PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

79.02

REPRESENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

Guy HENNIART

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

79.02

REPRESENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

Guy HENNIART

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Do I contradict myself ?

Very well then, I contradict myself.

(I am large, I contain multitudes)

Walt Whitman, Song of myself.

A Blandine

Ce travail a été effectué sous la direction attentive de Monsieur Cartier. Il n'aurait pu être mené à bien sans ses nombreux conseils et ses encouragements. Je lui suis en particulier redevable de la formulation définitive de nombreux résultats énoncés ici. Je l'en remercie vivement.

Les lettres et les conversations de Messieurs Buhler, Koch, Serre et Zink m'ont toujours été très profitables. Je tiens à leur exprimer ici ma reconnaissance. Je remercie également Messieurs Poitou, Serre et Tate qui ont bien voulu faire partie du jury de soutenance.

Ce travail se veut à la fois résumé des résultats connus à l'heure actuelle, et présentation de résultats personnels. Les principaux résultats personnels sont concentrés dans les chapitres 5, 10 et 13, 16.

Enfin, je voudrais remercier Madame Bonnardel, qui a bien voulu se charger de la frappe de cette thèse, et a exécuté cette tâche de façon parfaite.

Représentations du groupe de Weil d'un corps local

Soient F un corps local, $\bar{F}$ une clôture séparable algébrique de F, et W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F. Soit r une représentation projective de W_F. Nous étudions les représentations linéaires relevant r. Si r est primitive, nous déterminons une borne inférieure pour l'exposant du conducteur d'Artin de ses relèvements. Puis nous examinons les représentations multiplement imprimitives de W_F dans $SL(2,\mathbb{C})$ et $GL(2,\mathbb{C})$, et les calculons explicitement pour $F = \mathbb{Q}_2$. Pour ce dernier corps, nous déterminons aussi les représentations primitives de degré 2.

Representations of the Weil group of a local field

Let F be a local field, $\bar{F}$ a separable algebraic closure of F and W_F the Weil group of $\bar{F}$ over F. Let r be a projective representation of W_F. We study the linear representations lifting r. When r is primitive, we calculate a lower bound for the exponents of the Artin conductors of its liftings. We then look at the multiply imprimitive representations of W_F into $SL(2,\mathbb{C})$ and $GL(2,\mathbb{C})$ and give explicit calculations for $F = \mathbb{Q}_2$. We also describe the primitive representations of degree 2 for that particular field.

TABLE DES MATIÈRES

	pages
RÉSUMÉ	
TABLE DES MATIÈRES	
PREMIÈRE PARTIE : INTRODUCTION	1
1. Le problème	1
2. Les résultats	3
3. Les notations	5
DEUXIÈME PARTIE : RELÈVEMENT DES REPRÉSENTATIONS PROJECTIVES	9
4. Généralités sur les relèvements	9
5. Les relèvements des représentations projectives et leur déterminant	15
6. Caractères centriques	24
7. Conducteurs et exposants des représentations linéaires	30
8. Représentations imprimitives	41
9. Représentations imprimitives de degré premier ℓ ...	48
10. Exposant des représentations projectives	56
TROISIÈME PARTIE : REPRÉSENTATIONS IMPRIMITIVES DE DEGRÉ 2	64
11. Représentations imprimitives de degré 2	64
12. Représentations imprimitives d'exposant donné	70
13. Relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$	79
14. Représentations triplement imprimitives de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$	91
QUATRIÈME PARTIE : REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES DE DEGRÉ 2	105
15. Représentations primitives de degré 2	105
16. Représentations primitives de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$	111
CONCLUSION : PROBLÈMES OUVERTS	124
BIBLIOGRAPHIE	125

INTRODUCTION

1. Le problème.

1.1 Soit F un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de caractéristique p. Soient $\bar{F}$ une clôture séparable algébrique de F, et W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F [We 1, app.II].

La théorie du corps de classes local donne une bijection entre les caractères de W_F, i.e. ses représentations continues de degré 1, et les caractères du groupe multiplicatif $F^\times$ de F.

1.2 R.P. Langlands conjecture qu'il y a une correspondance analogue entre les (classes d'isomorphisme de) représentations irréductibles de W_F dans $GL(n,\mathbb{C})$ et les (classes d'isomorphisme de) représentations supercuspidales de $GL(n,F)$. Cette correspondance, entre autres propriétés, doit conserver les facteurs L et ε, ainsi que les conducteurs.

De même, il existerait un tel lien entre les représentations irréductibles de W_F dans $SL(n,\mathbb{C})$ (resp. $PGL(n,\mathbb{C})$) et les représentations supercuspidales de $PGL(n,F)$ (resp. $SL(n,F)$) [Bo].

1.3 En fait cette conjecture n'est établie que pour $n = 2$, et pour certains corps F seulement : on la connaît pour les corps locaux de caractéristique résiduelle distincte de 2, pour ceux de caractéristique 2 , pour $\mathbb{Q}_2$ et certaines extensions de $\mathbb{Q}_2$ [Tu, Yo, Ca, Ge]. On ne possède que des renseignements partiels pour $n > 2$ [Co].

1.4 Nous étudierons ici les représentations de degré n de W_F (le versant dit "galoisien" des conjectures de Langlands) en suivant pour cela la méthode d'A. Weil [We 2 ou He 1].

Elle consiste à déterminer d'abord les représentations projectives $r : W_F \to PGL(n,\mathbb{C})$, puis à trouver les représentations linéaires $R : W_F \to GL(n,\mathbb{C})$ relevant r , c'est-à-dire telles que $\pi \circ R = r$, où π est la projection de $GL(n,\mathbb{C})$ sur $PGL(n,\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd} & W_F \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, "r"] \\ GL(n,\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi"] & PGL(n,\mathbb{C}) \end{tikzcd} .$$

Nous verrons que toute représentation projective r de W_F admet un tel relèvement.

1.5 Une représentation projective irréductible de W_F a une image finie. On peut demander le nombre de représentations projectives de W_F ayant une image donnée.

Si l'on fixe la représentation projective irréductible r , on peut rechercher un relèvement R d'image finie, et s'intéresser à l'exposant du conducteur d'Artin de R , qu'on appellera l'exposant de R . L'on peut vouloir calculer l'exposant minimal de ces relèvements de r , que l'on appellera l'exposant de r . L'on peut enfin se demander si r a un relèvement à $SL(n,\mathbb{C})$ (où n est le degré de r), c'est-à-dire un relèvement dont l'image soit dans $SL(n,\mathbb{C})$.

Ce sont tous ces problèmes que nous aborderons.

2. Les résultats.

2.1 La seconde partie de ce mémoire, intitulée "Relèvements de représentations projectives", est l'exposé d'un travail effectué en commun avec J. Buhler au cours de l'été 1977, et de ses prolongements durant l'hiver.

On considère une représentation primitive r de W_F dans $PGL(n,\mathbb{C})$. (Dire que r est primitive revient à dire que r est irréductible et que ses relèvements ne sont pas des représentations induites [voir ch. 4]).

On sait alors, par les résultats de H. Koch [Ko 3] que le degré n de r est une puissance de la caractéristique résiduelle, disons $n = p^d$.

Nous donnons un minorant pour l'exposant de r.

2.2 Le noyau de r fixe l'extension finie K de F. Soit F_1 l'extension modérément ramifiée de F, incluse dans K, et maximale pour ces propriétés. Soit r_1 la restriction de r à W_{F_1}. Cette représentation est irréductible [Ko 3]. Nous montrerons :

Théorème 2.2. Si r est une représentation projective primitive de degré p^d de W_F, les exposants $a(r)$ et $a(r_1)$ de r et r_1 respectivement sont liés par la formule suivante :

$$ea(r) = (e-1)p^d + a(r_1) ,$$

où e est l'indice de ramification de F_1 sur F.

2.3 Appelons G le groupe de Galois de K sur F, et notons G^u ses sous-groupes de ramification en numérotation supérieure.

Théorème 2.3. Soit $\alpha = \sup\{u \mid G^u \neq 1\}$. Alors l'exposant $a(r)$ de r vérifie l'inégalité suivante :

$$a(r) \geqslant p^d + (p^d+1)\alpha \ .$$

Pour $d=1$, _on a même l'égalité_ $a(r) = p + (p+1)\alpha$.

Le cas $d=1$ est dû à J. Buhler [Bu]. Pour démontrer ces théorèmes, nous devons étudier les représentations de W_F induites à partir d'un caractère d'un sous-groupe ouvert de W_F , en particulier dans le cas de degré premier.

2.4 Les résultats précédents nécessitent également l'étude de la torsion, par un caractère, d'une représentation linéaire de W_F . Si ρ est une telle représentation, nous noterons $a(\rho)$ l'exposant de son conducteur d'Artin.

Théorème 2.4. _Soit_ R _une représentation linéaire de_ W_F , _irréductible et de degré_ n . _Supposons que, pour tout caractère_ η _de_ W_F , _l'on ait_ $a(R) \leqslant a(R\otimes\eta)$. (_On dit alors que_ R _est primordiale_). _Donnons-nous un caractère_ χ _de_ W_F . _Alors l'on a_

$$a(R\otimes\chi) = \sup(a(R), na(\chi)) \ .$$

2.5 Les troisième et quatrième parties de ce mémoire donnent les démonstrations des résultats annoncés dans ma _note aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences_ de Paris [He 2]. Ces résultats concernent les représentations de degré 2 de W_F .

2.6 Dans la troisième partie, nous indiquons la construction des représentations linéaires _imprimitives_ de degré 2 de W_F , où "imprimitive" signifie "irréductible _et_ induite".

Nous construisons aussi les représentations projectives correspondantes, dites également _imprimitives_, et calculons leur exposant. Nous examinons plus attentivement le cas des représentations _triplement imprimitives_, i.e. induites à partir de trois sous-groupes distincts de W_F .

Suivant la méthode de J. Tunnell [Tu, ch. 4], nous complétons ses résultats et comptons ainsi le nombre de représentations projectives imprimitives d'exposant donné.

Nous calculons également le nombre de représentations triplement imprimitives de W_F dans $SL(2,\mathbb{C})$, et examinons le problème du relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ d'une représentation projective imprimitive.

Enfin, pour le corps $F = \mathbb{Q}_2$, nous donnons, essentiellement sous forme de tables, des constructions explicites de relèvements pour les représentations projectives triplement imprimitives de W_F : relèvements primordiaux, relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$, relèvements dont l'image soit le groupe diédral D_8 .

2.7 La quatrième partie concerne les représentations <u>primitives</u> de degré 2 de W_F . Ce cas ne peut se produire que si $p = 2$.

L'exposant d'une représentation projective primitive de degré 2 est donné par le théorème 2.3. Nous décrivons ces représentations, en suivant [We 2], et comptons, par la méthode de [Tu, ch. 5], le nombre de celles qui ont un exposant donné.

Puis nous donnons un critère de W. Zink [Zi 1] pour déterminer si une représentation projective primitive se relève à $SL(2,\mathbb{C})$.

Enfin, nous indiquons une construction explicite de relèvements pour chacune des quatre représentations projectives primitives de $W_{\mathbb{Q}_2}$.

Une conclusion examine quelques problèmes ouverts.

3. <u>Les notations</u>.

3.1 Par <u>corps local</u>, nous entendrons : corps local non archimédien, de corps résiduel fini. Le corps local F sera fixé. On choisit une clôture séparable algébrique $\bar{F}$ de F et tous les corps locaux considérés sont supposés contenus dans $\bar{F}$. Nous appellerons p <u>la caractéristique résiduelle de</u> F .

Si K est une extension finie de F, on note G_K le groupe de Galois de $\bar{F}$ sur K, et W_K le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur K, et l'on munit ces groupes de leur topologie usuelle.

3.2 Nous utiliserons les autres notations usuelles sur les corps locaux [Se 1].

Si K est une extension finie de F, $K^\times$ sera son groupe multiplicatif, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, $\mathfrak{p}_K$ son idéal maximal, π_K une uniformisante, $U_K = U_K^0$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$, U_K^m, pour $m \geqslant 1$, le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}_K^m$, et enfin v_K la valuation de K telle que $v_K(\pi_K) = 1$.

On mettra sur K la norme $\| \ \|_K$, telle que $\|\pi_K\|_K = q_K^{-1}$, où q_K est le cardinal du corps résiduel de K.

La théorie du corps de classes local définit <u>l'application de réciprocité</u> $\tau_K : W_K \to K^\times$, qui permet d'identifier W_K^{ab}, l'abélianisé de W_K, et $K^\times$. Cela nous permet aussi de transporter la norme de $K^\times$ sur W_K. On introduit ainsi <u>les caractères non-ramifiés</u> ω_s <u>de</u> W_F : s est un nombre complexe, et ω_s est défini par
$\omega_s(x) = \|\tau_K(x)\|_K^s$, pour $x \in W_K$.

3.3 Soit K une extension galoisienne finie d'un corps local L. On notera $\mathrm{Gal}(K/L)$ le groupe de Galois de K sur L, $e_{K/L}$ l'indice de ramification, $f_{K/L}$ le degré d'inertie, $N_{K/L}$ la norme, $\mathfrak{D}_{K/L}$ la différente, $\delta_{K/L}$ le discriminant, et $d_{K/L} = v_K(\mathfrak{D}_{K/L})$ l'exposant differental.

Si l'on pose $G = \mathrm{Gal}(K/L)$, on notera G^u et G_v les sous-groupes de ramification de G en numérotations supérieure et inférieure respectivement, et $\psi_{K/L}$, $\varphi_{K/L}$ les fonctions de Herbrand correspondantes [Se 1, ch. 4]. On a $G^u = G_{\psi(u)}$ et $G^{\varphi(v)} = G_v$.

L'on désignera par $\alpha(K/L)$ le plus grand indice u tel que $G^u \neq 1$ et par $\beta(K/L) = \psi_{K/L}(\alpha(K/L))$ le plus grand indice v tel que $G_v \neq 1$.

3.4 Nous noterons K^{NG} le groupe des éléments de $K^{\times}$ dont la norme sur L vaut 1. Nous noterons K^{IG} le sous-groupe de $K^{\times}$ engendré par les éléments $x^{s-1} = x^s/x$ où $x \in K^{\times}$ et $s \in G$. Evidemment K^{IG} est inclus dans K^{NG}. D'ailleurs on a $H^{-1}(G,K^{\times}) = K^{NG}/K^{IG}$. Si $x \in K^{NG}$, nous noterons $[x]$ son image dans $H^{-1}(G,K^{\times})$.

3.5 Nous utiliserons souvent certains résultats sur les extensions de groupes, que nous rappelons ici d'après [AT, ch. 13]. En fait, nous les énonçons de façon plus générale [He 1, app. A].

On considère des extensions de groupes <u>topologiques</u> :

$$1 \to A \to E \to G \to 1 ,$$

où A est un sous-groupe abélien de E, distingué et fermé dans E, et G le quotient de E par A.

Nous supposerons que ces extensions vérifient l'une des deux conditions suivantes :

i) G <u>est discret</u> ;

ii) E <u>est extension d'un groupe discret par un groupe profini</u>, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe ouvert de E, à la fois invariant et profini.

3.6 <u>Lemme</u> 3.6. <u>On se donne deux extensions</u> E <u>et</u> E' <u>de</u> G <u>par</u> A <u>et de</u> G' <u>par</u> A' <u>respectivement</u>. <u>On se donne également des homomorphismes continus</u> $f : A \to A'$ <u>et</u> $\varphi : G \to G'$.
<u>On appelle</u> σ (resp. σ') <u>l'élément de</u> $H^2(G,A)$ (resp. $H^2(G',A')$) <u>définissant</u> E (resp. E').
<u>Il existe un homomorphisme</u> $F : E \to E'$, <u>continu</u>, <u>rendant commutatif le diagramme suivant</u> :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \to & E & \to & G & \to & 1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow F & & \downarrow \varphi & & \\ 1 & \to & A' & \to & E' & \to & G' & \to & 1 \end{array} ,$$

<u>si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées</u> :

1) f <u>est un</u> G-<u>homomorphisme</u>, G <u>opérant sur</u> A' <u>à travers</u> φ ;
2) $f_*(\sigma) = \varphi^*(\sigma')$ (<u>ces éléments appartiennent à</u> $H^2(G,A')$).

Si l'on dit que deux solutions F et F' du problème précédent sont <u>équivalentes</u> quand elles diffèrent par un automorphisme de E' de la forme $e' \mapsto a'e'a'^{-1}$ avec $a' \in A'$, alors $H^1(G,A')$ opère transitivement sans point fixe sur l'ensemble des classes d'équivalence.

3.7 Si P est un corps et m un entier, $m \geq 1$, nous noterons $\mu_m(P)$ le groupe des racines m^e de l'unité dans P . C'est le noyau de l'application d'élévation à la puissance m , que nous noterons $\tilde{m} : P^\times \to P^\times$. On posera $\mu_m(\mathbb{C}) = \mu_m$.

RELÈVEMENTS DES REPRÉSENTATIONS PROJECTIVES

4. Généralités sur les relèvements.

4.1 Soit $\mathcal{G}$ un groupe topologique. Nous voulons étudier les représentations de $\mathcal{G}$ dans $GL(n,\mathbb{C})$ ou $PGL(n,\mathbb{C})$, où par représentation nous entendons homomorphisme continu. En pratique, nous prendrons une extension finie K du corps local F et $\mathcal{G} = W_K$ ou G_K. Pour ces groupes, il revient au même de mettre la topologie usuelle ou la topologie discrète sur $GL(n,\mathbb{C})$ ou $PGL(n,\mathbb{C})$. Nous choisirons la topologie discrète.

Un caractère de $\mathcal{G}$ sera une représentation linéaire de degré 1.

4.2 Une représentation linéaire R de $\mathcal{G}$ dans $GL(n,\mathbb{C})$ définit, par composition avec la projection π de $GL(n,\mathbb{C})$ sur $PGL(n,\mathbb{C})$, une représentation projective $r = \pi \circ R$. Inversement, si r est une représentation projective de $\mathcal{G}$, on peut chercher les relèvements de r, i.e. les représentations linéaires R de $\mathcal{G}$ vérifiant $r = \pi \circ R$.

Si r possède un relèvement R, les autres relèvements sont les représentations $R' = R \otimes \chi$, où χ est un caractère de $\mathcal{G}$.

4.3 Interprétons ceci en termes d'extensions de groupes. Dans toute la suite, nous noterons c l'élément de $H^2(PGL(n,\mathbb{C}),\mathbb{C}^\times)$ qui définit $GL(n,\mathbb{C})$ comme extension de $PGL(n,\mathbb{C})$ par $\mathbb{C}^\times$, identifié au centre de $GL(n,\mathbb{C})$.

Si r est une représentation projective de degré n de $\mathcal{G}$, un relèvement R de r est un homomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "R"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & GL(n,\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi"] & PGL(n,\mathbb{C}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition</u> 4.3. <u>Une représentation</u> r <u>de</u> $\mathcal{G}$ <u>dans</u> $PGL(n,\mathbb{C})$ <u>a un relèvement si et seulement si l'on a</u> $r^*(c)=0$ <u>dans</u> $H^2(\mathcal{G},\mathbb{C}^\times)$.

C'est immédiat par le lemme 3.6. En fait, l'élément $r^*(c)$ de $H^2(\mathcal{G},\mathbb{C}^\times)$ définit une extension $\mathcal{G}_G$ de $\mathcal{G}$ par $\mathbb{C}^\times$: c'est le sous-groupe de $\mathcal{G}\times GL(n,\mathbb{C})$ composé des paires (g,γ) telles que $r(g) = \pi(\gamma)$. Il existe une représentation linéaire r_G de $\mathcal{G}_G$, définie par $r_G((g,\gamma)) = \gamma$, qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \mathcal{G}_G \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, "r_G"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & GL(n,\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi"] & PGL(n,\mathbb{C}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Dire que r possède un relèvement est dire que l'homomorphisme φ_G a une section, i.e. que $\mathcal{G}_G$ est le produit direct de $\mathcal{G}$ par $\mathbb{C}^\times$.

4.4 Si nous notons c_S l'élément de $H^2(PGL(n,\mathbb{C}),\mu_n)$ qui définit $SL(n,\mathbb{C})$, on a, de la même façon, la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 4.4. <u>Une représentation</u> r <u>de</u> $\mathcal{G}$ <u>dans</u> $PGL(n,\mathbb{C})$ <u>a un relèvement à</u> $SL(n,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si l'on a</u> $r^*(c_S) = 0$ <u>dans</u> $H^2(\mathcal{G},\mu_n)$.

De même, l'élément $r^*(c_S)$ de $H^2(\mathcal{G},\mu_n)$ définit l'extension $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_G \cap (\mathcal{G} \times SL(n,\mathbb{C}))$ de $\mathcal{G}$ par μ_n et il existe une représentation $r_S = r_G|_{\mathcal{G}_S}$ rendant commutatif le diagramme ci-après :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \to \mu_n & \longrightarrow & \mathcal{G}_S & \xrightarrow{\quad\varphi_S\quad} & \mathcal{G} & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow \mathrm{id.} & & \downarrow r_S & & \downarrow r & & \\
1 \to \mu_n & \to & SL(n,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi|SL(n,\mathbb{C})} & PGL(n,\mathbb{C}) & \to & 1 .
\end{array}$$

Alors r a un relèvement à $SL(n,\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathcal{G}_S$ est produit direct de $\mathcal{G}$ par μ_n .

Remarquons que, si i désigne l'injection de μ_n dans $\mathbb{C}^\times$, l'on a $i_*(c_S) = c$, d'où $i_*(r^*(c_S)) = r^*(c)$. Comme c_S est annulée par n , $r^*(c)$ est d'ordre divisant n dans $H^2(\mathcal{G},\mathbb{C}^\times)$.

4.5 Le groupe $PGL(n,\mathbb{C})$ agit sur l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbb{C})$. Une représentation r de $\mathcal{G}$ dans $PGL(n,\mathbb{C})$ est dite <u>irréductible</u> s'il n'existe aucun sous-espace strict de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ invariant par $r(\mathcal{G})$. Il revient au même de dire que les représentations r_G ou r_S sont des représentations linéaires irréductibles.

Si r possède un <u>relèvement</u>, elle sera irréductible précisément quand un de ses relèvements le sera, et tous ses relèvements le seront alors.

4.6 De même, r sera dite <u>induite</u> si l'on peut décomposer $P^{n-1}(\mathbb{C})$ en somme directe de sous-espaces stricts permutés par l'action de $r(\mathcal{G})$. Cela revient à dire que r_G (ou r_S) est <u>induite</u> [Se 4].

On dira que r est <u>imprimitive</u> si elle est irréductible et induite, <u>primitive</u> si elle est irréductible et non induite ; de même pour des représentations linéaires de $\mathcal{G}$.

Si r possède un relèvement, elle est imprimitive (resp. primitive) quand un de ses relèvements l'est, et tous le sont alors.

4.7 Examinons d'abord le lien entre représentations de W_F et représentations de G_F. Il est bien connu que l'on a une injection continue à image dense de W_F dans G_F. Toute représentation de G_F définit ainsi une représentation de W_F, par restriction.

Inversement une représentation ρ de W_F (linéaire ou projective) se prolonge en une représentation de G_F si et seulement si son image est finie. On dit alors que ρ est <u>de type galoisien</u>, et, le plus souvent, on notera encore ρ l'extension de ρ à G_F, qui est unique. En particulier, un caractère de $F^\times$ correspond, par la théorie du corps de classes à un caractère de type galoisien de W_F si et seulement s'il est d'ordre fini.

4.8 Rappelons que π désigne la projection de $GL(n,\mathbb{C})$ sur $PGL(n,\mathbb{C})$.

Nous appellerons <u>non-ramifiée</u> une représentation de W_F qui est triviale sur I_F. Fixons un élément Fr de W_F dont l'image dans $W_F/I_F \simeq \mathbb{Z}$ engendre ce groupe. Une représentation non-ramifiée de W_F est déterminée par la donnée de l'image de Fr.

Soient ρ et ρ' deux représentations (linéaires ou projectives) de W_F. Si les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de $\rho'(W_F)$, (on dit, par abus de langage que ρ et ρ' commutent), l'on définit <u>le produit</u> $\rho.\rho'$ par $(\rho.\rho')(g) = \rho(g)\rho'(g)$ pour $g \in W_F$.

<u>Théorème</u> 4.8. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de degré</u> n <u>de</u> W_F. <u>Posons</u> $H = \pi^{-1}(r(W_F))$. <u>Alors il existe une représentation non-ramifiée</u> $\rho : W_F \to GL(n,\mathbb{C})$, <u>telle que les éléments de</u> $\rho(W_F)$ <u>commutent à ceux de</u> H <u>et que la représentation</u> $r.(\pi\circ\rho)$ <u>soit de type galoisien</u>.

4.9 <u>Corollaire</u> 1. <u>Toute représentation projective irréductible de</u> W_F <u>est de type galoisien</u>.

Corollaire 2. Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F. Alors il existe une représentation non-ramifiée $\sigma : W_F \to GL(n,\mathbb{C})$, commutant à R, et telle que $R.\sigma$ soit de type galoisien.

Corollaire 3. Toute représentation linéaire irréductible R de W_F est de la forme $R = S \otimes \omega_s$, où S est de type galoisien.

4.10 Démontrons le corollaire 1 : Soient r la représentation projective considérée et ρ la représentation non-ramifiée donnée par le théorème 4.8. Alors ρ commute à H, qui est un sous-groupe irréductible de $GL(n,\mathbb{C})$, puisque r est irréductible. Par suite $\rho(W_F)$ est formé de matrices scalaires et $\pi\circ\rho$ est triviale. Donc r est de type galoisien.

Démontrons les corollaires 2 et 3 : Soit $R : W_F \to GL(n,\mathbb{C})$ une représentation linéaire. Appliquons le théorème 4.8 à $r = \pi\circ R$. On a une représentation non-ramifiée ρ, commutant à R, et telle que $r.(\pi\circ\rho)$ soit de type galoisien. Alors il existe un entier m tel que $(r(\pi\circ\rho))(Fr^m) = 1$ dans $PGL(n,\mathbb{C})$, d'où $R.\rho(Fr^m) = \omega_s(Fr^m).1_n$ pour un $s \in \mathbb{C}$, 1_n étant la matrice unité d'ordre n. Ecrivant $S = R.(\rho\otimes\omega_{-s})$, on a $S(Fr^m) = 1_n$, et S est de type galoisien. On a $S = R.\sigma$ où $\sigma = \rho\otimes\omega_{-s}$ est une représentation non-ramifiée. On a donc démontré le corollaire 2. Si R est irréductible, $\sigma(W_F)$ est formé de matrices scalaires donc il existe un nombre complexe s' tel que $\sigma(x) = \omega_{s'}(x).1_n$ pour $x \in W_F$. Alors $R = S.\sigma^{-1} = S\otimes\omega_{-s'}$, d'où le corollaire 3.

4.11 Passons à la démonstration du théorème 4.8.

Soit r une représentation projective de degré n de W_F. Comme r est continue, elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_F. Posons $J = \mathrm{Ker}(r|_{I_F}) = \mathrm{Ker}(r) \cap I_F$: ainsi J est invariant dans W_F. L'on fait agir W_F par conjugaison sur I_F/J. Comme

I_F/J est fini, une puissance de Fr , disons Fr^m , agit trivialement. Soit $x \in W_F$. On voit que $r(Fr^m)$ commute à $r(x)$. Soient φ et γ des éléments de $GL(n,\mathbb{C})$ tels que $\pi(\varphi) = r(Fr)$ et $\pi(\gamma) = r(x)$. On a ainsi $\varphi^m\gamma = s\gamma\varphi^m$, où s est un nombre complexe non nul. Prenant le déterminant des deux membres, on obtient $s^n = 1$, et par suite φ^{mn} commute à γ . On en déduit que φ^{mn} commute à tous les éléments de $H = \pi^{-1}(r(W_F))$.

4.12 Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[T]$ tel que :

$$Q(T)^{mn} \equiv T \quad \text{modulo } P(T) ,$$

où P désigne le polynôme minimal de φ^{mn} .

Posons $\varphi_o = Q(\varphi^{mn})$. On obtient ainsi une matrice φ_o commutant à tous les éléments de H et telle que $\varphi_o^{mn} = \varphi^{mn}$. Définissons la représentation non-ramifiée ρ par :

$\rho(Fr) = \varphi_o^{-1}$. Evidemment $\rho(W_F)$ commute à H et l'on a $(r.(\pi\circ\rho))(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn}\pi(\varphi_o)^{-mn} = 1$, donc $r.(\pi\circ\rho)$ est de type galoisien. C.Q.F.D.

4.13 Terminons ce chapitre par une remarque sur les représentations (projectives ou linéaires) du groupe profini I_F .

Proposition 4.13. Soit ρ une représentation de I_F . Alors il existe une extension non-ramifiée finie K de F et une représentation ρ' de G_K telles que $\rho = \rho'|_{I_F}$.

Remarquons que, puisque K est non-ramifiée sur F , on a $I_K = I_F$.

Démonstration : Le corps fixé par I_F est l'extension maximale abélienne non-ramifiée de F , notée F_{nr} . Toute représentation de I_F a un noyau d'indice fini, puisque I_F est profini. Soit E

l'extension de F_{nr} fixée par $\mathrm{Ker}(\rho)$. Utilisons alors [Se 1, lemme 7, p. 97]. Ce lemme nous donne une extension non-ramifiée K de F, et une extension totalement ramifiée E' de K, finie et galoisienne sur K, et telle que $E = E'.F_{nr}$. L'inclusion de $I_F = I_K$ dans G_K induit un isomorphisme de $I_F/\mathrm{Ker}(\rho)$ sur $\mathrm{Gal}(E'/K)$, ce qui nous permet bien de construire une représentation ρ' de G_K dont la restriction à I_F soit ρ.

5. Les relèvements des représentations projectives et leur déterminant.

5.1 Proposition 5.1. *Soit n un entier, $n \geqslant 1$, et soit n' le nombre de racines de l'unité dans F, dont l'ordre divise une puissance de n. Alors tout homomorphisme ε de $\mu_n(F)$ dans $\mathbb{C}^\times$ s'étend en un caractère χ de $F^\times$ vérifiant $\chi^{n'} = 1$.*

On a $\mu_n(F) \subset \mu_{n'}(F)$, donc ε s'étend en un caractère de $\mu_{n'}(F)$. Soit $\mu(F)$ le groupe des racines de l'unité dans F. Comme $\mu(F)$ est un groupe abélien fini, on a la décomposition $\mu(F) = \bigoplus_{\ell} \mu_{\ell^{\alpha(\ell)}}(F)$, où ℓ parcourt un ensemble fini de nombres premiers. L'on a également $\mu_{n'}(F) = \bigoplus_{\ell | n} \mu_{\ell^{\alpha(\ell)}}(F)$ et par suite $\mu_{n'}(F)$, groupe cyclique d'ordre n', est un facteur direct dans $\mu(F)$. On peut donc étendre ε en un caractère λ de $\mu(F)$ d'ordre divisant n'.

Mais il est bien connu que $F^\times$ se décompose en $F^\times = \pi_F^{\mathbb{Z}} \times U' \times \mu(F)$, où U' est un module sur $\mathbb{Z}_p$ de la forme $(\mathbb{Z}_p)^I$. On peut donc étendre λ en un caractère χ de $F^\times$ trivial sur $\pi_F^{\mathbb{Z}} \times U'$, d'où $\chi^{n'} = 1$. C.Q.F.D.

5.2 Si A est un groupe commutatif et n un entier, $n \geqslant 1$, nous noterons n_A, et parfois simplement n, la multiplication par n dans A. Nous noterons A_n son noyau et ${}_nA$ son conoyau.

<u>Proposition</u> 5.2. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>on a une suite exacte</u> :

$$1 \to \mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times) \overset{\alpha}{\to} H^2(G_F,\mu_n) \overset{\beta}{\to} H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n \to 1 .$$

Considérons la suite exacte de modules triviaux sur G_F :

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{C}^\times \overset{n}{\to} \mathbb{C}^\times \to 1 .$$

La suite exacte de cohomologie associée est :

$$\ldots H^1(G_F,\mathbb{C}^\times) \overset{n}{\to} H^1(G_F,\mathbb{C}^\times) \overset{\delta}{\to} H^2(G_F,\mu_n) \to H^2(G_F,\mathbb{C}^\times) \overset{n}{\to} H^2(G_F,\mathbb{C}^\times) ,$$

d'où l'on déduit la suite exacte :

$$1 \to {}_nH^1(G_F,\mathbb{C}^\times) \to H_2(G_F,\mu_n) \to H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n \to 1 .$$

Remarquons que $H^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ est le groupe des caractères de G_F. Par la théorie du corps de classes local, on peut l'identifier avec le groupe X_f des caractères d'ordre fini de $F^\times$. Il reste à identifier ${}_nX_f$ et $\mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times)$. Pour cela, il suffit d'établir que la suite suivante est exacte, ρ étant l'homomorphisme de restriction : $X_f \overset{n}{\to} X_f \overset{\rho}{\to} \mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times) \to 1$.

La proposition 5.1 nous dit que ρ est surjectif, et il est clair que $\rho\circ n = 1$. Il reste à voir que si χ est un caractère d'ordre fini de $F^\times$, trivial sur $\mu_n(F)$, il est de la forme $\chi = (\chi')^n$, pour un caractère χ' d'ordre fini de $F^\times$.

Comme χ est trivial sur $\mu_n(F)$, il existe un caractère θ de $(F^\times)^n$ tel que $\theta(x^n) = \chi(x)$ pour $x \in F^\times$. Mais $(F^\times)^n$ est un sous-groupe fermé du groupe localement compact $F^\times$, donc θ s'étend en un caractère χ' de $F^\times$, d'où $(\chi')^n = \chi$, et χ' est d'ordre fini puisque χ l'est. C.Q.F.D.

5.3 <u>Proposition</u> 5.3. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>on a</u> :

i) $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n = 1$,

ii) $\alpha : \mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times) \to H^2(G_F,\mu_n(\mathbb{C}))$ <u>est un isomorphisme</u>.

La démonstration que nous donnons est inspirée de [Se 2, §6.6].

