UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

Nos 51-7401

Séminaire

d'algèbre non commutative

1974

(Publications mathématiques d'Orsay

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Année 1973/1974

-:- 1ère PARTIE -:-

-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 1 du 5 Novembre 1973

SUR LES ANNEAUX ARITHMETIQUES A GAUCHE

par Habib ACHKAR

-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans ce travail nous essayons de généraliser au cas non commutatif quelques propriétés des anneaux arithmétiques commutatifs que nous rappelons dans le premier paragraphe de notre étude ; en particulier l'existence de l'inverse de tout idéal fractionnaire non nul de type fini dans un anneau arithmétique commutatif intègre.

Nous démontrons d'abord l'existence du corps des fractions à gauche d'un anneau arithmétique à gauche intègre ; ceci permet l'étude des idéaux à gauche et à droite fractionnaires. Nous établissons alors le résultat suivant : Si A est un anneau arithmétique à gauche, et K son corps de fractions à gauche, si K est aussi le corps de fractions à droite de A, alors tout A-idéal fractionnaire à droite engendré par deux éléments est inversible à gauche. Mais nous n'avons pas réussi à généraliser cette propriété au cas d'un idéal à droite engendré par un nombre fini d'éléments, alors que cette généralisation se fait facilement dans le cas commutatif.

D'autre part nous avons étudié les idempotents d'un anneau arithmétique à gauche et démontré qu'ils sont centraux ; d'où certaines conséquences et des applications à des cas particuliers. Nous avons étudié les anneaux arithmétiques à gauche réduits et prouvé que l'enveloppe injective d'un tel anneau est un anneau régulier réduit injectif.

Nous avons essayé aussi de caractériser l'anneau des matrices carrées sur un anneau arithmétique. Dans le cas commutatif intègre nous montrons que A est arithmétique si et seulement si $M_2(A)$ est de Rikart à gauche. Cette propriété ne s'étend pas au cas non commutatif.

Voici le plan suivi :

§ 1. Rappels - Définitions - Notations.

§ 2. Propriétés caractéristiques d'un anneau arithmétique à gauche.

§ 3. Etude des idempotents.

§ 4. Applications et cas particuliers.

§ 5. Anneaux de matrices carrées (2,2) sur un anneau arithmétique.

§ 6. Anneaux arithmétiques à gauche réduits.

§ 1. RAPPELS. DEFINITIONS. NOTATIONS.

Rappelons que l'ensemble des idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) d'un anneau A unitaire, ordonné par la relation d'inclusion des ensembles, est un treillis complet modulaire que nous noterons $\mathfrak{I}_g(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_d(A)$, resp. $\mathfrak{I}(A)$].

1.1. Définition : Nous disons qu'un anneau unitaire A est arithmétique à gauche (resp. à droite, resp. bilatère) quand $\mathfrak{I}_g(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_d(A)$, resp. $\mathfrak{I}(A)$] est un treillis distributif.

Dans la suite nous étudions les propriétés des anneaux arithmétiques à gauche ; l'étude des anneaux arithmétiques à droite est semblable.

Dans [1] nous avons montré certains résultats que nous rappelons ci-dessous sans démonstration :

1.2. Théorème : Pour un anneau unitaire A, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est arithmétique à gauche.

(ii) Dans le treillis des idéaux à gauche de A la distributivité est vraie pour les idéaux à gauche principaux.

(iii) A vérifie le théorème chinois.

(iv) Les idéaux à gauche $\cap$-irréductibles de A sont fortement $\cap$-irréductibles.

1.3. Théorème : Soit A un anneau unitaire, commutatif et intègre, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est arithmétique.

(ii) Quelque soit l'idéal maximal M de A, le localisé A_M est un anneau de valuation.

(iii) Quels que soient les idéaux I, J, K de A, K étant de type fini alors : $(I+J):K = I:K + J:K$.

(iii)' Quels que soient les éléments a et b de A alors : $(a):(b) + (b):(a) = A$.

(iv) Quels que soient les idéaux I, J, K de A, I et J étant de type fini alors : $K:(I \cap J) = K:I + K:J$.

(v) Quels que soient les idéaux I et J de A, $I \subseteq J$ et J de type fini, il existe K, idéal de A, tel que $I = JK$.

(vi) Quels que soient les idéaux I, J, K de A alors : $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.
(vii) Quels que soient les idéaux I et J de A alors : $(I+J)(I \cap J) = IJ$.
(viii) A est un anneau de Prüfer, c'est-à-dire tel que tout idéal non nul de type fini est inversible.
(ix) Quels que soient les idéaux I, J, K de A, I non nul et de type fini alors $IJ = IK \Longrightarrow J = K$.
(x) A est intégralement clos et tout élément z du corps des fractions F de A s'écrit : $z = x+yz^2$ où x et y sont dans A.

Dans [1] nous avons prouvé l'équivalence entre les anneaux de Prüfer et les anneaux arithmétiques commutatifs intègres par une méthode directe sans faire intervenir les propriétés des localisés.

Remarquons enfin que les anneaux de valuation, les anneaux principaux et quasi-principaux, les anneaux de Bezout, les domaines de Dedekind et les anneaux semi-héréditaires sont des exemples classiques d'anneaux arithmétiques commutatifs.

§ 2. PROPRIETES CARACTERISTIQUES D'UN ANNEAU ARITHMETIQUE A GAUCHE.

2.1. Proposition : Un anneau A est arithmétique à gauche si et seulement si quels que soient a et b dans A, il existe une matrice carrée, $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ à éléments dans A, telle que : $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$ et $(s+t)(a+b) = a+b$.

Démonstration : La condition est nécessaire ; en effet :

- si $a+b = o$ la matrice non nulle $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$ et $(1+0)(a+b) = a+b$.

- si $a+b \neq o$, A étant arithmétique à gauche, on aura :

$$A(a+b) = A(a+b) \cap [Aa+Ab] = [Aa \cap A(a+b)] + [Ab \cap A(a+b)].$$

D'où $\exists \alpha \in A$, $\exists \beta \in A$, $a+b = \alpha+\beta$ avec :

$$\begin{cases} \alpha = hb = s(a+b) \\ \beta = ka = t(a+b) \end{cases} \qquad h \in A,\ s \in A,\ t \in A,\ k \in A.$$

Par conséquent $(s+t)(a+b) = a+b$. Et comme $a+b \neq o$, s ou t est nécessairement non nul, donc la matrice $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$, où $u = s-h$ et $v = t-k$, est non nulle. D'autre part :

$$\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa+ub \\ va+tb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(a+b)-hb \\ t(a+b)-ka \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}.$$

Réciproquement soit un anneau A vérifiant la propriété :

$\forall a \in A$, $\forall b \in A$, $\exists o \neq \begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix} \in M_2(A)$,

$\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$ et $(s+t)(a+b) = a+b$.

Soient alors I, J, K trois idéaux à gauche de A, on a toujours $[I \cap J + I \cap K] \subseteq [I \cap (J+K)]$. Soit maintenant un élément c de $I \cap (J+K)$; $c \in I$ et c s'écrit :

$$c = a+b, \qquad a \in J \text{ et } b \in K.$$

D'après l'hypothèse il existe $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ matrice non nulle telle que :

$$\begin{cases} sa+ub = o \\ va+tb = o \end{cases} \qquad \text{avec} \quad (s+t)(a+b) = a+b.$$

D'où :

$$\begin{cases} s(a+b) = (s-u)b \\ t(a+b) = (t-v)a \end{cases} \qquad \text{et} \quad c = a+b = s(a+b) + t(a+b)$$

Par suite c s'écrit : $c = \alpha+\beta$ où $\begin{cases} \alpha = s(a+b) = (s-u)b \\ \beta = t(a+b) = (t-v)a. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \alpha = sc = (s-u)b \in Ab \cap Ac \subseteq I \cap K \\ \beta = tc = (t-v)a \in Aa \cap Ac \subseteq J \cap I. \end{cases}$

Et alors $c = \alpha+\beta \in I \cap K + I \cap J.$

Par suite nous déduisons $I \cap (J+K) = I \cap J + I \cap K.$

2.2. Proposition : Un anneau A est arithmétique à gauche si et seulement si quel que soit $n \in N$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, famille de n éléments de A, il existe $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ tous dans A tels que :

$$\left\| \begin{array}{l} s_1(a_1+\ldots+a_n) = k_1 a_1 \\ \vdots \\ s_n(a_1+\ldots+a_n) = k_n a_n \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad (s_1+\ldots+s_n)(a_1+\ldots+a_n) = (a_1+\ldots+a_n)$$

La condition est suffisante d'après la démonstration de la proposition précédente. Pour démontrer qu'elle est nécessaire nous raisonnons par récurrence sur n ; la propriété étant vraie pour deux éléments (prop. 2.1.) supposons qu'elle le soit pour $n-1$ éléments. Posons alors $a_1+\ldots+a_{n-1} = a$ et $a_n = b$. Il existe donc r, u, s et k_n dans A tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} r(a+b) = ua \\ s(a+b) = k_n b \end{cases} \quad \text{avec} \quad (r+s)(a+b) = a+b.$$

Appliquons la récurrence à $ua_1, \ldots, ua_{n-1}$; il existe donc $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et $h_1, \ldots, h_{n-1}$ tels que :

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_1(ua_1+\ldots+ua_{n-1}) = h_1 ua_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}(ua_1+\ldots+ua_{n-1}) = h_{n-1} ua_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\sigma_1+\ldots+\sigma_{n-1})(ua_1+\ldots+ua_{n-1}) = ua_1+\ldots+ua_{n-1}$$

(1) et (2) $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_1 r(a_1+\ldots+a_n) = \sigma_1 r(a+b) = \sigma_1 ua = \sigma_1 u(a_1+\ldots+a_{n-1}) = h_1 ua_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} r(a_1+\ldots+a_n) = \sigma_{n-1} r(a+b) = \sigma_{n-1} ua = \sigma_{n-1} u(a_1+\ldots+a_{n-1}) = h_{n-1} ua_{n-1} \\ s(a_1+\ldots+a_n) = k_n a_n. \end{cases}$$

En posant $s_1 = \sigma_1 r, \ldots, s_{n-1} = \sigma_{n-1} rn$ $s_n = s$ et $k_1 = h_1 u, \ldots, k_{n-1} = h_{n-1} u$ on a :

$$\begin{cases} s_1(a_1+\ldots+a_n) = k_1a_1 \\ \vdots \\ s_n(a_1+\ldots+a_n) = k_ua_n. \end{cases}$$

Avec $(s_1+\ldots+s_n)(a_1+\ldots+a_n) = (\sigma_1+\ldots+\sigma_{n-1})r(a_1+\ldots+a_n)+s_n(a_1+\ldots+a_n)$

$= (\sigma_1+\ldots+\sigma_{n-1})(ua_1+\ldots+ua_{n-1})+s(a_1+\ldots+a_n) = ua+s(a+b) = (r+s)(a+b) = a+b$

$= a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n.$

C.Q.F.D.

2.3. Théorème : Si A est un anneau intègre, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est arithmétique à gauche.

(ii) $\forall a \in A$, $\forall I \in \mathfrak{I}_g(A)$, $\forall J \in \mathfrak{I}_g(A) \Longrightarrow (I+J)^{\cdot}.a = I^{\cdot}.a + J^{\cdot}.a.$

(iii) $\forall a \in A$, $\forall b \in A$, $\Longrightarrow Aa^{\cdot}.b + Ab^{\cdot}.a = A.$

Démonstration :

i) $\Longrightarrow$ ii) : Si $a = o$, $(I+J)^{\cdot}.a = A = I^{\cdot}.a + J^{\cdot}.a.$

Pour $a \neq o$ nous avons dans tout anneau $(I+J)^{\cdot}.a \supseteq I^{\cdot}.a + J^{\cdot}.a$. Réciproquement si $x \in (I+J)^{\cdot}.a$, alors $xa \in I+J$; donc $xa = b+c$ où $b \in I$ et $c \in J$.

Le cas où x est nul est évident car alors x est dans $I^{\cdot}.a + J^{\cdot}.a$. Si x est non nul alors $b+c$ est non nul $(a \neq o)$ et d'après la proposition 2.1. il existe une matrice $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s+t = 1 \quad \text{car} \quad b+c \neq o \quad \text{et} \quad A \text{ intègre.}$$

Par suite $x = (s+t)x = sx+tx = y+z$, où $y = sx$ et $z = tx$. Nous avons alors :

$$ya = sxa = s(b+c) = sb+sc = -uc+sc = (s-u)c$$

et $za = txa = t(b+c) = tb+tc = tb-vb = (t-v)b.$

Donc, $c \in J \Longrightarrow ya \in J$ et $y \in J^{\cdot}.a$

$b \in I \Longrightarrow za \in I$ et $z \in I^{\cdot}.a.$

Et alors $x = y+z \in I^{\cdot}.a + J^{\cdot}.a.$

ii) $\Longrightarrow$ iii) : D'après ii) nous avons pour tout couple d'éléments a et b de A : (1) $(Aa+Ab)^{\cdot}.(a+b) = Aa^{\cdot}.(a+b) + Ab^{\cdot}.(a+b).$

Or $(Aa+Ab)^{\cdot}.(a+b) = A$ parce que $A(a+b) \subseteq Aa + Ab$. D'autre part $Aa^{\cdot}.(a+b) = Aa^{\cdot}.b$ et $Ab^{\cdot}.(a+b) = Ab^{\cdot}.a$. D'où $(1) \Longrightarrow A = Aa^{\cdot}.b + Ab^{\cdot}.a.$

<u>iii) $\Longrightarrow$ i)</u> : D'après iii) quels que soient a et b dans A il existe x et y tels que $x+y = 1$ avec $xb \in Aa$ et $ya \in Ab$. Donc $xb = \lambda a$ et $ya = \mu b$; par suite $\begin{pmatrix} y & -\lambda \\ -\mu & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$ avec $x+y = 1$; d'après la proposition 2.1. A est arithmétique à gauche.

2.4. <u>Remarque</u> : La proposition précédente est en quelque sorte une généralisation des propriétés (iii) et (iii)' du théorème 1.3. du cas commutatif intègre.

2.5. <u>Proposition</u> : <u>Un anneau intègre arithmétique à gauche est un anneau de Ore à gauche ; il possède donc un corps de fractions à gauche.</u>

<u>Démonstration</u> : Soient a et b deux éléments non nuls d'un anneau arithmétique à gauche intègre.

Si $a+b = o$ alors $1.a = -1.b \neq o$.

Si $a+b \neq o$, d'après 2.1. il existe une matrice non nulle $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases} sa = -ub \\ va = -tb \end{cases} \quad \text{et} \quad s+t = 1 \quad \text{parce que } A \text{ est intègre et } a+b \neq o.$$

Alors $x = sa = -ub$ et $y = va = -tb$ ne peuvent pas être tous deux nuls sinon $s = o$ et $t = o$ et $s+t$ ne saurait être égal à 1.

Donc dans les deux cas la condition des multiples communs à gauche est vérifiée.

Nous en déduisons que $Aa \cap Ab \neq o$ si a et b sont non nuls.
<u>L'idéal (o) est donc $\cap$-irréductible en tant qu'idéal à gauche</u> de A et A est un domaine de Ore à gauche.

2.6. <u>Théorème</u> : A <u>étant un domaine de Ore à gauche,</u> K <u>son corps de fractions à gauche, il y a équivalence entre</u> :

(i) A <u>est arithmétique à gauche.</u>

<u>et</u> (ii) $\forall z \in K$, z <u>de la forme</u> ab^{-1} <u>où</u> $a \in A$ <u>et</u> $b \in A \Longrightarrow \exists x \in A$, $\exists y \in A$, $z = x+yz^2$ <u>avec</u> $yz \in A$.

<u>Démonstration</u> :

<u>i) $\Longrightarrow$ ii)</u> : Si K est le corps de fractions à gauche de A et $z = ab^{-1}$, a et b étant dans A, nous savons d'après la proposition 2.1. qu'il existe une matrice non nulle $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix} \in M_2(A)$ telle que $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$ avec $(s+t)(a+b) = a+b$.

Si $a+b = o$ alors $z = -1 \in A$, donc ii) est vérifié : $x = -1$, $y = o$.

Si $a+b \neq o$ alors $s+t = 1$ car A est intègre et alors :

$$z = (s+t)z = sz+tz \qquad (1)$$

Or d'après la propriété de la matrice ci-dessus nous avons :

$$\begin{cases} sa = -ub \\ va = -tb \end{cases} ; \text{ d'où } \begin{cases} sab^{-1} = -u \\ vab^{-1} = -t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sz = -u \\ vz = -t \end{cases} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow z = -u-vz^2$; en posant $x = -u$ et $y = -v$ nous avons $z = x+yz^2$; et $x = -u \in A$, $y = -v \in A$, $yz = -vz = t \in A$.

<u>ii) $\Longrightarrow$ i)</u> : Soit A un domaine de Ore à gauche vérifiant ii). Soient deux éléments quelconques, non nuls a et b de A ; considérons $z = ab^{-1} \in K$; d'après ii) il existe x et y dans A tels que :

$$z = x+yz^2 \text{ avec } yz \in A.$$

Posons $t = yz \in A$ et $s = 1-t$; donc $sz = (1-yz)z = x$.

D'où
$$\begin{cases} t = yab^{-1} \\ x = sab^{-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} tb = ya \\ xb = sa \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} s & -x \\ -y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}.$$

Et en plus $s+t = 1$.

D'après la proposition 2.1. A est alors arithmétique à gauche.

2.7. <u>Remarque</u> :

1) A étant un domaine de Ore à gauche et K son corps de fractions à gauche, si en plus A est un domaine de Ore à droite alors K est son corps de fractions à droite. Dans ces conditions tout élément z de K s'écrira sous la forme ab^{-1}, $a \in A$, $b \in A$. Le théorème précédent s'énoncera :

A est arithmétique à gauche si et seulement si tout z de K s'écrit sous la forme $z = x+yz^2$ où $x \in A$, $y \in A$, et $yz \in A$.

2) Il est à remarquer aussi que le résultat que nous venons d'établir ci-dessus <u>généralise en partie le théorème 3.1. du cas commutatif</u> à savoir l'équivalence entre les assertions :

(i) A <u>est arithmétique</u>

et (x) A <u>est intégralement clos et tout</u> z <u>dans le corps de fractions de</u> A s'écrit $z = x+yz^2$ où $x \in A$ et $y \in A$.

En effet dans le cas commutatif (x) est équivalente à :

(ii) $\forall z \in K$, $\exists x \in A$, $y \in A$, $z = x+yz^2$ avec $yz \in A$.

Nous donnons dans la suite une démonstration de cette équivalence.

Démonstration :

ii) $\Longrightarrow$ x) : Il suffit de prouver que si A vérifie ii) il est alors intégralement clos. Soit donc un élément z de K algébrique sur A ; il existe alors $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans A tels que :

$$(1) \quad z^m = a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m \,, \quad m \in N.$$

Comme $z = x+yz^2$ alors $yz^m = z^{m-1} - xz^{m-2}$ (2)

(1) et (2) entraînent : $z^{m-1} - xz^{m-2} = ya_1 z^{m-1} + ya_2 z^{m-2} + \ldots + ya_m$. D'où

$z^{m-1} = (a_1 yz+x)z^{m-2} + (a_2 yz)z^{m-3} + \ldots + (a_{m-1}yz+a_m y)$.

