie par Lavrentiev, Gehring, Pommerenke et beaucoup d'autres.



Le problème de Calderón a été complètement résolu par G. David en 1982 [15].

Les courbes de Calderón ne sont autres que les courbes régulières au sens d'Ahlfors c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists C > 0 ; \forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall r > 0, \left| \left\{ s \in \mathbb{R} ; |z(s) - z_0| < r \right\} \right| \leq Cr,$$

où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue.

La preuve de Guy David est très instructive, car elle reflète bien ce caractère "ambivalent" du problème de Calderón. Elle repose sur des méthodes de variable réelle, et donc se place dans le cadre de la première école. Néanmoins, pour mener à bien sa démonstration, David a besoin d'une estimation de base. Celle-ci lui est fournie par le théorème de Calderón [8] qui prouve, par des méthodes de variable complexe, la propriété pour les graphes de fonctions lipschitziennes avec petite constante.

Il est très tôt apparu qu'une classe particulière de courbes régulières jouait un rôle central dans la théorie ; ce sont les courbes de Lavrentiev, définies par la condition

$$\exists c > 0 ; \forall x, y \in \mathbb{R}, |z(x) - z(y)| \geq c |x - y|.$$

D'une part ce sont les courbes pour lesquelles le noyau de Cauchy  $K(x, y)$  est un noyau de Calderón-Zygmund. D'autre part les travaux de Lavrentiev et Pommerenke permettent de montrer que si  $\Gamma$  est une courbe de Lavrentiev alors  $|\Phi_j^!| \ll \mathbb{R}$  est un poids de la classe  $A^\infty$  de Muckenhoupt ; or il se trouve que c'est précisément cette propriété de  $\Phi_j^!$  qui est cruciale dans le travail de Calderón déjà cité (voir aussi [10]).

Notre démarche dans ce travail a été la confrontation des deux points de vue, et ceci dans un double but :

- 1) Interpréter "géométriquement" le théorème de David et mieux comprendre

l'importance des courbes de Lavrentiev ;

2) Elucider l'importance de la condition  $|\Phi'| \in A^\infty$  en liaison avec le problème de Calderón.

Comme nous allons maintenant le voir plus en détail cette confrontation s'est révélée fructueuse mais dans un sens le mystère s'est épaissi !

## 2. La variété des domaines de Lavrentiev

Notre première tâche a été d'étudier la représentation conforme  $\Phi$  d'un domaine régulier (c'est-à-dire dont le bord est une courbe régulière). L'exemple du domaine  $\{y > x^2\}$  nous montre que l'on ne peut espérer que  $|\Phi'| \in A^\infty$  en général. Nous montrons cependant une forme affaiblie de ce résultat, à savoir que  $|\Phi'|^t \in A^\infty$  si  $0 < t < 1/3$ .

Ce résultat implique en particulier que  $\text{Log } \Phi' \in \text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  pour de tels domaines. L'espace  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  (dont la définition est donnée au chapitre I) apparaît ainsi comme l'espace fonctionnel naturellement attaché à ces domaines de la même façon que l'espace de Hardy  $H^1$  est lié à l'étude des domaines rectifiables. On pose alors

$$\mathcal{D} = \left\{ \text{Log } \Phi' \ ; \ \Phi(\mathbb{R}) \text{ est une courbe régulière} \right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \text{Log } \Phi' \ ; \ \Phi(\mathbb{R}) \text{ est une courbe de Lavrentiev} \right\},$$

et nous montrons que  $\mathcal{L}$  est l'intérieur de  $\mathcal{D}$  dans  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$ , par analogie avec les théorèmes d'Ahlfors et de Gehring sur l'espace universel de Teichmüller. Nous pouvons ainsi munir l'ensemble des domaines de Lavrentiev correctement quotienté d'une structure analytique complexe.

Il devient alors possible d'étudier la dépendance analytique des objets

associés à  $\mathcal{L}$ . C'est ce que nous faisons pour l'opérateur de Cauchy lu avec la paramétrisation  $\Phi$ , c'est-à-dire l'opérateur  $T(\text{Log } \Phi')$  de noyau

$$K(x, y) = \frac{\Phi'(x)^{1/2} \Phi'(y)^{1/2}}{\Phi(x) - \Phi(y)} .$$

Nous montrons que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})) \\ \text{Log } \Phi' &\longmapsto T(\text{Log } \Phi') \end{aligned}$$

est analytique complexe. Il est tentant alors d'interpréter le théorème de David en termes de valeurs au bord de fonction analytique. Malheureusement, nous montrons, à l'aide d'un résultat profond de Gehring, que l'adhérence de  $\mathcal{L}$  ne contient pas  $\mathcal{D}$  et cette obstruction géométrique nous ôte toute illusion.

### 3. Les domaines de Neumann

Dans ce travail, nous caractérisons les domaines  $\Omega$  tels que  $|\Phi'| \in A^\infty(\mathbf{R})$ . Nous les appelons domaine de Neumann car il est très facile de voir que la condition  $|\Phi'| \in A^\infty$  équivaut au fait que l'on peut résoudre dans  $\Omega$  le problème de Neumann avec valeurs au bord dans  $L^p(\Gamma)$  pour un  $p > 1$ . Cette caractérisation met en jeu une quantification de la notion de locale connexité que nous allons maintenant définir.

Un ensemble  $E$  du plan est dit  $k$ - $\ell c$  ( $k \geq 1$ ) si pour tout disque  $D \subset \mathbf{C}$ ,  $E \cap \bar{D}$  est inclus dans une composante connexe de  $E \cap k\bar{D}$  ( $k\bar{D}$  est le disque de même centre mais de rayon multiplié par  $k$ ). Si  $\Omega$  est un domaine de Jordan, nous dirons qu'il est de type  $\mathcal{J}$  si  $\Omega$  est  $k$ - $\ell c$  pour un  $k \geq 1$ , et de type  $\mathcal{E}$  si  $\mathbf{C} \setminus \bar{\Omega}$  est de type  $\mathcal{J}$ . Enfin nous dirons que  $\Omega$  est de type  $\mathcal{R}$  si son bord est régulier.

Les trois classes  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$  jouent un peu le rôle des couleurs primaires en peinture. Ainsi Gehring a montré que les domaines quasiconformes (voir II) sont les domaines de types  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{L}$ . On en déduit immédiatement que les domaines de Lavrentiev sont les domaines appartenant aux trois classes.

Nous montrons que la classe des domaines de Neumann est l'intersection des classes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$ .

Nous montrons ainsi, via le théorème de David, que tout domaine de Neumann est un domaine de Calderón.

Ce phénomène est à rapprocher de la construction, par Verchota [40], d'une solution au problème de Neumann dans un domaine Lipschitzien de  $\mathbb{R}^n$  par la méthode du potentiel de double couche. Cette construction est en effet basée sur la solution du problème de Calderón.

Il y a donc des liens profonds entre les deux problèmes mais ceux-ci ne sont pas encore compris.

#### 4. L'indice des domaines de Lavrentiev

Si nous voulons préciser pour quels  $p > 1$  nous pouvons résoudre le problème de Neumann, il faut affiner notre analyse et déterminer les  $q > 1$  tels que  $|\Phi'|$  appartient à la classe  $A^q(\mathbb{R})$  de Muckenhoupt. D'après la théorie des poids de  $A^\infty$ , nous pouvons définir l'indice d'un domaine de Neumann par

$$\inf\{p \geq 1 ; |\Phi'| \in A^q \text{ pour } q > p\}.$$

Par le théorème de Helson-Szegö [25], on voit facilement que cet indice est  $< 2$  pour les domaines au dessus d'un graphe de fonction lipschitzienne. Baernstein [5] avait conjecturé qu'il en était de même pour les domaines de Lavrentiev.

Dans un travail en commun avec P. Jones, nous montrons qu'il n'en est rien. Plus précisément nous montrons, pour tout  $p > 1$ , l'existence d'un domaine de Lavrentiev d'indice exactement  $p$ .

### 5. Problèmes ouverts

a) Pour ne pas alourdir cette introduction, nous n'avons pas parlé jusque là des domaines de Smirnov (voir IV.1), ce qui rend d'ailleurs certains énoncés provisoirement incorrects. Le problème, très ancien, de leur caractérisation est toujours ouvert ; notons au passage que Lavrentiev a introduit ses courbes en liaison avec ce problème.

Nous exhibons dans cette thèse une très grande classe de domaines de Smirnov et peut-être approchons-nous de leur caractérisation. Il serait déjà intéressant de caractériser géométriquement les domaines tels que  $\text{Log } \Phi' \in \text{BMOA}$ .

b) En ce qui concerne la variété des domaines de Lavrentiev il serait intéressant de caractériser son adhérence  $\bar{\mathcal{L}}$ . Mais surtout nous ne savons pas si  $\mathcal{L}$  est connexe ; le problème analogue pour l'espace universel de Teichmüller est résolu mais il ne semble pas que les méthodes s'appliquent à notre propos.

c) Les classes des domaines réguliers et de Lavrentiev sont stables par transformation de Möbius. Ce résultat suggère qu'il pourrait y avoir un analogue de cette théorie en dimension supérieure, les transformations quasiconformes remplaçant la transformation conforme. Par exemple on peut facilement généraliser le théorème de Lavrentiev-Pommerenke de la façon suivante :

si  $n \geq 3$ , si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $K$  quasiconforme et si  $\Sigma = f(\mathbb{R}^{n-1})$  vérifie la propriété de régularité

$$\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0 \quad \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma \cap B(x,r)) \leq C r^{n-1} \quad (\mathcal{H}^{n-1} \text{ désigne}$$

la mesure de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionnelle) alors la mesure sur  $\mathbb{R}^{n-1}$  définie par

$$\mu(Q) = \mathcal{H}^{n-1}(f(Q))$$

est absolument continue et sa densité est un poids de la classe  $A^\infty$ . Le chapitre V est une première ébauche d'une telle généralisation en dimension  $\geq 3$ .

Les méthodes utilisées dans cette thèse sont celles de l'analyse géométrique. Les espaces fonctionnels (surtout la classe de Bloch et BMO) jouant un rôle considérable dans ces méthodes, nous les étudions en détail au chapitre I.

Dans le chapitre II, les principales propriétés de la représentation conforme, en liaison avec ces espaces fonctionnels, sont étudiées. Les résultats de ces deux premiers chapitres peuvent être considérés comme "classiques" ; ils constituent essentiellement une synthèse destinée à convaincre le lecteur de l'importance de l'espace BMO dans cette théorie (voir aussi le chapitre V).

Au chapitre III nous développons les points 2 et 3 ci-dessus.

Notre objectif principal est la variante de la théorie de l'espace universel de Teichmüller décrite au point 2. Au chapitre IV, nous étudions le problème de Neumann et le problème de Calderon en liaison avec les espaces de Hardy généralisés.

Enfin, en annexe, nous montrons un résultat de Sullivan concernant l'itération des polynômes en utilisant les méthodes de l'analyse géométrique.

CHAPITRE I.- Les espaces fonctionnels de base

1. CLASSE DE NEVANLINNA. FONCTIONS EXTERIEURES ET INTERIEURES.

a) Rappelons tout d'abord la théorie sur le disque. Une fonction  $f$  analytique dans le disque appartient à la classe  $N(D)$  de Nevanlinna si  $\text{Log}^+(|f(z)|)$  admet un majorant harmonique ( $\text{Log}^+ x = \sup(\text{Log } x, 0)$ ). Une fonction  $g$  analytique dans le disque est dite intérieure si  $\sup_{z \in D} |g(z)| \leq 1$  et si ses valeurs au bord (qui existent presque partout) sont de module 1. Enfin  $g$  est dite extérieure s'il existe  $\omega \in L^1(\mathbb{T})$  telle que

$$\forall z \in D, \quad g(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta \right\}.$$

Le théorème qui suit résume les propriétés de la classe  $N$ .

THEOREME 1. Sont équivalents, pour  $f$  analytique dans le disque :

(1)  $f \in N(D)$ ,

(2)  $\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} \text{Log}^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ ,

(3)  $f(z) = B(z) \frac{S_1(z)}{S_2(z)} G(z)$ , où  $B(z)$  est un produit de Blaschke,  $S_1$

et  $S_2$  sont deux fonctions intérieures ne s'annulant pas dans  $D$  et  $G(z)$  est une fonction extérieure.

De plus, si  $f \in N(D)$  alors  $f$  admet presque partout une limite non tangen-

tielle  $f(e^{i\theta})$  telle que  $\text{Log} |f(e^{i\theta})| \in L^1(\mathbb{T})$  et

$$G(z) = \exp \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \text{Log} |f(e^{i\theta})| d\theta \right\}.$$

Pour les démonstrations de ces résultats, voir [17], [21].

La classe  $N^+(D)$  est définie par le théorème 2 suivant.

THEOREME 2. Pour  $f \in N(D)$ , sont équivalents :

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta,$$

(5) le facteur  $S_2 \equiv 1$  dans la décomposition (3). Si (4) ou (5) est vérifié nous dirons que  $f \in N^+(D)$ .

b) Nous nous proposons d'énoncer des résultats analogues pour le demi-plan supérieur  $\mathbb{R}_+^2 = \{x+iy ; y>0\}$ .

DEFINITION 1. Une fonction  $f$ , analytique dans  $\mathbb{R}_+^2$ , appartient à la classe  $N$  de Nevanlinna si  $\text{Log}^+ |f(z)|$  admet un majorant harmonique.

Considérons  $\varphi(z) = i \frac{1+z}{1-z}$  une représentation conforme de  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

Sa réciproque est  $\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ . Vu la définition de la classe  $N$ , il est évident que  $f \in N(\mathbb{R}_+^2)$  si et seulement si  $f \circ \varphi \in N(D)$ .

Nous pouvons alors recopier le théorème 1 dans le cadre de  $\mathbb{R}_+^2$ . Le seul ennui est que les droites  $y = y_0$  ( $y_0 > 0$ ) sont envoyées par  $\psi$  sur des cercles tangents en  $1$  au cercle unité. Néanmoins nous avons :

THEOREME 3. Si  $f \in N(\mathbb{R}_+^2)$  alors  $f$  admet des limites non tangentielles presque partout au bord,  $\text{Log} |f(x)| \in L^1\left(\frac{dx}{1+x}\right)$ , et  $f$  admet la décomposition



$$(6) \quad f(z) = B(z) \frac{S_1(z)}{S_2(z)} G(z),$$

où  $G(z) = \exp\left\{\frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) \text{Log} |f(t)| dt\right\}$ ,  $B(z)$  est un produit de Blaschke pour  $\mathbf{R}_+^2$  et  $S_1, S_2$  sont des fonctions intérieures (même définition que pour le disque). Réciproquement, toute fonction de la forme (6), où

$G(z) = \exp\left\{\frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) \omega(t) dt\right\}$  avec  $\omega \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$ , appartient à la classe  $N(\mathbf{R}_+^2)$ .

La démonstration du théorème 3 est évidente avec l'usage de la transformation conforme  $\varphi$ .

Remarque. Si on suppose  $\log |f(t)| \in L^1(dx)$  alors

$$G(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{\frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log |f(t)|}{t-z} dt\right\},$$

ce qui est plus en "accord" avec la formule de Cauchy. Le facteur  $-\frac{t}{t^2+1}$  n'est là que pour assurer la convergence de l'intégrale. Remarquons d'autre part que

$|G(z)| = \exp\left\{\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right) \log |f(t)| dt\right\}$ ; nous reconnaissons là l'intégrale de Poisson de  $\log |f|$ .

DEFINITION 2. Une fonction  $G$  est dite extérieure dans  $\mathbf{R}_+^2$  s'il existe  $\omega \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$ , réelle telle que

$$G(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{\frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) \omega(t) dt\right\}.$$

Une fonction  $f$  appartient à  $N^+(\mathbf{R}_+^2)$  si  $f$  peut se décomposer sous la forme

$$f(z) = B(z) S(z) G(z),$$

où  $B$  est un produit de Blaschke,  $S$  une fonction intérieure ne s'annulant pas sur  $\mathbf{R}_+^2$  et  $G$  une fonction extérieure.

c) Propriétés des fonctions extérieures

PROPOSITION 1. Soit  $f \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$ ; alors  $f$  est extérieure si et seulement si  $\log |f(z)|$  est l'intégrale de Poisson de ses valeurs au bord.

Preuve. La partie directe a déjà été démontrée dans la remarque 1. Réciproquement si  $f = B(z)S(z)G(z)$  et si  $B(z)S(z)$  n'est pas identiquement égal à 1, alors  $|f(z)| < |G(z)|$  pour  $z \in \mathbb{R}_+^2$ , et par conséquent  $\log |f|$  ne peut être l'intégrale de Poisson de ses valeurs au bord.

PROPOSITION 2. Soit  $f \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$  telle que  $f$  ne s'annule pas dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Si  $1/f \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $f$  est extérieure.

Preuve. C'est évident d'après l'unicité de la décomposition des éléments de  $N$ .

PROPOSITION 3. Soit  $f$  une fonction analytique telle que  $\operatorname{Re} f > 0$  dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Alors  $f$  est une fonction extérieure.

Preuve. Par transformation conforme on est ramené à prouver l'analogue dans le disque.

Soit donc  $F$  une fonction analytique dans  $D$  telle que  $\operatorname{Re} F > 0$ .  
Considérons la détermination principale du logarithme

$$\log F(z) = \log |F(z)| + i \operatorname{Arg}(F(z)).$$

Puisque  $\operatorname{Re} F > 0$ , on a  $\operatorname{Arg}(F(z)) < \frac{\pi}{2}$  pour  $z \in D$ . D'après le théorème de Fatou il existe  $u(e^{i\theta}) \in L^\infty(\mathbb{T})$ ,  $\|u\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$ , telle que  $u(z) = \operatorname{Arg}(F(z))$  soit l'intégrale de Poisson de  $u(e^{i\theta})$ . Posons alors

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

$G(z)$  est une fonction de  $H^2(D)$  (en fait c'est une fonction de  $BMOA(D)$  (voir le paragraphe 3)) et sa partie imaginaire est  $u(z) = \text{Arg } F(z)$ . Il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $F(z) = C \exp(G(z))$ . Mais  $G$  est dans  $H^2$  et par conséquent  $C \exp G = F$  est extérieure par la proposition 1 (ou plutôt son analogue pour le disque).

## 2. FONCTIONS DE BLOCH

### a) La classe de Zygmund

DEFINITION 3. On dit qu'une fonction  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , appartient à la classe de Zygmund  $\Lambda^*(\mathbb{R})$  si l'on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, h > 0} \frac{|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|}{h} = \|f\|_{\Lambda^*} < +\infty.$$

Toute fonction lipschitzienne appartient à la classe de Zygmund mais la réciproque est fautive comme le montre la fonction de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos 2^n x}{2^n}.$$

PROPOSITION 4. Si  $f \in \Lambda^*$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C(1 + |x| |\log |x||).$$

Démonstration. On suppose  $x > 1$ . Montrons tout d'abord l'inégalité

$$\forall x > 0, \left| (f(x) - f(\frac{x}{2})) - 2(f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{4})) \right| \leq \frac{1}{4} x \|f\|_{\Lambda^*}.$$

Pour le voir on écrit

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) - 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right)\right) = \left(f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{5x}{8}\right)\right) - \left(f\left(\frac{3x}{4}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{5x}{8}\right)\right) + \left(f\left(\frac{3x}{4}\right) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

et la propriété découle de la définition de  $\Lambda^*$ . Soit  $n$  l'entier tel que  $2^{n-1} \leq x < 2^n$ . Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left[ f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] + f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|f(x)| \leq C$  si  $|x| \leq 1$ . D'autre part posons, pour  $k \geq 0$ ,

$$a_k = 2^k \left[ f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right].$$

D'après l'inégalité montrée plus haut,

$$|a_k - a_{k+1}| \leq \frac{3}{4} x \|f\|_{\Lambda^*},$$

d'où, à l'aide d'une transformation d'Abel,

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n$$

où  $S_k = \sum_{j=0}^k 2^{-j} \leq 2$ . On a donc

$$|f(x)| \leq \frac{3}{2} x n \|f\|_{\Lambda^*} + 3C \leq C(x \log x + 1)$$

et la proposition 4 est démontrée.

Remarque. Par des arguments similaires on peut montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $|f(x+h) - f(x)| \leq C \|f\|_{\Lambda^*} h \log \frac{1}{h}$ , et en déduire que la constante  $C$  de la proposition 4 est de la forme  $k \|f\|_{\Lambda^*}$ , où  $k$  est une constante absolue.

b) Fonctions de Bloch

DEFINITION 4. Une fonction  $f$ , analytique dans  $\mathbb{R}_+^2$  est dite appartenir à  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  si  $f$  vérifie :

$$\sup_{x+iy \in \mathbb{R}_+^2} y |f'(x+iy)| = \|f\|_{\mathcal{B}} < +\infty.$$

Avant de faire le lien entre  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\Lambda^*(\mathbb{R})$ , démontrons quelques propriétés de cette classe.

PROPOSITION 5. Il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $f \in \mathcal{B}$ , alors

$$\sup_{\substack{y > 0 \\ x \in \mathbb{R}}} y^2 |f''(x+iy)| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Réciproquement soit  $f$  une fonction analytique dans  $\mathbb{R}_+^2$  telle que

$$\sup_{x+iy \in \mathbb{R}_+^2} y^2 |f''(x+iy)| < +\infty. \text{ Alors, si pour tout } x \lim_{y \rightarrow \infty} f'(x+iy) = 0, f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$$

avec

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \sup_{x+iy \in \mathbb{R}_+^2} y^2 |f''(x+iy)|.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants, dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME 1. Soit  $u(x,y)$  une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, y |u(x,y)| \leq k$ . Alors  $y^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right| \leq Ck$  pour tout  $x+iy \in \mathbb{R}_+^2$ , où  $C$  est une constante universelle.

Démonstration.  $u(x,y)$  est bornée sur tout demi-plan  $y \geq y_0$  avec  $y_0 > 0$ . D'après le théorème de Fatou on en déduit :

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y/2}{(x-t)^2 + y^2/4} u(t, y/2) dt, \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-t)y}{[(x-t)^2 + y^2/4]^2} u(t, y/2) dt.$$

et par conséquent :

$$y^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| \leq C' k \int_{\mathbf{R}} \frac{|t| y^2}{(t^2 + y^2/4)^2} dt \leq Ck.$$

LEMME 2. Soit  $u$  une fonction harmonique dans  $\mathbf{R}_+^2$  telle que  $\forall x + iy \in \mathbf{R}_+^2 \quad y^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x+iy) \right| \leq k$ . Alors si  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers l'infini,

$$\forall x+iy \in \mathbf{R}_+^2, \quad y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \leq k.$$

Démonstration. Grâce à l'hypothèse faite sur  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , on a :

$$\forall x+iy \in \mathbf{R}_+^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = - \int_y^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt, \quad \text{d'où}$$

$$y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \leq k y \int_y^\infty \frac{dt}{t^2} = k.$$

Nous allons maintenant faire le lien entre  $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$  et l'espace BMO.

DEFINITION 5.  $BMO(\mathbf{R}_+^2)$  est l'espace des fonctions  $f$  localement intégrables sur  $\mathbf{R}_+^2$  telles que

$$\sup_{B \subset \mathbf{R}_+^2} \frac{1}{|B|} \iint_B \left| \left\{ f(x, y) - \left( \frac{1}{|B|} \iint_B f(x, y) dx dy \right) \right\} \right| dx dy < +\infty$$

où  $B$  décrit l'ensemble des disques de  $\mathfrak{R}_+^2$  ( $|B|$  désigne la surface de  $B$ ).

On a alors le résultat suivant, dû à Coifman et Rochberg.

PROPOSITION 6. Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\mathbf{R}_+^2$ ; alors  $f$  appartient à  $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$  si et seulement si  $f$  appartient à  $BMO(\mathbf{R}_+^2)$  et il y a

équivalence des normes correspondantes.

Démonstration. Supposons tout d'abord  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ ; soit alors  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $r_0 \leq y_0$  et  $B$  la boule de centre  $z_0$  et de rayon  $r_0$ .  
Tout d'abord remarquons que

$$\frac{1}{|B|} \iint_B f(z) dz d\bar{z} = f(z_0),$$

par la propriété de la moyenne. On écrit alors

$$\begin{aligned} \iint_B |f(z) - f(z_0)| dz d\bar{z} &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r_0} r \left( \int_0^r \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{y_0 + t \sin \theta} dt \right) dr \right\} d\theta \\ &\leq r_0 \|f\|_{\mathcal{B}} C \int_0^{r_0} \left\{ \int_0^r \left( \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{y_0 - t \sin \theta} \right) dt \right\} dr. \end{aligned}$$

Mais on montre, en la calculant, que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{y_0 - t \sin \theta} \leq \frac{C}{\sqrt{y_0} \sqrt{y_0 - t}}, \quad \text{d'où}$$

$$\iint_B |f(z) - f(z_0)| dz d\bar{z} \leq C r_0^2 \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Réciproquement supposons  $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}_+^2)$ . Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{R}_+^2$ . Posons

$$\mathcal{C} = \left\{ z = x + iy ; |z - z_0| \in \left[ \frac{1}{2}y_0, \frac{3}{4}y_0 \right] \right\}. \quad \text{On montre alors, en utilisant la formule}$$

de Cauchy, que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{C}{y_0} \iint_{\mathcal{C}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|^2} dz d\bar{z} \leq \frac{C}{y_0} \frac{1}{y_0} \iint_{B(z_0, 3/4 y_0)} |f(z) - f(z_0)| dz d\bar{z}$$

d'où  $y_0 |f'(z_0)| \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}_+^2)}$ , et la proposition est démontrée.

Avant de passer au résultat fondamental de ce paragraphe, énonçons encore une propriété qui n'est autre que l'invariance conforme de la classe de Bloch.

PROPOSITION 7. Si  $\mathcal{B}(D)$  désigne l'espace des fonctions holomorphes

dans  $D$  telles que

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| = \|f\|_{\mathcal{B}(D)} < +\infty,$$

alors  $f$ , holomorphe sur  $\mathbb{R}_+^2$ , appartient à  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  si et seulement si  $f \circ \varphi \in \mathcal{B}(D)$  et l'on a

$$\|f \circ \varphi\|_{\mathcal{B}(D)} = 2 \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Démonstration. Soit  $f$  holomorphe dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Alors :

$$(1 - |z|^2)(f \circ \varphi)'(z) = (1 - |z|^2) \frac{2i}{(1-z)^2} f'(\varphi(z)).$$

Mais la partie imaginaire de  $\varphi(z)$  est  $i \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2}$  ; la proposition 7 s'en déduit immédiatement.

### c) Lien entre la classe de Bloch et la classe de Zygmund

Nous nous proposons, dans cette partie, de démontrer la théorème suivant, qui est fondamental dans la théorie des fonctions univalentes :

**THEOREME 4.** Soit  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors  $F$  se prolonge en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^2$  et  $F|_{\mathbb{R}}$  est une fonction de la classe de Zygmund avec  $\|F|_{\mathbb{R}}\|_{\Lambda^*} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}}$ . Réciproquement si  $f$  est une fonction réelle appartenant à  $\Lambda^*(\mathbb{R})$ , il existe une fonction  $F$  continue sur  $\mathbb{R}_+^2$  et analytique sur  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $F' \in \mathcal{B}$  et  $\text{Re } F|_{\mathbb{R}} = f$  avec

$$\|F'\|_{\mathcal{B}} \leq C \|f\|_{\Lambda^*}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  ; pour montrer que  $F$  se prolonge continûment à  $\mathbb{R}_+^2$ , nous allons montrer que  $F_y(x) = F(x+iy)$  converge uniformément sur tout compact lorsque  $y$  tend vers 0. Soit donc  $I$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in I$  et  $y \leq 1$  on a



$$|f(x+i) - f(x+iy)| \leq \|f\|_{\mathfrak{B}} \log \frac{1}{y}$$

et par conséquent, si  $x \in I$  et  $y, y'$  sont  $\leq 1$ ,  $y' < y$ ,

$$\begin{aligned} |F(x+iy) - F(x+iy')| &\leq \int_{y'}^y (C_I + \|f\|_{\mathfrak{B}} \log \frac{1}{t}) dt \\ &\leq (C_I + \|f\|_{\mathfrak{B}})(y-y') + \|f\|_{\mathfrak{B}} (y \log \frac{1}{y} - y' \log \frac{1}{y'}) \end{aligned}$$

où  $C_I = \sup_{x \in I} |f(x+i)|$ . Cette dernière inégalité prouve la convergence uniforme

sur tout compact de  $F_y$  vers  $F$  qui est continue sur  $\mathbf{R}$ . Pour montrer que

$F \in \Lambda^*(\mathbf{R})$ , il nous faut évaluer  $\Delta_h^2 F(x) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$ , et ce pour

$x \in \mathbf{R}$ . Pour ce faire on écrit

$$\Delta_h^2 F(x) = \Delta_h^2 F_h(x) + \Delta_h^2 (F - F_h)(x),$$

et on commence par évaluer  $\Delta_h^2(F_h)$  ;

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 (F_h)(x) &= F(x+h+ih) + F(x-h+ih) - 2F(x+ih) \\ &= \int_0^h \left( \int_{-u}^u f'(x+t+ih) dt \right) du \end{aligned}$$

d'où  $|\Delta_h^2 (F_h)(x)| \leq \|f\|_{\mathfrak{B}} h.$

Pour évaluer  $\Delta_h^2(F - F_h)$ , on écrit une formule de Taylor avec reste-intégrale

à l'ordre 1,

$$F(x) - F(x+ih) = ih f(x+ih) - \int_0^h t f'(x+it) dt .$$

Mais

$$\begin{aligned} \Delta_h^2(f_h)(x) &= \left| \int_x^{x+h} f'(u+ih) du - \int_{x-h}^x f'(u+ih) du \right| \\ &\leq 2 \|f\|_{\mathfrak{B}} h , \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_0^h t f'(x+it) dt \right| \leq \|f\|_{\mathfrak{B}} h.$$

On en déduit que  $F \in \Lambda^*(\mathbf{R})$  avec

$$\|F|_{\mathbf{R}}\|_{\Lambda^*} \leq 6 \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Réciproquement soit  $f$  une fonction réelle appartenant à  $\Lambda^*(\mathbf{R})$ . D'après la proposition 4, la fonction  $g$  suivante est alors définie sur  $\mathbf{R}_+^2$ ,

$$g(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{t^2+1} \right] f(t) dt ;$$

cette fonction est holomorphe sur  $\mathbf{R}_+^2$  et sa dérivée vaut

$$g'(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{(t-z)^3} dt .$$

En utilisant la proposition 4 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre facilement que pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g'(x+iy) = 0$ , ce qui va nous être utile. Montrons tout d'abord que  $g \in \mathcal{B}$ . Pour ce faire on remarque que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g'(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{1}{(t-z)^3} - \frac{1}{(t-\bar{z})^3} \right] f(t) dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} h_y(t) f(x-t) dt \quad \text{où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_y(t) &= \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{1}{(t-iy)^3} - \frac{1}{(t+iy)^3} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{y(3t^2 - y^2)}{(t^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

La fonction  $h_y$  est donc paire, d'intégrale nulle et

$$|h_y(t)| \leq \frac{3}{\pi} y^{-3},$$

$$|h_y(t)| \leq \frac{3}{\pi} |t|^{-3}.$$

On peut donc écrire

$$\operatorname{Re} g'(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) h_y(t) dt ,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} g'(z)| &\leq \frac{1}{2} \left( \int_{|t| \leq y} \|f\|_{\Lambda^*} |t| y^{-3} dt + \int_{|t| \geq y} \|f\|_{\Lambda^*} |t|^{-2} dt \right) \\ &\leq 2 \|f\|_{\Lambda^*} y^{-1}. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration du fait que  $g \in \mathcal{B}$  on écrit  $g = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Nous venons de voir que

$$y \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2 \|f\|_{\Lambda^*}.$$

Par le lemme 1 on en déduit que

$$y^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \right| \leq 2C \|f\|_{\Lambda^*};$$

Mais  $u$  est harmonique et par conséquent  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial u}{\partial y^2}$ . Comme  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  est

tel que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$  pour tout  $x$ , le lemme 2 nous permet de conclure que

$y \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2C \|f\|_{\Lambda^*}$ . Nous avons donc montré que  $g$  est une fonction de la classe de Bloch avec  $\|g\|_{\mathcal{B}} \leq C \|f\|_{\Lambda^*}$ . D'après la première partie de la démonstration une primitive  $G$  de  $g$  se prolonge continûment à  $\mathbb{R}_+^2$  et sa valeur au bord appartient à  $\Lambda^*$ . Pour montrer que  $\operatorname{Re} G|_{\mathbb{R}} = f$ , fixons un  $h > 0$  et posons

$$F_h(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) (f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)) dt.$$

On montre facilement que

$$F_h''(z) = G''(z+h) + G''(z-h) - 2G''(z).$$

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_h(x+iy) = \lim_{y \rightarrow \infty} (G(x+h+iy) + G(x-h+iy) - 2G(x)) = 0,$$

nécessairement  $F_h(z) = G(z+h) + G(z-h) - 2G(z)$ .

En passant alors à la limite au bord on en déduit que si l'on désigne par  $\lambda(t)$  la fonction  $\operatorname{Re} G(t)$ ,

$$\forall h > 0, \quad \Delta_h^2 f(t) = \Delta_h^2 \lambda(t).$$

De cette égalité on tire facilement que  $f'' = \lambda''$  au sens des distributions et donc que  $f = \lambda$  (modulo un terme affine).

Pour conclure ce paragraphe signalons que l'analogue du théorème 4 est naturellement vrai dans le disque et la démonstration est similaire ([17]).

### 3. L'ESPACE $BMO(\mathbb{R}_+^2)$

a) Rappelons tout d'abord quelques résultats classiques sur  $BMO(\mathbb{R})$ .

DEFINITION 6.  $BMO(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $f$  localement intégrables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f| dx < +\infty,$$

où  $I$  décrit l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$  et où

$$m_I f = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx.$$

Un premier résultat est que toute fonction de  $BMO$  est intégrable par rapport à  $\frac{dx}{1+x^2}$  (voir [21]). On peut donc considérer toute fonction  $f \in BMO$  comme valeur au bord de la fonction harmonique

$$u(x, y) = P_y * f(x).$$

Avant d'énoncer le théorème fondamental concernant BMO, dû à Fefferman et Stein, donnons deux définitions.

DEFINITION 7.  $H^1(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telles que

$$f^*(x) = \sup_{y>0} |P_y * f(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

DEFINITION 8. Une mesure  $\sigma$  positive sur  $\mathbb{R}_+^2$  est appelée mesure de Carleson s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on ait :  $\sigma(\hat{I}) \leq C |I|$ , où  $\hat{I}$  désigne le carré  $I \times [0, |I|]$ .

Le théorème fondamental est alors le suivant ([20], aussi démontré dans [21]).

THEOREME 5. Pour une fonction  $f$  localement intégrable sur  $\mathbb{R}$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $f \in \text{BMO}(\mathbb{R})$
- ii)  $f$  appartient au dual  $(H^1)^*$  de  $H^1$  au sens que

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}) \quad |\langle f, \varphi \rangle| = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \int f_T(x) \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{H^1},$$

où  $f_T(x) = f(x)$  si  $|f(x)| \leq T$ ,  $= T$  si  $f(x) \geq T$ ,  $= -T$  si  $f(x) \leq -T$ .

- iii) La fonction harmonique  $u(x, y) = P_y * f(x)$  est telle que

$$\int y |\nabla u(x, y)|^2 dx dy$$

est une mesure de Carleson.

La propriété (iii) a été améliorée par Coifman et Meyer ([13]) qui montrent :

PROPOSITION 7. Soit  $\psi$  une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  d'intégrale nulle telle que  $|\psi(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}$ . Pour  $t > 0$  on pose  $\psi_t(x) = \frac{1}{t} \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ . Alors si

$f \in \text{BMO}(\mathbf{R})$ , la mesure

$$|f * \psi_t(x)|^2 \frac{dx dt}{t}$$

est une mesure de Carleson sur  $\mathbf{R}_+^2$ .

Un corollaire immédiat de la proposition 7 est que si  $f \in \text{BMO}(\mathbf{R})$  et si  $u(x,y)$  désigne  $P_y * f(x)$ , alors

$$y^3 |\nabla^2 u(x,y)|^2 dx dy$$

est une mesure de Carleson sur  $\mathbf{R}_+^2$ .

b)  $\text{BMOA}(\mathbf{R}_+^2)$

PROPOSITION 8. Soit  $F$  une fonction holomorphe sur  $\mathbf{R}_+^2$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $y |F'(x+iy)|^2$  est une mesure de Carleson sur  $\mathbf{R}_+^2$ ,
- ii)  $\sup_{y>0} \|F(.+iy)\|_{\text{BMO}} < +\infty$ ,
- iii) Il existe  $g \in \text{BMO}(\mathbf{R})$ , réelle, telle que

$$\forall z \in \mathbf{R}_+^2 \quad F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right] g(t) dt.$$

Si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, nous dirons que  $F \in \text{BMOA}(\mathbf{R}_+^2)$ .

Démonstration.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Montrons tout d'abord que si  $F$  vérifie (i), alors  $F$  appartient à la classe de Bloch  $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$ . Soit donc  $x+iy \in \mathbf{R}_+^2$  et  $B$  le disque de centre  $x+iy$  et de rayon  $y/2$ . Par (i), il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\iint_B y' |F'(x'+iy')|^2 dx' dy' \leq C y.$$

D'autre part, en utilisant la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques,

$$\begin{aligned} \iint_B y' |F'(x'+iy')|^2 dx' dy' &\geq \frac{y}{2} |B| \frac{1}{|B|} \iint_B |F'(x'+iy')|^2 dx' dy' \\ &\geq \frac{1}{4} y^3 |F'(x+iy)|^2. \end{aligned}$$

De ces deux inégalités on déduit aisément le fait que  $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$ .

Pour  $y > 0$ , posons alors  $F_y(x+it) = F(x + i(y+t))$ . Le fait que  $f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$  implique facilement que  $F_y(x+it) = P_t * F_y(x)$ . Montrons que  $t |F_y'(x+it)|^2$  est une mesure de Carleson. Soit donc  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Si  $|I| \geq y$ , la condition (i) implique immédiatement que

$$\iint_{\hat{I}} t |F_y'(x+it)|^2 dx dt \leq C |I|.$$

Si maintenant  $|I| < y$ , la condition de Bloch nous montre que

$$t |F_y'(x+it)|^2 \leq \frac{C}{y}$$

pour  $x+it \in \hat{I}$  et par conséquent on a encore

$$\iint_{\hat{I}} y |F_y'(x+it)|^2 dx dt \leq C |I|.$$

Par le théorème 5, on déduit de cette étude que

$$\sup_{y>0} \|F_y\|_{\text{BMO}} < +\infty,$$

ce qui est la condition (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Soit  $G(z)$  une primitive de  $F(z)$ . Puisque  $\|G_y\|_{\text{BMO}} \leq C$ , la fonction  $\Delta_h^2 G(z) = G(z+h) + G(z-h) - 2G(z)$  ( $h > 0$ ) est analytique et bornée dans  $\mathbf{R}_+^2$ . Par le théorème de Fatou il existe  $g_h(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$  telle que :

$\forall z = x + iy \in \mathbf{R}_+^2$ ,  $\Delta_h^2 G(z) = P_y * g_h(x)$ . Par ailleurs la condition (ii) implique l'existence d'une fonction  $f \in \text{BMO}(\mathbf{R})$  et d'une suite  $(y_k)$  tendant vers 0 tels que  $F_{y_k}$  tendent vers  $f$  pour la topologie faible définie par la dualité  $H^1$ -BMO. Comme  $\Delta_h^2 G(x+iy) = F_y * \psi_h(x)$  où  $\psi_h$  est une fonction de  $H^1(\mathbf{R})$ , on en

déduit que

$$g_h(x) = f * \psi_h(x).$$

Pour tout  $x+iy \in \mathbb{R}_+^2$ , on a donc :

$$F_y * \psi_h(x) = P_y * f * \psi_h(x).$$

Il existe donc deux fonctions de  $y$ ,  $\lambda(y)$  et  $\mu(y)$  telles que

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2 \quad F(x+iy) = P_y * f(x) + x\lambda(y) + \mu(y)$$

(modulo une constante). Nécessairement  $\lambda(y) = 0$  car  $F_y$  et  $P_y * f$  sont intégrables par rapport à  $\frac{dx}{1+x^2}$ . D'autre part  $\mu(y)$  est harmonique et par conséquent  $\mu(y) = ay$ . Mais un calcul facile montre que  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (P_y * f(x))$  tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$  pour tout  $x$ . Comme  $F$  est analytique  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P_y * f(x) = \frac{1}{2} ia$ , et donc  $a = 0$ . Nous avons montré que  $F(z) = P_y * f(x)$ . La condition (iii) en découle avec  $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Posons  $F(z) = u(z) + iv(z)$ . Alors  $u(x+iy) = P_y * g(x)$  et  $y |F'(x+iy)|^2 = y |\nabla u(x+iy)|^2$  et on conclut en utilisant le théorème 5.