La proposition 5.2 montre que les assertions i) et ii) sont équivalentes. Il suffira d'ailleurs de prouver l'une (ou l'autre) lorsque n est un nombre premier : en effet s'il n'y a pas d'élément d'ordre ℓ dans $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)$, il n'y a pas non plus d'élément d'ordre $m\ell$, quel que soit l'entier $m \geqslant 1$.

5.4 Plaçons-nous dans le cas où n est premier, mais distinct de la caractéristique de F. Supposons en outre que F contienne les racines n^e de l'unité de $\bar{F}$. Alors $\mu_n(F)$ est un G_F-module trivial, cyclique d'ordre n, donc isomorphe à μ_n. Par suite, $H^2(G_F,\mu_n)$ est isomorphe à $H^2(G_F,\mu_n(F))$.

Mais la théorie du corps de classes local nous donne le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \to & H^2(G_F,\mu_n(F)) & \to & H^2(G_F,\bar{F}^\times) & \xrightarrow{n} & H^2(G_F,\bar{F}^\times) \\
 & \downarrow & & \downarrow \mathrm{inv}_F & & \downarrow \mathrm{inv}_F \\
1 \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .
\end{array}$$

L'application inv_F est un isomorphisme, et par conséquent $H^2(G_F,\mu_n(F))$ et $H^2(G_F,\mu_n)$ sont d'ordre n. Mais $\mu_n(F)$ et $\mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times)$ sont aussi d'ordre n. L'application α étant injective par la proposition 5.2, c'est un isomorphisme.

5.5 Supposons maintenant que F ne contienne pas les racines n^e de l'unité de $\bar{F}$, n étant toujours un nombre premier distinct de la caractéristique de F. Soit E le corps engendré par F et $\mu_n(\bar{F})$. Alors E est une extension finie de F, de degré premier à n. La proposition 6 de [Se 1, chap. 7] montre alors que la restriction de $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n$ dans $H^2(G_E,\mathbb{C}^\times)_n$ est injective. D'après 5.4 le groupe $H^2(G_E,\mathbb{C}^\times)_n$ est nul, d'où $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n = 1$.

5.6 Supposons enfin que F soit de caractéristique p et que $n = p$. Alors $\mu_p(F) = 1$ et il s'agit de montrer que $H^2(G_F,\mu_p) = 1$. On peut identifier μ_p au groupe additif du sous-corps premier $\mathbb{F}_p$ de F. Les éléments de $\mathbb{F}_p$ forment le noyau de l'application $\wp$ de $\bar{F}$ dans lui-même définie par $x \mapsto x^p - x$ pour $x \in \bar{F}$.

Considérons donc la suite exacte suivante de G_F-modules :

$$1 \to \mathbb{F}_p \to \bar{F} \xrightarrow{\wp} \bar{F} \to 1 .$$

La suite exacte de cohomologie associée nous donne, puisque $H^m(G_F,\bar{F}) = 1$ pour $m \geqslant 1$, le résultat cherché : $H^2(G_F,\mathbb{F}_p) = 1$. On a donc démontré la proposition 5.3.

5.7 <u>Théorème</u> 5.7. <u>On a</u> $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times) = 1$.

En effet, l'on sait que tout élément de $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)$ est d'ordre fini, d'où $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\times} H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)_n = 1$.

Ces préliminaires cohomologiques vont nous permettre maintenant d'examiner le problème du <u>relèvement</u> d'une représentation projective de W_F ou G_F, et même celui du déterminant de ces relèvements, ce qui contient la question du <u>relèvement à</u> $SL(n,\mathbb{C})$.

5.8 <u>Théorème</u> 5.8. <u>Toute représentation projective</u> r <u>de</u> G_F (<u>respectivement de</u> W_F) <u>possède un relèvement</u>.

<u>Démonstration</u> : Pour le cas de G_F, cela découle directement du théorème 5.7 : l'obstruction au relèvement, qui est l'élément $r^*(c)$ de $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)$, est nulle.

Pour le cas de W_F, l'on utilise le théorème 4.8. Soit donc ρ une représentation non-ramifiée de W_F, ρ commutant à H, et telle que $r.(\pi\circ\rho)$ soit de type galoisien. Par le théorème 5.8 pour G_F, il existe un relèvement R de $r.(\pi\circ\rho)$. Mais alors ρ commute à R, puisque ρ commute à elle-même et à H. La représentation $R.\rho^{-1}$ est un relèvement de r. C.Q.F.D.

De la proposition 4.13 et du théorème 5.8, l'on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.8. Toute représentation projective de I_F possède un relèvement.

5.9 Examinons maintenant si l'on peut imposer le déterminant d'un relèvement, pour une représentation projective donnée. D'une façon générale, soit R une représentation linéaire de degré n de W_F. On appellera déterminant de R et on notera $\mathrm{Det}\, R$ le caractère de $F^\times$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W_F & \xrightarrow{R} & GL(n,\mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_F} & & \downarrow{\scriptstyle \det} \\ F^\times & \xrightarrow{\mathrm{Det}\, R} & \mathbb{C}^\times \end{array} .$$

Si R' est une représentation linéaire de G_F, nous noterons $\mathrm{Det}\, R'$ le déterminant de sa restriction à W_F : c'est un caractère d'ordre fini de $F^\times$, que nous appellerons déterminant de R'.

Soit α un caractère de $F^\times$; si l'on tord par $\alpha\circ\tau_F$ la représentation linéaire R de W_F, de degré n, cela revient à tordre $\mathrm{Det}\, R$ par α^n. La donnée de la représentation projective $r = \pi\circ R$ associée à R fixe donc le déterminant d'un relèvement modulo les puissances n^e des caractères. Soit X le groupe des caractères de $F^\times$. Un raisonnement analogue à celui de 5.2 montre que la restriction des caractères à $\mu_n(F)$ permet d'identifier $\mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times)$ à X modulo les puissances n^e. La donnée de r fixe donc la restriction à $\mu_n(F)$ du déterminant de ses relèvements.

5.10 Donnons-nous une représentation projective r de G_F dans $PGL(n,\mathbb{C})$, et conservons les notations de 4.3 et 4.4, avec $\mathcal{G} = G_F$.

L'obstruction au relèvement de r à $SL(n,\mathbb{C})$ est l'élément $r^*(c_S)$ de $H^2(G_F,\mu_n)$. Mais la proposition 5.3 nous donne un isomorphisme α de $\mathrm{Hom}(\mu_n(F),\mathbb{C}^\times)$ sur $H^2(G_F,\mu_n)$. A la représentation r on peut donc associer le <u>caractère</u> $\tilde{r}$ <u>de</u> $\mu_n(F)$ défini par $\tilde{r} = \alpha^{-1}(r^*(c_S))$. Le théorème suivant éclaire la remarque finale de 5.9.

<u>Théorème</u> 5.10. <u>Soient</u> r <u>une représentation projective de</u> G_F <u>dans</u> $PGL(n,\mathbb{C})$, <u>et</u> ε <u>un caractère d'ordre fini de</u> $F^\times$. <u>Pour qu'il existe un relèvement de</u> r <u>de déterminant</u> ε, <u>il faut et il suffit que</u> ε <u>coïncide avec</u> $\tilde{r}^{-1}$ <u>sur</u> $\mu_n(F)$. <u>En particulier</u>, r <u>se relève à</u> $SL(n,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si</u> $\tilde{r}=1$.

<u>Corollaire</u> 5.10. <u>Soit</u> n' <u>le nombre des racines de l'unité dans</u> F <u>dont l'ordre divise une puissance de</u> n. <u>Alors la représentation projective</u> $r : G_F \to PGL(n,\mathbb{C})$ <u>possède un relèvement</u> R <u>tel que</u> $(\mathrm{Det}\ R)^{n'} = 1$.

5.11 Montrons que le théorème implique le corollaire (qui, lui, implique trivialement le théorème 5.8).

Soit $r : G_F \to PGL(n,\mathbb{C})$ la représentation projective considérée. Par la proposition 5.1, le caractère $\tilde{r}^{-1}$ de $\mu_n(F)$ s'étend en un caractère χ de $F^\times$ tel que $\chi^{n'} = 1$. Le théorème 5.9 donne alors l'existence d'un relèvement R de r dont le déterminant soit χ, d'où le corollaire.

5.12 Démontrons le théorème 5.10, et pour cela gardons les notations de 4.3 et 4.4.

Soit $\sigma : PGL(n,\mathbb{C}) \to SL(n,\mathbb{C})$ une section quelconque de la projection $\pi_{|SL(n,\mathbb{C})}$. Alors c_S est la classe de cohomologie du cocycle $\gamma \in Z^2(PGL(n,\mathbb{C}),\mu_n)$ défini par :

$$\gamma(u,v) = \sigma(u)\sigma(v)\sigma(uv)^{-1} \quad \text{pour } u \text{ et } v \text{ dans } PGL(n,\mathbb{C}).$$

Par conséquent $r^*(c_S)$ est la classe de cohomologie du cocycle $\tilde{\gamma} \in Z^2(G_F,\mu_n)$ défini par $\tilde{\gamma}(s,s') = \sigma(r(s))\sigma(r(s'))\sigma(r(ss'))^{-1}$ pour s et s' dans G_F.

Un relèvement $R : G_F \to GL(n,\mathbb{C})$ de r est défini par une application continue $h : G_F \to \mathbb{C}^\times$ telle que $R(s) = h(s)\sigma(r(s))$ pour $s \in G_F$. Comme R doit être un homomorphisme, h est assujettie à vérifier la condition :

$$\tilde{\gamma}(s,s')^{-1} = h(s)h(s')h(ss')^{-1} \quad \text{pour } s \text{ et } s' \text{ dans } G_F ,$$

c'est-à-dire que $\tilde{\gamma}^{-1} = \delta h$, où δ est l'opérateur cobord de $C^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ dans $Z^2(G_F,\mathbb{C}^\times)$, où l'on considère h comme une cochaîne.

Remarquons alors que le déterminant de $R(s)$ est égal à $h(s)^n$. Pour qu'il existe un relèvement R de r, tel que $\mathrm{Det}\, R = \varepsilon$, il faut et il suffit donc qu'il existe une cochaîne continue $h \in C^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ telle que l'on ait :

$$h^n = \varepsilon' \quad \text{et} \quad \delta h = \tilde{\gamma}^{-1} ,$$

où ε' est le caractère de G_F prolongeant $\varepsilon \circ \tau_F$, $\varepsilon' \in H^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$.

5.13 Considérons la suite exacte suivante de G_F-modules triviaux :

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{C}^\times \xrightarrow{n} \mathbb{C}^\times \to 1 .$$

La suite exacte de cohomologie associée définit l'opérateur cobord $\tilde{\delta}$ de $H^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ dans $H^2(G_F,\mu_n)$. Il est alors facile de voir que les conditions imposées plus haut à h signifient précisément que l'on a $r^*(c_S)^{-1} = \tilde{\delta}(\varepsilon')$.

Comme $\tilde{r}$ est défini par $\tilde{r} = \alpha^{-1}(r^*(c_S))$, ce qu'il s'agit de montrer est que $\tilde{\delta}(\varepsilon') = \alpha(\varepsilon_{|\mu_n(F)})$. Pour cela, il nous faut revenir à la définition de α en 5.2. Appelons η la restriction de ε à $\mu_n(F)$. Pour construire α, l'on commence par étendre η en un caractère d'ordre fini de $F^{\times}$: nous prendrons ε . Alors $\alpha(\eta)$ est définie par $\alpha(\eta) = \tilde{\delta}(\varepsilon')$. C.Q.F.D.

5.14 Si l'on cherche à généraliser les résultats précédents à une représentation projective r de W_F , l'on est amené à considérer les éléments $r^*(c_S)$ de $H^2(W_F,\mu_n)$.

Utilisons à nouveau le théorème 4.8 et écrivons $r = r'.(\pi\circ\rho)$, où r' est une représentation projective de type galoisien et ρ une représentation linéaire non-ramifiée telle que ρ commute à $H = \pi^{-1}(r(W_F))$. A cause de cette commutabilité, on a $r^*(c_S) = r'^*(c_S).(\pi\circ\rho)^*(c_S)$ dans $H^2(W_F,\mu_n)$. Mais $\pi\ \rho$ se relève évidemment à $SL(n,\mathbb{C})$: l'on peut choisir $\rho(Fr)$ dans $SL(n,\mathbb{C})$. Par conséquent $(\pi\circ\rho)^*(c_S)$ est nul et $r^*(c_S) = r'^*(c_S)$. Notons r'' la représentation projective de G_F prolongeant r', et φ_F l'application de restriction de $H^2(G_F,\mu_n)$ dans $H^2(W_F,\mu_n)$. Alors on a $r^*(c_S) = \varphi_F(r''^*(c_S))$.

5.15 Nous associerons alors à r le caractère $\tilde{r}$ de $\mu_n(F)$ égal à $\tilde{r}''$ (défini en 5.10). Ce caractère ne dépend que de r et non de la décomposition $r = r'.(\pi\circ\rho)$. Cela peut se voir en utilisant le théorème suivant, qui caractérise $\tilde{r}^{-1}$ comme la restriction à $\mu_n(F)$ du déterminant d'un relèvement de r .

<u>Théorème</u> 5.15. <u>Soient</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F <u>dans</u> $PGL(n,\mathbb{C})$ <u>et</u> $\tilde{r}$ <u>un caractère de</u> $\mu_n(F)$ <u>associé à</u> r <u>comme précédemment</u>. <u>Soit</u> ε <u>un caractère de</u> $F^{\times}$. <u>Pour qu'il existe un relèvement de</u> r <u>de déterminant</u> ε , <u>il faut et il suffit que</u> ε <u>coïncide avec</u> $\tilde{r}^{-1}$ <u>sur</u> $\mu_n(F)$. <u>En particulier</u> r <u>se relève à</u> $SL(n,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si</u> $\tilde{r} = 1$.

Comme en 5.11, l'on démontre le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u> 5.15. <u>Soit</u> n' <u>le nombre des racines de l'unité dans</u> F <u>dont l'ordre divise une puissance de</u> n . <u>Alors la représentation projective</u> $r : W_F \to PGL(n,\mathbb{C})$ <u>possède un relèvement</u> R <u>tel que</u> $(\mathrm{Det}\ R)^{n'} = 1$.

5.16 Démontrons le théorème 5.15. Nous conservons les notations de 5.14-5.15.

L'on supposera que ρ prenne ses valeurs dans $SL(n,\mathbb{C})$. Si R' est un relèvement de r' de déterminant ε , alors $R'.\rho$ est un relèvement de r de déterminant ε , et réciproquement. Comme l'on peut écrire $\varepsilon = \chi^n \varepsilon'$ où ε' est d'ordre fini et χ non-ramifié (et en particulier trivial sur $\mu_n(F)$), l'on peut supposer que ε est d'ordre fini. Mais alors r' a un relèvement de déterminant ε si et seulement si r'' a un relèvement de déterminant ε . Le théorème 5.10 permet alors de conclure.

5.17 <u>Théorème</u> 5.17. <u>Soient</u> F <u>un corps local de caractéristique</u> p , <u>et</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F <u>de degré une puissance de</u> p . <u>Alors</u> r <u>se relève à</u> $SL(n,\mathbb{C})$.

<u>Démonstration</u> : En ce cas $\mu_n(F) = 1$ donc $\tilde{r} = 1$, et l'on utilise le théorème 5.15.

6. Caractères centriques.

6.1 Fixons une représentation projective r de degré n de W_F, de type galoisien. (Rappelons qu'une représentation projective irréductible est de ce type). Elle a une image finie, donc définit une représentation projective fidèle, encore appelée r, d'un quotient fini G de W_F. Le corps K fixé par $\mathrm{Ker}(r)$ est le <u>corps centrique</u> de r et $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

On cherche à relever r en une représentation $R : W_F \to GL(n,\mathbb{C})$. Mais alors l'image de W_K par R est formée de matrices scalaires, donc R est triviale sur l'adhérence du groupe des commutateurs de W_K. Le quotient de W_F par ce groupe est le groupe de Weil relatif $W(K/F)$ de K sur F. Fixant r, l'on considérera désormais les relèvements de r comme des représentations de $W(K/F)$.

6.2 Le noyau de la projection de $W(K/F)$ sur G est W_K^{ab}, l'abélianisé de W_K, qui est isomorphe à $K^\times$. On peut donc considérer $W(K/F)$ comme extension de G par $K^\times$. On sait d'ailleurs que $H^2(G,K^\times)$ est cyclique, d'ordre le cardinal de G, et qu'il est engendré par la classe définissant l'extension $W(K/F)$.

Si R est un relèvement de r, on note χ_R le caractère de $K^\times$ défini par la restriction de R à $K^\times$:

$$R(x) = \chi_R(x).1_n \quad \text{pour} \quad x \in K^\times \subset W(K/F).$$

On dit que χ_R <u>est le caractère centrique de</u> R. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & K^\times & \to & W(K/F) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \chi_R} & & \downarrow{\scriptstyle R} & & \uparrow{\scriptstyle r} & & \\ 1 & \to & \mathbb{C}^\times & \to & GL(n,\mathbb{C}) & \to & PGL(n,\mathbb{C}) & \to & 1 . \end{array}$$

Le caractère χ_R détermine R à torsion près par un caractère de $W(K/F)$ se factorisant par G .

Inversement, étant donnée une représentation fidèle r de $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, on appelle encore r la représentation de W_F qu'elle définit et l'on dit que le <u>caractère</u> $\chi : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ <u>est centrique pour</u> r s'il existe un relèvement de r (relèvement considéré, nous l'avons dit, comme une représentation de $W(K/F)$), dont χ soit le caractère centrique.

6.3 Remarquons que G agit trivialement sur $\mathbb{C}^\times$. Par conséquent, le caractère χ_R est invariant par G , i.e. est trivial sur K^I , le sous-groupe de $K^\times$ engendré par les éléments $x^{\sigma-1}$, où $x \in K^\times$ et $\sigma \in G$.

La projection de W_F sur $W(K/F)$ définit un isomorphisme de $W(K/F)^{ab}$ avec W_F^{ab} et, par composition avec l'isomorphisme de réciprocité, on obtient une application $i_{K/F} : W(K/F) \to F^\times$. Soient R et R' deux relèvements de r . Alors il existe un caractère α de $F^\times$, tel que $R' = R \otimes (\alpha \circ i_{K/F})$. Mais la restriction de $i_{K/F}$ à $K^\times$ se traduit par la norme $N_{K/F} = N$, et l'on a $\chi_{R'} = \chi_R . (\alpha \circ N_{K/F})$. Par conséquent χ_R et $\chi_{R'}$ ont même restriction au noyau K^N de la norme $N_{K/F} : K^\times \to F^\times$. Inversement, si χ est un caractère de $K^\times$ ayant même restriction que χ_R à K^N , il existe un caractère α' de $N_{K/F}(K^\times)$ tel que

$$\chi(x) = \alpha' \circ N_{K/F}(x) \chi_R(x) \quad \text{pour} \quad x \in K^\times .$$

Etendant α' en un caractère α de $F^\times$, on obtient

$$\chi = \chi_{R.(\alpha \circ i_{K/F})} .$$

On appellera χ_r la restriction commune des χ_R à K^N , R parcourant l'ensemble des relèvements de r . Remarquons que χ_r est trivial sur K^I , donc définit par passage au quotient un caractère de $H^{-1}(G, K^\times)$. On peut énoncer :

<u>Proposition</u> 6.3. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective fidèle du groupe fini</u> $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. <u>Un caractère</u> χ <u>de</u> $K^\times$ <u>est centrique pour</u> r <u>si et seulement s'il prolonge</u> χ_r .

6.4 Les raisonnements précédents supposent l'existence d'un relèvement pour r , que nous avons démontrée en 5.8. Il est plus intéressant de définir χ_r directement, de démontrer (avec cette définition de χ_r) la proposition 6.3, puis d'en déduire le théorème 5.8. C'est ce que fait Buhler [Bu, Th. 1]. Nous donnons ici la définition de χ_r selon [Bu].

Comme $\mathbb{C}$ est divisible, donc cohomologiquement trivial, la suite exacte de G-modules triviaux :

$$1 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp(2\pi i\,.)} \mathbb{C}^\times \to 1$$

donne un isomorphisme, le cobord :

$$\delta : H^2(G,\mathbb{C}^\times) \to H^3(G,\mathbb{Z}) .$$

Comme on a $r^*(c) \in H^2(G,\mathbb{C}^\times)$ (notations de 4.3 avec $\mathcal{G} = G$), on a $\delta r^*(c) \in H^3(G,\mathbb{Z})$. L'opération de cup-produit envoie $H^{-1}(G,K^\times) \times H^3(G,\mathbb{Z})$ dans $H^2(G,K^\times)$, qui est isomorphe à $\lambda^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ (où λ est le cardinal de G) par l'application inv_F du corps de classes. Si $x \in K^N$, on note $[x]$ sa classe dans $H^{-1}(G,K^\times)$ et l'on définit :

$$\chi_r(x) = \exp(2\pi i\ \mathrm{inv}_F([x] \cup \delta r^*(c))) .$$

Le théorème 1 de [Bu] équivaut à la proposition 6.3, pour cette définition de χ_r .

6.5 La proposition 6.3 a certaines conséquences intéressantes.

Si r est une représentation projective de type galoisien de W_F , et R un relèvement de type galoisien de r , on appelle niveau de R l'ordre du caractère centrique χ_R de R .

Proposition 6.5. Soient m un entier, $m \geqslant 1$, et r une représentation projective de type galoisien de W_F . Alors r a un relèvement de niveau divisant m si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

pour $x \in K^{\times}$ $\quad (N_{K/F}(x))^m = 1 \Longrightarrow \chi_r(x^m) = 1$.

En effet, dire que le relèvement R de r est de niveau divisant m signifie que χ_R est trivial sur $K^{\times m}$, qui est un sous-groupe fermé de $K^{\times}$. On utilise alors le lemme d'extension suivant, avec $J = K^{\times}$, $B = K^{\times m}$, $X = K^N$, $\chi' = \chi_r$.

Lemme d'extension 6.5. Soient J un groupe abélien localement compact, B un sous-groupe fermé de J , X un sous-groupe compact de J et χ' un caractère de X . Alors χ' peut s'étendre en un caractère χ de J trivial sur B si et seulement si $B \cap X \subset \mathrm{Ker}(\chi')$.

La condition donnée par ce lemme est $\chi_r(K^{\times m} \cap K^N) = 1$, ce qui se traduit immédiatement par la condition de la proposition. C.Q.F.D.

6.6 Théorème 6.6. Soit r une représentation projective de degré n de W_F , de type galoisien. Soit n' l'ordre du groupe des racines de l'unité de F dont l'exposant divise une puissance de n . Alors r a un relèvement de niveau divisant nn'.

Cette assertion est évidente d'après le corollaire 5.10, mais on peut la démontrer sans utiliser ces résultats du chapitre 5, ce qui donne d'ailleurs une nouvelle démonstration, due à Buhler, du théorème 5.8.

Il suffit de remarquer que le caractère χ_r défini en 6.4 est d'ordre divisant n : nous avons vu que $r^*(c) \in H^2(G, \mathbb{C}^{\times})$ provient de $r^*(c_S) \in H^2(G,\mu_n)$. Par conséquent $r^*(c)$ est d'ordre divisant n dans $H^2(G,\mathbb{C}^\times)$ et χ_r l'est aussi.

Sachant cela, supposons que $x \in K^\times$ vérifie $N_{K/F}(x)^{nn'} = 1$. Alors on a $N_{K/F}(x)^{n'} = 1$, i.e. $x^{n'} \in K^N$. Ainsi l'on obtient $\chi_r(x^{nn'}) = (\chi_r(x^{n'}))^n = 1$ et la condition de la proposition 6.5 est vérifiée. C.Q.F.D.

6.7 Plutôt que de donner la démonstration du théorème 1 de Buhler, nous allons définir χ_r d'une autre façon, et démontrer la proposition 6.3 correspondante.

Considérons le sous-groupe fermé G_K de G_F. La suite exacte de Hochschild-Serre correspondant à $\mathbb{C}^\times$ s'écrit :
$1 \to H^1(G,\mathbb{C}^\times) \to H^1(G_F,\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\beta} H^1(G_K,\mathbb{C}^\times)^G \xrightarrow{tg} H^2(G,\mathbb{C}^\times) \to 1$, puisque l'on a $G = G_F/G_K$ et $H^2(G_F,\mathbb{C}^\times) = 0$ d'après le théorème 5.7.

On peut identifier $H^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ et $H^1(G_K,\mathbb{C}^\times)$ avec les groupes des caractères d'ordre fini de $F^\times$ et $K^\times$ respectivement. Alors $H^1(G_K,\mathbb{C}^\times)^G$ s'identifie au groupe des caractères d'ordre fini de $K^\times$ triviaux sur K^I. A un caractère χ de $F^\times$, l'application β associe alors le caractère $\chi \circ N_{K/F}$ de $K^\times$. Un raisonnement semblable à celui de 6.3 montre que le conoyau de β s'identifie canoniquement au groupe X' des caractères de K^N triviaux sur K^I (K^N, étant compact, n'a que des caractères d'ordre fini). Par conséquent, la transgression tg définit un isomorphisme γ de X' sur $H^2(G,\mathbb{C}^\times)$.

L'on définit alors χ_r par la formule $\gamma(\chi_r^{-1}) = r^*(c)$. Comme $r^*(c)$ est d'ordre divisant n dans $H^2(G,\mathbb{C}^\times)$, on a $\chi_r^n = 1$.

6.8 Reste à montrer qu'un caractère χ de $K^\times$ est centrique pour r si et seulement s'il prolonge χ_r. Tout d'abord l'on peut supposer que χ est d'ordre fini : en effet, il existe un caractère non-ramifié α de $F^\times$ tel que $\chi \cdot \alpha \circ N_{K/F}$ soit d'ordre fini, et $\alpha \circ N_{K/F}$ est trivial sur K^N.

Par le lemme 3.6, l'on sait que χ est centrique pour r si et seulement s'il est trivial sur K^I et vérifie $\chi_*(d) = r^*(c)$ où $d \in H^2(G,K^\times)$ est la classe de cohomologie décrivant $W(K/F)$. Supposons donc χ trivial sur K^I.

Considérons l'homomorphisme de transgression $tg : H^1(G_K,\mathbb{C}^\times)^G \to H^2(G,\mathbb{C}^\times)$, et appelons η la restriction de χ à K^N. Alors on a, si $\tilde{\chi}$ est le caractère de G_K associé à χ, $\gamma(\eta) = tg(\tilde{\chi})$ dans $H^2(G,\mathbb{C}^\times)$, par définition de γ. Tout revient alors à montrer que l'on a :

$$tg(\tilde{\chi}^{-1}) = \chi_*(d) .$$

En effet, si χ est centrique pour r, il vérifie $\chi_*(d) = r^*(c)$, d'où $\gamma(\eta^{-1}) = \gamma(\chi_r^{-1})$ et $\eta = \chi_r$. Inversement, si $\eta = \chi_r$, alors $\gamma(\eta^{-1}) = r^*(c)$, d'où $\chi_*(d) = r^*(c)$. De plus, χ, prolongeant χ_r, est trivial sur K^I.

6.9 Prouvons donc la formule $tg(\tilde{\chi}^{-1}) = \chi_*(d)$.

Choisissons une section $\tau : G \to W(K/F)$ de la projection φ de $W(K/F)$ dans G. La classe de cohomologie $d \in H^2(G,K^\times)$ est représentée par le cocycle d' défini par :

$$d'(s,s') = \tau(s)\tau(s')\tau(ss')^{-1} \quad \text{pour} \quad s,s' \in G .$$

Choisissons une section ν de la projection de W_F sur G, telle que $\tau = j \circ \nu$, où j est la projection de W_F sur $W(K/F)$. Alors l'élément $\inf(\chi_*(d)) \in H^2(G_F,\mathbb{C}^\times)$ est défini par le cocycle $\inf \chi \circ d' = d''$, où $\inf$ désigne l'inflation. On a

$d''(g,g') = \tilde{\chi}(\nu\circ\mu(g)\nu\circ\mu(g')\nu\circ\mu(gg')^{-1})$, où g et g' sont dans G_F et μ est la projection de G_F sur G. Considérons alors la cochaîne continue $f \in C^1(G_F,\mathbb{C}^\times)$ définie comme suit : pour $g \in G_F$ on écrit $g = x(g)\nu\circ\mu(g)$ avec $x(g) \in G_K$, et l'on pose $f(g) = \tilde{\chi}^{-1}(x(g))$. Si $g \in G_K$, alors $f(g) = \tilde{\chi}^{-1}(g)$.

On a $d''(g,g') = \tilde{\chi}(x(g)^{-1}g\ x(g')^{-1}g'(x(gg')^{-1}gg')^{-1})$. Mais $\tilde{\chi}$ est invariant par G, donc l'on trouve

$$d''(g,g') = f(g)f(g')f(gg')^{-1} ,$$

c'est-à-dire que d'' est le cobord de f.

<u>Récapitulons</u> : Nous avons construit une cochaîne continue $f \in C^1(G_F, \mathbb{C}^\times)$ dont la restriction à G_K est l'élément $\tilde{\chi}^{-1}$ de $H^1(G_K, \mathbb{C}^\times)$ et dont le cobord δf est l'inflation du cocycle $\chi \circ d'$ représentant $\chi_*(d)$. On reconnaît là le fait que $tg(\tilde{\chi}^{-1}) = \chi_*(d)$ [La, p. 109]. C.Q.F.D.

7. <u>Conducteurs et exposants des représentations linéaires</u>.

7.1 Soit L une extension galoisienne finie du corps local F. Si ρ est une représentation linéaire du groupe $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L/F)$, on notera $c(\rho)$ <u>le conducteur d'Artin</u> de ρ [Se 1, ch. VI]. On notera $a(\rho)$ et on appellera <u>exposant de</u> ρ, l'exposant de ce conducteur : l'on a $c(\rho) = \mathfrak{p}_F^{a(\rho)}$. Si R est la représentation de W_F que ρ définit, il est cohérent de définir <u>l'exposant</u> $a(R)$ de R par la formule $a(R) = a(\rho)$.

Si R est une <u>représentation linéaire de type galoisien</u> de W_F, l'on vient de définir <u>son exposant</u>. Il est facile de voir que cet exposant ne dépend que de la restriction de R au groupe d'inertie I_F. On peut alors étendre la définition de l'exposant à toutes les représentations linéaires de W_F : si ρ est une représentation non-ramifiée de W_F, de même degré que R et commutant à R, et telle que $R.\rho$ soit de type galoisien, <u>l'on définit</u> $a(R)$ par la formule $a(R) = a(R.\rho)$. Il reviendrait au même d'utiliser la distribution de Herbrand [We 1, App. 1].

Si χ est un caractère de $F^\times$, l'exposant du caractère $\chi \circ \tau_F$ de W_F est $a(\chi \circ \tau_F) = m+1$, où m est le plus grand entier i tel que χ soit non-trivial sur U_F^i (on posera $m=-1$ si $\chi(U_F^o)=1$). On écrira souvent $a(\chi)$ au lieu de $a(\chi\circ\tau_F)$.

7.2 Si r est une représentation projective de W_F , on appelle exposant de r et on note $a(r)$ le plus petit des exposants des relèvements de r . Une représentation linéaire R de W_F est dite primordiale si l'on a $a(R) = a(\pi\circ R)$. Il revient au même de dire que l'on a $a(R) \leqslant a(R\otimes\chi)$, quel que soit le caractère χ de W_F . Pour une représentation projective r donnée de W_F , il existe toujours un relèvement de r qui est primordial.

7.3 L'on peut définir [Se 1, ch. IV, §3] les sous-groupes W_F^u de W_F pour $u \in \mathbb{R}$, $u \geqslant -1$: ce sont les sous-groupes de ramification de W_F en numérotation supérieure. Si $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ est un quotient fini de W_F , l'on a $G^u = W_K.W_F^u/W_K$. Le groupe W_F^o est le groupe d'inertie I_F . On notera W_F^+ le groupe de ramification sauvage : $W_F^+ = \bigcup_{\varepsilon>0} W_F^{\varepsilon}$. On a bien sûr $W_F^{-1} = W_F$. Si m est un entier positif et u un nombre réel, tel que l'on ait $m-1 < u \leqslant m$, alors l'on a $\tau_F(W_F^u) = U_F^m$.

Par suite, si χ est un caractère de W_F , l'exposant de χ est $a(\chi) = \alpha+1$ où α est le plus grand indice u tel que χ soit non-trivial sur W_F^u .

Si R est une représentation linéaire quelconque de W_F , nous appellerons R^u la restriction de R à W_F^u , et nous noterons $\alpha(R)$ le plus grand indice u tel que R^u soit non-triviale*. Nous voulons généraliser la propriété précédente des caractères à des représentations irréductibles quelconques de W_F .

7.4 Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe fermé de W_F ; la restriction de R à $\mathcal{G}$ sera notée $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}^{W_F}(R)$. Si K est une extension (séparable)

* On pose $\alpha(R)=-1$ si R est triviale.

de F et que l'on prend $\mathcal{G} = W_K$, on écrira aussi $\mathrm{Res}_K^F(R)$ au lieu de $\mathrm{Res}_{W_K}^{W_F}(R)$, et parfois R_K si aucune confusion ne peut en résulter.

Si $\mathcal{G}$ est un sous-groupe fermé de W_F et R une représentation continue (de dimension finie) de $\mathcal{G}$, nous noterons $I(R)$ le nombre de fois où la représentation triviale de $\mathcal{G}$ intervient dans R.

Nous nous intéressons d'abord à la restriction de R à W_K , quand K est une extension modérément ramifiée de F .

7.5 Théorème 7.5. *Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F . Soit K une extension modérément ramifiée finie de F , fixée par $\mathrm{Ker}(R)$, et posons* $e = e(K/F)$. *Alors on a*
$a(R_K) + I(R_K^o) - n = e[a(R) + I(R^o) - n]$.

Corollaire. *Si* $I(R_K^o) = 0$ *on a*

$$ea(R) = n(e-1) + a(R_K) .$$

En effet, si la représentation triviale n'intervient pas dans $R_K^o = \mathrm{Res}_{K.F_{nr}}^F(R)$, elle n'intervient pas non plus dans $R^o = \mathrm{Res}_{F_{nr}}^F(R)$. Ceci prouve le corollaire.