Comme yz est dans A tous les éléments entre parenthèses sont dans A. Par suite $z^{m-1} = b_1 z^{m-2} + b_2 z^{m-3} + \ldots + b_{m-1}$ où $b_i \in A$. z^{m-1} est donc combinaison linéaire des puissances de z inférieures à $(m-1)$. En poursuivant ce raisonnement on aura :

$$z^2 = \alpha_1 z+\alpha_2 \quad \text{où } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ appartiennent à } A.$$

Or $\qquad yz^2 = z-x$ donc $z-x = y\alpha_1 z+y\alpha_2$; et alors :

$$z = x+\alpha_1 yz+\alpha_2 y \in A \quad \text{car} \quad yz \in A.$$

Par conséquent A est intégralement clos, car tout élément entier algébrique sur A appartient à A.

x) $\Longrightarrow$ ii) : En effet si $z = x+yz^2$ où $x \in A$, $y \in A$ alors $yx + y^2z^2 = yz$; et $(yz)^2 - (yz) + xy = 0$; par suite yz est algébrique sur A ; comme A est intégralement clos, alors $yz \in A$. D'où ii).

2.8. Idéaux fractionnaires : Définitions et Propriétés.

Soit A un domaine de Ore à gauche et K son corps de fractions à gauche. Un sous-groupe additif I de K est dit A-idéal à gauche fractionnaire si et seulement si :

1) $AI \subseteq I$, 2) $\exists b \in K-\{o\}$, $Ib \subseteq A$.

Si $I \subseteq A$, pour distinguer on dira que I est A-idéal à gauche entier. De la même manière on définit les A-idéaux fractionnaires à droite et bilatères.

Pour un A-idéal à gauche fractionnaire I on définit respectivement l'ordre à gauche de I et l'ordre à droite de I par :

$$O_g(I) = \{q \in K,\ qI \subseteq I\} \quad \text{et} \quad O_d(I) = \{q \in K,\ Iq \subseteq I\}.$$

On montre [Jacobson (4)] que I est $O_g(I)$-idéal à gauche et $O_d(I)$-idéal à droite ; d'après la définition $A \subseteq O_g(I)$.

On peut aussi définir pour un A-idéal fractionnaire à droite I le A-idéal fractionnaire à gauche I^* [cf. Robson (10)] par :

$$\underline{I^* = A^{\cdot}.I = \{q \in K,\ qI \subseteq A\}}.$$

I^*I est alors un A-idéal bilatère tel que :

$$\underline{I^*I \subseteq A \subseteq O_d(I)} \quad \text{et} \quad \underline{II^* \subseteq O_g(I)}.$$

Si on a toujours I un A-idéal fractionnaire à droite on appelle inverse de I, et on note I^{-1}, l'ensemble défini par :

$$\underline{I^{-1} = \{q \in K,\ IqI \subseteq I\}} \ ; \ \text{c'est aussi :}$$

$$\{q \in K,\ Iq \subseteq O_g(I)\} = \{q \in K,\ qI \subseteq O_d(I)\}.$$

On peut montrer [Jacobson (4)] que I^{-1} est un $O_g(I)$-idéal à droite et $O_d(I)$-idéal à gauche ; et on a :

$$\underline{I^{-1}I \subseteq O_d(I)} \quad \text{et} \quad \underline{II^{-1} \subseteq O_g(I)}.$$

D'autre part $I^* \subseteq I^{-1}$ car si $q \in I^*$, $IqI \subseteq II^*I \subseteq IA$. Comme I est A-idéal à droite $IqI \subseteq IA \subseteq I$; par suite $q \in I^{-1}$.

2.9. Proposition : Soit A un anneau intègre arithmétique à gauche et K son corps de fractions à gauche. Supposons que K soit aussi le corps de fractions à droite de A. Alors pour tout idéal à droite $I = zA+A$ $(z \in K)$ il existe un A-idéal à gauche I' tel que $I'I = A$; et alors $I^*I = I^{-1}I = A = O_d(I)$ et aussi

$$I^{-1} = I^* = A \cap Az^{-1}.$$

Démonstration : Avec les conditions de l'hypothèse, et d'après la 1ère remarque 2.7., z s'écrit sous la forme $x+yz^2$ où x, y et yz sont des éléments de A.

Soit $I' = Axz^{-1}+Ay$; comme $1 = xz^{-1}+yz$, xz^{-1} est un élément de A, et I' est manifestement un A-idéal à gauche entier ; en plus :

$$I'I = (Axz^{-1}+Ay)(zA+A) = Ax.A+Ay.zA+Ay.A+Axz^{-1}.A.$$

Comme $yz \in A$ et $xz^{-1} \in A$ alors $I'I \subseteq A$; d'autre part la relation $1 = xz^{-1}+yz$ entraîne $A \subseteq Axz^{-1}.A+Ay.zA \subseteq I'I$; par suite $I'I = A$, d'où la première assertion de la proposition. D'après la définition de I^* on a donc $I' \subseteq I^*$; donc $I^*I \supseteq I'I$ d'où $A \subseteq I^*I$ et comme $I^*I \subseteq A$ par définition, alors $I^*I = A$.

Or $I^* \subseteq I^{-1}$ d'après 2.8. donc $I^{-1}I \supseteq I^*I = A$. Mais $I^{-1}I \subseteq O_d(I)$ et si $q \in O_d(I)$ alors $Iq \subseteq I$, donc $I^*Iq \subseteq I^*I$ et alors $Aq \subseteq A$ par suite $q \in A$; et $O_d(I) \subseteq A$; or $O_d(I) \supseteq A$ d'après 2.8. parce que I est A-idéal à droite ; donc $O_d(I) = A$. Et alors $I^*I = A \subseteq I^{-1}I \subseteq O_d(I) \subseteq A$; par conséquent :

$$I^*I = I^{-1}I = O_d(I) = A.$$

D'autre part, nous avons $I^* \subseteq I^{-1}$ (2.8.) ; mais si $q \in I^{-1}$ alors $IqI \subseteq I$, donc $I^{-1}IqI \subseteq I^{-1}I$ et alors $AqI \subseteq A$; par suite $qI \subseteq A$ et donc $q \in I^* = A\ \ I$, par conséquent :

$$I^* = I^{-1}.$$

Mais si $q \in I^*$ alors $qI \subseteq A$, donc $q(zA+A) \subseteq A$; d'où $qzA \subseteq A$ et $qA \subseteq A$; par suite $qz \in A$ et $q \in A$ donc $q \in A\ \ Az^{-1}$. Réciproquement si $q \in A\ \ Az^{-1}$ alors $q = rz^{-1}$ et $qI = rz^{-1}(zA+A)$ d'où $qI = rA+rz^{-1}A = rA+qA \subseteq A$; par suite $q \in I^* = A^{\cdot}.I$.

Et enfin nous déduisons que $I^{-1} = I^* = A \cap Az^{-1}$.

2.10. <u>Théorème</u> : <u>Si</u> A <u>est un anneau intègre arithmétique à gauche qui possède</u> K <u>comme corps de fractions à gauche et à droite alors tout idéal à droite</u> $I = aA+bA$ <u>où</u> $a \in A$, $b \in A$, $a \neq 0 \neq b$ <u>est inversible à gauche, c'est-à-dire</u> : $I^{-1}I = A$ <u>et</u> $I^{-1} = Aa^{-1} \cap Ab^{-1}$.

En effet, si on pose $z = b^{-1}a$, I s'écrit sous la forme $I = b(zA+A)$; d'après le théorème précédent $(A \cap Az^{-1})(zA+A) = A$. Par suite $(Aa^{-1} \cap Ab^{-1})(aA+bA) = (Aa^{-1}b \cap A)b^{-1}(aA+bA) = (A \cap Az^{-1})(zA+A)$ et donc est égal à A ; aussi a-t'on $I^{-1} = Aa^{-1} \cap Ab^{-1}$.

2.11. <u>Remarque</u> : D'après le théorème précédent $(Aa^{-1} \cap Ab^{-1})(aA+bA) = A$. Appliqué au cas commutatif intègre, ce théorème a comme conséquence que <u>tout idéal engendré par deux éléments est inversible</u>. On démontre sans difficulté [Achkar (1)] par récurrence, que tout idéal de type fini est inversible ; on en déduit alors qu'<u>un anneau arithmétique commutatif intègre est un anneau de Prüfer</u> ; le théorème est donc <u>une généralisation partielle du théorème 1.3. (viii)</u>.

Nous avons montré précédemment (proposition 2.5.) qu'un anneau intègre arithmétique à gauche est un domaine de Ore à gauche. Nous n'avons pas pu étendre cette propriété au cas non intègre ; toutefois nous avons :

2.12. <u>Proposition</u> : <u>Si</u> A <u>est un anneau arithmétique à gauche</u>, a <u>et</u> b <u>deux éléments non nuls de</u> A, <u>alors</u> :

$$\underline{Aa \cap Ab = 0 \Longrightarrow \exists c \neq 0,\ c \neq 1,\ ca = a \text{ et } cb = 0.}$$

En effet, si A est arithmétique à gauche, $\mathfrak{I}_g(A)$ est distributif, donc :

$$\forall a,\ \forall b \in A,\quad Aa = Aa \cap [Ab+A(a-b)] = [Aa \cap Ab] + [Aa \cap A(a-b)].$$

Si en plus $Aa \cap Ab = 0$, alors $Aa = Aa \cap A(a-b)$.
D'où $Aa \subset A(a-b)$ et donc, il existe c dans A tel que :

(1) $a = c(a-b)$.

(1) entraîne : $(c-1)a = cb$; or $Aa \cap Ab = 0$ donc $(c-1)a = cb = 0$ et alors

$$ca = a,\quad cb = 0 \quad (2)$$

(2) permet de déduire que c est non nul parce que sinon a serait nul ; c est aussi différent de 1 car sinon $0 = cb = b$; d'où la proposition.

2.13. <u>Corollaire : Si</u> A <u>est un anneau arithmétique à gauche alors :</u>
<u>$Aa \cap Ab = o \Longrightarrow$ a et b sont des diviseurs de o à droite.</u>

En effet, la proposition précécente affirme l'existence d'un élément c différent de o et de 1 tel que :

$$ca = a \quad \text{et} \quad cb = o,$$

c'est-à-dire $(c-1)a = o$ et $cb = o$; donc :

$c \neq 1 \Longrightarrow a$ est diviseur de o à droite, car $c-1 \neq o$

$c \neq o \Longrightarrow b$ est diviseur de o à droite.

§ 3. ETUDE DES IDEMPOTENTS.

Si A est un anneau non nécessairement commutatif, ni intègre et F l'ensemble des idempotents de A, on définit l'ordre de Rees sur F par :

$$e \in F, \quad f \in F, \quad e \leqslant f \iff e = e.f = f.e.$$

Deux idempotents sont dits $\mathcal{L}$-équivalents, au sens de Green s'ils engendrent le même idéal à gauche. Cette notion est différente de celle de Kaplansky [6] :

e et f sont équivalents $\iff$ Ae et Af sont isomorphes en tant que A-modules à gauche.

Remarquons que l'ordre de Rees revient à :

$$e \leqslant f \iff Ae \subseteq Af \quad \text{et} \quad eA \subseteq fA.$$

3.1. Proposition : Si A est un anneau arithmétique à gauche, alors :

$$\forall e \in F, \ \forall f \in F \implies (e \leqslant f \iff Ae \subseteq Af).$$

Démonstration : Dans un sens la relation est évidente.
Montrons alors que $Ae \subseteq Af$ entraîne $e \leqslant f$.

D'après la distributivité de $\mathcal{I}_g(A)$ dans un anneau A arithmétique à gauche, nous avons :

(1) $\qquad A(1-f) \cap [Ae+A(1-e)] = [A(1-f) \cap Ae] + [A(1-f) \cap A(1-e)].$

Or le premier membre de (1) est égal à $A(1-f)$ car $Ae+A(1-e) = A$. D'autre part $Ae \subseteq Af$ entraîne :

$$Ae \cap A(1-f) \subseteq Af \cap A(1-f) = o.$$

(1) devient donc :

$$A(1-f) = A(1-f) \cap A(1-e).$$

Par suite $A(1-f) \subseteq A(1-e)$; et alors $1-f = \lambda(1-e) = (1-f)(1-e)$ parce que $1-f$ et $1-e$ sont des idempotents.

Par conséquent $1-f = 1-f-e+fe$; d'où $e = fe$.

Or $e = ef$ car $Ae \subseteq Af$ par hypothèse ; par suite :

$e = ef = fe$ et alors $e \leqslant f$ d'après la définition.

3.2. Remarque : Nous avons ainsi montré que si deux idempotents d'un anneau arithmétique à gauche engendrent deux idéaux à gauche comparables ils sont eux-mêmes comparables au sens de Rees et par suite ils commutent.

3.3. Proposition : Dans un anneau arithmétique à gauche, deux idempotents sont $\mathcal{L}$-équivalents si et seulement s'ils sont égaux.

En effet si e et f sont égaux ils sont certainement $\mathcal{L}$-équivalents. Réciproquement si $Ae = Af$, la démonstration de la proposition 3.1. permet de déduire que $A(1-e) = A(1-f)$. D'où $1-e = (1-e)(1-f)$ et $(1-f) = (1-f)(1-e)$; par suite $f = ef$ et $e = fe$; or $e = ef$ et $f = fe$ parce que $Ae = Af$; donc $e = f$.

3.4. Théorème : Dans un anneau arithmétique à gauche tout idempotent est central.

Démonstration : Soit e un idempotent de A et x un élément quelconque de A. Posons $f = e+xe-exe$. Nous avons :

$$f^2 = e^2+xexe+exexe+exe-exe+xe-xexe-exexe-exe$$
$$= e+xe-exe = f.$$

Donc f est un idempotent de A. Par ailleurs :

$$fe = (e+xe-exe)e = e+xe-exe = f.$$

Donc $Af \subseteq Ae$, et d'après la proposition 3.1. $f \leqslant e$; d'où :

$$f = fe = ef.$$

Par suite $f = e(e+xe-exe) = e+exe-exe = e$, et alors

$$xe = exe \quad (1).$$

De la même façon nous considérons : $g = e+ex-exe$. Nous avons : $g^2 = g$ et $eg = g$; aussi $ge = e$.

Par suite $(1-e)(1-g) = 1-e-g+eg = 1-e$

et $(1-g)(1-e) = 1-g-e+ge = 1-g$.

Par conséquent $A(1-e) = A(1-g)$. $(1-e)$ et $(1-g)$ sont donc deux idempotents $\mathcal{L}$-équivalents ; par suite ils sont égaux d'après la proposition précédente ; alors $1-e = 1-g$; donc $e = g$. Par conséquent $e+ex-exe = e$ et alors $ex = exe$. Cette dernière relation avec (1) entraîne : $ex = xe$ et donc e est central.

3.5. Corollaire : Dans un anneau arithmétique à gauche deux idempotents e et f sont équivalents au sens de Kaplansky si et seulement si ils sont égaux.

En effet si φ est un isomorphisme de Ae sur Af, il existe un élément a de A tel que $f = \varphi(ae)$; d'où

$$f = a\varphi(e) = a\varphi(e^2) = ae\varphi(e).$$

Comme tout idempotent est central : $f = a\varphi(e)e \in Ae$; donc $f = fe = ef$. De la même façon on prouve que : $e = ef = fe$; on en déduit alors $e = f$.

3.6. Théorème : Dans un anneau arithmétique à gauche l'ensemble F des idempotents est un treillis distributif complémenté.

En effet dans F ordonné par l'ordre de Rees, deux idempotents quelconques h et k ont une borne supérieure et une borne inférieure définies par :

$$h \vee k = \sup(h,k) = h+k-hk$$
$$h \wedge k = \inf(h,k) = hk.$$

C'est un calcul simple que de prouver que ces valeurs sont respectivement les bornes supérieures et inférieures et que ce sont des idempotents. D'autre part le complément de h est manifestement $1-h$. F est donc un treillis complémenté ; il est aussi distributif ; en effet :

$$h \vee [k \wedge g] = h \vee (kg) = h+kg-hkg$$

et $(h \vee k) \wedge (h \vee g) = (h+k-hk) \wedge (h+g-hg) = (h+k-hk)(h+g-hg)$

$$= h+hg-hg+kh+kg-khg-hk-hkg+kgh = h+kg-hkg.$$

D'où $h \vee [k \wedge g] = (h \vee k) \wedge (h \vee g)$. L'égalité duale se démontre d'une façon semblable.

3.7. Corollaire : Si A est un anneau arithmétique à gauche alors : $\forall e, \forall f$ idempotents de $A \Longrightarrow Ae+Af = A(e+f-ef)$ et $Ae \cap Af = Aef$.

En effet les relations : $e = e(e+f-ef)$, $f = f(e+f-ef)$ et $e+f-ef = e+(1-e)f$ entraînent la première égalité ; d'autre part d'après le théorème précédent on a la deuxième égalité comme la première d'ailleurs.

§ 4. APPLICATIONS ET CAS PARTICULIERS.

Dans [1] nous avons montré le résultat suivant :

4.1. Proposition : Un anneau primitif arithmétique à gauche est un corps.

Et comme conséquence immédiate nous avons signalé :

4.2. Proposition : Un anneau semi-simple arithmétique à gauche est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

Cette proposition généralise un résultat connu : un anneau régulier réduit est isomorphe à une somme sous-directe de corps ; en effet nous verrons dans la suite qu'un anneau régulier réduit est arithmétique à gauche.

4.3. Proposition : Un anneau semi-simple artinien est arithmétique bilatère.

Démonstration : D'après le théorème de Wedderburn-Artin un anneau semi-simple A est somme directe finie d'anneaux simples artiniens A_i chacun isomorphe à un anneau de matrices (n_i, n_i) sur un corps K_i ; donc $A \simeq A_1 \oplus \dots \oplus A_q$; comme corollaire de ce théorème nous savons [2] que tout idéal bilatère non nul I de A s'écrit : $I = A_{i_1} \oplus \dots \oplus A_{i_k}$ où $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, q\}$. L'application de $\mathfrak{I}(A)$ dans le treillis des sous-ensembles de $\{1, \dots, q\}$ qui à un idéal de I fait correspondre le sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_r\}$ est un isomorphisme de treillis ; comme le second treillis est distributif, il en sera de même de $\mathfrak{I}(A)$.

4.4. Proposition : Un anneau régulier est arithmétique bilatère.

Pour la démonstration voir [1, p. 21].

Mais un anneau régulier n'est pas toujours arithmétique à gauche ou à droite. En effet l'anneau des matrices carrées $M_2(K)$ sur un corps K est régulier ; il est en plus primitif et s'il était arithmétique à gauche il serait un corps, ce qui n'est pas le cas.

Cependant un anneau régulier réduit est arithmétique à gauche parce que tout idéal à gauche y est bilatère. Toutefois, nous donnons une démonstration directe de cette propriété.

4.5. Proposition : Un anneau régulier réduit (fortement régulier) est arithmétique à gauche et à droite.

Démonstration : Soit A un anneau régulier réduit et I,J,K trois idéaux à gauche principaux de A ; I,J et K sont engendrés par trois idempotents e,f,g respectivement. Nous avons : $Ae \cap [Af+Ag] \supseteq (Ae \cap Af) + (Ae \cap Ag)$. Mais si x est dans l'idéal de gauche, alors :

$$x = xe = yf+zg \Longrightarrow x = yfe+zge.$$

Comme A est réduit tout idempotent est central et donc $yef = yfe \in Ae \cap Af$ et $zge = zeg \in Ae \cap Ag$.

Nous en déduisons la distributivité de l'ensemble des idéaux à gauche principaux de A ; et donc A est arithmétique à gauche (théorème 1.2.).

4.6. Théorème : Si A est un anneau régulier, alors il y a équivalence entre :

(i) A est arithmétique à gauche

et (ii) A est réduit.

D'après la proposition précédente ii) entraîne i). Réciproquement si A est arithmétique à gauche, ses idempotents sont centraux (théorème 3.4.). Soit alors un élément nilpotent a ; donc $\exists m \in N$, $a^m = o$. Si A est régulier on a alors : $\exists x \in A$, $a = axa = a^r x$ parce que ax est un idempotent. Donc $a^{m-1} = a^m x = o$; ainsi de suite on aura $a = o$. A ne contient donc pas d'éléments nilpotents non nuls; d'où ii).