La démonstration précédente prouve que si  $F$  est une fonction de  $\operatorname{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $F(x+iy)$  converge presque partout vers une fonction  $F(x)$  appartenant à  $\operatorname{BMO}(\mathbb{R})$ . C'est la norme de cette fonction  $F(x)$  dans  $\operatorname{BMO}(\mathbb{R})$  que nous prenons pour  $\|F\|_{\operatorname{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)}$ . Nous avons également montré que cette norme est équivalente aux normes suivantes :

$$\|F\|_{\operatorname{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \sim \|\operatorname{Re} F\|_{\operatorname{BMO}(\mathbb{R})} \sim \sup_{y>0} \|F_y\|_{\operatorname{BMO}(\mathbb{R})}.$$

Enfin si nous désignons par  $E_1$  l'espace de Banach des fonctions  $g$  analytiques dans  $\mathbb{R}_+^2$  telles que

$$\|g\|_{E_1} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{|I|} \iint_{\hat{I}} y |g(x+iy)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < +\infty.$$



Nous avons montré que l'application  $F \mapsto F'$  réalise un isomorphisme entre  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  et  $E_1$ .

Nous nous proposons de généraliser ce dernier résultat. Soit  $E_2$  l'espace de Banach des fonctions  $g$ , analytiques dans  $\mathbb{R}_+^2$  telles que :

$$\|g\|_{E_2} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{|I|} \iint_I y^3 |g(x+iy)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < +\infty,$$

alors,

PROPOSITION 9. L'application  $F \mapsto F''$  est un isomorphisme de  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  sur  $E_2$ .

Démonstration. Il suffit de montrer que l'application  $\Lambda : G \mapsto G'$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$ .  $\Lambda$  est injective car,  $E_1$  étant inclus dans l'ensemble des dérivées de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ , seule la constante  $0 \in E_1$ . Reste à montrer la surjectivité. Pour ce faire on observe tout d'abord, comme pour  $E_1$ , que

$$g \in E_2 \implies \sup_{y>0} y^2 |g(x+iy)| \leq C \|g\|_{E_2}.$$

Nous pouvons donc considérer, pour tout  $x+iy \in \mathbb{R}_+^2$

$$f(x+iy) = -i \int_y^{+\infty} g(x+it) dt,$$

qui est une fonction analytique vérifiant  $f' = g$ . Montrons que  $f \in E_1$  : soient  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \int_0^{y_0} y |f(x+iy)|^2 dx dy &= \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \int_0^{y_0} y \left| \int_y^{+\infty} \frac{1}{t} t g(x+it) dt \right|^2 dy dx \\ &\leq \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \int_0^{y_0} \left( \int_y^{+\infty} t^2 |g(x+it)|^2 dt \right) dy dx = I, \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz. Mais

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} \int_0^{+\infty} t^2 |g(x+it)|^2 \left( \int_0^{y_0} 1_{[y, +\infty[}(t) dt \right) dt dx \\
 &= \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} \int_0^{y_0} t^3 |g(x+it)|^2 dt dx + y_0 \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} \left( \int_{y_0}^{+\infty} t^2 |g(x+it)|^2 dt \right) dx \\
 &\leq C_{y_0} \|g\|_{E_2}.
 \end{aligned}$$

Avant de clore la partie b), examinons ce qui constitue la propriété d'invariance conforme de  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$ .

PROPOSITION 10. Une mesure  $\sigma$ , positive, définie sur  $\mathbb{R}_+^2$ , est une mesure de Carleson si et seulement si

$$\sup_{z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{R}_+^2} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{y_0}{|z - \bar{z}_0|^2} d\sigma(z) < +\infty.$$

Cette proposition, de caractère technique, est facile à démontrer (voir [21]).

Naturellement toute la théorie faite sur  $\mathbb{R}_+^2$  peut être faite dans  $D$  et la proposition 8 peut être recopiée en remplaçant les droites  $y = y_0$  par les cercles de rayon  $r < 1$  et où la notion de mesure de Carleson est remplacée par :

DEFINITION 9. Une mesure  $\sigma$ , positive dans  $D$  est appelée mesure de Carleson si elle vérifie ;

$$\exists C > 0, \quad \forall I = [\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{T}, \quad \iint_{\hat{I}} d\sigma(z) \leq C |I|,$$

où  $\hat{I} = \{re^{i\theta} ; \theta \in I, 1-r \leq \theta_2 - \theta_1\}$ .

L'analogie de la proposition 10 est alors :

PROPOSITION 11. Une mesure positive  $\sigma$  sur  $D$  est une mesure de Carleson si et seulement si

$$\sup_{z_0 \in D} \iint_D \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}z_0|^2} d\sigma(z) < +\infty.$$

Vues les propositions 10 et 11, un simple changement de variable prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 12. Soit  $\sigma$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+^2$ ; alors  $\sigma$  est une mesure de Carleson si et seulement si il en est de même de  $\sigma \circ \varphi |\varphi'|$ . En conséquence une fonction  $f$  appartient à  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  si et seulement si  $f \circ \varphi$  appartient à  $BMOA(D)$ , avec équivalence des normes.

On rappelle que  $\varphi$  est la représentation conforme de  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  définie par  $\varphi(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ .

c) La classe  $A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$

Rappelons tout d'abord les résultats classiques concernant la classe  $A^\infty(\mathbb{R})$  de Muckenhoupt.

DEFINITION 10. Un poids  $\omega(t) \geq 0$ , localement intégrable sur  $\mathbb{R}$  est dit appartenir à  $A^p(\mathbb{R})$ , où  $p$  est un réel  $> 1$ , si l'on a

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}} \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t)^{-1/p-1} dt \right)^{p-1} < +\infty,$$

où  $I$  décrit l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

L'importance de la classe  $A^p(\mathbb{R})$ , pour  $p > 1$ , provient du théorème suivant, dû à Hunt, Muckenhoupt et Wheeden [26] (voir aussi [21], [9]).

THEOREME 6. Soit  $p > 1$ ; un poids  $\omega$  appartient à  $A^p(\mathbb{R})$  si et seulement si il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $f \in L^p(\omega dx) \cap L^2(dx)$ , on ait

$$\|Hf\|_{L^p(\omega dx)} \leq C \|f\|_{L^p(\omega dx)},$$

où  $H$  désigne la transformée de Hilbert.

Posons  $A^\infty(\mathbf{R}) = \bigcup_{p>1} A^p(\mathbf{R})$ . La classe  $A^\infty(\mathbf{R})$  admet de multiples caractérisations que nous résumons dans la proposition suivante :

PROPOSITION 12. Soit  $\omega \geq 0$ , localement intégrable sur  $\mathbf{R}$ . Sont équivalents :

(1)  $\omega \in A^\infty(\mathbf{R})$ ,

(2)  $\exists C, \delta > 0$  tels que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et pour tout sous ensemble mesurable  $E$  de  $I$ , on ait :  $\frac{\omega(E)}{\omega(I)} \leq C \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^\delta$ , où l'on a posé  $\omega(A) = \int_A \omega(t) dt$ .

(3) Il existe  $C, \epsilon > 0$  tels que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  on ait "l'inégalité de Hölder inverse" :

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t)^{1+\epsilon} dt \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq C \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt.$$

(4) Le poids  $\omega$  vérifie "l'inégalité de Jensen inverse" :

$$\exists C > 0, \forall I \subset \mathbf{R} \quad \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \leq C \exp \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I \log \omega(t) dt \right\}.$$

Pour les démonstrations, on consultera [21].

Enfin, rappelons le résultat fondamental suivant, qui est essentiellement dû à John et Nirenberg [28].

PROPOSITION 13. Si  $\omega \in A^\infty(\mathbf{R})$ , alors  $\log \omega \in \text{BMO}(\mathbf{R})$ . Réciproquement, si  $f \in \text{BMO}(\mathbf{R})$ , il existe  $\epsilon > 0$  ne dépendant que de  $\|f\|_{\text{BMO}}$  tel que  $e^{\epsilon f}$  appartienne à  $A^\infty(\mathbf{R})$  (on a supposé  $f$  réelle).

Laissons-là les rappels et introduisons la classe  $A^\infty A$ .

DEFINITION 11. Une fonction  $F$ , analytique dans  $\mathbb{R}_+^2$  est dite appartenir à  $A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  si  $F$  est extérieure et si  $\|F\|_{\mathbb{R}} \in A^\infty(\mathbb{R})$ .

D'après les propositions 8 et 13, si  $F$  est dans  $A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $\log F$  (qui est bien définie puisque  $F$ , extérieure, ne peut s'annuler sur  $\mathbb{R}$ ) appartient à  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$ . Réciproquement, si  $f$  appartient à  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $\exp(\varepsilon f)$  appartient à  $A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  si  $\varepsilon$  est assez petit d'après la proposition 13.

Si  $\omega \in A^\infty(\mathbb{R})$  il existe une unique fonction  $\Omega(z)$  appartenant à  $A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  telle que  $\|\Omega\|_{\mathbb{R}} = \omega$ , à savoir

$$\Omega(z) = \exp\left\{\frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) \log \omega(t) dt\right\}.$$

[l'unicité est à un facteur de module 1 près].

Le théorème suivant nous fournit une caractérisation pratique de la classe  $A^\infty A(D)$ .

THEOREME 7. Pour une fonction  $F \in \mathcal{N}^+(\mathbb{R}_+^2)$ , ne s'annulant pas, sont équivalents :

(5)  $F \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ ,

(6)  $\log F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\exists C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

on ait

$$\frac{1}{|I|} \int_I |F(t)| dt \leq C |F(z_I)|,$$

où  $z_I = x_0 + iy_0$ , si  $I = [x_0 - y_0, x_0 + y_0]$ .

Démonstration.

(5)  $\Rightarrow$  (6). Si  $F \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $\omega = \|F\|_{\mathbb{R}}$  est un poids de la classe  $A^\infty$ . Si nous posons  $f = \log \omega$ , il vient alors, par (4),

$$\exists C > 0, \forall I \subset \mathbb{R} \quad \frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \leq C \exp\left\{\frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt\right\}.$$

Fixons maintenant un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et posons  $x_0 + iy_0 = z_I$ ; on démontre alors facilement que

$$(7) \quad \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt - P_{y_0} * f(x_0) \right| \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R})}.$$

Mais  $P_{y_0} * f(x_0) = \log |F(z_I)|$ , car  $F$  est extérieure. La propriété (6) en découle car il est bien entendu que  $F \in A^\infty \Rightarrow \log F \in \text{BMOA} \subset \mathfrak{B}$ .

(6)  $\Rightarrow$  (5). Montrons tout d'abord que sous la condition (6),  $F$  est extérieure. Pour ce faire nous allons montrer que la condition (6) implique l'inégalité (8) suivante :

(8) Pour  $a > 0$  assez petit, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, P_y * (|F|^a)(x) \leq C |F(z_I)|^a.$$

Il suffit, vu l'homogénéité des conditions, de montrer (8) pour  $x = 0$ ,  $y = 1$ . Alors

$$P_1 * |F|^a(0) = \int_{-1}^1 |F(t)|^a P_1(t) dt + \sum_{n \geq 0} \int_{2^n \leq |x| < 2^{n+1}} |F(x)|^a P_1(x) dx.$$

Si l'on a choisi  $a < 1$ , (6) et l'inégalité de Hölder impliquent

$$\int_{-1}^1 |F(t)|^a P_1(t) dt \leq C |F(i)|^a$$

et

$$\forall n \geq 0 \int_{2^n \leq |x| < 2^{n+1}} |F(t)|^a P_1(t) dt \leq C 2^{-n} |F(2^{n_i})|^a.$$

Mais le fait que  $\log F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^2)$  implique

$$\forall n \geq 0 \quad \left| \log |F(2^{n_i})| - \log |F(i)| \right| \leq C' n \|\log F\|_{\mathfrak{B}},$$

et par conséquent

$$\forall n \geq 0, 2^{-n} |F(2^{n_i})|^a \leq e^{n(aC' \|\log F\| - \log 2)} |F(i)|^a.$$

La propriété (8) s'en suit pour  $a < \frac{\log 2}{C' \|\log F\|_{\mathfrak{B}}}$ .

Supposons à présent que  $F$  n'est pas extérieure. Il existe alors  $S$

intérieure et  $G$  extérieure telles que

$$F = SG.$$

Par (8) on aurait alors

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, \quad |S(x+iy)|^a \geq \frac{1}{C} \frac{P_y^* |G|^a(x)}{|G(x+iy)|^a} \geq \frac{1}{C},$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité de Jensen. Mais alors  $\frac{1}{S}$  serait dans  $H^\infty$ , ce qui n'est possible que si  $S$  est triviale.

Reste à montrer que  $\|F\|_{\mathbb{R}} \in A^\infty(\mathbb{R})$ . Cela va résulter du lemme suivant concernant la classe de Bloch.

LEMME 3. Soit  $F \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$ , extérieure, telle que  $\log F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ . Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\|\log F\|_{\mathcal{B}}$  telle que

$$(9) \quad \forall I \subset \mathbb{R}, \quad |F(z_I)| \leq C \exp\left\{\frac{1}{|I|} \int_I \log |F(t)| dt\right\}.$$

Démonstration du lemme 3. Il suffit de montrer l'existence d'une constante universelle  $C > 0$  telle que

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \quad \left| \log F(z_I) - \frac{1}{|I|} \int_I \log F(t) dt \right| \leq C \|\log F\|_{\mathcal{B}}.$$

Pour ce faire, on pose  $g = \log F$  et on appelle  $G$  une primitive de  $g$ . On pose d'autre part  $I = [x-y, x+y]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \left| \log F(z_I) - \frac{1}{|I|} \int_I \log F(z) dt \right| &= \frac{1}{2y} \left| (G(x+y) - G(x+y+iy)) - \right. \\ &\quad \left. (G(x-y) - G(x-y+iy)) + \int_{x-y}^{x+y} (g(t+iy) - g(x+iy)) dt \right|. \end{aligned}$$

On utilise alors la même méthode que dans le théorème I.4. Par la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$G(a) - G(a+iy) = iy g(a+iy) - \int_0^y t g'(a+it) dt,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| \log F(z_I) - \frac{1}{|I|} \int_I \log F(t) dt \right| &= \frac{1}{2y} \left| \int_{x-y}^{x+y} (g(t+iy) - g(x+iy)) dt \right. \\ &\quad \left. + iy(g(x+y+iy) - g(x-y+iy)) + \int_0^y t(g'(x-y+it) - g'(x+y+it)) dt \right| \\ &\leq C \|g\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

et le lemme en découle.

Nous pouvons alors conclure la preuve du théorème 7. Soit donc  $F$  une fonction vérifiant les hypothèses de ce théorème. Par (6) et le lemme précédent, il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $I \subset \mathbf{R}$ ,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |F(t)| dt \leq C \exp \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I \log |F(t)| dt \right\},$$

et la conclusion découle de (4) de la proposition 12.

d) Espaces de Hardy à poids du demi-plan supérieur

Pour  $x \in \mathbf{R}$ , notons  $\Gamma(x) = \{x' + iy' \in \mathbf{R}_+^2 ; \sqrt{(x'-x)^2 + y'^2} \leq 2y'\}$ . Si  $F$  est une fonction quelconque définie sur  $\mathbf{R}_+^2$ , nous posons  $F^*(x) = \sup_{z \in \Gamma(x)} |F(z)|$ .

Nous nous proposons de définir, pour tout  $p > 0$ , les espaces de Hardy  $H^p(\omega dx)$  où  $\omega$  est un poids de  $A^\infty(\mathbf{R})$ , généralisant la notion classique d'espace de Hardy. Cette théorie est due à C. Kenig [31].

THEOREME 8. Soit  $p > 0$  et  $F$  une fonction analytique sur  $\mathbf{R}_+^2$ ; les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(10)  $F^* \in L^p(\omega dx)$ ,

(11)  $\sup_{y>0} \left( \int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} < +\infty$ ,

(12)  $F(\Omega)^{1/p} \in H^p(\mathbf{R}_+^2)$ , l'espace de Hardy classique, où  $\Omega(z)$  est la fonction extérieure telle que  $|\Omega(x)| = \omega(x)$  presque partout sur  $\mathbf{R}$ .



Démonstration.

(10)  $\Rightarrow$  (11) est évident.

(11)  $\Rightarrow$  (12). Montrons tout d'abord les lemmes suivants concernant  $A^\infty(\mathbb{R})$ .

LEMME 4. Si  $q > 1$  et si  $\omega \in A^q(\mathbb{R})$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x) dx}{(1+|x|)^q} < +\infty.$$

Preuve du lemme 4. Pour  $f$  localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ , la fonction maximale de Hardy-Littlewood de  $f$  est définie par :

$$Mf(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt.$$

Un résultat fondamental concernant les classes  $A^p$  est que  $f \mapsto Mf$  est borné sur  $L^q(\omega)$  si et seulement si  $\omega \in A^q$ . Le lemme en découle car

$$\frac{1}{(1+|x|)^q} \leq CM\varphi(x) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = 1_{[-1,1]}(x).$$

LEMME 5. Si  $\omega \in A^q(\mathbb{R})$  et  $f \in L^q(\omega dx)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|} dx \leq C \|f\|_{L^q(\omega)}.$$

De lemme découle immédiatement du précédent par l'inégalité de Hölder et le fait que  $\omega \in A^q$  si et seulement si  $\omega^{-q'/q} \in A^{q'}$ , où  $q'$  désigne l'exposant conjugué de  $q$ .

Démontrons maintenant (12) à partir de (11). Pour cela, posons  $G(z) = F(z)(z+i)^{-q/p}$ . Par (11) et le lemme 5,  $G$  appartient à l'espace de Hardy  $H^{p/q}(\mathbb{R}_+^2)$ ; on en déduit que  $F$  et donc  $F(\Omega)^{1/p}$  appartiennent à la classe de Nevanlinna  $N^+(\mathbb{R}_+^2)$ . Pour démontrer que  $F(\Omega)^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ , il suffit donc de montrer que sa valeur au bord est dans  $L^p$ , ce qui est évident par (11) et le

lemme de Fatou.

(12)  $\Rightarrow$  (10). Supposons tout d'abord  $p \geq q$ . Montrons alors, dans ce cas, que  $F$  est l'intégrale de Poisson de ses valeurs au bord. Pour ce faire, il suffit de montrer que  $F \circ \varphi \in H^1(D)$  où, ce qui revient au même puisque  $F \in \mathcal{N}^+$ , que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|F(x)|}{1+x^2} dx < +\infty.$$

Mais  $F(z) = H(z)\Omega(z)^{-1/p}$  où  $H(z) \in H^p(\mathbf{R}_+^2)$ , et par conséquent

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|F(x)|}{1+x^2} dx = \int \frac{|H(x)| \omega(x)^{-1/p}}{1+x^2} dx \leq \|H\|_p \left[ \int_{\mathbf{R}} \frac{\omega^{-p'/p}(x) dx}{(1+x^2)^{p'}} \right]^{1/p'}$$

Mais  $\omega \in A_q \subset A_p$  et donc  $\omega^{-p'/p} \in A_{p'}$  et le résultat découle du lemme 4. Pour

conclure dans le cas  $p \geq q$ , on observe que  $F^* \leq M(F | \mathbf{R})$  et on applique

l'inégalité à poids précédemment rappelée. Dans le cas  $p < q$  on écrit  $F = B\tilde{F}$

où  $B$  est un produit de Blaschke et où  $\tilde{F}$  ne s'annule pas sur  $\mathbf{R}_+^2$ . On a

alors  $\tilde{F} = \tilde{H} \Omega^{-1/p}$  où  $\tilde{H} \in H^p(\mathbf{R}_+^2)$ ; soit  $k$  un réel  $> 0$  tel que  $pk \geq q$ .

D'après le cas précédent, on voit que  $(\tilde{F}^{1/k})^* \in L^{pk}(\omega dx)$ , puis on écrit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F^*(x) \leq \tilde{F}^*(x) \leq \left[ (\tilde{F}^{1/k})^*(x) \right]^k \in L^p(\omega dx),$$

ce qui termine la preuve du théorème 8.

Comme corollaire de la démonstration précédente, montrons encore le résultat suivant qui sera utile au chapitre IV.

PROPOSITION 14. Si  $\omega \in A^p(\mathbf{R})$  et  $F \in H^p(\mathbf{R}_+^2, \omega)$ , alors

$$\forall z \in \mathbf{R}_+^2 \quad F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt = P_y * (f + iHf)(x),$$

où  $f$  est la partie réelle de la valeur au bord de  $F$  et  $H$  est la transformée de Hilbert.

Démonstration.

Puisque  $f \in L^p(\omega)$ ,  $Hf$  et  $P_y * (f+iHf)$  sont définis car  $H$  et  $M$  (fonction maximale) opèrent sur  $L^p(\omega dx)$ . La fonction

$$P_y * (f+iHf)(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

est alors holomorphe sur  $\mathbf{R}_+^2$  et sa partie réelle coïncide avec celle de  $F$  puisque, comme on l'a vu,  $F$  est l'intégrale de Poisson de ses valeurs au bord. Les deux fonctions diffèrent donc d'une constante ; cette dernière est nécessairement nulle car les deux fonctions ont des valeurs au bord dans  $L^p(\omega dx)$ .

Remarque. La classe  $A^\infty$  est la classe adaptée à la théorie des espaces de Hardy à poids. Pour nous en convaincre, considérons une fonction  $\Omega(z) \in \mathcal{N}^+(\mathbf{R}_+^2)$ , ne s'annulant pas et telle que  $\log \Omega \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$ . Supposons que pour une telle fonction, l'équivalence (10)  $\Leftrightarrow$  (12) du théorème 8 soit vraie. Pour tout intervalle  $I = [x_0 - y_0, x_0 + y_0]$  de  $\mathbf{R}$  posons  $z_I = x_0 + iy_0$  et considérons la fonction

$$f_I(z) = \Omega(z)^{-1} \frac{y_0}{(z - \bar{z}_I)^2}.$$

Il est clair que  $f_I(z)\Omega(z) \in H^1(\mathbf{R}_+^2)$  avec

$$\|f_I \Omega\|_1 = \pi.$$

D'autre part, pour tout  $x \in I$ , on a

$$f_I^*(x) \geq |f_I(z_I)| \geq \frac{1}{4y_0 |\Omega(z_I)|}.$$

Par l'équivalence (10)  $\Leftrightarrow$  (12), il existe une constante  $C$  indépendante de  $I$  telle que

$$\int_I f_I^*(x) \omega(x) dx \leq C \|f_I \Omega\|_1,$$

et cette inégalité implique

$$\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x) dx \leq C |\Omega(z_I)|.$$

On en déduit que  $\omega = |\Omega| \mathbb{1}_R$  appartient à  $A^\infty(\mathbb{R})$  par le théorème 7.

### Notes du chapitre I

Tous les résultats de ce chapitre sont classiques (sauf le théorème 7). Nous avons délibérément fait le choix de la variable complexe et insisté sur l'invariance conforme de ces espaces. Pour un exposé plus systématique et exhaustif des propriétés de ces espaces on pourra consulter [17] [39]. Le théorème 7, qui va se révéler très utile dans la suite, semble nouveau : il a été inspiré par le travail de Pommerenke [36]. Pour illustrer son utilité, notons qu'il permet d'obtenir une démonstration très rapide du théorème de Lavrentiev [32]. Notons encore qu'il a un analogue évident dans le disque (la démonstration est la même).

CHAPITRE II.- Généralités sur les fonctions univalentes

1. LA THEORIE DE KOEBE

Dans toute la suite, nous désignerons par  $S$  la classe des fonctions  $f$  holomorphes et univalentes dans  $D$ , le disque unité, telles que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

THEOREME 1. Si  $f \in S$ , alors  $|f''(0)| \leq 4$ .

Tous les théorèmes que nous allons maintenant énoncer sont plus ou moins des conséquences du théorème 1. Pour une démonstration de ce résultat ainsi que des quelques autres que nous ne démontrerons pas, on consultera [35].

COROLLAIRE 1 (Théorème de distorsion de Koebe). Si  $f$  appartient à  $S$ , on a, pour  $z \in D$ ,

$$(1) \quad \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$

$$(2) \quad \frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2},$$

$$(3) \quad \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

COROLLAIRE 2. Soit  $f$  une fonction univalente et holomorphe dans  $D$

(resp. dans  $\mathbb{R}_+^2$ ). Si  $z_0 \in D$  (resp.  $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ ) et si l'on note  $\Omega = f(D)$  (resp.  $\Omega = f(\mathbb{R}_+^2)$ ), alors

$$\frac{1}{4}(1 - |z_0|^2) |f'(z_0)| \leq d(f(z_0), \partial\Omega) \leq (1 - |z_0|^2) |f'(z_0)|,$$

(resp.  $\frac{1}{2} y_0 |f'(z_0)| \leq d(f(z_0), \partial\Omega) \leq 2y_0 |f'(z_0)|$  où l'on a supposé  $z_0 = x_0 + iy_0$ ).

Démonstration. Supposons tout d'abord que  $f \in \mathcal{CS}$  et montrons

$$\frac{1}{4} \leq d(0, \partial\Omega) \leq 1.$$

Par (2) il vient  $\forall z \in D \quad |f(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$  et donc

$$d(0, \partial\Omega) = \liminf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \geq \frac{1}{4}.$$

L'autre inégalité provient tout simplement du lemme de Schwarz appliqué à la fonction  $z \mapsto f^{-1}(d(0, \partial\Omega) z)$ . On déduit immédiatement de ce résultat que si  $f$  est univalente dans  $D$  alors

$$(4) \quad \frac{1}{4} |f'(0)| \leq d(f(0), \partial\Omega) \leq |f'(0)|.$$

On conclut alors facilement le corollaire 2 en appliquant (4) à la fonction  $f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)$ ,

(resp. en appliquant (4) à  $f\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 z}{1-z}\right)$ ).

**PROPOSITION 1.** Si  $f$  est univalente dans  $D$  et ne s'annule pas, alors  $\log f$  appartient à la classe de Bloch  $\mathcal{B}(D)$  avec une norme  $\leq 4$ .

Preuve. Par le corollaire 2 on peut écrire, en posant  $\Omega = f(D)$ ;  $\forall z \in D$ ,

$$\frac{d(f(z), \partial\Omega)}{|f(z)|} \leq (1 - |z|^2) \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq 4 \frac{\text{dist}(f(z), \partial\Omega)}{|f(z)|}.$$

Mais, puisque  $f$  ne s'annule pas dans  $D$ ,

$$\text{dist}(f(z), \partial\Omega) \leq |f(z)|,$$

et la proposition 1 s'en déduit.

Dans le paragraphe 2, nous montrerons un résultat beaucoup plus fort.

La proposition suivante va confirmer l'importance de la classe de Bloch dans la théorie des fonctions univalentes.

PROPOSITION 2. Si  $U$  désigne  $D$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  et si  $f$  est une fonction holomorphe univalente dans  $U$ , alors  $\log f'$  appartient à la classe de Bloch  $\mathcal{B}(U)$  avec une norme ne dépassant pas 4.

Preuve. Soit  $z_0 \in U$  et  $d_0 = d(z_0, \partial U)$ . Alors la fonction

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z_0 + dz) - f(z_0)}{d_0 f'(z_0)}$$

appartient à la classe  $\mathcal{S}$ ; d'après le théorème 1 on a donc  $|\tilde{f}''(0)| \leq 4$  ce qui équivaut à

$$d_0 \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq 4.$$

Pour clore ce paragraphe, nous allons maintenant faire le lien entre la classe  $\mathcal{S}$  et les espaces de Hardy du disque.

THEOREME 2 (Prawitz) [38]. Pour tout  $p < \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{S}$  est une partie bornée de  $H^p(D)$ .

Démonstration. Fixons un  $p < \frac{1}{2}$  et posons, pour  $f \in \mathcal{S}$

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

$$M_\infty(r) = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Par un calcul facile, on obtient l'identité

$$(5) \quad \frac{d}{dr} (r M_p'(r)) = \frac{p^2 r}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{p-2} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Par intégration de (5) entre 0 et  $r$ , on obtient

$$r M_p'(r) = \frac{p^2}{2\pi} \iint_{|z| \leq r} |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2 dx dy,$$

d'où, puisque  $f$  est univalente,

$$r M_p'(r) \leq \frac{p^2}{2\pi} \iint_{|\omega| \leq M_\infty(r)} |\omega|^{p-2} d\xi d\eta = p(M_\infty(r))^p.$$

Enfin, par intégration de cette dernière inégalité et en utilisant (2),

$$M_p(r) \leq p^2 \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1-t)^{2p}} dt \leq C_p,$$

pour  $p < \frac{1}{2}$ .

## 2. FONCTIONS UNIVALENTES ET BMOA

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème 4, dû à A. Baernstein [4]. La démonstration que nous avons adoptée est essentiellement due à P. Jones [29].

**THEOREME 3.** Il existe une constante  $C$  absolue telle que, si  $f$  est une fonction holomorphe et univalente dans  $D$ , alors  $\left| \frac{f'}{f} \right| dx dy$  est une mesure de Carleson dans  $D$  de "norme"  $\leq C$ .

Démonstration. Vu la proposition I.11, il suffit de montrer l'existence d'une constante  $C$  telle que si  $f$  est univalente dans  $D$  et  $\tau$  une transformation conforme quelconque de  $D$  sur lui-même, alors

$$(6) \quad \iint_D \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| |\tau'(z)| dx dy \leq C.$$

Mais, par le changement de variable  $z = \tau^{-1}(u)$ , (6) équivaut à

$$(7) \quad \iint_D \left| \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} \right| dx dy \leq C, \quad \text{où } \tilde{f} = f \circ \tau^{-1}.$$



Il suffit donc de démontrer (7) pour toute fonction  $\tilde{f}$  holomorphe et univalente dans  $D$ .

a) Démontrons tout d'abord (7) pour les fonctions  $f$  ne s'annulant pas dans  $D$ . Vu l'homogénéité, on peut alors supposer  $f(0) = 1$ . D'après la proposition II.1, on a

$$\forall z \in D, \quad (1 - |z|) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq 4.$$

De cette inégalité et du fait que  $f(0) = 1$  on déduit facilement que

$$(8) \quad \forall z \in D, \quad (1 - |z|)^4 \leq |f(z)| \leq (1 - |z|)^{-4}.$$

Majorons à présent  $\iint_D \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| dx dy$ . Pour cela, on écrit  $\iint_D = \iint_E + \iint_F$ , où  $E = \{|f| \leq 1\}$  et  $F = D \setminus E$ . Par Cauchy-Schwarz,

$$\iint_E \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| dx dy \leq \left( \iint_E \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^{9/5}} dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_E \frac{dx dy}{|f(z)|^{1/5}} \right)^{1/2}.$$

Puisque  $f$  est univalente, vu la définition de  $E$ ,

$$\left( \iint_E \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^{9/5}} dx dy \right)^{1/2} \leq \left( \iint_D \frac{dx dy}{|z|^{9/5}} \right)^{1/2} \leq 6.$$

Pour évaluer la deuxième intégrale, on utilise (8) pour obtenir

$$\left( \iint_E \frac{dx dy}{|f(z)|^{1/5}} \right)^{1/2} \leq \left( \iint_D \frac{dx dy}{(1 - |z|)^{4/5}} \right)^{1/2} \leq 6.$$

Pour majorer  $\iint_F$  on procède de façon analogue ; toujours par Cauchy-Schwarz,

$$\iint_F \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| dx dy \leq \left( \iint_F \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^{11/5}} dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_F |f(z)|^{1/5} dx dy \right)^{1/2}.$$

Mais 
$$\left( \iint_F \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^{11/5}} dx dy \right)^{1/2} \leq \left( \iint_{|z| > 1} \frac{dx dy}{|z|^{11/5}} \right)^{1/2} \leq 6,$$

et, par (8), 
$$\left( \iint_F dx dy |f(z)|^{1/5} \right)^{1/2} \leq \left( \iint_D (1 - |z|)^{-4/5} dx dy \right)^{1/2} \leq 6.$$

Le théorème 3 est donc démontré pour les fonctions holomorphes et univalentes ne s'annulant pas dans  $D$ , avec  $C = 72$ .

b) Supposons à présent que  $f$  s'annule en  $z_0 \in D$ . Sans restriction de généralité, on peut supposer que  $z_0$  appartient au segment  $[0, 1[$ . Appelons  $\tilde{D}$  le disque  $D$  privé de segment  $[0, 1[$  et  $\psi$  une représentation conforme de  $D$  sur  $\tilde{D}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \iint_D \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| dx dy &= \iint_D \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| dx dy \\
 &= \iint_D \left| \frac{f'(\psi(z))}{f(\psi(z))} \right| |\psi'(z)|^2 dx dy \\
 &= \iint_D \left| \frac{F'(z)}{F(z)} \right| |\psi'(z)| dx dy,
 \end{aligned}$$

où  $F = f \circ \psi$  est holomorphe, univalente et sans zéros dans  $D$ . D'après la partie a),  $\left| \frac{F'}{F} \right|$  est alors une mesure de Carleson sur  $D$  et l'on applique le lemme suivant, qui est classique ([21]) :

LEMME 1. Si  $\sigma$  est une mesure de Carleson dans  $D$  et si  $u$  est une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{C}$ ,

$$\forall p > 0, \quad \iint_D |u(z)|^p d\sigma(z) \leq C_p \|\sigma\|_C^p \int_{\partial D} |u^*(z)|^p |dz|,$$

$$\text{où } u^*(z) = \left| \sup_{|\zeta - z| \leq 2(1 - |\zeta|)} |u(\zeta)| \right|.$$

Mais on vérifie (soit en calculant explicitement  $\psi$ , soit en appliquant le théorème III) que  $\psi' \in H^1(D)$ , et donc que  $(\psi')^* \in L^1(\partial D)$  (voir [21]). On applique alors le lemme 1 à l'égalité (9), et le théorème 3 est entièrement démontré.

THEOREME 4. Il existe une constante  $C$  absolue telle que

a) Si  $f$  est holomorphe, univalente et sans zéros dans  $D$ , alors

$$\|\log f\|_{\text{BMOA}(D)} \leq C.$$

b) Si  $f$  est holomorphe et univalente dans  $D$  avec  $f(z_0) = 0$  ( $z_0 \in D$ ), alors

$$\left\| \log \left( \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} f(z) \right) \right\|_{\text{BMOA}(D)} \leq C.$$

De même si  $f$  est univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$  et ne s'annule pas,

$$\|\log f\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C, \text{ et si } f \text{ s'annule en } z_0 \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\left\| \log \left( \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} f(z) \right) \right\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C.$$

Preuve. Elle est immédiate par application du théorème 3 et du lemme suivant.

LEMME 2. Soit  $u$  une fonction holomorphe dans  $D$  telle que  $|u'(z)| dx dy$  soit une mesure de Carleson. Alors  $u(z) \in \text{BMOA}(D)$ .

Démonstration du lemme 2. D'après la proposition I.8, il suffit de montrer que les hypothèses impliquent que  $(1 - |z|) |u'(z)|^2$  est une mesure de Carleson. Pour ce faire, il suffit de vérifier que  $u$  est une fonction de Bloch. Soit donc  $z_0 \in D$  et  $D_0$  le disque de centre  $z_0$  et de rayon  $1 - |z_0|$ . Alors

$$|u'(z_0)| \leq \frac{C}{(1 - |z_0|)^2} \iint_{D_0} |u'(z)| dx dy \leq \frac{C}{1 - |z_0|},$$

la dernière inégalité découlant du fait que  $|u'| dx dy$ , est une mesure de Carleson.

Remarque. La réciproque du lemme 2 est (malheureusement) fautive. Pour un contre exemple, voir [21].

Revenons à la preuve du théorème 4. La conclusion est évidente si  $f$  ne s'annule pas dans  $D$ . Si  $f$  s'annule en  $z_0$ , posons  $\tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$  et

$F(z) = \log \frac{f(z)}{\tau(z)}$ .  $F$  est analytique dans  $D$  et  $|F'(z)| \leq \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + \left| \frac{\tau'(z)}{\tau(z)} \right|$  est une mesure de Carleson dans  $D$  par le théorème 3. Le lemme 2 permet de conclure que  $F \in \text{BMOA}(D)$ . Enfin les résultats pour le demi-plan se déduisent des résultats pour le disque par la propriété d'invariance conforme de  $\text{BMOA}$ .

Remarques.

1. La méthode employée pour démontrer le théorème 4 est très souple et se généralise au cas où  $f$  est seulement quasi-conforme [voir [29] et le chapitre V].

2. Baernstein montre en fait un résultat plus fort que le théorème 4. Si  $f$  est univalente dans  $D$  alors  $|f(e^{i\theta})|^p \in A^2(\partial D)$  (la classe de Muckenhoupt) pour tout  $p < \frac{1}{2}$ , ce qui fait le lien avec le théorème de Prawitz (théorème II.2).

3. LES THEOREMES DE DISTORSION DE POMMERENKE ET DE GEHRING-HAYMAN

Les deux théorèmes que nous énonçons dans ce paragraphe seront les outils essentiels du chapitre 3.

a) Le théorème de distorsion de Pommerenke

PROPOSITION 3. Soit  $F$  un sous-ensemble de  $\partial D$  de mesure  $\alpha > 0$  et  $f$  une fonction univalente de la classe  $S$ . Il existe une constante  $k(\alpha)$  et  $z_0 \in F$  tels que

$$\int_0^1 |f'(r z_0)| dr \leq k(\alpha).$$

Démonstration. Celle que nous proposons est due à Lewis-Rossi-Weitsman [33]. Pour  $z \in \partial D$  on écrit

$$\int_0^1 |f'(rz)| dr \leq h(z) F(z),$$

où

$$h(z) = \sup_{0 < r < 1} \frac{|f(rz)|}{r} \quad \text{et} \quad F(z) = \int_0^1 \frac{|f'(rz)|}{|f(rz)|} r dr.$$

Du théorème 2 de Prawitz, on tire que  $h \in L^{1/3}(\partial D)$  et du théorème 3, que  $F \in L^1(\partial D)$ , avec des normes majorées indépendamment de  $f$ . On en déduit

$$|E_\lambda| = |\{z \in \partial D ; |h(z)| > \lambda\}| \leq C \lambda^{-1/3},$$

$$|F_\lambda| = |\{z \in \partial D ; |F(z)| > \lambda\}| \leq C \lambda^{-1}.$$

On choisit alors  $\lambda(\alpha)$  de sorte que  $C(\lambda^{-1} + \lambda^{-1/3}) \leq \frac{\alpha}{2}$ , et l'on en déduit

$$\forall z \in F \setminus (E_\lambda \cup F_\lambda), \quad \int_0^1 |f'(rz)| dr \leq \lambda(\alpha)^2,$$

ce qui établit la proposition 3.

Nous déduisons facilement de la proposition 3 le théorème de distorsion de Pommerenke [35] :

**THEOREME 5.** Si  $U$  désigne soit  $D$  soit  $\mathbb{R}_+^2$ , si  $z_0 \in U$  et si  $I$  est un sous-ensemble de  $\partial U$  de mesure harmonique  $\alpha$  par rapport à  $z_0$ , alors il existe un segment non euclidien  $\gamma$  joignant  $z_0$  à  $-I$  tel que

$$\int_\gamma |f'(z)| |dz| \leq C(\alpha) \text{dist}(f(z_0), \partial f(U)),$$

où  $C(\alpha)$  ne dépend que de  $\alpha$ .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3 à la fonction de  $S$   $\frac{f(\tau(z)) - f\tau(0)}{\tau'(0) f'(z_0)}$ , où  $\tau(z)$  désigne une représentation conforme de  $D$  sur  $U$  telle que  $\tau(0) = z_0$ .

Le résultat provient alors du fait que

$$|f'(z)| |\tau'(0)| \sim \text{dist}(f(z_0), f(U)), \quad \text{ce qui est un corollaire du corollaire II.2.}$$

b) Le théorème de distorsion de Gehring-Hayman

PROPOSITION 4. Soit  $f \in \mathcal{S}$  telle que  $f(D)$  soit un domaine de Jordan. Il existe une constante  $C > 0$  absolue telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\partial D$  on ait

$$\text{diam}(f(I)) \geq C |I|^2.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'noncé a bien un sens car d'après un théorème de Carathéodory, si  $f(D)$  est un domaine de Jordan alors  $f$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\bar{D}$  sur  $\overline{f(D)}$ . Passons à la démonstration proprement dite. Si  $\text{diam } f(I) \geq 10^{-1}$ , il n'y a rien à démontrer : sinon, posons  $d = \text{diam } f(I)$  et fixons un point  $z_0$  de  $f(I)$ . D'après le théorème de Koebe,  $|z_0| \geq \frac{1}{4}$  et donc l'origine n'appartient pas au disque  $D_0$  de centre  $z_0$  et de rayon  $d$  qui contient  $f(I)$ . On peut écrire

$$(2\pi)^{-1} |I| = \omega(0, f(I), f(D)),$$

c'est-à-dire que  $\frac{|I|}{2\pi}$  est la mesure harmonique par rapport à 0 de  $f(I)$  pour le domaine  $f(D)$ . Appelons  $\Omega_0$  la composante connexe de  $f(D) \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{D}_0)$  contenant 0, et  $\gamma_0$  la partie de  $\partial D_0$  incluse dans  $f(D)$ .