Remarquons que, si R est irréductible et que R_K^o est non-triviale (i.e. $I(R_K^o) \neq n$) alors on a $I(R_K^o) = 0$ et le corollaire est applicable : en effet R est une représentation irréductible de W_F , et par suite R_K^o est somme de représentations irréductibles permutées par l'action de W_F .

Si R_K^o est triviale, l'on trouve $a(R) = n-I(R^o)$, ce qui est naturel.

7.6 Démontrons le théorème 7.5.

Pour cela, supposons d'abord que R soit de type galoisien, se factorisant par $G = \mathrm{Gal}(L/F)$. Alors K est incluse dans L . Appelons H le groupe de Galois de L sur K et posons $g_i = \mathrm{card}(G_i)$, $h_i = \mathrm{card}(H_i)$ pour $i \geqslant -1$. Appelons φ le caractère de la représentation de G définie par R.

Alors on a [Se 1, p. 108, cor. 1] :

$$a(R) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{g_o} [\varphi(1) - \frac{1}{g_i} \sum_{s\in G_i} \varphi(s)]$$

$$a(R_K) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i}{h_o} [\varphi(1) - \frac{1}{h_i} \sum_{s\in H_i} \varphi(s)] .$$

Mais pour $i \geqslant 1$, on a $H_i = G_i$. Par suite on a

$$a(R) - \varphi(1) + \frac{1}{g_o} \sum_{s\in G_o} \varphi(s) = \frac{h_o}{g_o}[a(R_K) - \varphi(1) + \frac{1}{h_o} \sum_{s\in H_o} \varphi(s)] .$$

On voit alors facilement que $g_o = eh_o$, $\varphi(1) = n$ et $\frac{1}{g_o} \sum_{s\in G_o} \varphi(s) = I(R^o)$, $\frac{1}{h_o} \sum_{s\in H_o} \varphi(s) = I(R_K^o)$, d'où le résultat quand R est de type galoisien.

Si R n'est pas de type galoisien, choisissons une représentation non-ramifiée ρ de degré n de W_F, commutant à R, et telle que $R' = R.\rho$ soit de type galoisien. On a $a(R') = a(R)$, puisque ρ est triviale sur I_F. Appelons K' la sous-extension de $K.F_{nr}$ fixée par $\mathrm{Ker}(R')$. Alors on a $K'.F_{nr} = K.F_{nr}$: en effet $K'.F_{nr}$ est le corps fixé par $(I_F \cap W_K).\mathrm{Ker}(R') \cap I_F$ et $K.F_{nr}$ le corps fixé par $W_K \cap I_F$. Mais si x est un élément de $W_K \cap I_F$, x fixe $K'.F_{nr}$. Réciproquement si x fixe $K'.F_{nr}$, il s'écrit sous la forme $x = yz$ où y est dans $W_K \cap I_F$ et z dans $\mathrm{Ker}(R')$. Mais alors z est un élément de I_F et donc aussi de $\mathrm{Ker}(R)$. L'on a alors $x = yz \in W_K \cap I_F$ et x fixe $K.F_{nr}$. On a bien démontré $K'.F_{nr} = K.F_{nr}$.

On en déduit les égalités $a(R_K) = a(R'_K) = a(R'_{K'})$ et $I(R_K^o) = I(R_{K'}^o) = I(R'^o_{K'})$, d'où le résultat pour R à partir de celui pour R'.

7.7 Quand R est une représentation linéaire de W_F, nous avons défini en 7.3 le nombre $\alpha(R)$. Ce nombre intervient dans le calcul du conducteur de R :

Théorème 7.7. Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F. Soit H un sous-groupe ouvert de W_F inclus dans $W_F^{\alpha(R)}.\mathrm{Ker}(R)$, et supposons que l'on ait $I(\mathrm{Res}_H^{W_F} R) = 0$. Alors on a :

i) $a(R) = n(\alpha(R)+1)$.

ii) Pour tout sous-groupe ouvert H' de W_F, d'indice fini dans W_F et contenant H et $\mathrm{Ker}(R)$, on a

$$e(K/F)\ a(R) = nd(K/F) + a(R_K)\ ,$$

où l'on a noté K l'extension de F fixée par H'.

7.8 Si l'on a $a(R)=0$, i.e. $\alpha(R)=-1$, ce théorème est évident. Supposons donc que l'on ait $\alpha(R) \geqslant 0$.

Supposons d'abord le théorème démontré quand R est de type galoisien. Prenons une représentation linéaire quelconque R de W_F, et, comme en 7.6, fixons une représentation non-ramifiée ρ de W_F, commutant à R, et telle que $R' = R.\rho$ soit de type galoisien. Alors on a $a(R') = a(R)$ et $\alpha(R') = \alpha(R)$ d'où une démonstration de i).

Appelons, comme en 7.6, K' le corps contenu dans $K.F_{nr}$ et fixé par $\mathrm{Ker}(R')$. Alors on a $K'.F_{nr} = K.F_{nr}$ et aussi $a(R_K) = a(R'_{K'})$. L'on vérifie facilement que l'on a $e(K/F) = e(K'/F)$ et $d(K/F) = d(K'/F)$. On en déduit que ii) est vraie pour R.

Remarque : On pourrait énoncer les théorèmes 7.5 et 7.7 en supposant seulement que $K.F_{nr}$ est finie sur F_{nr}, au lieu de supposer que K est finie sur F. Mais cela nécessiterait de définir $e(K/F)$, $d(K/F)$ et $a(R_K)$ pour une telle extension K de F, ce qui n'est pas difficile, mais que nous n'avons pas fait.

7.9 Il reste à démontrer le théorème 7.7 quand R est une représentation de type galoisien. Elle se factorise alors à travers un quotient fini $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ de W_F. Si l'on prend pour L le corps fixé par $\mathrm{Ker}(R)$, on obtient, par passage au quotient, une injection $\tilde{R}$ de G dans $GL(n,\mathbb{C})$. De plus l'on a $\alpha(R) = \alpha(L/F)$. Par conséquent, l'image $\tilde{H}$ de H dans G est incluse dans $G^{\alpha(L/F)} = G_{\beta(L/F)}$.

L'hypothèse sur $I(\mathrm{Res}_H^{W_F} R)$ signifie que l'on a $I(\mathrm{Res}_{\tilde{H}}^G \tilde{R}) = 0$.

Appelons $\tilde{H}'$ l'image dans G d'un groupe H' vérifiant les conditions de ii), et notons φ le caractère de la représentation $\tilde{R} : \varphi(x) = \mathrm{Tr}\,\tilde{R}(x)$ pour $x \in G$.

7.10 Le groupe $\tilde{H}$ est abélien, puisqu'il est inclus dans $G_{\beta(L/F)}$. Par conséquent, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ et des caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ de $\tilde{H}$ tels que, pour $h \in \tilde{H}$, la matrice de $\tilde{R}(h)$ dans cette base soit la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\chi_1(h),\dots,\chi_n(h)$.

Soit x un élément de G. Soit (a_{ij}) la matrice de $\tilde{R}(x)$ dans la base précédemment fixée de $\mathbb{C}^n$. Alors la matrice dans cette base de $\tilde{R}(xh)$, pour $h \in \tilde{H}$, est $(a_{ij}\chi_j(h))$. Par conséquent, l'on a

$$\sum_{h\in\tilde{H}} \varphi(xh) = \sum_{h\in\tilde{H}} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\chi_i(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \sum_{h\in\tilde{H}} \chi_i(h) .$$

Mais l'on a $I(\mathrm{Res}_{\tilde{H}}^G \tilde{R}) = 0$ et par suite aucun des caractères χ_i n'est trivial, d'où l'on tire

$$\sum_{h\in\tilde{H}} \chi_i(h) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{h\in\tilde{H}} \varphi(xh) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in G .$$

7.11 Utilisons à nouveau la formule [Se 1, p. 108, Cor.

$$a(R) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{g_o} [\varphi(1) - \frac{1}{g_i} \sum_{s\in G_i} \varphi(s)] ,$$

où $g_i = \text{card}(G_i)$.

Il suffit d'ailleurs de sommer de 0 à $\beta(L/F)$. Mais, pour $i \leqslant \beta(L/F)$, G_i contient $\widetilde{H}$ et par suite la somme $\sum_{s \in G_i} \varphi(s)$ est nulle.

On en tire alors $a(R) = n \sum_{i=0}^{\beta(L/F)} \frac{g_i}{g_o} = n(1 + \sum_{i=1}^{\beta(L/F)} \frac{g_i}{g_o})$ d'où

$a(R) = n(1 + \varphi_{L/F}(\beta(L/F)))$ par définition de la fonction $\varphi_{L/F}$.
Comme $\alpha(L/F) = \varphi_{L/F}(\beta(L/F))$ on a i).

7.12 Si $\mathcal{G}$ est le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de corps locaux, nous noterons $a_{\mathcal{G}}$ le caractère de la représentation d'Artin de $\mathcal{G}$ [Se 1, ch. VI].

Le caractère a_G est constant sur les classes $x\widetilde{H}$ où $x \in G \setminus \widetilde{H}$, puisque $\widetilde{H}$ est inclus dans $G_{\beta(L/F)}$. Par suite on a

$$a(R) = \frac{1}{g} \sum_{x \in G} a_G(x)\varphi(x) = \frac{1}{g} \sum_{x \in \widetilde{H}} a_G(x)\varphi(x) = \frac{1}{g} \sum_{x \in \widetilde{H}'} a_G(x)\varphi(x) .$$

L'on utilise alors [Se 1, p. 108, prop. 4] qui dit que l'on a $a_{G|\widetilde{H}'} = f(K/F)(r_{\widetilde{H}'}\, d(K/F) + a_{\widetilde{H}'})$, où K est le corps fixé par $\widetilde{H}'$ et $r_{\widetilde{H}'}$ le caractère de la représentation régulière de $\widetilde{H}'$.

On en déduit l'égalité suivante, où $h = \text{card}(\widetilde{H}')$

$$e(K/F)a(R) = \frac{1}{h} \sum_{x \in \widetilde{H}'} (r_{\widetilde{H}'}(x)d(K/F) + a_{\widetilde{H}'}(x))\varphi(x)$$

d'où

$$e(K/F)a(R) = nd(K/F) + \frac{1}{h} \sum_{x \in \widetilde{H}'} a_{\widetilde{H}'}(x)\varphi(x)$$

$$= nd(K/F) + a(R_K) ,$$ ce qui démontre ii).

7.13 <u>Remarque</u> : L'on a également $e(L/F)a(R) = n(d(L/F)+\beta(L/F)+1)$ en vertu de i) et du lemme suivant.

<u>Lemme</u> 7.13. <u>Soit</u> L <u>une extension galoisienne</u> (<u>finie</u>) <u>du corps local</u> F. <u>Alors l'on a</u>

$$e(L/F)(\alpha(L/F)+1) = d(L/F) + \beta(L/F) + 1 .$$

Démonstration : Posons $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ et écrivons g_i pour le cardinal de G_i . Alors par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(L/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (g_i - 1) = \sum_{i=0}^{\beta(L/F)} (g_i - 1)$$

$$d(L/F) + \beta(L/F) + 1 = \sum_{i=0}^{\beta(L/F)} g_i = g_o\Big(1 + \sum_{i=1}^{\beta(L/F)} \frac{g_i}{g_o}\Big)$$

$$= g_o(1 + \varphi_{L/F}(\beta(L/F))) = e(L/F)(1 + \alpha(L/F)).$$

C.Q.F.D.

7.14 Reprenons les notations et hypothèses du théorème 7.7 ii), et supposons que K soit galoisienne sur F , i.e. H' invariant dans W_F . L'égalité ii) du théorème 7.7 peut encore s'écrire :

$$e(K/F)a(R) - n[d(K/F) + \beta(K/F) + 1] = a(R_K) - n(\beta(K/F) + 1) .$$

Le lemme 7.13 donne alors

$$e(K/F)\ [a(R) - n(\alpha(K/F) + 1)] = a(R_K) - n(\beta(K/F) + 1) .$$

On a évidemment $\alpha(K/F) \leqslant \alpha(L/F)$, puisque $\mathrm{Gal}(K/F)$ est un quotient de $\mathrm{Gal}(L/F)$. L'on en déduit l'inégalité

$$a(R) = n(\alpha(L/F) + 1) \geqslant n(\alpha(K/F) + 1)$$

d'où $a(R_K) \geqslant n(\beta(K/F) + 1)$.
Si le groupe H' contient $W_F^{\alpha(R)} = W_F^{\alpha(L/F)}$, on a même

$$\alpha(K/F) < \alpha(L/F)$$

d'où $a(R_K) > n(\beta(K/F) + 1)$. Enonçons donc :

Proposition 7.14. Conservons les hypothèses et les notations du Théorème 7.7 ii). Supposons de plus K galoisienne sur F . Alors on a $a(R_K) \geqslant n(\beta(K/F) + 1)$ et on a même inégalité stricte si H' contient $W_F^{\alpha(R)}$.

7.15 Le théorème 7.7 a aussi d'autres conséquences intéressantes. Supposons d'abord R irréductible de type galoisien, et prenons pour H le groupe $W_F^{\alpha(R)}.\mathrm{Ker}(R)$. Alors $\mathrm{Res}_H^{W_F} R$ est somme de caractères tous conjugués par l'action de W_F, et par conséquent ils sont tous non-triviaux, d'où $I(\mathrm{Res}_H^{W_F} R) = 0$. On pourra donc appliquer le théorème 7.7 avec ce choix de H.

<u>Théorème</u> 7.15. <u>Soit</u> R <u>une représentation linéaire irréductible de</u> W_F, <u>de degré</u> n. <u>Alors on a</u>

$$a(R) = n(\alpha(R) + 1) .$$

<u>Démonstration</u> : D'après ce qui précède, c'est vrai si R est de type galoisien. Sinon, il existe un caractère non-ramifié χ de W_F tel que $R\otimes\chi$ soit de type galoisien. On a $a(R) = a(R\otimes\chi)$ et $\alpha(R) = \alpha(R\otimes\chi)$. C.Q.F.D.

7.16 Supposons maintenant que la représentation projective $r = \pi\circ R$ soit de type galoisien. On a défini en 6.1 le corps centrique de r. Appelons-le K. En 6.2, on a défini le caractère centrique χ_R de $R : \chi_R : K^\times \to \mathbb{C}^\times$. On pourra appliquer le théorème 7.7 à $H' = W_K$ s'il existe un groupe H, inclus dans $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$, et d'image non triviale par R, i.e. si $R(W_F^{\alpha(R)})$ contient au moins une matrice scalaire non triviale.

Remarquant alors que R_K est équivalente à la somme directe de n fois le caractère χ_R, on obtient le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 7.16. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F, <u>de degré</u> n <u>et de type galoisien</u>. <u>Soient</u> K <u>son corps centrique</u>, R <u>un relèvement de</u> r <u>et</u> χ_R <u>son caractère centrique</u>.

<u>Supposons que</u> $R(W_F^{\alpha(R)})$ <u>contienne une matrice scalaire non-triviale</u>. <u>Alors on a</u>

$$e(K/F)a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

<u>et</u> $a(\chi_R) \geqslant \beta(K/F)+1$. <u>Cette dernière inégalité est stricte si</u> W_K <u>contient</u> $W_F^{\alpha(R)}$.

7.17 <u>Corollaire</u> 7.17. <u>Si la restriction de</u> r <u>à</u> W_F^+ <u>est irréductible, alors on a</u> $e(K/F)a(R) = n(d(K/F)+a(\chi_R))$ <u>quel que soit le relèvement</u> R <u>de</u> r . <u>On a aussi</u> $a(\chi_R) > \beta(K/F)+1$.

<u>Démonstration</u> : La représentation linéaire R est irréductible. Il suffit donc de démontrer ce corollaire quand R est de type galoisien. Appelons L le corps fixé par $\mathrm{Ker}(R)$, posons $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ et appelons $\tilde{R}$ la représentation de G définie par R . Alors l'hypothèse que $\mathrm{Res}_{W_F^+}^{W_F} r$ soit irréductible implique que $\mathrm{Res}_{G_1}^{G} \tilde{R}$ est irréductible. Mais $G_{\beta(L/F)}$ est central dans G_1 [Se 1, p. 77, prop. 10]. Par le lemme de Schur, on en déduit que $\tilde{R}(G_{\beta(L/F)}) = R(W_F^{\alpha(R)})$ est formé de matrices scalaires. On applique alors le théorème 7.16. Comme on a de plus $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on obtient l'inégalité stricte $a(\chi_R) > \beta(K/F)+1$.

La première partie de ce corollaire équivaut à la proposition 2 de [Bu, p. 21].

7.18 Démontrons maintenant le théorème 2.4 de l'introduction.

<u>Théorème</u> 7.18. <u>Soit</u> R <u>une représentation linéaire de</u> W_F , <u>primordiale et de degré</u> n . <u>Si, pour tout caractère</u> χ <u>de</u> W_F , <u>on a</u> $a(R\otimes\chi) = n(\alpha(R\otimes\chi)+1)$, <u>alors on a</u> $a(R\otimes\chi) = \sup(a(R), na(\chi))$. <u>Cela est vrai en particulier si</u> R <u>est irréductible et primordiale</u>.

<u>Corollaire</u> 7.18. <u>Soit</u> R <u>une représentation linéaire de</u> W_F , <u>irréductible et de degré</u> n . <u>Si</u> $a(R)$ <u>n'est pas un multiple de</u> n , R <u>est primordiale</u>.

Ce corollaire est immédiat. Nous verrons en 9.8 que si n est premier et $a(R)$ divisible par n , alors R est induite par un caractère de W_{F_n} , où F_n est l'extension non-ramifiée de degré n de F . Dans le cas général, on peut poser la question suivante : soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible, primordiale et de degré n . Si n divise $a(R)$, existe-t-il une extension non-ramifiée E de F , distincte de F , et telle que R soit l'induite d'une représentation de W_E ?

7.19 <u>Démontrons le théorème</u> 7.18.

Soit χ un caractère de W_F . On a $a(\chi) = \alpha(\chi)+1$, $a(R) = n(\alpha(R)+1)$ et $a(R\otimes\chi) = n(\alpha(R\otimes\chi)+1)$. De $na(\chi) \leqslant a(R)$ on tire $\alpha(\chi) \leqslant \alpha(R)$. Par conséquent, quel que soit u , $u > \alpha(R)$, les représentations R , χ et $R\otimes\chi$ sont triviales sur W_F^u . Donc on a $a(R\otimes\chi) \leqslant a(R)$. Comme R est primordiale, on a l'égalité.
De $na(\chi) > a(R)$ on tire $\alpha(\chi) > \alpha(R)$. Alors $R\otimes\chi$ est non-triviale sur $W_K^{\alpha(\chi)}$ et triviale sur W_K^u , si on a $u > \alpha(\chi)$. Par suite l'exposant $a(R\otimes\chi)$ est $n(\alpha(\chi)+1) = na(\chi)$. C.Q.F.D.

7.20 Par les mêmes méthodes, on démontre le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 7.20. <u>Soient</u> R (resp. S) <u>une représentation irréductible de</u> W_F , <u>de degré</u> n (resp. m). <u>Alors on a</u>

$$a(R\otimes S) \leqslant \sup(ma(R), na(S))$$

<u>avec égalité quand</u> $ma(R) \neq na(S)$ <u>et que</u> $R\otimes S$ <u>est irréductible</u>.

8. Représentations imprimitives.

8.1 Soit E une extension finie (séparable) de F. Si ρ est une représentation linéaire de W_E et R l'induite de ρ à W_F, nous noterons $R = \mathrm{Ind}_E^F \rho$ et nous dirons que R est induite à partir de E. Tordre R par un caractère de W_F revient à tordre ρ par la restriction à W_E de ce caractère. Par conséquent, si r est la représentation projective que définit R, nous pouvons dire, par abus de langage, que r est induite à partir de E.

Remarque : Tordre R par le caractère $\alpha \circ \tau_F$ de W_F, où α est un caractère de $F^\times$ revient à tordre ρ par le caractère $\alpha \circ N_{E/F} \circ \tau_E$, où $\alpha \circ N_{E/F}$ est bien un caractère de $E^\times$.

Si ρ est un caractère de W_E, nous dirons que R est monomiale. Ecrivant $\rho = \chi \circ \tau_E$, où χ est un caractère de $E^\times$, on dira que χ induit R et on écrira parfois $\mathrm{Ind}_E^F \chi$ au lieu de $\mathrm{Ind}_E^F \rho$.

Rappelons que, si R est une représentation de W_F, on note $\mathrm{Res}_E^F R$ (et parfois R_E) sa restriction à W_E.

8.2 Soient donc E une extension finie de F et ρ une représentation linéaire de W_E. Il est intéressant de connaître le déterminant et le conducteur (ou l'exposant) de la représentation $\mathrm{Ind}_E^F \rho$ en fonction de ceux de ρ.

Théorème 8.2. Soient ρ une représentation linéaire de degré n de W_E et R son induite à W_F.

a) Appelons ε le caractère de $F^\times$ qui est le déterminant de la représentation de permutation de W_F sur W_F/W_E. Alors on a, pour $x \in F^\times$ $(\mathrm{Det}\, R)(x) = \varepsilon(x)^n (\mathrm{Det}\, \rho)(x)$.

b) Supposons ρ semi-simple. Alors R l'est aussi et l'on a

$$a(R) = f(E/F)(nd(E/F) + a(\rho)) .$$

La première partie découle du fait suivant [De, p. 508]. Soient G un groupe, H un sous-groupe d'indice fini de G, et $t : G^{ab} \to H^{ab}$ le transfert. Soient ρ une représentation linéaire (de dimension finie) de H et ε le déterminant de la représentation de permutation de G sur G/H. Alors, pour $x \in G$, on a

$$\det(\mathrm{Ind}_H^G \rho(x)) = \varepsilon(x)^{\dim \rho} \det \rho(t(x)) .$$

L'interprétation de ce fait dans notre situation, par la théorie du corps de classes, donne la partie a) du théorème.

Quant à la partie b), si ρ est de type galoisien, R l'est aussi, donc est semi-simple et l'égalité de b) est donnée par le corollaire de la proposition 4 de [Se 1, p. 109].

Si ρ est irréductible, il existe un caractère non ramifié χ de $F^\times$ tel que $\rho' = \rho \otimes (\chi \circ N_{E/F} \circ \tau_E)$ soit de type galoisien. Alors $R = (\mathrm{Ind}_E^F \rho') \otimes (\chi^{-1} \circ \tau_F)$ est semi-simple et l'on a $a(\rho') = a(\rho)$ et $a(R) = a(\mathrm{Ind}_E^F \rho')$, d'où le résultat. Le cas de ρ semi-simple quelconque découle du cas où ρ est irréductible en décomposant ρ en somme de ses composants irréductibles. C.Q.F.D.

8.3 <u>Remarques</u> : 1. En termes de conducteurs, la partie b) du théorème se traduit par $c(R)\mathcal{O}_E = (\mathfrak{D}^n_{E/F}\, c(\rho))^{[E:F]}$.

2. On peut sans doute démontrer que la formule de b) est vraie même quand ρ n'est pas semi-simple.

3. Soit $r = \pi \circ R$ la représentation projective dont R est un relèvement. Supposons r de type galoisien. Soit K le corps fixé par $\mathrm{Ker}(r)$. Alors on a $E \subset K$. En effet W_E est le stabilisateur d'un sous-espace de l'espace de la représentation R, et W_K stabilise chacun de ces sous-espaces. On a donc $W_E \supset W_K$ et $E \subset K$. <u>Les corps à partir desquels on peut induire</u> r <u>sont donc contenus dans le corps centrique</u> K .

4. Le corps fixé par Ker(R) est le plus petit corps galoisien sur F contenant le corps fixé par Ker(ρ). Cependant, si r' est la représentation projective de W_E définie par ρ , et K' son corps centrique, alors K n'est pas forcément le plus petit corps galoisien sur F contenant K'. On a néanmoins $K' \subset K$. Soient $\chi_\rho : K'^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère centrique de ρ et $\chi_R : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ celui de R . Alors on a $\chi_R = \chi_\rho \circ N_{K/K'}$.

8.4 La proposition suivante contient des hypothèses analogues à celle du théorème 7.7. Nous ne nous en servirons pas par la suite, mais elle peut être utile pour le calcul des facteurs ε attachés à des représentations induites.

<u>Proposition</u> 8.4. <u>Soient</u> ρ <u>une représentation linéaire de type galoisien de</u> W_E <u>et</u> R <u>son induite à</u> W_F . <u>Soient</u> L <u>le corps fixé par</u> Ker(R) <u>et</u> G <u>le groupe</u> Gal(L/F). <u>Si la représentation de</u> $G_{\beta(L/F)} = G^{\alpha(R)}$ <u>que</u> R <u>définit ne contient pas la représentation triviale, on a</u>

$$\beta(L/E) = \beta(L/F) .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $H = \mathrm{Gal}(L/E)$ et $\beta = \beta(L/F)$. On définit grâce à R et ρ , par passage au quotient, des représentations $\tilde{R}$ et $\tilde{\rho}$ de G et H respectivement et $\tilde{R}$ est l'induite de H à G de ρ . Mais alors $\mathrm{Res}^G_{G_\beta} \tilde{R}$ contient $\mathrm{Ind}^{G_\beta}_{G_\beta \cap H} \mathrm{Res}^H_{G_\beta \cap H}(\tilde{\rho})$ [Se 4, p. 75]. Si $G_\beta \cap H$ est nul, $\mathrm{Res}^G_{G_\beta} \tilde{R}$ contient la représentation triviale, contrairement à l'hypothèse. Donc $G_\beta \cap H$ est non-trivial, i.e. H_β est non-trivial. Par suite on a $\beta(L/E) = \beta(L/F)$. C.Q.F.D.

8.5 Nous nous intéresserons surtout ici aux représentations irréductibles de W_F . Si ρ est une représentation linéaire de W_E qui n'est pas irréductible, son induite à W_F ne l'est pas non plus.

Nous énonçons ici un critère d'irréductiblité pour $R = \mathrm{Ind}_E^F \rho$ (<u>critère de Mackey</u> [Se 4, p. 75]) dans le cas particulier où E <u>est galoisienne sur</u> F, ce qui nous suffira pour les applications.

Pour s dans W_F/W_E nous noterons ρ^s la représentation <u>conjuguée</u> par s de ρ définie par $\rho^s(x) = \rho(\sigma x \sigma^{-1})$ pour $x \in W_E$, où σ est un relèvement quelconque de s dans W_F.

<u>Proposition</u> 8.5. <u>Soient</u> E <u>une extension galoisienne de</u> F <u>et</u> ρ <u>une représentation linéaire irréductible de</u> W_E. <u>Pour que l'induite de</u> ρ <u>à</u> W_F <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> ρ <u>ne soit équivalente à aucune de ses conjuguées</u> ρ^s, s <u>parcourant</u> $\mathrm{Gal}(E/F) - \{1\}$.

Le raisonnement est celui de [Se 4, p. 75], en se ramenant d'abord au cas où ρ est de type galoisien, par torsion par un caractère non ramifié. On appliquera cette proposition aux caractères de W_E.

8.6 Fixant une extension E de F, il est intéressant de donner un critère, dans certains cas, pour qu'une représentation R de W_F soit induite à partir de E. La démonstration de la proposition suivante m'a été communiquée par P. Cartier.

<u>Proposition</u> 8.6. 1) <u>Soient</u> E <u>une extension abélienne finie de</u> F, <u>et</u> R <u>une représentation irréductible de</u> W_F. <u>Alors la restriction à</u> W_E <u>de</u> R <u>est irréductible si et seulement si</u> R <u>et</u> $R \otimes \alpha$ <u>sont inéquivalentes pour tout caractère</u> α <u>de</u> W_F <u>trivial sur</u> W_E <u>mais non sur</u> W_F.

2) <u>Supposons</u> E <u>cyclique sur</u> F. <u>Soit</u> α <u>un générateur du groupe des caractères de</u> W_F <u>triviaux sur</u> W_E. <u>Si l'on a</u> $R \simeq R \otimes \alpha$, <u>il existe une représentation irréductible</u> ρ <u>de</u> W_E <u>telle que</u> R <u>soit l'induite à</u> W_F <u>de</u> ρ.

Remarque : Un caractère de W_F trivial sur W_F provient d'un caractère de $\mathrm{Gal}(E/F) = W_F/W_E$. Il est de la forme $\lambda \circ \tau_F$, où λ est un caractère de $F^\times$ tel que $\lambda \circ N_{E/F} = 1$.

8.7 Démonstration de la proposition 8.6.

a) A torsion près par un caractère non-ramifié de W_F, la représentation R de W_F est de type galoisien. Par conséquent, sa restriction $\tilde{R}$ à W_E est semi-simple.

b) Soit V l'espace de la représentation R et soit A l'algèbre des endomorphismes de V commutant à tous les éléments de $\tilde{R}(W_E)$. On fait opérer $\mathrm{Gal}(E/F)$ sur A de la façon suivante : si $g \in W_F$ représente $s \in \mathrm{Gal}(E/F)$ et $u \in A$, on pose

$$u^s = R(g)^{-1}\, u\, R(g) .$$

c) Comme $\mathrm{Gal}(E/F)$ est commutatif, on a $A = \oplus_\alpha A_\alpha$ où α parcourt les caractères de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et où l'on a posé

$$A_\alpha = \{u \in A \mid u^s = \alpha(s)u \quad \forall s \in \mathrm{Gal}(E/F)\} .$$

De plus, si α et β sont deux caractères de $\mathrm{Gal}(E/F)$, on a

$$A_\alpha . A_\beta \subset A_{\alpha.\beta} .$$

d) Remarquons que A_α est aussi l'ensemble des endomorphismes u de V tels que $(R \otimes \alpha)(g).u = u.R(g)$ pour tout g dans W_F. (On note aussi α le caractère de W_F défini par le caractère α de $\mathrm{Gal}(E/F) = W_F/W_E$.)

Par le lemme de Schur appliqué aux représentations irréductibles R et $R \otimes \alpha$, on a $\dim A_\alpha = 1$ si $R \simeq R \otimes \alpha$ et $\dim A_\alpha = 0$ sinon.

e) A nouveau par le lemme de Schur, on voit que la représentation semi-simple $\tilde{R}$ de W_E est irréductible si et seulement si l'on a $\dim A = 1$. Mais comme on a $\dim A_{\alpha_0} = 1$, où α_0 désigne le caractère trivial, cela équivaut à $A_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$ i.e. à R et $R \otimes \alpha$ inéquivalentes pour $\alpha \neq \alpha_0$. Ceci prouve la première partie de la proposition.

8.8 Démontrons-en la seconde partie.

Avec les hypothèses de cette seconde partie, et les notations précédentes, choisissons u dans A_α, $u \neq 0$. Alors on a $u^k \in A_{\alpha^k}$. Si m est le degré de E sur F, les caractères de W_F triviaux sur W_E sont les caractères $1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$. (On a choisi pour α un générateur du groupe de ces caractères). On en déduit que $(1, u, \ldots, u^{m-1})$ est une base de l'algèbre A. Cette algèbre est donc commutative, de degré m sur $\mathbb{C}$.

Il s'ensuit que $\widetilde{R}$ est somme de m représentations irréductibles $\rho_1, \ldots, \rho_m$ deux à deux inéquivalentes. Par la loi de réciprocité de Frobenius, on voit que R intervient dans chacune des représentations $\mathrm{Ind}_E^F(\rho_i)$. Comme la somme des degrés de ces représentations vaut m fois le degré de R, on voit que $R = \mathrm{Ind}_E^F(\rho_i)$ pour chaque i, ce qui démontre la proposition. On en déduit en outre que les ρ_i se déduisent de l'une d'entre elles par l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$:

$$\widetilde{R} = \bigoplus_{s \in \mathrm{Gal}(E/F)} \rho_i^s \quad \text{pour chaque } i \in \{1, \ldots, m\} .$$

8.9 Rappelons qu'une représentation linéaire de W_F est dite imprimitive quand elle est irréductible et induite à partir d'une extension de F distincte de F. Elle est dite primitive quand elle est irréductible et non imprimitive.

Toute représentation linéaire irréductible R de W_F est l'induite d'une représentation linéaire primitive ρ à partir d'une certaine extension E de F. Mais l'on sait [Ko 3] que le degré d'une représentation primitive est une puissance de p, la caractéristique résiduelle de F. On a donc

<u>Théorème</u> 8.9. <u>Si</u> p <u>ne divise pas</u> n , <u>toute représentation linéaire irréductible de degré</u> n <u>de</u> W_F <u>est monomiale</u>.

On voit l'intérêt que représentent pour nous les représentations monomiales (cf.aussi chap. 10). Nous examinons ci-après celles qui sont induites à partir d'une extension galoisienne de F .

8.10 Soit E une extension galoisienne de F . Soit ψ un caractère de $E^\times$, tel que $R_\psi = \mathrm{Ind}_E^F\,\psi$ soit irréductible. Soit r_ψ la représentation projective dont R_ψ est un relèvement. Si $s \in \mathrm{Gal}(E/F)$ nous noterons ψ^s le caractère de $E^\times$ donné par $\psi^s(x) = \psi(sx)$. (Par la théorie du corps de classes local, cette notation est cohérente avec celle de 8.5 : on a $(\psi\circ\tau_E)^s = \psi^s\circ\tau_E$.)

Soient ψ' un autre caractère de $E^\times$, $R_{\psi'}$ et $r_{\psi'}$ les représentations attachées à ψ' comme précédemment. A quelle condition a-t-on $r_\psi = r_{\psi'}$?