4.7. Proposition : Un anneau arithmétique à gauche et de Rikart à gauche (ou de Baer) est nécessairement réduit.

Démonstration : Soit x un élément nilpotent de l'anneau A ; donc $\exists n \in N$, $x^n = o$. x^{n-1} est alors dans l'annulateur à gauche de x qui est engendré par un idempotent e si A est de Rikart à gauche (ou de Baer). Donc $\exists \lambda \in A$, $x^{n-1} = \lambda e = x^{n-1} e$ si A est arithmétique à gauche, e est central, donc :

$$x^{n-1} = e, x^{n-1} = ex.x^{n-2}.$$

Or $ex = o$ parce que e est dans l'annulateur à gauche de x. On en déduit alors $x^{n-1} = o$; et en poursuivant ce raisonnement on aura $x = o$; donc A est réduit.

4.8. Remarque : Comme un anneau régulier est semi-héréditaire à gauche, les anneaux semi-héréditaires à gauche ne sont pas toujours arithmétiques à gauche.

Comme un idéal à gauche Aa de A est projectif si et seulement si l'annulateur à gauche de a est engendré par un idempotent (Small [11]), un anneau semi-héréditaire à gauche est de Rikart à gauche, et s'il est donc en plus arithmétique à gauche alors il est réduit.

Remarquons que si dans le cas commutatif un anneau semi-héréditaire est toujours arithmétique (§ 1), il est aussi toujours réduit.

Quant aux anneaux à idéaux à gauche principaux ils ne sont pas toujours arithmétiques à gauche ; exemple : $M_2(K)$. Toutefois nous avons :

4.9. Proposition : Un domaine (intègre) à idéaux à gauche et à droite principaux est un anneau arithmétique bilatère.

En effet dans un tel domaine un idéal bilatère I est de la forme $aA = Aa'$; d'où $a = ua'$ et $a' = av$; et alors $a = uav$ et $a' = ua'v$; or $ua \in I$ donc $ua = au'$; et par suite $a = au'v$; comme A est intègre $u'v = 1$. v est donc inversible à gauche et aussi alors à droite. Il en est de même de u, par suite $aA = Aa$ et $Aa' = a'A$; donc I est de la forme $Aa = aA$ et le générateur à gauche est aussi à droite.

Soient maintenant trois idéaux bilatères $aA = Aa$, $bA = Ab$ et $cA = Ac$; nous avons toujours : $(Aa \cap Ab) + (Aa \cap Ac) \subseteq Aa \cap (Ab+Ac)$. Soit alors $x = \lambda a = \mu d$ où $Ad = Ab+Ac$. Donc $d = b'b+c'c$ et $b = d'd$, $c = d''d$.

Par suite $x = \lambda a = \mu b'b+\mu c'c = y+z$. $y = \mu b'b = \mu b'd'd$ or $(b'd')d \in Ad = dA$, donc $(b'd')d = d\alpha$; d'où $y = \mu d\alpha = \lambda a\alpha \in Aa$; donc $y \in Aa \cap Ab$; de même $z \in Aa \cap Ac$, et alors $Aa \cap (Ab+Ac) \subset (Aa \cap Ab) + (Aa \cap Ac)$.

4.10. Remarque : L'anneau de la proposition précédente n'est pas nécessairement arithmétique à gauche ou à droite.

En effet considérons l'exemple suivant :

Soit l'anneau des polynômes $D[x,\rho]$ défini sur un domaine à idéaux à gauche et à droite principaux D qui admet K comme corps de fractions. ρ est un monomorphisme $K \to D$ tel que $\rho(d)$ soit inversible pour tout d non nul. L'addition et l'égalité des polynômes sont définies suivant la méthode classique ; la multiplication est définie par la règle $xd = \rho(d)x$, $d \in D$.

Jategaonkar [5] a montré que cet anneau était un domaine à idéaux à gauche et à droite principaux ; en plus qu'il est primitif à gauche et à droite. Par suite $D[x,\rho]$ <u>n'est pas arithmétique à gauche, ni à droite</u> ; sinon il serait un corps.

4.11. <u>Proposition</u> : <u>Un anneau à idéaux à gauche principaux, tel que tout idéal à gauche est bilatère, est arithmétique à gauche.</u>

En effet, si $Ab+Ac = Ad$, nous avons :

$$x \in Aa \cap (Ab+Ac) \Longrightarrow x = \lambda a = \mu d \quad \text{où} \quad d = d'b+d''C, \quad b = b'd \quad \text{et} \quad c = c'd.$$

D'où : $\qquad x = \mu d'b+\mu d''c = y+z.$

$y = \mu d'b \in Ab$, mais $y = \mu d'b'd$ et $\mu d'b' \in \mu A \subseteq A\mu$; donc $y = r\mu d = r\lambda a \in Aa$, d'où $y \in Aa \cap Ab$.

De même $z \in Aa \cap Ac$, donc $Aa \cap (Ab+Ac) \subseteq Aa \cap Ab+Aa \cap Ac$ et d'où alors l'égalité.

Remarquons que cette propriété s'étend à un anneau où <u>tout idéal à gauche de type fini est principal</u>.

§ 5. ANNEAUX DE MATRICES CARREES (2,2) SUR UN ANNEAU ARITHMETIQUE.

5.1. Proposition : Si A est un anneau commutatif intègre arithmétique la matrice de la proposition 2.1. est idempotente.

En effet si $a+b = o$ la matrice en question est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ o & o \end{pmatrix}$ dont le carré est égal aussi à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ o & o \end{pmatrix}$.

Si $a+b \neq o$, $s+t = 1$ parce que A est intègre ; d'autre part on a :

$$\begin{cases} sa+ub = o \\ va+tb = o \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sta+utb = o \\ vua+utb = o \end{cases} \Longrightarrow \text{ et } \begin{matrix} (st-vu)a = o \\ (st-vu)b = o \end{matrix}$$

a ou b est nécessairement non nul, parce que $a+b \neq o$. Les dernières relations entraînent donc $st = vu$.

Calculons le carré de $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2+uv & su+ut \\ vs+tv & uv+t^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} s^2+st & u(s+t) \\ v(s+t) & t(s+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ parce que $s+t = 1$ et $st = uv$.

La matrice $\begin{pmatrix} s & u \\ v & t \end{pmatrix}$ est donc toujours idempotente.

5.2. Théorème : Si A est un anneau commutatif intègre, alors :
A est un anneau arithmétique si et seulement si $M_2(A)$ est un anneau de Rikart à gauche (et à droite).

Démonstration : La condition est suffisante ; en effet si $M_2(A)$ est de Rikart à gauche, d'après les définitions, l'annulateur à gauche de tout élément de $M_2(A)$ est engendré par un idempotent. Soient a et b deux éléments quelconques non nuls de A, $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$ est une matrice de $M_2(A)$. $\begin{pmatrix} -b & +a \\ o & o \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle qui annule à gauche $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$. Donc il existe une matrice idempotente non nulle $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ engendrant l'annulateur à gauche de $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$; cette matrice $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ annule en particulier $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$; donc on a :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ étant idempotente on a :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2+fg & f(e+h) \\ g(e+h) & h^2+gf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Donc $e+h = 1$ ou f et g sont tous deux nuls. Or si $f = o$ et $g = o$ on a alors $ea = o$ et $hb = o$ donc e et h sont nuls, ce qui est absurde car la matrice $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ serait nulle. Donc nécessairement $e+h = 1$ et alors $(e+h)(a+b) = a+b)$; d'après la proposition 2.1. A est un anneau arithmétique.

<u>Réciproquement</u> : soit A un anneau arithmétique et $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(A)$. Si cette matrice est inversible dans $M_2(K)$ (où K est le corps de fractions de A) son annulateur à gauche est engendré par la matrice nulle, donc idempotente. Sinon les vecteurs colonnes de $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants ; donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, $\lambda \in K$.

Or A étant arithmétique d'après la proposition précédente, il existe une matrice idempotente non nulle $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}$.

D'où (1) $\begin{cases} ea+fb = o \\ ga+hb = o \end{cases}$, et $e+h = 1$; $fg = eh$ (matrice idempotente).

Donc si $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ est une matrice annulant à gauche $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ elle annule aussi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et réciproquement parce que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Donc :

$$(2) \begin{cases} ma+nb = o \\ pa+qb = o \end{cases} .$$

Considérons la matrice produit $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} me+ng & mf+nh \\ pe+qg & pf+qh \end{pmatrix}$. D'après (1) et (2) nous avons :

$$\left\| \begin{array}{l} (me+ng)a = mae+nga = -nbe-nbh = -nb(e+h) = -nb = ma \\ (mf+nh)b = mfb+nhb = -mae-mah = -ma(e+h) = -ma = nb \\ (pe+qg)a = pae+qga = -qbe-qhb = -qb(e+h) = -qb = pa \\ (pf+qh)b = pfb+qhb = -pea-pah = -pa(e+h) = -pa = qb \end{array} \right.$$

Si a et b sont non nuls nous aurons :

$$me+ng = m, \quad mf+nh = n, \quad pe+qg = p, \quad pf+qh = q.$$

Par suite $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ et en conséquence l'idéal à gauche annulateur à gauche de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et donc de $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ est engendré par la matrice idempotente $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

$M_2(A)$ est donc un anneau de Rikart à gauche. Par symétrie nous pouvons conclure qu'il est aussi de Rikart à droite.

Remarque : Nous avons supposé dans la démonstration a et b non nuls ; le cas où l'un d'eux est nul est immédiat.

Dans le cas d'un anneau commutatif non intègre nous n'avons pas pu démontrer le théorème précédent ; toutefois :

5.3. Proposition : Si A est commutatif et $M_2(A)$ est un anneau de Rikart à gauche (ou à droite) alors A est arithmétique.

Démonstration : La matrice $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$ est un diviseur de o à droite ; son annulateur à gauche est donc engendré par une matrice idempotente non nulle $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ea+fb = o \\ ga+hb = o \end{cases} \quad (1).$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} -b & a \\ o & o \end{pmatrix}$ annule à gauche la matrice $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$. Elle est donc dans l'annulateur à gauche engendré par $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$; d'où :

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b = be-ag \\ a = ah-bf \end{cases} \quad (2)?$$

Les systèmes (1) et (2) entraînent :

$$\begin{cases} ea+ha = a \\ eb+hb = b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (e+h)(a+b) = a+b.$$

D'après la proposition 2.1. A est arithmétique, $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ étant la matrice cherchée.

5.4. Remarque : La proposition précédente n'est pas vraie dans le cas d'un anneau non commutatif même s'il est intègre. En effet Mme PAGE [8] montre qu'un anneau à idéaux à gauche principaux intègre A a un anneau de matrices carrées $M_2(A)$ de Rikart à gauche ; or un tel anneau n'est pas nécessairement arithmétique à gauche (Remarque 4.10). Ce qui constitue un contre-exemple.

§ 6. ANNEAUX ARITHMETIQUES A GAUCHE REDUITS.

6.1. Définitions : Un anneau réduit est un anneau sans éléments nilpotents non nuls.

Dans un tel anneau si $ux = o$ alors $(xu)^2 = xuxu = o$ et donc $xu = o$; l'annulateur à gauche d'un élément x est donc égal à son annulateur à droite ; c'est un idéal bilatère que nous désignons par $\mathrm{Ann}\ x$.

En plus $Ax \cap \mathrm{Ann}\ x = o$ parce que si $y = ux$ et $yx = o$ alors $xy = o$ et donc $xux = o$; d'où $(ux)^2 = o$ et alors $ux = y = o$.

Rappelons que l'idéal singulier à gauche $Z_g(A)$ d'un anneau A est l'ensemble des éléments dont l'annulateur à gauche est essentiel dans A. Si A est réduit $Z_g(A)$ est nul d'après la remarque ci-dessus.

Pour d'autres propriétés des anneaux réduits voir RENAULT [9].

6.2. Proposition : A étant un anneau arithmétique à gauche réduit alors (o) est $\cap$-irréductible en tant qu'idéal à gauche si et seulement si A est intègre.

En effet la condition est suffisante, un anneau arithmétique à gauche intègre étant un domaine de Ore à gauche (2.5.). D'autre part elle est nécessaire parce que si $ab = o$ avec $a \neq o$ et $b \neq o$ alors $\mathrm{Ann}\ b$ est non nul parce qu'il contient a et d'autre part $Ab \cap \mathrm{Ann}\ b = o$ (5.1.) et donc (o) ne serait pas $\cap$-irréductible.

6.3. Proposition : Un anneau arithmétique à gauche réduit vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in A,\quad \forall b \in A,\qquad Aa \cap Ab = o \Longrightarrow ab = ba = o.$$

Démonstration : Si a ou b est nul la propriété est manifestement vérifiée. Sinon d'après la proposition 2.12., il existe $c \neq o$ et $c \neq 1$ tel que :

$$ca = a \quad \text{et} \quad cb = o \ ; \ \text{donc} \quad (c-1)a = o.$$

Comme A est réduit $bc = o$ et $a(c-1) = o$; d'où $a = ac$. Par suite $ab = acb = o$ et aussi $ba = o$; d'où la propriété.

Remarque : La propriété que nous venons d'établir est vraie dans un anneau fortement régulier (Mme CAILLEAU et M. RENAULT [3]). Comme un anneau fortement régulier est arithmétique à gauche, notre proposition généralise le résultat de ces auteurs.

6.4. Théorème : (Renault [9]). Si A est un anneau réduit, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A est un anneau réduit.

(ii) les idéaux à gauche compléments de A sont bilatères.

(iii) $\forall x \in A, \forall y \in A, \; x \neq o, \; y \neq o, \; Ax \cap Ay = o \Longrightarrow xy = yx = o.$

RENAULT conclut que l'enveloppe injective d'un anneau réduit vérifiant une des propriétés du théorème est un anneau régulier réduit injectif.

Pour la démonstration du théorème, voir [9 théorème 4.1.]. Mme CAILLEAU et M. RENAULT [3] déduisent que $\hat{A}$ est un anneau de Baer de type I. Par conséquent nous avons :

6.5. Théorème : L'enveloppe injective d'un anneau arithmétique à gauche réduit est un anneau régulier réduit injectif de Baer de type I.

Comme un anneau régulier réduit est arithmétique à gauche (et à droite) nous déduisons du théorème :

6.6. Corollaire : L'enveloppe injective d'un anneau arithmétique à gauche réduit est un anneau arithmétique à gauche réduit.

RENAULT [9 Lemme 4.3.] prouve qu'un anneau régulier réduit injectif à gauche est aussi injectif à droite ; en appliquant ce résultat à l'anneau $\hat{A}$ il en conclut que c'est aussi l'enveloppe injective à droite de A ; donc :

6.7. Proposition : A étant arithmétique à gauche et réduit, l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A en tant que A-module à gauche est également l'enveloppe injective de A en tant que A-module à droite.

Rappelons enfin que l'enveloppe injective $\hat{A}$ se plonge dans un produit de corps (RENAULT [9]), donc on a :

6.8. Théorème : Un anneau arithmétique à gauche réduit est un sous-anneau d'un produit de corps.

6.9. Remarque : Nous avons prouvé précédemment (4.6., 4.7., 4.8.) qu'un anneau arithmétique à gauche semi-héréditaire à gauche (resp. de Rikart à gauche, resp. de Baer) était réduit. Les propriétés des anneaux arithmétiques à gauche réduits sont donc aussi valables dans les anneaux arithmétiques à gauche semi-héréditaires à gauche, et arithmétiques à gauche de Baer, et finalement arithmétiques à gauche de Rikart à gauche. En particulier :

6.10. Théorème : Un anneau arithmétique à gauche semi-héréditaire à gauche (resp. de Rikart à gauche, resp. de Baer) est un sous-anneau d'un produit de corps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ACHKAR H., Thèse 3ème Cycle, Orsay 1972.

[2] BEHRENS Ring theory, Academic Press, New-York, 1972.

[3] Mme CAILLEAU A., M. G. RENAULT, Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul. J. Algebra, 15(1970), pp. 133-141.

[4] JACOBSON N., Theory of Rings. Amer Math. Society, 1943.

[5] JATEGAONKAR A counter exemple in ring theory and homological algebra. J. Algebra 12(1969), pp. 418-440.

[6] KAPLANSKY I., Rings of operators. New-York, 1968.

[7] LESIEUR L., Algèbre noethérienne non commutative. Gauthier-Villars, Paris 1963.

[8] Mme PAGE A., Thèse Poitiers 1972.

[9] RENAULT G., Anneaux réduits non commutatifs. J. Math. Pures et Appliquées. 46(1967), pp. 203-214.

[10] ROBSON J.C., Non commutative Dedekind Rings. J. of Algebra, 9(1968), pp. 245-265.

[11] SMALL L.W., Semi-hereditary rings. Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), pp. 656-658.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS - SUD

CENTRE D' ORSAY

Conférence n° 2 du 15 Novembre 1973

LES T-ANNEAUX ET LA CONDITION (H) DE GABRIEL

par Gérard CAUCHON

-:-:-:-:-:-:-

Tous les anneaux considérés dans cet exposé sont unitaires. Tous les modules considérés sont des modules à gauche unitaires.

Rappelons qu'on appelle T-anneau (voir [6] et [7]), tout anneau R, noethérien à gauche, tel que la correspondance qui à tout R-module injectif indécomposable E associe l'unique idéal $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(E)$, induit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des types de R-modules injectifs indécomposables et l'ensemble des idéaux premiers de R.

Le but de cet exposé est d'établir que tout T-anneau R satisfait à la condition suivante appelée condition (H) de Gabriel :

Pour tout idéal à gauche I de R, il existe $a_1,\dots,a_n \in R$ tels que :

$$(I^{\cdot}.R) = (I^{\cdot}.a_1) \cap \dots \cap (I^{\cdot}.a_n).$$

(On pose $(I^{\cdot}.X) = \{r \in R \mid rX \subseteq I\}$ pour toute partie X de R).

Nous résolvons ainsi un problème posé par L.LESIEUR dans [7] et résolu par lui-même dans le cas particulier des T-anneaux dont le quotient par le radical nilpotent est commutatif (voir [8]).

Nous utiliserons pour ceci la caractérisation suivante des T-anneaux (voir [7]) :

Un anneau R noethérien à gauche est un T-anneau si et seulement si il satisfait à la condition suivante appelée condition de Krause :

Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de R, si X est un idéal à gauche de R contenant $\mathcal{P}$ tel que $\frac{X}{\mathcal{P}}$ soit essentiel dans $\frac{R}{\mathcal{P}}$, alors X contient un idéal bilatère $\mathcal{B}$ qui contient $\mathcal{P}$ strictement.

Nous allons étudier, dans un premier temps, l'assassin d'un module de type fini sur un T-anneau.

1) <u>L'assassin d'un module de type fini sur un T-anneau.</u>

Rappelons que, étant donné un anneau R et un R-module M, on appelle <u>assassin de M</u> et on note <u>$\mathrm{Ass}(M)$</u> l'ensemble des idéaux bilatères $\mathcal{P}$ de R tels que

Il existe un sous-module X non nul de M satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

a) $\mathcal{P} = (0 \cdot\!. X)$.

b) Pour tout sous-module $Y \neq 0$ de X, $\mathcal{P} = 0 \cdot\!. Y$.

On sait (voir [4]) que, tous les idéaux $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Ass}(M)$ sont premiers et que, si R est noethérien bilatère, $\mathrm{Ass}(M)$ est non vide pour tout R-module M non nul.

Nous voyons donc que, pour tout R-module M, $\mathrm{Ass}(M)$ est contenu dans dans l'ensemble des annulateurs premiers des sous-modules de M.

Nous allons démontrer que, si R est un T-anneau et M un R-module de type fini, ces deux ensembles coïncident.

<u>Lemme 1.-</u> Soit R un T-anneau et M un R-module monogène tel que $\mathcal{P} = (0 \cdot\!. M)$ soit premier.

<u>Alors</u> $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M)$.

<u>Démonstration</u> : Puisque M est monogène, nous pouvons écrire $M = \frac{R}{I}$ où I désigne un idéal à gauche de R.