D'après le principe du maximum,

$$\frac{|I|}{2\pi} = \omega(0, f(I), f(D)) \leq \omega(0, \gamma_0, \Omega_0).$$

D'autre part, puisque  $f(D)$  est un domaine de Jordan, il existe un arc de Jordan  $\delta$  issu de  $z_1 \in \partial D_0 \cap \mathbb{C} \setminus f(D)$  reliant l'infini dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{f(D)}$ . Posons alors  $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus (\bar{D}_0 \cup \delta)$ . Toujours par le principe du maximum, on a

$$\frac{|I|}{2\pi} \leq \omega(0, \gamma_0, \Omega_0) \leq \omega(0, \partial D_0, \Omega_1).$$

Par inversion de centre  $z_0$  on en tire

$$|I| \leq 2\pi \omega\left(\frac{1}{z_0}, \left\{ |z| = \frac{1}{d} \right\}, \Omega_1'\right)$$

où  $\Omega_1'$  est l'image de  $\Omega_1$  dans l'inversion  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ . Par homogénéité on a

$$\omega\left(\frac{1}{z_0}, \left\{ |z| = \frac{1}{d} \right\}, \Omega_1'\right) = \omega\left(\frac{d}{z_0}, \partial D, \Omega_1''\right)$$

où  $\Omega_1''$  est l'image de  $\Omega_1'$  dans l'homothétie de rapport  $d$ . On applique alors un théorème classique de Beurling [2 ; pp. 42-43] nous apprenant que

$$\omega\left(\frac{d}{z_0}, \partial D, \Omega_1''\right) \leq \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{d}{|z_0|}} \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{d},$$

et la proposition 4 s'en déduit.

Le théorème suivant n'est autre qu'une localisation de la proposition 4.

**THEOREME 6.** Soit  $U = D$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  et  $f$  une fonction univalente dans  $U$  telle que  $f(U)$  soit un domaine de Jordan. Soit  $I$  un intervalle de  $\partial U$ . Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $c(\alpha) > 0$  telle que si  $z_0 \in U$  est tel que la mesure harmonique de  $I$  par rapport à  $z_0$  soit  $\geq \alpha$ , on ait

$$\text{diam } f(I) \geq c(\alpha) \text{dist}(f(z_0), \partial f(U)).$$

Démonstration. Soit  $\tau$  une transformation conforme de  $D$  sur  $U$  telle que  $\tau(0) = z_0$ ; il suffit d'appliquer la proposition 4 à la fonction

$$z \mapsto \frac{f(\tau(z)) - f(\tau(0))}{f'(0) f'(\tau(0))} \in S.$$

Nous déduisons du théorème 6 le théorème de distorsion de Gehring-Hayman [24].

**THEOREME 7.** Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan et  $f$  une représentation conforme de  $D$  sur  $\Omega$ . Il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que

$$\int_{-1}^1 |f'(x)| dx \leq C \text{longueur}(f(\partial D \cap \mathbb{R}_+^2)).$$

Démonstration. Pour  $n \in \mathbb{N}$  posons  $x_n = 1-2^{-n}$  et  $z_n = e^{i\pi/2^{n+1}}$ . Posons également  $x_{-n} = -x_n$  et  $z_{-n} = -\bar{z}_n$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  la mesure harmonique de l'arc  $\widehat{z_n z_{n+1}}$  par rapport à  $x_n$  est supérieure à  $\alpha$  indépendant de  $n$ . Par le théorème 6, on en déduit l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{longueur } f(\widehat{z_n z_{n+1}}) \geq C(1 - |x_n|) |f'(x_n)|,$$

et donc que

$$\text{longueur } f(\partial D \cap \mathbb{R}_+^2) \geq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - |x_n|) |f'(x_n)|.$$

Mais le fait que  $\text{Log } f'$  est une fonction de Bloch de norme  $\leq 4$  (Proposition II.2) implique que

$$(1 - |x_n|) |f'(x_n)| \sim \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f'(x)| dx.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 7.

**COROLLAIRE 3.** Si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe et si  $f$  est une représentation conforme de  $U$  ( $= D$  ou  $\mathbb{R}_+^2$ ) sur  $\Omega$ , alors si  $z_1, z_2 \in \partial U$  sont les extrémités d'un intervalle  $I$  de  $\partial U$  et si  $\gamma$  est un arc de Jordan reliant  $z_1$  à  $z_2$  dans  $U$ ,

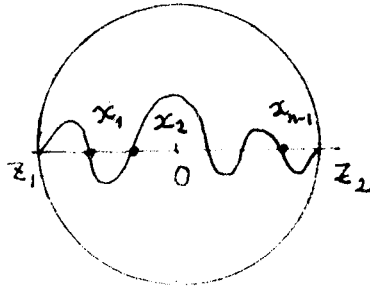
$$\text{longueur } f(\gamma) \geq C \text{ dist}(f(z_1), \partial f(U)),$$

où  $C$  est une constante absolue.

(Pour la définition de  $z_1$ , voir le théorème I.7)).

Démonstration. Par une transformation de Möbius, on se ramène au cas  $U = D$ ,  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 1$  et  $f \in \mathcal{S}$ .





Alors  $\int_{-1}^1 |f'(x)| dx \geq \frac{1}{2}$  d'après le théorème de Distorsion de Koebe.

D'autre part,

$$\int_{-1}^1 |f'(x)| dx = \int_{\gamma \cap \mathbb{R}} |f'(x)| dx + \sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f'(x)| dx$$

où les  $x_n$  sont tels que  $\gamma = \gamma \cap \mathbb{R} \cup (\bigcup_{n \geq 0} C_n)$ , les  $C_n$  étant des arcs de Jordan ne coupant  $\mathbb{R}$  qu'en leurs extrémités  $x_n$  et  $x_{n+1}$ .  $C_n \cup \bar{C}_n$  est alors une

courbe de Jordan fermée symétrique par rapport à l'axe des  $x$  et l'on peut consi-

dérer  $\psi_n$  une représentation conforme de  $D$  sur son intérieur. Par symétrie

$\psi_n([-1, 1]) = [x_n, x_{n+1}]$  et  $\psi_n(\partial D \cap \mathbb{R}_+^2) = C_n$  ou  $\bar{C}_n$ . D'après le théorème 7 appliqué à  $f \circ \psi_n$ ,  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f'(x)| dx \leq C \text{ longueur } f(C_n)$ , et le corollaire est

démonstré.

#### 4. CONNEXITE LOCALE

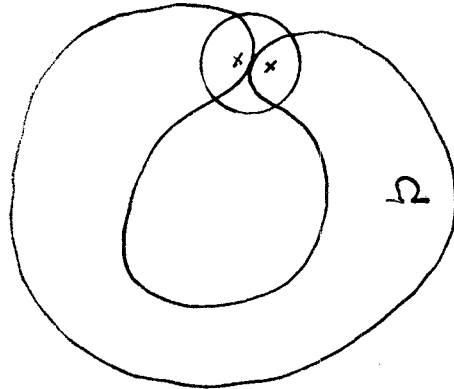
a) DEFINITION. Soit  $k$  un réel  $\geq 1$ . Un sous-ensemble  $E$  du plan est dit  $k$ -localement connexe (ce que nous abrègerons en  $k$ -lc) si pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$   $E \cap \bar{D}(z_0, r)$  est inclus dans une composante connexe de  $E \cap \bar{D}(z_0, kr)$ .

PROPOSITION 5. Si  $E \subset \mathbb{C}$  est  $k$ -lc alors  $\bar{E}$  est  $2k$ -lc mais la réciproque est fautive.

Preuve. Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  et  $a, b \in \bar{E} \cap \bar{D}(z_0, r)$ . Il existe alors deux

suites  $a_n, b_n$  convergent respectivement vers  $a$  et  $b$  telles que  $a_n, b_n$  appartiennent à  $E \cap \bar{D}(z_0, 2r)$ . Par l'hypothèse faite il existe alors un ensemble connexe  $C \subset E \cap \bar{D}(z_0, 2r)$  contenant les suites  $a_n$  et  $b_n$ . Mais alors  $a, b \in \bar{C}$  qui est connexe.

L'ouvert  $\Omega$  dessiné ci-dessous établit un contre-exemple à la réciproque :



Il est clair que  $\bar{\Omega}$  est  $k$ -l.c. mais que  $\Omega$  ne l'est pas.

PROPOSITION 6. Si  $\Omega$  est un domaine de Jordan alors si  $\bar{\Omega}$  est  $k$ -l.c. il en est de même de  $\Omega$ . En fait  $\bar{\Omega}$  est un peu plus que cela :  $\forall (z_1, z_2) \in \Omega \cap \bar{D}(z_0, r)$ ,  $z_1$  et  $z_2$  peuvent être joints par un arc de Jordan inclus dans  $\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$ .

Démonstration. Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ . Si  $\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$  contient 0 ou un point alors soit  $D(z_0, kr) \subset \Omega$ , soit  $\Omega \subset \bar{D}(z_0, kr)$ . Dans les deux cas on peut joindre  $z_1, z_2 \in \Omega \cap \bar{D}(z_0, r)$  par un arc de Jordan inclus dans  $\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$ . Si maintenant  $\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$  contient au moins deux points, alors, par le théorème de Kerekjarto [34], le complémentaire de  $\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$  est une réunion de domaines de Jordan  $D_i$ . Soit  $t \mapsto z(t)$  une paramétrisation de  $\partial\Omega$ . Comme l'image de l'ensemble des extréma locaux d'une fonction continue est au plus dénombrable on peut supposer que  $kr$  n'est pas un maximum local de  $t \mapsto |z(t) - z_0|$  et par conséquent que les  $D_i \subset \bar{D}(z_0, kr)$  sont tels que  $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$ . Alors nécessairement deux points  $z_1, z_2 \in \Omega \cap \bar{D}(z_0, r)$  appartiennent à une même composante  $D_i$ .

L'objet du théorème suivant est la caractérisation, en terme de représentation conforme, des domaines simplement connexes  $\Omega$  du plan tels que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  soit  $k$ -l.c.

Soit  $f$  une fonction holomorphe univalente dans  $\mathcal{U} = D$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  se prolongeant continûment à  $\bar{D}$  ou  $\bar{\mathbb{R}}_+^2 \cup \{\infty\}$ . On pose  $\Omega = f(\mathcal{U})$  et l'on suppose que  $\mathcal{U} = D$  si  $\partial\Omega$  est borné, et que  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  et  $f(\infty) = \infty$  si  $\partial\Omega$  est non borné. On peut alors énoncer le

**THEOREME 8.** Sous les hypothèses ci-dessus,  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. pour un réel  $k \geq 1$  si et seulement si

$$(10) \quad \exists C > 0, \quad \forall I \subset \partial\mathcal{U}, \quad \text{diam } f(I) \leq C_{10} |I| |f'(z_I)|.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord (10) vérifié ; soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ , et  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega \cap D(z_0, r)$ . Soit  $\lambda(t) = (1-t)z_1 + tz_2$  ;  $\lambda$  est une paramétrisation du segment  $[z_1, z_2]$  et  $\{t \in [0, 1] ; \lambda(t) \in \Omega\}$  est un ouvert de  $[0, 1]$  du type

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]t_n, s_n[.$$

Alors  $f^{-1}(\lambda(]t_n, s_n[))$  est un arc de Jordan de  $\mathcal{U}$  joignant  $x_n, y_n \in \partial\mathcal{U}$ .

D'après le corollaire 3 du théorème II.7, il existe une constante  $c$  absolue telle que

$$(11) \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \frac{c}{C_{10}} \text{diam } f([x_n, y_n])$$

(la propriété (10) a aussi été utilisée).

Nous définissons alors  $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &= \lambda(t) \quad \text{si } \lambda(t) \notin \Omega \\ \tilde{\lambda}(t) &= f\left(\frac{x_n(t-s_n) + y_n(t_n-b)}{t_n - s_n}\right) \quad \text{si } t \in ]t_n, s_n[. \end{aligned}$$

[On a supposé que  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  ; les modifications à faire sont évidentes dans le cas

où  $U = D]$ .

Alors  $\tilde{\lambda}(0) = z_1$ ,  $\tilde{\lambda}(1) = z_2$ ,  $\tilde{\lambda}([0, 1]) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ , et, par (11),  $\tilde{\lambda}([0, 1]) \subset D(z_0, (1 + \frac{C_{10}}{c})r)$ . Pour prouver que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. avec  $k = 1 + \frac{C_{10}}{c}$ , il suffit donc de prouver que  $\tilde{\lambda}$  est continue sur  $[0, 1]$ . Or  $\tilde{\lambda}$  est évidemment continue sur tous les  $]t_n, s_n[$ . Soit alors  $t$  tel que  $\lambda(t) \notin \Omega$ ; montrons par exemple la continuité à droite de  $\tilde{\lambda}$  en  $t$ . Si  $t$  est l'un des  $t_n$ , c'est évident. Sinon, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists t_1 \in ]t, t + \varepsilon[$  tel que  $\lambda(t_1) \notin \Omega$ . Mais alors, par (11),

$$\forall x \in [t, t_1[, \quad |\tilde{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(t)| \leq (1 + \frac{1}{C_{10}})\varepsilon,$$

et la propriété est démontrée.

Réciproquement, supposons, pour simplifier, que  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  et que (10) n'est pas vérifié : pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut alors trouver  $I \subset \mathbb{R}$  tel que

$$|I| |f'(z_1)| \leq \varepsilon \text{ diam } f(I).$$

Soit alors  $I$  un tel intervalle et  $I_1, I_2$  les intervalles contigus à  $I$  et de même longueur. D'après le théorème II.5, il existe  $z_j \in I_j$  ( $j = 1, 2$ ) et  $\gamma_j$  reliant  $f(z_1)$  à  $f(z_j)$  tel que

$$\text{longueur}(\gamma_j) \leq C\varepsilon \text{ diam } f(I).$$

Soit d'autre part  $z_0 \in I$  tel que  $|f(z_0) - f(z_1)| \geq \frac{1}{2} \text{ diam } f(I)$ . On peut relier  $f(z_0)$  et  $\infty$  par un arc de Jordan  $\Gamma \subset \Omega$  tel que  $\Gamma \cap \gamma = f(z_1)$ , où  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Mais alors  $f(z_1)$  et  $f(z_2)$  ne peuvent être reliés dans  $\mathbb{C} \setminus \Omega \cap D(f(z_1), \frac{1}{10} \text{ diam } f(I))$ , ce qui prouve,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit, que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  n'est pas  $k$ -l.c.

b) Domaines quasiconformes

DEFINITION. Une courbe de Jordan  $\Gamma$  de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est appelée quasicercle s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout couple  $z_1, z_2$  de  $\Gamma$  on ait

$$\inf(\text{diam}(\gamma_1), \text{diam}(\gamma_2)) \leq C |z_1 - z_2|,$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les deux sous-arcs de  $\Gamma$  joignant  $z_1$  à  $z_2$ . Un domaine simplement connexe  $\Omega$  est dit quasi-conforme si  $\partial\Omega$  est un quasicercle.

Le théorème suivant, dû à Gehring [22], fait le lien entre ces notions et la notion de  $k$ -locale connexité.

THEOREME 9. Si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe du plan, sont équivalents :

- (12) Il existe  $k \geq 1$  tel que  $\Omega$  soit  $k$ -l.c. ainsi que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$
- (13) Il existe  $k \geq 1$  tel que  $\Omega$  soit  $k$ -l.c. et tel que  $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall r > 0,$   
 $\forall z_1, z_2 \in \Omega \setminus D(z_0, kr), z_1$  et  $z_2$  peuvent être joints dans  $\Omega \setminus D(z_0, r)$   
(par un arc de Jordan),
- (14)  $\Omega$  est un domaine quasiconforme

Démonstration

(12)  $\implies$  (13). Supposons qu'il existe  $\Omega$  vérifiant (12), mais pas (13).

Quitte à remplacer  $\Omega$  par une figure semblable, on peut supposer que pour  $k'$  très grand on puisse trouver deux points  $z_1, z_2$  de  $\Omega \setminus D(0, k')$  ne pouvant être joints dans  $\Omega \setminus D(0, 1)$ . Le fait que  $\Omega$  soit  $k$ -l.c. prouve que toutes les composantes de  $\Omega \cap D(0, k')$  sont des domaines de Jordan (voir [34]). L'hypothèse faite ( $\Omega$  ne satisfait pas (13)) implique que l'une au moins de ces composantes sépare  $\partial D(0, 1)$ . On en déduit alors aisément l'existence de deux points  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega \cap \partial D(0, 1)$  ne pouvant être joints dans  $\mathbb{C} \setminus \Omega \cap D(0, k')$ . Mais ceci contredit (12) dès que  $k' \geq k$ .

Nous avons donc montré que si  $\Omega$  vérifie (12) pour une constante  $k \geq 1$ , alors  $\Omega$  vérifie (13) avec la même constante  $k$ .

(13)  $\Rightarrow$  (14). D'après les résultats énoncés dans [34] l'hypothèse (13) implique que  $\Omega$  est un domaine de Jordan. Montrons que  $\partial\Omega$  est un quasicercle avec la constante  $C = k^2$ . Pour ce faire considérons  $z_1, z_2 \in \partial\Omega$ . Posons  $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  et  $r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ . Supposons alors que  $\inf(\text{diam}(\gamma_1), \text{diam}(\gamma_2)) > k^2|z_1 - z_2|$ ; on peut alors trouver  $t > r$  et deux points  $\omega_1 \in \gamma_1 \setminus D(z_0, k^2t)$ ,  $\omega_2 \in \gamma_2 \setminus D(z_0, k^2t)$ . Par (13) on en déduit que l'on peut joindre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par un arc de Jordan  $\alpha$  inclus dans  $\mathbb{C} \setminus D(z_0, kt) \cap \Omega$ . D'autre part  $z_1, z_2 \in \overline{D}(z_0, r)$  et par conséquent, toujours par (12), il existe un arc de Jordan  $\beta$  joignant  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\Omega \cap \overline{D}(z_0, kr)$ . Mais alors  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , ce qui contredit le fait que  $z_1$  et  $z_2$  séparent  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur  $\partial\Omega$ .

(14)  $\Rightarrow$  (12). Supposons que  $\partial\Omega$  soit un quasicercle avec constante  $k$ . Vu la proposition II.6, il suffit de montrer que  $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$  est  $k'$ -l.c. pour un  $k' \geq 1$ , ou encore, par le théorème II.8, qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall I \subset \mathbb{R} \quad \text{diam } f(I) \leq C |I| |f'(z_1)|$$

où  $f$  est une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $f(\infty) = \infty$ .

Soient  $I_1$  et  $I_2$  les intervalles contigus à  $I$  et de même longueur que lui : d'après le théorème II.5 il existe  $z_i \in I_i$  tels que

$$|f(z_1) - f(z_i)| \leq c |I| |f'(z_1)|$$

où  $c$  est une constante universelle. On en déduit

$$\text{diam } f(I) \leq \text{diam } f(\overline{[z_1, z_2]}) \leq k |f(z_1) - f(z_2)| \leq 2ck |I| |f'(z_1)|.$$

Nous avons donc montré que si  $\partial\Omega$  est un  $k$ -quasicercle alors  $\Omega$  et  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  sont  $C$   $k$ -l.c. où  $c$  est une constante absolue.

Remarque. Nous avons supposé dans ce dernier raisonnement, que  $\infty \in \partial\Omega$ .

Si ce n'est pas le cas on considère la représentation conforme de  $D$  sur  $\Omega$  si  $\infty \notin \Omega$  et de  $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$  sur  $\Omega$  si  $\infty \in \Omega$  (laissant dans ce cas  $\infty$  stable). Le raisonnement est alors à peu près le même à cette différence près que l'on doit se restreindre aux intervalles  $I$  de  $\partial D$  "petits" ; les détails sont laissés au lecteur.

## 5. L'ESPACE UNIVERSEL DE TEICHMULLER

### a) Applications quasiconformes ; la théorie d'Ahlfors

DEFINITION. Une application quasiconforme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un homéomorphisme  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  sur lui même tel qu'il existe  $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|\mu\|_\infty < 1$ , avec, au sens des distributions :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Le théorème suivant, dû à Ahlfors, est fondamental ; nous l'admettrons (voir [1] pour une démonstration).

THEOREME 10. Soit  $f$  une fonction holomorphe et univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Alors  $f$  se prolonge en une application quasiconforme de  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\partial f(\mathbb{R}_+^2)$  est un quasicercle.

Un corollaire de ce théorème est que l'image d'un domaine quasiconforme par une transformation de Möbius est encore un domaine quasiconforme. Cette remarque justifie l'introduction de la dérivée Schwarzienne :

DEFINITION. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un domaine de  $\mathbb{C}$ , localement univalente. Le Schwarzien de  $f$ , noté  $S_f$ , est la fonction

$$S_f(z) = \frac{d^2}{dz^2} [\log f'(z)] - \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dz} (\log f'(z)) \right]^2.$$

Les principales propriétés du Schwarzien sont les suivantes :

$$(14) \quad S_f \circ g = S_g + g'^2 S_f \circ g$$

$$(15) \quad S_f = 0 \iff f \text{ est une transformation de Möbius.}$$

(16) Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{C}$  et  $\varphi$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$  alors il existe  $f$  holomorphe et localement univalente sur  $\Omega$  telle que  $S_f = \varphi$ . De plus toute autre solution  $g$  de  $S_g = \varphi$  est telle que  $g = \tau \circ f$ , où  $\tau$  est une transformation de Möbius.

Ces propriétés sont classiques ; voir [35].

Soit maintenant  $f$  une fonction holomorphe et univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ . D'après la proposition II.2 et les résultats du chapitre I,  $S_f$  appartient à l'espace de Banach  $B$  des fonctions  $\varphi$  holomorphes dans  $\mathbb{R}_+^2$  telles que

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{y>0 \\ x \in \mathbb{R}}} y^2 |\varphi(x+iy)| < +\infty.$$

Un théorème de Nehari [35] précise ce résultat. Si  $f$  est univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$  alors  $\|S_f\|_B \leq \frac{3}{2}$ . Réciproquement si  $f$  est localement univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$  et si  $\|S_f\|_B < \frac{1}{2}$ , alors  $f$  est univalente et  $f(\mathbb{R}_+^2)$  est un domaine quasiconforme.

Posons alors

$$\mathcal{J} = \{S_f ; f \text{ est univalente dans } \mathbb{R}_+^2\}$$

$$T(1) = \{S_f \in \mathcal{J} ; f(\mathbb{R}_+^2) \text{ est quasiconforme}\}$$

$T(1)$  est l'espace universel de Teichmüller.

Ahlfors, en utilisant le théorème 10, a pu montrer le théorème fondamental suivant [1].

THEOREME 11.  $T(1)$  est ouvert dans  $B$ .



b) Les théorèmes de Gehring

THEOREME 12 (Gehring [22]).  $T(1)$  est l'intérieur de  $\mathfrak{J}$  dans  $B$ .

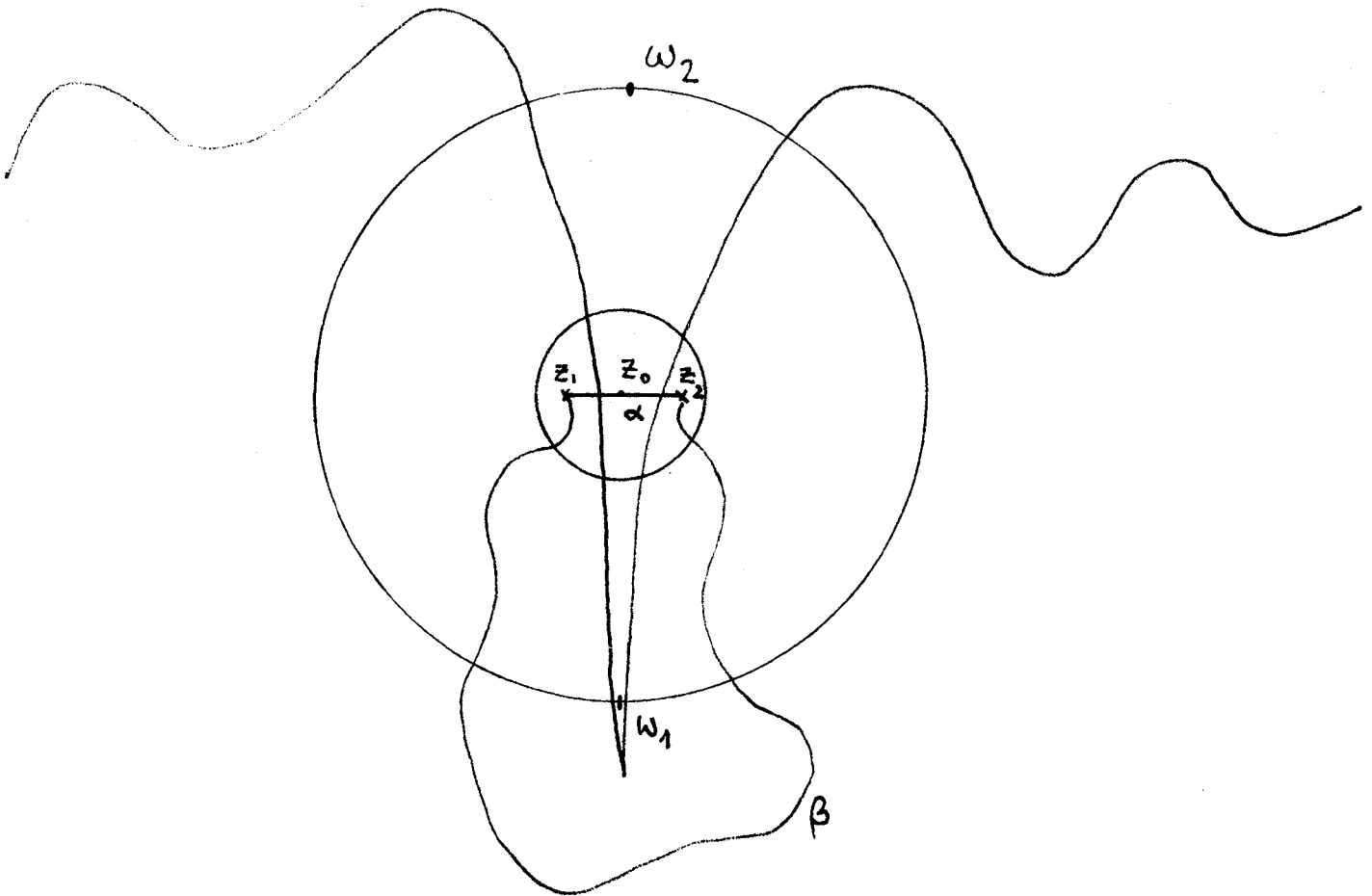
Démonstration. Elle commence par deux lemmes.

LEMME 3. Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe propre de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\Omega$  n'est pas  $k$ -l.c. alors il existe  $z_1, z_2 \in \Omega$  et  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  tels que

$$|h(z_1) - h(z_2) - 2i\pi| \leq \frac{4}{k-1}$$

où l'on a posé  $h(z) = \log \frac{z-w_1}{z-w_2}$ .

Démonstration du lemme 3. Soient  $z_1, z_2$  deux points de  $\Omega \cap \bar{D}(z_0, r)$  ne pouvant être joints dans  $\Omega \cap \bar{D}(z_0, kr)$ . Quitte à modifier les points  $z_1, z_2$  on peut supposer qu'il existe un arc de Jordan  $\beta$  joignant  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\Omega$  ne rencontrant pas  $\alpha = [z_1, z_2]$ . Alors  $\gamma = \alpha \cup \beta$  est une courbe de Jordan fermée. Par l'hypothèse faite ( $\Omega$  n'est pas  $k$ -l.c.)  $\beta$  rencontre  $\partial D(z_0, kr)$  en au moins deux points. D'après le théorème de Kerekjarto, les composantes connexes du complémentaire dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\alpha \cup \beta \cup \partial D(z_0, kr)$  sont des domaines de Jordan. Soient  $U_1$  et  $U_2$  l'intérieur et l'extérieur de  $\gamma$ . Soient  $V_1$  et  $V_2$  les composantes de  $U_1 \cap D(z_0, kr)$  et de  $U_2 \cap D(z_0, kr)$  telles que  $z_1, z_2 \in \partial V_i$ . Alors nécessairement il existe  $\omega_i \in V_i \cap \partial D(z_0, kr)$ . Voici une figure correspondant au raisonnement ci-dessus :



Posons alors  $\log \frac{z - \omega_1}{z - \omega_2} = h(z)$ . Alors

$$\begin{aligned} h(z_1) - h(z_2) &= \int_{\beta} \frac{dz}{z - \omega_1} - \int_{\beta} \frac{dz}{z - \omega_2} \\ &= 2i\pi - \int_{\alpha} \frac{dz}{z - \omega_1} + \int_{\alpha} \frac{dz}{z - \omega_2}. \end{aligned}$$

Comme longueur  $(\alpha) \leq 2r$  et  $|z - \omega_1| \geq r(k-1)$  ( $z \in \alpha$ ), on a  
 $|h(z_1) - h(z_2) - 2i\pi| \leq \frac{2}{k-1}$ , ce qui termine le lemme 3.

LEMMA 4.  $\Omega$  étant toujours un domaine simplement connexe propre de  $\mathbb{R}^2$ ,  
 supposons qu'il existe  $z_1, z_2 \in \Omega \setminus D(z_0, kr)$  ne pouvant être joints dans  $\Omega \setminus D(z_0, r)$ .  
 Alors la conclusion du lemme 3 est encore vraie.

Preuve. Elle consiste simplement à appliquer le lemme 3 au domaine  $\Omega'$

transformé de  $\Omega$  dans l'inversion  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0} + z_0$ . Les détails sont laissés au lecteur.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 12. Grâce au théorème 11, la seule chose restant à montrer est que si  $f$ , univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ , est telle que  $S_f$  est intérieur à  $\mathcal{J}$  alors  $\Omega = f(\mathbb{R}_+^2)$  est quasiconforme, c'est-à-dire vérifie la condition (13) du théorème 9.

Supposons donc que (13) ne soit pas vérifiée. Pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut alors trouver  $z_1, z_2 \in \Omega$  et  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  tels que

$$|h(z_1) - h(z_2) - 2i\pi| \leq \varepsilon, \quad \text{où } h(z) = \log \frac{z-\omega_1}{z-\omega_2}.$$

Posons alors  $c = \frac{2i\pi}{h(z_1) - h(z_2)}$ , ce qui est possible si  $\varepsilon < 1$ , car alors

$|h(z_1) - h(z_2)| > 2\pi - \varepsilon > 5$ . D'autre part  $|1-c| < \frac{\varepsilon}{5}$  et  $|c| \leq 2$ . Posons également

$$\varphi_\varepsilon(z) = \exp(ch(z)).$$

$\varphi_\varepsilon$  est définie sur  $\Omega$  et n'est pas univalente car  $\varphi_\varepsilon(z_1) = \varphi_\varepsilon(z_2)$ . Posons enfin  $f_\varepsilon(z) = \varphi_\varepsilon \circ f(z)$ . Par (14) on a

$$S_{f_\varepsilon} = S_f + (f')^2 S_{\varphi_\varepsilon \circ f},$$

et

$$S_{\varphi_\varepsilon}(z) = \frac{1-c^2}{2} \left( \frac{1}{z-\omega_1} - \frac{1}{z-\omega_2} \right)^2.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|S_{f_\varepsilon} - S_f\|_B &\leq 3\varepsilon \sup_{\substack{y>0 \\ x \in \mathbb{R}}} \left\{ \frac{|y f'(x+iy)|^2}{|f(x+iy)-\omega_1|^2} + \frac{|y f'(x+iy)|^2}{|f(x+iy)-\omega_2|^2} \right\} \\ &\leq 20\varepsilon, \end{aligned}$$

grâce à la proposition II.1. Mais  $f_\varepsilon$  n'est même pas univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ ;  $S_{f_\varepsilon}$  ne peut donc être intérieure à  $\mathcal{J}$ . Le théorème 12 est entièrement démontré.

THEOREME 13 (Gehring [23]). Soit  $\gamma = \{ \pm e^{(-a+i)t}, t \in [0, \infty] \}$ , où  $a \in ]0, \frac{1}{8\pi}[$ . Alors, si  $f$  est une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ,  $S_f$  n'est pas adhérent à  $T(1)$ .

Ce théorème prouve que  $\mathfrak{J}$ , qui est fermé dans  $B$  n'est pas l'adhérence de son intérieur. Nous renvoyons à [23] pour la démonstration, fort longue, de ce théorème.

c) Dans cette section, nous nous proposons de faire une étude analogue à celle développée dans les parties a) et b), mais pour une topologie plus simple. Plus précisément, posons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{J}} &= \{ \log f' ; f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ est univalente} \} \\ \tilde{T}(1) &= \{ \log f' \in \tilde{\mathfrak{J}} ; f(\mathbb{R}_+^2) \text{ est quasiconforme} \}. \end{aligned}$$

D'après ce qui a été vu,  $\tilde{\mathfrak{J}}$  est une partie bornée de l'espace de Bloch  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^2)$ . De manière analogue à la théorie de l'espace de Teichmüller, montrons le théorème suivant.

THEOREME 14 (Astala-Gehring [3]).  $\tilde{T}(1)$  est l'intérieur de  $\tilde{\mathfrak{J}}$  dans  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^2)$ ; de plus il existe  $\log f' \in \tilde{\mathfrak{J}}$  qui n'est pas adhérent à  $\tilde{T}(1)$ .

Démonstration. Grâce à l'inégalité

$$\|S_f - S_g\|_B \leq C \|\log f' - \log g'\|_{\mathfrak{B}}$$

et aux théorèmes 11 et 13, on obtient immédiatement que  $\tilde{T}(1)$  est ouvert dans  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^2)$  et qu'il existe  $\log f' \in \tilde{\mathfrak{J}}$  qui n'est pas adhérent à  $\tilde{T}(1)$ . De plus par un argument tout à fait similaire à celui utilisé pour le lemme 3, on montre que si  $\log f'$  est intérieur à  $\tilde{\mathfrak{J}}$ , alors  $f(\mathbb{R}_+^2)$  est  $k$ -l.c. Pour terminer la démonstration du théorème 14, il suffit donc de prouver le lemme suivant.

LEMME 5. S'il existe  $z_1^!, z_2^! \in f(\mathbb{R}_+^2) \setminus D(z_0^!, kr)$  ne pouvant être joints dans  $f(\mathbb{R}_+^2) \setminus D(z_0^!, r)$ , alors on peut trouver une fonction  $g$  localement univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$  mais non univalente telle que

$$\|\log f' - \log g'\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{C}{\log k}, \quad k \geq 10.$$

Preuve du lemme 5. Soit  $h$  une transformation conforme de  $D(0, 1)$  sur  $\Omega = f(\mathbb{R}_+^2)$  telle que  $h(0) = z_0^!$  et  $h^{-1}(z_2^!) = x_2^! \in [0, 1[$ . Par hypothèse, l'image par  $h$  du segment  $[0, x_2^!]$  rencontre nécessairement le disque  $D(z_0^!, r)$  en, disons,  $z_0 = h(x_0)$ . Posons alors  $H(z) = h\left(\frac{z+x_0}{z+x_0/x_2^!}\right)$ . Alors  $H(0) = z_0$  et il existe  $x_1^! \in ]-1, 0[$ ,  $x_2^! \in ]0, 1[$  tels que  $H(x_1^!) = z_1^!$ ,  $H(x_2^!) = z_2^!$ . Quitte à renormaliser, on peut supposer  $z_0 = 0$ ,  $\text{dist}(z_0, \partial\Omega) = 1$ , et alors  $|z_i^!| \geq (k-1)$  ( $i = 1, 2$ ). Soit  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  le plus grand intervalle contenant 0 tel que  $H([\bar{x}_1, \bar{x}_2])$  soit inclus dans  $D(z_0, (k-1)r)$ . Alors  $|H(x_i)| = k-1$   $i = (1, 2)$ ; posons  $z_i = H(x_i)$ .

LEMME 6. Il existe une constante  $c > 0$  absolue telle que

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} x \frac{H'(x)}{H(x)} dx \right| \geq c \log(k-1).$$

Preuve du lemme 6. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_1}^{x_2} x \frac{H'(x)}{H(x)} dx \right| \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} x \operatorname{Re} \frac{H'(x)}{H(x)} dx \right| \\ &= \left| |x_1| \log |H(x_1)| + x_2 \log |H(x_2)| - \int_{x_1}^{x_2} \log |H(t)| dt \right| \\ &\geq \left[ (x_2 + |x_1|) \log(k-1) - \int_{x_1}^{x_2} \log^+ |H(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Mais l'hypothèse  $d(0, \partial\Omega) = 1$  implique

$$1 \leq |H'(0)| \leq 4,$$

et par conséquent, d'après le théorème de distorsion de Koebe il existe une constante absolue  $c > 0$  telle que  $|H(z)| > 1 \implies |z| > c$ . On en déduit que

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} x \frac{H'(x)}{H(x)} dx \right| \geq 2c \log(k-1).$$

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du lemme 5. Posons  $\varphi(z) = H^{-1}(z)$  ( $z \in \Omega$ ), et

$$\psi(z) = z \exp \left\{ \omega \int_0^z \frac{\varphi(u)}{u} du \right\},$$

où  $\omega$  va être fixé ultérieurement. Posons enfin  $g(z) = \psi \circ f(z)$ . Un calcul facile montre que

$$\| \log f' - \log g' \|_{\beta} \leq C |\omega|,$$

où  $C$  est une constante absolue. Nous allons maintenant fixer  $\omega$  de sorte que  $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ . Pour cela soit  $\theta \in [-\pi, \pi]$  tel que  $e^{i\theta} = z_1/z_2$ . Alors

$$\psi(z_1)/\psi(z_2) = e^{i\theta + \omega I} \quad \text{où} \quad I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varphi(u)}{u} du.$$

Il suffit donc, pour avoir  $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ , de poser  $\omega = -\frac{i\theta}{I}$ . Mais, par le lemme 6,

on a alors :  $|\omega| \leq \frac{C}{\log k}$ . Ceci termine la preuve du lemme 5 et donc du théorème 14.

### Notes du chapitre II

Là encore, les résultats exposés dans ce chapitre sont classiques sauf peut-être le théorème 8. Notre seul travail ici a consisté à donner parfois de nouvelles démonstrations et à unifier divers points de vue. Pour les théorèmes admis concernant les fonctions univalentes on consultera [35]; notons que la démonstration ici reproduite du théorème 2 est tirée de cet ouvrage. Nous avons insisté sur la notion de  $k$ -locale connexité introduite par Gehring [22] (dans un sens légèrement différent) car son importance apparaîtra au chapitre III; dans ce cadre, le théorème 8 semble nouveau bien qu'implicite dans [24]. La démonstration que nous avons choisie du théorème 5, due à Lewis-Rossi-Weitsman est purement analytique et se généralise au cas quasiconforme dans  $\mathbb{R}^n$  [46] (voir aussi chapitre V).

CHAPITRE III. - Domaines à bord rectifiable

1. GENERALITES

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir  $E$  par une réunion dénombrable de disques  $D_n$  de diamètres  $d_n < \varepsilon$ . On définit alors la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle de  $E$  par :

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \inf_{d_n < \varepsilon} \sum_n d_n \right\}.$$

Si  $\mathcal{H}^1(E)$  est fini on peut alors définir sur  $\mathbb{C}$  une mesure  $\mu$  en posant  $\mu(A) = \mathcal{H}^1(A \cap E)$ .

Soit maintenant  $\Omega$  un domaine simplement connexe borné de  $\mathbb{C}$  contenant 0 et  $\Phi$  la transformation de  $D$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) > 0$ .

THEOREME 1.  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty \iff \Phi' \in H^1(D)$ . [ $H^1(D)$  désigne l'espace de Hardy "classique" du disque].

Démonstration. Supposons tout d'abord que  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < \infty$  ; nous allons alors commencer par montrer que  $\Phi$  se prolonge en une fonction continue sur  $\bar{D}$ . D'après un théorème de Carathéodory, il suffit, pour ce faire, de montrer que  $\partial\Omega$  est localement connexe. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 < \frac{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)}{10}$ , et  $z_0 \in \partial\Omega$  tel que, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , il existe  $z \in \partial\Omega \cap D(z_0, \varepsilon)$  tel que la composante connexe de  $z$  dans  $\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, \varepsilon_0)$  ne contienne pas  $z_0$ .

On construit alors facilement une suite  $C_n$  de composantes connexes de  $\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, \varepsilon_0)$ , deux à deux disjointes, telles que  $\mathcal{H}^1(C_n) \geq \varepsilon_0/3$ . Mais ceci est en contradiction avec le fait que  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$ .

$\partial\Omega$  est donc localement connexe et par conséquent  $\Phi$  se prolonge continûment à  $\bar{D}$ . Posons alors  $\lambda(\theta) = \Phi(e^{i\theta})$ . La prochaine étape consiste à montrer que  $\lambda(\theta)$  est à variation bornée.

Pour montrer cela, posons, pour  $z \in \partial\Omega$ ,

$$N(\lambda, z) = \#\{\theta \in [0, 2\pi] ; \lambda(\theta) = z\}.$$

On a alors l'identité ([19], p. 177)

$$V_0^{2\pi}(\lambda) = \int_{\partial\Omega} N(\lambda, z) d\mathcal{H}^1(z),$$

où  $V_0^{2\pi}(\lambda)$  désigne la variation totale de  $\lambda$  sur  $[0, 2\pi]$ . D'autre part, un théorème de Denjoy [16] affirme que  $N(\lambda, z) \leq 2$  sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de points de  $\partial\Omega$ . On en déduit

$$V_0^{2\pi}(\lambda) \leq 2 \mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty.$$

Nous pouvons maintenant conclure cette partie du théorème : puisque  $\Phi$  se prolonge continûment à  $\bar{D}$  on a

$$\hat{\lambda}(n) = 0, \quad n \leq -1,$$

où  $\hat{\lambda}(n)$  désigne le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier de  $\lambda$ . Par une intégration par parties, on en déduit,

$$\widehat{d\lambda}(n) = 0, \quad n \leq -1.$$

D'après le théorème de F. et M. Riesz on en déduit que  $\lambda$  est absolument continue et que  $\Phi' \in H^1(D)$ .