Cette condition est qu'il existe un caractère $\tilde{\alpha} = \alpha\circ\tau_F$ de W_F tel que $R_{\psi'} = R_\psi \otimes \tilde{\alpha}$. Comme R_ψ est irréductible, ceci est équivalent à $\psi'\circ\tau_E = (\psi^s\circ\tau_E)\otimes \mathrm{Res}_E^F\,\tilde{\alpha}$, pour un certain élément s de $\mathrm{Gal}(E/F)$, c'est-à-dire au fait qu'il existe un élément s de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et un caractère α de $F^\times$ tels que

$$\psi' = (\alpha\circ N_{E/F}).\psi^s .$$

Enonçons donc :

<u>Proposition</u> 8.10. <u>Soit</u> E <u>une extension galoisienne de</u> F . <u>Si</u> ψ <u>est un caractère de</u> $E^\times$, <u>notons</u> R_ψ <u>la représentation</u> $\mathrm{Ind}_E^F(\psi\circ\tau_E)$ <u>et</u> r_ψ <u>la représentation projective définie par</u> R_ψ . <u>Prenons un caractère</u> ψ_o <u>de</u> $E^\times$ <u>tel que</u> r_{ψ_o} <u>soit irréductible</u>. <u>Alors</u> r_ψ <u>et</u> r_{ψ_o} <u>sont équivalentes si et seulement s'il existe un élément</u> s <u>de</u> $\mathrm{Gal}(E/F)$ <u>tel que</u> ψ' <u>et</u> ψ^s <u>aient même restriction au groupe</u> $E^{NH} = \mathrm{Ker}(N_{E/F} : E^\times \to F^\times)$ (où on a posé $H = \mathrm{Gal}(E/F)$).

<u>Nous noterons</u> $\psi_{r,E}$ un caractère de E^{NH} obtenu par restriction de ψ^s , où s est un élément de $Gal(E/F)$.

8.11 Se donner une représentation imprimitive r de W_F , et une extension galoisienne E de F telle qu'un caractère de W_E induise un relèvement de r , revient donc à se donner E et les caractères $\psi_{r,E}$ de E^{NH} attachés à r comme précédemment.

On peut évidemment <u>considérer la restriction des caractères</u> $\psi_{r,E}$ <u>à</u> E^{IH} : si R_ψ est un relèvement de r , $Res_E^F R_\psi$ est somme des caractères ψ^s pour $s \in H$, et l'on peut calculer pour $x \in E^\times$ $\psi^s(x)/\psi(x) = \psi(x^{s-1})$. Si $R_{\psi'}$ est un autre relèvement de r , on a un caractère α de $F^\times$ et un élément t de H tels que $\psi' = \psi^t \otimes \alpha$. On en déduit l'égalité $\psi'(x^{s-1}) = \psi^t(x^{s-1})$ pour $x \in E^\times$.

Remarquons que si $H^{-1}(H,E^\times) = 0$ i.e. $E^{NH} = E^{IH}$, il revient au même de se donner les $\psi_{r,E}$ sur E^{NH} ou E^{IH} ! C'est ainsi le cas quand E <u>est cyclique sur</u> F .

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons les résultats précédents à des représentations imprimitives de degré premier.

9. <u>Représentations imprimitives de degré premier</u> ℓ .

9.1 Soit ℓ un nombre premier, fixé dans tout ce chapitre. Nous examinons ici le cas des représentations projectives et linéaires de W_F , de degré ℓ et <u>imprimitives</u>. Plus particulièrement, nous nous intéressons à celles qui s'induisent à partir d'une extension galoisienne de degré ℓ de F . Nous les appellerons <u>normalement imprimitives</u> [Ku].

Nous ne démontrerons pas le lemme suivant, qui est facile.

<u>Lemme</u> 9.1. <u>Soit</u> M <u>une extension galoisienne de degré premier</u> ℓ <u>d'un corps local</u> L . <u>Soient</u> s <u>un générateur de</u> $Gal(M/L)$ <u>et</u>

$\beta = \beta(M/L)$. Considérons l'homomorphisme $\tilde{s} : M^\times \to M^\times$ défini par $\tilde{s}(x) = x^{s-1}$. On a $\tilde{s}(L^\times) = 1$.

a) Supposons M ramifiée sur L. Alors tout élément y de $M^\times$ s'écrit $y = z\pi_M^m y'$ avec $z \in L^\times$, $0 \leqslant m < \ell$, et $y' \in U_M^i \backslash U_M^{i+1}$ pour un indice $i \geqslant 0$, $i \not\equiv 0 \pmod{\ell}$, ou bien $y' = 1$. On a $v_M(\tilde{s}(y)-1) = \beta$ si $m \neq 0$ et $v_M(\tilde{s}(y)-1) = i+\beta$ si $m = 0$ et $y' \neq 1$. Ainsi, si $i \not\equiv 0 \pmod{\ell}$, $\tilde{s}$ induit un isomorphisme de U_M^i/U_M^{i+1} sur $U_M^{i+\beta}/U_M^{i+\beta+1}$.

b) Supposons M non-ramifiée sur L, et écrivons $M = L(\zeta)$ où ζ est une racine de l'unité. Alors tout élément y de $M^\times$ s'écrit sous la forme $y = z\zeta^a y'$ avec $0 \leqslant a < \ell$, $z \in L^\times$ et $y'-1 \equiv \zeta^b \pi_L^i \pmod{\pi_L^{i+1}}$ pour un $i \geqslant 1$ et un $b \not\equiv 0 \pmod{\ell}$, ou bien $y' = 1$. De plus on a $\tilde{s}(y) \in U_M^0 \backslash U_M^1$ si $a \neq 0$, et $\tilde{s}(y) \in U_M^i \backslash U_M^{i+1}$ si $a = 0$ et $y' \neq 1$. Ainsi $\tilde{s}$ induit un automorphisme de U_M^i/U_M^{i+1} pour $i \geqslant 1$.

9.2 Nous utiliserons les notations introduites en 8.10.

Prenons donc une extension galoisienne E de F, de degré premier ℓ, et un caractère χ de $E^\times$ tel que $r = r_\chi$ soit irréductible. Si s est un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$, la condition d'irréductibilité s'écrit $\chi^{s-1} \neq 1$. Remarquant que la restriction à W_E de R_χ est somme des caractères $\chi^{s'}$ pour $s' \in \mathrm{Gal}(E/F)$, on en déduit que le caractère χ^{s-1} définit le corps centrique K de r, qui est ainsi une extension cyclique de E. Appelons a l'exposant de χ^{s-1} : c'est l'exposant du conducteur de K sur E.

L'on veut calculer l'exposant minimal pour les caractères χ' de $E^\times$ tels que $r_{\chi'} = r$, et partant l'exposant de r.

La condition sur χ' pour que $r_{\chi'} = r_\chi$ est que χ'^{s-1} égale χ^{s-1} ou l'un de ses transformés par $\mathrm{Gal}(E/F)$ c'est-à-dire que χ' prolonge l'un des caractères $\psi_{r,E}$ de $E^{NH} = E^{IH} = (E^\times)^{s-1}$ définis en 8.10. En particulier χ'^{s-1} définit l'extension K de E.

9.3 Proposition 9.3. *Soient r une représentation projective normalement imprimitive de W_F, de degré premier ℓ, et K son corps centrique. Soit E une extension galoisienne de degré ℓ de F, d'où l'on peut induire un relèvement de r. Posons enfin $\beta = \beta(E/F)$ et appelons a l'exposant du conducteur de K sur E.*

Alors l'exposant minimal $\gamma(r)$ des caractères χ de $E^\times$ tels que $r_\chi = r$ est donné par la formule

$$\gamma(r) = \beta + \sup(1,a) .$$

Si E est non-ramifiée sur F i.e. $\beta = 0$, on a $a \geqslant 1$, d'où $\gamma(r) = a$.

Corollaire 9.3. *Avec les mêmes hypothèses et notations, l'exposant de r est*

$$a(r) = (\beta+1)\ell + \sup(0,a-1) \quad \text{si } E \text{ est ramifiée sur } F ,$$

$$a(r) = \ell a \geqslant \ell \quad \text{sinon}.$$

Au chapitre 11, nous appliquerons ce corollaire aux représentations imprimitives de degré 2 de W_F (elles sont normalement imprimitives, toutes les extensions séparables de degré 2 sur F étant galoisiennes).

9.4 Le corollaire est une conséquence directe de la proposition 9.3 et du théorème 8.2. En effet, dans le cas ramifié, on a $d(E/F) = (\beta+1)(\ell-1)$ d'après [Se 1, p. 73].

Démontrons la proposition 9.3.

Comme en 9.2 choisissons un caractère χ de $E^\times$ tel que $r_\chi = r$. Alors la condition $r_{\chi'} = r_\chi$ (χ' étant un caractère de $E^\times$) s'exprime en disant que χ' coïncide avec l'un des χ^{s^j} sur $(E^\times)^{s-1} = \tilde{s}(E^\times)$. (Rappelons que s est un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$).

Mais $\gamma(r)$ est le minimum des exposants des caractères χ' de $E^\times$ vérifiant la condition précédente. D'après le lemme d'extension

6.5, $\gamma(r)$ est le plus petit entier $m \geq 0$ tel que χ^{s^i} soit trivial sur $\tilde{s}(E^\times) \cap U_E^m$, ou encore χ <u>trivial sur</u> $\tilde{s}(E^\times) \cap U_E^m$.

9.5 <u>Supposons d'abord</u> E <u>ramifiée sur</u> F. On a alors, pour $i \geq 1$

$$\tilde{s}(U_E^i) = \tilde{s}(E^\times) \cap U_E^{i+\beta} .$$

En effet d'après le lemme 9.1 a) si $y \in E^\times$ et $y^{s-1} \in U_E^{i+\beta}$, alors y s'écrit $y = z\pi_E^m y'$ avec $z \in L^\times$, $m = 0$ (sinon $v_E(\tilde{s}(y)-1) = \beta$) et $y' \in U_E^i$. De ceci l'on tire $\tilde{s}(y) = \tilde{s}(y')$.

Par ailleurs a est l'exposant de χ^{s-1}, c'est-à-dire le plus petit entier $m \geq 0$ tel que χ soit trivial sur $\tilde{s}(U_E^m)$.

<u>Supposons d'abord</u> $a \geq 1$. Alors χ est trivial sur $\tilde{s}(U_E^a) = \tilde{s}(E^\times) \cap U_E^{\beta+a}$. Par suite on a $\gamma(r) \leq \beta+a$. Mais il existe un élément y de U_E^{a-1} tel que $\chi(\tilde{s}(y)) \neq 1$. Mais alors l'on a $\tilde{s}(y) \in \tilde{s}(E^\times) \cap U_E^{\beta+a-1}$ et χ est non-trivial sur ce dernier groupe. Par suite l'on a $\gamma(r) = \beta+a$.

<u>Supposons ensuite</u> $a = 0$. Alors χ est trivial sur $\tilde{s}(U_E^1) = \tilde{s}(E^\times) \cap U_E^{\beta+1}$. L'on en tire $\gamma(r) \leq \beta+1$. Mais $\chi(\tilde{s}(\pi_E)) \neq 1$ et $\tilde{s}(\pi_E) \in U_E^\beta$. Par conséquent, on a $\gamma(r) > \beta$ et $\gamma(r) = \beta+1$.

9.6 <u>Supposons</u> E <u>non-ramifiée sur</u> F.

Si a est nul, $\chi^{s-1}(U_E^0)$ est trivial. Mais $\chi^{s-1}(\pi_F)$ vaut $\chi(1) = 1$. Par suite χ^{s-1} est trivial, ce qui est impossible. Donc on a $a \geq 1$ et on utilise la partie b) du lemme 9.1. Si $y \in E^\times$ est tel que l'on ait $\tilde{s}(y) \in U_E^{a+1}$, alors il existe $y_1 \in U_E^{a+1}$ tel que $\tilde{s}(y) = \tilde{s}(y_1)$. Par suite χ est trivial sur $\tilde{s}(E^\times) \cap U_E^{a+1}$. Mais il existe $y \in E^\times$ tel que l'on ait $\tilde{s}(y) \in U_E^a$ et $\chi(\tilde{s}(y)) \neq 1$. Donc on a $\gamma(r) = a$. C.Q.F.D.

9.7 Gardons les hypothèses et notations de 9.3.

On a vu que si E est non-ramifiée sur F, K est ramifiée sur F i.e. $a \geqslant 1$.

Inversement, supposons E <u>ramifiée sur</u> F <u>et</u> K <u>non-ramifiée sur</u> E. Alors $H = \mathrm{Gal}(E/F)$ agit trivialement sur les caractères définissant K. On a donc $(\chi^{s-1})^{s'} = \chi^{s-1}$ pour $s' \in H$, d'où $(\chi^{s-1})^{\ell} = \chi^{s-1} \circ N_{E/F} = 1$. Par conséquent K <u>est l'extension non-ramifiée</u> E_ℓ <u>de degré</u> ℓ <u>de</u> E. Le groupe de Galois de K sur F est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Nous verrons au paragraphe suivant que les relèvements de r peuvent être induits à partir de F_ℓ, l'extension non-ramifiée de degré ℓ de F.

9.8 <u>Remarque</u> 1 : <u>Si</u> r <u>peut être induite à partir de</u> F_ℓ, <u>on a</u> $a(r) \equiv 0 \pmod{\ell}$. <u>Inversement, si</u> $a(r)$ <u>est multiple de</u> ℓ, r <u>peut être induite à partir de</u> F_ℓ.

Il suffit pour cela de voir que si E est ramifiée sur F et K sur E, on a toujours $a(r) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$, c'est-à-dire, par le corollaire 9.3, $a \not\equiv 1 \pmod{\ell}$. Mais supposons $a = k\ell+1$, $k \geqslant 0$. On sait que a est le conducteur du caractère χ^{s-1} de $E^\times$. Mais si χ^{s-1} est trivial sur $U_E^{k\ell+1}$, il est trivial sur $U_E^{k\ell}$: en effet tout élément y de $U_E^{k\ell}$ s'écrit $y = zy'$ avec $z \in F^\times$ et $y' \in U^{k\ell+1}$, d'où l'on tire $\chi^{s-1}(y) = \chi^{s-1}(y') = 1$. On ne peut donc avoir $a \equiv 1 \pmod{\ell}$. C.Q.F.D.

9.9 Une représentation de W_F (projective ou linéaire) sera dite multiplement normalement imprimitive si elle est imprimitive et peut être induite à partir de plusieurs extensions galoisiennes distinctes de F.

<u>Proposition</u> 9.9. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F, <u>de degré premier</u> ℓ. <u>Supposons</u> r <u>multiplement normalement imprimitive</u>. <u>Alors l'image de</u> r <u>est isomorphe à</u> $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. <u>Si</u> K <u>est</u>

<u>le corps centrique de</u> r , <u>les extensions</u> E <u>d'où l'on peut induire</u> r <u>sont les extensions intermédiaires entre</u> F <u>et</u> K .

<u>Inversement, si</u> r <u>est une représentation projective irréductible de</u> W_F , <u>d'image isomorphe à</u> $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, <u>où</u> ℓ <u>est premier, alors</u> r <u>est de degré</u> ℓ <u>et est multiplement normalement imprimitive</u>.

9.10 Démontrons cette proposition.

Soit r une représentation projective de W_F vérifiant les hypothèses de la première partie de cette proposition. Soient E_1 et E_2 deux extensions galoisiennes distinctes de F , de degré ℓ , et d'où l'on peut induire r . Posons $K = E_1.E_2$, de sorte que $\mathrm{Gal}(K/F)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Choisissons un relèvement R de r et écrivons $R = \mathrm{Ind}_{E_i}^{F} \chi_i$, où χ_i est un caractère de $E_i^{\times}$, $i = 1$ ou 2 . La restriction de R à W_{E_i} est $\bigoplus_{s \in \mathrm{Gal}(E_i/F)} \chi_i^s$. Par suite $R(W_{E_i})$ est commutatif.
En particulier $R(W_K) = R(W_{E_1} \cap W_{E_2})$ commute à $R(W_{E_1})$ et $R(W_{E_2})$.
Or on a $E_1 \cap E_2 = F$ car E_1 et E_2 sont distinctes de degré premier sur F , donc W_F est engendré par $W_{E_1} \cup W_{E_2}$. Par conséquent, $R(W_K)$ commute à $R(W_F)$. Comme R est irréductible, $R(W_K)$ se compose de matrices scalaires.

Donc $r(W_K)$ est trivial. Mais comme l'indice du centre de $R(W_F)$ dans $R(W_F)$ est au moins ℓ^2 (sinon $R(W_F)$ serait abélien et R réductible), on en déduit que K est le corps centrique de r . On a donc $r(W_F) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

9.11 Inversement, supposons que l'on ait une représentation projective irréductible de W_F , d'image isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, où ℓ est premier. Nous utiliserons des résultats sur les représentations projectives irréductibles des groupes abéliens finis [Zi 2, chap. 1]. (Pour ce cas précis, voir aussi [Ho, §1]).
On sait [Zi 2, chap. 1] que $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ n'a comme représentations projectives irréductibles fidèles que des représentations de degré ℓ .

Par conséquent r est de degré ℓ .

Soit K le corps centrique de r et soit E une extension intermédiaire entre F et K . Alors K est de degré ℓ sur E . Si R est un relèvement de r , $R(W_E)$ est abélienne. Si χ est un caractère de W_E intervenant dans $\mathrm{Res}_E^F R$, alors on a $R = \mathrm{Ind}_E^F \chi$ par la loi de réciprocité de Frobenius. On a donc démontré la proposition.

9.12 <u>Proposition</u> 9.12. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F , <u>de degré premier</u> ℓ . <u>Soient</u> K <u>le corps centrique de</u> r , R <u>un relèvement de</u> r , <u>et</u> χ_R <u>son caractère centrique</u>. <u>Supposons</u> r <u>multiplement normalement imprimitive</u>. <u>Soit</u> E <u>une extension intermédiaire entre</u> F <u>et</u> K .

<u>Alors un caractère</u> χ <u>de</u> $E^\times$ <u>est tel que</u> $R = \mathrm{Ind}_E^F(\chi \circ \tau_E)$ <u>si et seulement si</u> $\chi \circ N_{K/E} = \chi_R$.

<u>Démonstration</u> : Si l'on a $R = \mathrm{Ind}_E^F(\chi \circ \tau_E)$, alors l'on sait déjà que le caractère centrique de R est $\chi_R = \chi \circ N_{K/E}$.
Inversement, il y a ℓ caractères χ de $E^\times$ tels que $\chi \circ N_{K/E} = \chi_R$: en effet, K est abélienne de degré ℓ sur E . Si χ_o est l'un des caractères χ tels que $R = \mathrm{Ind}_E^F(\chi \circ \tau_E)$, les caractères χ' tels que $\chi \circ N_{K/E} = \chi_R$ sont les χ_o^s , $s \in \mathrm{Gal}(E/F)$. Ils sont tous distincts puisque R est irréductible, et l'on a $R = \mathrm{Ind}_E^F(\chi_o^s \circ \tau_E)$. C.Q.F.D.

9.13 Nous venons d'examiner le cas où la représentation imprimitive de W_F , de degré premier ℓ , est <u>normalement imprimitive</u>. Mais ce n'est pas toujours le cas (sauf bien sûr si $\ell = 2$).

Ph. Kutzko a étudié le cas général [Ku]. Nous résumons ici brièvement ses résultats.

Nous notons F_ℓ l'extension non-ramifiée de degré ℓ de F . Si E est une extension ramifiée de degré ℓ de F , on posera

$\bar{d}(E/F) = d(E/F)/(\ell-1)$. Dans le cas où E est galoisienne sur F, on a $\bar{d}(E/F) = \mathfrak{f}(E/F)+1$.

Soit r une représentation projective imprimitive de degré ℓ de W_F . Soit R un relèvement de r . On posera $\bar{d}(r) = \inf \bar{d}(E/F)$, où E parcourt l'ensemble des extensions de F d'où l'on peut induire R .

9.14 Théorème 9.14. *Soit r une représentation projective imprimitive de W_F , de degré premier ℓ . Alors :*

1) $\bar{d}(r) \leqslant (a(r)+1)/(\ell+1)$.

2) *Si l'on peut induire r à partir de l'extension E de F et que l'on ait $\bar{d}(E/F) > \bar{d}(r) > 0$, alors on a* $\bar{d}(E/F) > (a(r)+1)/(\ell+1)$.

3) *On peut induire r à partir de F_ℓ si et seulement si ℓ divise* $a(r)$.

4) *L'extension E d'où l'on peut induire r , et telle que l'on ait $\bar{d}(E/F) = \bar{d}(r)$ est unique dans les deux cas suivants :*

i) $\bar{d}(r) < (a(r)+1)/(\ell+1)$ *et en particulier si* $\ell \neq p$.

ii) $\ell = p = 2$ *et* $v_F(p) = 1$.

La méthode consiste à se ramener au cas où les extensions d'où l'on peut induire r sont galoisiennes sur F , et, dans ce cas, à utiliser des techniques assez semblables à celles que nous avons développées dans ce chapitre. Pour plus de détails, voir [Ku].

10. Exposant des représentations projectives.

10.1 Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Rappelons que l'exposant $a(r)$ de r est le minimum des exposants des relèvements de r .
Ce chapitre est consacré à la démonstration des théorèmes 2.2 et 2.3 énoncés dans l'introduction.

Dans tout ce chapitre, r désignera une représentation projective de W_F , de type galoisien et de degré n . On appellera K son corps centrique, et F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans K . On notera r_1 la restriction de r à W_{F_1} .

Nous ferons dans ce chapitre deux hypothèses :

1) $n > 1$

2) r_1 est irréductible.

Ces deux hypothèses sont vérifiées si r est primitive et non triviale [Ko 3].

10.2 Appelons G le groupe de galois de K sur F . Alors $G_1 = Gal(K/F_1)$ est le groupe de ramification sauvage de G .

Soient R un relèvement de r , et R_1 sa restriction à W_{F_1} . Par hypothèse, la restriction de r_1 à W_F^+ est irréductible. Celle de R_1 est donc aussi irréductible. Par conséquent R_1 est irréductible et R_1^o est non triviale. (Rappelons que R_1^o est la restriction de R_1 à I_F). On peut donc appliquer le théorème 7.5 : si l'on pose $e = e(F_1/F)$, on a $ea(R) = n(e-1) + a(R_1)$.
Mais d'après les remarques précédentes, l'on peut appliquer le corollaire 7.17 à r et r_1 . On a donc

$$e(K/F)a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$ et, si ρ est un relèvement quelconque de r_1

$$e(K/F_1)a(\rho) = n(d(K/F_1) + a(\chi_\rho))$$

et de plus on a : $a(\chi_\rho) > \beta(K/F_1)+1$.
Appelons $b(r)$ (resp. $b(r_1)$) le minimum des $a(\chi_R)$ (resp. $a(\chi_\rho)$) quand R (resp. ρ) parcourt l'ensemble des relèvements de r (resp. r_1). Supposons que l'on ait $b(r)=b(r_1)$. Prenons R tel que $a(\chi_R)=b(r)$. On a alors $a(R)=a(r)$ et $a(R_1)=a(r_1)$. Par suite, on a l'égalité $ea(r)=n(e-1)+a(r_1)$.

10.3 Le théorème suivant généralise légèrement le théorème 2.2 de l'introduction.

Théorème 10.3. Soit r une représentation projective de W_F, de degré $n>1$ et de type galoisien. Supposons que r_1 soit irréductible. Alors on a $b(r)=b(r_1)$ et $ea(r)=n(e-1)+a(r_1)$, où l'on a posé $e=e(F_1/F)$.

D'après les remarques de 10.2, il suffit de prouver l'égalité $b(r)=b(r_1)$. Mais nous avons vu, en 10.2 également, que l'on a $b(r_1) > \beta(K/F_1)+1$. Le théorème 10.3 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante :

Proposition 10.3. Soit r une représentation projective de type galoisien de W_F . Si l'on a $b(r_1) > \beta(K/F_1)$ alors on a $b(r)=b(r_1)$.

10.4 Pour démontrer la proposition 10.3, utilisons les résultats du chapitre 6. On y a défini les caractères χ_r et χ_{r_1} de $K^N=K^{NG}$ et $K^{N_1}=K^{NG_1}$ respectivement. De plus, à cause du lemme d'extension 6.5, $b(r)$, étant le plus petit entier $m\geqslant 0$ tel que l'on puisse étendre χ_r en un caractère de $K^\times$ trivial sur U_K^m, est aussi le plus petit entier $m\geqslant 0$ tel que χ_r soit trivial sur $K^N\cap U_K^m$. On a un résultat analogue pour r_1 .

Il est clair, par la définition de χ_r et χ_{r_1}, que χ_{r_1} est la restriction de χ_r à K^{N_1}. Par conséquent on a $b(r)\geqslant b(r_1)$.

Remarquant que χ_r est trivial sur $K^I = K^{IG}$, on voit que la proposition 10.3 découle, de façon évidente, du lemme suivant :

Lemme 10.4. Si m est un entier strictement supérieur à $\beta(K/F_1)$, on a $K^N \cap U_K^m = (K^{N_1} \cap U_K^m).(K^I \cap U_K^m)$.

10.5 Démontrons le lemme 10.4. Supposons donc que l'on ait $m > \beta(K/F_1)$, et prenons $x \in K^N \cap U_K^m$.

Utilisons le lemme suivant [Bu, p. 24] :

Lemme 10.5. Soit M_1 une extension galoisienne modérément ramifiée du corps local M . Alors $H^{-1}(\mathrm{Gal}(M_1/M), U_{M_1}^m)$ est nul pour $m > 0$.

Ce lemme nous permet d'écrire $N_{K/F_1}(x) = \prod_{i=1}^{\nu} \bar{y}_i^{s_i - 1}$, où les $\bar{y}_i$ appartiennent à $U_{F_1}^{m'}$, m' étant le plus petit entier supérieur ou égal à $\varphi_{K/F_1}(m)$ et où les s_i , $i = 1,\dots,\nu$, sont des éléments de G dont les images dans $\mathrm{Gal}(F_1/F)$ engendrent ce groupe.

Comme on a $m > \beta(K/F_1)$, $\bar{y}_i$ est la norme de K à F_1 d'un élément y_i de U_K^m [Se 1, chap. V, §6]. On peut donc écrire :

$$x = x' \prod_{i=1}^{\nu} y_i^{s_i - 1} \quad \text{avec} \quad x' \in U_K^m \quad \text{et} \quad N_{K/F_1}(x') = 1 \text{ , i.e.}$$

$x' \in U_K^m \cap K^{N_1}$. Par suite, l'on a

$$x \in (U_K^m \cap K^{N_1}).(K^I \cap U_K^m) \quad . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

10.6 Passons à la démonstration du théorème 2.3.

Dorénavant, nous supposerons que r est une représentation projective primitive de W_F , non triviale, i.e. de degré $n > 1$. Nous garderons les notations du début du chapitre.

Rappelons brièvement les résultats de [Ko 3]. La représentation r_1 est irréductible, ce qui entraîne en particulier que le degré n de r est une puissance de p , disons $n = p^d$.

Appelant toujours F_1 l'extension modérément ramifiée maximale de F incluse dans le corps centrique K de r, on a $[K : F_1] = p^{2d}$ et l'on montre que $V = G_1 = \mathrm{Gal}(K/F_1)$ est un groupe abélien d'exposant p : on peut donc le considérer comme un espace vectoriel de dimension $2d$ sur le corps fini $\mathbb{F}_p$ à p éléments.

10.7 Sur cet espace vectoriel, r_1 définit une forme symplectique f, à valeurs dans μ_p, c'est-à-dire une application bilinéaire alternée de $V \times V$ dans μ_p, μ_p étant considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de la façon évidente.

Pour définir f, prenons un relèvement R_1 de r_1. Si (a,b) est un élément de $V \times V$, choisissons des représentants $\bar{a}$ et $\bar{b}$ (de a et b respectivement) dans W_{F_1}. Alors $R_1(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ s'écrit sous la forme $f(a,b)1_{p^d}$ où 1_{p^d} est la matrice unité de $GL(p^d,\mathbb{C})$: en effet, $r_1(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ est trivial. Le fait que r_1 soit irréductible équivaut au fait que f soit non dégénérée.

Le groupe $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ agit par conjugaison sur V en respectant la forme symplectique f. On peut exprimer le fait que r est primitive, en disant que V ne contient aucun sous-module sur G qui soit isotrope.

10.8 L'on peut décrire la représentation r_1 de W_F au moyen de f. Soit X un sous-espace lagrangien de V, c'est-à-dire un sous-espace totalement isotrope maximal. Soit E l'extension de f fixée par X. On a alors $[K:E] = [E:F] = p^d$.

<u>Alors il existe un caractère</u> χ <u>de</u> $E^\times$ <u>tel que</u> $\mathrm{Ind}_E^F\, \chi\circ\tau_E$ <u>relève</u> r_1.

Inversement, si E est une extension de F telle qu'un caractère de $E^\times$ induise un relèvement de r_1 alors E est incluse dans K et $X = \mathrm{Gal}(K/E)$ est un sous-espace lagrangien de V.

L'on peut donner une <u>condition nécessaire</u> pour que le caractère χ de $E^{\times}$ induise un relèvement de r_1 .

Posons $H = V/X = \mathrm{Gal}(E/F_1)$. Soit s un élément de H . Définissons le caractère λ_s de $E^{\times}$ de la façon suivante : si $x \in W_E$, on note $\pi_X(x)$ sa projection dans X , et on appelle $\bar{s}$ un représentant de s dans V . Alors λ_s est donnée par la formule suivante :

$$\lambda_s \circ \tau_E(x) = f(\bar{s}, \pi_X(x)) \quad \text{pour} \quad x \in W_E \ .$$

La condition s'exprime par l'égalité $\chi^{s-1} = \lambda_s$. En effet, si $\tilde{s}$ est un représentant de s dans W_{F_1} , on a

$$f(\bar{s}, \pi_X(x)) . 1_{p^d} = (\mathrm{Ind}_E^F \chi)(\tilde{s}\, x\, \tilde{s}^{-1} x^{-1}) = \chi^{s-1} \circ \tau_E(x) 1_{p^d} \ .$$

Remarquons que λ_s est invariant par l'action de H .

10.9 Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.3 de l'introduction, que nous réexprimons sous la forme suivante :

<u>Théorème</u> 10.9. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective primitive de</u> W_F , <u>de degré</u> $n = p^d$, $n > 1$, <u>et de corps centrique</u> K . <u>Soit</u> F_1 <u>la plus grande extension modérément ramifiée de</u> F <u>incluse dans</u> K . <u>Appelons</u> r_1 <u>la restriction de</u> r <u>à</u> W_{F_1} . <u>Alors on a les inégalités suivantes</u> :

$$a(r_1) \geqslant p^d + (p^d+1)\alpha(K/F_1)$$

$$\text{et} \qquad a(r) \geqslant p^d + (p^d+1)\alpha(K/F) \ .$$

<u>Si</u> $d = 1$, <u>ces inégalités sont même des égalités</u>.

Remarquons que d'après le théorème 10.3, il suffit de prouver la première inégalité (ou égalité si $d = 1$). En effet l'on a $e a(r) = p^d(e-1) + a(r_1)$, où l'on a posé $e = e(F_1/F)$. Si l'on a

$$a(r_1) \geqslant p^d + (p^d+1)\alpha(K/F_1) \quad , \text{ l'on a aussi}$$

$$a(r) \geqslant p^d + (p^d+1)\, \frac{\alpha(K/F_1)}{e} \ . \text{ Mais l'on a}$$

$\alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F)) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F_1))$ puisque $\beta(K/F) = \beta(K/F_1)$, et

et l'on tire $\alpha(K/F) = \varphi_{K/F} \circ \psi_{K/F_1}(\alpha(K/F_1)) = \varphi_{F_1/F}(\alpha(K/F_1)) = \dfrac{\alpha(K/F_1)}{e}$.

10.10 Pour démontrer la première inégalité, prenons un sous-espace lagrangien X de $V = G_1 = \mathrm{Gal}(K/F_1)$. Appelons E l'extension de F_1 fixée par X et choisissons un caractère χ de $E^\times$, induisant un relèvement de r_1 .

Soit s un élément non trivial de $H = \mathrm{Gal}(E/F_1)$. Alors $\chi^{s-1} = \lambda_s$ définit une extension E_s de E , contenue dans K , totalement (et sauvagement) ramifiée de degré p sur E . Notons L_s <u>le corps des invariants de</u> s <u>dans</u> E , qui est d'indice p dans E .

On a la situation illustrée par le dessin suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & & |\,)\,V_s^{\perp} & & \\
X & & E_s & & \\
 & & | & & V_s \\
 & & E & & \\
 & & |\,)\,H_s & & \\
H & & L_s & & \\
 & & | & & \\
 & & F_1 & &
\end{array}$$

Le groupe de Galois de E sur L_s est le groupe H_s engendré par s . Celui de K sur L_s est l'image réciproque V_s , dans V , du sous-espace H_s de H . Celui de K sur E_s est l'orthogonal $V_s^{\perp}$ de V_s . Enfin celui de E_s sur E est $X/V_s^{\perp}$.

Le caractère $\chi \circ \tau_E$ de W_E induit à W_{L_s} une représentation irréductible de degré de W_{L_s} . La représentation projective correspondante a pour noyau W_{E_s} . <u>Soit</u> a_s <u>l'exposant du conducteur de</u> E_s <u>sur</u> E :

$$a_s = a(\chi^{s-1}) = a(\lambda_s) .$$

10.11 La proposition 9.3 montre que l'on a alors

$$a(\chi) \geqslant a_s + \beta(E/L_s) \ .$$

Si $d=1$ cette valeur est exactement la valeur minimale des $a(\chi)$, où χ parcourt les caractères de $E^\times$ induisant un relèvement de r_1.

Rappelons que $\alpha(K/F_1)$ est le plus grand indice $m \geqslant 0$ tel que $V^m \neq 1$. Cet indice est un entier à cause du théorème de Hasse-Arf : K est une extension abélienne de F_1.

Mais le groupe $Gal(F_1/F)$ agit par conjugaison sur V, en respectant la forme symplectique f associée à r, et les V^m sont des sous-modules de V pour cette action. Or l'on sait [Ko 3] que V ne possède pas de sous-module sur $Gal(F_1/F)$ qui soit totalement isotrope non-trivial. On en déduit d'abord que la restriction de f à V^m est non-dégénérée si V^m est non-trivial, et aussi que si V^m est non-trivial, V^m n'est pas inclus dans X ; l'image de V^m dans $H=V/X$, qui est égale à H^m, est alors non-triviale. On a donc démontré la propriété suivante :

<u>Lemme</u> 10.11. <u>On a</u> $\alpha(K/F_1) = \alpha(E/F_1)$.

10.12 Pour démontrer le théorème 10.9, il nous faut en fait choisir convenablement l'espace lagrangien X.

Commençons par prendre un sous-espace totalement isotrope maximal $\tilde{X}$ de $V_{\beta(K/F_1)}$. Prolongeons $\tilde{X}$ en un sous-espace lagrangien X de V. Alors $\tilde{X}$ est le groupe de ramification de X d'indice $\beta(K/F_1)$ en numérotation inférieure et l'on a $\beta(K/E)=\beta(K/F_1)$.