De sorte que $\mathcal{P} = (0 \cdot\!. M) = (I \cdot\!. R)$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans I.

Il résulte alors de la condition de Krause appliquée à l'idéal premier $\mathcal{P}$, que $\frac{I}{\mathcal{P}}$ n'est pas essentiel dans $\frac{R}{\mathcal{P}}$.

Il existe donc un idéal à gauche I' de R contenant $\mathfrak{P}$ strictement tel que $I \cap I' = \mathfrak{P}$

$$\Longrightarrow 0 \neq \frac{I'}{\mathfrak{P}} \subseteq \frac{R}{I} = M$$

$$\Longrightarrow \{\mathfrak{P}\} = \mathrm{Ass}\left(\frac{I'}{\mathfrak{P}}\right) \subseteq \mathrm{Ass}(M).$$

D'où le résultat.

Lemme 2.- Soit R un T-anneau et M un R-module de type fini tel que $\mathfrak{P} = (0 \cdot\!.\, M)$ soit premier.

Alors $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M)$.

Démonstration : Nous pouvons écrire $M = M_1 + \ldots + M_n$, chaque M_i étant monogène.

De sorte que $\mathfrak{P} = (0 \cdot\!.\, M) = (0 \cdot\!.\, M_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot\!.\, M_n)$.

$\mathfrak{P}$ étant premier, il est égal à l'un des $(0 \cdot\!.\, M_i)$.

Il résulte alors du lemme 1 que $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M_i) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$ et $\mathfrak{P}$ appartient bien à $\mathrm{Ass}(M)$.

Nous en déduisons le résultat annoncé :

Proposition 1.- Soit R un T-anneau et M un R-module de type fini. L'assassin de M coïncide avec l'ensemble des annulateurs premiers des sous-modules de M.

Démonstration : Soit X un sous-module de M tel que $\mathfrak{P} = (0 \cdot\!.\, X)$ soit premier. X est de type fini, donc $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(X)$ d'après le lemme 2. Donc $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M)$.

D'où le résultat.

2) La condition (H) de Gabriel dans les T-anneaux.

Lemme 3.- Soit R un anneau noethérien à gauche, M un R-module, $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules de M et soit $X = \bigcap_{i \in I} X_i$.

On fait les hypothèses suivantes :

a) $\forall i \in I$, X_i est $\cap$-irréductible dans M et les injectifs indécomposables $E(\frac{M}{X_i})$ sont tous isomorphes (soit π leur type d'isomorphie).

b) $\frac{M}{X}$ est π-isotypiqye de dimension finie.

Alors X est égal à l'intersection d'une partie finie de X_i.

Démonstration : Par passage au quotient, nous pouvons supposer $X = 0$ et, dans ce cas, M est π-isotypique de dimension finie. M est alors extension essentielle de son coeur, soit $C(M)$.

Posons, pour tout $i \in I$, $X'_i = C(M) \cap X_i$.

Les X'_i sont des sous-modules $\cap$-irréductibles de $C(M)$ et

$$\bigcap_{i \in I} X'_i = 0 \qquad (1)$$

Etant donné un module P et un sous-module Q de P, $\cap$-irréductible dans P ; Q est soit essentiel dans P, soit complément dans P.

En effet, si nous supposons que Q n'est pas essentiel dans P, il existe un sous-module non nul L de P tel que $Q \cap L = 0$.

Soit Q' un sous-module de P contenant Q tel que $Q' \cap L = 0$

$$\begin{aligned} Q' \cap [Q \oplus L] &= Q \oplus Q' \cap L \qquad \text{(modularité)} \\ &= Q \end{aligned}$$

Donc $Q' = Q$, puisque $Q \oplus L \underset{\neq}{\supset} Q$.

Par suite, tous les X'_i sont, soit essentiels, soit compléments dans $C(M)$.

$$X'_i < C(M) \Longrightarrow X_i < M \Longrightarrow X_i \supseteq C(M) \Longrightarrow X'_i = C(M).$$

Tous les X'_i tels que $X'_i < C(M)$ sont donc superflus dans la décomposition (1) et on a :

$$\bigcap_{j \in J} X'_j = 0 \quad \text{où } J \text{ est le sous-ensemble des indices } j \text{ de } I$$

tels que X'_j soit un sous-module complément de $C(M)$.

On sait d'autre part (voir [5]) que toute intersection de sous-modules compléments de $C(M)$ est un sous-module complément de $C(M)$; $C(M)$ étant de dimension finie, toute chaîne descendante de sous-modules compléments de $C(M)$ est stationnaire.

Par suite, il existe une partie finie F de J telle que :

$$0 = \bigcap_{i \in F} X'_i$$

$$\Longrightarrow 0 = C(M) \cap [\bigcap_{i \in F} X_i] \Longrightarrow \underline{0 = \bigcap_{i \in F} X_i}$$

puisque $C(M) < M$.

Remarque : On trouve dans [5] le même résultat, à ceci près que l'hypothèse a) est remplacée par l'hypothèse suivante beaucoup plus générale : "tous les $\frac{M}{X_i}$ sont π-isotypiques" ([5] Th. 5.4., p. 404).

Ce résultat, bien que très intéressant, est peu connu et difficile à démontrer. Je l'ai initialement utilisé pour démontrer que tout T-anneau satisfait à la condition (H) de Gabriel. Mais M. RENAULT m'a indiqué le lemme 3 comme moyen élégant d'arriver à mes fins sans utiliser le théorème rappelé ci-dessus.

Théorème 1.- Tout T-anneau satisfait à la condition (H) de Gabriel.

Démonstration : Soit R un T-anneau.

Nous devons montrer que, pour tout idéal à gauche I de R, il existe $x_1,\ldots,x_n \in R$ tels que :

$$(I^{\cdot}.R) = (I^{\cdot}.x_1) \cap \ldots \cap (I^{\cdot}.x_n) \qquad (1).$$

Tout idéal à gauche de R admet une décomposition en intersection finie d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles.

Il suffit donc d'établir la propriété (1) avec I $\cap$-irréductible, ce que nous supposons désormais.

Posons $\mathfrak{B} = (I^{\cdot}.R) = \bigcap_{x \in R \setminus I} (I^{\cdot}.x)$.

Soit π le type de l'injectif indécomposable $E(\frac{R}{I})$. Pour tout $x \in R\setminus I$, $\frac{R}{(I^{\cdot}.x)}$ est isomorphe au sous-module non nul de $\frac{R}{I}$ engendré par la classe $\bar{x}$ de x modulo I.

Nous avons donc :

a) $\forall x \in R\setminus I$; $(I^{\cdot}.x)$ est $\cap$-irréductible dans R et $E(\frac{R}{(I^{\cdot}.x)})$ est de type π.

$\frac{R}{\mathfrak{B}}$ étant un R-module à gauche noethérien, nous avons :

b) $\frac{R}{\mathfrak{B}}$ est de dimension finie.

Par suite, si nous démontrons que $\frac{R}{\mathfrak{B}}$ est π-isotypique, il en résultera, d'après le lemme 3, que $\mathfrak{B}$ est égal à l'intersection d'une partie finie des $(I^{\cdot}.x)$

et le théorème sera démontré.

Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de R associé à π.

Tout revient donc à démontrer que $\mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}}) = \{\mathfrak{P}\}$

(R étant un T-anneau, on a, pour tout module M :

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{P}\} \Longleftrightarrow M \text{ est } \pi\text{-isotypique})$$

$\frac{R}{\mathfrak{B}}$ étant non nul, $\mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}}) \neq \emptyset$.

Soit $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}})$; posons

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} .\cdot \mathfrak{P}' = \{x \in R \mid \mathfrak{P}'x \subseteq \mathfrak{B}\}.$$

$\mathfrak{B}$ étant un idéal bilatère de R, $\mathfrak{B}'$ est aussi un idéal bilatère de R.

$\mathfrak{P}'$ étant un résiduel à gauche de $\mathfrak{B}$ dans R, nous avons (voir [4]):

$$\mathfrak{P}' = (\mathfrak{B} \cdot. \ \mathfrak{B}') = (I \cdot. R) \cdot. \ \mathfrak{B}' = (I \cdot. \ \mathfrak{B}') = (I \cdot. I + \mathfrak{B}')$$
$$= (0 \cdot. \frac{I + \mathfrak{B}'}{I}).$$

$\mathfrak{P}'$ est donc un annulateur premier d'un sous-module de $\frac{R}{I}$. Il résulte alors de la proposition 1, que $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$. Or, $\frac{R}{I}$ étant π-isotypique, $\mathrm{Ass}(\frac{R}{I}) = \{\mathfrak{P}\}$.

Donc $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$, donc $\mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}}) = \{\mathfrak{P}\}$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire 1.- Tout anneau noethérien à gauche avec identité polynomiale satisfait à la condition (H) de Gabriel.

En effet : On sait qu'un tel anneau est un T-anneau car il satisfait à la condition de Krause.

Corollaire 2.- Pour tout anneau R noethérien à gauche, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) R est un T-anneau.

ii) R satisfait à la condition (H) de Gabriel.

Gabriel a en effet démontré (voir [1]), que si l'anneau R est noethérien à gauche et satisfait à la condition (H), les idéaux premiers de R correspondent biunivoquement aux types de R-modules injectifs indécomposables par la correspondance rappelée dans l'introduction du présent exposé.

<u>Corollaire 3.- Soit</u> R <u>un T-anneau et</u> M <u>un R-module de type fini. Il existe alors</u> $m_1, \ldots, m_n \in M$ <u>tels que :</u>

$$(0^{\cdot}.M) = (0^{\cdot}.m_1) \cap \ldots \cap (0^{\cdot}.m_n).$$

Ceci est en effet une forme équivalente de la condition (H) de Gabriel.

Voyons maintenant quelques applications de ces résultats.

3) <u>T-anneaux et théories de torsion.</u>

Dans la suite de cet exposé, nous supposerons connue la théorie de la localisation en algèbre non commutative (voir [2] et [3]).

Nous utiliserons les notations suivantes :

Soit R un anneau, et $\sigma : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_R\mathrm{Mod}$ un foncteur noyau idempotent au sens de Goldman (voir [2]) ou, ce qui revient au même, une théorie de torsion au sens de Lambek (voir [3]).

On notera $\mathfrak{F}_\sigma$ la famille topologisante et idempotente des idéaux à gauche I de R tels que $\sigma(\frac{R}{I}) = \frac{R}{I}$.

Si M est un R-module, on notera $\mathcal{T}_M$ la plus grande théorie de torsion qui annule M. Elle est définie de la façon suivante :

Pour tout idéal à gauche X de R, $\mathcal{T}_M(X) = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_R(X,E)} \mathrm{Ker}\, f$ où E désigne l'enveloppe injective de M.

La propriété suivante caractérise, dans le cas d'un T-anneau R, les idéaux à gauche I de R qui sont σ-denses dans R, lorsque σ est un premier de Goldman (voir [2]).

<u>Proposition 2.- Soit</u> R <u>un T-anneau et</u> $\mathfrak{P}$ <u>un idéal premier de</u> R. <u>Soit la théorie de torsion</u> $\sigma = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathfrak{P}}}$.

<u>Soit</u> I <u>un idéal à gauche de</u> R.

<u>Les propriétés suivantes sont équivalentes :</u>

i) $I \in \mathfrak{F}_\sigma$.

ii) I <u>contient un idéal bilatère</u> $\mathfrak{B}$ <u>avec</u> $\mathfrak{B} \not\subseteq \mathfrak{P}$.

Démonstration :

i) $\Longrightarrow$ ii) : Posons $\mathfrak{B} = (I^{\cdot}.R) = (I^{\cdot}.x_1) \cap \ldots \cap (I^{\cdot}.x_n)$.

Puisque $I \in \mathcal{F}_\sigma$ et que $\mathcal{F}_\sigma$ est topologisante, $(I^{\cdot}.x) \in \mathcal{F}_\sigma$ pour tout $x \in R$.

Donc $\mathfrak{B} \in \mathcal{F}_\sigma$ et $\mathfrak{B} \not\subseteq \mathfrak{P}$ sinon on en déduirait $\mathfrak{P} \in \mathcal{F}_\sigma$, ce qui est incompatible avec $\sigma(\frac{R}{\mathfrak{P}}) = 0$.

ii) $\Longrightarrow$ i) : C'est vrai même si R n'est pas un T-anneau.

Il nous suffit de montrer que tout idéal bilatère $\mathfrak{B}$ non contenu dans $\mathfrak{P}$, appartient à $\mathcal{F}_\sigma$.

Soit E l'enveloppe injective de $\frac{R}{\mathfrak{P}}$ et soit :

$$f \in \mathrm{Hom}_R(\frac{R}{\mathfrak{B}}, E).$$

Si f est non nul, $f(\bar{1}) = \xi \neq 0$.

Il existe alors $a \in R$ tel que $f(\bar{a}) = a\xi \in \frac{R}{\mathfrak{P}}$ avec $a\xi \neq 0$. On peut donc écrire, dans $\frac{R}{\mathfrak{P}}$, $a\xi = \bar{b}$ $(b \in R \setminus \mathfrak{P})$

$\mathfrak{B}\bar{a} = 0$ dans $\frac{R}{\mathfrak{B}}$, donc $\mathfrak{B}\bar{b} = 0$ dans $\frac{R}{\mathfrak{P}}$.

Donc $\mathfrak{B}b \subseteq \mathfrak{P}$ avec $b \notin \mathfrak{P}$.

Ceci entraîne $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite,

$$\mathrm{Hom}_R(\frac{R}{\mathfrak{B}}, E) = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} \in \mathcal{F}_\sigma.$$

Remarque : Reprenons les notations de la proposition 2. Soit I un idéal à gauche de R qui contient $\mathfrak{P}$. Il est immédiat qu'on a l'équivalence suivante, même si R est noethérien à gauche sans être un T-anneau :

$$(I \in \mathcal{F}_\sigma) \Longleftrightarrow (\frac{I}{\mathfrak{P}} \text{ est essentiel dans } \frac{R}{\mathfrak{P}}).$$

La proposition 2 nous redonne donc la condition de Krause. Il s'agit donc d'une condition plus précise que la condition de Krause et qui caractérise également les T-anneaux.

La propriété suivante est vraie dans un anneau noethérien à gauche quelconque. Elle nous sera utile pour l'étude des T-anneaux artiniens bilatères.

<u>Proposition 3.- Soit</u> R <u>un anneau noethérien à gauche et soit</u> σ <u>une théorie de torsion. Soit</u> $\mathcal{P}$ <u>un idéal premier de</u> R.

<u>Alors</u> : $\sigma(\frac{R}{\mathcal{P}})$ est, soit nul, soit égal à $\frac{R}{\mathcal{P}}$.

<u>Démonstration</u> : Nous avons $\sigma(\frac{R}{\mathcal{P}}) = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{B}$ désigne un idéal bilatère qui contient $\mathcal{P}$.

<u>Supposons $\sigma(\frac{R}{\mathcal{P}}) \neq 0$</u>, soit $\mathcal{B} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}$.

Alors, $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$ est essentiel dans $\frac{R}{\mathcal{P}}$.

Par suite $\mathcal{B}$ contient un élément s de R régulier modulo $\mathcal{P}$

$$(\bar{s} \in \sigma(\tfrac{R}{\mathcal{P}})) \Longrightarrow (\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}_\sigma \text{ tel que } \mathcal{U}\bar{s} = 0).$$

Il existe donc $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_\sigma$ tel que $\mathcal{U}s \subseteq \mathcal{P}$. s étant régulier modulo $\mathcal{P}$, ceci exige $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$, soit $\mathcal{P} \in \mathcal{F}_\sigma$ d'où :

$$\underline{\sigma(\tfrac{R}{\mathcal{P}}) = \tfrac{R}{\mathcal{P}}} \quad .$$

Remarquons, bien que ceci n'ait aucun rapport avec les T-anneaux, que cette propriété nous permet de résoudre un problème posé par L.LESIEUR dans [9] :

<u>Proposition 4.- Soit</u> R <u>un anneau noethérien à gauche, soient</u> $\mathcal{P}$ <u>et</u> $\mathcal{P}'$ <u>deux idéaux premiers de R avec</u> $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$. <u>Soient</u> $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ <u>l'ensemble des éléments réguliers modulo</u> $\mathcal{P}$ <u>et</u> $\mathcal{C}(\mathcal{P}')$ <u>l'ensemble des éléments réguliers modulo</u> $\mathcal{P}'$.

<u>Si</u> $\mathcal{C}(\mathcal{P}')$ <u>satisfait à la condition de Ore à gauche dans R, alors</u> $\mathcal{C}(\mathcal{P}') \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{P})$.

<u>Démonstration</u> : Posons $\sigma = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathcal{P}}}$ et $\sigma' = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathcal{P}'}}$.

Il résulte de la proposition 3 que $\sigma'(\frac{R}{\mathcal{P}}) = 0$, donc $\sigma' \leqslant \sigma$.

<u>Soit s $\in \mathcal{C}(\mathcal{P}')$.</u>

Puisque $\mathcal{C}(\mathcal{P}')$ satisfait à la condition de Ore à gauche dans R, Rs $\in \mathcal{F}_{\sigma'}$, donc Rs $\in \mathcal{F}_\sigma$, donc Rs+ $\mathcal{P} \in \mathcal{F}_\sigma$, donc $\frac{Rs+\mathcal{P}}{\mathcal{P}}$ est essentiel dans $\frac{R}{\mathcal{P}}$, donc <u>s $\in \mathcal{C}(\mathcal{P})$</u>.

Cette propriété n'est plus vraie lorsque $\mathcal{C}(\mathcal{P}')$ ne satisfait pas à la condition de Ore à gauche dans R, comme le montre l'exemple suivant :

Soit D l'anneau local des fractions de $\mathbb{Z}$ par rapport au nombre premier 2

$$D = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \notin 2\mathbb{Z}\}.$$

Soit M son idéal maximal : $M = 2D$.

Prenons pour anneau R l'anneau des matrices suivant :

$$R = \begin{pmatrix} D & D \\ M & D \end{pmatrix}.$$

R est un anneau noethérien à gauche premier, de sorte que $\mathcal{P} = 0$ est premier.

Prenons $\mathcal{P}' = \begin{pmatrix} M & D \\ M & D \end{pmatrix}$ $\mathcal{P}'$ est un idéal bilatère premier et même complètement premier.

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}').$$

Cependant $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est tel que $xc = cx = 0$. Donc $c \notin \mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Donc $\mathcal{C}(\mathcal{P}') \not\subseteq \mathcal{C}(\mathcal{P})$ et il résulte de la proposition 4, que $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ ne satisfait pas à la condition de Ore à gauche dans R.

Remarquons enfin que, R étant un sous-anneau de l'anneau des matrices $M_2(\mathbb{Q})$, R est à identité polynômiale, c'est donc un T-anneau. La condition : "$\mathcal{C}(\mathcal{P}')$ satisfait à la condition de Ore à gauche dans R" est donc indispensable, dans l'énoncé de la proposition 4, même lorsque R est un T-anneau.

4) Les T-anneaux artiniens bilatères.

Proposition 5.- Soit R un T-anneau, $\mathcal{P}$ un idéal bilatère premier de R et $\mathcal{B}$ un idéal bilatère de R tel que :

$$R \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}.$$

Il existe alors une chaîne descendante infinie d'idéaux bilatères de R de la forme

$$\mathcal{B} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_2 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_n \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}.$$

Démonstration : Quitte à passer au quotient par $\mathcal{P}$, nous pouvons supposer $\mathcal{P} = 0$ et $\mathcal{B}$ est alors un idéal bilatère propre, non nul de R.

Soit E l'enveloppe injective du R-module $\frac{R}{\mathcal{B}}$.

$E \neq 0$ et $\mathrm{Ass}(E) = \mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}}) = \{ \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n \}$ chaque $\mathfrak{P}_i$ étant un idéal premier contenant $\mathfrak{B}$ donc non nul.