La réciproque est beaucoup plus facile : si  $\Phi' \in H^1(D)$  alors il est facile de voir que  $\Phi$  se prolonge continûment à  $\bar{D}$  et



$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \leq \int_0^{2\pi} |\Phi'(e^{i\theta})| d\theta = \|\Phi'\|_1.$$

Si maintenant  $\Omega$  est un domaine simplement connexe de la sphère de Riemann contenant  $\infty$  et  $\Phi$  une transformation conforme de  $\Delta = \mathbb{C} \setminus \bar{D}$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ , on démontre alors de façon totalement similaire le

THEOREME 1bis.  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty \iff \Phi'(\frac{1}{z}) \in H^1(D)$ .

2. EXAMINONS A PRESENT CE QUI SE PASSE SI  $\partial\Omega$  N'EST PAS BORNE.

DEFINITION 1. Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe du plan tel que  $\infty \in \partial\Omega$ . Soit  $a \in \Omega$  et  $\Omega'$  le domaine transformé de  $\Omega$  par l'inversion  $z \mapsto 1/z-a$ . On dira que  $\Omega$  est rectifiable à l'infini si  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega') < +\infty$ . [On voit facilement que cette propriété est indépendante du point  $a$  choisi].

Exemple. Examinons les valeurs de  $\alpha > 0$  pour lesquelles le domaine  $\Omega_\alpha = \{x+iy ; y > \sin(|x|^\alpha)\}$  est rectifiable à l'infini.

Posons  $\Gamma_n = \{x+iy \in \Gamma : 2^n \leq x < 2^{n+1}\}$ . Alors  $\Gamma_n$  rencontre l'axe des  $x$  de l'ordre de  $2^{n\alpha}$  fois, ce qui prouve que  $\mathcal{H}^1(\Gamma_n) \sim 2^{n\alpha} + 2^n$ . D'autre part, on voit facilement que  $\Gamma = \partial\Omega_\alpha$  est rectifiable à l'infini si et seulement si

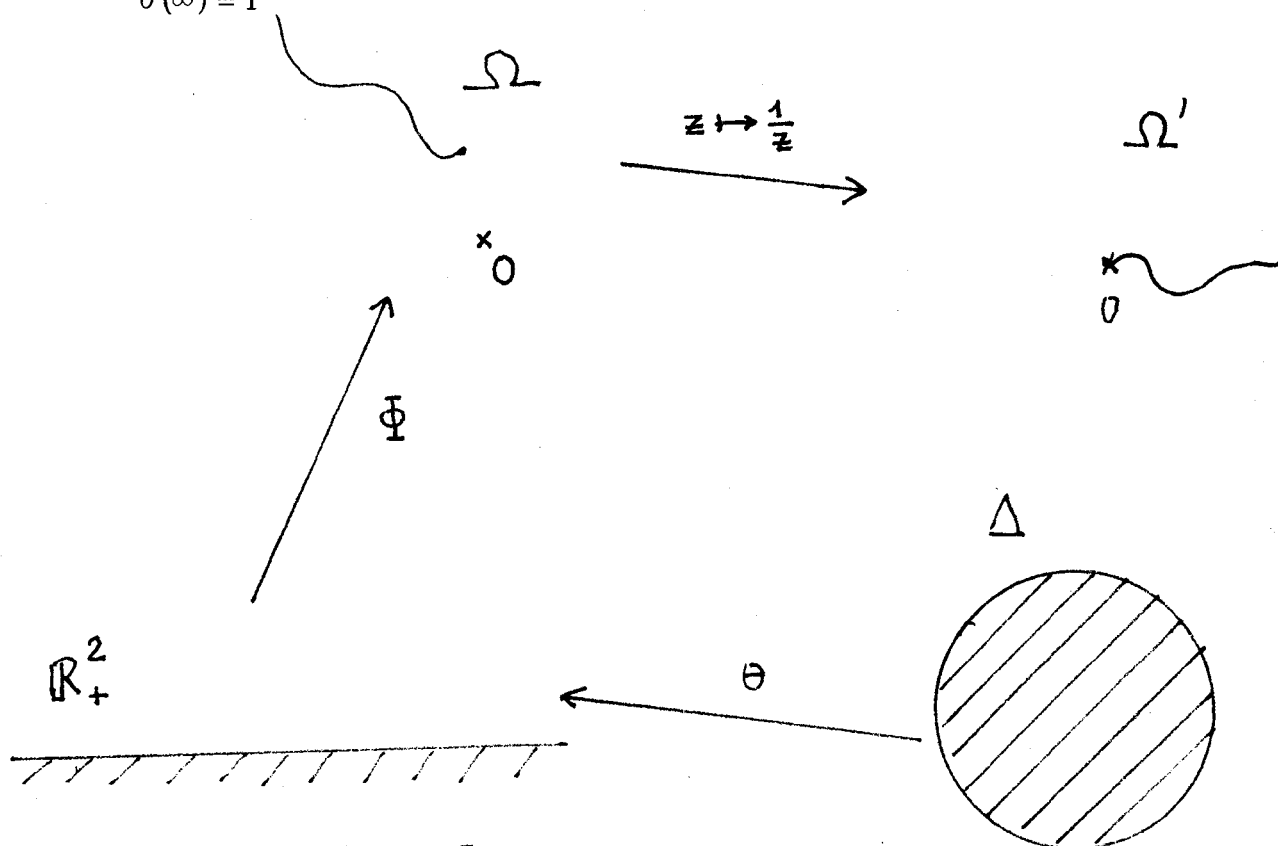
$$\sum_{n \geq 0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma_n)}{4^n} < +\infty.$$

On en déduit que  $\Omega_\alpha$  est rectifiable à l'infini si et seulement si  $\alpha < 2$ .

La proposition suivante caractérise les domaines rectifiables à l'infini en terme de transformation conforme.

PROPOSITION 1. Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe du plan contenant 0 tel que  $\infty \in \partial\Omega$ . Si  $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega$  désigne une représentation conforme telle que  $\Phi(i) = 0$ , alors  $\Omega$  est rectifiable à l'infini si et seulement si  $\Phi' \in \mathcal{N}^+(\mathbb{R}_+^2)$  et  $|\Phi'| / |\Phi|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ .

Démonstration. Appelons  $\Omega'$  le domaine transformé de  $\Omega$  par l'inversion  $z \mapsto 1/z$  et  $\theta(z) = -i \frac{1+z}{1-z}$  la représentation conforme de  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\theta(\infty) = i$



Alors  $z \rightarrow [\Phi(\theta(z))]^{-1}$  est une représentation conforme de  $\Delta$  sur  $\Omega'$ .

Comme  $\Omega$  est rectifiable à l'infini, on en déduit, grâce au théorème 1 bis, que

$$\Lambda(z) = \frac{-\theta'(1/z)\Phi'(\theta(1/2))}{\Phi(\theta(1/z))^2} \in H^1(D).$$

Mais alors,

$$\Phi'(z) = \frac{2i}{(z-i)^2} \Phi(z)^2 \Lambda\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Par le théorème II.4,  $\log\left(\frac{\Phi(z)}{z-i}\right) \in \text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$ , et donc  $\left(\frac{\Phi(z)}{z-i}\right)^2 \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$  (c'est même une fonction extérieure). D'autre part, d'après l'invariance conforme de la classe  $N^+$ , et puisque  $\Lambda \in H^1(D)$ , la fonction  $z \mapsto \Lambda\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$  et par conséquent il en est de même de  $\Phi'(z)$ . Le fait que  $\frac{\Phi}{|\Phi|^2} \in L^1(\mathbb{R})$  provient immédiatement, par un changement de variable, du fait que  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega') < +\infty$ . Réciproquement, supposons que  $\Phi' \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\Phi'/|\Phi|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, avec les mêmes notations que plus haut,  $\tilde{\Phi}(z) = [\Phi(\theta(z))]^{-1}$ , qui est la représentation conforme de  $\Delta$  sur  $\Omega'$  est telle que  $\Phi'(1/z) \in H^1(D)$ . Par la réciproque du théorème 1 bis,  $\Omega'$  est alors rectifiable, ce qui prouve  $\Omega$  rectifiable à l'infini.

Dans toute la suite nous désignerons par domaine rectifiable tout domaine dont le bord est rectifiable si borné, et rectifiable à l'infini si non borné.

### 3. DOMAINES REGULIERS

La notion que nous allons introduire maintenant est en quelque sorte une quantification de la notion de domaine rectifiable à l'infini.

DEFINITION 2. Un domaine simplement connexe de  $\hat{\mathbb{C}}$  est dit régulier s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout disque  $D(z_0, r)$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap \bar{D}(z_0, r)) \leq Cr.$$

La proposition suivante, due à Y. Meyer (non publiée), caractérise les domaines réguliers et prouve en particulier que tout domaine régulier est rectifiable et que la

classe des domaines réguliers est invariante par transformation de Möbius.

PROPOSITION 2. Si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe propre de  $\mathbb{C}$ , sont alors équivalents :

- (1)  $\Omega$  est un domaine régulier,  
 (2)  $\exists C > 0$  tel que  $\forall z_0 \notin \partial\Omega$ ,

$$\int_{\partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \leq C \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)^{-1},$$

- (3)  $\exists C > 0$  tel que  $\forall z_0 \notin \partial\Omega$   $\mathcal{H}^1(\partial\Omega_{z_0}) \leq C \operatorname{diam}(\partial\Omega_{z_0})$

où  $\Omega_{z_0}$  désigne le transformé de  $\Omega$  par l'inversion  $z \mapsto (z-z_0)^{-1}$ .

Démonstration

(1)  $\Rightarrow$  (2). Posons  $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$  et, pour  $n \geq 0$ ,

$$E_n = \left\{ z \in \partial\Omega \ ; \ 2^n d_0 \leq |z-z_0| < 2^{n+1} d_0 \right\}.$$

Alors  $\int_{\partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) = \sum_{n \geq 0} \int_{E_n} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z)$ , et,

$$\forall n \geq 0 \quad \int_{E_n} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \leq C \frac{2^{n+1} d_0}{4^n d_0^2} = \frac{2C}{2^n d_0},$$

d'où le résultat en sommant.

(3)  $\Rightarrow$  (2). Grâce à un changement de variable, on voit immédiatement que

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_{z_0}) = \int_{\partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z).$$

D'autre part, il est clair que  $\Omega_{z_0} \subset D\left(0, \frac{1}{\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)}\right)$ , ce qui prouve (3)  $\Rightarrow$  (2).

(2)  $\Rightarrow$  (1). C'est la partie difficile de cette proposition.

Remarquons tout d'abord que pour tester si une courbe est régulière on peut évidemment remplacer les disques par des carrés qui soient de plus centrés sur la courbe, et dont le côté ne dépasse pas  $\frac{\operatorname{diam}(\partial\Omega)}{10}$ .

Soit donc  $\mathcal{C}$  un tel carré. Quitte à renormaliser on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est de côté 1 et qu'il est centré en 0. Posons  $M = \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap \mathcal{C})$ . Pour tout  $z_0 \in \mathcal{C}$ , on peut écrire

$$\int_{\partial\Omega \cap \mathcal{C}} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \geq \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{C}} d\mathcal{H}^1(z) = \frac{M}{2}.$$

Mais, par (2), on a également

$$\int_{\partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \leq C(d(z_0, \partial\Omega))^{-1}.$$

On a donc :

$$(4) \quad \forall z_0 \in \mathcal{C}, \quad d(z_0, \partial\Omega) \leq \frac{2C}{M}.$$

Posons alors  $n = E(\frac{M}{2C})$ , et découpons  $\mathcal{C}$  en  $n^2$  carrés de côté  $\frac{1}{n}$ , que nous appelons  $\mathcal{C}_j$ . Appelons également  $\tilde{\mathcal{C}}_j$  les carrés de même centre que  $\mathcal{C}_j$  mais de côté triple. Par (4), on voit que tous les  $\mathcal{C}_j$  rencontrent  $\partial\Omega$ ; comme  $\text{diam } \mathcal{C} \leq 10^{-1} \text{diam } \partial\Omega$ , il est clair que  $\partial\Omega \cap (\mathcal{C} \setminus \tilde{\mathcal{C}}_j) \neq \emptyset$  et par conséquent

$$(5) \quad \forall j, \quad \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap \tilde{\mathcal{C}}_j) \geq \frac{1}{n}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) &\geq \frac{1}{9} \sum_j \int_{\tilde{\mathcal{C}}_j \cap \partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \\ &\geq \frac{1}{9} \sum_{j \in J} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_j \cap \partial\Omega} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z), \end{aligned}$$

où  $J = \{j ; z_0 \notin \tilde{\mathcal{C}}_j\}$ .

Si  $z, z' \in \tilde{\mathcal{C}}_j$ ,  $j \in J$ , alors  $2 > \left| \frac{z-z_0}{z'-z_0} \right| \geq \frac{1}{2}$ ; on en déduit très facilement que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_j} |z-z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) &\geq \frac{1}{16} \frac{\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{C}}_j \cap \partial\Omega)}{9/n^2} \iint_{\tilde{\mathcal{C}}_j} |z-z_0|^{-2} dx dy \\ &\geq \frac{1}{2} 10^{-2} n \iint_{\tilde{\mathcal{C}}_j} |z-z_0|^{-2} dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \sum_{j \in J} \iint_{\tilde{c}_j} |z - z_0|^{-2} dx dy \geq \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{10}{n} \leq r \leq 1}} r^{-2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \log \frac{n}{10}.$$

Finalement, avec (2), on en déduit :

$$(6) \quad \forall z_0 \in \mathcal{C}, \quad d(z_0, \partial\Omega) \leq \frac{200 C}{n \log \frac{n}{10}},$$

ce qui est une amélioration de (4). En posant alors  $n' = E\left(\frac{n \log \frac{n}{10}}{200 C}\right)$ , on découpe, comme plus haut,  $\mathcal{C}$  en  $n'^2$  carrés de côté  $\frac{1}{n'}$ , et l'on s'aperçoit que chacun de ces carrés rencontre  $\partial\Omega$  et donc que  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap \mathcal{C}) \geq \frac{n'}{10}$ . De toute cette étude on déduit que  $M \leq 20 C e^{2000 C^2}$ , où  $C$  est la constante intervenant dans (2).

(2)  $\Rightarrow$  (3). Comme on l'a déjà vu, par (2),

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_{z_0}) = \int_{\partial\Omega} |z - z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) \leq \frac{C}{\text{dist}(z_0, \partial\Omega)}.$$

Supposons tout d'abord qu'il existe  $z \in \partial\Omega$  tel que  $|z - z_0| \geq 2 \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ .

Alors  $\text{diam}(\partial\Omega_{z_0}) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(z_0, \partial\Omega)^{-1}$  et (3) suit. Si maintenant

$$(7) \quad \forall z \in \partial\Omega \quad \text{dist}(z_0, \partial\Omega) \leq |z - z_0| < 2 \text{dist}(z_0, \partial\Omega),$$

alors on voit facilement que

$$(8) \quad \frac{1}{4} \frac{\text{diam } \partial\Omega}{\text{dist}(z_0, \partial\Omega)^2} \leq \text{diam } \partial\Omega_{z_0} \leq \frac{\text{diam } \partial\Omega}{\text{dist}(z_0, \partial\Omega)^2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |z - z_0|^{-2} d\mathcal{H}^1(z) &\leq \text{dist}(z_0, \partial\Omega)^{-2} \mathcal{H}^1(\partial\Omega) \\ &\leq C \frac{\text{diam } \partial\Omega}{\text{dist}(z_0, \partial\Omega)^2} \end{aligned}$$

(car (1) est vérifié, si (2) l'est),

$$\leq 4C \text{diam}(\partial\Omega_{z_0})$$

par (8). La proposition 2 est entièrement démontrée.

Avant d'étudier la représentation conforme des domaines réguliers, donnons quelques exemples de tels domaines.

Soit  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne, c'est-à-dire telle que

$$\exists C > 0 ; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\lambda(x) - \lambda(y)| \leq C |x - y|.$$

Alors on vérifie que le domaine  $\Omega = \{(x, y) ; y > \lambda(x)\}$  est régulier.

Plus généralement définissons un domaine de Lavrentiev comme étant un domaine de Jordan tel que

$$\exists C > 0 ; \forall z_1, z_2 \in \partial\Omega, \quad \inf(\mathcal{H}^1(\gamma_1), \mathcal{H}^1(\gamma_2)) \leq C |z_1 - z_2|,$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  désignent les deux sous-arcs de  $\partial\Omega$  joignant  $z_1$  et  $z_2$ .

Il est immédiat de vérifier que tout domaine de Lavrentiev est régulier.

Dans la suite nous étudierons plus en détail ces domaines.

L'intérieur de la parabole ( $\Omega = \{(x, y) ; y > x^2\}$ ) est un exemple de domaine régulier de Jordan qui n'est pas un domaine de Lavrentiev.

Enfin, c'est un corollaire immédiat de l'exemple donné au début du paragraphe 2 que le domaine  $\Omega = \{(x, y) ; y > \sin(|x|^{3/2})\}$  est un domaine de Jordan rectifiable à l'infini qui n'est pas régulier.

Pour conclure cette série d'exemples, donnons-en un qui soit moins trivial, et que nous intitulerons le "flocon de neige".

Construction du flocon de neige : Soit  $\Gamma_0$  l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour tout nombre dyadique de  $\Gamma_0$ , soit  $k2^{-n}$ , avec  $k$  impair et  $n \geq 2$ , "ajoutons" à  $\Gamma_0$  le segment vertical  $[\frac{k}{2}2^{-n} - \frac{i}{2}4^{-n}, \frac{k}{2}2^{-n} + \frac{i}{2}4^{-n}]$ . On obtient de la sorte une "courbe"  $\Gamma_1$  tel que  $\mathcal{H}^1(\Gamma_1) = 1 + \sum_{n \geq 2} 2^{n-1}4^{-n} = 1 + \frac{1}{4}$ .

Pour construire  $\Gamma_2$  nous faisons subir à chaque segment vertical de  $\Gamma_1$  la même opération que  $\Gamma_0$  mais "à l'échelle". La courbe  $\Gamma_2$  obtenue est alors telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Gamma_2) &= \left(1 + \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 2} 2^{n-1} 4^{-n} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

On répète alors le processus à chaque segment horizontal de  $\Gamma_2$  non inclus dans  $\Gamma_0$  et ainsi de suite on construit une suite croissante de courbes  $\Gamma_n$  telles que

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_n) = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On pose alors  $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ .  $\Gamma$  est alors un arc rectifiable de longueur

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

Nous nous proposons de montrer que  $\mathbb{C} \setminus \tilde{\Gamma}$  est un domaine régulier de  $\hat{\mathbb{C}}$ , où  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \left\{i\Gamma + \frac{1}{2}(1-i)\right\}$  est le "flocon de neige".

Pour tout point dyadique  $x$  de  $\Gamma_0$  appelons arbre de la première génération la partie de  $\Gamma$  issue de  $x$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  (ou  $\mathbb{R}_-^2$ ). On définit de même les arbres de la  $k$ -ième génération de façon évidente. Pour un arbre de la première génération dont le "tronc" est le segment  $[x, x+i\ell]$ , nous définissons son enveloppe comme étant  $\bigcup_{n \geq 1} Q_n$  où  $Q_n$  est le carré centré en  $x + i \frac{\ell}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$  et de côté  $\frac{\ell}{2^{n+1}}$ . On définit de même l'enveloppe d'un arbre de la  $k$ -ième génération.

LEMME 1. Deux arbres distincts de la première génération ont des enveloppes disjointes.

Preuve. Soient  $\frac{k}{2^n}$  et  $\frac{\ell}{2^p}$  les "bases de ces deux arbres". Supposons  $n \geq p$  ( $k$  et  $\ell$  étant impairs). Alors  $\left|k 2^{-n} - \ell 2^{-p}\right| \geq 2^{-n}$ .

D'autre part l'enveloppe de l'arbre issu de  $k 2^{-n}$  est incluse dans le rectangle

$$\left[ k 2^{-n} - \frac{1}{8} 4^{-n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{8} 4^{-n} \right] \times \left[ 0, \frac{1}{2} 4^{-n} \right],$$

et la partie de l'enveloppe de l'arbre issu de  $\frac{\ell}{2^p}$  située en dessous de la droite



$y = \frac{1}{2} 4^{-n}$  est incluse dans

$$\left[ \ell 2^{-p} - 4^{-n-1}, \ell 2^{-p} + 4^{-n-1} \right] \times \left[ 0, \frac{1}{2} 4^{-n} \right].$$

Or ces deux rectangles sont disjoints car (en supposant par exemple  $\ell 2^{-p} > k 2^{-n}$ )

$$\ell 2^{-p} - 4^{-n-1} - (k 2^{-n} + \frac{1}{8} 4^{-n}) \geq 2^{-n} - \frac{3}{8} 4^{-n} \geq \frac{1}{2} 4^{-n}.$$

LEMME 2. Soit  $A$  un arbre et  $B$  un arbre dont le tronc est basé sur le tronc de  $A$ . Alors l'enveloppe de  $B$  est incluse dans l'enveloppe de  $A$ .

Preuve. Quitte à changer de repère, on se ramène au cas où le tronc de  $A$  est l'intervalle  $\left[ 0, \frac{1}{2} 4^{-\lambda} \right]$ , où  $\lambda$  est un entier  $\geq 2$ . Il suffit alors d'étudier le cas où  $B$  est basé au point  $\frac{1}{2} 2^{-t} 4^{-\lambda}$  où  $t$  désigne un entier  $\geq 1$  (si  $B$  est basé au point  $\frac{q}{2} 2^{-t} 4^{-\lambda}$  avec  $q$  impair  $> 1$  le cas est en effet plus favorable). L'enveloppe de  $B$  est alors incluse dans le rectangle

$$R_1 = \left[ \frac{1}{2} 2^{-t} 4^{-\lambda} - \frac{1}{8} 4^{-t} 4^{-\lambda-1}, \frac{1}{2} 2^{-t} 4^{-\lambda} + \frac{1}{8} 4^{-t} 4^{-\lambda-1} \right] \times \left[ 0, \frac{1}{2} 4^{-t-\lambda-1} \right]$$

et l'enveloppe de  $A$  contient le rectangle

$$R_2 = \left[ 2^{-t-2} 4^{-\lambda}, \frac{1}{2} 4^{-\lambda} \right] \times \left[ 0, 4^{-\lambda-1} 2^{-t-1} \right].$$

On vérifie facilement que  $R_1 \subset R_2$  et le lemme en découle.

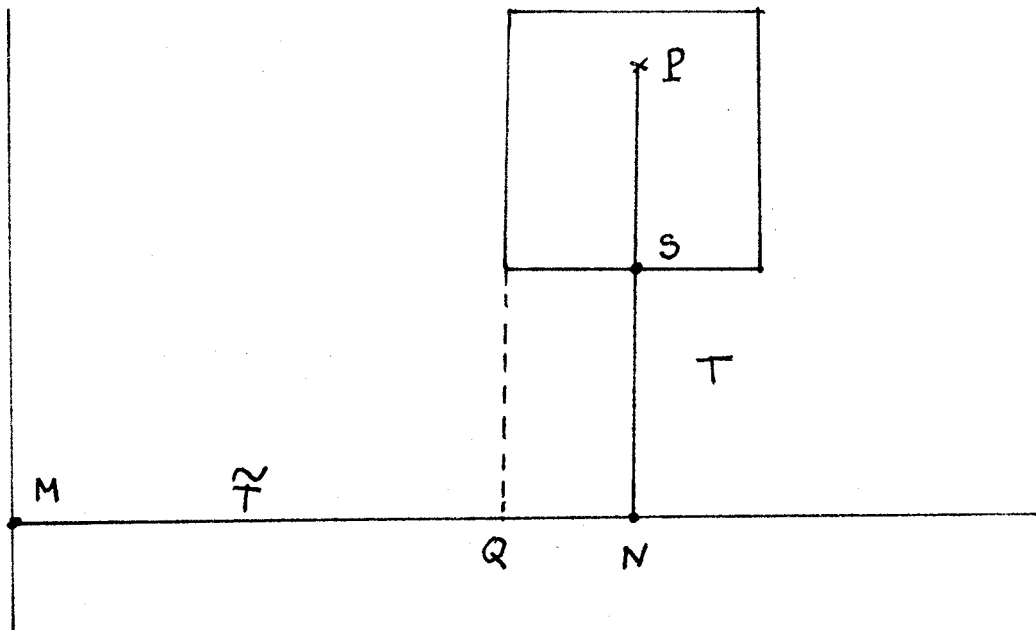
Grâce aux lemmes 1 et 2 on peut déjà conclure que  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  est un domaine simplement connexe de la sphère de Riemann et l'on voit facilement qu'il en est de même de  $\mathbb{C} \setminus \tilde{\Gamma}$  (car  $\Gamma \cap \left\{ i\Gamma + \frac{1}{2}(1-i) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ). Reste donc à montrer que  $\Gamma$  est une courbe régulière. Soit donc  $\mathcal{C}$  un carré de  $\mathbb{C}$ . Il s'agit de montrer  $\mathcal{H}'(\Gamma \cap \mathcal{C}) \leq k \ell(\mathcal{C})$  où  $\ell(\mathcal{C})$  est le côté de  $\mathcal{C}$ . On se ramène facilement au cas où  $R = \ell(\mathcal{C}) \leq \frac{1}{2}$  et où le centre de  $\mathcal{C}$  est à l'intersection de deux troncs.

Soit alors  $z_0$  le centre de  $\mathcal{C}$  : à  $z_0$  on peut associer une suite de troncs de longueurs croissantes telle que chaque tronc soit une branche du tronc suivant.

Comme  $R \leq \frac{1}{2}$ , il existera un premier tronc  $T$  qui sortira de  $\mathcal{C}$ . Comme la branche de tout arbre est de longueur  $\leq 1/16$ ème de la longueur du tronc on aura

$$|T| + \frac{|T|}{16} + \frac{|T|}{16^2} + \dots \geq \frac{R}{2},$$

d'où  $R \leq \frac{32}{15} |T|$ . Soit  $\tilde{T}$  le tronc dont  $T$  est une branche et  $A$  l'arbre dont  $\tilde{T}$  est le tronc.



LEMME 3.  $\mathcal{C}$  est inclus dans l'enveloppe de  $A$ .

Comme précédemment, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où  $MN = 2^{-t} |\tilde{T}|$  ( $t \geq 1$ ). Mais alors  $|T| = 4^{-t-1} |\tilde{T}|$  et  $MQ = MN - QN \geq |\tilde{T}| 2^{-t} - \frac{32}{15} 4^{-t} |\tilde{T}| \geq 2^{-t-1} |\tilde{T}|$ . Comme dans le lemme 2 il suffit alors de montrer que  $2^{-t-1} |\tilde{T}| \geq 4^{-t-1} |\tilde{T}| + \frac{32}{15} 4^{-t-1} |\tilde{T}| = \frac{57}{15} 4^{-t-1} |\tilde{T}|$  ce qui est vrai.

On en déduit donc que  $I_n \mathcal{C} = I_n A \cap \mathcal{C}$ .

Soit  $S$  le point d'intersection de  $T$  avec  $\partial \mathcal{C}$  le plus proche de  $N$  et  $n$  l'entier tel que  $2^{-n+1} |T| \geq NS \geq 2^{-n} |T|$ . On envisage alors deux cas :

1)  $R < 2^{-n} |T|$  : Dans ce cas  $\mathcal{C}$  est en fait inclus dans l'enveloppe de l'arbre dont  $T$  est le tronc et  $I_n \mathcal{C} = B \cap \mathcal{C}$ .

2)  $R > |T|2^{-n}$  : Dans ce cas le carré  $\tilde{c}$  de même centre que  $c$  mais de côté  $10R$  rencontre  $\tilde{T}$ .

Finalement, pour démontrer que  $\Gamma$  est régulière, il suffit de démontrer le

LEMME 4. Soit  $I$  un intervalle  $\subset [0, 1]$  et  $c = I \times [0, |I|]$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap c) \leq C |I|$ .

Preuve.  $\Gamma \cap c$  est inclus dans la réunion des arbres de la première génération dont l'enveloppe rencontre  $c$ . Parmi tous ces arbres sous distinguons :

1) Ceux dont la longueur du tronc est  $\geq |I|$ . Ce sont ceux qui sont issus des  $p2^{-k}$  ( $p$  impair) tels que  $\frac{1}{2} 4^{-k} \geq |I| \Leftrightarrow k \leq n_0 = E \left[ \frac{1}{2} \log \frac{1}{2|I|} \right]$  (log en base 2).

Il y en a tout au plus  $2^{n_0} |I| + 3$ . Considérons l'un d'eux et appelons  $T$  son tronc. Soit  $n$  l'entier tel que  $2^{-n-1} |T| < |I| \leq \frac{|T|}{2^n}$ . Calculons la longueur de la partie de l'arbre située en dessous de  $|T|2^{-n}$ . Comme la longueur d'un arbre est plus petite que dix fois celle de son tronc on aura, pour un tel arbre,

$$\ell \leq \frac{|T|}{2^n} + 10 \sum_{k \geq 0} \frac{2^k |T|}{2 \cdot 4^{n+k}} \leq C \frac{|T|}{2^n} \leq 2C |I|.$$

La longueur de  $c \cap \Gamma$  correspondant à ces arcs est donc majorée par

$$2C \left[ 2^{n_0} |I| + 3 \right] |I| \leq 6C |I| + 2C 2^{n_0} |I|^2.$$

Mais  $2^{n_0} \leq |I|^{-1/2}$  et donc  $2^{n_0} |I|^2 \leq C |I|^{3/2} \leq C |I|$ .

2) Ceux dont la longueur des troncs est  $\leq |I|$ . Pour  $k \geq n_0 + 1$  il y en a au plus  $2^k |I| + 3$  de longueur  $\frac{1}{2} 4^{-k}$  et la longueur correspondante est donc majorée par

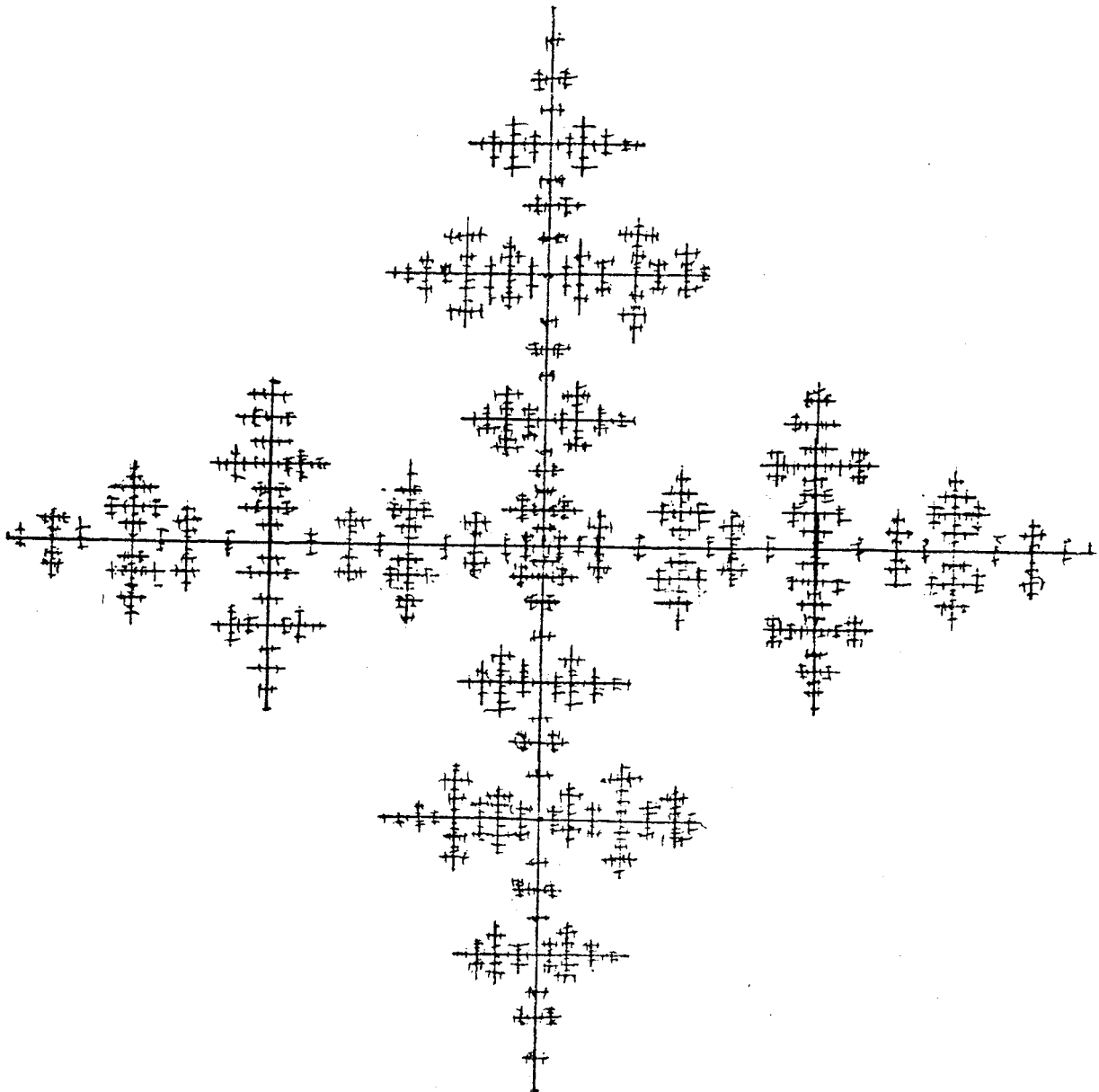
$$10 \sum_{k \geq n_0 + 1} \frac{2^k |I| + 3}{4^k} \leq 10 |I| + \frac{30}{4^{n_0}} \leq 100 |I|,$$

et le lemme 4 est démontré.

Notons que cette construction peut être adaptée et fournir un exemple de domaine de Jordan régulier tel qu'aucun sous-arc de  $\partial\Omega$  ne soit de Lavrentiev.

Disons simplement qu'au lieu de rajouter des segments verticaux à  $\Gamma_0$  on rajoute des triangles très pointus (dans  $\mathbb{R}_+^2$  et symétriquement dans  $\mathbb{R}_-^2$ ) ; on recommence à chaque génération en prenant soin de rendre les triangles de plus en plus pointus.

Voici un dessin approximatif de flocon de neige.



#### 4. LA REPRESENTATION CONFORME DES DOMAINES REGULIERS

Nous avons vu au chapitre II que si  $\Phi$  est une fonction holomorphe et univalente dans  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  ou  $D$ , alors  $\log \Phi'$  appartient à la classe de Bloch  $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ . Ce résultat est le meilleur possible car, d'après le théorème de Nehari cité avant le théorème II.11, réciproquement, si  $\Phi$  est telle que  $\|\log \Phi'\|_{\mathcal{B}(\mathcal{U})} \leq \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0$  est une certaine (petite) constante absolue, alors  $\Phi$  est univalente dans

Dans ce paragraphe, nous montrons que si  $\Phi(\mathcal{U})$  est un domaine régulier, alors  $\log \Phi' \in \text{BMOA}(\mathcal{U})$ ; nous caractérisons également les domaines tels que  $\Phi'$  appartienne à  $A^\infty A(\mathcal{U})$ .

**THEOREME 2.** Soit  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  ou  $D$  et  $\Phi$  une fonction holomorphe et univalente dans  $\mathcal{U}$ . Si  $\Phi(\mathcal{U})$  est un domaine régulier, alors  $(\Phi')^t \in A^\infty A(\mathcal{U})$  si  $0 \leq t < \frac{1}{3}$ . En particulier,  $\log \Phi' \in \text{BMOA}(\mathcal{U})$ .

Démonstration. D'après le théorème I.7, pour démontrer le théorème 2 il suffit de démontrer les propriétés (1) et (2) suivantes :

- (1)  $\Phi' \in \mathcal{N}^+(\mathcal{U})$ ,
- (2) Si  $0 \leq t < \frac{1}{3}$ ,  $\exists C_t > 0$  t. q. ;  $\forall I \subset \partial \mathcal{U}$ ,

$$\int_I |\Phi'(z)|^t |dz| \leq C_t |I| |\Phi'(z_I)|^t.$$

Montrons d'abord (1). D'après le théorème III.1 et la proposition III.1, cette propriété est certainement vérifiée si  $\mathcal{U} = D$  et  $\Phi(D)$  borné ou si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ , et  $\Phi(\infty) = \infty$ .

Supposons alors  $\mathcal{U} = D$  et  $\Phi$  non bornée. Soit alors  $\psi$  la représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Phi(D)$  telle que  $\psi(\infty) = \infty$ . D'après ce qui vient d'être vu,  $\psi' \in \mathcal{N}^+(\mathbb{R}_+^2)$ , et  $\Phi' = \psi' \circ \tau \tau'$  où  $\tau$  est une représentation conforme de  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ , ce qui prouve que  $\Phi' \in \mathcal{N}^+(D)$ .

Les autres cas se traitent de façon similaire ( $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ ,  $\Phi$  bornée ;

$\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ ,  $\Phi$  non bornée mais  $\Phi(\infty) \neq \infty$ .

Fixons un intervalle  $I$  de  $\partial\mathcal{U}$  et posons  $\zeta = z_I$ . Pour démontrer (2), considérons un réel  $\alpha > 0$  qui sera fixé ultérieurement et écrivons, grâce à l'inégalité de Hölder, pour  $0 \leq t < \frac{1}{3}$ ,

$$\begin{aligned} \int_I |\Phi'(z)|^t |dz| &= \int_I \frac{|\Phi'(z)|^t}{|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^\alpha} |\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^\alpha |dz| \\ &\leq \left[ \int_I \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^{\alpha/t}} |dz| \right]^t \left[ \int_I |\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^{\frac{\alpha}{1-t}} |dz| \right]^{1-t} \\ &= A^t B^{1-t}. \end{aligned}$$

Fixons à présent  $\alpha > 0$  de sorte que  $\frac{\alpha}{t} > 1$  et  $\frac{\alpha}{1-t} < \frac{1}{2}$ , ce qui est possible car  $\frac{\alpha}{t} > 1 \iff 2t < 2\alpha$ , et  $\frac{\alpha}{1-t} < \frac{1}{2} \iff 2\alpha < 1-t$  et  $2t < 1-t$  par hypothèse.

Majorons alors  $A$  grâce au théorème de Denjoy [16] déjà cité, et à ([19] p. 245),

$$\int_I \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^{\alpha/t}} |dz| \leq 2 \int_{\partial\Phi(\mathcal{U})} \frac{d\mathcal{H}^1(z)}{|z - \Phi(\zeta)|^{\alpha/t}}.$$

Par un argument déjà utilisé, on pose, pour  $n \geq 0$ ,

$$E_n = \{z \in \partial\Phi(\mathcal{U}) ; d2^n \leq |z - \Phi(\zeta)| < 2^{n+1}d\},$$

où  $d = \text{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Phi(\mathcal{U}))$ . Puisque  $\Phi(\mathcal{U})$  est régulier, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Phi(\mathcal{U})} \frac{d\mathcal{H}^1(z)}{|z - \Phi(\zeta)|^{\alpha/t}} &= \sum_{n \geq 0} \int_{E_n} \frac{d\mathcal{H}^1(z)}{|z - \Phi(\zeta)|^{\alpha/t}} \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{2C 2^{nd}}{2^{n\alpha/t} d^{\alpha/t}} \\ &\leq \frac{2C}{1-2^{-\alpha/t}} d^{1-\alpha/t}, \end{aligned}$$

où  $C$  désigne la constante de la condition de régularité. Pour majorer  $B$  considérons  $\tau : D \rightarrow \mathcal{U}$ , une transformation de Möbius telle que  $\tau(0) = \zeta$ . Plus précisément :

$$- \text{ Si } \mathcal{U} = D, \quad \tau(z) = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{z + |\zeta|}{1 + |\zeta|z},$$

$$- \text{ Si } \mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2, \quad \tau(z) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}z}{1 - z}.$$

Alors  $\tau'(z) = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{1 - |\zeta|^2}{(1 + |\zeta|z)^2}$  ( $\mathcal{U} = D$ ) et  $\tau'(z) = \frac{2i \operatorname{Im} \zeta}{(1-z)^2}$  ( $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ ). On en

déduit que  $|\tau'(0)| \leq 2 \operatorname{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U})$ . D'autre part  $\tau$  induit un difféomorphisme de  $\partial D$  sur lui-même si  $\mathcal{U} = D$  et un difféomorphisme de  $\partial D \setminus \{1\}$  sur  $\mathbb{R}$  si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ . Dans le cas où  $\mathcal{U} = D$  on a :

$$\tau(z) \in I \implies \left| \tau(z) - \frac{\zeta}{|\zeta|} \right| \leq 3(1 - |\zeta|),$$

et cette dernière condition équivaut à

$$\left| \frac{z-1}{1+|\zeta|z} \right| \leq 3 \implies |1+|\zeta|z| \geq \frac{|\zeta|+1}{|\zeta|+3} \geq \frac{1}{4}.$$

On en déduit dans ce cas que

$$\tau(z) \in I \implies |\tau'(z)| \leq 32(1 - |\zeta|).$$

Dans le cas où  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  on vérifie immédiatement que  $\tau^{-1}(I(z))$  est l'intervalle de  $\partial D$  ne contenant pas 1 d'extrémités  $-i$  et  $i$ . On en déduit

$$\tau(z) \in I \implies |\tau'(z)| \leq 2 \operatorname{Im} \zeta.$$

Dans tous les cas posons

$$\forall z \in D \quad f(z) = (\Phi(\tau(z)) - \Phi(\zeta)) [\tau'(0) \Phi'(\zeta)]^{-1}.$$

Alors  $f$  appartient à la classe  $S$  et, d'après ce qui vient d'être vu,

$$B \leq |\tau'(0) \Phi'(\zeta)|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_{\tau^{-1}(I)} |f(z)|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |\tau'(z)| dz$$

$$\leq C_t (\text{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U}) |\Phi'(\zeta)|)^{\frac{\alpha}{1-t}} \text{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U}) \int_{\partial D} |f(z)|^{\frac{\alpha}{1-t}} |dz|$$

où  $C_t$  ne dépend que de  $t$ . On utilise alors le théorème de Prawitz (théorème II.2) grâce auquel on peut affirmer que, puisque  $\frac{\alpha}{1-t} < \frac{1}{2}$ ,

$$\int_{\partial D} |f(z)|^{\frac{\alpha}{1-t}} |dz| \leq C(t),$$

où  $C(t)$  ne dépend que de  $t$ . En réunissant alors les majorations obtenues pour  $A$  et  $B$ , on obtient, si l'on se souvient que

$$\frac{1}{4} \text{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U}) |\Phi'(\zeta), \partial \Phi(\mathcal{U})| \leq 2 \text{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U}) |\Phi'(\zeta)|,$$

(corollaire II.2), et que  $\text{dist}(\zeta, \partial \mathcal{U}) \leq |I|$ ,

$$\int_I |\Phi'(z)|^t |dz| \leq C(t) C^t |I| |\Phi'(\zeta)|^t,$$

où  $C$  est la constante de régularité et  $C(t)$  une constante ne dépendant que de  $t$ .