Choisissons deux éléments $\bar{s}$ et $\bar{s}_1$ de $V_{\beta(K/F_1)}$ et $X_{\beta(K/F_1)}$ respectivement, de façon que l'on ait $f(\bar{s},\bar{s}_1) \neq 1$. Alors $\bar{s}$ définit un élément s non trivial de $H=V/X$.

Soit E_s le corps fixé par l'orthogonal de $\bar{s}$ dans X. L'image s_1 de $\bar{s}_1$ dans $Gal(F_s/E)$ engendre ce groupe. Mais $\bar{s}_1$ appartient à $X_{\beta(K/F_1)} = X_{\beta(K/E)} = X^{\alpha(K/E)}$. Si donc on appelle Y le groupe $\mathrm{Gal}(E_s/E)$, les groupes de ramification de Y en numérotation supérieure sont $Y^i = Y$ pour $0 \leqslant i \leqslant \alpha(K/E)$ et $Y^i = 1$ pour $i > \alpha(K/E)$. Le conducteur de E_s sur E est alors $\alpha(K/E) + 1 \geqslant \alpha(K/F_1) + 1$.

10.13 On a donc l'inégalité

$a(\chi) \geqslant \beta(E/L_s) + \alpha(K/F_1) + 1$, où L_s est le corps fixé par s dans E . Mais s est un élément du groupe $H^{\alpha(K/F_1)} = H^{\alpha(E/F_1)} = H_{\beta(E/F_1)}$. Par conséquent, on a $\beta(E/L_s) = \beta(E/F_1)$.

D'après le théorème 8.2, on a, en désignant par R_1 la représentation $\mathrm{Ind}_E^{F_1}\chi$,

$$a(R_1) = d(E/F_1) + a(\chi)$$

d'où
$$a(R_1) \geqslant d(E/F_1) + \beta(E/F_1)+1 + \alpha(K/F_1) .$$

Par le lemme 7.13, on a

$$d(E/F_1) + \beta(E/F_1) + 1 = e(E/F_1)(\alpha(E/F_1)+1) = p^d(\alpha(K/F_1)+1) .$$

Par suite, on a

$$a(R_1) \geqslant p^d(\alpha(K/F_1)+1) + \alpha(K/F_1)$$

<u>ce qu'il fallait démontrer</u>.

Si $d = 1$, l'exposant minimal pour χ est précisément

$$\beta(E/F_1) + \alpha(K/F_1) + 1$$

d'où l'égalité $a(r_1) = p(\alpha(K/F_1)+1) + \alpha(K/F_1)$.

10.14 <u>Remarque</u>. Dans le cas où $d = 1$, il est clair que r_1 ne peut être induite à partir d'une extension non-ramifiée. On a donc $a(r_1) \not\equiv 0 \pmod p$, d'après les résultats de 9.8. Par suite on a aussi $a(r) \not\equiv 0 \pmod p$.

On en déduit que si r <u>est une représentation projective irréductible de degré premier</u> ℓ <u>de</u> W_F , <u>alors on peut l'induire à partir de</u> F_ℓ <u>si et seulement si</u> ℓ <u>divise</u> $a(r)$.

REPRÉSENTATIONS IMPRIMITIVES DE DEGRÉ 2

11. Représentations imprimitives de degré 2.

11.1 Nous nous intéressons désormais exclusivement aux représentations de degré $n = 2$ de W_F. L'étude des représentations imprimitives de W_F est l'objet de ce chapitre. Remarquons que, si la caractéristique résiduelle p de F est distincte de 2, W_F ne possède comme représentations irréductibles de degré 2 que des représentations imprimitives.

Pour la clarté de l'exposition, nous examinerons d'abord les représentations linéaires imprimitives, puis les représentations projectives et le problème de leur relèvement et de leur exposant.

Pour la démonstration des faits suivants, nous renvoyons à [We 2] ou [He 1], ou encore aux chapitres précédents.

11.2 Commençons donc par décrire les représentations linéaires induites de W_F, de degré 2 : elles sont induites à partir d'un sous-groupe fermé d'indice 2, c'est-à-dire un groupe W_L, où L est une extension quadratique (séparable) de F.

Plus précisément, soit L une extension quadratique (séparable) de F. Nous noterons θ_L le caractère d'ordre 2 de $F^\times$ qui définit L : son noyau est $N_{L/F}(L^\times)$. Nous appellerons σ_L l'élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(L/F)$. Soit χ un caractère de $L^\times$. Nous poserons

$R_{L,\chi} = \mathrm{Ind}_L^F(\chi\circ\tau_L)$. Nous écrirons parfois $R(L,\chi)$ au lieu de $R_{L,\chi}$.

11.3 Proposition 11.3.

a) La représentation $R_{L,\chi}$ est irréductible si et seulement si l'on a $\chi \neq \chi^{\sigma_L}$. Elle définit une représentation projective imprimitive dont le noyau fixe l'extension K de L déterminée par le caractère $\chi^{1-\sigma_L}$ de $L^\times$.

b) Lorsque L parcourt les extensions quadratiques séparables de F , et que χ parcourt les caractères de $L^\times$ vérifiant $\chi \neq \chi^{\sigma_L}$, l'on obtient toutes les représentations imprimitives (de degré 2) de W_F .

c) Une représentation linéaire R de W_F , irréductible et de degré 2 , est de la forme $R_{L,\chi}$ si et seulement si elle est équivalente à $R\otimes\theta_L$.

d) On a $\det(R_{L,\chi}) = \theta_L.\chi|_{F^\times}$. Le caractère centrique de $R_{L,\chi}$ est le caractère $\chi\circ N_{K/L}$ de $K^\times$.

e) Soient $d_L = d(L/F)$ l'exposant différental de L sur F et $a(\chi)$ l'exposant de χ . Alors l'exposant de $R_{L,\chi}$ est

$a(R_{L,\chi}) = 2a(\chi)$ si L est non-ramifiée sur F ,

$a(R_{L,\chi}) = d_L + a(\chi)$ sinon.

Dans cette proposition a) et b) sont clairs, c) découle de la proposition 8.6 2), d) et e) du théorème 8.2.

11.4 Comme la restriction de $R_{L,\chi}$ à W_L est $(\chi\circ\tau_L)\oplus(\chi^{\sigma_L}\circ\tau_L)$, on a le lemme suivant :

Lemme 11.4. Les représentations $R_{L,\chi}$ et $R_{L,\chi'}$ sont équivalentes si et seulement si $\chi' = \chi$ ou $\chi' = \chi^{\sigma_L}$.

Mais une même représentation peut être induite à partir de plusieurs extensions quadratiques différentes (représentations multiplement normalement imprimitives). Plus précisément, le groupe des caractères de carré 1 de $F^{\times}$ agit sur les classes de représentations irréductibles de degré 2 de W_F par $(\chi, R) \to R \otimes (\chi \circ \tau_F)$.

On peut examiner le stabilisateur d'une telle représentation R sous cette action. Trois cas se présentent alors :

1. Le stabilisateur est réduit à un élément : R est primitive.
2. Le stabilisateur est d'ordre 2 : son élément non trivial est de la forme θ_L et $R = R_{L,\chi}$ pour un caractère χ convenable de $L^{\times}$. Alors R est dite simplement imprimitive, de même que la représentation projective correspondante.
3. Le stabilisateur est d'ordre 4 : R est induite à partir de trois extensions quadratiques séparables distinctes de F . On dit alors que R est triplement imprimitive. La représentation projective r définie par R est aussi appelée triplement imprimitive.

11.5 Supposons R triplement imprimitive. On peut lui appliquer les résultats du chapitre 9. Soit $r = \pi \circ R$ la représentation projective associée. L'image de r est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si K est son corps centrique, les trois extensions d'où l'on peut induire R sont les extensions intermédiaires entre F et K .

Des propositions 9.9 et 9.12 l'on tire la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 11.5. <u>Deux représentations imprimitives</u> $R_{L,\chi}$ <u>et</u> $R_{L',\chi'}$ <u>de</u> W_F , <u>où</u> L' <u>et</u> L <u>sont distincts</u>, <u>ne peuvent être équivalentes que si</u> $\chi^{\sigma_L - 1}$ <u>est d'ordre</u> 2 , <u>définissant l'extension</u> $K = LL'$ <u>de</u> L : <u>autrement dit</u> L' <u>est l'un des deux corps caractérisés par</u> $\chi^{\sigma_L - 1} = \theta_{L'} \circ N_{L/F}$. <u>Le caractère</u> χ' <u>est alors l'un des deux caractères de</u> $L^{\times}$ <u>vérifiant</u> $\chi \circ N_{K/L} = \chi' \circ N_{K/L'}$.

<u>En outre</u> $K = LL'$ <u>est le noyau de la représentation projective associée</u>.

11.6 Examinons maintenant les représentations projectives irréductibles de degré 2 de W_F .

Ces représentations ont une image finie. Mais il est bien connu que les sous-groupes finis de $PGL(2,\mathbb{C})$ sont cycliques, diédraux, ou isomorphes à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ n'intervient pas ici : en effet, il est simple, donc n'est jamais le groupe de Galois d'une extension de corps locaux.

Les sous-groupes cycliques de $PGL(2,\mathbb{C})$ correspondent à des représentations réductibles, et les groupes $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$ à des représentations primitives.

Appelons D_{2m} le groupe diédral d'ordre $2m$.

<u>Proposition</u> 11.6. <u>Les représentations projectives imprimitives de degré</u> 2 <u>de</u> W_F <u>sont celles d'image diédrale</u>, <u>isomorphe à</u> D_{2m} <u>pour un</u> $m \geqslant 2$. <u>Elles sont triplement imprimitives si et seulement si</u> $m=2$.

11.7 Examinons <u>les représentations projectives irréductibles fidèles de</u> D_{2m} . Ce groupe admet la présentation suivante :

$$D_{2m} = \langle a,b \mid a^2 = b^m = 1 \quad aba^{-1} = b^{-1} \rangle \ .$$

Plongeons D_{2m} dans $PGL(2,\mathbb{C})$. Alors l'élément b de $PGL(2,\mathbb{C})$, satisfaisant à $b^m = 1$, laisse 2 points fixes dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donc est conjugué à la transformation $z \mapsto \mu z$, où μ est une racine primitive m^e de l'unité puisque b est exactement d'ordre m . Mais alors a ne peut qu'échanger les 2 points fixes 0 et ∞ de b , donc a est de la forme $z \mapsto cz^{-1}$. Faisant le changement de coordonnées $z' = c^{-1/2}z$, on trouve $a(z') = z'^{-1}$ et $b(z') = \mu\, z'$.

On voit donc que, à conjugaison près, l'image des représentations projectives fidèles de degré 2 de D_{2m} est <u>l'image dans</u> $PGL(2,\mathbb{C})$ <u>des matrices</u> $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ <u>et</u> $\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ <u>où</u> $\omega \in \mu_m$. L'image inverse de ce sous-groupe dans $SL(2,\mathbb{C})$ est formée des matrices $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ i\omega^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, où ω parcourt μ_{2m}. Cette image inverse dans $SL(2,\mathbb{C})$ possède la présentation suivante : $\langle \alpha,\beta \mid \beta^{2m}=1\ ,\ \alpha^2=\beta^m\ ,\ \alpha\beta\alpha^{-1}=\beta^{-1}\rangle$. Dans cette présentation α et β sont des relèvements de a et b, et D_{2m} est le quotient du groupe précédent par le sous-groupe $\{1,\beta^m\}$.

On peut prendre $\beta = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{2m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{2m}} \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.8 Considérons donc D_{2m} comme plongé dans $PGL(2,\mathbb{C})$ de la façon précédente. Soit C_m le sous-groupe de D_{2m} formé des images des matrices $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ω parcourant μ_m.

Soit λ le caractère de C_m défini par $\lambda\left(\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbb{C}^\times\right)=\omega$. Donnons-nous une représentation projective r de W_F, d'image isomorphe à D_{2m}. On peut supposer alors que l'image de r <u>est</u> le sous-groupe D_{2m} de $PGL(2,\mathbb{C})$. Soient L l'extension quadratique séparable de F fixée par $r^{-1}(C_m)$ et K le corps fixé par $Ker(r)$. Alors $Gal(K/L)$ est isomorphe à C_m et le caractère $\lambda\circ r_{|W_L}$ définit l'extension K de L.

<u>Proposition</u> 11.8. <u>Soient</u> r <u>une représentation projective de degré</u> 2 <u>de</u> W_F, <u>d'image</u> D_{2m}, <u>et</u> L <u>le corps fixé par</u> $r^{-1}(C_m)$, K <u>le corps centrique de</u> r. <u>Alors les relèvements de</u> r <u>à</u> $GL(2,\mathbb{C})$ <u>sont les représentations de la forme</u> $R_{L,\chi}$, <u>où</u> χ <u>est un caractère de</u> W_L <u>tel que</u> $\chi^{1-\sigma_L}\circ\tau_L=\lambda\circ r_{|W_L}$.

11.9 <u>Démontrons cette proposition</u>.

Soit R un relèvement de r. Il est clair que l'on a $R\simeq R\otimes\theta_L$, donc R est de la forme $R_{L,\chi}$. Mais la restriction de R à W_L est alors équivalente à $\chi\circ\tau_L\oplus\chi^{\sigma_L}\circ\tau_L$. On a par conséquent $\chi^{\sigma_L-1}\circ\tau_L=\lambda\circ r_{|W_L}$ ou $\chi^{\sigma_L-1}\circ\tau_L=\lambda^{-1}\circ r_{|W_L}$. Quitte à changer χ en χ^{σ_L}, on trouve bien $\chi^{1-\sigma_L}\circ\tau_L=\lambda\circ r_{|W_L}$. Inversement si χ vérifie la condition précédente, il est immédiat que $R_{L,\chi}$ relève r .

11.10 On peut enfin utiliser les résultats et raisonnements du chapitre 9 pour calculer l'exposant d'une représentation projective imprimitive de degré 2 de W_F . D'après le corollaire 9.3 , on a :

<u>Théorème</u> 11.10. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective imprimitive de degré</u> 2 <u>de</u> W_F . <u>Soient</u> K <u>le corps centrique de</u> r <u>et</u> L <u>une extension quadratique de</u> F , <u>contenue dans</u> K , <u>et telle que</u> K <u>soit cyclique sur</u> L . <u>Soient</u> $a = a(K/L)$ <u>l'exposant du conducteur de l'extension</u> K/L <u>et</u> $d = d(L/K)$. <u>Alors l'exposant de</u> r <u>est</u>

$$a(r) = 2\sup(1,d) + f(L/F)(\sup(1,a)-1) .$$

Cela signifie que, si L est ramifiée sur F , on a

$a(r) = 2d + a - 1$ si K est ramifiée sur L

$a(r) = 2d$ sinon,

et si L est non-ramifiée sur F , on a

$a(r) = 2a$ (en ce cas $a \geqslant 1$) .

Remarquons, comme en 9.7 , que si K est non-ramifiée sur L , nous nous trouvons dans le cas triplement imprimitif.

11.11 <u>Corollaire</u> 11.11. <u>Soit</u> $r : W_F \to PGL(2,\mathbb{C})$ <u>une représentation triplement imprimitive</u>. <u>Soient</u> K <u>le corps fixé par</u> $\mathrm{Ker}(r)$ <u>et</u> $d_K = d(K/F)$ <u>son exposant différentel sur</u> F . <u>Alors l'exposant de</u> r <u>est</u> $a(r) = d-1$ <u>si</u> K <u>est totalement ramifiée sur</u> F

$a(r) = 2d$ <u>sinon</u>.

<u>Démonstration</u> : On a $\mathfrak{D}_{K/F} = \mathfrak{D}_{K/L}\,\mathfrak{D}_{L/F}$, d'où

$$d_K = d(K/L) + e(K/L)d(L/F) .$$

Mais, avec les notations du théorème 10.10 , on a

$d(K/L) = a$ et $d(L/F) = d$, d'où le résultat.

Remarque. Soient L_1 , L_2 , L_3 les sous-extensions de K quadratiques sur F et d_1 , d_2 , d_3 leurs exposants différentaux respectifs sur F . Alors on a $d_K = d_1 + d_2 + d_3$.

11.12 Rappelons pour terminer les résultats suivants :

a) Soit R une représentation linéaire W_F , irréductible et de degré 2 . Supposons R primordiale. Soit χ un caractère de W_F . Alors on a $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), 2a(\chi))$ [cf. 7.18].

b) Soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible et de degré 2 . Si 2 ne divise pas $a(R)$, R est primordiale.

c) Soit R comme précédemment. Alors R est induite à partir de l'extension non-ramifiée de degré 2 de F si et seulement si $a(r)$ est divisible par 2 , r étant la représentation projective associée [cf. 10.14].

12. Représentations imprimitives d'exposant donné.

12.1 Dans ce chapitre, suivant la méthode de J. Tunnell [Tu, chap. 4] et complétant ses résultats, nous calculons le nombre de représentations projectives imprimitives de W_F dont l'exposant c est donné.

Nous calculons également le nombre de classes, modulo torsion par un caractère non-ramifié, de représentations linéaires imprimitives primordiales de W_F , dont l'exposant est c .

Les résultats pour c pair sont en 12.7, ceux pour c impair en 12.13 et 12.14.

12.2 Soit R une représentation linéaire irréductible primordiale de W_F . A torsion près par un caractère non ramifié de W_F , on peut supposer que l'on a $\operatorname{Det} R(\pi_F) = 1$. Si F_2 est l'extension quadratique non-ramifiée de F , on a aussi $\operatorname{Det}(R \otimes (\theta_{F_2} \circ \tau_F))(\pi_F) = 1$, et si χ est un caractère non-ramifié de $F^\times$ tel que $\mathrm{Det}(R\otimes(\chi\circ\tau_F))(\pi_F)=1$, alors $\chi=1$ ou $\chi=\theta_{F_2}$.

Si R est imprimitive, on peut écrire $R=R(L,\chi)$ où L est une extension quadratique de F et χ un caractère de $L^\times$ tel que χ^{σ_L-1} soit non trivial. L'on peut prendre $L=F_2$ si et seulement si l'exposant c de R est pair.

La condition $\mathrm{Det}\,R(L,\chi)(\pi_F)$ se traduit par $\chi(\pi_F)=\theta_L(\pi_F)$.

Nous noterons q <u>pour le cardinal</u> q_F <u>du corps résiduel de</u> F .

12.3 Supposons d'abord que <u>l'exposant</u> c <u>de</u> R <u>soit pair</u>. Alors on prend $L=F_2$. On a $c\geqslant 2$ puisque R est irréductible.

Pour tout entier pair $c\geqslant 2$, on note n_c le nombre de caractères χ de U_{F_2} tels que

1) $a(\chi)=c/2$

2) $a(\chi.(\alpha\circ N_{F_2/F}))\geqslant a(\chi)$ pour tout caractère α de U_F .

Un tel caractère χ vérifie $\chi^{\sigma_{F_2}-1}\neq 1$: en effet, dans le cas contraire, χ se factoriserait par la norme de F_2 à F .

Soit $R=R(F_2,\chi)$ une représentation imprimitive de W_F , primordiale et déposant c . Supposons que l'on ait $\det R(\pi_F)=1$; alors on a $\chi(\pi_F)=-1$ et la restriction de χ à U_{F_2} vérifie les conditions précédentes. De plus, on a $R=R\otimes(\theta_{F_2}\circ\tau_F)$.

Comme on a $R(F_2,\chi)=R(F_2,\chi')$ si et seulement si l'on a $\chi'=\chi$ ou $\chi'=\chi^{\sigma_{F_2}}$, <u>le nombre de représentations imprimitives primordiales d'exposant</u> c <u>et telles que l'on ait</u> $\det R(\pi_F)=1$ <u>vaut</u> $n_c/2$. C'est aussi le <u>nombre de classes</u>, <u>modulo torsion par un caractère non ramifié</u>, <u>de représentations linéaires imprimitives primordiales d'exposant</u> c .

12.4 Soit r la représentation projective définie par R. Les autres relèvements primordiaux R' de r, vérifiant $\det R'(\pi_F) = 1$ sont de la forme $R \otimes (\alpha \circ \tau_F)$ où α est un caractère de $F^\times$ vérifiant les conditions 1) $\alpha(\pi_F) = \pm 1$

2) α est d'exposant au plus $c/2$.

Soit m_c le nombre de caractères de U_F^o, d'exposant au plus $c/2$. Le nombre de caractères α de $F^\times$ vérifiant les conditions 1) et 2) est alors $2m_c$.

Si r est simplement imprimitive, le nombre de relèvements primordiaux R' de r, vérifiant $\det R'(\pi_F) = 1$ est alors m_c. Si r est triplement imprimitive, c'est $m_c/2$.

Soit $t(c)$ <u>le nombre de représentations projectives de</u> W_F, <u>triplement imprimitives et d'exposant</u> c.

Alors <u>le nombre de représentations projectives de</u> W_F, <u>d'exposant</u> c <u>est</u>

$$s(c) = \frac{n_c}{2m_c} + \frac{t(c)}{2}$$

. En effet, le nombre total de représentations linéaires primordiales de W_F, vérifiant $\det R(\pi_F) = 1$ et d'exposant c, est :

$$\frac{n_c}{2} = \frac{m_c}{2}\, t(c) + m_c(s(c) - t(c)) .$$

12.5 Il nous faut maintenant calculer les nombres n_c, m_c, $t(c)$. Il est clair que m_c vaut $[U_F^o : U_F^{c/2}] = (q-1)q^{c/2-1}$. Si M est un corps local, notons $n_{M,k}$ le nombre de caractères de U_M^o, d'exposant au plus k. Si $k = 0$, $n_{M,k} = 1$. Si $k \geqslant 1$, $n_{M,k} = (q_M - 1)q_M^{k-1}$.

Si l'on multiplie les caractères de $U_{F_2}^o$ d'exposant $\leqslant c/2-1$, par les caractères $\alpha \circ N_{F_2/F}$, où α est un caractère de U_F^o d'exposant au plus $c/2$, on trouve $\dfrac{n_{F_2,k-1}\, n_{F,k}}{n_{F,k-1}}$ caractères $(k = c/2)$ qui sont les caractères de $U_{F_2}^o$, d'exposant au plus $c/2$, et ne vérifiant pas l'une des conditions 1) et 2) de 12.3. Le nombre n_c vaut donc $n_{F_2,k} - \dfrac{n_{F_2,k-1}\, n_{F,k}}{n_{F,k-1}}$. Donc on a

$$n_c = (q^2-1)q^{2(k-1)} - \frac{(q^2-1)q^{2(k-2)}.(q-1)q^{k-1}}{(q-1)q^{k-2}}$$

$$n_c = (q^2-1)q^{c-3}(q-1) \quad , \qquad \text{si} \quad c \geqslant 4$$

et $$n_c = (q^2-1) - (q-1) = q^2-q \quad \text{si} \quad c=2 \ .$$

12.6 Le nombre $t(c)$ est la moitié du nombre d'extensions quadratiques de F , d'exposant $c/2$. Posons $\varepsilon = v_F(2)$.

<u>Lemme</u> 12.6. <u>Le nombre</u> $N(d)$ <u>d'extensions quadratiques</u> (<u>séparables</u>) <u>de</u> F , <u>d'exposant différental</u> d <u>est</u> :

$N(d) = 1$ <u>si</u> $d=0$

$N(d) = 2(q-1)q^{d/2-1}$ <u>si</u> d <u>est pair et</u> $d < 2\varepsilon+1$

$N(d) = 2q^{\varepsilon}$ <u>si</u> $d = 2\varepsilon+1$

$N(d) = 0$ <u>sinon</u>.

Comme, pour une extension quadratique, l'exposant est égal à l'exposant différental on a $t(c) = N(c/2)/2$.

<u>Démontrons le lemme</u> 12.6 : Par la théorie du corps de classes $N(d)$ est le nombre de caractères de $F^\times/F^{\times 2}\, U_F^d$ moins le nombre de caractères de $F^\times/F^{\times 2}\, U_F^{d-1}$. On utilise alors la filtration du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $F^\times/F^{\times 2}\, U_F^d$ par les $F^\times/F^{\times 2}\, U_F^i$, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, et la structure, bien connue, des quotients $F^{\times 2}\, U_F^i/F^{\times 2}\, U_F^{i+1}$, pour $0 \leqslant i < d$ [Tu, p. 34-35].

12.7 <u>Proposition</u> 12.7. <u>Soit</u> c <u>un entier pair</u>, $c \geqslant 2$. <u>Le nombre de représentations linéaires primordiales de</u> W_F , <u>d'exposant</u> c , <u>modulo torsion par un caractère non ramifié</u>, <u>vaut</u> :

$$(q^2-q)/2 \quad \text{si} \quad c=2$$

$$\frac{1}{2}(q^2-1)q^{c-3}(q-1) \quad \text{pour} \quad c \geqslant 4 \ .$$

<u>Le nombre de représentations projectives d'exposant</u> c <u>est</u>

$$s(c) = \frac{1}{2}\left(q + \frac{N(1)}{2}\right) \qquad \text{si} \quad c = 2$$

$$s(c) = \frac{1}{2}\left((q^2-1)q^{c/2-2} + \frac{N(c/2)}{2}\right) \quad \text{si} \quad c \geqslant 4$$

<u>Remarque</u>. $s(c)$ est toujours un entier.

Si q est impair, $s(2) = (q+1)/2$

et $s(c) = \frac{1}{2}(q^2-1)q^{c/2-2}$ si $c \geqslant 4$.

Si q est pair, $s(2) = \frac{1}{2}q$

puis $s(4) = \frac{1}{2}(q^2-1+q-1) = q/2(q+1)-1$

et $s(c) = \frac{1}{2}\, q^{c/2-2}(q^2-1) + \frac{N(c/2)}{4}$ si $c \geqslant 6$. (Alors $4 \mid N(c/2)$).

12.8 Désormais, nous supposons c impair. Soit R une représentation linéaire imprimitive de W_F , d'exposant c . Alors R est primordiale. On peut écrire $R = R(L,\chi)$, où L est une extension quadratique ramifiée de F et χ un caractère de $L^\times$. Si l'on impose $\operatorname{Det} R(\pi_F) = 1$, les conditions sur χ pour que $R = R(L,\chi)$ soit imprimitive et d'exposant c sont

1) $\chi(\pi_F) = \theta_L(\pi_F)$
2) $a(\chi) = c-d_L$ où $d_L = d(L/F)$
3) $\chi^{\sigma_L - 1} \neq 1$.

Remarquons que si l'on a $c-d_L < d_L = \beta(L/F)+1$, alors χ^{σ_L-1} est trivial (utiliser le lemme 9.1). Si l'on a $c-d_L \geqslant d_L$, i.e. $d_L \leqslant \frac{c-1}{2}$, alors en utilisant à nouveau ce lemme on voit que χ^{σ_L-1} est de conducteur $c-2d_L+1$, donc est non-trivial. On peut donc remplacer la condition 3) par la condition $d_L \leqslant \frac{c-1}{2}$.

Pour $c=1$ il n'y a pas de solution.

Pour $c \geqslant 3$ fixons L de sorte que l'on ait $1 \leqslant d_L \leqslant \frac{c-1}{2}$.

Tout caractère χ de $L^\times$ de conducteur $c-d_L$ et vérifiant $\chi(\pi_F) = \theta_L(\pi_F)$ conviendra. Si l'on fixe sa restriction à U_L^o, on a 2 choix possibles pour χ, suivant la valeur de $\chi(\pi_L)$.

12.9 La représentation $R = R(L,\chi)$ est induite par chacun des caractères χ et χ^{σ_L}. La représentation $R\otimes\theta_{F_2}$ est non-équivalente à R.

<u>Soit</u> $n_{c,L}$ <u>le nombre de caractères</u> χ <u>de</u> U_L^o <u>vérifiant</u>

$$a(\chi) = c-d_L .$$

<u>Alors le nombre de représentations linéaires d'exposant</u> c, <u>induites à partir de</u> L <u>et vérifiant</u> $\det R(\pi_F) = 1$ <u>est</u> $n_{c,L}$. <u>Le nombre de représentations linéaires d'exposant</u> c, <u>induites à partir de</u> L, <u>et prises modulo torsion par un caractère non-ramifié, est</u> $n_{c,L}/2$.

On a, bien sûr, $n_{c,L} = (q-1)q^{c-d_L-1} - (q-1)q^{c-d_L-2}$

$$n_{c,L} = (q-1)^2 q^{c-d_L-2} .$$

12.10 La marche à suivre est alors claire : on fixe l'entier impair c, $c \geqslant 3$. On fait varier d entre 1 et $\frac{c-1}{2}$. Le lemme 1.2.6 nous donne le nombre d'extensions quadratiques L (ramifiées) de F, d'exposant différental d.

Il faudra alors sommer sur d et L les nombres $n_{c,L}$, mais en tenant compte des représentations triplement imprimitives.

12.11 Le groupe $D_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'a qu'une seule représentation projective fidèle et irréductible. Par conséquent les représentations projectives triplement imprimitives d'exposant c impair sont en bijection avec les extensions K de F, totalement ramifiées de type $(2,2)$ sur F et d'exposant différental sur F égal à $c+1$ [cf. cor. 11.11]. Remarquons qu'en ce cas q est pair et c plus grand que 4.

Nous poserons à nouveau $\varepsilon = v_F(2)$ et nous définirons la fonction $X(c)$, pour les entiers impairs c, par les formules

$$X(c) = 0 \qquad \text{si} \quad c > 6\varepsilon+1$$

$$X(c) = 1 \qquad \text{si} \quad c \leqslant 6\varepsilon+1 \quad \text{et} \quad c \not\equiv 2 \pmod 3$$

$$X(c) = \frac{q+1}{3} \qquad \text{si} \quad c \leqslant 6\varepsilon+1 \quad \text{et} \quad c \equiv 2 \pmod 3 .$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x.

<u>Proposition</u> 12.11. <u>Soit</u> c <u>un entier impair</u>, $c \geqslant 1$. <u>Le nombre de représentations projectives triplement imprimitives de</u> W_F, <u>d'exposant</u> c <u>est</u>

$$2(q-1)q^{(c-3)/2}q^{-[(c+1)/6]}X(c) \qquad \text{si} \quad c \geqslant 4\varepsilon+3$$

$$2(q-1)q^{(c-3)/2}(q^{-[c+1)/6]}X(c) - q^{-[(c-1)/4]}) \qquad \text{si} \quad c \leqslant 4\varepsilon+1 .$$

12.12 Suivant Tunnell, démontrons cette proposition.

Soit K une extension totalement ramifiée de F, de type $(2,2)$ et d'exposant différental $c+1$ sur F. On a $c+1 = d_1+d_2+d_3$, où les d_i sont les exposants différentaux des 3 sous-corps de K quadratiques sur F.

Si $c+1$ n'est pas divisible par 3, les d_i ne peuvent être tous égaux. L'un d'eux, disons d_1, est le plus petit. Alors on a $d_2 = d_3 > d_1$. Choisir K revient alors à choisir une extension quadratique E de F, d'exposant différental d_2, puis un corps E' quadratique sur F, d'exposant différental d_1 vérifiant $d_1+2d_2 = c+1$. Si K est donnée, il y a deux possibilités pour E. Le nombre d'extensions K possible est donc $\frac{1}{2}\sum_d N(d)N(c+1-2d)$, où d varie entre $\frac{c-1}{3}$ et $\frac{c-1}{2}$ inclus. On utilise alors le lemme 12.6.

Supposons maintenant $c+1$ divisible par 3. Il nous faut ajouter, aux extensions K construites comme précédemment, les extensions

K dont tous les sous-corps quadratiques ont pour exposant différental sur F l'exposant $d = \frac{c+1}{3}$. On peut les obtenir en choisissant deux caractères quadratiques distincts χ et χ' de $F^\times$, d'exposant d, et tels que leurs restrictions à U_F^{d-1} soient distincts. On a $N(d)$ choix possibles pour χ. Si l'on fixe χ, la restriction à U_F^{d-1} de χ' peut prendre $q-2$ valeurs et peut être étendue de $2q^{d/2-1}$ façons en un caractère quadratique de $F^\times$ [voir Tu p. 40 pour les détails]. On obtient le résultat en utilisant le lemme 12.6.

<u>Remarque</u>. On vérifie que la formule donne bien un résultat nul pour q impair (i.e. $\varepsilon=0$) ou $c \leqslant 3$.

12.13 Soit r une représentation projective de W_F, triplement imprimitive et d'exposant c. Soit R un relèvement (primordial) de r. Les autres relèvements (primordiaux) R' sont les représentations $R\otimes(\alpha\circ\tau_F)$ où α est un caractère de $F^\times$ d'exposant au plus $\frac{c-1}{2}$. Si l'on impose la condition $\operatorname{Det} R'(\pi_F) = 1$, on a $2(q-1)q^{(c-3)/2}$ choix possibles pour α. Mais 4 de ces choix donnent la même représentation R.

On en tire la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 12.13. <u>Soit</u> c <u>un entier impair</u>, $c \geqslant 1$. <u>Le nombre de représentations linéaires triplement imprimitives de</u> W_F, <u>d'exposant</u> c <u>et telles que</u> $\operatorname{Det} R(\pi_F) = 1$ <u>est</u>

$$(q-1)^2 q^{(c-3)} q^{-[(c+1)/6]} X(c) \qquad \text{si} \quad c \geqslant 4\varepsilon+3$$

$$(q-1)^2 q^{c-3} (q^{-[(c+1)/6]} X(c) - q^{-[(c+1)/4]}) \qquad \text{si} \quad c \leqslant 4\varepsilon+1 .$$

<u>Le nombre de représentations linéaires triplement imprimitives d'exposant</u> c <u>de</u> W_F, <u>prises modulo torsion par un caractère non-ramifié est la moitié du nombre précédent</u>.

12.14 Le nombre de représentations linéaires imprimitives R de W_F, d'exposant c et telles que $\mathrm{Det}\, R(\pi_F) = 1$, est alors facile à calculer. On fait varier d entre 1 et $\frac{c-1}{2}$ et parcourir à L, extension d'où l'on peut induire R, l'ensemble des extensions d'exposant différental d. Mais, ce faisant, on aura compté trois fois les représentations triplement imprimitives ; il faudra donc les retrancher deux fois.