Posons $\sigma = \mathcal{T}_E = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathfrak{B}}}$.

$\mathfrak{B} \notin \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow 0 \notin \mathcal{F}_\sigma$ et, 0 étant premier, nous en déduisons, d'après la proposition 3 :

$$0 = \sigma(R) = (0^{\cdot}.E) = \bigcap_{\zeta \in E} (0^{\cdot}.R\zeta)$$

$\mathfrak{B}$ étant non nul, il existe $\zeta_1 \in E$ tel que $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cap (0^{\cdot}.R\zeta_1) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B}$.

La condition (H) de Gabriel nous permet d'écrire :

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cap (0^{\cdot}.r_1\zeta_1) \cap \dots \cap (0^{\cdot}.r_n\zeta_1) \qquad (r_i \in R)$$

Donc $\frac{R}{\mathfrak{B}_1} \subseteq \frac{R}{\mathfrak{B}} \oplus Rr_1\zeta_1 \oplus Rr_2\zeta_1 \oplus \dots \oplus Rr_n\zeta_1 \subseteq E \oplus \dots \oplus E$ (n+1 fois).

En résumé, $\frac{R}{\mathfrak{B}_1}$ est contenu dans une somme directe finie de copies de E, de sorte que :

$$\mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}_1}) \subseteq \mathrm{Ass}(E) \text{ et, par suite } 0 \notin \mathrm{Ass}(\frac{R}{\mathfrak{B}_1}) \text{ donc } \mathfrak{B}_1 \neq 0.$$

Nous avons donc construit un idéal bilatère $\mathfrak{B}_1$ de R tel que :

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B} \\ \frac{R}{\mathfrak{B}_1} \text{ est contenu dans une somme directe finie de copies de } E \\ \mathfrak{B}_1 \neq 0. \end{cases}$$

$\mathfrak{B}_1$ étant non nul, il existe $\zeta_2 \in E$ tel que :

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \cap (0^{\cdot}.R\zeta_2) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B}_1 .$$

On en déduit, comme précédemment, que $\frac{R}{\mathfrak{B}_2}$ est contenu dans une somme directe finie de copies de E et que $\mathfrak{B}_2 \neq 0$ et l'idéal bilatère $\mathfrak{B}_2$ satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B}_1 \\ \dfrac{R}{\mathfrak{B}_2} \text{ est contenu dans une somme directe finie de copies de } E \\ \mathfrak{B}_2 \neq 0. \end{cases}$$

On peut itérer ce procédé indéfiniment, d'où l'existence d'une chaîne descendante infinie d'idéaux bilatères non nuls contenus dans $\mathfrak{B}$.

Nous en déduisons :

Proposition 6.- Tout T-anneau R, artinien bilatère, premier, est un anneau simple.

Démonstration : Il résulte de la proposition 5 que R est un anneau quasi-simple.

Soit s un élément régulier de R.

Rs est essentiel dans R.

Donc, d'après la condition de Krause appliquée à l'idéal premier 0, nous avons $Rs = R$ et s est inversible à gauche dans R, donc s est inversible dans R.

Par suite, R coïncide avec son anneau total de fractions. R est donc un anneau simple d'après le théorème de Goldie.

Proposition 7.- Tout T-anneau R artinien bilatère, est artinien à gauche.

Démonstration : Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de R , les éléments réguliers de $\frac{R}{\mathfrak{P}}$ sont inversibles puisque $\frac{R}{\mathfrak{P}}$ est un anneau simple.

R étant noethérien à gauche, il est aussi artinien à gauche d'après [4] (Théorème 3.4., page 35).

Nous voyons donc que dans un T-anneau artinien bilatère, les idéaux bilatères premiers, sont bilatères maximaux.

Inversement, si dans un T-anneau R, les idéaux bilatères premiers sont bilatères maximaux, nous en déduisons, par le raisonnement fait dans la démonstration de la proposition 6, que, pour idéal premier $\mathfrak{P}$ de R, $\frac{R}{\mathfrak{P}}$ est simple. Par suite, R est artinien à gauche.

Nous pouvons donc conclure :

Proposition 8.- Soit R un T-anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les idéaux premiers de R sont ses idéaux bilatères maximaux.

ii) R est artinien bilatère.

iii) R est artinien à gauche.

5) Eléments réguliers d'un T-anneau.

Nous utiliserons les conventions suivantes :

Etant donné un anneau R et un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ de R, on pose :

$\mathcal{C}_g(\mathfrak{B}) = \{x \in R | xa \in \mathfrak{B} \Longrightarrow a \in \mathfrak{B}\}$

$\mathcal{C}_d(\mathfrak{B}) = \{x \in R | ax \in \mathfrak{B} \Longrightarrow a \in \mathfrak{B}\}$

$\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \mathcal{C}_g(\mathfrak{B}) \cap \mathcal{C}_d(\mathfrak{B})$.

Les éléments de $\mathcal{C}_g(\mathfrak{B})$ s'appellent les éléments réguliers à gauche modulo $\mathfrak{B}$.

Les éléments de $\mathcal{C}_d(\mathfrak{B})$ s'appellent les éléments réguliers à droite modulo .

Les éléments de $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ s'appellent les éléments réguliers modulo $\mathfrak{B}$.

$\mathcal{C}(\mathfrak{B})$; $\mathcal{C}_g(\mathfrak{B})$ et $\mathcal{C}_d(\mathfrak{B})$ sont trois systèmes multiplicatifs d'éléments de R.

Enfin, on pose $\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) = \{s \in R | Rs \in \mathcal{F}_\sigma\}$ où $\mathcal{F}_\sigma$ désigne la famille topologisante associée à la théorie de torsion $\sigma = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathfrak{B}}}$.

Lemme 4.- Si l'anneau R est noethérien à gauche, $\mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$ est un système multiplicatif contenu dans $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$.

Démonstration :

a) $\mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$ est un système multiplicatif.

Il est clair que $1 \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$.

Soient s_1 et $s_2 \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$.

Soit E l'enveloppe injective du R-module à gauche $\frac{R}{\mathfrak{B}}$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_R[\frac{R}{Rs_1s_2}, E]$

et soit $\zeta = f(\bar{1})$

$Rs_1s_2\zeta = 0 \Longrightarrow s_2\zeta \in \sigma(E) \Longrightarrow s_2\zeta = 0$

$\Longrightarrow Rs_2\zeta = 0 \Longrightarrow \zeta \in \sigma(E) \Longrightarrow \zeta = 0$

Donc $\mathrm{Hom}_R[\frac{R}{Rs_1s_2}, E] = 0$ et $\underline{s_1s_2 \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})}$.

b) $\underline{\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{B})}$.

Soit $s \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$, $a \in R$ tel que $sa \in \mathfrak{B}$.

Alors, modulo $\mathfrak{B}$, $Rs\bar{a} = 0$, donc $\bar{a} \in \sigma(\frac{R}{\mathfrak{B}}) = 0$.

Donc $a \in \mathfrak{B}$.

Ceci montre que $\underline{\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{C}_g(\mathfrak{B})}$.

Supposons par l'absurde $\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) \not\subseteq \mathcal{C}_d(\mathfrak{B})$.

Il existe alors $s \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$ tel que $(\mathfrak{B} \cdot\!. \, s) \not\subseteq \mathfrak{B}$. Choisissons $s \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{B})$ avec $(\mathfrak{B} \cdot\!. \, s) \not\subseteq \mathfrak{B}$ et $(\mathfrak{B} \cdot\!. \, s)$ maximal pour cette propriété.

Soit $a \in (\mathfrak{B} \cdot\!. \, s) \setminus \mathfrak{B}$.

$Rs \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow Rs + \mathfrak{B} \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow \frac{Rs+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} < \frac{R}{\mathfrak{B}}$.

Par suite, il existe t et $u \in R$ tels que l'on ait, modulo $\mathfrak{B}$:

$$t\bar{a} = u\bar{s} \neq 0$$
$$\Longrightarrow t\bar{a}\bar{s} = u\bar{s}^2 = 0$$
$$\Longrightarrow u \in (\mathfrak{B} \cdot\!. \, s^2) \setminus (\mathfrak{B} \cdot\!. \, s)$$
$$\Longrightarrow (\mathfrak{B} \cdot\!. \, s^2) \underset{\neq}{\supset} (\mathfrak{B} \cdot\!. \, s).$$

Contradiction avec le choix de $(\mathfrak{B} \cdot\!. \, s)$ maximal, et, nécessairement $\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{C}_d(\mathfrak{B})$ et, par suite :

$$\underline{\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{B})}.$$

Lemme 5.- Si R est noethérien à gauche et si $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ satisfait à la condition de Ore à gauche dans R, on a :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \mathcal{C}^*(\mathfrak{B}).$$

Démonstration : Il suffit, d'après le lemme 4, de montrer que, si $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, alors $Rs \in \mathcal{F}_\sigma$ $(\sigma = \mathcal{T}_{\frac{R}{\mathfrak{B}}})$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_R(\frac{R}{Rs}, E)$.

Supposons $f \neq 0$ et soit $\xi = f(\bar{1}) \neq 0$.

$\exists a \in R$ tel que $f(\bar{a}) = a\xi = \bar{\alpha} \neq 0$ $(\bar{\alpha} \in \frac{R}{\mathfrak{B}})$.

D'après la condition de Ore, il existe $s' \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$ et $a' \in R$ tels que $s'a = a's \in Rs$.

De sorte que $0 = f(s'\bar{a}) = s'\bar{\alpha}$.

Donc $s'\alpha \in \mathfrak{B}$ et $\alpha \notin \mathfrak{B}$. Contradiction car $s' \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$ et, nécessairement, $Rs \in \mathcal{F}_\sigma$.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'un T-anneau admette un anneau classique de fractions :

Proposition 9.- Soit R un T-anneau de radical nilpotent N. On suppose que les éléments de $\mathrm{Ass}(R)$ sont des idéaux premiers minimaux de R.

Alors : Si $\mathcal{C}(N)$ satisfait à la condition de Ore à gauche dans R, il en est de même pour $\mathcal{C}(0)$ et on a $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N)$.

Démonstration :

Posons $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$.

Soient $\mathcal{P}_{n+1}, \ldots, \mathcal{P}_k$ les autres idéaux premiers minimaux de R.

Le radical tertiaire de R est :

(1) $\mathcal{R}_3 = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n$ et

(2) $N = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k$.

Les décompositions (1) et (2) sont sans élément superflu :

Posons $\sigma = \mathcal{T}_R$ et $\mu = \mathcal{T}_N$.

Les $\mathcal{P}_i$ étant premiers, nous avons :

$$\frac{R}{\mathcal{R}_3} < \frac{R}{\mathcal{P}_1} \oplus \dots \oplus \frac{R}{\mathcal{P}_n} \Longrightarrow$$

$$\tau_{\frac{R}{\mathcal{R}_3}} = \tau_{\frac{R}{\mathcal{P}_1}} \cap \dots \cap \tau_{\frac{R}{\mathcal{P}_n}} .$$

R étant un T-anneau, il en résulte immédiatement :

$$\sigma = \tau_{\frac{R}{\mathcal{R}_3}} .$$

De la même façon, nous avons :

$$\mu = \tau_{\frac{R}{\mathcal{P}_1}} \cap \dots \cap \tau_{\frac{R}{\mathcal{P}_n}} \cap \dots \cap \tau_{\frac{R}{\mathcal{P}_k}}$$

$\Longrightarrow$ $\mu \leqslant \sigma$.

Soit $s \in \mathcal{C}(N)$.

Puisque $\mathcal{C}(N)$ satisfait à la condition de Ore à gauche, $s \in \mathcal{C}^*(N)$ d'après le lemme 5 ; donc $Rs \in \mathcal{F}_\mu$; donc $Rs \in \mathcal{F}_\sigma$, donc $s \in \mathcal{C}^*(0)$, donc $s \in \mathcal{C}(0)$ d'après le lemme 4.

Nous avons donc $\mathcal{C}(N) \subseteq \mathcal{C}(0)$.

D'autre part, on a toujours $\mathcal{C}(0) \subseteq \mathcal{C}(N)$ d'après un théorème dû à DJABALI.

On a donc bien $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N)$.

Remarquons que, dans ces conditions $J = QN$ est le radical de Jacobson de Q (si nous appelons Q l'anneau classique de fractions du T-anneau R) et $\frac{Q}{J}$ est semi-simple isomorphe à l'anneau de fractions du G-anneau $\frac{R}{N}$. (Ceci est une conséquence des travaux de G. MICHLER sur la localisation par rapport à un idéal semi-premier d'un anneau noethérien à gauche - Exposé au Colloque d'Algèbre non commutative de Lyon les 2 et 3 Juillet 1973 -).

D'autre part, soit $\mathcal{P}'$ un idéal premier de Q. Il résulte des travaux de Goldie sur l'idéal de transfert d'un anneau, que $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap R$ est un idéal premier de R. Donc $\mathcal{P} \supseteq N$ et $\mathcal{P}' \supseteq Q\mathcal{P} \supseteq J$. Par suite, J est égal au radical nilpotent de Q.

Q est noethérien à gauche, son quotient par son radical nilpotent est semi-simple ; donc Q est artinien à gauche.

Nous pouvons donc conclure :

Proposition 10.- Supposons satisfaites les hypothèses de la proposition 9 et soit Q l'anneau classique de fractions de R.

Alors Q est artinien à gauche, $J = QN$ est son radical de Jacobson et l'anneau semi-simple $\frac{Q}{J}$ est isomorphe à l'anneau de fractions du G-anneau $\frac{R}{N}$.

Remarque : Le fait que Q soit artinien à gauche résulte du théorème suivant, dû à Small [10].

Proposition 11.- Soit R un anneau noethérien à gauche de radical nilpotent N.

On suppose que $\mathcal{C}(N) \subseteq \mathcal{C}(0)$.

Alors l'anneau classique de fractions de R existe et est artinien à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes.
Bulletin de la Société mathématiques de France.
Tome 90(1962).

[2] O. GOLDMAN, Rings and modules of quotients.
Journal of Algebra (1969), tome 13, pp. 10-47.

[3] J. LAMBEK, Torsion theories, additive semantics and rings of quotients.
Springer-Verlag ; Lecture Notes in Mathematics, 177 (1971).

[4] L.LESIEUR et R.CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative.
Mémorial des Sciences mathématiques. Fasc. 154, Paris 1963.

[5] L.LESIEUR et R.CROISOT, Coeur d'un module.
Journal de Maths Pures et Appliquées, 9ème Série, 42, 1963,
pp. 367-407.

[6] L.LESIEUR, Sur les T-anneaux.
Note aux C.R. Acad. Sc. tome 276, Série A (1973), pp. 435-438.

[7] L.LESIEUR, Sur les T-anneaux.
Séminaire d'Algèbre non commutative, n° 27 (1973),
conférence n° 4. Publications mathématiques d'Orsay.

[8] L.LESIEUR, Anneaux dont le quotient par le radical premier est commutatif.
Séminaire Dubreil (1973).

[9] L.LESIEUR, Structure des anneaux noethériens à gauche d'exposant 2.
Istituto Nazionale Di Alta Matematica
Symposia Matematica. Volume VIII (1972).

[10] L.W. SMALL, Orders in Artinian Rings.
J. of Algebra 4 - 1966, pp. 13-41.

-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 3 du 26.11.1973

-:-:-:-:-:-

Idéal premier $\mathfrak{P}$ d'un anneau noethérien à gauche : condition de Ore pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$

par L. LESIEUR

-:-:-:-:-:-

Introduction.

Soit R un anneau noethérien à gauche unitaire, $\mathfrak{P}$ un idéal bilatère premier de R. On suppose $\mathfrak{P} \neq R$. Soit $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$ l'ensemble multiplicativement fermé des éléments $c \in R$ réguliers mod. $\mathfrak{P}$. On sait que la condition de Ore est remplie dans $R/\mathfrak{P}$, par rapport à l'ensemble des éléments réguliers, c'est-à-dire qu'on a dans R :

(1) $\forall a \in R$, $\forall c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $\exists c' \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $a' \in R$ tels que $a'c = c'a + p$, $p \in \mathfrak{P}$.

Mais nous allons supposer la condition de Ore dans R pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$, soit la condition plus forte :

(2) $\forall a \in R$, $c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $\exists c' \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $a' \in R$ tels que $a'c = c'a$.

Alors R possède un anneau de fractions R_S, où $S = \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

J. Lambek et G. Michler ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la condition (2), qui concernent l'anneau localisé général de R par rapport à S [2]. Je propose ici d'autres résultats nécessaires, qui sont inspirés d'un article antérieur portant sur un idéal $\mathfrak{P}$ supposé complètement premier [5], et qui concernent les idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-isotypiques de R et leurs relations avec les idéaux $\mathfrak{P}$-tertiaires, (§ 1). Ceci conduit à des idéaux à gauche plus généraux, les idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-fermés, que nous considérons au § 2. Ils sont en correspondance biunivoque avec les idéaux à gauche de l'anneau de fractions classiques R_S, étudié au § 3. Je reviens en conclusion au § 4 sur la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'anneau de fractions classique R_S.

§ 1. Idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-isotypiques dans R.

On sait que l'enveloppe injective $E(R/\mathfrak{P})$, en tant que R-module à gauche, est la somme directe de n modules injectifs indécomposables isomorphes : $E(R/\mathfrak{P}) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$. Ainsi, $\mathfrak{P}$ est un idéal isotypique dans R, le type étant celui de E_1, l'idéal premier associé étant $\mathfrak{P}$. Tout idéal à gauche Q dans R qui est isotypique de ce type est dit $\mathfrak{P}$-isotypique. Que peut-on dire d'un idéal à gauche Q qui est $\mathfrak{P}$-isotypique ? Si $Q = Q_1 \cap \dots \cap Q_m$ est une décomposition de Q en un nombre fini d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles, ces Q_i sont encore $\mathfrak{P}$-isotypiques, et ainsi Q sera connu si nous savons caractériser les idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-isotypiques irréductibles.

<u>Propriété 1.</u> <u>Soit</u> Q <u>un idéal à gauche irréductible</u> $\neq R$. <u>Alors</u> Q <u>est</u> <u>$\mathfrak{P}$-isotypique si et seulement si c'est l'annulateur d'un élément</u> $\beta \neq 0$ <u>de</u> $E(R/\mathfrak{P})$. $Q = \text{Ann}\,\beta = 0 \cdot. \beta = \{q \in R \mid q\beta = 0\}$.

En effet, si Q est $\mathfrak{P}$-isotypique $\cap$-irréductible, on a : $E(R/Q) \underset{\sigma}{\simeq} E_1$. Mais $Q = \text{Ann}\,\bar{1}$, où $\bar{1} \in R/Q$ et $\bar{1} \neq 0$ puisque $Q \neq R$. Donc : $Q = \text{Ann}\,\sigma(\bar{1})$, $0 = \sigma(\bar{1}) = \beta \in E_1 \subseteq E$.

Réciproquement, soit $Q = \text{Ann}\,\beta$, $\beta \neq 0$, $\beta \in E(R/\mathfrak{P})$. On a : $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_n$, $\beta_i \in E_i$; $\text{Ann}\,\beta = \text{Ann}\,\beta_1 \cap \dots \cap \text{Ann}\,\beta_n = Q$. Comme Q est irréductible, $Q = \text{Ann}\,\beta_k$, $\beta_k \neq 0$, $\beta_k \in E_k$. D'où $E(R/Q) = E(R/\text{Ann}\,\beta_k) \simeq E(R\beta_k) = E_k \simeq E_1$. Q est $\mathfrak{P}$-isotypique.

Cette propriété ne fait pas intervenir la condition de Ore pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Par contre, la suivante l'utilise.

<u>Propriété 2.</u> <u>Soit</u> Q <u>un idéal à gauche $\mathfrak{P}$-isotypique. Si</u> R <u>vérifie la condition de Ore pour</u> $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$, <u>on a</u> $Q \cap \mathcal{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset$.