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

### Remarques

1. Ce théorème n'admet pas de réciproque. Considérons en effet le domaine

$$\Omega = \{x+iy ; y > \sin(|x|^{3/2})\}.$$

$\Omega$  est, on l'a déjà vu, un domaine rectifiable à l'infini, et si  $\Phi$  désigne une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ , alors  $\text{Re } \Phi' > 0$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  (ceci découle du principe du maximum). On en déduit que  $\Phi'$  est extérieure (proposition I.3)). Par le théorème de Helson-Szegö ([25], [21]) on en déduit que  $(\Phi')^t \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  pour tout  $t < 1$ ;  $\Omega$  n'est pourtant pas régulier.

2. La constante  $\frac{1}{3}$  du théorème 2 est la meilleure possible comme le montre l'exemple de la fonction de Koebe



$$\kappa(z) = \frac{z}{(1-z)^2} ;$$

l'image de  $\kappa$ , le plan moins l'intervalle  $[\frac{1}{4}, +\infty[$  est bien un domaine régulier, mais

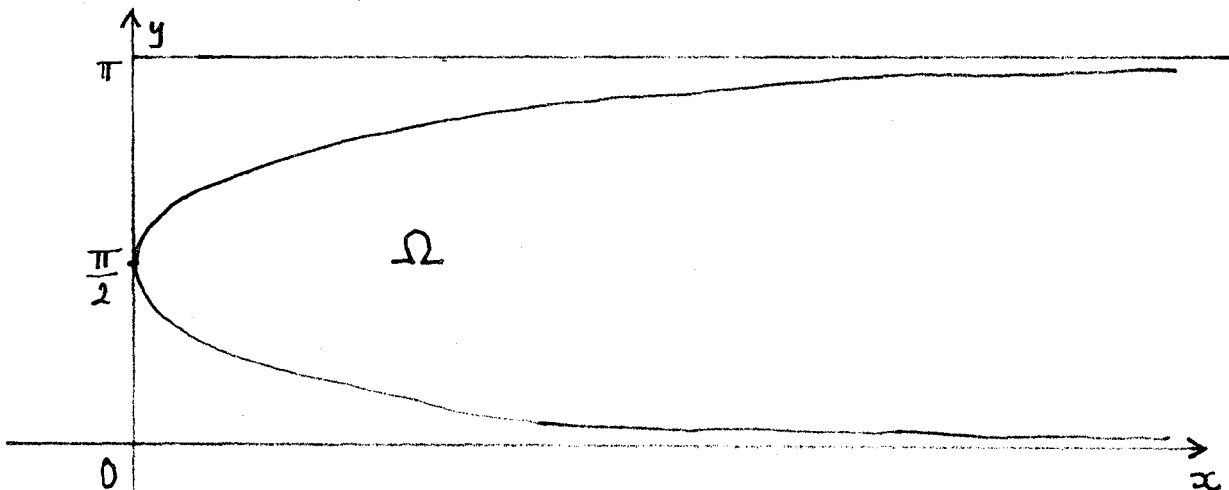
$$\kappa'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3} \notin H^p(D) \text{ si } p \geq \frac{1}{3}.$$

Par contre, si  $\kappa(z) = z^2 + \frac{1}{4}$  désigne la représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $K(D)$  vérifiant  $K(\infty) = \infty$ , on constate que  $(\kappa')^t \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

Il est donc naturel de se poser la question suivante :

Si  $\mathcal{U} = D$  et  $\Phi(\mathcal{U})$  est borné régulier, ou si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  et  $\Phi(\mathcal{U})$  régulier avec  $\Phi(\infty) = \infty$ , quelle est la meilleure constante ?

Il est plausible (surtout au vu du paragraphe suivant) que l'on ait  $\Phi'^t \in A^\infty A(\mathcal{U})$  pour tout  $t < 1$ . Par contre on n'a pas nécessairement  $\Phi' \in A^\infty A(\mathcal{U})$  comme le montre l'exemple suivant :  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  et  $\Phi(z) = \text{Log}(z+i)$  ; alors  $\Phi(\infty) = \infty$  et  $\Omega = \Phi(\mathbb{R}_+^2)$  a l'allure suivante :



Il est clair que  $\Omega$  est un domaine régulier. Pourtant  $|\Phi'(x)| = (x^2+1)^{-1/2}$  n'appartient pas à  $A^\infty(\mathbb{R})$ . En effet, si  $\omega \in A^\infty(\mathbb{R})$ , alors  $\omega^{1+\varepsilon} \in A^\infty(\mathbb{R})$  si  $\varepsilon$  est assez petit. Mais  $|\Phi'|^{1+\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui est incompatible avec le fait d'appartenir à  $A^\infty$  (voir [21]). En revanche,  $|\Phi'|^t \in A^\infty(\mathbb{R})$  pour tout  $0 < t < 1$ .

Quels sont donc les domaines tels que  $\Phi' \in A^\infty A(\mathcal{U})$  ?

En fait il apparaît que ceux-ci peuvent être caractérisés de façon très simple ;

cette caractérisation fait l'objet du théorème suivant.

Afin d'éviter les redites, nous appellerons désormais domaine de Carathéodory tout domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$  tel que  $\partial\Omega$  soit localement connexe dans la sphère de Riemann. D'après un célèbre théorème de Carathéodory, si  $\Phi$  désigne une représentation conforme de  $\mathcal{U}$  sur  $\Omega$ , alors  $\Omega$  est un domaine de Carathéodory si et seulement si  $\Phi$  se prolonge en une fonction continue sur  $\hat{\mathcal{U}}$ , l'adhérence de  $\mathcal{U}$  dans la sphère de Riemann [on consultera par exemple [35] pour une démonstration du théorème de Carathéodory].

Si  $\Omega$  est un domaine de Carathéodory, nous dirons de plus que  $\Phi$  est adaptée si  $\mathcal{U} = D$  lorsque  $\Omega$  est borné et si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$  et  $\Phi(\infty) = \infty$  lorsque  $\Omega$  est non borné.

Avec ces notations, énonçons le

THEOREME 3. Soit  $\Omega$  un domaine de Carathéodory et  $\Phi$  une représentation conforme adaptée à  $\Omega$ . Sont alors équivalents :

- (3)  $\Phi' \in C^\infty A(\mathcal{U})$ ,
- (4)  $\Omega$  est régulier et  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -localement connexe pour un réel  $k \geq 1$ .

Démonstration. Supposons tout d'abord (3) vérifié.

LEMME 5. Soit  $I$  un intervalle de  $\partial\mathcal{U}$ , alors :

$$(5) \quad \mathcal{H}^1(\Phi(I)) \leq \int_I |\Phi'(z)| |dz| \leq 2 \mathcal{H}^1(\Phi(I)).$$

Preuve du lemme 5. C'est un corollaire de la preuve du théorème III.1 que

$$\mathcal{H}^1(\Phi(I)) \leq V_I(\Phi) \leq 2 \mathcal{H}^1(\Phi(I)),$$

où  $V_I(\Phi)$  désigne la variation totale de  $\Phi$  sur  $I$ . Démontrer le lemme 5 revient donc à démontrer que  $\Phi$  est absolument continue sur  $I$ . Ceci est vrai, et a déjà été vu, si  $\mathcal{U} = D$ , car alors  $\Phi' \in CH^1(D)$  sous l'hypothèse (3). Si maintenant

$\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ , appelons  $\hat{I}$  le triangle de "base"  $I$  et de "sommet"  $z_I$ , et  $\theta$  une représentation conforme de  $D$  sur  $\hat{I}$ . Pour terminer la preuve du lemme 5, il suffit alors de montrer que  $\Phi' \circ \theta \theta' \in H^1(D)$ ; comme  $\Phi' \in N^+(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\theta' \in H^1(D)$ ,  $\Phi' \circ \theta \theta' \in N^+(D)$ . Il suffit donc de vérifier que  $\Phi' \circ \theta \theta' \in L^1(\partial D)$  ou encore, puisque  $\Phi' \in L^1(I)$ , que  $\Phi' \in L^1(\gamma)$  où  $\gamma = \partial \hat{I} \cap \mathbb{R}_+^2$ .

Pour établir ce dernier résultat, considérons  $z \in \gamma$ . Puisque  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ , on a déjà vu (voir la preuve du théorème I.7) qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(6) \quad |\Phi'(z)| \leq \frac{C}{2y} \int_{x-y}^{x+y} |\Phi'(t)| dt \quad (z = x+iy).$$

Posons alors  $\Lambda(t) = |\Phi'(t)| \chi_{\tilde{I}}(t)$ , où  $\tilde{I}$  désigne l'intervalle de même centre que  $I$  mais de longueur triple. De (6) on déduit alors

$$\forall z \in \gamma, \quad |\Phi'(z)| \leq C M\Lambda(\operatorname{Re} z),$$

où  $M\Lambda$  désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de  $\Lambda$ . Comme  $|\Phi'(t)| \in A^\infty(\mathbb{R})$ , il existe  $p > 1$  tel que  $\Lambda \in L^p(\mathbb{R})$ . Mais alors  $M\Lambda \in L^p(\mathbb{R})$  et donc

$$\int_\gamma |\Phi'(z)| |dz| \leq 2C \int_I M\Lambda(x) dx < +\infty.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 5.

Pour  $0 < \varepsilon < 1$ , posons alors

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad \Phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \Phi((1-\varepsilon)z) & \text{si } \mathcal{U} = D \\ \Phi(z+i\varepsilon) & \text{si } \mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2, \end{cases}$$

$$\text{et } \forall x \in \partial \mathcal{U}, \quad \varphi^*(x) = \sup_{0 < \varepsilon < 1} |\Phi_\varepsilon'(x)|.$$

LEMME 6. Si (3) est vérifié, alors  $\varphi^*$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $\{|\Phi_\varepsilon'|; 0 < \varepsilon < 1\}$  est une partie bornée de  $A^\infty(\mathcal{U})$  (c'est-à-dire que les normes  $\|\log \Phi_\varepsilon'\|_{\mathcal{B}(\mathcal{U})}$  sont bornées, ainsi que les constantes  $C_\varepsilon$  de (6) du théorème I.7).

Preuve du lemme 6. Supposons pour simplifier que  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ . Le fait que  $\varphi^* \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  découle d'un raisonnement tout-à-fait analogue à celui fait au lemme 5. Pour démontrer la deuxième partie du lemme, remarquons tout d'abord que puisque  $\Phi_\varepsilon$  est univalente,

$$(7) \quad \left\| \log \Phi'_\varepsilon \right\|_{\beta(\mathbb{R}_+^2)} \leq 4.$$

Soit d'autre part  $I = [x_0 - y_0, x_0 + y_0]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On a déjà vu qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \Phi'_\varepsilon(x) \right| \leq \frac{C}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\Phi'(t)| dt.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_I |\Phi'_\varepsilon(t)| dt &\leq C \int_I \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |\Phi'(x)| dx \right\} dt \\ &\leq C \int_{x_0 - y_0 - \varepsilon}^{x_0 + y_0 + \varepsilon} |\Phi'(x)| dx \\ &\leq C(y_0 + \varepsilon) \left| \Phi'_\varepsilon(x_0 + iy_0) \right|, \end{aligned}$$

par (3). On en déduit immédiatement que

$$\int_I |\Phi'_\varepsilon(t)| dt \leq C |I| \left| \Phi'_\varepsilon(z_I) \right| \quad \text{si} \quad \varepsilon < 10 |I|.$$

Si maintenant  $\varepsilon \geq 10 |I|$ , alors, on montre facilement avec (7) que

$$\exists C > 0 ; \quad \forall x \in I, \quad \left| \Phi'_\varepsilon(x) \right| \leq C \left| \Phi'_\varepsilon(x_0 + iy_0) \right|,$$

et le résultat s'en déduit immédiatement.

Passons à la démonstration de (3)  $\Rightarrow$  (4). Par le lemme 6, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < 1$  et pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , (on suppose toujours  $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^2$ ),

$$(8) \quad \int_I \left| \Phi'_\varepsilon(z) \right| |dz| \leq C |I| \left| \Phi'_\varepsilon(z_I) \right|.$$

Comme  $\int_I |\Phi'_\varepsilon(z)| |dz| \geq \text{diam } \Phi_\varepsilon(I)$ , on en déduit, grâce au théorème II.8, qu'il existe  $k \geq 1$  tel que  $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon$  est  $k$ -l.c. pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , où l'on a posé  $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\mathbb{R}_+^2)$ . Soit alors  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  et  $z_1, z_2 \in (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \bar{D}(z_0, r)$ . Puisque  $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon$  est  $k$ -l.c., on peut considérer  $K_\varepsilon$ , la composante connexe de  $(\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \bar{D}(z_0, kr)$  contenant  $(\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \bar{D}(z_0, r)$ . Les  $K_\varepsilon$  forment une suite décroissante de compacts connexes. Leur intersection, soit  $K$ , est alors connexe et l'on a

$$(\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \bar{D}(z_0, r) \subset K \subset (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \bar{D}(z_0, kr),$$

ce qui prouve que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c.

Prouvons maintenant que  $\Omega$  est régulier. Là encore, montrons d'abord que  $\Omega_\varepsilon$  est régulier si  $0 < \varepsilon < 1$ . Soit donc  $D = D(z_0, r)$  un disque et  $\tilde{D} = D(z_0, 2r)$ . Puisque  $\Omega$  et donc  $\Omega_\varepsilon$  est un domaine de Carathéodory il n'y a d'un nombre fini  $N$  de composantes de  $\partial\Omega_\varepsilon \cap \tilde{D}$  qui rencontrent  $D$ . Par (8) et le fait (théorème II.6) que  $|I| |\Phi'_\varepsilon(z_I)| \leq C \text{diam } \Phi_\varepsilon(I)$ , chacune de ces composantes connexes est de longueur  $\leq Cr$ . Pour prouver le résultat, il suffit donc de montrer que  $N$  est majoré indépendamment de  $D$ .

LEMME 7. Pour tout  $z \in \partial\Omega_\varepsilon$  et tout  $r > 0$ , il existe  $\lambda(z) \in \Omega_\varepsilon$  et une courbe de Jordan  $\gamma$  joignant  $z$  et  $\lambda(z)$  dans  $\bar{\Omega}_\varepsilon$  tels que

$$\text{dist}(\lambda(z), \partial\Omega_\varepsilon) \geq \alpha r,$$

$$\mathcal{H}^1(\gamma) \leq \beta r,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes ne dépendant pas de  $r, z, \varepsilon$ .

Preuve du lemme 7. Soit  $\mathcal{J}(z)$  l'intervalle de  $\partial\Omega_\varepsilon$  de centre  $z$  et de longueur  $r$ , et  $I$  l'intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $\Phi_\varepsilon(I) = \mathcal{J}(z)$ . Posons alors  $\lambda(z) = \Phi_\varepsilon(z_I)$ . Alors, par (3),

$$\text{dist}(\lambda(z), \partial\Omega_\varepsilon) \sim |\Gamma| |\Phi'_\varepsilon(z_\Gamma)| \sim r ;$$

d'autre part, d'après le théorème II.5, il existe  $\gamma'$ , une courbe de Jordan joignant  $\lambda(z)$  à  $\mathcal{J}(z)$  de longueur  $\leq C \text{dist}(\lambda(z), \partial\Omega_\varepsilon)$ . On complète alors  $\gamma'$  par un bout de  $\mathcal{J}(z)$  pour rejoindre  $z$  et le lemme est démontré.

Considérons alors  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ , les composantes connexes de  $\partial D_\varepsilon \cap (\tilde{D} \setminus \bar{D})$  dont les extrémités appartiennent à  $\partial \tilde{D}$  et  $\partial D$  respectivement. Il est clair que  $M \geq N$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, M\}$ , considérons  $z_j \in \gamma_j$  tel que  $|z_j - z_0| = 3r/2$ . D'après le lemme 7 on peut trouver pour toute un point  $\zeta_j \in \Omega_\varepsilon$  et une courbe de Jordan  $\delta_j$  joignant  $z_j$  et  $\zeta_j$  dans  $\bar{\Omega}_\varepsilon$  tels que

$$\mathcal{H}^1(\delta_j) \leq \frac{r}{10} \quad \text{et} \quad \text{dist}(\zeta_j, \partial\Omega_\varepsilon) \geq \alpha'r$$

où  $\alpha'$  est une constante absolue  $\leq 10^{-1}$ . Soient  $C_j$  les composantes de  $(\tilde{D} \setminus \bar{D}) \setminus (\cup_{j=1}^M \gamma_j)$ . Vu les propriétés de  $\zeta_j$ , le disque  $D_j = D(\zeta_j, \alpha'/2r)$  est soit inclus dans  $C_j$ , soit dans  $C_{j-1}$ . En particulier les disques  $D_{2k+1}$ ,  $k \in \{0, \dots, E(\frac{M}{3})\}$  sont deux à deux disjoints et tous inclus dans  $\tilde{D} \setminus \bar{D}$ . On en déduit

$$\frac{M}{3} \pi \alpha'^2 r^2 \leq 3\pi r^2 \Rightarrow N \leq M \leq 9\alpha'^{-2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour terminer, il reste à passer à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Remarquons que

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_\varepsilon \cap D) = \int_{\mathbf{R}} |\Phi'_\varepsilon(x)| 1_{\{t; \Phi_\varepsilon(t) \in D\}}(x) dx \leq Cr.$$

Les lemmes 5 et 6 plus le théorème de convergence dominée nous permettent alors de conclure

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D) &\leq \int_{\mathbf{R}} |\Phi'(x)| 1_{\{t; \Phi(t) \in D\}}(x) dx \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^1(\partial\Omega_\varepsilon \cap D) \leq Cr, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\Omega$  est régulier.

Montrons à présent que (4)  $\Rightarrow$  (3).

Comme  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. et  $\Omega$  est un domaine de Carathéodory, le théorème II.8 nous apprend l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$(9) \quad \forall I \subset \mathbb{R}, \quad \text{diam } \Phi(I) \leq C |I| |\Phi'(z_I)|.$$

D'autre part, comme  $\Omega$  est régulier,

$$(10) \quad \exists C > 0, \quad \forall I \subset \mathbb{R}, \quad \int_I |\Phi'(x)| dx \leq C \text{diam } \Phi(I).$$

En combinant alors (9), (10) et le théorème I.7, on en déduit que  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ , car  $\Phi' \in \mathcal{N}^+(\mathbb{R}_+^2)$  par la proposition III.1.

Si l'on étudie plus attentivement les constantes apparaissant dans la démonstration, on constate que si  $\Phi' \in A^\infty(\mathcal{U})$  avec une constante  $K(\Phi)$ , alors  $\Omega$  est régulier de constante de régularité  $CK(\Phi)^3$  et  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $CK(\Phi)$ -l.c.

Réciproquement, si  $\Omega$  est régulier avec constante  $C(\Omega)$ , et si  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c., alors  $\Phi' \in A^\infty(\mathcal{U})$  avec constante  $CkC(\Omega)$ .

Pour illustrer ce théorème, reprenons l'exemple déjà considéré :  $\Omega = \Phi(\mathbb{R}_+^2)$ , où  $\Phi(z) = \text{Log}(z+i)$ . Il est clair que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  n'est pas  $k$ -l.c., ce qui confirme que  $\Phi' \notin A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ . Par contre  $\Omega$  est convexe, donc 1-l.c., ce qui prouve que  $\psi$ , la représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  telle que  $\psi(\infty) = \infty$ , vérifie  $\psi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .

Avant de clore ce paragraphe, donnons quelques applications des résultats précédents.

Rappelons qu'une courbe de Jordan  $\Gamma$  de la sphère de Riemann est appelée courbe de Lavrentiev si l'on a :

$$\exists C > 0 ; \quad \forall z_1, z_2 \in \Gamma, \quad \inf(\mathcal{H}^1(\gamma_1), \mathcal{H}^1(\gamma_2)) \leq C |z_1 - z_2|,$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  désignent les deux sous-arcs de  $\Gamma$  joignant  $z_1$  et  $z_2$ . Un domaine de Jordan est appelé domaine de Lavrentiev si son bord est une courbe de Lavrentiev.

Une remarque évidente, mais fondamentale dans ce qui va suivre, est que  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev si et seulement si  $\Omega$  est à la fois régulier et quasi conforme.

Comme corollaire des résultats précédents, nous pouvons établir la caractérisation suivante des domaines de Lavrentiev qui sera utilisée au chapitre suivant.

THEOREME 4. Si  $\Omega$  est un domaine de Carathéodory et  $\Phi$  une représentation conforme de  $\Omega$  adaptée, alors  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(11) \quad \exists k \geq 1 \text{ tel que } \Omega \text{ est } k\text{-l.c.},$$

$$(12) \quad \Phi' \in A^\infty(\mathcal{U}).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord (11) et (12) vérifiées ; par le théorème III.3,  $\Omega$  est alors un domaine régulier et  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. Par (11) et le théorème II.9, on voit d'autre part que  $\Omega$  est quasiconforme. Grâce à la remarque faite plus haut on en déduit que  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev.

Réciproquement, si  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev, c'est alors en particulier un domaine quasiconforme et (11) est vérifié. D'autre part, c'est un domaine régulier tel que  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. On a alors (12) par le théorème III.3.

Ce théorème, malgré son utilité, ne constitue pas une équivalence "pure" entre propriétés géométriques et propriétés analytiques.

Le théorème suivant pallie à ce défaut, mais fait intervenir la représentation conforme "des deux côtés".

THEOREME 5. Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan passant par l'infini et



$\Phi_1, \Phi_2$  les représentations conformes adaptées de  $\mathbb{R}_+^2$  sur les deux composantes de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Alors  $\Gamma$  est une courbe de Lavrentiev si et seulement si  $\Phi_1'$  et  $\Phi_2' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ .

Démonstration. Par le théorème précédent, si  $\Gamma$  est une courbe de Lavrentiev alors  $\Phi_1'$  et  $\Phi_2' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ . Réciproquement, appelons  $\Omega_j, j = 1, 2$ , les deux composantes de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . D'après le théorème III.3, le fait que  $\Phi_1' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  implique que  $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$  est k-l.c. De même, puisque  $\Phi_2' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ ,  $\bar{\Omega}_1 = \mathbb{C} \setminus \Omega_2$  est k-l.c. Comme  $\Omega_1$  est un domaine de Jordan, le fait que  $\bar{\Omega}_1$  est k-l.c. implique que  $\Omega_1$  l'est (proposition II.6). On en conclut (théorème II.9) que  $\Omega_1$  est un domaine quasi-conforme. Comme d'autre part le théorème III.3 nous assure que  $\Omega_1$  est un domaine régulier, la conclusion suit.

Pour terminer, donnons une dernière conséquence du théorème III.3 qui constitue également une équivalence entre propriétés analytiques et géométriques.

Si  $\gamma : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$  est un arc de Jordan simple avec  $\gamma(\infty) = \infty$ , nous dirons que  $\gamma$  est un segment de Lavrentiev si

$$\exists C > 0 ; \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \quad \mathcal{H}^1(\gamma([t_1, t_2])) \leq C |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|.$$

PROPOSITION 3. Soit  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, \infty])$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ . Alors  $\Phi' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  si et seulement si  $\Gamma = \gamma([0, \infty])$  est un segment de Lavrentiev.

Démonstration. L'énoncé a bien un sens car  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  est un domaine de Carathéodory. Supposons  $\Phi' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ ; par le théorème III.3,  $\Gamma$  est alors une courbe régulière et de plus  $\Gamma$  est k-l.c. Mais ceci implique

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}^1(\gamma([t_1, t_2])) \leq C \text{diam } \gamma([t_1, t_2]) \leq C k |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|,$$

c'est-à-dire que  $\Gamma$  est un segment de Lavrentiev. La réciproque est évidente.

## 5. DOMAINES REGULIERS ET ESPACE UNIVERSEL DE TEICHMÜLLER

Dans cette section, nous mettons à profit les résultats du paragraphe précédent pour établir une théorie parallèle à celle décrite au II.5.

Désignons par  $X$  l'ensemble des couples  $(\Phi, \Omega)$ , où  $\Omega$  est un domaine régulier et  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$ . Soit  $X_0$  le sous-ensemble de  $X$  défini par la condition que  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev.

Puisque, par le théorème III.2,  $\log \Phi' \in \text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  si  $(\Phi, \Omega) \in X$ , nous pouvons définir une première topologie, que nous noterons  $\tilde{\mathcal{C}}$ , sur  $X$ , définie par l'écart suivant :

$$\forall x_1 = (\Phi_1, \Omega_1), \quad x_2 = (\Phi_2, \Omega_2) \in X, \quad \tilde{d}(x_1, x_2) = \left\| \log \Phi_1' - \log \Phi_2' \right\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Observons que  $\tilde{d}(x_1, x_2) = 0$  signifie que  $\Phi_2 = h \circ \Phi_1$  où  $h$  est une similitude affine. La topologie séparée correspondante est donc la topologie de  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  induite sur

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{ \log \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X \}.$$

Une deuxième topologie, soit  $\mathcal{C}$ , peut être introduite sur  $X$  et elle est plus "proche" de la théorie de Teichmüller. Rappelons que si  $\Phi$  est une fonction localement univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ , le Schwarzien de  $\Phi$ , noté  $S_\Phi$ , est la fonction

$$S_\Phi(z) = \delta^2(\log \Phi')(z) - \frac{1}{2}(\delta(\log \Phi')(z))^2,$$

où  $\delta$  désigne l'opérateur  $d/dz$ .

Rappelons également (voir I.3) que  $E_2$  désigne l'espace de Banach des fonctions  $g$  analytiques dans  $\mathbb{R}_+^2$  telles que

$$\|g\|_{E_2} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{|I|} \iint_{\hat{I}} y^3 |g(x+iy)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < +\infty$$

( $\hat{I} = I \times [0, |I|]$ ).

On a alors

PROPOSITION 4. Si  $(\Phi, \Omega) \in X$ , alors  $S_\Phi \in E_2$  et

$$\|S_\Phi\|_{E_2} \leq C \|\log \Phi'\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)},$$

où  $C$  est une constante absolue.

Démonstration. D'après la proposition I.9, il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que

$$\|\delta^2 \log \Phi'\|_{E_2} \leq C \|\log \Phi'\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)}.$$

D'autre part, puisque  $\Phi$  est univalente,

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, \quad y |\delta(\log \Phi')(x+iy)| \leq 4 ;$$

on en déduit immédiatement, en utilisant les résultats du paragraphe I.3, que

$$\|(\delta \log \Phi')^2\|_{E_2} \leq C \|\log \Phi'\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)},$$

où  $C$  est une constante absolue. La proposition 4 en découle.

La topologie  $\mathcal{C}$  est alors définie par l'écart suivant :

$$\forall x_1 = (\Phi_1, \Omega_1), x_2 = (\Phi_2, \Omega_2) \in X, \quad d(x_1, x_2) = \|S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2}\|_{E_2}.$$

Dans ce cas,  $d(x_1, x_2) = 0$  signifie que  $\Phi_2 = k \circ \Phi_1$ , où  $k$  est une transformation de Möbius. La topologie séparée correspondante est la topologie de  $E_2$  induite sur  $\mathcal{D} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X\}$ .

L'objet de la proposition suivante est la comparaison des topologies  $\mathcal{C}$  et  $\tilde{\mathcal{C}}$  que nous venons de définir sur  $X$ .

PROPOSITION 5. Il existe une constante  $C$  absolue telle que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d(x_1, x_2) \leq C \tilde{d}(x_1, x_2).$$

En sens inverse, si  $x_0 = (\Phi_0, \Omega_0) \in X$  et si  $\Phi_0(\infty) = \infty$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  et  $C(\varepsilon, x_0)$  tels que :

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \tilde{d}(x_j, x_0) < \varepsilon \quad (j = 1, 2) \Rightarrow \tilde{d}(x_1, x_2) \leq C d(x_1, x_2).$$

Démonstration. Si  $x_1 = (\Phi_1, \Omega_1)$  et  $x_2 = (\Phi_2, \Omega_2)$ , alors

$$d(x_1, x_2) \leq \|\delta^2(\log \Phi_1' - \log \Phi_2')\|_{E_2} + \frac{1}{2} \|\delta(\log \Phi_1' - \log \Phi_2') \delta(\log \Phi_1' + \log \Phi_2')\|_{E_2}$$

et la première inégalité en découle en reprenant les arguments de la proposition précédente.

L'inégalité en sens inverse s'obtient comme conséquence immédiate du lemme suivant, grâce au théorème III.4.

LEMME 8. Soit  $F \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  ; il existe alors un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\log F$  dans  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  tel que l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : BMOA(\mathbb{R}_+^2) &\longrightarrow E_2 \\ f &\longrightarrow f'' - \frac{1}{2} f'^2 \end{aligned}$$

réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{V}$  sur un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\Lambda(\log F)$ .

Preuve du lemme 8. Rappelons que  $E_1$  désigne l'espace de Banach des fonctions  $g$  holomorphes dans  $\mathbb{R}_+^2$  telles que

$$\|g\|_{E_1} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{|I|} \iint_{\hat{I}} |g(x+iy)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Nous avons vu au chapitre I que l'application  $f \longrightarrow f'$  est un isomorphisme de  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  sur  $E_1$ . Pour prouver le lemme il suffit donc de prouver que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : E_1 &\longrightarrow E_2 \\ f &\longrightarrow f' - \frac{1}{2} f'^2 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme au voisinage de tout point  $f = F'/F$ , où  $F \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ .

Soit donc  $f$  un tel point ; l'application  $\tilde{\Lambda}$  est de classe  $C^1$  sur  $E_1$  et sa différentielle au point  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'(f) : E_1 &\longrightarrow E_2, \\ h &\longrightarrow h' - hf. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'inversion locale, on aura prouvé le lemme 8 si l'on montre que  $\tilde{\Lambda}'(f)$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$ .

$\tilde{\Lambda}'(f)$  est injective. En effet, les seules solutions de l'équation différentielle  $y' - fy = 0$  sont les fonctions  $\lambda F$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Mais, si  $\lambda$  est non nul, ces fonctions n'appartiennent pas à  $E_1$  car, d'après le théorème I.7, le fait que  $F \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  implique

$$\exists c > 0 ; \forall y > 0 \quad y |F(x+iy)| \geq c \int_{x-y}^{x+y} |F(t)| dt$$

et cette dernière intégrale tend vers  $+\infty$  avec  $y$ .

$\tilde{\Lambda}'(f)$  est surjective. Soit en effet  $\varphi \in E_2$ . Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que

$$(1) \quad \forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, \quad |\varphi(x+iy)| \leq \frac{C}{y^2} \quad (\text{voir chap. I}).$$

Mais alors on peut considérer la fonction

$$h(x+iy) = -i F(x+iy) \int_y^{+\infty} \frac{\varphi(x+it)}{F(x+it)} dt,$$

car, par la proposition I.12,  $|F(x+it)| \geq C t^\alpha \int_{x-1}^{1+x} F(x) dx$ , ce qui, avec (1)

prouve la convergence de l'intégrale. Comme d'autre part il est clair que

$\tilde{\Lambda}'(f).h = \varphi$ , reste à montrer  $h \in E_1$ .

LEMME 9. Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, \quad y |h(x+iy)| \leq C.$$

Preuve du lemme 9. Grâce à (1), on voit qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$(2) \quad y |h(x+iy)| \leq C \int_y^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{y |F(x+iy)|}{t |F(x+it)|} dt.$$

Mais, puisque  $F \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ , il existe  $C > 0$  telle que

$$(3) \quad \forall y > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{C} \int_{x-y}^{x+y} |F(t)| dt \leq y |F(x+iy)| \leq C \int_{x-y}^{x+y} |F(t)| dt.$$

De plus, par (2) de la proposition I. 12,

$$(4) \quad \forall t > y > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\int_{x-y}^{x+y} |F(t)| dt}{\int_{x-t}^{x+t} |F(u)| du} \leq C \left(\frac{y}{t}\right)^\alpha,$$

où  $C$  et  $\alpha$  sont des constantes  $> 0$  ne dépendant que de  $F$ . En combinant (2), (3) et (4), il vient

$$y |h(x+iy)| \leq C \int_y^{+\infty} \frac{y^\alpha}{t^{1+\alpha}} dt \leq C.$$

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du lemme 8. Puisque  $h$  vérifie

$$h' - hf = \varphi,$$

$$\forall x+iy \in \mathbb{R}_+^2, \quad y^3 |h'|^2 \leq 2y^3 |\varphi|^2 + 2y^3 |h|^2 |f|^2 \leq 2y^3 |\varphi|^2 + Cy |f|^2,$$

cette dernière inégalité découlant du lemme 9. Comme  $\varphi \in E_2$  et  $f \in E_1$ , on en déduit que  $h' \in E_2$  et donc que  $h \in E_1$  (Proposition I.9).

Nous allons immédiatement exploiter cette dernière proposition afin d'établir un résultat parallèle à la théorie de Teichmüller.

PROPOSITION 6. Posons  $\mathcal{L} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X_0\}$  et  $\tilde{\mathcal{L}} = \{\log \Phi', (\Phi, \Omega) \in X_0\}$ . Alors  $\mathcal{L}$  est un ouvert de  $E_2$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  est un ouvert de  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$ .

Démonstration. Démontrons tout d'abord que  $\mathcal{L}$  est ouvert dans  $E_2$ .

Remarquons que la norme de  $E_2$  est plus fine que celle de  $B$  (voir le théorème II.11 pour la définition de  $B$ ). D'après le théorème II.11, on en déduit que si  $S_\Phi \in \mathcal{L}$ , alors il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que  $\varphi \in E_2$  et  $\|S_\Phi - \varphi\|_{E_2} < \varepsilon_1 \Rightarrow \exists \psi$  univalente ;  $\varphi = S_\psi$  et  $\psi(\mathbb{R}_+^2)$  quasiconforme. D'autre part, quitte à remplacer  $\Phi(z)$  par  $(\Phi(z) - \Phi(\infty))^{-1}$ , ce qui ne change pas le Schwarzien, on peut supposer  $\Phi(\infty) = \infty$ , alors (Th. III.4),  $\Phi' \in CA^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  et donc il existe  $\varepsilon_2 > 0$  tel que

$$\|\log \Phi' - \log f'\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} < \varepsilon_2 \Rightarrow f' \in CA^\infty A(\mathbb{R}_+^2).$$

Grâce au lemme 8, on en déduit qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\varphi \in E_2 \text{ et } \|S_\Phi - \varphi\|_{E_2} < \varepsilon \Rightarrow \exists \psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ univalente telle que}$$

$\varphi = S_\psi$ ,  $\psi(\mathbb{R}_+^2)$  est quasiconforme et  $\psi' \in CA^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$ . Mais, par le théorème III.4, ces dernières conditions impliquent que  $\psi(\mathbb{R}_+^2)$  est un domaine de Lavrentiev,  $\mathcal{L}$  est donc ouvert dans  $E_2$ .

Le fait que  $\tilde{\mathcal{L}}$  est ouvert dans  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  découle directement de ce dernier résultat et de la première inégalité de la proposition III.5.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de ce paragraphe, théorème qui établit l'analogue des théorèmes 12, 13, 14 du chapitre II.

**THEOREME 6.**  $\mathcal{L}$  est l'intérieur de  $\mathcal{D}$  dans  $E_2$  ;  $\tilde{\mathcal{L}}$  est l'intérieur de  $\tilde{\mathcal{D}}$  dans  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$ . De plus il existe  $(\Phi, \Omega) \in X$  tel que  $S_\Phi \in \mathcal{D}$  n'est pas adhérent à  $\mathcal{L}$  et  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{D}}$  n'est pas adhérent à  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Démonstration. Vu la proposition III.6, il suffit de prouver que tout point intérieur de  $\tilde{\mathcal{D}}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) est dans  $\tilde{\mathcal{L}}$  (resp.  $\mathcal{L}$ ), ou encore, vu les propriétés des domaines de Lavrentiev, que tout point intérieur de  $\tilde{\mathcal{D}}$  ou  $\mathcal{D}$  provient d'un domaine quasiconforme.

Soit donc  $S_{\Phi} \in \mathcal{D}$  tel que  $\Omega = \Phi(\mathbb{R}_+^2)$  n'est pas quasi-conforme. En reprenant les arguments du théorème II.12, il existe alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une fonction  $\varphi_{\varepsilon}(z)$  du type

$$\varphi_{\varepsilon}(z) = \left( \frac{z - \omega_1}{z - \omega_2} \right)^c \text{ avec } \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad |c - 1| \leq \varepsilon,$$

telle que  $\varphi_{\varepsilon}$  ne soit pas univalente dans  $\Omega$ . Posons alors  $\Phi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon} \circ \Phi$ .

Alors

$$S_{\Phi_{\varepsilon}} - S_{\Phi} = \frac{1-c^2}{2} \Phi'(z)^2 \left( \frac{1}{\Phi(z) - \omega_1} - \frac{1}{\Phi(z) - \omega_2} \right)^2,$$

d'où l'on tire

$$y^3 |S_{\Phi_{\varepsilon}}(z) - S_{\Phi}(z)|^2 = \frac{(1-c^2)^2}{4} y^3 \left| \frac{d}{dz} \left( \log \frac{\Phi(z) - \omega_1}{\Phi(z) - \omega_2} \right) \right|^4.$$

Mais, par le théorème II.4, il existe une constante  $C$  absolue telle que

$$\left\| \log(\Phi(z) - \omega_j) \right\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C \quad (j = 1, 2),$$

et par conséquent  $\|S_{\Phi_{\varepsilon}} - S_{\Phi}\|_{E_2} \leq C\varepsilon$ .

Comme l'inégalité précédente est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$  et que  $\Phi_{\varepsilon}$  n'est pas univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$ , on en déduit que  $S_{\Phi}$  ne peut être intérieur à  $\mathcal{D}$ .

De la même façon, soit  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{D}}$  tel que  $\Omega = \Phi(\mathbb{R}_+^2)$  ne soit pas quasi-conforme. Alors, par la propriété (13) du théorème II.9, deux cas peuvent se produire :

1)  $\forall k \geq 1, \exists z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  et  $z_1, z_2 \in \bar{D}(z_0, r) \cap \Omega$  ne pouvant être joints dans  $\bar{D}(z_0, kr) \cap \Omega$ .

2)  $\forall k \geq 1, \exists z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  et  $z_1, z_2 \in \Omega \setminus D(z_0, kr)$  ne pouvant être joints dans  $\Omega \setminus D(z_0, r)$ .

Dans le premier cas, une modification facile du lemme II.3 nous montre



$\forall \varepsilon > 0, \exists \omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \exists c \in \mathbb{C}$  tel que  $|1-c| \leq \varepsilon$  t. q.

$\varphi_\varepsilon(z) = (z - \omega_1)^c$  ne soit pas univalente dans  $\Omega$ . Mais alors,

en posant toujours  $\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \Phi$ , il vient

$$\log \Phi'_\varepsilon - \log \Phi' = (c-1) \log(\Phi(z) - \omega_1),$$

et l'on conclut comme plus haut avec le théorème II.4. Dans le deuxième cas, nous utilisons la démonstration du théorème II.14 : pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $z_0 \in \Omega, \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq \varepsilon$  et  $g$  une représentation conforme de  $\Omega$  sur  $D$  telle que  $g(z_0) = 0$  et telle que

$$f_\varepsilon(z) = (z - z_0) \exp \left\{ \alpha \int_{z_0}^z \frac{g(u)}{u - z_0} du \right\}$$

ne soit pas univalente dans  $\Omega$ . Posons encore  $\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \Phi$ . Alors

$$\log \Phi'_\varepsilon - \log \Phi' = \log f'_\varepsilon \circ \Phi, \text{ et}$$

$$f'_\varepsilon(z) = (1 + \alpha g(z)) \exp \left\{ \alpha \int_{z_0}^z \frac{g(u)}{u - z_0} du \right\}.$$

L'application  $k(z) = g \circ \Phi(z)$  est une transformation de Möbius de la forme

$$k(z) = e^{i\theta} \frac{z - u_0}{z - \bar{u}_0} \text{ où } z_0 = \Phi(u_0) \text{ et l'on a, pour } \varepsilon < \frac{1}{2},$$

$$\log f'_\varepsilon \circ \Phi = \log(1 + \alpha k(z)) + \alpha \int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0} du.$$

Puisque  $\|k\|_\infty = 1$ , il est immédiat qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\log(1 + \alpha k(z))\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C \varepsilon.$$

D'autre part, en posant  $F(z) = \int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0} du$ , il vient

$$F'(z) = k(z) \frac{d}{dz} \left( \log \frac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \right) + k'(z).$$

Par le théorème II.4, il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que

$$\left\| \log \frac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \right\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C.$$

En utilisant la caractérisation de BMOA par les mesures de Carleson, on en déduit que

$$\left\| \log \Phi'_\varepsilon - \log \Phi' \right\|_{\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C \varepsilon,$$

et donc que  $\log \Phi'$  ne peut être intérieur à  $\tilde{\mathcal{D}}$ , puisque  $\Phi'_\varepsilon$  n'est pas univalente.