<u>Théorème</u> 12.14. <u>Soit</u> c <u>un entier impair</u> $c \geqslant 1$. <u>Le nombre de représentations linéaires imprimitives</u> R <u>de</u> W_F <u>d'exposant</u> c, <u>et telles que</u> $\det R(\pi_F) = 1$, <u>est</u>

$$2(q-1)^2 q^{c-3}(1 - X(c) q^{-[(c+1)/6]}) .$$

<u>A torsion près par un caractère non-ramifié, ces représentations sont au nombre de</u> $(q-1)^2 q^{c-3}(1 - X(c) q^{-[(c+1)/6]})$.

La vérification de ce théorème est laissée au lecteur [voir Tu, chap. 4].

12.15 Il nous reste à examiner le cas des représentations projectives.

<u>Proposition</u> 12.15. <u>Soit</u> c <u>un entier impair</u> $c \geqslant 1$. <u>Les représentations projectives imprimitives d'exposant</u> c <u>sont alors au nombre de</u> :

$$2(q-1)q^{(c-3)/2}\left(1 - \frac{X(c)}{2}\, q^{-[(c+1)/6]}\right) \qquad \text{si} \quad c \geqslant 4\varepsilon+3$$

$$2(q-1)q^{(c-3)/2}\left(1 - \frac{X(c)}{2}\, q^{-[(c+1)/6]} + \frac{1}{2} q^{-[(c-1)/4]}\right) \qquad \text{si} \quad c \leqslant 4\varepsilon+1 .$$

Pour démontrer cette proposition, l'on reprend le raisonnement 12.4. Les détails sont laissés au lecteur.

13. Relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$.

13.1 Soit r une représentation projective irréductible de degré 2 de W_F . Si F est un corps local de caractéristique 2 , le théorème 5.17 nous dit que r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$. Il nous reste donc à examiner d'une part les corps locaux de caractéristique résiduelle impaire, d'autre part les extensions finies de $\mathbb{Q}_2$. Nous nous intéresserons dans ce chapitre au cas où la représentation r est imprimitive, c'est-à-dire d'image diédrale.

13.2 Soient donc F un corps local, et r une représentation projective imprimitive de degré 2 de W_F . Son image est diédrale, isomorphe à D_{2m} , pour un entier $m \geqslant 2$. On posera $D_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'obstruction à relever r en une représentation dans $SL(2,\mathbb{C})$, est un élément de $H^2(G_F,\mu_2)$ obtenu comme suit : le plongement de D_{2m} dans $PGL(2,\mathbb{C})$ définit l'élément d_m de $H^2(D_m,\mu_2)$ qui correspond, au point de vue extensions de groupes, à l'image inverse T_{2m} de D_{2m} dans $SL(2,\mathbb{C})$. La représentation r définit une projection $\underline{r}$ de G_F sur D_m et l'obstruction au relèvement de r à $SL(2,\mathbb{C})$ est $\underline{r}^*(d_m)$.

13.3 Nous utiliserons les réalisations et présentations de D_{2m} et T_{2m} introduites en 11.7 . On s'autorisera $m=1$, $D_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ecrivons $m = 2^d m_1$, où m_1 est impair, et appelons C_{m_1} le sous-groupe d'ordre m_1 de C_m : il est engendré par b^{2^d} . Le groupe $D_{2^{d+1}}$ est engendré par a et b^{m_1} . De plus D_{2m} est le produit semi-direct de $D_{2^{d+1}}$ par C_{m_1} .

De même, l'image inverse de C_{m_1} dans $SL(2,\mathbb{C})$ contient un unique sous-groupe Γ_{m_1} d'ordre m_1 , engendré par $\beta^{2^{d+1}}$. Le groupe $T_{2^{d+1}}$ est engendré par α et β^{m_1} , et T_{2m} est le produit semi-direct de $T_{2^{d+1}}$ par Γ_{m_1} . On a le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \Gamma_{m_1} & \to & T_{2m} & \to & T_{2^{d+1}} & \to & 1 \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & C_{m_1} & \to & D_{2m} & \to & D_{2^{d+1}} & \to & 1 . \end{array}$$

Les flèches verticales sont induites par la projection de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $PGL(\alpha,\mathbb{C})$.

13.4 Appelons K le corps centrique de r , et L le corps fixé par le sous-groupe C_{m_1} de $Gal(K/F) \simeq D_{2m}$. On a alors $Gal(L/F) \simeq D_{2^{d+1}}$ et la représentation projective fidèle donnée par le plongement de $D_{2^{d+1}}$ dans $PGL(2,\mathbb{C})$ définit une représentation projective r' de G_F , de noyau G_L .

Soient R un relèvement de r à $SL(2,\mathbb{C})$, et E le corps fixé par $Ker(R)$. Alors on a $Gal(E/F) \simeq T_{2m}$. Le sous-corps $\tilde{E}$ de E fixé par le sous-groupe Γ_{m_1} de T_{2m} est tel que $Gal(\tilde{E}/F) \simeq T_{2^{d+1}}$, et il définit un relèvement de r' à $SL(2,\mathbb{C})$.

Inversement, si l'on a un relèvement R' de r' à $SL(2,\mathbb{C})$, appelons $\tilde{E}$ le corps fixé par $Ker(R')$ et considérons le corps $E = \tilde{E}.K$. Les extensions K et $\tilde{E}$ sont disjointes au-dessus de L , et E est galoisienne sur F . Son groupe de Galois sur F est ainsi une extension du groupe $Gal(\tilde{E}/F)$, groupe isomorphe à $T_{2^{d+1}}$, par le groupe $Gal(\tilde{E}.K/\tilde{E})$ isomorphe à Γ_{m_1} . On obtient même un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et où les flèches verticales sont induites par la factorisation par le groupe $Gal(\tilde{F}.K/K)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \Gamma_{m_1} & \to & Gal(\tilde{E}.K/F) & \to & T_{2^{d+1}} & \to & 1 \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & C_{m_1} & \longrightarrow & D_{2m} & \longrightarrow & D_{2^{d+1}} & \to & 1 . \end{array}$$

Le groupe $Gal(\tilde{E}.K/K)$ agit d'ailleurs trivialement sur $Gal(\tilde{E}.K/\tilde{E}) \simeq \Gamma_{m_1}$, donc l'action de $T_{2^{d+1}}$ sur Γ_{m_1} se factorise à travers $D_{2^{d+1}}$. On en déduit que $\mathrm{Gal}(\tilde{E}.K/F)$, étant le produit semi-direct de $T_{2^{d+1}}$ par Γ_{m_1}, est isomorphe à T_{2m}. Par suite E définit un relèvement de r à $SL(2,\mathbb{C})$.

<u>Ces constructions nous permettent de nous limiter, si nous voulons, au cas où</u> m <u>est une puissance de</u> 2.

13.5 <u>Intéressons-nous d'abord au cas où la caractéristique résiduelle</u> p <u>de</u> F <u>est impaire</u>.

Soit r une représentation projective de degré 2 de W_F, d'image $D_{2^{d+1}}$, avec $d \geqslant 0$. Le corps centrique K de r est alors modérément ramifié sur F.

Le groupe de Galois G_{mr} de l'extension modérément ramifiée maximale de F est engendré (topologiquement) par deux éléments σ et τ, vérifiant la seule relation $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q$ où $q = q_F$ est le cardinal du corps résiduel de F. L'élément τ fixe l'extension non-ramifiée maximale de F.

Un relèvement de r à $SL(2,\mathbb{C})$ se factorise aussi par G_{mr}. L'on peut ainsi trouver un critère de relèvement.

13.6 Supposons d'abord $d = 0$. Alors deux cas sont possibles. Dans le premier cas, K est non-ramifiée sur F, et il existe un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$: en effet r projette G_{mr} sur D_2 par $\sigma \mapsto \alpha \quad \tau \to 1$ et on peut relever en $\sigma \mapsto \alpha \quad \tau \to 1$. Dans le second cas, K est modérément ramifiée sur F. Alors τ se projette sur a, et on aura un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si l'on a $q \equiv 1 \pmod 4$ i.e. si et seulement si F contient les racines quatrièmes de l'unité. Enonçons donc :

<u>Proposition</u> 13.6. <u>Soit</u> F <u>un corps local de caractéristique résiduelle impaire</u>. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de degré</u> 2 <u>de</u> W_F, <u>d'image</u> D_{2m}, <u>où</u> m <u>est impair</u>. <u>Soit</u> K <u>le corps centrique de</u> r.

Si l'unique extension quadratique de F incluse dans K est non-ramifiée, r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$.

Sinon, r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si F contient les racines 4e de l'unité.

13.7 Supposons ensuite $d \geqslant 1$. Si $d \geqslant 2$, C_{2^d} est le seul sous-groupe cyclique H de $D_{2^{d+1}}$ tel que $D_{2^{d+1}}/H$ soit cyclique. Par suite, C_{2^d} est l'image de I_F . Traduisant la condition $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q$ l'on trouve la condition $b^{q+1} = 1$ i.e. $2^d | (q+1)$. Si $d = 1$, c'est évidemment vérifié.

Quant au relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$, la condition $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q$ se traduit par $\beta^{q+1} = 1$ i.e. $2^{d+1} | (q+1)$. On peut énoncer :

Proposition 13.7. Soit F un corps local de caractéristique résiduelle impaire. Soit r une représentation projective de degré 2 de W_F , d'image D_{2m} , où m est pair. Ecrivons $2m = 2^{d+1}m_1$, où m_1 est impair. Alors on a $2^d | (q+1)$ et r possède un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si l'on a $2^{d+1} | (q+1)$.

13.8 Examinons plus précisément le cas où $m = 2$. C'est le cas des représentations triplement imprimitives. Leurs relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$ ont alors pour image le groupe quaternionien U_8 . Les noyaux de ces relèvements fixent des extensions de F , dites quaternioniques.

Proposition 13.8. Soit F un corps local de caractéristique résiduelle impaire. Soit r une représentation projective triplement imprimitive de degré 2 de W_F . Alors r possède un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si F ne contient pas les racines quatrièmes de l'unité. Ce relèvement, s'il existe, est unique.

Cela découle facilement de 13.7 , en remarquant que la condition $4 | (q+1)$ équivaut à $4 \nmid (q-1)$ i.e. à "F ne contient pas les racines quatrièmes de l'unité. Le relèvement est alors unique, défini par $\sigma \mapsto \alpha$, $\tau \to \beta$. Le corps centrique K de r est d'ailleurs l'unique extension de type (2,2) de F .

13.9 Il nous reste à examiner le cas où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_2$. En fait, nous ne traiterons alors que le cas des représentations projectives r triplement imprimitives, i.e. d'image $D_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Mais, plus généralement, nous nous intéresserons aux relèvements de r induits à partir d'un caractère d'ordre au plus 4 , et non pas seulement aux relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$.

Nous l'avons dit, l'image inverse de D_4 dans $SL(2,\mathbb{C})$ est le groupe quaternionien $U_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Il possède (à équivalence près) une unique représentation fidèle de degré 2 , qui est irréductible. On peut la définir par

$$i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le groupe $\mu_4 U_8$ contient également trois groupes isomorphes au groupe diédral D_8 . Le groupe diédral D_8 n'a, lui aussi, qu'une seule représentation fidèle de degré 2 , qui est irréductible. On peut la définir par

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

13.10 Soit R un relèvement de r , dont l'image soit incluse dans le groupe $\mu_4 U_8$. Alors on voit facilement que quelle que soit l'extension quadratique L de F incluse dans K , il existe un caractère χ de $L^\times$ vérifiant $R(L,\chi) = R$ et $\chi^4 = 1$.

Si l'image de R est U_8 , son déterminant est trivial. Si l'image de K est D_8 , appelons E le corps fixé par Ker(R) . Il existe une extension quadratique unique L de F incluse dans K et telle que E soit cyclique de degré 4 sur L . Alors $\operatorname{Det} R$ est le caractère quadratique θ_L de $F^\times$ définissant L .

Si l'image de R est $\mu_4 U_8$, appelons encore E le corps fixé par $\operatorname{Ker}(R)$. Le sous-groupe U_8 de $\mu_4 U_8$ fixe une extension P de F , quadratique sur F , disjointe de K , et telle que l'on ait $\operatorname{Det} R = \theta_P$.

13.11 Rappelons que F est supposée être une extension finie de $\mathbb{Q}_2$. Alors la théorie de Kummer donne une bijection entre $F^\times/F^{\times 2}$ et l'ensemble des extensions quadratiques de F . Si $u \in F^\times/F^{\times 2}$, nous noterons σ_u le caractère de $F^\times$ définissant l'extension quadratique de F correspondant à u . On peut définir σ_u par la formule
$\sigma_u(x) = (u,x)$ pour $x \in F^\times$, où $(.)$ désigne le symbole de Hilbert dans $F^\times$.

13.12 Considérons donc une représentation projective triplement imprimitive r de W_F , de corps centrique K . Nous voulons étudier les relèvements de r de la forme $R(L,\chi)$, où L est une extension quadratique de F incluse dans K , et χ un caractère de $L^\times$ vérifiant $\chi^4 = 1$.

Rappelons que la condition sur χ pour que $R_{L,\chi}$ relève r est $\chi^{\sigma_L - 1} = \theta_{L'} \circ N_{L/F}$, où L' est l'une des deux extensions quadratiques de F incluses dans K et distinctes de L . De plus on a $\operatorname{Det} R_{L,\chi} = \chi_{|F^\times} \cdot \theta_L$.

13.13 Fixons donc L et donnons-nous un caractère χ vérifiant les relations précédentes. Appelons λ la restriction de χ à $F^\times$. Le caractère χ^2 est invariant par σ_L donc il existe un caractère de $N_{L/F}(L^\times)$ vérifiant $\chi^2(x) = \mu \circ N_{L/F}(x)$ pour $x \in L^\times$. Comme on a $\chi^4 = 1$, μ est quadratique. Ecrivant $L = F(\sqrt{u})$, on a la condition de compatibilité $\lambda(u) = \mu(-u)$.

De plus, si $x \in L^\times$ et $y = N_{L/F}(x)$, on a

$$\theta_{L'}(y) = \chi^{\sigma_L - 1}(x) = \chi^{\sigma_L + 3}(x) = \lambda(y)\mu(y)$$. Par conséquent $\theta_{L'}$ coïncide avec $\lambda\mu$ sur $N_{L/F}(L^\times)$.

<u>Inversement</u> donnons-nous un caractère quadratique λ de $F^\times$ et un caractère quadratique μ de $N_{L/F}(L^\times)$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\lambda(u) = \mu(-u)$

2) $\theta_{L'}(y) = \lambda\mu(y)$ pour $y \in N_{L/F}(L^\times)$.

<u>Alors il existe un caractère</u> χ <u>de</u> $L^\times$ <u>vérifiant</u>

1) $\chi^4 = 1$ et $\chi^{\sigma_L - 1} = \theta_{L'} \circ N_{L/F}$

2) $\chi_{|F^\times} = \lambda$ et $\chi^2 = \mu \circ N_{L/F}$.

13.14 Démontrons cette propriété :

Soit $x \in F^\times \cap L^{\times 2}$. Alors on a $x \in F^{\times 2}$ ou $x \in \sqrt{u}\, F^{\times 2}$. On a donc soit $\mu \circ N_{L/F}(x) = \lambda(x) = 1$ dans le premier cas
soit $\mu \circ N_{L/F}(x) = \mu(-u) = \lambda(u) = \lambda(x)$ dans le second cas. On peut donc définir un caractère $\tilde{\chi}$ de $L^{\times 2}.F^\times$ par la formule $\tilde{\chi}(x^2 y) = \mu \circ N_{L/F}(x)\lambda(y)$ si $x \in L^\times$, $y \in F^\times$. On peut alors prolonger $\tilde{\chi}$ en un caractère χ de $L^\times$, qui vérifiera $\chi^4(x) = \mu^2 \circ N_{L/F}(x) = 1$ si $x \in L^\times$.

On aura alors, pour x dans $L^\times$

$$\chi^{\sigma_L - 1}(x) = \chi^{\sigma_L + 3}(x) = \chi \circ N_{L/F}(x)\chi^2(x) = \lambda\mu \circ N_{L/F}(x) = \theta_{L'} \circ N_{L/F}(x)$$

C.Q.F.D.

Utilisons la suite exacte suivante :

$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to F^\times/F^{\times 2} \to L^\times/L^{\times 2} \xrightarrow{N_{L/F}} F^\times/F^{\times 2} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$. On voit alors facilement que l'on peut prolonger le caractère $\tilde{\chi}$ de 2^{d+1} façons, où $d = [F_i : \mathbb{Q}_2]$, ce qui nous donne 2^d <u>représentations</u> $R(L,\chi)$ distinctes <u>correspondant aux mêmes choix de</u> λ <u>et</u> μ . Si l'on tord $R(L,\chi)$ par le caractère $\alpha \circ \tau_F$ de W_F , λ et μ sont tordus par α^2 . Par conséquent, les 2^d représentations correspondant à λ et μ sont tordues les unes des autres par les caractères d'ordre au plus 2 de W_F .

13.15 Supposons que l'on veuille un relèvement de r à $SL(2,\mathbb{C})$ (<u>relèvement dit quaternionique</u>). Il faut alors imposer $\lambda = \theta_L$ et $\mu = \theta_L \theta_{L'}$. La condition d'existence est ainsi $\theta_L(u) = \theta_L\theta_{L'}(-u)$ si $L = F(\sqrt{u})$. Si l'on veut un relèvement R d'image D_8, tel que le corps fixé par $\mathrm{Ker}(R)$ soit cyclique d'ordre 4 sur L (<u>relèvement dit diédral sur</u> L), il faut imposer $\lambda = 1$ et $\mu = \theta_{L'}$. La condition d'existence est $\theta_{L'}(-u) = 1$ si $L = F(\sqrt{u})$. Enfin, si l'on veut un relèvement d'image $\mu_4 U_8$ et de déterminant θ_P, où P est une extension quadratique de F disjointe de K, la condition est $\theta_P\theta_L(u) = \theta_P\theta_{L'}\theta_L(-u)$.

13.16 Traduisons les critères précédents en termes de théorie de Kummer.

<u>Théorème</u> 13.16. <u>Soit</u> r <u>une représentation projective de</u> W_F, <u>triplement imprimitive et de degré</u> 2. <u>Soit</u> $K = F(\sqrt{u},\sqrt{v})$ <u>son corps centrique</u>. <u>Soit</u> $L = F(\sqrt{u})$. <u>Soit</u> $P = F(\sqrt{\omega})$ <u>une extension quadratique de</u> F <u>disjointe de</u> K. <u>Alors</u>

1) r <u>se relève à</u> $SL(2,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si l'on a</u> $(u,-1) = (v,-u)$.

2) r <u>a un relèvement diédral au-dessus de</u> L <u>si et seulement si l'on a</u> $(v,-u) = 1$ i.e. $(v,uv) = 1$.

3) r <u>a un relèvement d'image</u> $\mu_4 U_8$ <u>et de déterminant</u> θ_P <u>si et seulement si l'on a</u> $(\omega u,u) = (\omega v,-u)$.

13.17 <u>Remarques</u>. 1) <u>Si</u> r <u>se relève à</u> $SL(2,\mathbb{C})$, <u>alors</u> r <u>a un relèvement diédral au-dessus d'une des extensions quadratiques de</u> F <u>incluse dans</u> K.

En effet dans le cas contraire on a $(v,u) = (v,uv) = (u,uv) = -1$. On en tire $(v,-u) = -1$ et $(u,-1) = 1$.

2) <u>Si</u> $L = F(\sqrt{-1})$, r <u>a un relèvement diédral au-dessus de</u> L.

r a un relèvement quaternionique au-dessus de L si et seulement si $(-1,-1)=1$.

3) Si r n'a aucun relèvement diédral, elle aura un relèvement d'image $\mu_4 U_8$ <u>si et seulement</u> -1 <u>n'est pas un carré dans</u> F . Si cette condition est vérifiée, les déterminants des relèvements d'image $\mu_4 U_8$ possibles sont les θ_P , où $P \in F(\sqrt{\omega})$, ω vérifiant $(\omega,-s)=-1$.

En effet, si r n'a aucun relèvement diédral, on a $(v,-u)=-1$ et $(u,u)=1$ d'où $(\omega v,-u)=-(\omega,-u)$ et $(\omega u,u)=(\omega,u)$. D'où l'équivalence $(\omega u,u)=(\omega v,-u) \Longleftrightarrow (\omega,-1)=-1$. C.Q.F.D.

4) On peut retrouver le critère du théorème 13.16 en utilisant une formulation adéquate des relations de Demushkin. Pour cela, voir l'appendice au chapitre 13.

13.18 Une extension galoisienne de F dont le groupe de Galois est isomorphe à U_8 sera dite quaternionique. Si son groupe de Galois est isomorphe à D_8 , elle sera dite diédrale d'ordre 8 .

<u>Théorème</u> 13.18. <u>Soit</u> F <u>une extension de degré fini</u> d <u>de</u> $\mathbb{Q}_2$. <u>Le nombre d'extensions quaternioniques de</u> F <u>vaut</u>

$2^d(2^{d+2}-1)(2^d-1)/3$ <u>si</u> F <u>contient</u> i , <u>où</u> $i^2=-1$

$2^d(2^{d+1}-1)^2/3$ <u>si</u> F <u>ne contient pas</u> i <u>et si</u> d <u>est impair</u>

$2^d(2^{2d+2}-2^{d+1}+1)/3$ <u>si</u> F <u>ne contient pas</u> i <u>et si</u> d <u>est pair</u>.

<u>Le nombre d'extensions diédrales d'ordre</u> 8 <u>de</u> F <u>vaut</u>

$2^d(2^{d+2}-1)(2^d-1)$ <u>si</u> $i \in F$

$2^d(2^{d+1}-1)^2$ <u>sinon</u>.

Pour ce résultat, voir aussi [MT], mais leur formule comporte des erreurs.

13.19 Pour démontrer ce théorème, utilisons le critère 13.16. Toutes les extensions quaternioniques de F proviennent de relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$ de représentations projectives triplement imprimitives de W_F. Si une telle représentation projective r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$, elle a exactement 2^d relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$, où d est le degré de F sur $\mathbb{Q}_2$: en effet l'on peut tordre un relèvement donné par un caractère quelconque d'ordre 2 de W_F. Mais les 4 caractères définissant les sous-extensions du corps centrique K de r transforment le relèvement en une représentation équivalente.

De même <u>toutes les extensions diédrales d'ordre</u> 8 <u>de</u> F <u>proviennent de relèvements diédraux</u> de représentations projectives triplement imprimitives de W_F. Si une telle représentation a un relèvement diédral R au-dessus de l'extension L de F, elle a exactement 2^d relèvements diédraux au-dessus de L : ce sont les tordus de R par les caractères d'ordre 2 de W_F.

13.20 Pour les extensions quaternioniques il s'agit donc de compter le nombre N de couples $(u,v) \in F/F^{\times 2} \times F/F^{\times 2}$, vérifiant les conditions $\begin{cases} u \neq 1 \;\; v \neq 1 \;\; uv \neq 1 \\ (u,-1) = (v,-u) \end{cases}$. Le nombre d'extensions quaternioniques de F sera alors $2^d N/6$.

<u>Supposons d'abord que</u> -1 <u>soit un carré dans</u> F. On veut donc satisfaire à $(v,u) = 1$. On choisira donc un élément non trivial u de $F/F^{\times 2}$: on a $2^{d+2}-1$ choix possibles ; puis un élément v de $F/F^{\times 2}$, distinct de 1 et de u, et dans l'orthogonal de u : on a $2^{d+1}-2$ choix possibles, d'où le résultat.

<u>Supposons ensuite que</u> -1 <u>ne soit pas un carré dans</u> F <u>et que</u> d <u>soit impair</u>. On a alors $(-1,-1) = -1$.

On veut satisfaire à $(-1,u) = (v,-u)$, $u \neq 1$, $v \neq 1$ $uv \neq 1$. Si $(-1,u) = 1$, on veut satisfaire à $(v,-u) = 1$, $v \neq 1$, $v \neq u$. On a $(2^{d+1}-1)$ choix pour u et $2^{d+1}-2$ choix pour v. Si $(-1,u) = -1$, on veut satisfaire à $(v,-u) = -1$ et les conditions $v \neq 1$, $v \neq u$ sont alors automatiques. Mais on ne peut prendre $u = -1$. Par suite, on a $2^{d+1}-1$ choix pour u et 2^{d+1} choix pour v , d'où le résultat.

<u>Supposons enfin que</u> -1 <u>ne soit pas un carré dans</u> F <u>et que</u> d <u>soit pair</u>. <u>On a alors</u> $(-1,-1) = 1$.

Si $(-1,u) = 1$ on veut satisfaire à $(v,-u) = 1$, $v \neq 1$, $v \neq u$.

Si $u = -1$, on a $2^{d+2}-2$ choix possibles pour v .

Si $u \neq -1$ ($2^{d+1}-2$ choix), on a $2^{d+1}-2$ choix possibles pour v .

Si $(-1,u) = -1$ on veut satisfaire à $(v,-u) = -1$ et les conditions $v \neq 1$ $v \neq u$ sont automatiques. On a alors 2^{d+1} choix pour u et également pour v .

On obtient au total $2^{2d+3} - 2^{d+2} + 2$ choix pour (u,v) . C.Q.F.D.

13.21 Pour les extensions diédrales, il s'agit de compter le nombre M de couples $(u,v) \in F^{\times}/F^{\times 2} \times F^{\times}/F^{\times 2}$, vérifiant les conditions $u \neq 1$, $v \neq 1$, $uv \neq 1$ et $(v,-u) = 1$. Le nombre d'extensions diédrales de F est alors $2^{d}M/2$.

Si -1 est un carré dans F , on a déjà fait le calcul dans le cas quaternionique.

Supposons donc que -1 ne soit pas un carré dans F .

Si $(v,-1) = 1$ ($(2^{d+1}-1)$ possibilités), on choisit u dans l'orthogonal de v , $u \neq 1$, $u \neq v$: $2^{d+1}-2$ choix pour v .

Si $(v,-1) = -1$ (2^{d+1} possibilités), on choisit u non orthogonal à v , $u \neq v$: $2^{d+1}-1$ choix pour v . Au total on a bien $2(2^{d+1}-1)^{2}$ choix. C.Q.F.D.

Appendice

13.22 Retrouvons le critère du théorème 13.10 en utilisant les relations de Demushkin [La]. En fait nous donnons une présentation différente de [La], et nous ne donnons que le schéma de la démonstration. Cette présentation m'a été suggérée par M. Cartier.

Soit V un espace vectoriel sur le corps fini $\mathbb{F}_2$. Alors le cup-produit définit une application bilinéaire symétrique de $H^1(V,\mathbb{F}_2)\times H^1(V,\mathbb{F}_2)$ dans $H^2(V,\mathbb{F}_2)$. Remarquant que $H^1(V,\mathbb{F}_2)$ est le dual V^* de V, on montre que le cup-produit permet d'identifier $H^2(V,\mathbb{F}_2)$ à l'espace $S^2(V^*)$ produit symétrique d'ordre 2. Cet espace $S^2(V^*)$ s'identifie également à l'espace des formes quadratiques sur V.

13.23 Soit maintenant F une extension finie de $\mathbb{Q}_2$. Le cup-produit définit une application bilinéaire symétrique de $H^1(G_F,\mathbb{F}_2)\times H^1(G_F,\mathbb{F}_2)$ dans $H^2(G_F,\mathbb{F}_2)$. Identifiant $H^2(G_F,\mathbb{F}_2)$ avec $\mathbb{F}_2$ par la théorie du corps de classes, on obtient une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $H^1(G_F,\mathbb{F}_2)$. Mais la théorie de Kummer permet d'identifier $H^1(G_F,\mathbb{F}_2)$ avec $F^\times/F^{\times 2}$. Le cup-produit se traduit alors par le symbole de Hilbert sur F.

13.24 Supposons maintenant que V soit un quotient de G_F : $\varphi : G_F \to V$. Donnons-nous une extension G de V par F_2. La classe ξ de $H^2(V,\mathbb{F}_2)$ correspondant à cette extension s'écrira comme combinaison linéaire de produits d'éléments de V^* soit $\xi = \sum_{i=1}^{r} \chi_i\,\psi_i$. L'obstruction au relèvement de $\varphi : G_F \to V$ en un homomorphisme de G_F dans G est $\varphi^*(\xi)$.

Si nous notons σ_u l'élément de $H^1(G_F,\mathbb{F}_2)$ correspondant à l'élément u de $F^\times/F^{\times 2}$, l'obstruction $\varphi^*(\xi)$ se traduit alors par

$$\prod(u_i,v_i)_F = 1 \quad \text{où} \quad \chi_i \circ \varphi = \sigma_{u_i} \quad \text{et} \quad \psi_i \circ \varphi = \sigma_{v_i} \ .$$

13.25 Prenons d'abord $V = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$, et notons (e,f) une base de V , x et y les composantes suivant cette base. Si l'extension G est quaternionique, la forme quadratique correspondante est $x^2 + xy + y^2$, d'où la condition au relèvement suivant :

$$(u,u)(u,v)(v,v) = 1 \quad \text{avec} \quad x \circ \varphi = \sigma_u \ , \ y \circ \varphi = \sigma_v \ .$$

Cela s'écrit aussi $(v,-u) = (u,-1)$ ce qui est la condition du théorème 13.10.

Si l'extension G est diédrale, $e+f$ se relevant en un élément d'ordre 4 , la forme quadratique correspondante est xy , d'où la condition $(v,uv) = 1$ avec $x \circ \varphi = \sigma_v$, $y \circ \varphi = \sigma_{uv}$. Cela s'écrit aussi $(v,-u) = 1$.

Si, ensuite, $V = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ notons (e,f,g) une base de V , (x,y,z) les composantes. Si G est l'extension $\mu_4 U_8$ de V , z étant l'application déterminant, la forme quadratique correspondante est $z^2 + x^2 + xy + y^2$, et la condition au relèvement s'écrit $(\omega,\omega)(u,u)(u,v)(v,v) = 1$ si $x \circ \varphi = \sigma_u$, $y \circ \varphi = \sigma_v$, $x \circ \varphi = \sigma_\omega$. Cela s'écrit aussi $(\omega u,-1) = (v,-u)$. C.Q.F.D.

14. Représentations triplement imprimitives de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$.

14.1 Le corps $K = \mathbb{Q}_2$ possède 7 extensions de type $(2,2)$, donc il existe 7 représentations projectives triplement imprimitives de degré 2 pour $W_{\mathbb{Q}_2}$.

Nous donnons ici, sous forme de tables :

1) des relèvements primordiaux de ces représentations projectives,

2) des relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$, quand ils existent,

3) des relèvements diédraux, quand ils existent.

14.2 La table VII donne, pour mémoire, le symbole de Hilbert dans $\mathbb{Q}_2^\times$. Comme système de représentants de $\mathbb{Q}_2^\times/(\mathbb{Q}_2^\times)^2$, nous avons choisi $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. De même, la table VIII, donne pour chacune des extensions quadratiques L de $\mathbb{Q}_2$, son exposant différental, qui est aussi le conducteur du caractère la définissant.

Pour chaque extension quadratique L de $\mathbb{Q}_2$, la table I donne des éléments u_1, u_2, u_3, u_4 engendrant U_L^1. Sauf pour $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}_2(j)$ (où $j^2+j+1=0$), on a $v_L(u_i - 1) = i$. On a toujours $u_2 = -1 \in \mathbb{Q}_2$ et $u_3 = -3 \in \mathbb{Q}_2$. Sauf pour $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}_2(j)$ on a $U_L^1 = U_L$ et $L^\times$ est engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et une uniformisante $\pi_L = \pi$. Pour $L = \mathbb{Q}_2(j)$, $L^\times$ est engendré par $\pi = 2$, u_1, u_2, u_3, u_4 et j. Les caractères χ de $L^\times$ que nous utiliserons seront toujours supposés vérifier la relation $\chi(j) = 1$.

La table I donne l'uniformisante π choisie, et les relations que vérifient les u_i. Les éléments $u_2 = -1$, $u_4 = -3$ et 2 engendrent $\mathbb{Q}_2^\times$. La table donne aussi l'expression de 2 en fonction de π et des u_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Les vérifications de l'exactitude de cette table sont immédiates.

La table II donne la norme sur $F = Q_2$ de π, u_1 et u_3. Bien sûr, $u_2 = -1$ est de norme 1 sur $\mathbb{Q}_2$ et $u_4 = -3$ de norme 9.

14.3 La table IV donne, pour chaque représentation projective triplement imprimitive r de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$, un relèvement primordial.

Soit donc K une extension de type (2,2) de $\mathbb{Q}_2$, corps centrique de r. Par le corollaire 11.11 et la remarque qui le suit, l'exposant de r est donné par la formule

$a(r) = d_1 + d_2 + d_3 - 1$ si K est totalement ramifiée sur $\mathbb{Q}_2$, et par la formule

$a(r) = d_1 + d_2 + d_3$ sinon. Ici d_1, d_2, d_3 sont les exposants différentaux des 3 extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_2$

incluses dans K .

Pour chaque extension quadratique L de $\mathbb{Q}_2$, incluse dans K , la table IV donne, par ses valeurs sur les générateurs de $L^\times$, un <u>caractère</u> χ <u>de</u> $L^\times$, tel que $R(L,\chi)$ soit un relèvement primordial de r . Le conducteur de χ est donné par les formules $a(r) = 2a(\chi)$ si L est non-ramifiée sur $\mathbb{Q}_2$ et $a(r) = d_L + a(\chi)$ sinon.

Remarquons que l'on a toujours $a(\chi) \leqslant 5$. Utilisant la relation $(U_L^m)^2 = U_L^{m+2}$ pour $m \geqslant 3$, le lecteur vérifiera aisément que les caractères χ définis dans la table ont bien le bon conducteur.

14.4 Pour déterminer les caractères χ , nous avons suivi la technique des paragraphes 13.12 et 13.13. Pour u dans $\mathbb{Q}_2^\times$, nous notons σ_u le caractère d'ordre au plus 2 de $\mathbb{Q}_2^\times$ qui définit $\mathbb{Q}_2(\sqrt{u})$.