Il suffit de le vérifier pour un idéal à gauche Q $\mathfrak{P}$-isotypique et irréductible. Soit $Q = \text{Ann}\,\beta$, $\beta \neq 0$, $\beta \in E(R/\mathfrak{P})$. Comme $E(R/\mathfrak{P})$ est une extension essentielle de $R/\mathfrak{P}$, il existe $0 \neq \lambda\beta = \bar{a} \in R/\mathfrak{P}$. Soit $q \in Q$, donc $q\beta = 0$. Si $q \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, on peut appliquer la condition de Ore à q et λ, qui donne : $s\lambda = tq$, $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $t \in R$. Il en résulte $s\lambda\beta = tq\beta = 0$, d'où $s\bar{a} = 0$, c'est-à-dire $sa \in \mathfrak{P}$ et $a \in \mathfrak{P}$ puisque $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Mais alors $\bar{a} = 0$. (Contradiction).

Corollaire. *Si R vérifie la condition de Ore pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$, tout idéal à gauche Q $\mathfrak{P}$-isotypique est contenu dans un idéal à gauche $\mathfrak{P}$-critique.*

En effet, un idéal à gauche $\mathfrak{P}$-critique est d'après J. Lambek et G. Michler [2] un idéal à gauche maximal pour la propriété $X \cap \mathcal{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset$. Dans le cas où $\mathfrak{P}$ est complètement premier on a $Q \subseteq \mathfrak{P}$ et cet idéal maximal est $\mathfrak{P}$. Dans le cas commutatif Q est $\mathfrak{P}$-primaire et par suite inclus dans $\mathfrak{P}$. Dans le cas général, mais en présence de la condition de Ore, la propriété 2 remplace la propriété $Q \subset \mathfrak{P}$ des cas particuliers qui viennent d'être mentionnés.

Dans le but de caractériser les idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-isotypiques, donnons la définition suivante :

Définition 1. *Un idéal à gauche Q dans R est $\mathfrak{P}$-fermé (à gauche) si l'on a :*

$$ab \in Q,\quad b \notin Q \Longrightarrow a \notin \mathcal{C}(\mathfrak{P})$$

ou encore :

$$ab \in Q,\quad a \in \mathcal{C}(\mathfrak{P}) \Longrightarrow b \in Q.$$

Théorème 1. *Supposons que R vérifie la condition de Ore pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Alors, un idéal à gauche Q est $\mathfrak{P}$-isotypique si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*
(1) Q est $\mathfrak{P}$-fermé ; (2) Q est $\mathfrak{P}$-tertiaire.

Preuve : α) Tout idéal à gauche Q $\mathfrak{P}$-isotypique satisfait (1) et (2). D'abord Q est $\mathfrak{P}$-tertiaire (c'est bien connu). Démontrons que Q est $\mathfrak{P}$-fermé. Supposons $ab \in Q$, $b \notin Q$; alors $a \in Q\cdot.b = \{x \in R \mid xb \subseteq Q\}$. Or $Q\cdot.b \neq R$ est également $\mathfrak{P}$-iostypique (Lesieur et Croisot [4], p. 103). Donc, d'après la propriété 2, $a \notin \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

β) Réciproquement, supposons que Q est $\mathfrak{P}$-fermé et $\mathfrak{P}$-tertiaire. Soit $Q = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ une décomposition de Q en idéaux à gauche $\cap$-irréductibles non superflus Q_i. Tous ces Q_i sont $\mathfrak{P}$-tertiaires. Démontrons qu'ils sont $\mathfrak{P}$-fermés. On a par exemple $Q = Q_1 \cap X$, $X \underset{\neq}{\supset} Q$. Supposons $ab \in Q_1$, $b \notin Q_1$. Alors $(Q_1+Rb) \cap X \underset{\neq}{\supset} Q$ et il existe $q_1+\lambda b = x \notin Q$. Si $a \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$ la condition de Ore donnerait $s\lambda = ta$, $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$ et $sx = sq_1+tab \in Q_1 \cap X = Q$, $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, $x \notin Q$. (ce qui est impossible si Q est $\mathfrak{P}$-fermé). Donc Q_1 est $\mathfrak{P}$-tertiaire, $\mathfrak{P}$-fermé et $\cap$-irréductible. On a :

$\mathcal{P} = Q_1 \cdot . Y = \bigcap_{y \notin Q_1, y \in Y} (Q_1 \cdot . y)$. Mais tous ces idéaux à gauche $Q_1 \cdot . y$ contiennent $\mathcal{P}$, sont $\cap$-irréductibles, et ne rencontrent pas $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ puisque Q_1 est $\mathcal{P}$-fermé. Ils sont donc $\mathcal{P}$-critiques (Lambek et Michler [2] et $\mathcal{P}$ est l'intersection d'un nombre fini d'entre eux. Donc $\mathcal{P} = \bigcap_{\text{fini}} (Q_1 \cdot . y_i)$ et $E(R/\mathcal{P}) = \bigoplus_i E(Q_1 \cdot . y_i)$, ce qui prouve que Q_1 est $\mathcal{P}$-isotypique, et Q aussi.

Remarque : On peut donner, dans un anneau noethérien à gauche quelconque R, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal à gauche Q soit $\mathcal{P}$-isotypique, sous la forme suivante :

Pour que l'idéal à gauche Q soit $\mathcal{P}$-isotypique dans R, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition :

(3) $\quad \forall b \notin Q, \ \exists \lambda_i \in R$ tels que $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^{i=n} (Q \cdot . \lambda_i b)$.

(Pour la démonstration voir un court article à paraître. Nous nous en servirons dans la suite (§ 3, propriété 15).

§ 2. Etude des idéaux à gauche $\mathcal{P}$-fermés.

Propriété 3. L'intersection d'idéaux à gauche $\mathcal{P}$-fermés est $\mathcal{P}$-fermée.

Cela résulte de la définition 1 et ne suppose pas la condition de Ore.

Définition 2. La $\mathcal{P}$-fermeture $\bar{\bar{X}}$ d'un idéal à gauche X est l'intersection des idéaux à gauche $\mathcal{P}$-fermés contenant X.

Un idéal est $\mathcal{P}$-fermé si et seulement si il est égal à sa fermeture.

Propriété 4. $\bar{\bar{X}} = \{x \in R \mid \exists s \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ tel que $sx \in X\}$.

Cette propriété caractérise la fermeture $\bar{\bar{X}}$ de X lorsque la condition de Ore est remplie pour $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. L'ensemble $\bar{\bar{X}}$ est contenu dans tout idéal à gauche fermé contenant X. D'autre part, $\bar{\bar{X}}$ est un idéal à gauche car : $sx \in X$, $s'x' \in X \Longrightarrow \sigma(x-x') \in X$ avec $\sigma = s_1 s = s_1' s' \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ (condition de Ore). De plus, si $\lambda \in R$ et $sx \in X$, on a $c\lambda = ts$, $c \in S \Longrightarrow c\lambda x = tsx \in X \Longrightarrow \lambda x \in \bar{\bar{X}}$. Enfin $\bar{\bar{X}}$ est fermé.

Propriété 5. Si X est $\mathcal{P}$-fermé, et si $X = X_1 \cap \ldots \cap X_m$ est une décomposition réduite en intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles, chaque X_i est $\mathcal{P}$-fermé.

Cf. la démonstration du théorème 1. Cette propriété suppose la condition de Ore.

Propriété 6. Si X est $\mathfrak{P}$-fermé, $X^{\cdot}.a$ l'est aussi pour tout $a \in R$.

Résulte de la définition sans la condition de Ore.

Propriété 7. Si X est $\mathfrak{P}$-fermé, $X^{\cdot}.\mathfrak{P}$ est $\mathfrak{P}$-fermé.

La démonstration utilise la condition de Ore. Soit $ab \in X^{\cdot}.\mathfrak{P}$, $a \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$; considérons $p \in \mathfrak{P}$. On a d'après la condition de Ore : $cp = \lambda a$, $c \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$; d'où : $\lambda ab = cpb$. Comme $\lambda a \in \mathfrak{P}$ et $a \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$, on a $\lambda \in \mathfrak{P}$ et $\lambda ab \in \mathfrak{P}ab \subseteq X$. On en déduit $cpb \in X$, d'où, puisque X est $\mathfrak{P}$-fermé, $pb \in X$. Ceci étant vrai quel que soit $p \in \mathfrak{P}$, on a $\mathfrak{P}b \subseteq X$ et $b \in X^{\cdot}.\mathfrak{P}$.

Proposition 8. Si X est $\cap$-irréductible et $\mathfrak{P}$-fermé, $\mathfrak{P}' = \operatorname{Ass} X$ est $\mathfrak{P}$-fermé.

En effet, $\mathfrak{P}' = X^{\cdot}.Y = \bigcap_{y \in Y} X^{\cdot}.y$ est l'intersection de $\mathfrak{P}$-fermés, donc est $\mathfrak{P}$-fermé. On en déduit $\mathfrak{P}' \cap \mathscr{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset$ car :

Proposition 9. Tout idéal à gauche X $\mathfrak{P}$-fermé, différent de R, vérifie :

$$X \cap \mathscr{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset.$$

En effet : $\forall x \in X$ on a : $x.1 \in X$, $1 \notin X \Longrightarrow x \notin \mathscr{C}(\mathfrak{P})$.

Proposition 10. Si R vérifie la condition de Ore pour $\mathscr{C}(\mathfrak{P})$, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère $\mathfrak{P}$-fermé à gauche, $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{P}$-fermé à droite.

Démontrons : $uc \in \mathfrak{a}$, $c \in \mathscr{C}(\mathfrak{P}) \Longrightarrow u \in \mathfrak{a}$. Considérons $c \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$ tel que $\mathfrak{a}^{\cdot}.c$ soit maximal et montrons que $\mathfrak{a}^{\cdot}.c = \mathfrak{a}$. Soit $uc = a \in \mathfrak{a}$. On a (condition de Ore) : $\sigma u = tc$, $\sigma \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$, d'où $\sigma uc = tc^2 \in \mathfrak{a}$ et $t \in \mathfrak{a}^{\cdot}.c^2$. Mais, $\mathfrak{a}$ étant bilatère, $\mathfrak{a}^{\cdot}.c \subseteq \mathfrak{a}^{\cdot}.c^2$. Comme $c^2 \in \mathscr{C}(\mathfrak{P})$, il vient $\mathfrak{a}^{\cdot}.c^2 = \mathfrak{a}^{\cdot}.c$, c'est-à-dire $t \in \mathfrak{a}^{\cdot}.c^2 = \mathfrak{a}^{\cdot}.c$, donc $tc = \sigma u \in \mathfrak{a}$, et $u \in \mathfrak{a}$ puisque $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{P}$-fermé à gauche.

§ 3. Etude de l'anneau de fractions R_S, $S = \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

Par des moyens classiques, on prouve l'existence d'un isomorphisme entre le treillis $\mathcal{L}_S$ des idéaux à gauche de R_S et le treillis $\mathcal{L}$ des idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-fermés de R.

$$X \in \mathcal{L} \to e(X) = X' \in \mathcal{L}_S \ ; \quad e(X) = \{s^{-1}x \mid s \in S,\ x \in X\}.$$

$$X' \in \mathcal{L}_S \to r(X') = X' \cap R \in \mathcal{L}\ .$$

Propriété 11. $\mathfrak{P}' = e(\mathfrak{P})$ est un idéal bilatère premier de R_S.

$e(\mathfrak{P})$ est bilatère : soit $s^{-1}p \in e(\mathfrak{P})$; considérons $s^{-1}ps'^{-1}a' = s^{-1}\sigma^{-1}aa'$, avec $\sigma^{-1}a = ps'^{-1}$ ou $\sigma p = as' \in \mathfrak{P}$. Comme $\sigma \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$ on en déduit $a \in \mathfrak{P}$, d'où $aa' \in \mathfrak{P}$.

$e(\mathfrak{P})$ est premier. Soit $s^{-1}iR_Ss'^{-1}a' \in e(\mathfrak{P})$. On a donc pour tout $\lambda \in R$: $s^{-1}i\lambda s's'^{-1}a' \in e(\mathfrak{P}) \Longrightarrow i\lambda a' \in e(\mathfrak{P}) \cap R = \mathfrak{P}$, d'où $i \in \mathfrak{P}$ ou $a' \in \mathfrak{P}$.

Si R est commutatif, ou si $\mathfrak{P}$ est complètement premier, $e(\mathfrak{P})$ est un idéal maximum dans R_S, qui est donc local. Ce n'est pas nécessairement vrai si $\mathfrak{P}$ est seulement premier.

Propriété 12. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\xi \in R_S$ est régulier mod. $e(\mathfrak{P})$.

(2) ξ est inversible dans R_S.

(3) $\xi = s^{-1}c$, $s\ \&\ c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). $\xi\xi' = 1$, $\xi = s^{-1}a$, $\xi' = s'^{-1}a'$. Posons $as'^{-1} = \sigma^{-1}b$, c'est-à-dire $\sigma a = bs'$; il vient $s^{-1}\sigma^{-1}ba' = 1$, d'où $ba' = \sigma s$ ce qui implique $b\ \&\ a' \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$, et donc $a \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Immédiat, l'inverse de $s^{-1}c$ étant $c^{-1}s$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Evident.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Soit $\xi = s^{-1}a$; supposons $a \notin \mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Alors, il existe $u \notin \mathfrak{P}$ tel que $ua \in \mathfrak{P}$. De $s\xi = a$, on déduit $us\xi = ua \in \mathfrak{P}$ d'où $us \in \mathfrak{P}$ puisque ξ est régulier mod $e(\mathfrak{P})$, et enfin $u \in \mathfrak{P}$ puisque $s \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

Propriété 13. R_S est noethérien à gauche et vérifie la condition de Ore pour l'ensemble $e(S)$ des éléments réguliers modulo $e(\mathfrak{P})$.

C'est une conséquence immédiate de la propriété 12, car $\forall \xi \in e(S)$, $\xi' \in R_S$ on a $1.\xi' = \xi'\xi^{-1}\xi$, ce qui est bien la condition de Ore avec $1 \in \mathscr{C}(\mathfrak{P}')$, $\xi'\xi^{-1} \in R_S$. Quant à la condition noethérienne, elle résulte de la correspondance biunivoque croissante entre les idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-fermés de R et les idéaux à gauche de R_S.

De la propriété 13 résulte que les résultats démontrés pour R vis-à-vis de $\mathfrak{P}$ s'appliquent à R_S vis-à-vis de $e(\mathfrak{P})$. Si l'on remarque en outre que tous les idéaux à gauche de R_S sont $e(\mathfrak{P})$ fermés, le théorème 1 donne ici :

Théorème 2. Pour qu'un idéal à gauche de R_S soit $e(\mathfrak{P})$-isotypique, il faut et il suffit qu'il soit $e(\mathfrak{P})$-tertiaire.

Ainsi, la localisation classique qui exprime le passage de R à R_S a pour effet, entre autres, d'éliminer la différence qui existe a priori entre les idéaux $e(\mathfrak{P})$-isotypiques et les idéaux $e(\mathfrak{P})$-tertiaires. Il est donc vraisemblable que R_S est un T-anneau pour $e(\mathfrak{P})$. (Cf. [6] pour la définition et les propriétés). En effet, les éléments réguliers modulo $e(\mathfrak{P})$ étant inversibles, la condition de Krause est immédiatement vérifiée. Donc :

Propriété 14. R_S est un T-anneau pour l'idéal premier $e(\mathfrak{P})$.

En appelant $\mathcal{O}$-anneau pour $\mathfrak{P}$ un anneau noethérien à gauche qui vérifie la condition de Ore pour $\mathscr{C}(\mathfrak{P})$, on voit ainsi que R_S est à la fois un $\mathcal{O}$-anneau et un T-anneau pour $e(\mathfrak{P})$.

Par contre, les deux notions sont en général indépendantes. Il y a des T-anneaux pour $\mathfrak{P}$ qui ne sont pas des $\mathcal{O}$-anneaux pour $\mathfrak{P}$, par exemple un anneau utilisé par Lesieur et Croisot [3], p. 403, et aussi par Small, pour lequel un critère donné par Cauchon [1] dans sa conférence précédente s'applique aisément. Il y a aussi des $\mathcal{O}$-anneaux qui ne sont pas des T-anneaux, par exemple un anneau noethérien à gauche intègre quasi-simple (Cf. [4], p. 107 et 108).

<u>Propriété 15. Les idéaux à gauche</u> $e(\mathfrak{P})$<u>-isotypiques de</u> R_S <u>correspondent biunivoquement aux idéaux à gauche</u> $\mathfrak{P}$<u>-isotypiques de</u> R <u>par l'application</u> $Q \to Q' = e(Q)$.

Nous pouvons le démontrer comme exercice d'application de la condition (3) de $\mathfrak{P}$-isotypie donnée dans la remarque de la fin du § 1.

Soit Q $\mathfrak{P}$-isotypique dans R. Q étant $\mathfrak{P}$-fermé, on a : $e(Q) \cap R = Q$. Démontrons que $e(Q)$ vérifie (3').

(3') $\forall \xi \notin e(Q)$, $\exists \mu_i \in R_S$ tels que $e(\mathfrak{P}) = \bigcap_{i=1}^{n} (e(Q) \cdot . \mu_i \xi)$.

Soit donc :

$\xi = s^{-1}b \notin e(Q)$, donc $b \notin Q$. Il existe d'après (3), $\lambda_i \in R$, tels que $\mathfrak{P} = \bigcap_{i=1}^{n} (Q \cdot . \lambda_i b)$. On a donc pour tout $p \in \mathfrak{P}$: $p\lambda_i b \in Q$ et $\sigma^{-1} p\lambda_i b = \sigma^{-1} p\lambda_i s\xi \in e(Q)$, c'est-à-dire : $e(\mathfrak{P}) \subseteq e(Q) \cdot . \lambda_i s\xi$. De plus $\eta\lambda_i s\xi \in e(Q) \Longrightarrow \eta\lambda_i b = \sigma^{-1} q$, d'où $\sigma\eta\lambda_i b \in Q$; mais $\sigma\eta = t^{-1}v$, $t \in S$; donc $v\lambda_i b \in e(Q) \cap R = Q$, et par suite $v \in \bigcap_{i=1}^{n} (Q \cdot . \lambda_i b) = \mathfrak{P}$, d'où $\sigma\eta \in e(\mathfrak{P})$ et $\eta \in e(\mathfrak{P})$, ce qui prouve $e(\mathfrak{P}) = \bigcap_{i=1}^{n} [e(Q) \cdot . \lambda_i s\xi]$, c'est-à-dire (3').

Réciproquement, soit Q' un idéal à gauche $e(\mathfrak{P})$-isotypique dans R_S. Démontrons que $Q = Q' \cap R$ est $\mathfrak{P}$-isotypique dans R. Soit $b \notin Q$. On a donc $b \notin Q'$ et $e(\mathfrak{P}) = \bigcap_{\text{finie}} (Q' \cdot . \lambda_i' b)$. Il en résulte $\forall p \in \mathfrak{P}$, on a $p\lambda_i' b \in Q'$, et, en posant $\lambda_i' = \sigma^{-1} u_i$, $\sigma \in S$, il vient $p\sigma^{-1} u_i b \in Q'$. Si l'on définit $p' \in \mathfrak{P}$ par $p\sigma^{-1} = s'^{-1} p'$, on a $p' u_i b \in Q'$ d'où $p' u_i b \in Q$ et $p' \in \cap (Q \cdot . u_i b)$. Comme p' est arbitraire dans $\mathfrak{P}$, on a : $\mathfrak{P} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (Q \cdot . u_i b)$.

Inversement $tu_i b \in Q \Longrightarrow t\sigma\lambda_i' b \in Q \Longrightarrow t\sigma \in \cap (Q \cdot . \lambda_i' b) \subset e(\mathfrak{P})$ et $t \in e(\mathfrak{P}) \cap R = \mathfrak{P}$. On a donc $\mathfrak{P} = \bigcap_{\text{finie}} (Q \cdot . u_i b)$, ce qui prouve la condition (3) et l'isotypie.