Enfin, mettons à profit le théorème II.13 : soit  $\gamma = \left\{ \pm e^{(-a+i)t}, t \in [0, \infty] \right\}$  où  $a \in ]0, \frac{1}{8}\pi[$ , et  $\gamma'$  le transformé de  $\gamma$  par l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{z-1}$ . Posons  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma'$  et considérons  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ . Comme  $\gamma'$  est une courbe régulière (c'est même un segment de Lavrentiev),  $S_\Phi \in \mathcal{D}$  et  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{D}}$  (on a même  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  par la proposition III.3). Mais Gehring a montré [23] que si  $\psi$  est univalente dans  $\mathbb{R}_+^2$  et que  $\|S_\psi - S_\Phi\|_B < \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0$  est une certaine constante  $> 0$ , alors  $\psi(\mathbb{R}_+^2)$  ne peut être un domaine de Jordan. Comme les normes de  $E_2$  et de  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$  sont plus fines que la norme de  $B$ , on en déduit que  $S_\Phi$  n'est pas adhérent à  $\mathcal{L}$ , et que  $\log \Phi'$  n'est pas adhérent à  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Ceci achève la démonstration du théorème III.6.

Remarque. Contrairement à ce qui se passe pour la théorie de Teichmüller, où  $\mathcal{F}$  est un fermé de  $B$  et  $\tilde{\mathcal{F}}$  un fermé de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ , ici  $\mathcal{D}$  n'est pas un fermé de  $E_2$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  n'est pas un fermé de  $\text{BMOA}(\mathbb{R}_+^2)$ . Considérons en effet le domaine

$$\Omega = \left\{ x+iy \in \mathbb{C} ; y > \sin(|x|^{3/2}) \right\}.$$

On a déjà vu que  $\Omega$  est un domaine rectifiable à l'infini qui n'est pas régulier, et que si  $\Phi$  désigne une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ , alors  $(\Phi')^t \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  pour tout  $t \in ]0, 1[$ .

Mais comme  $\text{Arg } \Phi' < \frac{\pi}{2}$ ,  $(\Phi')^t = \Phi'_t$ , où  $\Phi_t$  est une représentation conforme de  $\mathbf{R}_+^2$  sur un domaine  $\Omega_t$  dont le bord est le graphe d'une fonction lipschitzienne. Donc

$$\forall t < 1 \quad \log \Phi'_t \in \tilde{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \log \Phi'_t \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \log \Phi'.$$

$\log \Phi'$  est donc adhérent à  $\tilde{\mathcal{L}}$  et donc à  $\tilde{\mathcal{D}}$ , ce qui prouve que  $\tilde{\mathcal{D}}$  n'est pas fermé. Par la proposition III.5, il en est de même pour  $\mathcal{D}$ .

### Note du chapitre III

Mis à part le théorème 1 et la proposition 2, les résultats de ce chapitre sont nouveaux et ont été publiés ([42][43][44][45]). Après notre démonstration du théorème 3, nous avons eu connaissance d'une caractérisation antérieure de ces domaines par Pommerenke [37], mais elle ne fait pas le lien avec les courbes régulières.

Mentionnons enfin que les résultats de ce chapitre constituent un matériel brut qui va être interprété au chapitre suivant.

## CHAPITRE IV.- Espaces de Hardy généralisés

### 1. DEFINITIONS. DOMAINES DE SMIRNOV

Nous nous proposons d'élargir à certains domaines rectifiables la notion d'espaces de Hardy du disque ou du demi-plan. Pour simplifier, comme cette théorie a déjà été largement étudiée dans le cas borné (voir [17]), nous nous restreindrons aux domaines dont le bord contient  $\infty$ .

Pour obtenir une théorie cohérente nous fixons  $\Omega$  un domaine de Jordan rectifiable à l'infini. Supposons également que  $0 \notin \bar{\Omega}$ . Soit  $s \rightarrow z(s)$  une paramétrisation par la longueur d'arc de  $\Gamma = \partial\Omega$ . Alors l'hypothèse de rectifiabilité se traduit par :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{ds}{|z(s)|^2} < +\infty.$$

Nous dirons que  $\Omega$  est complètement rectifiable si l'on a la condition plus forte :

$$\forall p > 1 \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{ds}{|z(s)|^p} < +\infty.$$

Nous avons vu au chapitre précédent que les domaines réguliers sont des exemples de domaines complètement rectifiables. Dans toute la suite nous supposons  $\Omega$  complètement rectifiable.

Soit  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbf{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ .

DEFINITION. Pour  $0 < p < \infty$  nous désignerons par  $H^p(\Omega)$  l'espace

des fonctions  $F$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que  $F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ , muni de la norme

$$\|F\|_{H^p(\Omega)} = \left\| F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} \right\|_{H^p(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Comme  $\Omega$  est rectifiable, on a vu au chapitre III que  $\Phi'$  appartient à la classe de Nevanlinna  $N^+(\mathbb{R}_+^2)$ . Vues les propriétés de  $H^p(\mathbb{R}_+^2)$  on en déduit que si  $F \in H^p(\Omega)$  alors en presque tout point du bord  $F$  converge non tangentiellement vers une fonction de  $L^p(\Gamma) = L^p(\Gamma, ds)$  que nous noterons encore  $F$  et qui détermine entièrement la fonction  $F$  (holomorphe) de  $H^p(\Omega)$ . De plus, l'ensemble des traces ainsi obtenues est un sous-espace fermé de  $L^p(\Gamma)$ . Nous pouvons donc voir, et c'est ce que nous ferons dans la suite, l'espace  $H^p(\Omega)$  comme un sous-espace fermé de  $L^p(\Gamma)$ .

La définition précédente, malgré sa simplicité, n'a guère d'utilité, car la transformation conforme reste un objet théorique. C'est pourquoi nous allons maintenant introduire deux autres notions d'espaces de Hardy et étudier les liens qui les unissent.

DEFINITION. Pour  $0 < p < \infty$ , désignons par  $\pi^p(\Omega)$  l'adhérence dans  $L^p(\Gamma)$  de l'ensemble des fractions rationnelles, nulles à l'infini, dont les pôles appartiennent à  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ .

PROPOSITION 1.  $\forall 0 < p < \infty, \pi^p(\Omega) \subset H^p(\Omega)$ .

Démonstration. Soit  $F$  une fraction rationnelle vérifiant les hypothèses de la définition et appartenant à  $L^p(\Gamma)$ . Comme  $H^p(\Omega)$  est un fermé de  $L^p(\Gamma)$ , il suffit de montrer que  $F \in H^p(\Omega)$ . Pour ce faire on observe qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $Np > 1$  et tel que  $F(z) \sim \frac{C}{z^N}$  à l'infini. On écrit alors

$$F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} = F \circ \Phi(\Phi')^N \left( \frac{\Phi'}{\Phi^{Np}} \right)^{1/p}.$$

Mais  $F \circ \Phi(\Phi')^N \in H^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  et, d'après l'hypothèse faite sur  $\Omega$ ,  
 $(\frac{\Phi'}{\Phi^{Np}})^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ .

DEFINITION. Pour  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\mathcal{H}^p(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions  $f \in L^p(\Gamma)$  telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}, \quad \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \zeta} = 0.$$

Notons que cette définition a un sens sous l'hypothèse que  $\Omega$  est complètement rectifiable.

PROPOSITION 2.  $\forall 1 \leq p < +\infty, H^p(\Omega) \subset \mathcal{H}^p(\Omega)$ .

Démonstration. Soit  $F \in H^p(\Omega)$  et  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ ; par le changement de variable  $z = \Phi(x)$ , il vient

$$\int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - \zeta} = \int_{\mathbb{R}} F \circ \Phi(x) (\Phi'(x))^{1/p} \left[ \frac{\Phi'(x)}{(\Phi(x) - \zeta)^q} \right]^{1/q} dx \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Mais  $F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\left( \frac{\Phi'(x)}{(\Phi(x) - \zeta)^q} \right)^{1/q} \in H^q(\mathbb{R}_+^2)$  car  $\Omega$  est complètement rectifiable.

On en déduit que  $\frac{F \circ \Phi \Phi'}{\Phi - \zeta} \in H^1(\mathbb{R}_+^2)$  et donc que  $\int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - \zeta} = 0$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ .

Naturellement, les "bons" domaines seront ceux pour lesquels on a l'égalité dans les propositions 1 et 2. Ces domaines sont caractérisés par le théorème suivant.

THEOREME 1. S'il existe  $p > 0$  tel que  $\pi^p(\Omega) = H^p(\Omega)$  ou s'il existe  $p > 1$  tel que  $H^p(\Omega) = \mathcal{H}^p(\Omega)$ , alors  $\Phi'$  est une fonction extérieure. Réciproquement, si  $\Phi'$  est une fonction extérieure, alors

$$\begin{aligned} \forall p > 0, & \quad \pi^p(\Omega) = H^p(\Omega), \\ \forall p \geq 1, & \quad H^p(\Omega) = \mathcal{H}^p(\Omega). \end{aligned}$$

DEFINITION. Nous appellerons domaine de Smirnov tout domaine  $\Omega$  complètement rectifiable tel que  $\Phi'$  soit une fonction extérieure.

Nous avons montré au chapitre précédent que tout domaine régulier est un domaine de Smirnov. Il existe des domaines rectifiables qui ne sont pas des domaines de Smirnov (voir [17], [18]).

Démonstration du théorème 1. Montrons tout d'abord que pour  $p > 0$ ,  $\pi^p(\Omega) = H^p(\Omega)$  si et seulement si  $\Phi'$  est extérieure. L'ingrédient essentiel pour démontrer cela est le théorème suivant, dû à Beurling [6].

PROPOSITION 3. Soit  $G(z) \in H^p(D)$ . Alors  $\{z^n G(z), n \geq 0\}$  est une partie totale de  $H^p(D)$  si et seulement si  $G$  est une fonction extérieure.

Revenons à présent à la preuve du théorème 1. Désignons par  $\tilde{\Phi}$  une représentation conforme de  $D$  sur  $\Omega$  telle que  $\tilde{\Phi}(1) = \infty$ . Alors  $\Phi'$  est extérieure si et seulement si  $\tilde{\Phi}'$  l'est. Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $Np > 1$ . Supposons tout d'abord que  $\tilde{\Phi}'$  est extérieure ; soit  $f \in H^p(\Omega)$ , alors

$$f \circ \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}')^{1/p} \in H^p(D).$$

Comme  $(\frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}^{Np}})^{1/p}$  est une fonction extérieure  $\in H^p(D)$ , on déduit de la proposition 3 l'existence d'une suite  $P_n$  de polynômes telle que

$$P_n(z) \left( \frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}^{Np}} \right)^{1/p} \longrightarrow f \circ \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}')^N \left( \frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}^{Np}} \right)^{1/p} \quad \text{dans } H^p(D).$$

Mais alors  $P_n(z) = F_n \circ \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}')^N$  où  $z^N F_n(z) = P_n(\tilde{\Phi}^{-1}(z))$  est une fonction holomorphe dans  $\Omega$  et continue dans l'adhérence de  $\Omega$  dans la sphère de

de Riemann. Par le théorème de Mergelyan, il existe donc une suite de fractions rationnelles nulles à l'infini et dont les pôles  $\in \mathbb{C} \setminus \Omega$ , convergeant vers  $z^N F_n$ . Si  $R_n$  est une telle fraction rationnelle avec  $\|z^N F_n - R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ , on montre alors facilement que  $\|f - \frac{R_n}{z^N}\|_{H^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , ce qui prouve que  $\pi^p(\Omega) = H^p(\Omega)$ .

Réciproquement, supposons que  $\pi^p(\Omega) = H^p(\Omega)$ . Soit alors  $g \in H^p(D)$ . Il existe  $f \in H^p(\Omega)$  tel que  $g = f \circ \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}')^{1/p}$ .

De plus, par hypothèse, il existe une suite  $F_n$  de fractions rationnelles appartenant à  $H^p(\Omega)$  telles que  $F_n$  converge vers  $f$  dans  $H^p(\Omega)$ . Mais alors  $F_n \circ \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}')^{1/p}$  converge vers  $g$  dans  $H^p(D)$ . Puisque  $F_n$  est une fraction rationnelle  $\in H^p(\Omega)$ ,  $F_n(z) \sim \frac{C}{z^N}$  où  $N \geq E(\frac{1}{p}) + 1$ ; alors

$$F_n \circ \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^N \left( \frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}^{Np}} \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \text{ dans } H^p(D).$$

Mais l'hypothèse faite prouve que  $F_n \circ \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^N$  se prolonge par continuité sur  $\bar{D}$ . Par une deuxième application du théorème de Mergelyan, on peut donc trouver une suite  $P_n$  de polynômes tels que  $P_n \left( \frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}^{Np}} \right)^{1/p} \longrightarrow g$  dans  $H^p(D)$ . Par la proposition 3 on en déduit que  $\tilde{\Phi}'$  est extérieure.

Fixons à présent  $p > 1$  et montrons que  $H^p(\Omega) = \mathcal{H}^p(\Omega)$  si et seulement si  $\tilde{\Phi}'$  est extérieure. Dans ce but montrons d'abord que  $H^1(\Omega) = \mathcal{H}^1(\Omega)$  et ceci pour tout domaine complètement rectifiable  $\Omega$ . Soit donc  $g \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ . Pour montrer que  $g \in H^1(\Omega)$ , il suffit de montrer que  $G(z) = g \circ \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}' \in H^1(D)$ ; or  $g \in \mathcal{H}^1(\Omega) \implies$

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}, \quad \int_{\partial D} \frac{G(z) dz}{\tilde{\Phi}(z) - \zeta} = 0.$$

Mais cette dernière relation équivaut à

$$(1) \quad \forall n \geq 0 \quad \int_{\partial D} (\tilde{\Phi}(z))^{-n} G(z) dz = 0,$$

comme on le voit en développant la fonction  $\zeta \longrightarrow \int_{\partial D} \frac{G(z) dz}{\tilde{\Phi}(z) - \zeta}$  en série



entière autour de 0.

Soit maintenant  $P$  un polynôme ; la fonction  $P \circ \tilde{\Phi}^{-1}$  est alors continue sur  $\bar{\Omega}$  (dans la sphère de Riemann). D'après le théorème de Mergelyan il existe alors une suite de polynômes  $Q_n$  nuls en 0 tels que  $Q_n(\frac{1}{z})$  converge uniformément vers  $P \circ \tilde{\Phi}^{-1}$  sur  $\bar{\Omega}$ . Mais alors  $Q_n(\frac{1}{\tilde{\Phi}(z)})$  converge uniformément vers  $P$  sur  $\bar{D}$  ; avec (1) on en déduit :

$$\int_{\partial D} P(z) G(z) dz = 0.$$

Comme le polynôme  $P$  est arbitraire, on en déduit, avec le théorème de F. et M. Riesz, que  $G \in H^1(D)$ . CQFD

Supposons alors  $\Phi'$  extérieure et  $F \in \mathcal{H}^p(\Omega)$ . Alors, si  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ ,

$\frac{F(z)}{z-\zeta} \in \mathcal{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ . Mais alors

$$F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} = \frac{F \circ \Phi \Phi'}{\Phi - \zeta} \cdot \left( \frac{\Phi'}{(\Phi - \zeta)^q} \right)^{-1/q} \in N^+(\mathbb{R}_+^2) \cap L^p(\mathbb{R}) = H^p(\mathbb{R}_+^2).$$

Réciproquement supposons  $\Phi'$  non extérieure. Alors  $\Phi' = SG$  où  $S$  est intérieure et  $G$  extérieure. Considérons alors la fonction

$$F(z) = (S \circ \Phi^{-1})^{-1} z^{-2}.$$

Alors  $F \circ \Phi \Phi'^{1/p} = (S(z))^{-1/q} \left( \frac{G}{\Phi^{2p}} \right)^{1/p} \notin H^p(\mathbb{R}_+^2)$  et pourtant

$$F \circ \Phi \Phi' = \frac{G(z)}{\Phi^2(z)} \in H^1(\mathbb{R}_+^2) \implies F \in \mathcal{H}^p(\Omega).$$

## 2. INTEGRALE DE CAUCHY ET DOMAINES REGULIERS

a) Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan complètement rectifiable et  $\Omega_1, \Omega_2$  les deux composantes de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Si  $p > 1$  et si  $f \in L^p(\Gamma)$ , on peut alors définir

deux fonctions holomorphes  $F_1, F_2$  dans  $\Omega_1, \Omega_2$  par :

$$\forall \zeta \in \Omega_j \quad (j = 1, 2), \quad F_j(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - \zeta}.$$

Le "problème de Calderón" est alors le suivant ; si l'on fait tendre  $\zeta \in \Omega_j$  non tangentielllement vers  $z \in \Gamma$ , est-ce que  $F_j(\zeta)$  converge presque partout vers une fonction que nous noterons  $C_j f(z)$  et est-ce que l'opérateur  $C_j$  ainsi défini est borné sur  $L^p(\Gamma)$  ?

Cette question, qui est longtemps restée ouverte, est maintenant complètement résolue. Retraçons brièvement l'histoire de la question sans rentrer dans les détails car les méthodes de démonstration sortent du cadre de ce travail.

En 1977, Calderón [8] répond affirmativement à la question pour les courbes  $\Gamma$  données par le graphe d'une fonction lipschitzienne  $y = \varphi(x)$  où  $\|\varphi'\|_{\infty} \leq \delta$ , où  $\delta > 0$  est une constante inconnue. Sa démonstration implique en particulier que pour toute courbe rectifiable  $\Gamma$  et pour toute fonction  $f \in L^p(\Gamma)$ ,  $C_j f$  existe presque partout au bord.

En 1981, Coifman, MacIntosh et Meyer [11], par des méthodes radicalement différentes, prouvent le résultat pour tous les graphes des fonctions lipschitziennes. Enfin, en 1982, G. David [15] montre que la conjecture est vraie si et seulement si  $\Gamma$  est une courbe régulière !

Comment sont reliées  $C_1 f$  et  $C_2 f$  si  $\Gamma$  est une courbe totalement rectifiable ?

Pour  $f \in L^p(\Gamma)$ , et  $\varepsilon > 0$ , posons

$$\forall z_0 \in \Gamma, \quad T_{\varepsilon} f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{z \in \Gamma \\ |z - z_0| \geq \varepsilon}} \frac{f(z) dz}{z_0 - z}.$$

Le théorème de Calderon prouve alors que pour presque tout  $z_0 \in \Gamma$ ,  $T_{\varepsilon} f(z_0)$  converge lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 vers une fonction que nous noterons  $Tf(z_0)$ ,

et l'on a les formules appelées formules de Plemmejl :

$$C_1 f(z) = \frac{1}{2} f(z) + Tf(z)$$

$$C_2 f(z) = -\frac{1}{2} f(z) + Tf(z) \quad \text{p.p. sur } \Gamma,$$

si  $\Omega_1$  est l'ouvert "à gauche" de  $\Gamma$  pour le sens de parcours de la paramétrisation choisie.

Soit  $\mathcal{R}_1(\Gamma)$  (resp.  $\mathcal{R}_2(\Gamma)$ ) l'espace des fractions rationnelles nulles à l'infini dont les pôles appartiennent à  $\Omega_2$  (resp.  $\Omega_1$ ), et  $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}_1(\Gamma) \cup \mathcal{R}_2(\Gamma)$ .

On a alors, comme corollaire immédiat des formules de Plemmejl, la

PROPOSITION 3. Si  $\Gamma$  est complètement rectifiable,  $\mathcal{R}(\Gamma)$  est dense dans  $L^p(\Gamma)$  pour tout  $p > 1$ .

Preuve. Soit  $q$  l'exposant conjugué de  $p$  et  $g \in L^p(\Gamma)$  une fonction orthogonale à  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Alors

$$\forall \zeta \notin \Gamma, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\bar{g}(z) \bar{z}'(s)}{z(s) - \zeta} dz(s) = 0.$$

$$\Leftrightarrow C_1(\bar{g} \bar{z}') = C_2(\bar{g} \bar{z}') = 0.$$

Par les formules de Plemmejl, on en déduit que  $g \bar{z}'$  et donc  $g$  est nulle presque partout sur  $\Gamma$ . Le théorème de Hahn-Banach implique alors que  $\mathcal{R}(\Gamma)$  est dense dans  $L^p(\Gamma)$ .

Nous sommes maintenant en mesure de donner une version géométrique du problème de Calderón, à la lumière du résultat de G. David.

THEOREME 2. Si  $\Gamma$  est une courbe complètement rectifiable, sont équivalents :

- (1)  $\Gamma$  est une courbe régulière,

(2)  $\forall p > 1$ ,  $L^p(\Gamma)$  est somme directe topologique de  $H^p(\Omega_1)$  et  $H^p(\Omega_2)$ .

De plus, si (1) ou (2) est vérifié, alors  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des domaines de Smirnov et les projections associées à la somme directe sont  $C_1$  et  $C_2$ .

Remarque. Le fait que  $\Omega_j$  est un domaine de Smirnov si c'est un domaine régulier a déjà été montré (théorème III.2). Néanmoins, la démonstration qui suit va l'établir d'une autre manière.

Démonstration du théorème 2.

Supposons tout d'abord (1) vérifié. Alors, par le théorème de G. David,  $T$  est un opérateur borné sur tous les  $L^p(\Gamma)$ ,  $p > 1$  ; il en est donc de même des opérateurs  $C_1$  et  $C_2$  et l'on a, avec les notations du paragraphe précédent :

$$\mathcal{H}^p(\Omega_1) = \text{Ker } C_2 \qquad \mathcal{H}^p(\Omega_2) = \text{Ker } C_1.$$

D'autre part on voit facilement par décomposition en éléments simples que  $C_1 C_2 f = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . Grâce à la proposition 3,  $C_1 C_2$  est donc nul en tant qu'opérateur de  $L^p(\Gamma)$ .

Nous pouvons alors conclure :

$$\forall f \in L^p(\Gamma), \quad f = C_1 f - C_2 f \quad (\text{Plemmejl}).$$

On en déduit que  $L^p(\Gamma)$  est somme de  $\mathcal{H}^p(\Omega_1)$  et de  $\mathcal{H}^p(\Omega_2)$  et cette somme est directe car la même formule prouve que  $\mathcal{H}^p(\Omega_1) \cap \mathcal{H}^p(\Omega_2) = \{0\}$ . Enfin, si  $f \in \mathcal{H}^p(\Omega_1)$  (par exemple) alors  $f$  est limite d'une suite  $f_n$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Mais alors  $f = C_1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} C_1 f_n$ , ce qui prouve que  $\mathcal{H}^p(\Omega_1) = \pi^p(\Omega_1) = H^p(\Omega_1)$  ;  $\Omega_j$  est donc un domaine de Smirnov et  $L^p(\Gamma) = H^p(\Omega_1) + H^p(\Omega_2)$ .

Réciproquement, supposons (2) vérifié, alors, nécessairement,  $\exists C > 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ,  $\|C_j f\|_p \leq C \|f\|_p$ , ce qui prouve que  $C_1$ ,  $C_2$  et donc  $T$  sont bornés sur  $L^p(\Gamma)$  grâce à la proposition 3. Par la caractérisation de G. David,  $\Gamma$  est

alors une courbe régulière.

b) Interprétation "géométrique" du théorème de Guy David

En modifiant légèrement la théorie du paragraphe III.5, appelons  $X'$  l'ensemble des couples  $(\Phi, \Omega)$  tels que  $\Omega$  est un domaine régulier avec  $\infty \in \partial\Omega$  et  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ .  $X'_0$  sera le sous-ensemble de  $X'$  défini par la condition que  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev. Enfin, on pose

$$\tilde{\mathcal{D}}' = \{ \log \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X' \}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}' = \{ \log \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X'_0 \}.$$

Là encore,  $\tilde{\mathcal{L}}'$  est l'intérieur de  $\tilde{\mathcal{D}}'$  dans  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$  mais  $\tilde{\mathcal{D}}'$  n'est pas inclus dans l'adhérence de  $\tilde{\mathcal{L}}'$ .

L'objet du théorème qui suit est de montrer que l'opérateur de Cauchy, lu à l'aide de la paramétrisation par la transformation conforme, est une fonction analytique sur  $\tilde{\mathcal{L}}'$ . Plus précisément, montrons le

THEOREME 3. Si  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{L}}'$ , le noyau

$$K(x, y ; \log \Phi') = \frac{(\Phi'(x))^{1/2} (\Phi'(y))^{1/2}}{\Phi(y) - \Phi(x)}$$

définit un opérateur d'intégrale singulière borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  noté  $T(\log \Phi')$  et l'application

$$\tilde{\mathcal{L}}' \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$$

$$\log \Phi' \longrightarrow T(\log \Phi')$$

est analytique (c'est-à-dire  $\mathbb{C}$ -différentiable).

Preuve. Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , appelons  $T_j(\log \Phi')$  l'opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$  de noyau

$$K_j(x, y ; \log \Phi') = K(x, y ; \log \Phi') \mathbb{1}_{\frac{1}{j} \leq |x-y| \leq j}$$

et montrons tout d'abord que,  $j$  étant fixé, l'application  $\log \Phi' \longrightarrow T_j(\log \Phi')$  est analytique.

Pour ce faire, il suffit de vérifier que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues à support compact (inclus dans  $[-M, M]$ ), l'application

$$\log \Phi' \longrightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} K_j(x, y ; \log \Phi') f(x) g(y) dx dy$$

est analytique. Comme, à  $x$  et  $y$  fixés, l'application

$$\log \Phi' \longrightarrow K_j(x, y ; \log \Phi') f(x) g(y)$$

est évidemment analytique, la conclusion découlera simplement du lemme suivant.

LEMME 1. Si  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{L}}'$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $C > 0$  ( $C(M, j, \log \Phi')$ ) tel que si  $\|\log \psi' - \log \Phi'\|_{\text{BMO}} < \varepsilon$ ,

$$(3) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} |K_j(x, y ; \log \psi)| |f(x)| |g(y)| dx dy \leq C.$$

Preuve du lemme 1. Elle débute par le lemme 2 suivant.

LEMME 2. Si  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{L}}'$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $C > 0$  ne dépendant que de  $\log \Phi'$  tels que si  $\|\log \Phi' - \log \psi'\|_{\text{BMO}} < \varepsilon$ , alors  $\log \psi' \in \tilde{\mathcal{L}}'$  et

$$(i) \quad \forall I \subset \mathbb{R}, \quad \frac{1}{|I|} \int_I |\psi'(t)| dt \leq C \exp\left\{ \frac{1}{|I|} \int_I \log |\psi'(t)| dt \right\}$$

$$(ii) \quad \psi(\mathbb{R}_+^2) \text{ est un domaine de Lavrentiev de constante } \leq C.$$

Preuve du lemme 2. Posons  $b = \log \psi' - \log \Phi'$  et  $\beta = \text{Re } b$ ; soit  $p > 1$  tel que  $|\Phi'|$  vérifie l'inégalité de Hölder inverse à l'ordre  $p$ . Alors, si  $q$  est l'indice conjugué de  $p$ ,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\psi'| \leq C \frac{1}{|I|} \int_I |\Phi'| \left( \frac{1}{|I|} \int_I e^{q\beta} \right)^{1/q},$$

et la propriété découle du fait que  $|\Phi'| \in A^\infty$  et de l'inégalité de John et Nirenberg.

En combinant cette inégalité avec le théorème d'Ahlfors (théorème II.11), on démontre la dernière affirmation du lemme.

Du lemme 2, on tire que si  $I \subset [-M, M]$  et  $|I| \geq \frac{1}{j}$  on a, si  $\log \psi'$  est proche de  $\log \Phi'$ ,

$$(4) \quad \left| \int_I \psi' \right| \geq c \left( \int_I |\Phi'| \right) \exp\left(\frac{1}{|I|} \int_I \beta\right).$$

Mais, si l'on a normalisé  $\beta$  de sorte que  $\int_0^1 \beta(t) dt = 0$ , l'hypothèse  $|I| \geq j^{-1}$  implique

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I \beta \right| \leq C(M, j).$$

Si d'autre part nous désignons par  $\alpha(M, j, \log \Phi')$  le minimum de la fonction  $|\Phi'|$  sur le fermé  $[-M, M] \times \left[\frac{1}{j}, j\right]$ , (4) devient

$$(5) \quad \left| \int_I \psi' \right| \geq c j^{-1} \alpha(M, j, \log \Phi') e^{-C(M, j)} = \delta(M, j, \Phi').$$

Enfin, (5) et une nouvelle application du lemme 2 permettent d'achever la preuve du lemme 1.

Pour terminer la preuve du théorème 3, il nous faut passer à la limite lorsque  $j$  tend vers l'infini. Le lemme 3 suivant permet de démontrer simultanément l'existence de l'opérateur  $T(\log \Phi')$  et l'analyticité.

LEMME 3. Si  $\log \Phi' \in \tilde{\mathcal{L}}'$  et  $f \in L^2$ , posons

$$T^*(\log \Phi') f(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left| T_j(\log \Phi') f(x) \right|.$$

Il existe alors  $\varepsilon > 0$  et  $C > 0$  ne dépendant que de  $\log \Phi'$  tels que

$$\|T^*(\log \psi') f\|_2 \leq C \|f\|_2,$$

si  $\|\log \Phi' - \log \psi'\|_{\text{BMO}} < \varepsilon$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Preuve du lemme 3. Si  $\log \psi' \in \tilde{\mathcal{L}}^1$ , appelons  $s \mapsto z(s)$  une paramétrisation de  $\psi(\mathbb{R})$  par la longueur d'arc. Alors  $\psi$  et  $z$  sont reliés par

$$\psi(x) = z(h(x)), \quad \text{où } h'(x) = |\Phi'(x)| \text{ p. p.}$$

Par le changement de variable  $u = h(y)$ , il vient

$$T_j f(x) = U_1 \tilde{C}_j U_2 f(x)$$

où  $U_1, U_2$  sont deux isométries de  $L^2$  telles que

$$(6) \quad \forall f, g \in L^2, \quad |f| \leq g \implies |Uf| \leq |Ug|,$$

et  $\tilde{C}_j$  est l'opérateur

$$\tilde{C}_j f(x) = \int_{|h^{-1}(y) - h^{-1}(x)| \geq \frac{1}{j}} \frac{f(y) dy}{z(x) - z(y)}.$$

Par le lemme 2, on voit facilement que si  $\log \psi'$  est voisin de  $\log \Phi'$  alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad \frac{1}{C} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq C,$$

où  $C$  ne dépend que de  $\log \Phi'$ .

On en déduit que

$$\sup_{j > 0} |\tilde{C}_j f(x)| \leq c^* f(x) + CMf(x),$$

$$\text{où } c^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(y) dy}{z(x) - z(y)} \right|$$

et  $Mf$  est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de  $f$ . Par le théorème de G. David, le lemme 2 et la théorie de Calderón-Zygmund,

$$\|c^* f\|_2 \leq C \|f\|_2$$

où  $C$  ne dépend que de  $\log \Phi'$ , si  $\log \psi'$  est assez voisin de  $\log \Phi'$ . On conclut alors la démonstration avec (6).



Il est tentant, vu le théorème 2, d'obtenir le théorème de G. David pour les courbes régulières qui ne sont pas de Lavrentiev par une méthode de "valeurs au bord" de fonctions analytiques. Malheureusement le théorème de Gehring (le fait que  $\tilde{\mathcal{L}}'$  ne contient pas  $\tilde{\mathcal{D}}'$ ) nous en enlève tout espoir !

### 3. DOMAINES DE NEUMANN

a) Soit toujours  $\Omega$  un domaine complètement rectifiable. Pour  $p > 1$ , considérons la propriété suivante, qui s'apparente à un problème de Neumann.

$(N_p)$  : L'application  $F \rightarrow \text{Re } F$  est un isomorphisme de  $H^p(\Omega)$  sur  $L^p_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ , l'espace de Banach des fonctions réelles appartenant à  $L^p(\Gamma)$ .

Nous considérons également la propriété

(N) : Il existe  $p > 1$  tel que  $(N_p)$  soit vérifiée.

On a alors le

THEOREME 4. Si  $\Phi$  désigne une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$  et si  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $\Omega$  vérifie (N). Réciproquement si  $\Omega$  vérifie (N) et si  $\partial\Omega \cap \{|z| \geq M\} \subset \mathbb{R}$  pour  $M$  assez grand, alors  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .

Démonstration. Supposons tout d'abord que  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ ; soit  $p > 1$  tel que  $|\Phi'| \in A^p(\mathbb{R})$ . Alors, d'après les résultats de la section I.3.d),

$$F \in H^p(\Omega) \iff F \circ \Phi \in H^p(\mathbb{R}_+^2, |\Phi'|).$$

Mais toujours d'après I.3.d), l'application  $G \rightarrow \text{Re } G$  est un isomorphisme de  $H^p(\mathbb{R}_+^2, |\Phi'|)$  sur  $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, |\Phi'|)$ . On en déduit immédiatement que  $\Omega$  vérifie

$(N_p)$ . Réciproquement, si  $\partial\Omega \cap \{|z| \geq M\} \subset \mathbb{R}$  pour  $M$  assez grand, un argument standard utilisant le principe de symétrie de Schwarz prouve que  $\Phi(z) \sim Cz$  pour  $|z| \rightarrow \infty$ . On en déduit immédiatement que

$$\forall p > 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Phi'(x)|}{1+|x|} dx < +\infty,$$

puis que

$$\forall f \in \mathcal{R}_+, \quad f \circ \Phi^{-1} \in H^p(\Omega).$$

(Ici  $\mathcal{R}_+$  désigne l'ensemble des fractions rationnelles nulles à l'infini dont les pôles appartiennent à  $\mathbb{R}_-$ ). Soit alors  $p > 1$  tel que  $\Omega$  vérifie  $(N_p)$ . Par le théorème de l'application ouverte, il existe  $C > 0$  telle que, si  $H$  désigne la transformée de Hilbert,

$$\|Hg\|_{L^p(\mathbb{R}, |\Phi'|)} \leq C \|g\|_{L^p(\mathbb{R}, |\Phi'|)},$$

$$\forall g \in \text{Re}(\mathcal{R}_+).$$

Comme  $\text{Re}(\mathcal{R}_+)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $H$  est bornée sur  $L^p(\mathbb{R}, |\Phi'|)$ ; par le théorème I.6, on en déduit que  $|\Phi'| \in A^p(\mathbb{R})$ . Reste à montrer que  $\Phi'$  est une fonction extérieure; pour cela considérons la factorisation  $\Phi' = SG$  où  $S$  est intérieure et  $G$  extérieure. D'après ce que l'on vient de voir, si  $f \in CL^p_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ , alors l'unique fonction  $F$  de  $H^p(\Omega)$  telle que  $\text{Re } F = f$  est donnée par :

$$F = [f \circ \Phi + iH(f \circ \Phi)] \circ \Phi^{-1}$$

et cette fonction vérifie

$$F \circ \Phi(G)^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2).$$

On a donc :  $F \circ \Phi(G)^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2) \iff F \circ \Phi(\Phi')^{1/p} \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ . Mais ceci ne peut se produire que si  $\Phi' = G$  est extérieure.

Dans le cas borné, le résultat est beaucoup plus net. Nous l'énonçons par

souci de complétude en laissant au lecteur le soin de la démontrer sur le modèle de la preuve précédente.

Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan borné à bord  $\Gamma$  rectifiable. Pour tout  $p > 1$ , nous considérons  $H^p(\Omega)$  comme un espace de Banach réel et nous désignons par  $H_0^p(\Omega)$  l'espace quotient  $H^p(\Omega)/\mathbb{R}i$ . On a alors :

THEOREME 4 bis. Si  $\Phi$  désigne une représentation conforme de  $D$  sur  $\Omega$ , alors  $\Omega$  vérifie  $(N')$  si et seulement si  $\Phi' \in A^\infty(D)$  où :

$(N')$  : L'application  $F \mapsto \operatorname{Re} F$  est un isomorphisme de  $H_0^p(\Omega)$  sur  $L_{\mathbb{R}}^p(\Gamma)$ .

En raison des théorèmes 4 et 4 bis, nous appellerons domaines de Neumann les domaines vérifiant  $(N)$  ou  $(N')$ . Ces domaines ont été caractérisés géométriquement au chapitre III. Rappelons le résultat :  $\Omega$  est un domaine de Neumann si et seulement si  $\Omega$  est régulier et  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -l.c. pour un  $k \geq 1$ .

Pour tout poids  $\omega \in A^\infty(\mathbb{R})$  il existe  $p_0 \in [1, +\infty[$  tel que  $p_0$  soit le plus petit réel  $\geq 1$  tel que  $\omega \in A^p$   $\forall p > p_0$ . Nous notons  $p_0 = i(\omega)$ . Si  $\Omega$  est un domaine de Neumann et  $\Phi$  une représentation conforme adaptée, nous appellerons indice de  $\Omega$  de réel  $i(|\Phi'|)$ .

b) Caractérisation par fonction maximale des espaces de Hardy associés aux domaines de Neumann.

Soit  $\Omega$  un domaine de Neumann tel que  $\infty \in \partial\Omega$ . Pour  $z \in \partial\Omega$ , considérons le "cône" :

$$\text{si } C > 1, \quad \Gamma_C(z) = \left\{ \zeta \in \Omega ; d_\Omega(\zeta, z) \leq C \operatorname{dist}(\zeta, \partial\Omega) \right\}$$

où  $d_\Omega(\zeta, z) = \inf \left\{ \mathcal{H}^1(\gamma) ; \gamma \text{ est un arc de Jordan joignant } \zeta \text{ à } z \text{ dans } \bar{\Omega} \right\}$ .

Pour toute fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit alors la fonction maximale  $F^* : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$\forall z \in \partial\Omega \quad F_c^*(z) = \sup_{\zeta \in \Gamma_c(z)} |F(\zeta)|.$$

On a alors le

THEOREME 5. Il existe une constante  $C > 1$  telle que si  $p > 0$  et si  $F$  est une fonction holomorphe dans  $\Omega$ ,  $F$  appartient à  $H^p(\Omega)$  si et seulement si  $F_c^*$  appartient à  $L^p(\partial\Omega)$ .

Démonstration. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , appelons  $D_x$  la demi-droite  $D_x = \{x+iy, y > 0\}$ .

Montrons tout d'abord le

LEMME 4. Il existe une constante  $C > 1$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(D_x) \subset \Gamma_c(\Phi(x))$ , où  $\Phi$  est une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ .

Preuve du lemme 4.

D'après le théorème II.5, il existe une constante  $C_1$  absolue telle que

$$\forall y > 0, \exists x' \in [x-y, x+y], \quad d_\Omega(\Phi(x+iy), \Phi(x')) \leq C_1 \text{dist}(\Phi(x+iy), \partial\Omega).$$

On en déduit l'inégalité

$$d_\Omega(\Phi(x+iy), \Phi(x)) \leq C_1 \text{dist}(\Phi(x+iy), \partial\Omega) + \int_{x-y}^{x+y} |\Phi'(t)| dt.$$

D'autre part  $\Omega$  est un domaine de Neumann ; donc  $\Phi' \in A^\infty A(\mathbb{R}_+^2)$  et par conséquent,

$$\exists C_2 > 0 ; \forall x, y, \quad \int_{x-y}^{x+y} |\Phi'(t)| dt \leq C_2 \text{dist}(\Phi(x+iy), \partial\Omega).$$

(C'est une conséquence du théorème I.7 et du théorème de distorsion de Koebe).