Pour chaque choix de L , on a choisi des caractères λ et μ de $\mathbb{Q}_2^\times$, d'ordre au plus 2 , de façon que $\lambda.\theta_L = \mathrm{Det}\, R(L,\chi)$ ne varie pas quand L varie. On a imposé, bien sûr, ce que le lecteur vérifiera aisément, la condition $\lambda(u) = \mu(-u)$ si $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{u})$. De plus on a choisi λ et μ de façon que $(\lambda\mu)\circ N_{L/\mathbb{Q}_2}$ définisse l'extension K de L : vérification évidente.

Il est alors clair que si χ est un caractère de $L^\times$ tel que $\chi(x) = \lambda(x)$ si $x \in \mathbb{Q}_2^\times$ et $\chi^2(x) = \mu\circ N_{L/\mathbb{Q}_2}(x)$ si $x \in L^\times$, alors $R_{L,\chi}$ est un relèvement de r .

14.5 La condition $\chi^2(x) = \mu\circ N_{L/\mathbb{Q}_2}(x)$ s'exprime très facilement sur les générateurs de $L^\times$; on utilise le calcul de la norme de L à $\mathbb{Q}_2$, regroupé dans la table II.

La condition $\chi_{|F^\times} = \lambda$ s'exprime aussi facilement : les éléments -1 et -3 de $\mathbb{Q}_2^\times$ figurent parmi les générateurs choisis de $L^\times$. Il reste donc à exprimer la condition $\chi(2) = \lambda(2)$. On se sert pour cela de l'expression de 2 en fonction des générateurs de $L^\times$ (table I).

Toutes ces conditions sur χ sont exprimées dans la table intitulée : vérification de la table IV. Le lecteur vérifiera sans problème que la table IV est compatible avec ces conditions.

14.6 Ayant imposé le déterminant du relèvement $R(L,\chi)$, on peut encore tordre par les caractères d'ordre 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$. Pour le caractère centrique $\chi \circ N_{K/L}$ de $R(L,\chi)$, on a ainsi 2 possibilités. Nous avons ajusté χ de façon que le caractère centrique soit le même pour les trois sous-corps L de K , quadratiques sur $\mathbb{Q}_2$.

Pour cela, nous utilisons la table III. Pour chaque choix de K , cette table nous donne un élément x de $K^{\times}$ et sa norme $N_{L/K}(x)$ pour chaque choix de L . Cette table donne également un élément ξ de $L^{\times}$ vérifiant $\xi \equiv N_{K/L}(x) \mod(4\pi_L)$ (i.e. $\mod(\pi_L^5)$ si $L \neq \mathbb{Q}_2(j)$ et $\mod(8)$ si $L = \mathbb{Q}_2(j))$, ceci si $N_{K/L}(x)$ est une unité, et $\xi \equiv N_{K/L}(x) \mod(4\pi_L^2)$ si $N_{K/L}(x)$ est une uniformisante.

Comme les caractères χ considérés vérifient $a(\chi) \leqslant 5$ (et même $a(\chi) \leqslant 3$ si $L = \mathbb{Q}_2(j))$, l'on aura $\chi \circ N_{K/L}(x) = \chi(\xi)$.

Imposer que les caractères centriques $\chi \circ N_{K/L}$ soient les mêmes quand L varie dans K , c'est alors imposer que les 3 valeurs $\chi(\xi)$ soient égales. Le lecteur pourra vérifier, à l'aide de la table III, qu'il en est bien ainsi.

14.7 La table V donne les représentations quaternioniques de $W_{\mathbb{Q}_2}$. On peut tordre la représentation primordiale R donnée par la table IV en une représentation quaternionique si et seulement si l'on a $\mathrm{Det}\, R(-1) = 1$ (cf. Ch. 5.10). Cela nous donne 3 cas possibles pour K . Les représentations quaternioniques sont en fait obtenues, à partir des représentations primordiales, en tordant par les caractères ρ et $\rho\sigma_{-1}$ de $\mathbb{Q}_2^{\times}$, où ρ est défini par $\rho(-1) = 1$ $\rho(2) = 1$ $\rho(-3) = i$; il vérifie $\rho^2 = \sigma_2$.

Les vérifications de la table V sont effectuées à la page suivant cette table.

14.8 Les représentations diédrales sont aussi obtenues par torsion à partir des représentations primordiales. Si l'on tord $R = R(L,\chi)$ par le caractère α de $\mathbb{Q}_2^\times$, λ et μ sont tordus par α^2. On pourra donc tordre R en une représentation diédrale sur L si et seulement si λ est le carré d'un caractère (car, pour une représentation diédrale sur L, $\lambda = 1$), i.e. $\lambda(-1) = 1$.

La table VI donne, pour chaque choix possible de K et L, la valeur de μ, les valeurs de χ sur π, u_1, u_3. (On a $\chi(u_2) = \chi(u_4) = 1$), et le caractère par lequel il faut tordre la représentation primordiale de la table IV, pour obtenir la représentation diédrale $R(L,\chi)$ de la table VI. Les exposants $a(\chi)$ et $a(R)$ ont été calculés grâce au théorème 7.18.

TABLE I : <u>générateurs de</u> $L^{\times}$

L	u_1	u_2	u_3	u_4	Relations	π	2
$\mathbb{Q}_2(j)$	$1+2j$	-1	$1+4j$	-3	$u_1^2 = u_4$, $u_2^2 = 1$	2	π
$\mathbb{Q}_2(i)$	i	-1	$-1+2i$	-3	$u_1^2 = u_2$, $u_2^2 = 1$	$-1+i$	π^2/u_1u_2
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	-1	$3+2\sqrt{3}$	-3	$u_3^2 = u_1^2u_2u_4$, $u_2^2 = 1$	$1+\sqrt{3}$	π^2/u_1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	-1	$-3-2\sqrt{2}$	-3	$u_3 = u_1^2u_2$, $u_2^2 = 1$	$\sqrt{2}$	π^2
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	$1+\sqrt{6}$	-1	$-7-2\sqrt{6}$	-3	$u_3 = u_1^2u_2$, $u_2^2 = 1$	$\sqrt{6}$	π^2/u_2u_4
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	$1+\sqrt{-2}$	-1	$1-2\sqrt{-2}$	-3	$u_3 = u_1^2u_2$, $u_2^2 = 1$	$\sqrt{-2}$	π^2/u_2
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	$1+\sqrt{-6}$	-1	$5-2\sqrt{-6}$	-3	$u_3 = u_1^2u_2$, $u_2^2 = 1$	$\sqrt{-6}$	π^2/u_4

TABLE II : <u>norme des générateurs de</u> $L^{\times}$

L	$N_{L/F}(\pi)$	$N_{L/F}(u_1)$	$N_{L/F}(u_3)$
$\mathbb{Q}_2(j)$	4	3	13
$\mathbb{Q}_2(i)$	2	1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	-2	1	-3
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	-2	-1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	-6	-5	25
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	2	3	9
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	6	7	49

TABLE III : normes dans K

K	L	x	$N_{K/L}(x)$	ξ	
	$\mathbb{Q}_2(i)$		$-3-2i$	$-3+6i$	$u_2u_3u_4$
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{3},\sqrt{-3})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	$1-i+\sqrt{3}$	$5+2\sqrt{3}$	$9+6\sqrt{3}$	$u_2u_3u_4$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$		$-1+2\sqrt{-3}$	$1+4j$	u_3
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$		$-1-\sqrt{-2}$	$-1-\sqrt{-2}$	u_1u_2
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	$1+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{2}$	$\sqrt{-3}$	$1+2j$	u_1
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$		$3+\sqrt{6}$	$19+9\sqrt{6}$	$u_1u_2u_3$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$		$3+\sqrt{2}$	$-21-15\sqrt{2}$	$u_1u_2u_3u_4$
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{-3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	$1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-6}}{2}$	$2+\sqrt{-3}$	$-18-3\sqrt{-3}$	$u_1u_2u_3u_4$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$		$-1-\sqrt{-6}$	$-1-\sqrt{-6}$	u_1u_2
	$\mathbb{Q}_2(i)$		$1-i$	$1-i$	πu_2
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{2},\sqrt{-2})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	πu_1
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$		$\sqrt{-2}$	$\sqrt{-2}$	π
	$\mathbb{Q}_2(i)$		$1-3i$	$9-3i$	$\pi u_1u_2u_3u_4$
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{6},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	$1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{-6}}{2}$	$4+\sqrt{6}$	$-12-7\sqrt{6}$	πu_3
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$		$-2+\sqrt{-6}$	$-18+17\sqrt{-6}$	πu_1u_3
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$		$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	π
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	$1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	$-1-\sqrt{3}$	$-1-\sqrt{3}$	πu_2
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$		$2+\sqrt{6}$	$162+57\sqrt{6}$	$\pi u_1u_3u_4$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$		$2-\sqrt{-2}$	$2-\sqrt{-2}$	πu_1u_2
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	$1-\frac{\sqrt{-2}+\sqrt{-6}}{2}$	$3+\sqrt{3}$	$99+57\sqrt{3}$	$\pi u_1u_2u_3u_4$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$		$-\sqrt{-6}$	$-\sqrt{-6}$	πu_2

TABLE IV : <u>représentations primordiales</u>

K	L	λ	μ	$\chi(\pi)$	$\chi(u_1)$	$\chi(u_2)$	$\chi(u_3)$	$\chi(u_4)$	$a(\chi)$	$a(R)$	Det R
	$\mathbb{Q}_2(i)$	1	σ_3	i	-1	1	1	1	2		<u>Impair</u>
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{3},\sqrt{-3})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_{-3}	1	1	-1	1	1	1	2	4	σ_{-1}
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_3	1	-1	1	-1	1	1	2		
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-1}	σ_3	i	i	-1	1	1	3		<u>Pair</u>
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_{-6}	σ_3	-1	-i	1	1	-1	3	6	σ_{+2}
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_3	σ_{-1}	1	i	-1	1	1	3		
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_{-1}	σ_3	1	i	-1	1	1	3		<u>Impair</u>
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{-3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_6	σ_3	-1	-i	-1	1	-1	3	6	σ_{-2}
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_3	σ_{-1}	i	i	-1	1	1	3		
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_2	1	1	1	1	1	-1	5		<u>Impair</u>
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{2},\sqrt{-2})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_{-1}	1	1	1	-1	-1	1	4	7	σ_{-2}
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	1	σ_{-1}	1	i	1	-1	1	4		
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_{-6}	σ_{-1}	1	-1	1	1	-1	5		<u>Impair</u>
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{6},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	1	σ_{-6}	-1	i	1	-1	1	4	7	σ_6
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_{-1}	σ_{-6}	-1	1	-1	-1	1	4		
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	1	σ_3	1	i	1	-1	1	4		<u>Pair</u>
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_6	1	-1	-1	-1	-1	-1	5	7	σ_2
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_3	1	-1	1	-1	-1	1	4		
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-1}	σ_{-3}	i	1	-1	-1	1	4		<u>Pair</u>
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_{+6}	σ_{-1}	-i	1	-1	1	-1	5	7	σ_2
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_{-3}	σ_{-1}	-i	i	1	-1	1	4		

<u>Vérification de la table</u> IV

K	a	b	λ	μ	Det R	$\lambda(-1)$	$\lambda(-3)$	$N\pi$	Nu_1	Nu_3	$\chi(\pi)^2$	$\chi(u_1)^2$	$\chi(u_3)^2$
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{3},\sqrt{-3})$	-1	3	1	σ_3	σ_{-1}	1	1	2	1	1	-1	1	1
	3	-3	σ_{-3}	1	σ_{-1}	1	1	-2	1	-3	1	1	1
	-3	3	σ_3	1	σ_{-1}	-1	1	1	3	-3	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	-2	-3	σ_{-1}	σ_3	σ_2	-1	1	2	3	1	-1	-1	1
	-3	-2	σ_{-6}	σ_3	σ_2	1	-1	1	3	-3	1	-1	1
	6	-3	σ_3	σ_{-1}	σ_2	-1	1	-6	3	1	1	-1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{-3},\sqrt{-6})$	2	-3	σ_{-1}	σ_3	σ_{-2}	-1	1	-2	-1	1	1	-1	1
	-3	2	σ_6	σ_3	σ_{-2}	-1	-1	1	3	-3	1	-1	1
	-6	-3	σ_3	σ_{-1}	σ_{-2}	-1	1	6	-1	1	-1	-1	1
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{2},\sqrt{-2})$	-1	2	σ_2	1	σ_{-2}	1	-1	2	1	-3	1	1	1
	2	-1	σ_{-1}	1	σ_{-2}	-1	1	-2	-1	1	1	1	1
	-2	-1	1	σ_{-1}	σ_{-2}	1	1	2	3	1	1	-1	1
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{6},\sqrt{-6})$	-1	6	σ_{-6}	σ_{-1}	σ_6	1	-1	2	1	-3	1	1	1
	6	-6	1	σ_{-6}	σ_6	1	1	-6	3	1	1	-1	1
	-6	6	σ_{-1}	σ_{-6}	σ_6	-1	1	6	-1	1	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	2	3	1	σ_3	σ_2	1	1	-2	-1	1	1	-1	1
	3	6	σ_6	1	σ_2	-1	-1	-2	1	-3	1	1	1
	6	3	σ_3	1	σ_2	-1	1	-6	3	1	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	-2	3	σ_{-1}	σ_{-3}	σ_2	-1	1	2	3	1	-1	1	1
	3	-6	σ_6	σ_{-1}	σ_2	-1	-1	-2	1	-3	-1	1	1
	-6	3	σ_{-3}	σ_{-1}	σ_2	1	1	6	-1	1	-1	-1	1

<u>Relations</u> $L=\mathbb{Q}_2(\sqrt{a})$, $K=\mathbb{Q}_2(\sqrt{a},\sqrt{b})$

$\lambda\mu=\sigma_b$, $\lambda\sigma_a=\text{Det } R$, $\lambda(a)=\mu(-a)$

$\chi(\pi)^2=\mu(N\pi)$, $\chi(u_1)^2=\mu(Nu_1)$, $\chi(u_3)^2=\mu(Nu_3)$

λ restriction de χ à $\mathbb{Q}_2^\times$.

TABLE V : <u>représentations quaternioniques</u>

K	L	λ	μ	χ(π)	$\chi(u_1)$	$\chi(u_2)$	$\chi(u_3)$	$\chi(u_4)$	a(χ)
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-2}	σ_6	i	-1	-1	-1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_{-3}	σ_2	-1	1	1	i	1	4
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_6	σ_{-2}	i	1	-1	-1	-1	5
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-2}	σ_6	i	1	-1	-1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_{-3}	σ_6	-1	-1	1	i	1	4
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_6	σ_{-2}	i	-1	-1	-1	-1	5
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_2	σ_6	1	i	1	1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_3	σ_2	-1	-1	-1	-i	1	6
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_6	σ_2	-i	-i	-1	1	-1	5
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_2	σ_6	-1	-i	1	1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_3	σ_2	1	-1	-1	-i	1	6
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_6	σ_2	-i	i	-1	1	-1	5
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-2}	σ_{-6}	i	i	-1	1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_3	σ_{-2}	-i	+1	-1	i	1	6
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_{-6}	σ_{-2}	1	-i	1	-1	-1	5
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-2}	σ_{-6}	i	-i	-1	1	-1	5
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_3	σ_{-2}	i	1	-1	i	1	6
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_{-6}	σ_{-2}	-1	i	1	-1	-1	5

<u>Vérification de la table</u> V

π	u_1	u_2	u_3	u_4	π	u_1	u_2	u_3	u_4	π	u_1	u_2	u_3	u_4
$K=\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$														
Normes (modulo les puissances 4e)					Multiplication par ρ					Mult. par $\rho\sigma_{-1}$				
2	3	1	9	9	1	i	1	-1	-1	1	-i	1	-1	-1
4	3	1	-3	9	1	i	1	i	-1	1	-i	1	i	-1
-6	-5	1	9	9	i	-i	1	-1	-1	i	i	1	-1	-1
$K=\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$														
Normes (modulo...)					Multiplication par ρ					Mult. par $\rho\sigma_{-1}$				
-2	-1	1	1	9	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
-2	1	1	-3	9	1	1	1	i	-1	-1	1	1	i	-1
-6	-5	1	9	9	i	-i	1	-1	-1	i	i	1	-1	-1
$K=\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$														
Normes (modulo...)					Multiplication par ρ					Mult. par $\rho\sigma_{-1}$				
2	3	1	9	9	1	i	1	-1	-1	1	-i	1	-1	-1
-2	1	1	-3	9	1	1	1	i	-1	-1	1	1	i	-1
6	-9	1	1	9	i	-1	1	1	-1	-i	1	1	1	-1

$\rho(-1) = 1$ $\qquad\qquad$ $\rho\sigma_{-1}(-1) = -1$

$\rho(2) = 1$ $\qquad\qquad$ $\rho\sigma_{-1}(2) = 1$ $\qquad\qquad$ $\rho^2 = \sigma_2$

$\rho(-3) = i$ $\qquad\qquad$ $\rho\sigma_{-1}(-3) = i$

TABLE VI : Extensions diédrales

K	L	μ	$\chi(\pi)$	$\chi(u_1)$	$\chi(u_3)$	$a(\chi)$	$a(R)$	Torsion
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{3},\sqrt{-3})$	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_3	i	-1	1	2	4	—
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_3	i	-1	-1	4	6^*	σ_2
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_{-1}	-1	-1	1	2	4	ν
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$	σ_{-1}	-1	-1	-1	4	6^*	$\nu\sigma_2$
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3}$	σ_{-2}	1	1	i	4	8^*	$\rho\nu$
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$	σ_{-2}	1	-1	i	4	8^*	$\rho\nu\sigma_{-1}$
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{2},\sqrt{-2})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-1}	1	i	-1	4	7	—
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$	σ_{-1}	-1	$-i$	-1	4	7	σ_3
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_{-2}	1	i	i	6	8^*	ρ
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_{-2}	-1	i	i	6	8^*	$\rho\sigma_3$
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{6},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_{-6}	-1	i	-1	4	7	—
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{6})$	σ_{-6}	1	i	-1	4	7	σ_{-2}
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_6	$-i$	i	i	6	8^*	$\rho\nu$
	$\mathbb{Q}_2(i)$	σ_6	$-i$	i	$-i$	6	8^*	$\rho\nu\sigma_{-2}$
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_3	1	i	-1	4	7	—
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$	σ_3	-1	i	-1	4	7	σ_{-3}
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_3	-1	1	-1	4	7	ν
	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-6})$	σ_3	1	1	-1	4	7	$\nu\sigma_2$

* représentations non primordiales

$\nu(-1) = 1$

$\nu(2) = i \qquad \nu^2 = \sigma_{-3}$

$\nu(-3) = 1$

Vérification de la table VI

K	Normes			Torseur	Multiplicateur		
	π	u_1	u_3		π	u_1	u_3
	2	1	5	—	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{3},\sqrt{-3})$	2	1	5	σ_2	1	1	-1
	-2	1	-3	ν	i	1	1
	-2	1	-3	$\nu\sigma_2$	i	1	-1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{6})$	4	3	-3	$\rho\nu$	-1	i	i
	4	3	-3	$\rho\nu\sigma_{-1}$	-1	-i	i
	2	3	9	—	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{2},\sqrt{-2})$	2	3	9	σ_3	-1	-1	1
	2	1	5	ρ	1	1	-i
	2	1	5	$\rho\sigma_3$	-1	1	-i
	-6	-5	9	—	1	1	1
$\mathbb{Q}_2(i,\sqrt{6},\sqrt{-6})$	-6	-5	9	σ_{-2}	-1	1	1
	2	1	5	$\rho\nu$	i	1	-i
	2	1	5	$\rho\nu\sigma_{-2}$	i	1	i
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$	-2	-1	1	—	1	1	1
	-2	-1	1	σ_{-3}	-1	1	1
$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2},\sqrt{3},\sqrt{-6})$	6	-9	1	ν	i	1	1
	6	-9	1	$\nu\sigma_2$	-i	1	1

TABLE VII : symbole de Hilbert

	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
-2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
-3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
6	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
-6	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

TABLE VIII : Extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_2$

$L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{x})$ $\qquad d_2 = d(L/\mathbb{Q}_2)$

x	-1	2	-2	3	-3	6	-6
d_L	2	3	3	2	0	3	3

REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES DE DEGRÉ 2

15. Représentations primitives de degré 2.

15.1 Soit r une représentation projective primitive de degré 2 de W_F. Alors son image est isomorphe, soit au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, soit au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Ces deux groupes n'ont d'ailleurs, à équivalence près, qu'une seule représentation projective fidèle de degré 2 [Lg, app. 1 du chap. XI].

Le nombre de représentations projectives primitives de degré 2 de W_F est donc le nombre d'extensions galoisiennes de F, de groupe de Galois $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$. En particulier, on pourrait les définir par des équations du 4e degré. Pour une construction de ces extensions, par les théories de Kummer ou Artin-Schreier, voir [We 2], ou encore [He 1] pour les calculs explicites.

15.2 Soient donc F un corps local et K une extension galoisienne de F, de groupe de Galois $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$. Alors, posant $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, le groupe de ramification sauvage G_1 de G est le sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$, isomorphe à D_4, et formé des produits de deux transpositions. Si F_1 est l'extension modérément ramifiée maximale de F incluse dans K, alors $\mathrm{Gal}(F_1/F) = G/G_1$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_3$ ou $\mathfrak{S}_3$ suivant le cas.

On peut supposer F de caractéristique résiduelle 2. Sinon, il n'y a pas de représentations primitives de degré 2 de W_F [cf. 10.5].

Nous noterons $q = q_F$ le cardinal du corps résiduel de F et $\pi = \pi_F$ une uniformisante de F.

Proposition 15.2. *Il y a une et une seule extension non-ramifiée de degré 3 de F. Il y a une extension galoisienne F_1 de F de groupe de Galois $\mathfrak{S}_3$ si et seulement si q est une puissance impaire de 2. Alors on a $F_1 = F(j, \sqrt[3]{\pi})$, où $j^2 + j + 1 = 0$. Il y a des extensions cycliques cubiques ramifiées de F si et seulement si q est une puissance paire de 2 et alors il y en a trois distinctes. Ce sont les extensions $F_1 = F(\sqrt[3]{j^a \pi})$ pour $a = 0, 1, 2$.*

Pour la démonstration voir [He 1] ou [We 2]. On peut encore utiliser les résultats du chapitre 13 [13.9 et sq.].

15.3 Le groupe $H = \mathrm{Gal}(F_1/F)$ agit sur le groupe G_1 par automorphismes intérieurs. En fait, G est la seule extension de H par G_1, avec cette action : c'est un produit semi-direct. Par conséquent, F_1 étant fixée telle que $H = \mathfrak{A}_3$ ou $\mathfrak{S}_3$, les extensions K de F_1, galoisiennes sur F et telles que l'on ait $\mathrm{Gal}(K/F) = \mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$, correspondent par la théorie du corps de classes aux sous-H-modules N de $F_1^\times$ tels que $F_1^\times/N$ soit isomorphe à G_1 en tant que H-module.

Si i est le plus petit entier tel que $U_{F_1}^i \subseteq N$, alors on a $i = \alpha(K/F_1) + 1$ et par suite, à cause du théorème 2.3, l'exposant de la représentation projective r de degré 2 attachée à K est $a(r) = 2 + \frac{3}{e(F_1/F)}(i-1)$. On appellera i *l'exposant de* K.

Proposition 15.3. *Soit F_1 une extension galoisienne modérément ramifiée de F, telle que $H = \mathrm{Gal}(F_1/F)$ soit isomorphe à $\mathfrak{A}_3$ (resp. $\mathfrak{S}_3$). Soit ρ un élément d'ordre 3 dans H. Pour $i \geqslant 0$, définissons $M_i = F_1^\times / F_1^{\times 2} U_F^i$ et $W_i = M_i/(1+\rho+\rho^2)M_i$.*

Alors le nombre d'extensions galoisiennes K de F, de groupe de Galois $\mathfrak{A}_4$ (resp. $\mathfrak{S}_4$), et d'exposant au plus i, vaut

$1/3\ \mathrm{card}(W_i)$ (resp. $\mathrm{card}(W_i)^{1/2}$).

Pour la démonstration, voir [Tu, chap. 5]. Il s'agit simplement d'utiliser le même raisonnement que dans [We 2], en tenant compte de l'hypothèse sur l'exposant.

15.4 Nous poserons $\varepsilon = v_F(2)$. Si F est de caractéristique 2, ε est infini.

Proposition 15.4. _Soit_ F_1 _une extension galoisienne modérément ramifiée de_ F _telle que_ $H = \mathrm{Gal}(F_1/F)$ _soit isomorphe à_ $\mathfrak{A}_3$ (resp. $\mathfrak{S}_3$). _Alors le nombre d'extensions_ K _de_ F_1, _d'exposant au plus_ i, _et telles que_ K _soit galoisienne sur_ F _de groupe de_ Galois _isomorphe à_ $\mathfrak{A}_4$ (resp. $\mathfrak{S}_4$) _vaut_ :

a) _quand_ $H \simeq \mathfrak{S}_3$ $(q-1)q^{[\frac{i-1}{3}]}$ _si_ $i \leqslant 2\varepsilon$, i _pair_, $i \not\equiv 1 \pmod 3$, _et_ 0 _sinon_,

b) _quand_ $H \simeq \mathfrak{A}_3$ _et_ F, _ramifiée sur_ F $1/3(q-1)q^{[\frac{i-1}{3}]}$ _si_ $i \leqslant 2\varepsilon$, i _pair_ $i \not\equiv 1 \pmod 3$, _et_ 0 _sinon_,

c) _quand_ $H \simeq \mathfrak{A}_3$ _et_ F_1 _non-ramifiée sur_ F $\frac{q+1}{3}(q-1)q^{i-2}$ _si_ $i \leqslant 2\varepsilon$ _et_ i _pair_, _et_ 0 _sinon_.

15.5 Nous donnons ici simplement l'idée de la démonstration, qui découle des méthodes de [We 2]. Pour les détails, voir [Tu, chap. 5]. Il s'agit de calculer le cardinal du module W_i de la proposition 15.3.

On remarque que M_i est un $\mathbb{F}_2[\mathfrak{A}_3]$-module semi-simple et donc qu'il est somme directe de ses constituants

$$M_i = \bigoplus_{j=0}^{i} T_j$$

où $T_o = F_1^\times/F_1^\times U_{F_1}$, $T_j = (F_1^\times)^2 U_{F_1}^{j-1}/(F_1^\times)^2 U_{F_1}^j$ pour $j \geqslant 1$.

Par suite, on a $W_i = \bigoplus_{j=0}^{i} T_j/(1+\rho+\rho^2)T_j$, et il suffit d'étudier la structure de $T_j/(1+\rho+\rho^2)T_j$, ce qui est un calcul simple sur le corps résiduel de F_1.

15.6 On en déduit le résultat suivant, dû à J. Tunnell.

Théorème 15.6. *Soient* c *un entier impair,* F *un corps local de caractéristique résiduelle* 2, *et* q *le cardinal de son corps résiduel. Alors le nombre de représentations projectives primitives d'exposant* c *et de degré* 2 *de* W_F *est*

$$(q-1)X(c)q^{\frac{c-3}{2}-[\frac{c+1}{6}]}.$$

La fonction $X(c)$ est celle déjà introduite en 12.11.

Corollaire 15.6. *Si* F *est une extension finie de* $\mathbb{Q}_2$ *le nombre de représentations projectives primitives de degré* 2 *de* W_F *est* $4/3(q^{2\varepsilon}-1)$.

15.7 En utilisant le résultat 11.12 a), on montre facilement le corollaire suivant :

Corollaire 15.7. *Soit* c *un entier impair. Le nombre de représentations linéaires primitives de degré* 2 *de* W_F, *d'exposant* c *et telles que* $\operatorname{Det} R(\pi_F) = 1$ *vaut*

$$2(q-1)^2X(c)q^{c-3-[\frac{c+1}{6}]}.$$

Le nombre de représentations linéaires primitives de degré 2 *de* W_F, *d'exposant* c, *prises à torsion près par un caractère non-ramifié, vaut* $(q-1)^2X(c)q^{c-3-[\frac{c+1}{6}]}$.

15.8 Il nous reste maintenant à examiner le problème du relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$.

Soient donc r une représentation projective primitive de degré 2 de F , et K son corps centrique. Posons $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

Si F est de caractéristique 2 , nous savons, par le théorème 5.17, que r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$.

De plus l'on voit facilement, en examinant le plongement de G dans $PGL(2,\mathbb{C})$ que r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si r a un relèvement de niveau 2 . On peut alors appliquer la proposition 6.5.

Proposition 15.8. *Soit r une représentation projective primitive de degré 2 de W_F . Soit K son corps centrique. Alors r se relève à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si la propriété suivante est vérifiée* : $N_{K/F}(x)^2 = +1 \Longrightarrow \chi_r(x)^2 = 1$.

15.9 Dans la suite de ce chapitre, F est une extension finie de $\mathbb{Q}_2$.

Pour examiner le relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ d'une représentation projective primitive r de W_F , on peut utiliser plusieurs méthodes.

La première est de passer par un problème global : soit K le corps centrique de r . Alors il existe un corps global $\tilde{K}$ et une sous-extension $\tilde{F}$ de $\tilde{K}$, ainsi que des places w et v de $\tilde{K}$ et $\tilde{F}$ respectivement, telles que

1) $w|v$

2) $\tilde{K}_w = K$, $\tilde{F}_v = F$

3) $\tilde{K}$ soit galoisienne sur $\tilde{F}$, de groupe de Galois isomorphe à $\mathrm{Gal}(K/F)$.

Alors la représentation r définit une représentation projective primitive $\tilde{r}$ de $G_{\tilde{F}}$, de noyau $G_{\tilde{K}}$. L'obstruction au relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ de $\tilde{r}$ est un élément α du groupe $H^2(G_{\tilde{F}},\mu_2)$. Si p est une place de $\tilde{F}$, la restriction de α au groupe de décomposition $G_{\tilde{F}_p}$ est l'obstruction au relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ de la restriction de

$\tilde{r}$ à $G_{\tilde{F}_p}$. Ces obstructions sont triviales sauf en un nombre fini pair de places, qui sont toutes ramifiées dans l'extension $\tilde{K}/\tilde{F}$. Si l'on peut calculer facilement les obstructions en les places ramifiées distinctes de v , on en déduit l'obstruction en v . [Pour plus de détails, voir [Se 2] ou [Se 3]].

C'est cette méthode qu'a utilisée J. Buhler dans le cas $F = \mathbb{Q}_2$. Prenant $\tilde{F} = \mathbb{Q}$, il n'y a qu'une place au-dessus de 2 dans $\tilde{F}$, et les autres places sont au plus modérément ramifiées dans l'extension $\tilde{K}/\tilde{F}$ ce qui simplifie les calculs d'obstruction [Bu, table 3].

15.10 Une autre méthode, utilisée par W. Zink [Zi 1] est d'utiliser la théorie de Kummer.

Soit F_1 l'extension modérément ramifiée maximale de F incluse dans K . Soit ρ un élément d'ordre 3 de $H = \mathrm{Gal}(F/F)$ et si $H \simeq \mathfrak{S}_3$, soit λ un élément d'ordre 2 de H . Alors [We 2], on peut trouver un élément x de $(F_1^{\times})^{\rho-1}F_1^{\times 2}$ tel que $K = F(\sqrt{x}, \sqrt{x^{\rho}})$. (Si $H \simeq \mathfrak{S}_3$ on peut prendre x tel que $x^{\lambda} = x$).

Le théorème suivant est dû à W. Zink [Zi 1] :

<u>Théorème</u> 15.10.(1) <u>Si</u> $G = \mathrm{Gal}(K/F) \simeq \mathfrak{A}_4$, r <u>a un relèvement à</u> $SL(2,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si le symbole de</u> Hilbert $(x,x^{\rho})_{F_1}$ <u>est</u> <u>trivial</u>.

(2) <u>Si</u> $G = \mathrm{Gal}(K/F) \simeq \mathfrak{S}_4$, <u>elle a un relèvement à</u> $SL(2,\mathbb{C})$ <u>si et seulement si l'on a</u> $(x,x-x^{\rho})_{F_1} = 1$.

En fait, l'on peut démontrer la partie (1) en utilisant les techniques du chapitre 13. En effet G_1 est d'indice 3 dans G ; par conséquent la restriction de $H^2(G_F,\mu_2)$ dans $H^2(G_{F_1},\mu_2)$ est injective. La représentation r a donc un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ si et seulement si r_1 en a un. La condition $(x,x^{\rho})_{F_1} = 1$ est précisément celle donnée par le théorème 13.16, puisque l'on a alors

$(-1,xx^{\rho})_{F_1} = (-1,N_{F_1/F}(xx^{\rho}))_F = (-1,N_{F_1/F}(x)^2)_F = 1$.

On explique également de cette façon pourquoi le critère de (1) est vérifié quand $G \simeq \mathfrak{S}_4$: en ce cas la restriction de $H^2(G_F, \mu_2)$ dans $H^2(G_{F_1}, \mu_2)$ est nulle. Par conséquent r_1 se relève à $SL(2,\mathbb{C})$.

16. Représentations primitives de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$.

16.1 Nous appliquons ici les résultats précédents au cas où $F = \mathbb{Q}_2$. Ces résultats nous montreront qu'il existe une extension de type $\mathfrak{A}_4$ de $\mathbb{Q}_2$, la représentation projective correspondante ayant pour exposant 5 . Nous verrons que cette représentation ne se relève pas à $SL(2,\mathbb{C})$.

Il existe aussi 3 extensions de type $\mathfrak{S}_4$ de $\mathbb{Q}_2$. Les représentations projectives correspondantes ont pour exposants respectifs 3 , 7 , 7 . Une des extensions d'exposant 7 ne se relève pas à $SL(2,\mathbb{C})$.

Le tableau suivant, tiré de [Bu, table 3] décrit la situation. Le polynôme $P(x)$ est un polynôme de degré 4 dont les racines engendrent le corps centrique K de r .