§ 4. Exemples et problèmes.

Pour les exemples, je renvoie au cas d'un idéal $\mathfrak{P}$ complètement premier [5], où j'avais montré que l'anneau de Birkhoff-Witt n'est pas un $\mathcal{O}$-anneau. Certains idéaux premiers $\mathfrak{P}$ y vérifient la condition de Ore pour $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$ et d'autres ne la vérifient pas.

En ce qui concerne une condition nécessaire et suffisante, je signale comme dans [5] la propriété 4 qui caractérise la fermeture.

Mais les conditions suivantes, qui sont nécessaires, seraient les bienvenues comme conditions suffisantes :

(i) Tout idéal à gauche $\mathfrak{P}$-isotypique est $\mathfrak{P}$-fermé.

(ii) (équivalent à (i)) : Tout idéal à gauche $\mathfrak{P}$-isotypique vérifie $Q \cap \mathcal{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset$.

(iii) Tout idéal à gauche X $\mathfrak{P}$-fermé est tel que $X.\cdot\mathfrak{P}$ est $\mathfrak{P}$-fermé.

(iv) Tout idéal à gauche $\mathfrak{P}$-fermé est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\mathfrak{P}$-fermés $\cap$-irréductibles.

(v) Si un idéal bilatère est $\mathfrak{P}$-fermé à gauche, il est $\mathfrak{P}$-fermé à droite.

Elles posent autant de problèmes qu'il serait intéressant d'examiner.

Note : D'après une remarque de G. Cauchon, la réponse aux problèmes (i) et (ii) est affirmative : La démonstration sera publiée dans une Note aux C.R. début 1974.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CAUCHON, T-anneaux et condition de Gabriel (conférence de ce Séminaire du 12 Novembre 1973).

[2] J. LAMBEK et G. MICHLER, The Torsion Theory at a Prime Ideal of a Right Noetherian Ring (Journal of Algebra, vol. 25, n° 2, 1973, pp. 364-390).

[3] L. LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module (J. Math. pures et appliquées, 9e série, 42, 1963, pp. 367-407).

[4] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative. (Mémor. Sci. Math. fasc. 154, Paris, 1963).

[5] L. LESIEUR, Idéal complètement premier d'un anneau noethérien à gauche intègre (Colloquia Mathematica, Rings, Modules and Radicals, Keszthely, Hungary, 1971).

[6] L. LESIEUR, T-anneaux (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 276, 1973, pp. 435-438).

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférences n^{os} 4 et 5 des

3 et 10 Décembre 1973

par M. DJABALI

-:-:-:-:-:-

ANNEAUX A IDENTITE POLYNOMIALE I et II

Dans ces deux exposés tous les anneaux considérés sont unitaires.

I. GENERALITES.

Définition 1.1. : Soit A un anneau. On dit que A est à identité polynomiale (à I.P) s'il existe un polynôme $P(X_1,\dots,X_s)$, non nul, à coefficients dans le centre de A, à variables ne commutant pas nécessairement, tel que $P(\alpha_1,\dots,\alpha_s) = 0$ quels que soient les éléments $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ de A (on dit que P s'annule identiquement sur A).

Exemple 1 : Un anneau commutatif A est à I.P. En effet le polynôme $X_1X_2-X_2X_1$ s'annule identiquement sur A.

Exemple 2 : Soit R un anneau commutatif. On considère l'anneau $A = M_2(R)$. On vérifie que si M et N sont deux matrices de A, la matrice $(MN-NM)^2$ appartient au centre de A. Donc le polynôme non nul $(X_1X_2-X_2X_1)^2X_3-X_3(X_1X_2-X_2X_1)^2$ s'annule identiquement sur A.

Définition 1.2. : Une identité est dite multilinéaire si le polynôme $P(X_1,\dots,X_s)$ est de degré 1 par rapport à chacune des variables.

Une identité multilinéaire est dite homogène si tout monôme non nul de $P(X_1,\dots,X_s)$ est de degré 1 par rapport à chacune des variables.

Dans ce dernier cas si P est de degré d, P s'écrit sous la forme :

$$P(X_1,\ldots,X_s) = \sum_\sigma a_\sigma X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(d)}$$

σ étant une application <u>injective</u> de $\{1,2,\ldots,d\}$ dans $\{1,2,\ldots,s\}$.

<u>Notation</u> : Nous noterons a_1 le coefficient correspondant à l'application identique.

<u>Proposition 1.3.</u> : Soit A un anneau vérifiant une identité polynomiale de degré d. Alors A vérifie une identité multilinéaire et homogène de degré inférieur ou égal à d.

Montrons d'abord que A vérifie une identité multilinéaire. On considère $P(X_1,\ldots,X_s)$ de degré d. On appelle d_i le degré de P par rapport à X_i et on pose $\delta(P) = \max(d_i)$. Faisons la démonstration par récurrence sur l'entier $\delta(P)$. Si $\delta(P) = 1$, l'identité est multilinéaire. Supposons la propriété vraie pour les entiers $< n$. Soit A à I.P tel que $\delta(P) = n$. Supposons par exemple que l'on ait $d_1 = \delta(P)$. On considère alors le polynôme :

$$Q(X_1,X_2,\ldots,X_s,X_{s+1}) = P(X_1+X_{s+1},X_2,\ldots,X_s) - P(X_1,X_2,\ldots,X_s) - P(X_{s+1},X_2,\ldots,X_s).$$

Q s'annule identiquement sur A : il est immédiat que Q n'est pas nul, qu'il est de degré $\leqslant d$, que ses degrés par rapport à $X_2,\ldots,X_s$ est le même que celui de P et que son degré par rapport à X_1 et X_{s+1} est $\leqslant n-1$. En répétant successivement la même opération pour chacune des variables X_i telles que $d_i = n$ on arrive au fait que A vérifie une identité polynomiale correspondant à un polynôme de degré $\leqslant d$, dont le δ est $< n$. L'hypothèse de récurrence donne alors le résultat.

Montrons maintenant que A vérifie une identité multilinéaire et homogène. Nous allons nous placer dans le cas suivant : le polynôme P est multilinéaire et son degré d est le plus petit possible. Si P n'est pas homogène, il contient un monôme non nul de degré $< d$. Dans ce monôme ne figure pas une des variables, disons X_s. Mais alors le polynôme non nul $Q(X_1,\ldots,X_{s-1}) = P(X_1,\ldots,X_{s-1},0)$ est multilinéaire de degré $< d$ et s'annule identiquement sur A : ceci contredit l'hypothèse faite sur d. Ainsi P ne peut être qu'homogène.

Définition 1.4. : On appelle identité standard à d variables l'identité dont le polynôme, noté $[X_1,\ldots,X_d]$, est défini par l'égalité :

$$[X_1,\ldots,X_d] = \sum_{\sigma\in S_d} \varepsilon_\sigma X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(d)},$$

où ε_σ est la signature de la permutation σ.

L'intérêt de cette identité multilinéaire et homogène particulière est souligné par le théorème suivant, dû à Amitsur et Levitzki.

Théorème 1.5. : Soit R un anneau commutatif. Alors l'anneau $M_n(R)$ vérifie l'identité de polynôme $[X_1,X_2,\ldots,X_{2n}]$.

Proposition 1.6. : Soit A une algèbre sur un anneau commutatif R. Supposons que A, en tant que R-module, possède n générateurs. Alors $[X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}]$ s'annule identiquement sur A.

La démonstration est immédiate.

II. THEOREME DE POSNER.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème 2.1. : Soit A un anneau premier à identité polynomiale. Alors :

1) A possède un anneau de fractions classique (à gauche et à droite) Q qui est un anneau simple.

2) Q est à identité polynomiale.

Nous ne montrerons pas la deuxième partie du résultat qui peut se déduire de résultats plus généraux, résultats qui seront exposés dans la suite du Séminaire (résultats de Martindale).

Remarquons que Q est de dimension finie sur son centre, ceci d'après le théorème de Kaplansky (cf. III).

Démonstration de la première partie du résultat.

Il est immédiat que si A possède un anneau de fractions à gauche et un anneau de fractions à droite, ces deux anneaux sont confondus.

Pour que A possède un anneau de fractions à gauche simple il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes (cf. th. de Goldie).

(I) A est de dimension de Goldie (à gauche) finie.

(II) Les annulateurs à gauche vérifient la condition maximale.

D'après 1.3 nous pouvons supposer que A vérifie une identité de polynôme $P(X_1,\dots,X_s) = \Sigma\, a_\sigma X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(d)}$, où d est le degré de P.

Nous allons commencer par montrer que la dimension de Goldie de A est au plus égale à $s-1$. Supposons en effet qu'il existe s idéaux à gauche non nuls, $I_1,\dots,I_s$, dont la somme soit directe. Ecrivons P sous la forme :
$P = \sum_1^s P_i X_i$, où P_i est soit nul, soit de degré $< d$. Nous pouvons supposer, en changeant éventuellement la numérotation des variables, que dans P le monôme $a_1 X_1 X_2 \dots X_d$ n'est pas nul, de sorte que le polynôme P_d n'est pas nul. Considérons des éléments $\alpha_1,\dots,\alpha_s$, avec $\alpha_j \in I_j$. La somme des I_j étant directe, nous pouvons déduire du fait que $P(\alpha_1,\dots,\alpha_s) = o$ l'égalité suivante :
$P_d(\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1},\alpha_{d+1},\dots,\alpha_s)\alpha_d = o$. Fixons tous les éléments α_j, à l'exception de α_d. Comme A est premier, l'annulateur à gauche de l'idéal à gauche I_d est nul. Nous en déduisons que $P_d(\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1},\alpha_{d+1},\dots,\alpha_s) = o$. Le raisonnement précédent peut se répéter en considérant la somme des idéaux I_j autres que I_d et le polynôme P_d, de degré $\leqslant d-1$. Et ainsi de suite. En fin de compte on voit que a_1 doit être nul et on arrive à une contradiction. La dimension de Goldie est bien $\leqslant s-1$.

Considérons maintenant une suite strictement croissante d'annulateurs à gauche J_i. J_i étant un annulateur à gauche on sait que : $\mathrm{Ann}_g\big(\mathrm{Ann}_d(J_i)\big) = J_i$. Posons $K_i = \mathrm{Ann}_d(J_i)$. Les K_i forment une suite strictement décroissante et l'on a : $J_i K_i = o$, $J_i K_{i-1} \neq o$. Nous allons montrer que la suite des J_i ne peut être infinie, plus précisément qu'elle ne peut avoir plus de $s-1$ éléments. Supposons les variables numérotées de telle sorte que dans P un monôme où X_s figure à l'extrême droite soit non nul. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1} \in J_{s-1}$, $\alpha_s \in J_s$ on a : $P(\alpha_1,\dots,\alpha_s) = o$. Soit alors m_o le plus petit des entiers m tels qu'il existe un polynôme $Q_m(X_1,\dots,X_m)$, contenant un monôme non nul où X_m figure à l'extrême droite et tel que $Q_m(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = 0$ si $\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1} \in J_{m-1}$, $\alpha_m \in J_m$. Nous avons $m_o \leqslant s$ et nous pouvons écrire : $Q_{m_o}(X_1,\dots,X_{m_o}) = TX_{m_o}+U$, T étant un polynôme en $X_1,\dots,X_{m_o-1}$. De plus nous pouvons supposer que ces m_o-1 variables sont numérotés de telle sorte que T contienne un monôme non nul où X_{m_o-1} figure à l'extrême droite. Ecrivons que $Q(\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o})K_{m_o-1} = 0$. Comme $J_{m_o}K_{m_o-1} = 0$, on voit que toute expression de $Q(\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o})$ où α_{m_o} n'est pas placé à l'extrême droite annule K_{m_o-1}. Donc écrire que $Q(\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o})K_{m_o-1} = 0$, revient à écrire que $T(\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o-1})\alpha_{m_o}K_{m_o-1} = 0$. Si nous fixons $\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o-1}$, nous voyons que $T(\alpha_1,\dots,\alpha_{m_o-1}) = 0$ puisque l'annulateur à gauche de l'idéal à gauche non nul $J_{m_o}K_{m_o-1}$ est nul. Il est clair alors que ceci contredit l'hypothèse faite sur m_o.

III. THEOREME DE KAPLANSKY.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème 3.1. : Soit A un anneau primitif, vérifiant une identité polynomiale de degré d. Alors A est un anneau simple de dimension finie sur son centre, et cette dimension est au plus égale à $[\frac{d}{2}]^2$ ($[\frac{d}{2}]$ est la partie entière de $\frac{d}{2}$).

Rappels sur les anneaux primitifs.

Un anneau A est dit primitif (à gauche) s'il existe un A-module à gauche S simple et fidèle (c'est-à-dire que $\lambda S = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$).

Tout anneau primitif est premier.

Lemme de densité : Soit A un anneau primitif et S le module simple associé. On considère le corps $\Delta = \mathrm{End}_A S$. Alors A est isomorphe à un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_\Delta(S)$.

Rappelons que l'on identifie $a \in A$ au Δ-endomorphisme de S, $x \to ax$, $\forall\, x \in S$. Dire que A est isomorphe à un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_\Delta(S)$ revient à dire que pour tout système fini Δ-libre de S, $x_1,\dots,x_n$ et tout système $y_1,\dots,y_n$, il existe $a \in A$ tel que $ax_i = y_i$, $\forall$ i.

<u>Remarque</u> : Le centre $Z(A)$ de A est isomorphe à un sous-anneau du centre $Z(\Delta)$ de Δ.

En effet si $a \in Z(A)$, l'application $x \to ax$, $\forall x \in S$ est un A-homomorphisme, donc un élément de Δ.

<u>Conséquence du lemme de densité</u> : Si A est primitif

ou bien S est de dimension finie sur Δ, disons de dimension n et alors $A \approx M_n(\Delta)$,

ou bien S n'est pas de dimension finie et alors pour tout entier m, il existe un sous-anneau B de A, contenant $Z(A)$, et un homomorphisme de B sur $M_m(\Delta)$.

On rappelle que pour démontrer la seconde partie de la proposition, on considère un sous-espace vectoriel V de S, de dimension m. B est alors le sous-anneau de A constitué par les éléments $a \in A$ tels que $aV \subset V$. B est isomorphe à $\mathrm{End}_\Delta(V)$. Il est clair que B contient $Z(A)$ puisque, comme nous l'avons remarqué, $Z(A)$ est isomorphe à un sous-anneau de Δ. Remarquons de plus que si $a \neq 0$, $a \in Z(A)$, l'annulateur à droite de a dans S est nul et que, en conséquence $aV \neq 0$. Donc l'image d'un élément non nul de $Z(M)$ est un élément non nul de $M_m(\Delta)$.

<u>Réciproque du lemme de densité</u> : Tout sous-anneau dense de l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel est un anneau primitif.

<u>Démonstration du théorème 3.1.</u> : A vérifie une identité de polynôme $P = \sum a_\sigma X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(d)}$. Nous allons commencer par montrer que A est un anneau simple, donc de la forme $M_n(\Delta)$. Sinon pour tout entier m, il existe un homomorphisme d'un sous-anneau B de A, contenant $Z(A)$, sur $M_n(\Delta)$. P s'annule identiquement sur B. Nous avons remarqué que tout élément non nul de $Z(A)$ a une image non nulle dans $M_m(\Delta)$. Il est clair alors que $M_m(\Delta)$ vérifie une identité non triviale de degré <u>d</u>, ceci <u>quel que soit m</u>. Or ceci n'est pas possible, en vertu du lemme suivant.

Lemme 3.2. : L'anneau $M_m(\Delta)$, où Δ est un corps, ne peut vérifier aucune identité polynomiale non triviale de degré $< 2m$.

Rappelons que le centre de $M_m(\Delta)$ est de la forme $Z(\Delta).I$, où I est la matrice unité.

Supposons alors que A vérifie une identité multilinéaire et homogène de degré d, $d < 2n$, cas auquel nous pouvons toujours nous ramener. En changeant éventuellement la numérotation des variables, nous pouvons supposer que le polynôme de l'identité s'écrit sous la forme :

$$Q(X_1,\ldots,X_d) = b_1X_1X_2\ldots X_d+\ldots, \quad \text{avec} \quad b_1 \neq 0.$$

Appelons e_{ij} la matrice dont tous les éléments sont nuls, excepté celui de la i^e ligne, j^e colonne qui est égal à 1. Considérons alors les matrices e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, ..., e_{kk+1} si $d = 2k$, e_{k+1k+1} si $d = 2k+1$. Ceci est possible car $d < 2m$. En écrivant que $Q(e_{11},e_{12},\ldots) = 0$, on est amené à écrire que $b_1e_{11}e_{12}\ldots = 0$, tous les autres termes étant nécessairement nuls. Or on voit que $e_{11}e_{12}\ldots \neq 0$ et comme l'on a $b_1 \neq 0$, $b_1 \in Z(\Delta).I$, il est clair que le terme $b_1e_{11}e_{12}\ldots$ ne peut être nul : on arrive ainsi à une contradiction.

Nous allons maintenant montrer que la dimension de A sur son centre est finie. A est identifié à un anneau simple de la forme $M_n(\Delta)$. Considérons alors un sous-corps commutatif maximal K de Δ. On sait que $K \supset Z(\Delta)$. En considérant que Δ est contenu dans A (on identifie Δ à $\Delta.I$) on voit très facilement que l'anneau $\Delta \underset{Z(\Delta)}{\otimes} K$ vérifie la même identité multilinéaire et homogène que A. D'autre part un résultat classique dans la théorie des algèbres simples et centrales nous permet d'affirmer que $\Delta \otimes K$ est un anneau primitif, plus précisément un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_K(\Delta)$. Alors un raisonnement analogue au précédent montre que $\Delta \otimes K$ est un anneau simple, de la forme $M_p(K)$, avec $p = [\Delta:K]$. Il est facile de voir que $A \underset{Z(\Delta)}{\otimes} K$, c'est-à-dire $M_n(\Delta) \otimes K$, est isomorphe à $M_n(\Delta \otimes K)$. Ceci nous permet d'écrire que : $A \otimes K \approx M_{np}(K)$. Si l'on pose $r = np$ on a : $[A \underset{Z(\Delta)}{\otimes} K:K] = [A:Z(\Delta)] = r^2$. $A \otimes K$ vérifiant une identité polynomiale multilinéaire et homogène de degré d, à savoir la même identité que A, nous savons que $2r \leqslant d$. On a donc l'inégalité $r^2 \leqslant [\frac{d}{2}]^2$. La seconde partie du théorème est bien démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Herstein, Non commutative rings, the Carus Math. monographs, Amer. Math. Soc. Publ., 15 (1968).

[2] Kaplansky, Rings with Polynomial Identity, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), pp. 575-580.

[3] Posner, Prime rings satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), pp. 180-184.

-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

Conférences n^{os} 6 et 7 des 17.1273 et 7.1.74

-:-:-:-

CENTRE DES ANNEAUX A IDENTITE POLYNOMIALE III et IV

par A. PAGE

-:-:-:-:-:-

N.B. : La terminologie est celle de l'exposé n° 5 de Monsieur DJABALI.

Soit A un anneau de centre Z ; un polynome $P(X_1,\dots,X_n)$ à coefficients dans Z à indéterminées non commutatives est dit <u>central pour A</u> si :

$$\forall\, x_1,\dots,x_n \in A \ ,\quad P(x_1,\dots,x_n) \in Z$$
$$\exists\, a_1,\dots,a_n \in A \ ,\quad P(a_1,\dots,a_n) \neq 0$$

<u>Exemple</u> : Soit $A = M_2(R)$ où R est un anneau commutatif ; le polynôme $(X_1 X_2 - X_2 X_1)^2$ est central pour A .