Le lemme 4 en découle avec  $C = C_1 + C_2$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $C > 1$ , désignons par  $\mathcal{C}_C(x)$  le "vrai" cône

$$\mathcal{C}_C(x) = \{z \in \mathbb{R}_+^2 ; |x-z| \leq C \operatorname{dist}(z, \mathbb{R})\}.$$

On a alors le

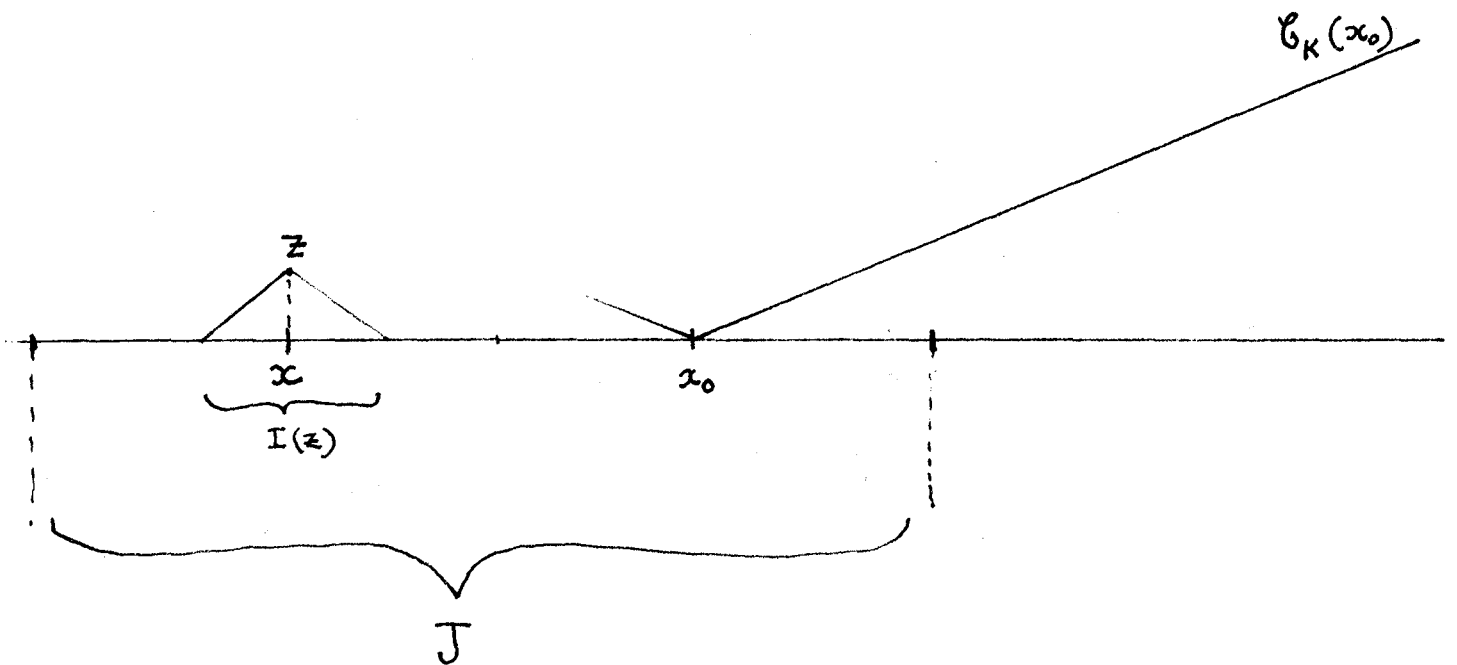
LEMME 5. Pour toute constante  $C > 1$ , il existe une constante  $C' > 1$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi^{-1}(\Gamma_C(\Phi(x))) \subset \mathcal{C}_{C'}(x).$$

Preuve du lemme 5.

Il suffit de montrer qu'il existe  $K > 1$  tel que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2, \quad |z-x_0| \geq K \operatorname{Im} z \implies d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x_0)) \geq 2C \operatorname{dist}(\Phi(z), \partial\Omega).$$



Par l'inégalité triangulaire,

$$d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x_0)) \geq d_\Omega(\Phi(x), \Phi(x_0)) - d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x)) ;$$

mais, par le lemme 1,

$$d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x)) \leq C \int_{I(z)} |\Phi'(t)| dt ;$$

d'autre part, par le corollaire III.3 (p. 48) et le fait que  $\Phi' \in A^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x)) \geq c \int_{x_0}^x |\Phi'(t)| dt.$$

Soit alors  $J$  l'intervalle de même centre que  $[x, x_0]$  mais de longueur double. Il est clair que si  $K$  est assez grand, alors  $I(z) \subset J$  et que,  $|\Phi'|$  appartenant à  $A^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c > 0 ; \quad \int_{x_0}^x |\Phi'(t)| dt \geq c \int_J |\Phi'(t)| dt.$$

On peut alors écrire

$$d_\Omega(\Phi(z), \Phi(x_0)) \geq \left( c_1 \frac{\int_J |\Phi'(t)| dt}{\int_{I(z)} |\Phi'(t)| dt} - c_2 \right) \int_{I(z)} |\Phi(t)| dt.$$

Grâce à la proposition I.12, on a l'inégalité

$$\exists \delta > 0 ; \quad \frac{\int_J |\Phi'(t)| dt}{\int_{I(z)} |\Phi'(t)| dt} \geq c \left( \frac{|J|}{|I(z)|} \right)^\delta \geq c(K-1)^\delta.$$

D'autre part, toujours par la condition  $A^\infty$  ou bien en utilisant le théorème de distorsion de Gehring-Hayman,

$$\int_{I(z)} |\Phi'(t)| dt \geq c \operatorname{Im} z |\Phi'(z)| \geq c \operatorname{dist}(\Phi(z), \partial\Omega).$$

De ces deux dernières inégalités, on déduit le lemme 2 en prenant  $K$  suffisamment grand.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 5.

Soit donc  $F \in \mathcal{H}^p(\Omega)$ ; posons  $G = F \circ \Phi$ . Alors  $G \in \mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^2, |\Phi'|)$  ce qui équivaut, grâce aux résultats de I.3.d à

$$G_K^* \in L^p(\mathbb{R}, |\Phi'|),$$

et ceci pour tout  $K > 1$ .

D'après le lemme 5, pour tout  $C > 1$  on a alors

$$F_C^* \in L^p(\Gamma).$$

Réciproquement, considérons la constante  $C$  du lemme 4. Si  $F$  est une fonction

holomorphe dans  $\Omega$  telle que  $F_C^* \in L^p(\Gamma)$ , alors, par le lemme 4,

$$G_{\text{rad}}^*(x) = \sup_{y>0} |G(x+iy)| \in L^p(\mathbb{R}, |\Phi'|).$$

Mais ceci implique que  $G \in H^p(\mathbb{R}, |\Phi'|)$  (voir [30]), et donc que  $F \in H^p(\Omega)$ .

Remarques.

1) Pour éviter d'avoir à utiliser la fonction maximale radiale, une modification de caractère technique du lemme 4 permet de prouver :

$$\forall C > 1, \exists C' > 1 \text{ t. q. } \forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(\mathcal{C}_C(x)) \subset \Gamma_{C'}(\Phi(x)).$$

2) Lorsque  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev, on peut remplacer, dans la définition des "cônes" la distance géodésique  $d_\Omega$  par la distance usuelle. En effet, dans ce cas, on montre facilement :

$$\exists C > 0 ; \forall z_1, z_2 \in \Omega \quad d_\Omega(z_1, z_2) \leq C |z_1 - z_2|.$$

c) Le problème de Neumann "classique".

Soit  $\Omega$  un domaine de Neumann et  $C > 1$  la constante du théorème 5 adaptée à  $\Omega$ . Soit  $F$  une fonction définie sur  $\Omega$ . Nous dirons que  $F$  admet une trace sur  $\partial\Omega$  si, presque partout sur  $\partial\Omega$ , on a  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_C(z_0)}} F(z)$  existe.

Si  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ , nous dirons que  $F$  admet une dérivée normale sur  $\partial\Omega$  si en presque tout point  $z_0$  de  $\partial\Omega$  par lequel on peut mener une tangente à  $\partial\Omega$  on a :

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Gamma_C(z_0)} \nabla F(z) \cdot \vec{n}(z_0) = \frac{\partial F}{\partial n}(z_0)$$

existe, où  $\vec{n}(z_0)$  désigne la normale sortante à  $\Omega$  en  $z_0$ .

THEOREME 6. Soit  $\Omega$  un domaine de Neumann tel que  $\infty \in \partial\Omega$ , d'indice

$p_0 \geq 1$ . Soit  $q_0$  le réel conjugué de  $p_0$  ( $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$ ). Alors si  $1 < p < q_0$  et si  $g \in L^p_{\mathbf{R}}(\partial\Omega)$ , il existe une fonction harmonique  $u$  définie sur  $\Omega$ , unique à une constante près, telle que

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{p. p. sur } \partial\Omega$$

$$(2) \quad (\nabla u)_c^* \in L^p(\partial\Omega).$$

Démonstration.

Remarquons que les gradients de fonctions harmoniques sont les fonctions  $\bar{F}$ , où  $F$  est analytique.

D'après les résultats de la section b) précédente, démontrer le théorème 5 revient à démontrer le résultat suivant :

$\forall 1 < p < q_0$ ,  $\forall g \in L^p(\partial\Omega)$ , il existe une unique fonction  $F \in H^p(\Omega)$  telle que :

$$(3) \quad \text{Im}(F(z(s)) z'(s)) = g(z(s)) \quad \text{p. p. sur } \mathbf{R},$$

où  $s \mapsto z(s)$  désigne une paramétrisation par la longueur d'arc de  $\partial\Omega$ .

Soit  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbf{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ . Alors (3) équivaut à

$$(4) \quad \text{Im}(F \circ \Phi \Phi') = |\Phi'| g \circ \Phi \quad \text{p. p. sur } \mathbf{R}.$$

Mais  $F \circ \Phi \Phi' \in H^p(\mathbf{R}_+^2, |\Phi'|^{1-p})$  et le fait que  $|\Phi'| \in A^r \quad \forall r > p_0$  implique que  $|\Phi'|^{1-p} \in A^p(\mathbf{R})$ . On conclut alors en utilisant les résultats de la partie a).



#### 4. L'INDICE DES DOMAINES DE LAVRENTIEV

Au chapitre III, il a été démontré que les domaines de Lavrentiev sont des cas particuliers de domaines de Neumann. Mais les méthodes utilisées pour montrer que  $|\Phi'| \in A^\infty(\mathbb{R})$  ne permettent pas de préciser pour quels  $p > 1$   $|\Phi'| \in A^p(\mathbb{R})$ . C'est le problème que nous voulons maintenant aborder.

Dans certaines circonstances particulières, l'indice peut être précisé. Un exemple est donné par le théorème suivant.

THEOREME 7. Soit  $\Omega$  un domaine de Neumann de la forme  $\{y > f(x)\}$ , où  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ; alors l'indice de  $\Omega$  est  $\leq 2$ .

Démonstration.

Soit  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ . comme le bord de  $\Omega$  est un graphe,  $|\text{Arg } \Phi'| < \frac{\pi}{2}$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

D'après le théorème de Helson-Szegö ([25]),  $|\Phi'|^t \in A^2(\mathbb{R})$  pour tout  $t \in ]0, 1[$ .

Le théorème 6 est alors une conséquence du lemme suivant.

LEMME 6. Soit  $\omega \in A^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall 0 < t < 1, \omega^t \in A^2(\mathbb{R}).$$

Alors  $\omega \in A^p(\mathbb{R})$  pour tout  $p > 2$ .

Démonstration du lemme 6.

Soit  $p > 2$ ; alors  $\frac{1}{p-1} < 1$  et donc  $\omega^{\frac{1}{p-1}} \in A^2$ , ce qui équivaut à :

$$(1) \quad \exists C > 0, \forall I \subset \mathbb{R}, \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega^{\frac{1}{p-1}} \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega^{\frac{-1}{p-1}} \right) \leq C.$$

Mais  $\omega \in A^\infty$  et donc, par la proposition I.12,

$$(2) \quad \exists C > 0, \forall I \subset \mathbb{R}, \frac{1}{|I|} \int_I \omega \leq C \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}.$$

En réunissant (1) et (2), on s'aperçoit alors que  $\omega \in \mathcal{CA}^p(\mathbb{R})$ .

Le théorème 7 a été considérablement amélioré par T. Wolff [41] qui montre que si  $\Omega$  est de la forme  $\{y > f(x)\}$ , alors  $\Omega$  est un domaine de Lavrentiev si et seulement si  $|\Phi'| \in \mathcal{CA}^2(\mathbb{R})$ .

La preuve reste très liée au théorème de Helson-Szegö et la condition géométrique joue un rôle fondamental.

Pour un domaine de Lavrentiev général, l'indice ne peut être précisé.

Plus exactement, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

**THEOREME 8.** Pour tout réel  $p > 1$ , il existe un domaine de Lavrentiev d'indice exactement  $p$ .

Démonstration.

Soit  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction appartenant à  $BMO(\mathbb{R})$ . Alors (proposition I.8), la fonction

$$F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) b(t) dt$$

définit une fonction de la classe  $BMOA(\mathbb{R}_+^2)$ .

Soit d'autre part  $B(x) = \int_0^x b(t) dt$  ;  $B$  est une fonction de la classe de Zygmund  $\Lambda^*(\mathbb{R})$  et l'on a, par le théorème I.4,

$$\|F\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)} \leq C \|B\|_{\Lambda^*(\mathbb{R})}$$

(Rappelons que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  désigne la classe de Bloch).

Soit alors  $\Phi$  une fonction holomorphe dans  $\mathbb{R}_+^2$  telle que

$$\Phi'(z) = \exp F(z).$$

Par le critère d'univalence de Nehari (voir théorème II.11 et II.14), il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que :

$$\|B\|_{\Lambda^*(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_0 \implies \Phi \text{ univalente sur } \mathbb{R}_+^2 \text{ et } \Phi(\mathbb{R}_+^2)$$

est un domaine quasiconforme.

D'autre part  $\Phi'$  est une fonction extérieure et, presque partout sur  $\mathbb{R}$ ,

$$|\Phi'(x)| = \exp(b(x)).$$

Si donc nous choisissons  $b \in \text{BMO}(\mathbb{R})$  tel que

$$\|B\|_{\Lambda^*} \leq \varepsilon_0 \text{ et } \exp(b) \in A^\infty(\mathbb{R}),$$

$\Phi$  est alors une fonction univalente et  $\Phi(\mathbb{R}_+^2)$  est un domaine de Lavrentiev par le théorème III.4.

Nous avons aussi ramené la preuve du théorème 8 à un pur problème de variable réelle qui est le suivant :

Etant donné  $p > 1$ , trouver  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in \text{BMO}$  telle que :

$$(3) \quad \|B\|_{\Lambda^*(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_0,$$

$$(4) \quad \exp b \in A^q(\mathbb{R}), \quad \forall q > p,$$

$$(5) \quad \exp b \notin A^p(\mathbb{R}).$$

Pour mener à bien la construction d'une telle fonction  $b$ , nous allons faire deux détours ; l'un par la théorie des produits de Riesz, l'autre par la notion de classe  $A^1$  de poids.

#### a) Produits de Riesz

PROPOSITION 4. Pour  $0 < \varepsilon \leq 1$ , la suite de polynômes trigonométriques

$$P_k^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \varepsilon \cos(3^j x))$$

converge faiblement sur  $\mathbb{T}$  vers une mesure  $d\mu^\varepsilon(x)$  positive, de masse totale 1, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$ .

La mesure  $d\mu^\varepsilon(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \varepsilon \cos 3^j x)$  s'appelle un produit de Riesz sur  $\mathbf{T}$ .

Démonstration de la proposition 4.

En écrivant  $\cos 3^j x = \frac{1}{2}(e^{i3^j x} + e^{-i3^j x})$ , on obtient immédiatement

$$(6) \quad \forall k \geq 1, \quad P_k^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-1}) \in \{-1, 0, 1\}^k} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{|\varepsilon_0| + \dots + |\varepsilon_{k-1}|} e^{i(\varepsilon_0 + 3\varepsilon_1 + \dots + 3^{k-1}\varepsilon_{k-1})x}.$$

Comme, d'après l'unicité du développement en base 3, tout  $m \in \mathbf{Z}$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$m = \varepsilon_0 + 3\varepsilon_1 + \dots + 3^p \varepsilon_p \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\},$$

on en déduit immédiatement,

$$\forall k \geq 1, \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1], \quad \int_0^{2\pi} P_k^\varepsilon(x) dx = 1.$$

Comme d'autre part les  $P_k^\varepsilon$  sont des fonctions positives, on en déduit que les  $P_k^\varepsilon$  forment une partie bornée de  $M(\mathbf{T})$ . D'après le théorème de Banach-Steinhaus, pour montrer que les  $P_k^\varepsilon$  convergent faiblement, il suffit de vérifier que pour tout  $m \in \mathbf{Z}$  la suite  $\int_{\mathbf{T}} e^{-imx} P_k^\varepsilon(x) dx$  converge.

Pour ce faire on écrit  $m$  en base 3 sous la forme

$$m = \alpha_0 + 3\alpha_1 + \dots + 3^p \alpha_p \quad \text{avec} \quad \alpha_p \in \{-1, 0, 1\}.$$

Grâce à l'expression (6) de  $P_k^\varepsilon(x)$  on voit immédiatement

$$\int e^{-imx} P_k^\varepsilon(x) dx = 0 \quad \text{si} \quad k < j+1$$

$$\int e^{-imx} P_k^\varepsilon(x) dx = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha_0 + \dots + \alpha_j} \quad \text{si} \quad k \geq j+1,$$

ce qui prouve que la suite  $P_k^\varepsilon(x)$  converge faiblement vers une mesure  $d\mu_\varepsilon(x)$  positive, de masse totale 1.

Il reste à montrer que  $d\mu_\varepsilon$  est singulière ; dans ce but, montrons le

LEMME 7. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(3^n x) g(x) d\mu_\varepsilon(x) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f d\mu_\varepsilon \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} g d\mu_\varepsilon \right).$$

Démonstration du lemme 7. Il suffit de le vérifier pour  $f(x) = e^{iax}$ ,  
 $g(x) = e^{ibx}$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ . On écrit alors

$$\begin{aligned} a &= \alpha_0 + 3\alpha_1 + \dots + 3^j \alpha_j & \alpha_k &\in \{-1, 0, 1\}, \\ b &= \beta_0 + 3\beta_1 + \dots + 3^\ell \beta_\ell & \beta_k &\in \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Alors, si  $n > \ell + 1$ ,

$$3^n a + b = \beta_0 + 3\beta_1 + \dots + 3^\ell \beta_\ell + 3^n \alpha_0 + \dots + 3^{n+j} \alpha_j,$$

et le lemme s'en déduit, par un calcul déjà fait.

Ecrivons alors la décomposition de Radon-Nykidim de  $d\mu_\varepsilon$  :

$$d\mu_\varepsilon = \nu_\varepsilon + \lambda_\varepsilon(x) dx.$$

Alors, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(3^n x) g(x) d\mu_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(3^n x) g(x) d\nu_\varepsilon(x) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(3^n x) g(x) \lambda_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Si  $d\mu_\varepsilon$  n'est pas une mesure singulière, on peut alors trouver une fonction  $g$  continue sur  $\mathbf{T}$  telle que

$$\int |g| d\nu_\varepsilon = 0 \quad \text{mais} \quad \int g d\mu_\varepsilon \neq 0.$$

Alors, pour toute fonction  $f$  continue sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(3^n x) g(x) d\nu_\varepsilon(x) = 0,$$

et, en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans (7), il vient, par le lemme 7 et (8),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(x) d\mu^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(x) dx.$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour toute fonction continue  $f$ , on en déduit que  $d\mu_\varepsilon$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{T}$ , ce qui n'est pas.

L'hypothèse faite est donc fautive, et par conséquent  $d\mu_\varepsilon$  est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui achève de prouver la proposition 4.

b) La classe  $A^1$  de poids

DEFINITION. Un poids  $\omega \geq 0$ ,  $\omega \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ , est dit appartenir à la classe  $A^1(\mathbf{R})$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  il existe une constante  $C_I > 0$  telle que  $\omega(x) \geq C_I$  presque partout sur  $I$  et

$$\frac{1}{|I|} \int_I \frac{\omega(x)}{C_I} dx \leq C.$$

Une définition équivalente est la suivante :  $\omega \geq 0 \in A^1$  si et seulement si il existe  $C > 0$  telle que  $M\omega(x) \leq C\omega(x)$  presque partout sur  $\mathbf{R}$ , où  $M\omega$  désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de  $\omega$ .

On vérifie sans peine que  $A^1(\mathbf{R}) \subset A^p(\mathbf{R})$  pour tout  $p > 1$  et que

$$(8) \quad \omega \in A^1(\mathbf{R}) \implies \omega^{1-p} \in A^p(\mathbf{R}) \text{ si } p > 1.$$

Nous allons utiliser la classe  $A^1$  par le biais du théorème suivant, dû à Coifman et Rochberg [14].

THEOREME 9. Soit  $\mu \geq 0$  une mesure de Radon  $\sigma$ -finie sur  $\mathbf{R}$ . Alors, soit  $M\mu(x) \equiv +\infty$ , soit

$$\forall \delta \in ]0, 1[, \quad (M\mu)^\delta \in A^1(\mathbf{R}).$$

Rappelons que  $M\mu(x)$  désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de  $\mu$  définie par :

$$M\mu(x) = \sup_{I \ni x} \frac{\mu(I)}{|I|}.$$

Démonstration du théorème 9.

Nous admettrons les deux résultats suivants, qui sont classiques [21].

1. Si  $\nu$  est une mesure  $\geq 0$  de masse totale finie, il existe  $C > 0$  absolue telle que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \{x \in \mathbb{R} ; M\nu(x) > \lambda\} \right| \leq \frac{C \|\nu\|}{\lambda}.$$

2. Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et vérifie

$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \{x \in \mathbb{R} ; |F(x)| > \lambda\} \right| \leq \frac{\|F\|_*}{\lambda},$$

alors on a l'inégalité de Kolmogorov :

$$\forall \delta \in ]0, 1[, \quad \forall E \subset \mathbb{R} \text{ tel que } |E| < +\infty,$$

$$\int_E |F|^\delta(x) \leq \frac{1}{1-\delta} |E|^{1-\delta} \|F\|_*^\delta.$$

Revenons à présent à la démonstration du théorème.

LEMME 8. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x, y \in I$ . Appelons  $I^*$  l'intervalle de même centre que  $I$  mais de longueur double. Posons  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  avec  $\mu_1 = 1_I * \mu$ . Alors

$$\frac{1}{3} M\mu_2(x) \leq M\mu_2(y) \leq 3M\mu_2(x).$$

Démonstration du théorème 8.

$$M\mu_2(x) = \sup_{\substack{J \ni x \\ J \cap (\mathbb{R} \setminus I^*) \neq \emptyset}} \frac{\mu_2(J)}{|J|}.$$

Mais si  $J \cap I \neq \emptyset$  et  $J \cap (\mathbb{R} \setminus I^*) \neq \emptyset$ , alors  $\tilde{J}$ , l'intervalle de même centre que  $J$  mais de longueur triple, contient  $I$  et donc  $y$ . Mais alors

$$\frac{\mu_2(J)}{|J|} \leq \frac{\mu_2(\tilde{J})}{|J|} = 3 \frac{\mu_2(\tilde{J})}{|\tilde{J}|} \leq 3 M\mu_2(y)$$

et donc  $M\mu_2(x) \leq 3M\mu_2(y)$ . L'autre inégalité s'obtient en inversant les rôles de  $x$  et de  $y$ .

Comme conséquence du lemme 8, montrons que s'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $M\mu(x_0) < +\infty$ , alors  $M\mu(x) < +\infty$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ . Soit en effet  $I_n$  l'intervalle  $[x_0 - n, x_0 + n]$ . On décompose alors  $\mu$  en

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{où} \quad \mu_1 = 1_{I_n^*} \mu.$$

Et l'on a

$$\forall x \in I_n, \quad M\mu(x) \leq M\mu_1(x) + M\mu_2(x).$$

D'une part  $M\mu_1(x) < +\infty$  presque partout sur  $I_n$  d'après le résultat rappelé 1. ; d'autre part, par le lemme 8,

$$\forall x \in I_n, \quad M\mu_2(x) \leq 3 M\mu(x_0) < +\infty,$$

ce qui prouve que  $M\mu(x) < +\infty$  p. p. sur  $I_n$  et donc sur  $\mathbb{R}$  en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

Plaçons-nous alors dans le cas où  $M\mu(x) < +\infty$  p. p.. Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  on écrit alors, avec les notations du lemme 8,

$$M\mu(x) \leq M\mu_1(x) + M\mu_2(x),$$

d'où, puisque  $\delta < 1$ ,

$$(M\mu(x))^\delta \leq (M\mu_1(x))^\delta + (M\mu_2(x))^\delta.$$

Posons alors  $C_I = \sup_{J \supset I} \frac{\mu(J)}{|J|}$ . Alors



$$\forall x \in I, \quad M\mu(x) \geq C_I.$$

D'autre part, d'après la démonstration du lemme 8,

$$\forall x \in I, \quad M\mu_2(x) \leq 3C_I$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{|I|} \int_I \frac{M\mu_2^\delta(x)}{C_I^\delta} dx \leq 3^\delta.$$

Pour la majoration analogue concernant  $\mu_1$  on utilise l'inégalité de Kolmogorov 2.

$$\int_I (M\mu_1)^\delta(x) dx \leq \frac{1}{1-\delta} |I|^{1-\delta} (\mu(I^*))^\delta \leq \frac{1}{1-\delta} 2^\delta |I| C_I^\delta$$

d'où

$$\frac{1}{|I|} \int_I \frac{(M\mu_1)^\delta}{C_I^\delta} dx \leq \frac{2^\delta}{1-\delta},$$

ce qui termine la preuve du théorème 9.

Revenons alors à la preuve du théorème 8. Le réel  $p > 1$  étant fixé,

posons :

$$b_\varepsilon(x) = (1-p) \log M\mu^\varepsilon(x),$$

où  $\mu_\varepsilon$  est le produit de Riesz défini par la proposition 4.  $M\mu_\varepsilon(x)$  est  $2\pi$ -périodique, et,

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad M\mu_\varepsilon(x) \leq M\left(1_{[0, 2\pi]}(x) d\mu_\varepsilon(x)\right) + \frac{1}{2\pi},$$

ce qui prouve que  $M\mu_\varepsilon(x) < +\infty$  presque partout. D'après le théorème 9,  $b_\varepsilon$  est alors une fonction de  $BMO(\mathbb{R})$  et, par (8),

$$e^{b_\varepsilon} \in A^q(\mathbb{R}) \quad \text{pour } q > p.$$

Montrons que le poids  $e^{b_\varepsilon}$  ne peut appartenir à  $A^p(\mathbb{R})$ . Comme la mesure  $\mu_\varepsilon$  est singulière, la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_\varepsilon(z)$$

ne peut être une fonction de  $H^1(D)$  par le théorème de F. et M. Riesz. D'après la caractérisation de  $H^1(D)$  de Burkholder-Gundy-Silverstein ([7], [21]) la fonction  $M(1_T \mu_\varepsilon) \notin L^1(\mathbb{T})$  et par conséquent  $M\mu_\varepsilon$  n'est pas localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Mais cette dernière circonstance empêche le poids  $e^{b_\varepsilon}$  d'appartenir à  $A^p(\mathbb{R})$ .

Posons  $B_\varepsilon(x) = \int_0^x b_\varepsilon(t) dt.$

Pour achever la démonstration du théorème 8 il suffit de montrer le

LEMME 9. La norme de  $B_\varepsilon$  dans la classe de Zygmund  $\Lambda^*(\mathbb{R})$  est inférieure ou égale à  $C\varepsilon$  si  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .

Démonstration du lemme 9.

Rappelons que nous avons posé

$$P_k^\varepsilon(x) = \prod_0^{k-1} (1 + \varepsilon \cos 3^j x).$$

Par le théorème des accroissements finis, on montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\exp\left(\frac{-\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) P_k^\varepsilon(x) \leq P_k^\varepsilon\left(x + \frac{2\pi}{3^k}\right) \leq \exp\left(\frac{\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) P_k^\varepsilon(x).$$

Posons alors  $d\mu_\varepsilon(x) = P_k^\varepsilon(x) d\mu_k^\varepsilon(x)$ . Comme la mesure  $d\mu_k^\varepsilon$  est  $\frac{2\pi}{3^k}$ -périodique, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad d\mu_\varepsilon\left(x + \frac{2\pi}{3^k}\right) = \omega_k^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon(x),$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(\frac{-\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \leq \omega_k^\varepsilon(x) \leq \exp\left(\frac{\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

En passant aux fonctions maximales, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\exp\left(\frac{-\pi \varepsilon}{1-\varepsilon}\right) M \mu^\varepsilon(x) \leq M \mu^\varepsilon\left(x + \frac{2\pi}{3^k}\right) \leq \exp\left(\frac{\pi \varepsilon}{1-\varepsilon}\right) M \mu^\varepsilon(x),$$

d'où, en prenant le log,

$$(9) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| b_\varepsilon(x) - b_\varepsilon\left(x + \frac{2\pi}{3^k}\right) \right| \leq \frac{\pi \varepsilon(p-1)}{1-\varepsilon}.$$

Démontrer le lemme 9 revient à démontrer que, pour  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$(10) \quad \left| \frac{1}{|I|} \int_I b_\varepsilon(x) dx - \frac{1}{|I'|} \int_{I'} b_\varepsilon(x) dx \right| \leq C \varepsilon,$$

où  $I'$  désigne l'intervalle de  $\mathbb{R}$  de même longueur que  $I$  et "consécutif" à  $I$ .

Par (9), (10) est certainement vérifié si  $|I| = \frac{2\pi}{3^k}$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . D'autre part,

la fonction  $b_\varepsilon$  étant  $2\pi$ -périodique, il suffit de vérifier (10) pour  $|I| \leq 2\pi$ .

Soit alors  $I = [a, b]$  un tel intervalle et  $k$  le plus grand entier tel que l'intervalle

$J = \left[ b - \frac{2\pi}{3^k}, b \right]$  contienne  $I$ . Le lemme sera démontré si l'on montre l'existence

d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I b_\varepsilon(x) dx - \frac{1}{|J|} \int_J b_\varepsilon(x) dx \right| \leq C \varepsilon.$$

Pour ce faire, on procède à un découpage triadique de l'intervalle  $J$ . On appelle  $J_1$  les intervalles de la première génération qui sont inclus dans  $I$  puis  $J_2$  les intervalles de la deuxième génération qui sont inclus dans  $I \setminus \cup J_1$  et ainsi de suite.

Alors :

$$I = \Sigma |J_1| + \Sigma |J_2| + \dots,$$

chaque  $\Sigma$  comportant au plus 2 termes. De plus, par (9),

$$\exists C > 0, \quad \left| \frac{1}{|J_k|} \int_{J_k} b_\varepsilon(x) dx - \frac{1}{|J|} \int_J b_\varepsilon(x) dx \right| \leq C k \varepsilon.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \left| \int_I b(x) dx - |I| \frac{1}{|J|} \int_J b_\varepsilon(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{J_k} b_\varepsilon(x) dx - |J_k| \frac{1}{|J|} \int_J b_\varepsilon(x) dx \right) \right| \\ &\leq 2 C \varepsilon |J| \sum_{k \geq 1} k 3^{-k} \leq C \varepsilon |I|. \end{aligned}$$

Le lemme 9 en découle et, avec lui, le théorème 8.

Remarque. Pour  $q > 1$ , appelons  $B_q$  la classe des poids  $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  tels que

$$\exists C > 0 ; \forall I \subset \mathbb{R} \quad \left( \frac{1}{|I|} \int_I \omega^q(x) dx \right)^{1/q} \leq C \frac{1}{|I|} \int_I \omega(x) dx.$$

On sait que  $B_q \subset A^\infty$  et que  $A^\infty \subset \bigcup_{q>1} B_q$ .

La méthode de démonstration du théorème 8 permet d'obtenir le résultat suivant : pour tout  $q > 1$  il existe un domaine de Lavrentiev  $\Omega$  tel que  $|\Phi'|/\mathbb{R}$  n'appartienne pas à  $B_q$ .

Il suffit en effet de poser  $|\Phi'| = (M\mu_\varepsilon)^{1/q}$  ; alors si  $\varepsilon$  est assez petit  $\Phi$  est univalente et  $\Phi(\mathbb{R})$  est un quasicercle. De plus  $|\Phi'| \in A^1$  mais  $|\Phi'|^q$  n'est pas localement intégrable.

#### Notes du chapitre IV

Pour le paragraphe 1, nous avons suivi le plan de Duren [17]. Le théorème 3 est nouveau ; il est à mettre en parallèle avec le travail de Coifman-Meyer [12]. Les théorèmes 4 et 4 bis sont une relecture du théorème III.3. Avec le théorème 5 nous exhibons les domaines les plus généraux pour lesquels on ait caractérisation des classes de Hardy par fonction maximale

Le théorème 8 est le fruit d'un travail en commun avec P. Jones [30].  
Signalons que Jerison a indépendamment donné une démonstration de ce théorème peu  
après la nôtre [27]. Enfin signalons également la démonstration ici adoptée du fait  
que les mesures de Riesz sont singulières est due à Y. Meyer [communication orale].

Bibliographie

- [1] AHLFORS, L. Lectures on quasiconformal mappings. Princeton, 1966.
- [2] \_\_\_\_\_ Conformal invariants : Topics in geometric function theory. McGraw Hill, New York, 1973.
- [3] ASTALA, K. and GEHRING, F. Injectivity criteria and the quasidisk : Complex variables. (1984), vol. 3, 45-54.
- [4] BAERNSTEIN, A. Univalence and BMO. Mich. Math. J. 23 (1976), 217-223.
- [5] \_\_\_\_\_ Analytic functions of bounded mean oscillation. Aspects of contemporary complex analysis. Academic Press, New York, 1982.
- [6] BEURLING, A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert spaces. Acta Math. 81 (1949), 239-255.
- [7] BURKHOLDER, D., GUNDY, R., SILVERSTEIN, M. A maximal function characterization of the class  $H^p$ . Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), 137-153.
- [8] CALDERÓN, A. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 74 (1977), 1324-1327.
- [9] COIFMAN, R., FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 1974, 241-250.
- [10] COIFMAN, R., MEYER, Y. Le théorème de Calderon par les "méthodes de variable réelle". C. R. Acad. Sc. Paris 289 (1979), 425-428.
- [11] COIFMAN, R., McINTOSH, A., MEYER, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes.
- [12] COIFMAN, R., MEYER, Y. Lavrentiev's curves and conformal mappings. Institut Mittag-Leffler, Report no. 5, 1983.
- [13] \_\_\_\_\_ Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque 57 (1978).
- [14] COIFMAN, R., ROCHBERG, R. Another characterization of BMO. Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980).
- [15] DAVID, G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. Ann. Sc. de l'E.N.S. 17 (1984), 157-189.
- [16] DENJOY, A. Les continus cycliques et la représentation conforme. Bull. Soc. Math. France 70 (1942), 97-125.

- [17] DUREN, P. Theory of  $H^p$  spaces. Academic Press, 1970.
- [18] DUREN, P., SHAPIRO, H., SCHIELDS, A. Singular measures and domains not of Smirnov type. Duke Math. J. 33 (1966), 247-254.
- [19] FEDERER, H. Geometric measure theory. Springer Verlag, 1969.
- [20] FEFFERMAN, Ch., STEIN, E.  $H^p$  spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.
- [21] GARNETT, J. Bounded analytic functions. Academic Press, 1981.
- [22] GEHRING, F. Univalent functions and the Schwarzian derivative. Comment. Math. Helv. 52 (1977), 561-572.
- [23] \_\_\_\_\_ Spirals and the universal Teichmüller space. Acta Math. 141 (1978), 99-113.
- [24] GEHRING, F., HAYMAN, W. An inequality in the theory of conformal mapping. J. Math. Pures Appl. 41, pp. 353-361.
- [25] HELSON, H., SZEGÖ, G. A problem in prediction theory. Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.
- [26] HUNT, R., MUCKENHOUT, B., WHEEDEN, R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.
- [27] JERISON, D. The failure of  $L^p$  estimates for harmonic measure in chord-arc domains. Mich. Math. J. 30 (1983), 191-198.
- [28] JOHN, F., NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.
- [29] JONES, P. Extension theorems for BMO. Indiana University Math. J. 29 (1979), 41-66.
- [30] JONES, P., ZINSMEISTER, M. Sur la représentation conforme des domaines de Lavrentiev. C. R. Acad. Sc. Paris 295 (1982), 563-566.
- [31] KENIG, C. Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains. Amer. J. Math. 102 (1980), 129-163.
- [32] LAVRENTIEV, M. Boundary problems in the theory of univalent functions. Math. Sb. 1 (43)(1936), 815-844.
- [33] LEWIS, J., ROSSI, J., WEITSMAN, A. On the growth of subharmonic functions along paths. Ark. för Math. 22 (1) (1984), 109-119.
- [34] NEWMAN, M. Elements of the topology of plane sets of points. Cambridge Univ. Press, 1954.
- [35] POMMERENKE, C. Univalent functions. Van den Hock et Ruprecht, Göttingen 1975.
- [36] \_\_\_\_\_ Schlichte Funktionen und BMOA. Comment. Math. Helv. 52 (1977), 591-602.
- [37] \_\_\_\_\_ One-sided smoothness conditions and conformal mapping. J. London Math. Soc. 26 (1) (1982), 77-89.

- [38] PRAWITZ, H. Über die Mittelwerte analytischer Funktionen. Ark. Mat. Astr. Fys. 20A (1927), 1-12.
- [39] STEIN, E. Singular integrals and differentiability of functions. Princeton, 1970.
- [40] VERCHOTA, G. Layer potentials and boundary value problems for Laplace equation on Lipschitz domains. Ph. D. Thesis Minneapolis 1982.
- [41] WOLFF, T. Counterexamples to two variants of the Helson-Szegö theorem. A paraître aux Arkiv för Math.
- [42] ZINSMEISTER, M. Courbes de Jordan vérifiant une condition corde-arc. Ann. Inst. Fourier 32 (1982), 13-21.
- [43] \_\_\_\_\_ Transformation conforme et courbes presque Lipschitziennes. C. R. Acad. Sc. Paris 296, 653-656.
- [44] \_\_\_\_\_ Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes. Ann. Inst. Fourier 34 (1984), 29-44.
- [45] \_\_\_\_\_ Domaines réguliers du plan. A paraître aux Ann. Inst. Fourier.
- [46] \_\_\_\_\_ A distortion theorem for quasiconformal mappings. A paraître.



## CHAPITRE V.- Applications quasiconformes.

Le but de ce chapitre est d'établir des résultats en tout point analogues à ceux du chapitre II en remplaçant le terme "conforme" par "quasi-conforme".

Dans la première section nous introduisons les définitions nécessaires et énonçons des théorèmes de distorsion pour les applications quasi-conformes qui constituent l'analogie de la théorie de Koebe (corollaire 2 du chapitre II.1).

Dans la deuxième section nous démontrons le théorème de Peter Jones dans toute sa généralité (cf. théorème II.3). Dans les parties 3) et 4) nous établissons des analogues des théorèmes de distorsion de Pommerenke (théorème II.5) et de Gehring-Hayman (corollaire 3 du théorème II.7). Enfin, dans la partie 5, nous généralisons et précisons le théorème II.8.

### 1. GENERALITES SUR LES TRANSFORMATIONS QUASI-CONFORMES

#### A. LES TROIS DEFINITIONS DE LA QUASI-CONFORMITE

##### a) Définition analytique d'une transformation quasi-conforme

Nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , muni de la structure euclidienne  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ . Si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$  nous désignons par  $B^n(x,r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

Nous écrivons simplement  $B^n$  pour  $B^n(0,1)$  et  $S^{n-1} = \partial B^n$ . Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  réelle nous définissons  $|A|$ , la norme de  $A$ , par

$$|A| = \sup_{x \in S^{n-1}} |Ax|.$$

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, nous désignons par  $W_{n \text{ loc}}^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev des fonctions  $f \in L_{\text{loc}}^n(\Omega)$  telles que les dérivées  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , prises au sens des distributions, appartiennent également à  $L_{\text{loc}}^n(\Omega)$ .

Si  $f \in W_{n \text{ loc}}^1(\Omega)$ , la matrice jacobienne  $Df(x)$  de  $f$  est définie presque partout ; là où elle est définie, nous noterons  $J(x,f)$  le jacobien de  $f$  c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne.

Nous sommes en mesure à présent de donner la définition analytique des applications quasiconformes :

DEFINITION 1. Soit  $K \geq 1$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une application  $f$  continue et injective de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  est dite  $K$ -quasiconforme si  $f \in W_{n \text{ loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  et si l'on a, presque partout sur  $\Omega$ ,

$$(1) \quad |Df(x)|^n \leq K J(x,f).$$

Remarque. D'après une classique inégalité de Hadamard, on a toujours  $J(x,f) \leq |Df(x)|^n$ . C'est pour cela que l'on désigne parfois (1) sous le nom d'inégalité de Hadamard inverse.

#### b) Définition géométrique

Si  $\Gamma$  est une famille d'arcs  $\gamma$  non constants de  $\mathbb{R}^n$ , désignons par  $\text{adm}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geq 1$$

pour tous les arcs  $\gamma$  localement rectifiables de  $\Gamma$ .

On définit alors le module de  $\Gamma$  par

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dx.$$

Exemples. 1) Si  $\mathcal{R}$  est un "parallélépipède" de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \times [0, h] \subset \mathbb{R}^n$ , appelons  $\Gamma$  la famille des arcs de  $\mathbb{R}^n$  joignant  $\mathcal{R} \times \{0\}$  à  $\mathcal{R} \times \{h\}$ . Alors

$$M(\Gamma) = \frac{|\mathcal{R}|}{h^{n-1}}$$

où  $\mathcal{R}$  désigne le volume (n-1)-dimensionnel de  $\mathcal{R}$ .

2) Soit  $\Gamma$  la famille des arcs joignant  $\partial B^n(x_0, a)$  et  $\partial B^n(x_0, b)$  où  $0 < a < b$ . Alors

$$M(\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{(\text{Log } \frac{b}{a})^{n-1}}$$

où  $\omega_{n-1}$  désigne la surface de la sphère unité  $S^{n-1}$ .

Enfin, nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant.

PROPOSITION 1. Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux familles de courbes telles que tout arc  $\gamma_1$  de  $\Gamma_1$  contienne un sous arc  $\gamma_2$  de  $\Gamma_2$ . Alors  $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ .

Le théorème suivant, dû à Gehring [G1], est celui qui autorise la définition géométrique de la quasiconformalité.

THEOREME 1. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application injective continue. Si  $f$  est  $K$ -quasiconforme (au sens de la définition 1) alors pour toute famille  $\Gamma$  d'arcs  $\subset \Omega$  on a

$$(2) \quad \frac{1}{K^{n-1}} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K^{n-1} M(\Gamma).$$

Réciproquement, si  $f$  vérifie

$$(2') \quad \frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K M(\Gamma).$$

Pour toute famille  $\Gamma$  d'arcs  $\subset \Omega$ , alors  $f$  est  $K$ -quasiconforme.

c) Définition métrique de la quasiconformalité

Nous donnons cette définition pour être complet, car nous n'en aurons pas explicitement besoin. Dans un certain sens c'est la définition la plus utile, car elle permet de généraliser la notion de quasiconformalité dans le cadre général des espaces métriques.

Soit toujours  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une injection continue.

Pour  $x \in \Omega$ , définissons

$$L(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|}$$

et

$$\ell(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|}.$$

Enfin, on pose  $H(x) = L(x)/\ell(x)$ . Nous dirons que  $f$  vérifie  $(M_K)$  si

$$(3) \quad \sup_{x \in \Omega} H(x) < +\infty \quad \text{et} \quad H(x) \leq K \quad \text{presque partout.}$$

De façon analogue nous dirons que  $f$  vérifie respectivement  $(A_K)$  et  $(G_K)$  si  $f$  vérifie (1) ou (2') avec la constante  $K$ . On a alors le théorème suivant, dû à Gehring [G1]:

THEOREME 2. Si  $f$  vérifie  $(M_K)$  alors  $f \in W_{n \text{ loc}}^1(\Omega)$  et vérifie

$(A_{K^{n-1}})$  et  $(G_{K^{n-1}})$ . Réciproquement :

- Si  $f$  est  $K$ -quasiconforme alors  $f$  vérifie  $(M_K)$ .
- Si  $f$  vérifie  $(G_K)$  alors  $f$  vérifie  $(M_{K \frac{2}{n}})$ .

On remarque en particulier que si  $n = 2$  et  $f \in W_2^1 \text{loc}(\Omega)$  alors  
 $(A_K) \iff (M_K) \iff (G_K)$ .

## B. THEOREMES DE DISTORSION POUR LES APPLICATIONS QUASI-CONFORMES

Dans cette partie nous énonçons deux théorèmes qui peuvent être regardés comme deux généralisations possibles du théorème de Koebe (corollaire 2 du théorème II. 1).

Le premier est une version du théorème spécial de distorsion de Gehring [G1] ; le deuxième est un résultat récent d'Astala et Gehring [AG].

THEOREME 3. Pour tout  $K \geq 1$  il existe une fonction  $\theta_K^n : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et nulle en 0 telle que si  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont deux domaines de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\partial\Omega \neq \emptyset$  et si  $f$  est un homéomorphisme quasiconforme de  $\Omega$  sur  $\Omega'$  alors

$$\forall x, y \in \Omega \quad |x-y| < d(x, \partial\Omega) \implies \frac{|f(x) - f(y)|}{d(f(x), \partial\Omega')} \leq \theta_K^n \left( \frac{|x-y|}{d(x, \partial\Omega)} \right).$$

Remarque. La condition  $\partial\Omega \neq \emptyset \implies \partial\Omega' \neq \emptyset$ .

Avant de poursuivre, il nous faut rappeler une propriété fondamentale des application quasiconformes qui généralise le théorème II.2 concernant la transformation conforme.

PROPOSITION 2 (Reimann [R]). Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $K$  quasiconforme alors  $\log J_f \in \text{BMO}(\Omega)$  avec une norme  $\leq C(K, n)$ .

Rappelons qu'une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dans  $\text{BMO}(\Omega)$  si

$$\sup_{B(x,r) \subset \Omega} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| u(y) - \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y') dy' \right| dy < +\infty.$$

On peut alors poser, pour  $x \in \Omega$ ,

$$a_f(x) = \exp\left\{\frac{1}{n} \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} \log J(y, f) dy\right\}$$

où  $B(x) = B(x, \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega))$  et le résultat suivant est vrai.

THEOREME 4 [AG]. Si  $f$  est un homéomorphisme  $K$ -quasiconforme de  $\Omega$  sur  $\Omega'$  alors :

$$\frac{1}{C} \frac{d(f(x), \partial\Omega')}{d(x, \partial\Omega)} \leq a_f(x) \leq C \frac{d(f(x), \partial\Omega')}{d(x, \partial\Omega)}$$

où  $C$  ne dépend que de  $K$  et  $n$ .

Remarque. Si  $n=2$  et  $f$  est conforme alors  $a_f(x) = |f'(x)|$  et le théorème 4 n'est autre que le corollaire 2 du théorème II.1 avec  $C=4$ .

Nous en resterons là pour les généralités. Pour les démonstrations de tous ces résultats ou pour des renseignements plus précis, on consultera [G1], [Vä].

## 2. LE THEOREME DE P. JONES

Nous nous proposons dans cette section de prouver dans sa généralité le théorème de P. Jones (Théorème II.3).

THEOREME 5 [J]. Il existe une constante  $C(K, n) > 0$  telle que si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  est  $K$ -quasiconforme, alors  $|\nabla (\log |f|)| dx$  est une mesure de Carleson sur  $B^n$  de "norme"  $\leq C(K, n)$ .

La stratégie pour montrer ce théorème est exactement la même qu'au chapitre II. On introduit d'abord les automorphismes de  $B^n$ . Pour  $z \in B^n$ ,  $z \neq 0$ , on définit

$$T_z(x) = \frac{(1 - |z|^2)(x-z) - |x-z|^2 z}{|z|^2 \left|x - \frac{z}{|z|^2}\right|^2}$$

$T_z$  est une transformation de Möbius laissant  $B^n$  invariante et  $T_z(z) = 0$ .

Comme au II, pour montrer que  $|\nabla(\log |f|)| dx$  est une mesure de Carleson, il suffit de montrer que

$$(4) \quad \sup_{\substack{z \in B^n \\ z \neq 0}} \int_{B^n} |\nabla(\log |f|)| |DT_z(x)|^{n-1} dx < +\infty.$$

On utilise alors le fait que  $|\nabla |f|| \leq |Df|$  et par un changement de variable  $x' = T_z(x)$  on s'aperçoit qu'il suffit, pour démontrer (4) et donc le théorème 5, de prouver que

$$(5) \quad \int_{B^n} \frac{|Df(x)|}{|f(x)|} dx \leq C(K, n)$$

pour toute application quasiconforme de  $B^n$  dans  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . L'inégalité (5) découle simplement de l'inégalité suivante, due à Miniowitz [M] et dont nous donnons une démonstration simplifiée par rapport à la preuve originale.

PROPOSITION 3. Il existe  $C = C(K, n)$  et  $\epsilon = \epsilon(K, n) > 0$  tels que si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  est  $K$ -quasiconforme,

$$\forall z \in B^n \quad \frac{1}{C} (1 - |z|)^{\epsilon(K, n)} \leq \frac{|f(z)|}{|f(0)|} \leq C (1 - |z|)^{-\epsilon(K, n)}.$$

Preuve. Par le théorème spécial de distorsion, si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  est  $K$ -quasiconforme,

$$\forall x, y \in B^n, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}(1-|y|) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C(K, n) |f(y)|$$

car  $0 \notin f(B^n) \Rightarrow d(f(y), \partial f(B^n)) \leq |f(y)|$ .

En particulier il existe une (autre) constante  $C(K, n)$  telle que

$$(6) \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}(1-|y|) \Rightarrow |f(x)| \leq C(K, n) |f(y)|.$$

L'inégalité (6) est une inégalité de type Harnack que nous aurons à réutiliser dans la suite.

Soit maintenant  $x \in B^n$  ; si  $|x| \leq \frac{1}{2}$ , l'inégalité (6) implique

$$|f(x)| \leq C(K, n) |f(0)|.$$

Si  $|x| \in \left[1 - \frac{1}{2^p}, 1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right]$ , alors, par (6)

$$|f(x)| \leq C(K, n) \left| f\left(\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{x}{|x|}\right) \right|.$$

Par récurrence on en déduit

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C(K, n)^{p+1} |f(0)| \\ &\leq C(K, n) |f(0)| (1 - |x|)^{-\epsilon(K, n)} \end{aligned}$$

car  $p \sim -\log(1 - |x|)$ .

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on procède de façon analogue. Si  $x \in \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}\right]$ , (6)  $\implies \left| f\left(\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right) \frac{x}{|x|}\right) \right| \leq C(K, n) |f(x)|$  d'où

$$\begin{aligned} \frac{|f(0)|}{|f(x)|} &\leq \frac{|f(0)|}{\left| f\left(\left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{x}{|x|}\right) \right|} \frac{\left| f\left(\left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{x}{|x|}\right) \right|}{\left| f\left(\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \frac{x}{|x|}\right) \right|} \dots \frac{\left| f\left(\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right) \frac{x}{|x|}\right) \right|}{|f(x)|} \leq C(K, n)^{p+1} \\ &\leq C(K, n) (1 - |x|)^{-\epsilon(K, n)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant très facilement conclure :

$$\int_{B^n} \frac{|Df(x)|}{|f(x)|} dx \leq \left( \int_{B^n} \frac{|Df(x)|^n}{|f(x)|^n} (1 - |x|)^{n/3} dx \right)^{1/n} \left( \int_{B^n} (1 - |x|)^{\frac{-n}{3(n-1)}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

par Hölder. La deuxième intégrale est évidemment finie. Pour évaluer la première, on écrit  $|Df(x)|^n \leq K J(x, f)$  et l'on effectue le changement de variable  $z = f(x)$ .

Alors

$$\int_{B^n} \frac{|Df(x)|^n}{|f(x)|^n} (1 - |x|)^{n/3} dx \leq K \int_{f(B^n)} \frac{(1 - |f^{-1}(z)|)^{n/3} dz}{|z|^n}.$$

On coupe alors cette dernière intégrale en deux suivant que  $|z| \leq |f(0)|$  ou



$|z| > |f(0)|$  et l'on utilise respectivement le fait que  $1 - |f^{-1}(z)| \leq C \left( \frac{|z|}{|f(0)|} \right)^{1/\varepsilon}$  et que  $1 - |f^{-1}(z)| \leq C \left( \frac{|f(0)|}{|z|} \right)^{1/\varepsilon}$ , par l'inégalité de Miniowitz.

Le théorème 5 est donc entièrement démontré.

Nous pouvons alors évoquer le résultat suivant, dû à Varopoulos [Var].

PROPOSITION 4. Soit  $u : B^n \rightarrow \mathbb{R} \in W_{1, \text{loc}}^1(B^n)$  une fonction telle que  $|\nabla u| dx$  soit une mesure de Carleson dans  $B^n$  de "norme"  $\|u\|_*$ . Alors  $u$  admet des limites radiales  $\tilde{u}(x)$  presque partout sur  $S^{n-1}$  et  $\tilde{u} \in \text{BMO}(S^{n-1})$  avec une norme ne dépassant pas  $C(n)\|u\|_*$ .

De cette proposition, on déduit immédiatement que

$$(7) \quad \sup_{0 < r < 1} \left\| \log |f(rx)| \right\|_{\text{BMO}(S^{n-1})} \leq C(K, n)$$

si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  est  $K$  quasiconforme. D'autre part, par le théorème 6,

$$(8) \quad \left| \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} (\log |f(x)| - \log |f(\frac{x}{2})|) d\sigma(x) \right| \leq C(K, n).$$

Enfin, (7), (8) et l'inégalité de John et Nirenberg montrent qu'il existe

$p = p(K, n) > 0$  tel que :

$$\sup_{0 < r < 1} \left\| f(rx) \right\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C(K, n) |f(0)|,$$

ce qui généralise au cas quasiconforme le théorème de Prawitz.

### 3. UNE VERSION $n$ -DIMENSIONNELLE DU THEOREME DE DISTORSION DE POMMERENKE

Pour  $x \in S^{n-1}$ , nous définissons  $\Gamma(x)$ , le cône de sommet  $x$ , par

$$\Gamma(x) = \{y \in B^n ; |y-x| < 3(1-|y|)\}.$$

Si  $F : B^n \rightarrow E$  (où  $E$  est un espace de Hilbert) est une fonction quelconque, la fonction maximale non tangentielle de  $F$  est alors définie par

$$\forall x \in S^{n-1}, \quad F^*(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} |F(y)|.$$

Enfin, si  $z \in B^n$ , nous appellerons calotte associée à  $z$  l'ensemble

$$\begin{aligned} S(z) &= \{x \in S^{n-1} ; z \in \Gamma(x)\} \\ &= S^{n-1} \cap B^n(z, 3(1-|z|)). \end{aligned}$$

Nous aurons besoin des résultats élémentaires suivants, dont la preuve est laissée au lecteur :

$$(9) \quad S(z) = S^{n-1} \quad \text{si} \quad |z| < \frac{1}{2},$$

(10)  $T_z(S(z))$  contient toujours une "hémisphère", (les transformations de Möbius  $T_z$  ont été définies au 2)),

(11) Si  $x, y \in S(z)$ ,

$$\frac{1}{9}(1-|z|)^{-1} |x-y| \leq |T_z(x) - T_z(y)| \leq 2(1-|z|)^{-1} |x-y|$$

$$(12) \quad \forall z \in B^n, \quad B^n(0, \frac{1}{7}) \subset T_z(B^n(z, \frac{1}{4}(1-|z|))) \subset B^n(0, \frac{1}{2}).$$

Nous nous proposons alors de démontrer le résultat suivant, qui généralise le théorème de distorsion de Pommerenke (Théorème II.5).

THEOREME 6. Si  $K \geq 1$ , il existe une constante  $C(K, n) > 0$  telle que si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $K$ -quasiconforme, alors, pour tout  $z \in B^n$ , il existe un segment non euclidien  $\gamma$  joignant  $z$  et  $S(z)$  tel que

$$(13) \quad \text{longueur}(f(\gamma)) \leq C(K, n) d(f(z), \partial f(B^n)).$$

Comme nous allons le voir dans un instant, le théorème 6 est un corollaire immédiat du théorème 7 ci-dessous : mais avant de l'énoncer il nous faut introduire une définition. Si  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $K$ -quasiconforme et  $x \in S^{n-1}$ ,  $L_f(x)$  désigne la longueur de l'image par  $f$  du rayon  $\{tx ; 0 \leq t < 1\}$ . On a alors :

THEOREME 7. Il existe  $C(K, n)$  et  $p(K, n) > 0$  tels que

$$\|L_f\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C(K, n) d(f(0), \partial f(B^n)).$$

Supposons le théorème 7 démontré, et voyons pourquoi il implique le théorème 6. Soit donc  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -quasiconforme et  $z \in B^n$ . Posons  $g = f \circ T_z^{-1}$ . En appliquant le théorème 7 à  $g$ , on s'aperçoit que pour tout  $M > 0$ ,

$$\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} ; L_g(x) > M d(f(z), \partial f(B^n))\right\}\right) \leq \left(\frac{C(K, n)}{M}\right)^p.$$

On choisit alors  $M$  assez grand pour que  $\left(\frac{C}{M}\right)^p \leq \frac{\omega_{n-1}}{4}$ . Par (10), il existe alors  $x \in T_z(S(z))$  tel que

$$L_g(x) \leq M d(f(z), \partial f(B^n)),$$

ce qui prouve le théorème 6 avec  $\gamma = T_z^{-1}([0, x])$ .

Nous consacrons le reste de cette section à la démonstration du théorème 7.

Par une translation préalable, nous pouvons supposer que  $f$  ne s'annule pas dans  $B^n$  et que  $|f(0)| = d(f(0), \partial f(B^n))$ . Pour presque tout  $x \in S^{n-1}$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} L_f(x) &\leq \int_0^1 |Df(tx)| dt \\ &\leq V_f(x) + 2^{n-1} |f^*(x)| H_f(x), \end{aligned}$$

où  $V_f(x) = \int_0^{1/2} |Df(tx)| dt$  et  $H_f(x) = \int_0^1 \frac{|Df(tx)|}{|f(tx)|} t^{n-1} dt$ .

LEMME 1.  $V_f \in L^1(S^{n-1})$  avec  $\|V_f\|_1 \leq C(K, n) |f(0)|$ .

Preuve. On peut écrire

$$\|V_f\|_1 = \int_{B^n(0, 1/2)} \frac{|Df(y)|}{|y|^{n-1}} dy.$$

Par l'inégalité de Gehring [G2], il existe  $p = p(K, n) > n$  et  $C(K, n) > 0$  tels que

$$\begin{aligned} (14) \quad \left( \int_{B^n(0, 1/2)} |Df(y)|^p dy \right)^{1/p} &\leq C(K, n) \left( \int_{B^n(0, 1/2)} J(x, f) dx \right)^{1/n} \\ &= C(K, n) |f(B^n(0, 1/2))|^{1/n} \\ &\leq C(K, n) |f(0)|, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité de Harnack (6). Par l'inégalité de Hölder, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \|V_f\|_1 &\leq \left( \int_{B^n(0, 1/2)} |Df(y)|^p dy \right)^{1/p} \left( \int_{B^n(0, 1/2)} |y|^{-\frac{(n-1)p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C(K, n) |f(0)|, \end{aligned}$$

par (14) et le fait que  $\frac{(n-1)p}{p-1} < n$ .

LEMME 2.  $H_f \in L^1(S^{n-1})$  avec  $\|H_f\|_1 \leq C(K, n)$ .

Cela découle directement du théorème 5 de P. Jones.

Pour terminer la preuve du théorème 7, il nous faut à présent une estimation sur  $f^*$ .

Mais avant cela, rappelons qu'une fonction  $g : B^n \rightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}$  est dite satisfaire la condition de Harnack s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(15) \quad \forall x, y \in B^n, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} d(x, \partial B^n) \implies |g(y)| \leq C |g(x)|.$$

Nous appellerons constante de Harnack et nous la noterons  $C(g)$  la plus petite constante  $C$  telle que (15) soit vérifié.

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant, qui nous permettra de conclure :

PROPOSITION 5. Soit  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \in W_{1,loc}^1(B^n)$  et  $u = \log |f|$ . Si  $|\nabla u| dx$  est une mesure de Carleson et si  $f$  satisfait la condition de Harnack, alors, pour tout  $p > 0$ ,

$$\|f^*\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(S^{n-1})},$$

où  $C$  ne dépend que de  $n, p, \|u\|_*$  et  $C(f)$ .

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

LEMME 3. Sous les hypothèses de la proposition 5, si  $N > C(f)^2$ , on a

$$\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} ; |f(x)| \leq \frac{|f(0)|}{N}\right\}\right) \leq \frac{7^n \|u\|_*}{\log N}.$$

Preuve. Soit  $F_N = \left\{x \in S^{n-1} ; |f(x)| \leq \frac{|f(0)|}{N}\right\}$  et  $G(x) = \int_0^1 |\nabla u(tx)| t^{n-1} dt$ . Si  $x \in F_N$ ,

$$\begin{aligned} G(x) &\geq 7^{1-n} \int_{1/7}^1 |\nabla u(tx)| dt \geq 7^{1-n} \left| \int_{1/7}^1 |f(tx)|^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (|f(tx)|) dt \right| \\ &\geq 7^{1-n} \left| \log \left( \frac{|f(x)|}{|f(x/7)|} \right) \right|. \end{aligned}$$

Par la propriété de Harnack,  $|f(0)| \leq C(f) |f(x/7)|$  ; par conséquent, si  $x \in F_N$  et  $N > C(f)^2$ ,

$$G(x) \geq 7^{1-n} \left| \log \frac{N}{C(f)} \right| \geq 7^{1-n} \log N ,$$

d'où l'on déduit :

$$\sigma(F_N) \leq \frac{7^n \|G\|_1}{\log N} \leq \frac{7^n \|u\|_*}{\log N} .$$

LEMME 4. Il existe une constante universelle  $\alpha > 0$  telle que sous les hypothèses de la proposition 5, si  $z \in B^n$ ,

$$\sigma\left(\left\{x \in S(z) ; |f(x)| \leq \frac{|f(z)|}{N}\right\}\right) \leq \frac{\alpha 7^n \|u\|_*}{\log N} \sigma(S(z)) .$$

Preuve. Posons  $g(x) = f \circ T_z^{-1}(x)$ . Par (12) on voit que si  $x \in S^{n-1}$  alors  $|g(0)| \leq C(f) |g(x/7)|$ . D'autre part, par définition de la norme des mesures de Carleson,

$$\|\log |g|\|_* = \|u\|_* .$$

Par le lemme 3 appliqué à  $g$  on a, pour  $N > C(f)^2$ ,

$$\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} ; |g(x)| \leq \frac{|f(z)|}{N}\right\}\right) \leq \frac{7^n \|u\|_*}{\log N} ,$$

ce qui implique

$$\sigma\left(T_z\left(\left\{y \in S(z) ; |f(y)| \leq \frac{|f(z)|}{N}\right\}\right)\right) \leq \frac{7^n \|u\|_*}{\log N} ,$$

et l'on conclut en appliquant (11).

LEMME 5. Il existe  $0 < C(n) < 1$  et  $N(n, \|u\|_*, C(f))$  tels que

$$(16) \quad \forall \lambda > 0, \quad \sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} ; f^*(x) > \lambda, |f(x)| \leq \frac{\lambda}{N}\right\}\right) \\ \leq C(n) \sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} ; f^*(x) > \lambda\right\}\right) .$$

Preuve. Soit  $\lambda > 0$ . Posons  $\mathcal{E}(\lambda) = \{z \in B^n ; |f(z)| > \lambda\}$  et  $\mathcal{U}(\lambda) = \{x \in S^{n-1} ; f^*(x) > \lambda\}$ . Alors

$$\mathcal{U}(\lambda) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}(\lambda)} S(z).$$

Par le théorème de recouvrement de Vitali, il existe  $\alpha(n) \in (0, 1)$  et une suite  $\{z_j\} \subset \mathcal{E}(\lambda)$  telle que les  $S(z_j)$  soient deux à deux disjoints et

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma(S(z_j)) \geq \alpha(n) \sigma(\mathcal{U}(\lambda)).$$

Soit maintenant  $E_N = \{x \in S^{n-1} ; |f(x)| \leq \frac{\lambda}{N}\}$ . Alors

$$\sigma(E_N \cap \mathcal{U}(\lambda)) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma(E_N \cap S(z_j)) + (1 - \alpha(n)) \sigma(\mathcal{U}(\lambda)).$$

Mais  $E_N \cap S(z_j) \subset \{x \in S(z_j) ; |f(x)| \leq \frac{|f(z_j)|}{N}\}$  et par conséquent,

$$\sigma(E_N \cap S(z_j)) \leq \frac{\alpha 7^n \|u\|_*}{\log N} \sigma(S(z_j)) \text{ si } N > C(f)^2$$

par le lemme 4. On choisit alors  $N$  assez grand pour que  $\frac{\alpha 7^n \|u\|_*}{\log N} < \frac{\alpha(n)}{2}$  et on en déduit le lemme 5 avec  $C(n) = 1 - \frac{\alpha(n)}{2}$ .

Revenons à présent à la preuve de la proposition 5. Pour  $\lambda > 0$ , posons

$$\chi(\lambda) = \sigma(\{x \in S^{n-1} ; f^*(x) > \lambda\})$$

et

$$\theta(\lambda) = \sigma(\{x \in S^{n-1} ; |f(x)| \geq \lambda\}).$$

Par le lemme 5,

$$\chi(\lambda) \leq C(n) \chi(\lambda) + \Theta(\lambda/N)$$

$$\iff \chi(\lambda) \leq \frac{1}{1-C(n)} \Theta(\lambda/N).$$

Enfin, pour  $p > 0$

$$\begin{aligned} \|f^*\|_p^p &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \chi(\lambda) d\lambda \leq \frac{p}{1-C(n)} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \theta(\lambda/N) d\lambda \\ &\leq \frac{N^p}{1-C(n)} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Revenons à présent au théorème 7. Nous considérons donc  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$   $K$ -quasiconforme avec

$$|f(0)| = d(f(0), \partial f(B^n)).$$

Nous avons établi :

$$\text{p.p. } x \in S^{n-1} \quad L_f(x) \leq V_f(x) + 2^{n-1} f^*(x) H_f(x)$$

$$\text{avec } \|V_f\|_1 \leq C(K, n) |f(0)|, \quad \|H_f\|_1 \leq C(K, n).$$

D'après les résultats de la section 2), il existe  $p = p(K, n) > 0$  tel que  $\|f\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C(K, n) |f(0)|$ . Grâce à la proposition 5, nous en déduisons qu'il en est de même pour  $f^*$ . Une simple application de l'inégalité de Hölder montre alors que

$$\|L_f\|_{L^q(S^{n-1})} \leq C(K, n) |f(0)| = C(K, n) d(f(0), \partial f(B^n))$$

$$\text{où } q = \frac{p}{p+1}. \quad \text{CQFD.}$$

#### 4. UNE VERSION QUASICONFORME DU THEOREME DE DISTORSION DE GEHRING-HAYMAN

Dans cette partie nous revenons au cas  $n = 2$  et nous considérons la situation suivante.

$D$  est le disque unité,  $\Omega$  est un domaine de Jordan borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  un homéomorphisme  $K$ -quasiconforme de  $D$  dans  $\Omega$ . Un théorème de Väisälä [Vä] affirme alors que  $f$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\bar{D}$  sur  $\bar{\Omega}$ . Soient alors  $z_1, z_2 \in \partial D$ , et  $\delta$  l'arc de cercle  $\subset D$  passant par  $z_1$  et  $z_2$  et orthogonal à  $\partial D$ . Soit  $z_0$  le "milieu" de  $\delta$ ; si  $I$  désigne le plus petit intervalle de  $\partial D$  d'extrémités  $z_1$  et  $z_2$ ,  $z_0$  est le point  $z_I$  du chapitre II.

Nous nous proposons de montrer le résultat suivant qui est une généralisation du corollaire 3 du théorème II.7, dû à Gehring-Hayman.



THEOREME 8. Il existe  $C(K) > 0$  telle que pour tout arc de Jordan  $\gamma$  joignant  $z_1$  et  $z_2$  dans  $D$  alors

$$\text{diam}(f(\gamma)) \geq C(K) d(f(z_0), \partial\Omega).$$

Démonstration. Par une transformation de Möbius transformant  $z_1, z_0, z_2$  en  $-1, 0, 1$  on se ramène immédiatement au cas

$$z_1 = -1, \quad z_0 = 0, \quad z_2 = 1.$$

Pour simplifier, on peut également supposer  $f(0) = 0$ . Enfin on pose  $d = d(0, \partial\Omega)$ . D'après le théorème de distorsion de Gehring (théorème V.3) il existe  $1 > \alpha > 0$  ne dépendant que de  $K$  tel que

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2} d \quad \text{si} \quad |y| \leq \alpha.$$

Si  $\gamma$  rencontre  $\bar{D}(0, \alpha)$  il n'y a rien à démontrer car alors, si  $y$  est un point de  $\gamma \cap \bar{D}(0, \alpha)$ ,

$$\text{diam } f(\gamma) \geq |f(y) - f(1)| \geq |f(1)| - |f(y)| \geq \frac{1}{2} d.$$

Si maintenant  $\gamma$  ne rencontre pas  $\bar{D}(0, \alpha)$  soit  $J$  celui des deux demi cercles  $\partial D \cap \mathbb{R}_+^2$  et  $\partial D \cap \mathbb{R}_-^2$  tel que  $\gamma$  sépare  $0$  de  $J$ .

Soit alors  $\Gamma$  la famille des arcs de  $D$  joignant  $\partial D(0, \alpha)$  à  $\gamma$  et  $\tilde{\Gamma}$  la famille des arcs de  $D$  joignant  $\partial D(0, \alpha)$  à  $J$ . Alors, d'après les propriétés des modules de courbes,

$$\frac{\pi}{\log 1/\alpha} \leq M(\tilde{\Gamma}) \leq M(\Gamma) \leq KM(f(\Gamma)).$$

Appelons  $\Sigma$  l'image par  $f$  du cercle  $\partial D(0, \alpha)$ . On a alors le

LEMME 6. Il existe  $\lambda(K) > 0$  tel que

$$\text{diam } f(\gamma) \geq \lambda(K) d(f(\gamma), f(\Sigma)).$$

Preuve. Soit  $N > 0$  très grand et supposons que

$$D = \text{diam } f(\gamma) \leq \frac{1}{N} d(f(\gamma), f(\Sigma)).$$

Soit alors  $z_0 \in f(\gamma)$  et  $\Delta$  la famille des arcs joignant  $\partial D(z_0, D)$  et  $\partial D(z_0, \frac{N}{2} D)$ . Alors

$$\frac{\pi}{K \log \frac{1}{\alpha}} \leq M(f(\Gamma)) \leq M(\Delta) = \frac{2\pi}{\log \frac{N}{2}}$$

et l'on aboutit à une contradiction dès que

$$N > 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2K}.$$

Le lemme 6 s'en déduit avec  $\lambda(K) = \frac{2K}{\alpha}$ .

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème 8.

- Si  $d(f(\gamma), f(\Sigma)) \leq \frac{1}{4} d$ , il existe  $y \in \gamma$  tel que  $|f(y)| \leq \frac{3}{4} d$ ; mais alors

$$\text{diam } f(\gamma) \geq |f(1) - f(y)| \geq |f(1)| - |f(y)| \geq \frac{1}{4} d.$$

- Si  $d(f(\gamma), f(\Sigma)) > \frac{1}{4} d$  alors, par le lemme 6,

$$\text{diam } f(\gamma) \geq \frac{1}{4} \lambda(K) d.$$

Le théorème 8 est donc entièrement démontré.

## 5. APPLICATIONS QUASI-CONFORMES ET DOMAINES DE TYPE (C)

Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan du plan. Pour des raisons de commodité d'écriture, nous supposons dans cette section que  $\partial\Omega$  contient le point à l'infini.

Rappelons la définition de la notion de  $k$ -locale connexité, introduite au chapitre II.

Un fermé  $E$  de  $\mathbb{C}$  est dit  $k$ -localement connexe ( $k \geq 1$ ) si pour tout

$z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ ,  $\bar{D}(z_0, r) \cap E$  est inclus dans une composante connexe de  $\bar{D}(z_0, kr) \cap E$ . Pour simplifier nous dirons, comme dans l'introduction, que  $\Omega$  est de type  $(\mathcal{L})$  si  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est  $k$ -localement connexe pour un  $k \geq 1$ .

Nous nous proposons de généraliser au cas quasiconforme le théorème II.8 grâce/ et de la préciser/à la notion de poids de Muckenhoupt que nous allons d'abord introduire.

a) La classe de poids  $A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$

Nous dirons que  $\omega : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un poids de la classe  $A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  si pour tout carré  $Q \subset \mathbb{R}_+^2$   $\omega \in L^1(Q)$  et s'il existe  $p > 1$  et  $C > 0$  tels que

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^p(x) dx \right)^{1/p} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx$$

pour tout carré  $Q \subset \mathbb{R}_+^2$ .

Comme dans la proposition I.12, le fait pour un poids  $\omega$ , d'appartenir à  $A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  est équivalent aux conditions suivantes

$$(17) \quad \exists C > 0 ; \quad \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \exp \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q \log \omega(x) dx \right\}$$

pour tout carré  $Q \subset \mathbb{R}_+^2$ ,

$$(18) \quad \exists C > 0 ; \quad \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/2} dx \right)^2$$

pour tout carré  $Q \subset \mathbb{R}_+^2$ ,

(19) Il existe  $p > 1$  tel que  $\omega \in A^p(\mathbb{R}_+^2)$  où les classes  $A^p$  sont définies comme au chapitre I,

(20)  $\exists C, \delta, q > 0$  tels que pour tout carré  $Q \subset \mathbb{R}_+^2$  et pour tout  $E$  mesurable  $\subset Q$ ,

$$\frac{1}{C} \left( \frac{|E|}{|Q|} \right)^q \leq \frac{\int_E \omega(x) dx}{\int_Q \omega(x) dx} \leq C \left( \frac{|E|}{|Q|} \right)^\delta.$$

b) Ces définitions étant posées, nous sommes en mesure de démontrer le théorème annoncé, qui est le fruit d'un travail en commun avec D. Bekollé :

THEOREME 9. Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan tel que  $\partial\Omega$  contienne le point à l'infini et  $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega$  un homéomorphisme quasiconforme tel que  $f(\infty) = \infty$ .

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(21)  $\Omega$  est de type  $(\mathcal{C})$ ,

(22) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on ait

$$\text{diam } f(I) \leq C d(f(z_I), \partial\Omega) ,$$

(23) Le Jacobien  $J(z, f)$  de  $f$  définit un poids de la classe  $A^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .

Notons que cet énoncé a bien un sens car  $f$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  sur  $\overline{\Omega}$  ; d'autre part  $z_I$  désigne le point  $x + iy$  si  $I = [x-y, x+y]$ .

Démonstration. Grâce aux théorèmes V.6 et V.8, l'équivalence (21)  $\Leftrightarrow$  (22) se démontre exactement de la même façon que dans le théorème II.8. Il suffit donc de montrer (22) = (23). Supposons tout d'abord (22) vérifié : soit  $K \geq 1$  la constante de quasiconformalité de  $f$  et soit  $Q$  un carré de  $\mathbb{R}_+^2$  ; notons  $z_Q$  et  $\ell(Q)$  respectivement le centre et le côté de  $Q$ .

1er cas :  $\ell_Q \leq d(z_Q, \mathbb{R})$ .

Par un théorème de Gehring [G2] il existe alors  $C(K) > 0$  tel que

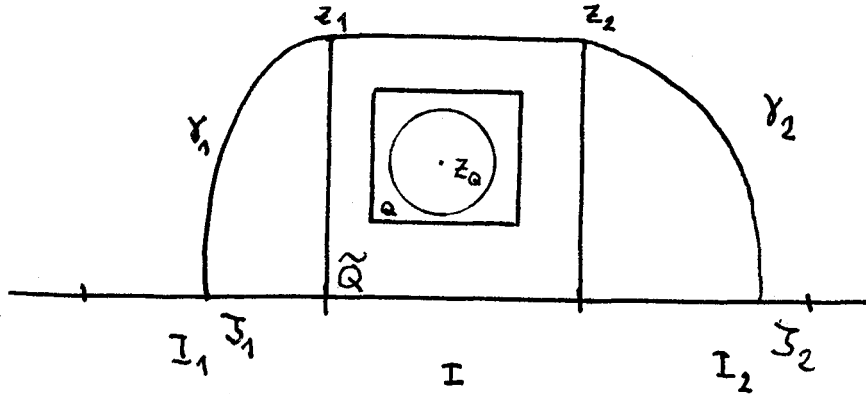
$$\frac{1}{|Q|} \int_Q J(z, f) dz \leq C(K) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q (J(z, f))^{1/2} dz \right)^2.$$

2me cas :  $\ell_Q > d(z_Q, \mathbb{R})$ .

Posons alors  $z_Q = x_Q + iy_Q$ ,  $I = [x_Q - y_Q, x_Q + y_Q]$  et  $\tilde{Q} = I \times [0, 2y_Q]$  ;

alors

$$D(z_Q, \frac{1}{2} \gamma_Q) \subset Q \subset \tilde{Q}.$$



Par des applications répétées du théorème spécial de distorsion, on montre facilement que

$$d(f(z_j), \partial\Omega) \leq C(K) d(f(z_Q), \partial\Omega) \quad j = 1, 2$$

(voir dessin), et que

$$\text{diam } f([z_1, z_2]) \leq C(K) d(f(z_Q), \partial\Omega).$$

D'autre part, par le théorème V.6, il existe  $\zeta_j \in I_j$  ( $j=1, 2$ ) et des segments non euclidiens  $\gamma_j$  joignant  $z_j$  à  $\zeta_j$  tels que

$$\text{longueur}(f(\gamma_j)) \leq C(K) d(f(z_Q), \partial\Omega).$$

Enfin, par hypothèse, si l'on désigne par  $\tilde{I}$  l'intervalle  $[\zeta_1, \zeta_2]$ ,

$$\text{diam}(f(\tilde{I})) \leq C d(f(z_Q), \partial\Omega)$$

$$\leq C \cdot C(K) d(f(z_Q), \partial\Omega),$$

la dernière inégalité provenant encore du théorème spécial de distorsion appliqué plusieurs fois. Soit alors  $U$  le domaine de Jordan bordé par la courbe

$$\zeta_1 \xrightarrow{\gamma_1} z_1 \xrightarrow{[z_1, z_2]} z_2 \xrightarrow{\gamma_2} \zeta_2 \xrightarrow{[\zeta_2, \zeta_1]} \zeta_1.$$

Alors, par ce qui a été vu,  $\text{diam } f(U) \leq C d(f(z_Q), \partial\Omega)$  et par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_Q J(z, f) dz &\leq \int_{\tilde{Q}} J(z, f) dz \leq \int_U J(z, f) dz \quad (*) \\ &\leq C d(f(z_Q), \partial\Omega)^2. \end{aligned}$$

Par le théorème V.4 d'Astala et Gehring,

$$d(f(z_Q), \partial\Omega) \leq C y_Q \exp\left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{|D(z_Q, \frac{y_Q}{2})|} \int_{D(z_Q, \frac{y_Q}{2})} \log J(y, f) dy \right\},$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_Q J(z, f) dz &\leq C y_Q^2 \exp\left\{ \frac{1}{|D(z_Q, \frac{y_Q}{2})|} \int_{D(z_Q, \frac{y_Q}{2})} \log J(y, f) dy \right\} \\ &\leq C y_Q^2 \left( \frac{1}{|D(z_Q, \frac{y_Q}{2})|} \int_{D(z_Q, \frac{y_Q}{2})} (J(y, f))^{1/2} dy \right)^2 \end{aligned}$$

et la propriété (23) découle de (18).

Enfin, supposons la propriété (23) satisfaite. Soit alors  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $Q$  le carré  $I \times I$ .

La propriété (23) implique que  $f$  appartient à un espace de Sobolev  $W_2^p(Q)$  pour un  $p > 2$ .

Par le théorème d'injection de Sobolev, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad \left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right| &\leq C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |Df(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C(K) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q J(x, f)^{p/2} dx \right)^{1/p} \\ &\leq C(K) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q J(x, f) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(\*) Les symboles  $dz$ ,  $dy$ ,  $dx$  représentent ici la mesure de Lebesgue planaire.

où la deuxième inégalité provient de la quasiconformalité de  $f$  et la troisième de l'inégalité de Hölder inverse.

Mais, par (17) et (20), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q J(x, f) \, dx &\leq C \frac{1}{|D_Q|} \int_{D_Q} J(x, f) \, dx \\ &\leq C \exp \left\{ \frac{1}{|D_Q|} \int_{D_Q} \log J(x, f) \, dx \right\}, \end{aligned}$$

où  $D_Q = D(z_I, \frac{1}{2} d(z_I, R))$ . Avec le théorème V.4, on en déduit :

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) \, dx \right| \leq C(K) d(f(z_I), \delta \Omega),$$

ce qui prouve 22.

Pour conclure, donnons deux corollaires de ce théorème.

**COROLLAIRE 1.** Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan de type  $(\mathcal{C})$  ; alors  $\delta \Omega$  est de mesure planaire nulle.

Preuve. Nous pouvons supposer que  $\infty \in \delta \Omega$  ; soit alors  $\Phi$  une représentation conforme de  $\mathbb{R}_+^2$  sur  $\Omega$  telle que  $\Phi(\infty) = \infty$ . Alors d'après le théorème 9,  $\Phi \in W_p^1(Q_n)$  pour un  $p > 2$  et tout carré  $Q_n = [-n, n] \times [0, 2n]$ . La restriction de  $\Phi$  à  $Q_n$  peut alors se prolonger en une fonction  $\Phi_n \in W_p^1(\mathbb{R}^2)$  et le résultat découle du théorème d'injection de Sobolev.

**COROLLAIRE 2.** Sous les hypothèses du théorème 9 il existe  $\varepsilon > 0$  ne dépendant que de  $K$  et de la constante  $k$  de la condition de locale connexité telle que  $f$  soit localement Hölderienne d'ordre  $\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

Preuve. C'est encore une conséquence directe du théorème d'injection de Sobolev.

Références

- [AG] ASTALA, K., GEHRING, F. Quasiconformal analogues of theorems of Koebe and Hardy-Littlewood. Preprint, University of Michigan.
- [G1] GEHRING, F. Rings and quasiconformal mappings in space. Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 353-393.
- [G2] GEHRING, F. The  $L^p$  integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. Acta Math. 130 (1973), 265-277.
- [J] JONES, P. Extension theorems for  $BMO$ . Indiana J. Math. 29 (1980), 41-66.
- [M] MINIOWITZ, R. Distortion theorems for quasi regular mappings. Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. AI Math. 4 (1979) no. 1, 63-74.
- [R] REIMANN, H. Functions in  $BMO$  and quasiconformal mappings. Comment. Math. Helv. 49 (1974), 260-276.
- [VA] VAISÄLÄ, J. Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings. Lecture Notes in Math., vol. 229.
- [VAR] VAROPOULOS, N.  $BMO$  functions and the  $\bar{\partial}$  equation. Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.