$P(x)$	$G = Gal(K/F)$	$a(r)$	relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$
$X^4 + 2X^2 - 2X^2 + 2$	$\mathfrak{A}_4$	5	non
$X^4 - 2X + 2$	$\mathfrak{S}_4$	3	oui
$X^4 - 4X + 2$	$\mathfrak{S}_4$	7	oui
$X^4 - 4X^2 + 4X - 2$	$\mathfrak{S}_4$	7	non

16.2 Il y a un seul corps K de groupe de Galois $\mathfrak{A}_4$ sur $\mathbb{Q}_2$ [We 2 ou He 1]. C'est le corps des racines de $X^4 - 2X^2 + 2X - 2$ [We 2] ou $X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2$ [Bu, table 3.3].

Soit η une racine primitive 7^e de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_2}$. Choisissons η de sorte que l'on ait $\eta + \eta^2 + \eta^4 \equiv 0 \mod 2$. On a

$F_1 = \mathbb{Q}_2(\eta)$ et $K = F_1(\sqrt{1+2\eta}\,,\sqrt{1+2\eta^2})$.

16.3 La représentation projective correspondante ne se relève pas à $SL(2,\mathbb{C})$.

Cela se voit :

1) par l'argument de Weil, utilisant le critère de la proposition 15.8 [We 2]

2) par la considération d'un problème global [Bu, table 3.3]

3) par l'utilisation des relations de Demushkin [Ko 3]

4) par l'utilisation du critère de W. Zink [Théorème 15.10]. Il suffit de voir que l'on a $(1+2\eta\,,1+2\eta^2)_{F_1} = -1$ [cf. 16.5]. Rappelons que l'utilisation des relations de Demushkin redonne en fait le critère de W. Zink [Chap. 13, app. 4 et 15.10].

5) par un calcul direct (voir en 16.7 à 9). On pose $L = F_1(\sqrt{1+2\eta})$ et l'on cherche un caractère χ de $L^\times$ tel que $R_{L,\chi} = \mathrm{Ind}_{F_1}^{L}(\chi\circ\tau_1)$ relève r_1. On trouve alors que l'on a forcément $\chi(-1) = -\theta_L(-1)$, où θ_L est le caractère de $F_1^\times$ définissant L, c'est-à-dire $\mathrm{Det}\, R_{L,\chi}(-1) = -1$. On ne peut donc obtenir un relèvement de déterminant 1 en tordant $R_{L,\chi}$ par un caractère $\alpha\circ\tau_{F_1}$ de W_{F_1}, puisqu'alors $\mathrm{Det}\, R_{L,\chi}(-1)$ est modifié par $\alpha(-1)^2 = \alpha(1) = 1$. [cf. Th. 5.10].

16.4 L'exposant de la représentation projective correspondant à cette extension est 5.

D'après la relation (cf. 15.3) $a(r) = 2 + \frac{3}{e(F_1/F)}(i-1)$, il suffit de voir que l'exposant i de K sur F_1 est égal à 2. Mais cet exposant est aussi l'exposant différental de $L = F_1(\sqrt{1+2\eta})$ sur F_1 qui est bien 2 comme on le voit facilement.

H. Koch avait déterminé cet exposant, indépendamment de J. Buhler [Ko 3]. Il utilisait la théorie du corps de classes et les relations de Demushkin.

Il existe donc un caractère χ de $L^\times$, d'exposant 3, tel que $R_{L,\chi} = \mathrm{Ind}_{F_1}^{L}(\chi\circ\tau_L)$ relève r_1, et que $\chi\circ N_{K/L}$ soit le caractère centrique d'un relèvement de r.

On prendra pour uniformisante dans L, $\pi = \pi_L = -1+\sqrt{1+2\eta}$. Alors les éléments -1, π, $1+\eta^3\pi$, $1+\pi$, $1+\eta^2\pi$ engendrent $L^\times/U_L^3$, et, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, l'on peut prendre

$$\chi(-1)=-1\ ,\ \chi(\pi)=1\ \chi(1+\eta^3\pi)=i\ \chi(1+\pi)=\chi(1+\eta^2\pi)=1\ .$$

<u>Remarque</u>. On a $\theta_L(-1) = (1+2\eta,-1)_{F_1} = (N_{F_1/F}(1+2\eta),-1)_F = 1$ car $N_{F_1/F}(1+2\eta) \equiv 1 \pmod 8$. On a donc bien $\chi(-1) = -\theta_L(-1)$.

16.5 Conservons les notations précédentes. On a $F_1 = F(\eta)$ où η est une racine primitive 7^e de l'unité telle que l'on ait $\eta+\eta^2+\eta^4 \equiv 0 \pmod 2$ et l'on a $K = F_1(\sqrt{1+2\eta}\ ,\sqrt{1+2\eta^2})$. Une base de $F_1^\times$ est formée de -1, 2, 5, $1+2\eta$, $1+2\eta^2$. Le tableau suivant donne les valeurs du symbole de Hilbert dans F

	2	5	$1+2\eta$	$1+2\eta^2$	-1
2	1	-1	1	1	1
5	-1	1	1	1	1
$1+2\eta$	1	1	1	-1	1
$1+2\eta^2$	1	1	-1	1	1
-1	1	1	1	1	1

Rappelons [We 2] que η vérifie l'équation

$$Y^3 - \frac{a-1}{2}Y^2 - \frac{a+1}{2}Y-1 = 0\ ,$$

où a est la racine carrée de -7 congrue à 5 modulo 8. Par conséquent, on a bien $N_{F_1/F}(1+2\eta) = N_{F_1/F}(1+\eta^2) \equiv 1 \pmod 8$. Comme 2, 5, -1 sont dans F il est facile de calculer les symboles de Hilbert de couples contenant l'un de ces nombres : en effet on a $(x,y)_{F_1} = (x,N_{F_1/F}(y))_F$ si $x\in F$. De plus on a

$(1+2\eta\ ,\ 1+2\eta)_{F_1} = (1+2\eta\ ,\ -1)_{F_1} = 1$, et de même $(1+2\eta^2\ ,\ 1+2\eta^2)_{F_1} = 1$. Il nous reste donc à calculer $(1+2\eta\ ,\ 1+2\eta^2)_{F_1}$. Mais ceci vaut -1 car sinon le symbole de Hilbert serait dégénéré.

16.6 Posons $L = F_1(\sqrt{1+2\eta})$ et $\pi = -1+\sqrt{1+2\eta}$. Sur F_1 , π vérifie l'équation $\pi^2 + 2\pi - 2\eta = 0$.

Modulo U_L^3 , une base de $L^\times$ est formée de

$$\eta\ ,\ \pi\ ,\ -1\ ,\ 1+\pi\ ,\ 1+\eta^2\pi\ ,\ 1+\eta^3\pi\ .$$

L'on veut trouver un caractère χ de $L^\times$ tel que $\chi^{\sigma_L - 1} = \omega\circ N_{L/F_1}$, où ω est le caractère de $F_1^\times$ définissant $F_1(\sqrt{1+2\eta^2})$ et σ_L l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(L/F_1)$. On veut aussi que χ ait pour exposant 3 et que $\chi\circ N_{K/L}$ soit centrique pour r , et par conséquent invariant par $\mathrm{Gal}(K/F)$.

Si $x\in L^\times$ $x\in U_L^3$, alors on a $x^{\sigma_L - 1} \in U_L^3$ et aussi $N_{L/F_1}(x) \in U_{F_1}^4$, d'où l'on tire $\omega\circ N_{L/F_1}(x) = 1$. On obtient donc la condition $\chi(x^{\sigma_L}-1) = 1$ qui sera vérifiée si χ est d'exposant 3 . On peut imposer $\chi(\eta) = \chi(\pi) = 1$; alors $\chi^4 = 1$ car $(U_L^1)^4 \subseteq U_L^3$.

16.7 Les autres conditions sont

$$\chi(\pi^{\sigma_L}/\pi) = \omega(-2\eta) = 1$$

$$\chi(1+\pi^{\sigma_L}/1+\pi) = \omega(-(1+2\eta)) = -1$$

$$\chi(1+\eta^3\pi^{\sigma_L}/1+\eta^3\pi) = \omega(1-2\eta^3-2) = \omega(1+2\eta) = -1$$

car on a $1-2\eta^3-2 \equiv 1+2\eta \pmod 4$

et $$\chi(1+\eta^2\pi^{\sigma_L}/1+\eta^2\pi) = \omega(1-2\eta^2-2\eta^5) = \omega(-(1+2\eta)) = -1$$

car on a $\eta^2+\eta^5 \equiv 1+\eta \pmod 2$.

Mais on a $-\pi\pi^{\sigma_L} = \pi^2 + 2\pi = \pi^2 + \eta^6\pi \quad (\pi^2+2\pi)$

$$= \pi^2 + \eta^6\pi^3 + 2\pi^2\eta^6$$
$$= \pi^2 + \eta^6\pi^3 + \eta^5\pi^2 \qquad (\pi^2+2\pi)$$
$$\equiv \pi^2 + \eta^6\pi^3 + \eta^5\pi^4 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^5)$$
$$\equiv \pi^2(1+\pi)(1+\pi\eta^2)(1+\pi^2\eta^3) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^5)$$

car on a $1+\eta^2+\eta^6 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$ et $\eta^2+\eta^3+\eta^5 = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$.
Comme on a $1+\eta^3\pi^2 \equiv (1+\eta^2\pi)^2(1+\eta^3\pi)^2 \quad (\mathrm{mod}\ \pi^3)$ (en effet $\eta^3+\eta^4+\eta^6 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$), on trouve

$$-\pi\pi^{\sigma_L} = \pi^2(1+\pi)(1+\pi\eta^2)^3(1+\pi\eta^3)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^5)$$

d'où $-\pi^{\sigma_L}/\pi = (1+\pi)(1+\pi\eta^2)^3(1+\pi\eta^3)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^3)$.

La première condition de 16.7 s'écrit donc

$$\chi(-(1+\pi)(1+\pi\eta^2)^3(1+\pi\eta^3)^2) = 1 \ .$$

16.8 On a $1+\pi^{\sigma_L}/1+\pi = -1$. La deuxième condition s'écrit donc

$$\chi(-1) = -1 \ .$$

On a $(1+\eta^3\pi)(1+\eta^3\pi^{\sigma_L}) = 1 - 2\eta^3 - 2$

$$\equiv 1+\pi^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^3)$$
$$\equiv (1+\pi)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^3) \ .$$

La troisième condition est donc $\chi(\frac{1+\eta^3\pi}{1+\pi})^2 = -1$.

Enfin, on a $(1+\eta^2\pi)(1+\eta^2\pi^{\sigma_L}) = 1 - 2\eta^2 - 2\eta^3$

$$\equiv -(1+2\eta) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^3)$$
$$\equiv -(1+\pi)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^3).$$

D'où la dernière condition $\chi(-\frac{(1+\eta^2\pi)^2}{(1+\pi)^2}) = -1$.

On voit qu'on peut prendre

$$\begin{cases} \chi(-1) = -1 \\ \chi(1+\pi) = \chi(1+\eta^2\pi) = \pm 1 \\ \chi(1+\eta^3\pi) = \pm i \\ \chi(\pi) = \pm 1 \text{ ou } \pm i \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \chi(-1) = -1 \\ \chi(1+\pi) = \chi(1+\eta^2\pi) = \pm i \\ \chi(1+\eta^3\pi) = \pm 1 \\ \chi(\pi) = \pm i \text{ ou } \pm 1 . \end{cases}$$

16.9 Mais le caractère $\chi \circ N_{K/L}$ doit être invariant par l'élément ρ d'ordre 3 de Gal(K/F) qui transforme $\sqrt{1+2\eta}$ en $\sqrt{1+2\eta^2}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \chi \circ N_{K/L}(1+\eta^2\pi) &= \chi \circ N_{K/L}(1-\eta^2+\eta^2\sqrt{1+2\eta}) \\ &= \chi \circ N_{K/L}(1-\eta^4+\eta^4\sqrt{1+2\eta^2}) \\ &= \chi((1-\eta^4)^2 - \eta^8(1+2\eta^2)) \\ &= \chi(1-2\eta^4-2\eta^3) \\ &= \chi(1+2\eta^6) = \chi(1+\pi^2\eta^5) \\ &= \chi(1+\pi)^2\chi(1+\eta^2\pi)^2 \end{aligned}$$

d'où $\chi(1+\eta^2\pi)^2 = \chi(1+\pi)^2\chi(1+\eta^2\pi)^2$ i.e. $\chi(1+\pi)^2 = 1$.

On doit prendre le premier groupe de solutions. Ces 16 solutions pour χ donnent 8 solutions pour le caractère centrique $\chi \circ N_{K/L}$ qui sont tordues les unes des autres par les 8 caractères d'ordre 4 et d'exposant au plus 2 de $\mathbb{Q}^\times$

16.10 Il y a trois extensions de groupe de Galois $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{Q}_2$. Le corps F_1 est pour chacune d'elles $F_1 = \mathbb{Q}_2(j,\pi)$ où $j^2+j+1 = 0$ et $\pi^3 = 2$. Ce sont les extensions $K_{ab} = F_1(\sqrt{x_{ab}}, \sqrt{x_{ab}^\rho})$, où l'on a pris $x_{ab} = (1+\pi)^a(1+\pi^2)^b(1+\pi^3)^a$, et où ρ agit par $j^\rho = j$ $\pi^\rho = j\pi$. Le couple (a,b) peut prendre les valeurs (1,0) (0,1) ou (1,1) [We 2 ou He 1].

Posons $L_{ab} = F_1(\sqrt{x_{ab}})$. On calcule facilement la différente de L_{ab} sur F_1 : pour (a,b) = (1,0) ou (1,1) $\sqrt{x_{ab}} - 1$ est une uniformisante et $d(L_{ab}/F_1) = 6$. Pour (a,b) (0,1) , $L_{01} = F_1(\sqrt{1+\pi^3})$ et l'on prend l'uniformisante Y vérifiant $Y^2-\pi Y-\pi = 0$, d'où $d(L_{01}/F_1) = 2$. Par suite, on a, pour la représentation projective

r_{ab} associée à K_{ab} , $a(r_{ab,1}) = 5$ si $(a,b) = (0,1)$ et 17 sinon [cf. Cor. 11.11] d'où $a(r_{01}) = 3$ et $a(r_{10}) = a(r_{11}) = 7$ [Th. 2.2].

On calcule immédiatement aussi les groupes de ramification de $G = G_{ab} = \mathrm{Gal}(K_{ab}/\mathbb{Q}_2)$. Pour $(a,b) = (0,1)$ on a $G_1 = D_4 = \mathrm{Gal}(K_{ab}/F_1)$ et $G_i = 1$ pour $i \geqslant 2$. Sinon, on a $G_i = D_4$ pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, $G_i = 1$ pour $i \geqslant 6$.

16.11 Comme l'a montré A. Weil [We 2], les représentations r_{10} et r_{01} se relèvent à $SL(2,\mathbb{C})$. On peut aussi le voir par le critère de W. Zink ou en utilisant un problème global. La représentation r_{11} ne se relève pas à $SL(2,\mathbb{C})$.

En fait, pour chacune des représentations r_{10} et r_{01} , l'on peut prendre un relèvement à $SL(2,\mathbb{C})$ qui soit primordial, comme nous le montrerons plus loin. L'on peut alors tordre par les caractères d'ordre 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$. Pour K_{10} , cela nous donne 8 représentations dans $SL(2,\mathbb{C})$ qui ont l'exposant 7 [cf. Th. 7.18]. Pour K_{01} , on obtient aussi 8 représentations dans $SL(2,\mathbb{C})$ dont 2 ont l'exposant 3 , 2 l'exposant 4 et 4 l'exposant 6 .

16.12 Les résultats concernant les exposants minimaux sont en accord :

a) pour les représentations dans $SL(2,\mathbb{C})$, avec les résultats de [Ne] concernant les représentations supercuspidales exceptionnelles de $PGL(2,\mathbb{Q}_2)$,

b) pour les représentations dans $PGL(2,\mathbb{C})$, avec les résultats que l'on peut tirer de [No], sur les représentations supercuspidales exceptionnelles de $GL(2,\mathbb{Q}_2)$ [communication personnelle de A. Nobs].

Il conviendrait de calculer les facteurs ε pour ces représentations primitives de $W_{\mathbb{Q}_2}$ dans $GL(2,\mathbb{C})$, afin d'obtenir une forme explicite de la correspondance de Langlands, dont l'existence pour $\mathbb{Q}_2$ résulte de [Tu].

16.13 Nous allons étudier plus attentivement les représentations données par les $K_{a\,b}$, et en particulier démontrer les résultats de 16.11.

Dans ce paragraphe et les suivants, nous poserons $F_1 = \mathbb{Q}_2(j,\pi)$, où $j^2+j+1 = 0$. Il est plus commode pour les calculs de choisir π tel que $\pi^3 = -2$.

Le groupe de Galois de F_1 sur $F = \mathbb{Q}_2$ est $\mathfrak{S}_3$, engendré par deux éléments λ et ρ tels que $\lambda^2 = \rho^3 = 1$ et $\lambda\rho\lambda = \rho^2$. On prendra λ et ρ définis par $\lambda\pi = \pi$, $\lambda j = j^2$, $\rho j = j$, $\rho\pi = j\pi$.

Des générateurs de $F_1^\times/F_1^{\times 2}$ sont

$$-1\ ,\ \pi\ ,\ 1+\pi\ ,\ 1+j\pi\ ,\ 1+j\pi^3\ ,\ 1+\pi^5\ ,\ 1+j\pi^5\ ,\ 1+j\pi^6\ .$$

16.14 Nous dressons ci-après le tableau du symbole de Hilbert dans $F_1^\times$.

	-1	π	$1+\pi$	$1+j\pi$	$1+j\pi^3$	$1+\pi^5$	$1+j\pi^5$	$1+j\pi^6$
-1	1	1	1	1	-1	1	1	1
π	1	1	1	1	-1	1	1	-1
$1+\pi$	1	1	1	1	-1	1	-1	1
$1+j\pi$	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
$1+j\pi^3$	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
$1+\pi^5$	1	1	1	-1	1	1	1	1
$1+j\pi^5$	1	1	-1	-1	1	1	1	1
$1+j\pi^6$	1	-1	1	1	1	1	1	1

16.15 <u>Démonstration</u> : Si $x \in F_1$ est fixé par $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)$ i.e. $x \in F_\sigma$, où F_σ est le corps fixé par σ, on a $(x,y)_{F_1} = (x, N_{F/F_\sigma}(y))_{F_\sigma}$ pour $y \in F_1^\times$. Par suite, comme π, $1+\pi$, $1+j\pi$, $1+\pi^5$, $1+j\pi^5$ sont fixés par un élément d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_3$, on a

$$(-1,\pi) = (-1,1+\pi) = (-1,1+j\pi) = (-1,1+\pi^5) = (-1,1+j\pi^5) = 1$$

et $(\pi,1+\pi) = (\pi,1+\pi^5) = (1+\pi, 1+\pi^5) = 1$.

On a $(-1,1+j\pi^3) = (-1,1-2j) = (-1,7)_{\mathbb{Q}_2} = -1$

$(-1,1+j\pi^6) = (-1,1+4j) = (-1,13)_{\mathbb{Q}_2} = 1$.

On a rempli la première colonne.

Comme $1+j\pi$ est fixé par $\lambda\rho^2$, on a

$$(\pi,1+j\pi) = (\pi.\pi j^2, 1+j\pi)_{F_{\lambda\rho^2}} = 1$$

$$(\pi,1+j\pi^3) = (-2,7)_{\mathbb{Q}_2} = -1$$

$(\pi,1+j\pi^6) = (-2,13)_{\mathbb{Q}_2} = -1$. Comme $1+j\pi^5$ est fixé par $\lambda\rho$, on a $(\pi,1+j\pi^5) = (\pi.\pi j, 1+j\pi^5)_{F_{\lambda\rho}} = 1$ d'où la 2^e colonne.

16.16 On a $(1+\pi, 1+j\pi) = (1+\pi, (1+j\pi)(1+j^2\pi))_{F_\lambda}$

mais $(1+\pi, (1+\pi)(1+j\pi)(1+j^2\pi))_{F_\lambda} = (1+\pi, -1)_{F_\lambda}$

$= (-1,-1)_{\mathbb{Q}_2} = -1$

et aussi $(1+\pi, 1+\pi)_{F_\lambda} = (1+\pi, -1)_{F_\lambda} = -1$

d'où $(1+\pi, 1+j\pi) = 1$.

De plus $(1+\pi, 1+j\pi^3) = (1+j\pi, 1+j\pi^3) = (-1,7)_{\mathbb{Q}_2} = -1$

$(1+\pi, 1+j\pi^6) = (1+j\pi, 1+j\pi^6) = (-1,13)_{\mathbb{Q}_2} = 1$.

(Dans ces deux dernières lignes on a utilisé le fait que

$$(x^\sigma, y^\sigma) = (x,y) \quad \text{si} \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)) .$$

De même on a $(1+\pi, 1+j\pi^5) = (1+j\pi, 1+\pi^5) = (1+j\pi, 1+j\pi^5)$. Si ces symboles valent 1, la matrice est dégénérée ce qui est impossible.

Donc ils valent -1 . On a ainsi rempli les 3^e et 4^e colonnes

$$(1+j\pi^3 , 1+\pi^5) = (1+j\pi^3 , 1+j\pi^5) = (1+j\pi^3 , 1+\pi^{15})_{F_\rho} = 1$$

car $1+\pi^{15}$ est un carré dans F_ρ .

$$(1+j\pi^3 , 1+j\pi^6) = (1-2j , 1-4j) = (1-2j , 1+4j)_{\mathbb{Q}_2(j)} = 1 ,$$

d'où la 5^e colonne.

$$(1+\pi^5 , 1+j\pi^5) = (1+\pi^5 , 1-\pi^5+\pi^{10})_{F_\lambda} = (1+\pi^5 , 1+\pi^5)_{F_\lambda} = 1$$

car $1-\pi^5+\pi^{10} = (1+\pi^5)(1-2\pi^5+\pi^{10}) = (1+\pi^5)(1-\pi^5)^2$ modulo π^{13} donc modulo les carrés.

$(1+\pi^5 , 1+j\pi^6) = (1+j\pi^5 , 1+j\pi^6) = 1$, d'où les dernières colonnes.

16.17 Considérons d'abord le corps K_{01}

$$K_{01} = F_1(\sqrt{1+\pi^2} , \sqrt{1+j^2\pi^2}) = F_1(\sqrt{1+\pi^5} , \sqrt{1+j^2\pi^5}) .$$

Posons $L = F_1(\sqrt{1+\pi^5})$. Une uniformisante de L est l'élément Y vérifiant $Y^2-\pi Y-\pi = 0$.

On a
$$\begin{aligned} Y^{\sigma_L} &= \pi-Y = Y^2-\pi Y-Y = Y^2-Y^3+\pi Y^2-Y \\ &= -Y+Y^2-Y^3 = Y(1+Y+Y^2) \pmod{Y^4} \\ &= Y(1+Y)^3 \pmod{Y^4} . \end{aligned}$$

On en tire

$$Y^{\sigma_L}/Y = (1+Y)^3 \pmod{Y^3}$$
$$(1+Y^{\sigma_L})(1+Y) = (1+Y)^2 \pmod{Y^3}$$
$$(1+jY^{\sigma_L})/(1+jY) = 1+jY^2 = (1+Y)^2(1+jY)^2 \pmod{Y^3}$$
$$x^{\sigma_L}/x \equiv 1 \pmod{Y^3} \quad \text{si} \quad x\equiv 1 \pmod{Y^3} .$$

De plus
$$\begin{aligned} N_{L/F_1}(Y) &= -\pi \\ N_{L/F_1}(1+Y) &= 1 \\ N_{L/F_1}(1+jY) &= 1+j\pi+j^2\pi \equiv (1+\pi) \bmod \pi^3 . \end{aligned}$$

Enfin l'exposant différental de L sur F_1 est 2 .

16.18 L'exposant de la représentation projective r_{01} associée à K_{01} est 3 . Par conséquent, il existe un caractère χ d'exposant 3 de $L^{\times}$, tel que $\chi \circ N_{K/L}$ soit centrique pour r . (Ce caractère doit vérifier $a(\chi) + d(L/F_1) = a(r_1) = 5$). Il doit vérifier également $\chi^{\sigma_L}/\chi = \omega \circ N_{L/F_1}$, où ω est le caractère de $F_1^{\times}$ définissant $F_1(\sqrt{1+j^2\pi^2})$. On vérifie facilement que l'on a $1+j^2\pi^2 \equiv 1+j^2\pi^5 \equiv (1+\pi^5)(1+j\pi^5)$ modulo les carrés de $F_1^{\times}$. On en tire les conditions

$$\begin{cases} \chi(1+Y)^3 = 1 \\ \chi(1+Y)^2 = 1 \\ \chi((1+Y)^2(1+jY)^2) = -1 . \end{cases}$$

Une solution au problème est alors le caractère χ de $L^{\times}$, d'exposant 3 et vérifiant $\chi(j) = \chi(Y) = \chi(1+Y) = 1, \chi(1+jY) = i$.

16.19 Cherchons les relèvements de r_{01} à $SL(2,\mathbb{C})$ et leurs exposants. Le noyau E d'un tel relèvement est une extension quadratique de K_{01} . D'après [We 2] , on peut prendre $E = K_{01}(T)$ où T vérifie

$$-(1+4j)T^2 = X^3-3X+1 ,$$

X engendrant K_{01} sur F_1 et vérifiant $X^4-6X^2+4X-3 = 0$.
Cherchons une uniformisante θ pour K_{01}

$$\begin{array}{ll} Z = X^2 & Z^4-12Z^3+30Z^2+30Z+9 = 0 \\ Z = A-1 & A^4-16A^3+72A^2-80A+32 = 0 \\ A = 2\pi\theta & \theta^4-5\pi\theta^3+9\pi^2\theta^2-10\pi\theta+\pi = 0 \end{array}$$

alors on a $-(1+4j)T^2 = \frac{1}{\theta^3}\left[-4+12\pi^2\theta-18\pi\theta^2+5\theta^3\right]$. Le lecteur vérifiera que l'on peut prendre $\frac{1+\pi\theta^2+T}{\theta^{10}}$ comme uniformisante de E . L'exposant différental de E sur K_{01} , qui est aussi l'exposant du caractère centrique d'un relèvement R de r_{01} , de noyau W_E , est alors $d(E/K_{01}) = 4$. Le théorème 7.7 ii nous donne alors

$e(K_{01}/F_1)a(R_1) = n(d(K_{01}/F_1)+a(\chi_R))$, d'où $4a(R_1) = 2(6+4)$ i.e. $a(R_1) = 5$, d'où $a(R) = 3$ par le théorème 7.5.

Ce relèvement est donc primordial.

L'on peut tordre par les caractères d'ordre 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$ pour trouver les autres relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$. On en trouve 2 d'exposant 3, de noyau $W_{K_{01}(T)}$, 2 d'exposant 4 de noyau, $W_{K_{01}(T\sqrt{-1})}$, 4 d'exposant 6 , de noyau $W_{K_{01}(T\sqrt{2})}$ ou $W_{K_{01}(T\sqrt{-2})}$.

16.20 Cherchons maintenant les relèvements de r_{10} à $SL(2,\mathbb{C})$. Toujours d'après Weil il existe un relèvement R dont le noyau fixe l'extension $E = K_{10}(T)$ où T vérifie

$$(1+4j)T^2 = X^3+3X+2 .$$

Ici, X engendre K_{10} sur F_1 et vérifie $X^4+6X^2+8X-3 = 0$. Comme pour K_{01} , on cherche une uniformisante θ de K_{10}

$$Z = X^2 \qquad Z^4+12Z^3+30Z^2-100Z+9 = 0$$

$$A = Z+1 \qquad A^4+8A^3-128A+128 = 0$$

$$A = 2\pi^2\theta \qquad \theta^4+2\theta^3\pi-4\theta+\pi = 0$$

On voit aisément que $\frac{\theta\pi^2+2+T}{2\theta}$ est une uniformisante de E . On en déduit que l'exposant de χ_R , caractère centrique de R , vaut 16. Par conséquent, l'on a

$$4a(R_1) = 2(18+16) \quad \text{i.e.} \quad a(R_1) = 17$$

d'où $a(R) = 7$. Ce relèvement est donc primordial. Les autres relèvements à $SL(2,\mathbb{C})$ ont aussi l'exposant 7 , leur noyau fixe l'un des corps $K_{10}(T)$, $K_{10}(T\sqrt{-1})$, $K_{10}(T\sqrt{2})$, $K_{10}(T\sqrt{-2})$.

16.21 En ce qui concerne les représentations r_{10} et r_{11} , on peut rechercher, comme pour r_{01} , un caractère χ d'une extension quadratique L de F_1 , incluse dans K_{10} (resp. K_{11}), et tel que $\chi\circ N_{K_{10}/F_1}$ (resp. $\chi\circ N_{K_{11}/F_1}$) soit centrique pour r_{10} (resp. r_{11}).

Ce calcul redémontre d'ailleurs que r_{11} ne se relève pas à $SL(2,\mathbb{C})$.

Ces calculs étant longs et fastidieux, nous ne les reproduisons pas ici. Ils ne seront utiles que lorsque l'on voudra calculer les facteurs ε des représentations linéaires relevant r_{01} ou r_{11} (travail en cours).

CONCLUSION : PROBLÈMES OUVERTS

Donnons, pour conclure, quelques problèmes qu'il nous semblerait intéressant de résoudre.

1) Il faudrait pouvoir calculer <u>l'exposant d'une représentation projective primitive quelconque de</u> W_F , et, pourquoi pas, l'exposant d'une représentation projective quelconque. On conjecture qu'il y a toujours égalité dans le théorème 2.3.

2) Il faudrait pouvoir calculer <u>les facteurs</u> ε pour des représentations linéaires primitives de W_F . Il semble nécessaire pour cela de décomposer ces représentations en combinaison linéaire, à coefficients entiers rationnels, de représentations monomiales de W_F . Pour $F = \mathbb{Q}_2$, les calculs sont en cours.

3) Passer au cas d'une représentation linéaire quelconque nécessite une étude précise des représentations induites à partir d'une extension non galoisienne de F .

4) En particulier, l'assertion suivante est-elle vraie ? Soit R une représentation linéaire primordiale de degré n de W_F . Alors R est induite à partir d'une extension non-ramifiée de F si et seulement si $a(R)$ et n ne sont pas premiers entre eux.

5) Enfin, toute opération ou phénomène (induction, restriction, produit tensoriel, décomposition en somme directe, structure de l'image) qui a lieu du côté des groupes de Weil doit se traduire sur les représentations de $GL(n,F)$. Comment ?

BIBLIOGRAPHIE

Les renvois à la bibliographie sont faits entre crochets.

[AT] E. ARTIN et J. TATE.- Class field theory. Benjamin, New York (1967).

[Bo] A. BOREL.- Formes automorphes et séries de Dirichlet. Séminaire Bourbaki (1974/75), n° 466, p. 1-34.

[Bu] J. BUHLER.- Icosaedral Galois representations. Thesis, Harvard (janvier 1977) (à paraître aux Lecture Notes).

[Ca] P. CARTIER.- La conjecture de Langlands dans le cas 2-adique. Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes, Université de Paris VII (1977).

[Co] Automorphic forms, representations and L functions. A. M. S. Summer Institute, Corvallis (juillet 1977), à paraître.

[De] P. DELIGNE.- Les constantes des équations fonctionnelles <u>in</u> Modular functions of one variable II. L. N 349, p. 501-597.

[Ge] P. GÉRARDIN.- Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4. Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes. Université de Paris VII (1977).

[He 1] G. HENNIART.- Représentations de degré 2 du groupe de Galois d'un corps local. Mémoire de D.E.A., Université de Paris-Sud (1975).

[He 2] G. HENNIART.- Représentations de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$. Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284 (6 juin 1977), p. 1329-32.

[Ho] R. HOWE.- Invariant theory and duality for classical groups over finite fields, with applications to their singular representation theory. Prépublication (1975).

[Ko 1] H. KOCH.- Galoissche Theorie der p - Erweiterungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1970).

[Ko 2] H. KOCH.- Über die Liftung projektiver 2-dimensionale Darstellungen von $\mathbb{Q}_2$. Prépublication (1976).

[Ko 3] H. KOCH.- Classification of the primitive representations of the Galois group of local fields. Inv. Math. 40 (1977), p. 195-216.

[Ku] P. KUTZKO.- The irreducible local Galois representations of prime dimension. Prépublication (1977).

[La] J. LABUTE.- Classification of Demushkin groups. Canadian Journal of Mathematics 19 (1966), p. 106-132.

[Lg] S. LANG.- Introduction to modular forms. Springer, Berlin (1977).

[MT] R. MASSY et N. THONG.- Extensions galoisiennes non abéliennes de degré p^3 d'un corps P-adique. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280 (26 mars 1975).

[Ne] F. NEKLYUDOVA.- Description of extraordinary representations of $PGL_2(\mathbb{Q}_2)$. Funct. Anal. and its applications 2 (1975), p. 73-77.

[No] A. NOBS.- Die irreduzible Darstellungen von $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ insbesondere $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. Math. Annalen t. 229 (1977)

[Se 1] J.-P. SERRE.- Corps locaux, 2e éd. Hermann, Paris (1968).

[Se 2] J.-P. SERRE.- Modular forms of weight one and Galois representations in Algebraic Number fields, Proceedings of the Durham Symposium. Academic Press, London (1977).

[Se 3] J.-P. SERRE.- Cours au Collège de France 1974-75 (non publié).

[Se 4] J.-P. SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis. Hermann, Paris (1968).

[Tu] J.B. TUNNELL.-On the local Langlands conjecture for GL(2). Inv. Math. 46 (1978), p. 179-200.

[We 1] A. WEIL.- Basic number theory, 3e éd. Springer, Berlin (1974).

[We 2] A. WEIL.- Exercices dyadiques. Inv. Math. 27 (1974), p. 1-22.

[Yo] H. YOSHIDA.- On extraordinary representations of GL_2 in Algebraic number theory,edited by S. Iyanaga. Japan-Society for the promotion of Science, Tokyo 1977, p. 291-303.

[Zi 1] W. ZINK.- Ergänzungen zum Weil's Exercices dyadiques. Prépublication (1976).

[Zi 2] W. ZINK.- Weil Darstellungen and lokale Galois theorie. Prépublication (1977).

N° d'impression 354

1er trimestre 1979