Soient K un corps et n un entier, $n \geqslant 1$. On construit un homomorphisme de l'anneau $K[\xi_1,\dots,\xi_{n+1}]$ des polynômes à $n+1$ indéterminées commutatives, dans l'anneau $K[X , Y_1,\dots,Y_n]$ des polynômes à $n+1$ indéterminées non commutatives en posant pour $f(\xi_1,\dots,\xi_{n+1}) = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$:

$$p_f(X , Y_1,\dots,Y_n) = X^{\alpha_1} Y_1 \dots X^{\alpha_n} Y_n X^{\alpha_{n+1}} .$$

Dans tout ce qui suit nous considérerons le polynôme

$$g(\xi_1,\dots,\xi_{n+1}) = \prod_{1<i<n+1} (\xi_1-\xi_i)(\xi_{n+1}-\xi_i) \prod_{1<i<j<n+1} (\xi_i-\xi_j)^2$$

et nous poserons

$$G(X,Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{i=1}^{n} p_g(X,Y_i,\dots,Y_n,Y_1,\dots,Y_{i-1})$$

<u>THEOREME 1.</u> <u>Quel que soit le corps commutatif</u> K , <u>le polynôme</u> $G(X, Y_1,\dots,Y_n)$ <u>est central pour</u> $M_n(K)$.

Remarques préliminaires :

(1) Soient $a_1,\dots,a_{n+1} \in K$ tels que $a_i = a_j$ pour un couple (i,j) avec $i \neq j$, $(i,j) \neq (1,n+1)$. Alors

$$g(a_1,\dots,a_{n+1}) = 0$$

(2) Soient $a_1,\dots,a_n \in K$; on a $g(a_1,\dots,a_n,a_1) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2$, et si $\sigma \in S_n$ on a donc $g(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)},a_{\sigma(1)}) = g(a_1,\dots,a_n)$.

Soit $f(\xi_1,\dots,\xi_n) = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. Evaluons $p_f(x,y_1,\dots,y_n)$ lorsque x est la matrice diagonale $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{ii}$ et lorsque $y_1 = e_{i_1k_1},\dots,y_n = e_{i_nk_n}$

$$p_f(x,y_1,\dots,y_n) = \lambda_{i_1}^{\alpha_1}\dots\lambda_{i_n}^{\alpha_n}\lambda_{k_n}^{\alpha_{n+1}} e_{i_1k_1}\dots e_{i_nk_n} = f(\lambda_{i_1},\dots\lambda_{i_n},\lambda_{k_n})e_{i_1k_1}\dots e_{i_nk_n}$$

et par linéarité cette relation est vraie pour tout $f(\xi_1,\dots,\xi_n) \in K[\xi_1,\dots,\xi_n]$.

On a donc $p_g(x,y_1,\dots,y_n) = g(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n},\lambda_{k_n})\, e_{i_1k_1}\dots e_{i_nk_n}$.

La remarque (1) montre que

$$g(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n}, \lambda_{k_n}) \neq 0 \Rightarrow i_1 = k_n \quad , (i_1,\dots,i_n) \in S_n$$

et l'on a d'autre part $e_{i_1k_1}\dots e_{i_nk_n} \neq 0 \Rightarrow k_1 = i_2,\dots,k_{n-1} = i_n$. D'où

$$p_g(x,y_1,\dots,y_n) \neq 0 \Rightarrow (i_1,\dots,i_n)\in S_n \quad , \quad k_1 = i_2,\dots,k_{n-1}= i_n \ , \ k_n = i_1.$$

De même :

$$p_g(x,y_i,\dots,y_n,y_1,\dots,y_{i-1}) \neq 0 \Rightarrow (i_1,\dots,i_n)\in S_n \ , \ k_1= i_2,\dots,k_{n-1}= i_n,\ k_n = i_1 \ .$$

De sorte que ou bien $G(x,y_1,\dots,y_n) = 0$, ou bien si $(i_1,\dots,i_n)\in S_n$, $k_1 = i_2,\dots,k_{n-1} = i_n$, $k_n = i_1$:

$$G(x,y_1,\dots,y_n) = g(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n},\lambda_{i_1})e_{i_1i_1} + g(\lambda_{i_2},\dots,\lambda_{i_n},\lambda_{i_1},\lambda_{i_n})e_{i_2i_2} +\dots$$
$$\dots+ g(\lambda_{i_n},\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_{n-1}},\lambda_{i_n})e_{i_ni_n} \quad , \text{ soit } G(x,y_1,\dots,y_n) = \lambda\, I_n \text{ (remarque (2)}$$

Comme G est linéaire en $y_1,\dots,y_n$ ceci montre que pour x diagonale, et $y_1,\dots,y_n$ quelconques dans $M_n(K)$, on a

$$G(x,y_1,\dots,y_n) \in Z \text{ où } Z \text{ est le centre de } M_n(K) .$$

Le résultat subsiste manifestement si x est diagonalisable.
En particulier soit K un corps et $\Omega = K(\eta_{ij})$ le corps des fractions rationnelles à n^2 indéterminées commutatives. On sait que la matrice $x = (\eta_{ij})$ est diagonalisable dans $M_n(\Omega)$. On a donc $\forall y$, $y_1, \ldots, y_n \in M_n(\Omega)$

$$y\, G(x, y_1, \ldots, y_n) = G(x, y_1, \ldots, y_n)\, y .$$

Pour $y_1, y_2, \ldots y_n$ fixés $G(x, y_1, \ldots, y_n)$ est un polynôme $Q(\eta_{ij})$. Et l'on a pour $a = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $G(a, y_1, \ldots, y_n) = Q(a_{ij})$. Ceci montre que, pour $a, y_1, \ldots, y_n \in M_n(K)$, $G(a, y_1, \ldots, y_n) \in Z$.

Il reste à montrer que $M_n(K)$ ne vérifie pas l'identité polynomiale $G(X, Y_1, \ldots, Y_n) = 0$. La démonstration précédente prouve que si $x \in M_n(K)$ est une matrice admettant n valeurs propres distinctes dans une extension K' de K, on a $G(x, e_{11}, \ldots, e_{nn}) \neq 0$. Si K est un corps infini, le problème est donc résolu. Si $K = p$, on sait que $F(p^n)$ est une extension de degré n de $F(p)$ dont le polynôme minimal $P(X)$ a ses n racines distinctes. Si x est une matrice dont le polynôme minimal est $P(x)$, on a $G(X, e_{11}, \ldots, e_{nn}) \neq 0$.
Nous allons maintenant étendre le théorème 1 aux algèbres simples et centrales de dimension n^2 sur leur centre.

<u>LEMME 2.</u> <u>Soit</u> A <u>une algèbre de dimension finie</u> m <u>sur un corps commutatif infini</u> K, <u>si</u> A <u>vérifie l'identité polynomiale</u> $p(X_1, \ldots X_s) = 0$ <u>il en est de même pour</u> $A \underset{K}{\otimes} L$ <u>où</u> L <u>est une extension de</u> K.

Considérons $K[\xi_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant s}}$ et posons dans $A \underset{K}{\otimes} K[\xi_{ij}]$

$$X_1 = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes \xi_{i1} \ \ldots \ X_j = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes \xi_{ij} \ \ldots$$ où $(u_1, \ldots, u_m)$ désigne une base de A sur K. On a

$$P(X_1, \ldots, X_s) = \sum_{k=1}^{m} u_k \otimes P_k(\xi_{ij})$$

Pas spécialisation si $x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes a_{ij} \in A \underset{K}{\otimes} L$

$$P(X_1, \ldots, X_s) = \sum_{k=1}^{m} u_k \otimes P_k(a_{ij})$$

Mais si les a_{ij} sont dans K , on a $P(X_1,\dots,X_s) = \Sigma\, u_k\, P_k(a_{ij}) = 0$, d'où $P_k(a_{ij}) = 0$, soit $\Rightarrow P_k = 0$.

COROLLAIRE 3. Le polynôme $G(X,Y_1,\dots,Y_n)$ est central pour toute algèbre simple et centrale A de dimension finie n^2 sur son centre K .

1 - K est fini

$M = M_p(D)$ $D : K < \infty$ D fini $\Rightarrow D$ commutatif $\Rightarrow D = Z(A) \Rightarrow D = K \Rightarrow$
$A = M_n(K)$.

2 - K infini. Soit L un sous corps commutatif maximal de D .

$A = M_p(D)$ $D : L = L : K = k$ $D \underset{K}{\otimes} L = M_k(L)$

$$M_p(D) \underset{K}{\otimes} L = M_p(K) \underset{K}{\otimes} D \underset{K}{\otimes} L = M_p(K) \underset{K}{\otimes} M_k(L) = M_p(K) \underset{K}{\otimes} M_k(K) \underset{K}{\otimes} L$$

$$= M_n(L) \quad \text{avec} \quad pk = n \ .$$

$G(X, Y_1,\dots,Y_n)$ est central pour $M_a(L)$ donc pour A , et si $G(X,Y_1,\dots,Y_n) = 0$ sur A on a $G(X, Y_1,\dots,Y_n) = 0$ sur L d'après le lemme 2 .

THEOREME 4. Soit A un anneau semi-primitif à identité polynomiale homomorphique et soit I un idéal bilatère non nul de A . Alors I contient un élément central $\neq 0$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs de A ne contenant pas I ; $I \neq 0 \Rightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$. L'anneau $B = A/\cap(P, P\in\mathcal{P})$ est produit sous direct des anneaux A/P où $P \in \mathcal{P}$. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $\dim A/P \leqslant [\frac{d}{2}]^2$ où d est le degré de l'identité polynomiale satisfaite par A . Soit $n^2 = \sup(\dim A/P \ ; \ P \in \mathcal{P})$; on a $n^2 = \dim A/Q$, $Q \in \mathcal{P}$. Le polynôme $G(X,Y_1,\dots,Y_n)$ est central pour A/Q , et prend ses valeurs dans le centre de A/P quel que soit $P \in \mathcal{P}$; il prend donc ses valeurs dans le centre de B . Soit s la projection canonique de B sur A/Q , comme $I \not\subset Q$ l'image $\bar{I}$ de I dans B est telle que $s(\bar{I})$ soit un idéal bilatère non nul de l'anneau quasi simple A/Q (théorème de Kaplansky), par suite $s(\bar{I}) = A/Q$. Si donc ξ , $\eta_1 ,\dots,\eta_n \in A/Q$ sont tels que $G(\xi,\eta_1,\dots,\eta_n) \neq 0$,

on peut trouver x , $y_1,\dots,y_n \in I$ tels que $s(\bar{x}) = \xi$, $s(\bar{y}_1) = \eta_1,\dots,s(\bar{y}_n) = \eta_n$.
On a $s[G(\bar{x},\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n] = G(\xi,\eta_1,\dots,\eta_n) \neq 0$ d'où $G(\bar{x},\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n) = \overline{G(x,y_1,\dots,y_n)} \neq 0$.
$b = G(x,y_1,\dots,y_n)$ est un élément $\neq 0$ de I , et pour tout $a \in A$ on a $ab - ba \in \cap(P, P \in \mathcal{P})$. Comme on a d'autre part $ab - ba \in I$ et $\cap(P,P \in \mathcal{P}) \cap I=0$, b est un élément central.

<u>COROLLAIRE 5 . Soit A un anneau semi-premier vérifiant une identité multilinéaire, homogène, homomorphique, et soit I un idéal bilatère non nul de A . Alors I contient un élément central $\neq 0$.</u>

A est produit sous-direct des anneaux $A/_P$ où P est un idéal premier. Pour tout P , $A/_P$ vérifie la condition de chaine ascendante sur les annulateurs à gauche d'éléments et par suite A/P ne contient pas de nilidéal $\neq 0$. Il en est donc de même pour A , et l'anneau de polynômes $A[t]$ est donc semi-primitif. $A[t]$ vérifie la même identité polynomiale que A , et l'on peut donc lui appliquer le théorème 4 : $I[t]$ contient un élément central $p(t) \neq 0$, les coefficients de $p(t)$ sont centraux, non tous nuls, et appartiennent à I .

<u>COROLLAIRE 6. Un anneau A semi-primitif à identité polynomiale dont le centre est un corps, est un anneau simple.</u>

Les identités polynomiales satisfaites par A sont nécessairement homomorphiques et d'après le théorème 4 A est quasi-simple donc simple (théorème de Kaplansky).

<u>THEOREME 7</u> (Posner). <u>Soit A un anneau premier à identité polynomiale de degré d , de centre Z , et soit $\hat{Z}$ le corps des fractions de Z . Alors le localisé $\hat{A}$ de A par rapport aux éléments non nuls de Z est un anneau simple de dimension $\leqslant [\frac{d}{2}]^2$ sur son centre $\hat{Z}$, et c'est l'anneau total de fractions de A .</u>

On vérifie sans peine que $\hat{A}$ est un anneau premier dont le centre est $\hat{Z}$. On peut toujours supposer que A vérifie une identité polynomiale multilinéaire homogène de degré d , une telle identité $q(x_1,\dots,x_d) = 0$ passe à $\hat{A}$ et d'après le corollaire 6 , $\hat{A}$ est un anneau simple, qui d'après le théorème de Kaplansky est de dimension $\leqslant [\frac{d}{2}]^2$ sur $\hat{Z}$.

<u>Remarque</u> : Si A est un anneau semi-premier de Goldie à identité polynomiale, on peut montrer que l'anneau total de fractions de A est le localisé de A par rapport aux non diviseurs de zéro du centre de A .

BIBLIOGRAPHIE

E. Formanek. Central polynomial for Matrix rings. J. Algebra 2 (1972) 129-132.

L. Rowen. Some results on the center of a ring with polynomial identity. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 219-223.

-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-

ANNEAUX SEMI-PREMIERS A IDENTITE POLYNOMIALE

par A. PAGE

-:-:-:-:-

N.B. : La terminologie est celui de l'exposé n° 5 de Monsieur DJABALI

LEMME 1. *Soit A un anneau semi-premier, il y a équivalence entre les assertions suivantes.*

(i) A *vérifie une I.P. standard*

(ii) A *vérifie une I.P. homomorphique*

(iii) A *vérifie une I.P. fidèle*

(i) => (ii) => (iii) évident.

(iii) => (i) Soit Ω l'idéal engendrée par les coefficients d'une identité fidèle de degré d satisfaite par A .

Posons $I_1 = \bigcap \ (P \ ; \ P \text{ premier}, \ P \not\supset \Omega)$

$I_2 = \bigcap \ (P \ ; \ P \text{ premier}, \ P \supset \Omega)$

On a $I_1 \cap I_2 = 0$, d'où $I_1 . I_2 = 0$, soit $I_1 . \Omega = 0$. On en déduit $I_1 = 0$ et par suite, A est produit sous direct des $\left(A/_P\right)_{P \not\supset \Omega}$

Pour tout idéal premier P , $P \not\supset \Omega$, $A/_P$ est un anneau premier vérifiant une identité polynomiale de degré d . Son anneau de fractions est donc un anneau vérifiant l'identité standard de degré d (Th. de Kaplansky, de Posner) d'où le résultat.

Dans la suite on entendra par anneau semi-premier à I.P. un anneau semi-premier vérifiant une identité standard.

PROPOSITION 2. *Soit A un anneau semi-premier à I.P. ; alors les idéaux singuliers à droite et à gauche de A sont nuls.*

Soit par exemple I l'idéal singulier à gauche de A. Si $I \neq 0$, I contient un élément central $a \neq 0$. On a $(Aa \cap \ell(a))^2 = 0$ d'où $Aa \cap \ell(a) = 0$, ce qui est absurde.

<u>THEOREME 3. Soit A un anneau semi-premier à I.P. tout idéal à gauche (resp. à droite) essentiel est extension essentielle d'une somme directe $\bigoplus_{i \in I} Aa_i$ où les a_i sont centraux.</u>

Soit J un idéal à gauche essentiel.

<u>LEMME.</u> J <u>contient un élément central</u> $\neq 0$.

Considérons le sous-anneau B de A engendré par J et 1. B vérifie la même identité standard que A et J est un idéal bilatère de B. Montrons que B est semi-premier : Soit I un idéal de B tel que $I^2 = 0$. On a $JI \subset I$ d'où $(JI)^2 = 0$, et comme JI est un idéal à gauche de A ceci entraîne $JI = 0$, soit d'après la proposition 2 $I = 0$. Ceci montre (théorème de Rowen) que J contient un élément $a \neq 0$ central dans B. Montrons que a est central dans A :

Soit $x \in A$, $j \in J$. $(xa - ax)j = xja - xja$ car a commute à j et xj. On a donc $(xa - ax)J = 0$ d'où $J(xa - ax) = 0$ Soit $xa = ax$.

Si maintenant on considère une somme directe maximale $\bigoplus_{i \in I} Aa_i$ d'idéaux engendrés par des éléments centraux a_i, incluse dans J elle est essentielle dans J : Soit $S = \bigoplus_{i \in I} Aa_i$ et soit $\bar{S}$ l'extension essentielle maximale de S (on a $\bar{S} = \ell(\ell(S)))$. Si l'on suppose $\bar{S} \neq A$, l'idéal $J \cap \ell(S)/_{\bar{S}}$ est essentiel dans $A/_{\bar{S}}$, et le lemme précédent montre qu'il existe $a \in J \cap \ell(S)$, $a \notin \bar{S}$, tel que $\forall x \in A$ $ax - xa \in \bar{S}$.

$ax - xa \in \bar{S} \cap \ell(S) \Rightarrow ax - xa = 0$. a est donc un élément central non nul de J et comme la somme $\left(\bigoplus_{i \in I} Aa_i\right) + Aa$ est directe, on aboutit à une contradiction.

<u>LEMME 4. Soit A un anneau semi-premier à</u> I.P., $\hat{A}$ <u>l'enveloppe injective de</u> A_s. <u>On a</u> $A_d < \hat{A}$.

Soit $x \in \hat{A}$, d'après le théorème 3, il existe a central dans A tel que $ax = xa$ soit un élément non nul de A.

PROPOSITION 5. Un anneau régulier auto-injectif à gauche à I P B ; B est auto-injectif à droite.

Soit $\hat{B}$ l'enveloppe injective de B_d. On a (lemme 4) $B_s < \hat{B}$ d'où $B_s = \hat{B}$.

COROLLAIRE 6. Soit A un anneau semi-premier à I P , A a même enveloppe injective à gauche et à droite.

Soit $\hat{A}$ l'enveloppe injective de A_s, $\hat{A}$ est auto-injectif à droite (Prop. 5) et l'on a $A_d < \hat{A}$ (lemme 4), d'où le résultat.

PROPOSITION 7. Soit A un anneau semi-premier à I P , l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A vérifie les mêmes identités polynomiales homogènes que A.

Soit $q(x_1,\ldots,x_s) = 0$ une identité polynomiale homogène de degré d satisfaite par A. Considérons $y_1,\ldots,y_s \in \hat{A}$ et un idéal à gauche essentiel J de A tel que $\forall i = 1,\ldots,s$ Jy_i soit un idéal $\neq 0$ de A. Si a est un élément central non nul de J on a :

$$q(ay_1,\ldots,ay_s) = 0 = a^d\, q(y_1,\ldots,y_s) .$$

d'où $[\hat{A}a.q(y_1,\ldots,y_s)]^d = 0$, soit $a.q(y_1,\ldots,y_s) = 0$. On déduit du théorème 3, que $J.q(y_1,\ldots,y_s) = 0$ et comme $\hat{A}$ est a $\hat{A}$-sous-module singulier nul $q(y_1,\ldots,y_s) = 0$.

PROPOSITION 8. Soit A un anneau semi-premier à I P d'enveloppe injective $\hat{A}$. Le centre C de $\hat{A}$ est l'enveloppe injective du centre Z de A.

Il suffit de montrer que Z est essentiel dans C. Soit $x \in C$, $x \neq 0$, il existe $a \in Z$, $ax \neq 0$ $ax \in A$. On a évidemment $ax \in Z$, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE - W.S. Martindale - On semi-prime P.I. rings. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître